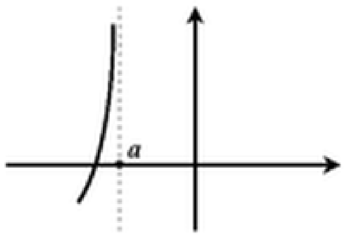
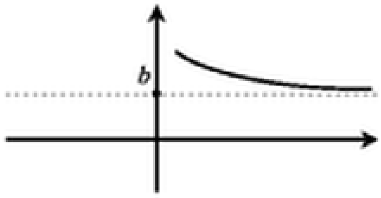
إعداد: عبد المطلب

دراسة الفروع اللانهائية

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ (المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي $(O ، \vec{j})$ معادلته $x=a$)



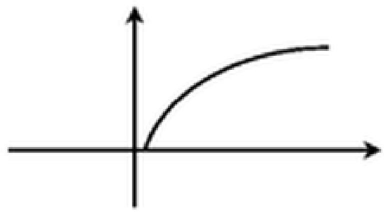
$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ (المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي $(O ، \vec{i})$ معادلته $y=b$)



$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (يُحتمل أن يقبل المنحني $(\mathscr{C})$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=ax+b$ ، لذلك نحسب $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$)

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

فرع قطع مكافئ باتجاه $(o ، \vec{i})$

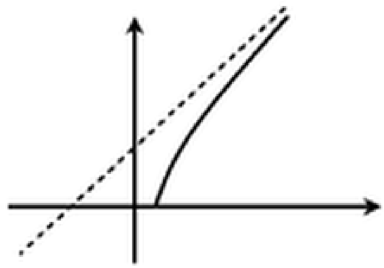


$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

نحسب $\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$

$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$

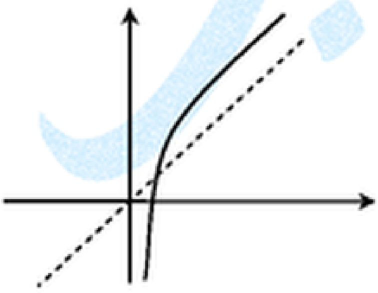
مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$



$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0$ مستقيم مقارب مائل $y=ax+b$

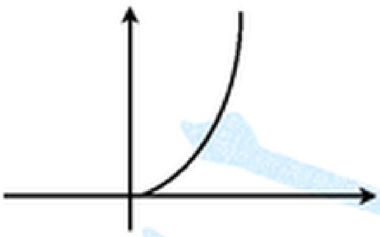
$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\infty$

فرع قطع مكافئ باتجاه $y=ax$



$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$

فرع قطع مكافئ باتجاه $(o ، \vec{j})$



الدالة الأسية

تعريف:

الدالة الوحيدة f حيث $f'=f$ و $f(0)=1$ هي: $\boxed{f(x)=e^x}$ حيث $e\approx 2,718$

خواص: x و y عددان حقيقان و n عدد صحيح:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} e^{x+y}=e^x.e^y & e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y} & e^{nx}=\left(e^x\right)^n \\ e^0=1 & e^{-1}=\dfrac{1}{e} & e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}>0 \end{array}}$$

$\boxed{e^x=a \text{ يكافئ } x=\ln a \ (a>0) \text{ و } e^{\ln a}=a}$ (ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبري)

مثال: $e^{-\ln 2}=\dfrac{1}{e^{\ln 2}}=\dfrac{1}{2}$ و $e^{3\ln 2}=\left(e^{\ln 2}\right)^3=8$

المشتق:

$\boxed{\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x).e^{u(x)}}$ مثال: $\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}$

النهايات:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty & \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+ & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \text{ و } & \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^- & \text{(التزايد المقارن)} \end{array}}$$

كذلك: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x=0$ $(\alpha>0)$

الدالة اللوغاريتمية

تعريف: الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة $\dfrac{1}{x}$ حيث $f(1)=0$

هي: $\boxed{f(x)=\ln x}$ $\boxed{\ln x=y \text{ يكافئ } x=e^y \ (x>0) \text{ و } y \text{ عدد حقيقي}}$

إشارة $\ln x$: • $\ln x>0$ إذا كان $x>1$ • $\ln x<0$ إذا كان $0<x<1$

• $\ln x=0$ إذا كان $x=1$ $(\ln 1=0)$ $\ln x=1$ إذا كان $x=e$ $(\ln e=1)$

خواص: a و b عددان حقيقان موجبان تماما، n عدد ناطق: $\boxed{\ln a=\ln b \text{ يكافئ } a=b}$

$$\boxed{\ln(a\times b)=\ln a+\ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b \qquad \ln a^n=n\ln a}$$

نتائج: $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$

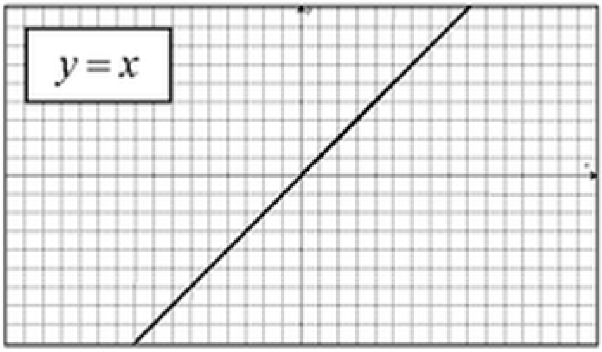
المشتق: $\boxed{\left[\ln u(x)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}}$ حيث u موجبة تماما وقابلة للاشتقاق

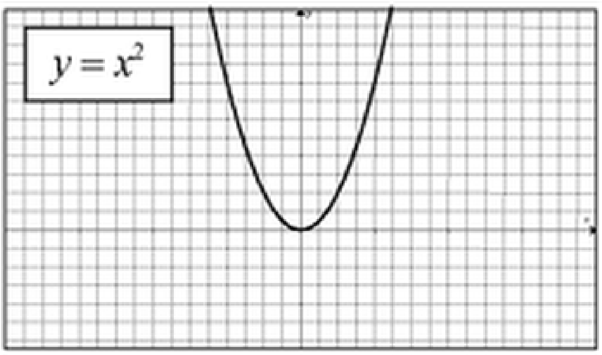
النهايات:

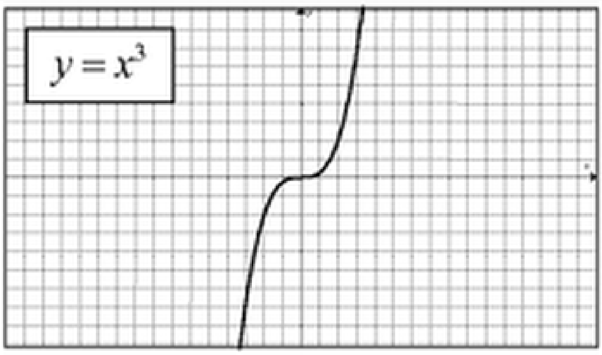
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty & \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \text{ و } & \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0 & \text{(التزايد المقارن)} \end{array}}$$

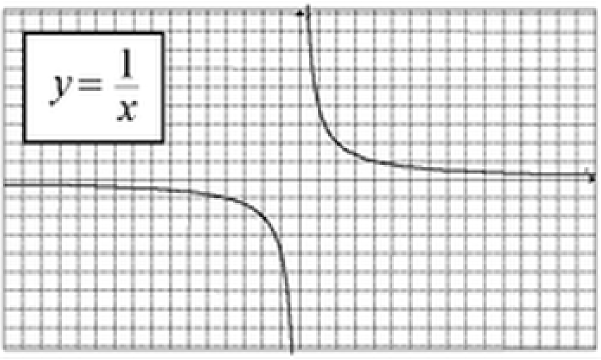
كذلك: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha\ln x=0$ $(\alpha>0)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

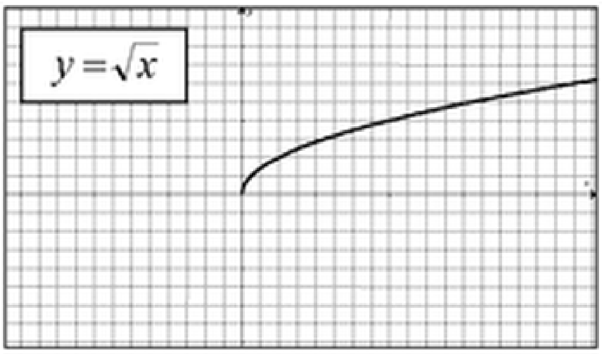
الدوال المرجعية

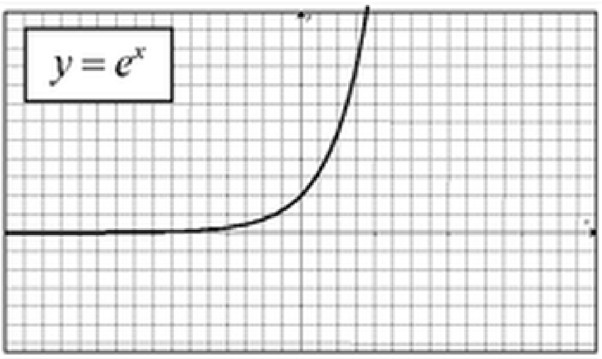


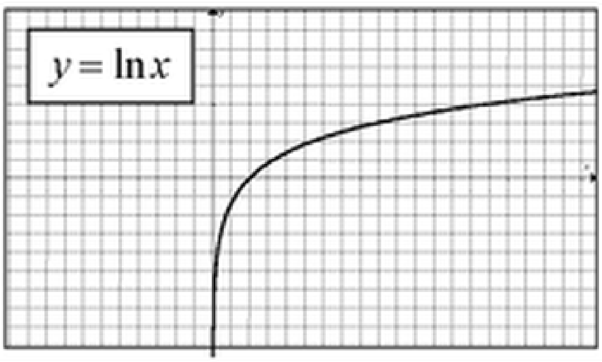


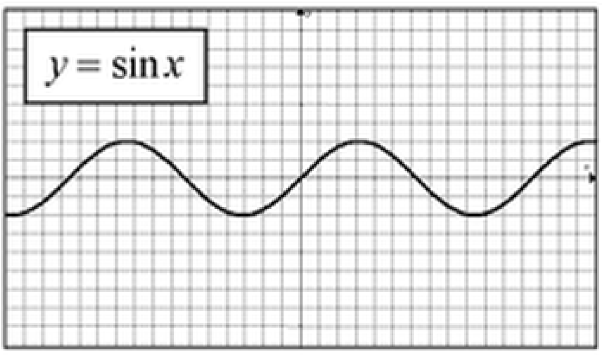


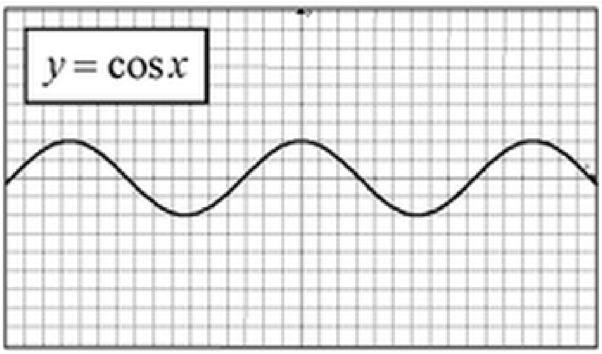


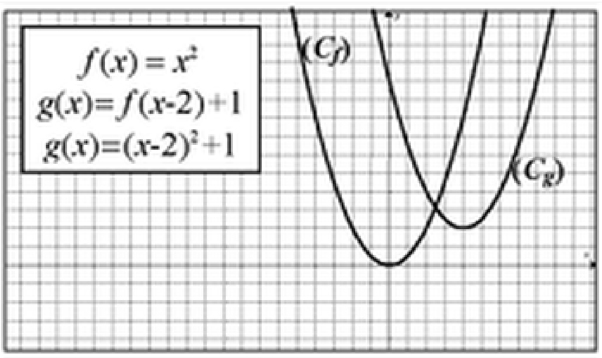












الجداء السلّمي

تذكير:

في معلم متعامد ومتجانس من الفضاء، لتكن: $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$

مركبة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}$

طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

منتصف القطعة $[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

حجم رباعي الوجوه: $\boxed{\mathcal{V}=\frac{1}{3}S.H}$ حيث S مساحة القاعدة و H الارتفاع

الجداء السلمي:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث: $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=u.v.\cos(\vec{u},\vec{v})} \qquad \boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'}$$

التعامد: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان: $\vec{u}.\vec{v}=0$

الارتباط الخطي: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا كان: $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ (λ عدد حقيقي)

• $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ مستويان، $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب:

$\mathcal{P}$ يوازي $\mathcal{P}'$ إذا كان: $\vec{n}=\lambda\vec{n}'$ (λ عدد حقيقي)

$\mathcal{P}$ يعامد $\mathcal{P}'$ إذا كان: $\vec{n}.\vec{n}'=0$

المستقيم AB عمودي على $\mathcal{P}$ إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{n}$

• بعد نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ عن مستوٍ $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$ هو:

$$\boxed{d=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

مجموعة النقط في الفضاء

$$(E_1)\quad \boxed{MA=r}$$

مجموعة النقط (E_1) هي: سطح كرة مركزها A ونصف قطرها r

معادلتها: $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$

$$(E_2)\quad \boxed{MA=MB}$$

مجموعة النقط (E_2) هي: المستوي محور القطعة $[AB]$

$$(E_3)\quad \boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$$

مجموعة النقط (E_3) هي: المستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{BC}$ ويشمل النقطة A

$$(E_4)\quad \boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0}$$

مجموعة النقط (E_4) هي: سطح كرة قطرها $[AB]$

المرجح:

لتكن G مرجح الجملة: $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

لما $\alpha=\beta=\gamma$ النقطة G تمثل مركز ثقل المثلث ABC.

الأعداد المركبة [ℂ]

الشكل الجبري:

$\boxed{z=x+iy}$ حيث $\boxed{i^2=-1}$ x و y عددين حقيقيين

$\text{Re}(z)=x$: الجزء الحقيقي و $\text{Im}(z)=y$: الجزء التخيلي

$z=0$: $x=0$ و $y=0$ $z=z'$: $x=x'$ و $y=y'$ حيث $z'=x'+iy'$

مرافق عدد مركب:

$\boxed{\bar{z}=x-iy}$ $z+\bar{z}=2x$ و $z.\bar{z}=x^2+y^2$

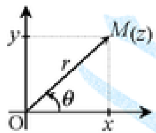
z حقيقي: $\bar{z}=z$ z تخيلي صرف: $\bar{z}=-z$

طويلة عدد مركب:

$$\boxed{|z|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

$|\bar{z}|=|z|$ ، $|z|^2=z\times\bar{z}$ ، $|z.z'|=|z|\times|z'|$ ، $|z^n|=|z|^n$ ، $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$

الشكل المثلثي:



طويلة z: $|z|=r$ $\boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

عمدة z: $\arg(z)=\theta+2k\pi$ $z\neq 0$ و k عدد صحيح

$\arg(\bar{z})=-\arg(z)$ $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$ $\arg(z^n)=n\arg(z)$ n عدد صحيح

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ قانون موافر

الشكل الأسي:

$\boxed{z=re^{i\theta}}$ ، $\bar{z}=re^{-i\theta}$ ، $e^{i\pi}=-1$

$\boxed{z.z'=r.r'\times e^{i(\theta+\theta')} \text{ ، } \frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\times e^{i(\theta-\theta')} \text{ ، } (re^{i\theta})^n=r^n e^{in\theta}}$

التفسير الهندسي للأعداد المركبة

• لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ • طول $\overrightarrow{AB}$ هو $AB=|z_B-z_A|$

• لاحقة النقطة I منتصف [AB] هي $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

لاحقة G مرجح الجملة: $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\boxed{z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$

$\boxed{\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}$ و $\boxed{\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}}$

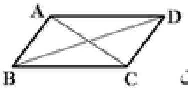
إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ عددا حقيقيا فإن النقاط A ، B و C على استقامة واحدة.

إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ عددا تخيليا صرفا فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

متوازي الأضلاع:

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

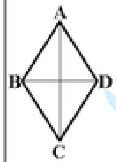
أو القطران متناصفان



المعين:

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و $AD=DC$

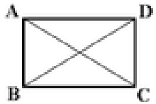
أو القطران متناصفان ومتعامدان



المستطيل:

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$

أو القطران متناصفان ومتساويان

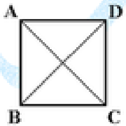


المربع:

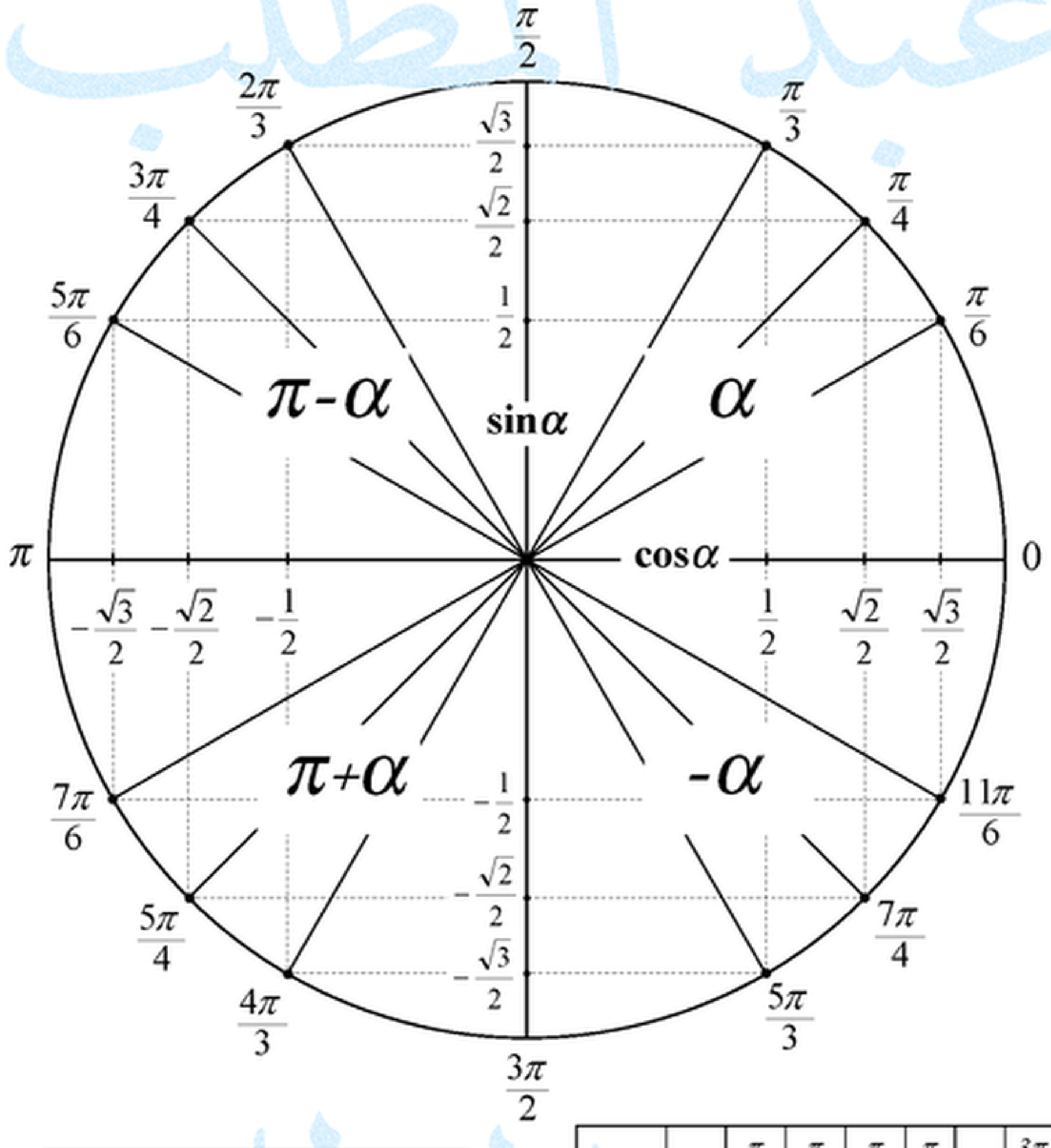
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و $AD=DC$

و $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{2}$

أو القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان



Cercle Trigonométrique



$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$
$$=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

Fonctions Trigonométriques et hyperboliques

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\text{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

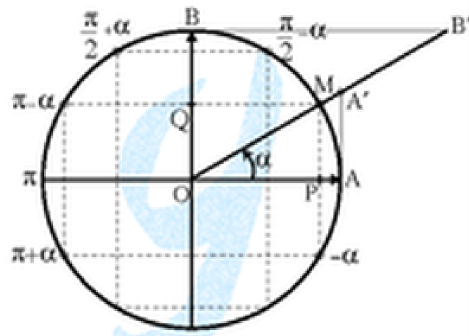
$\cos\alpha = \overline{OP}$ $\quad -1 \le \cos\alpha \le 1$

$\sin\alpha = \overline{OQ}$ $\quad -1 \le \sin\alpha \le 1$

$$\text{tg}\alpha = \overline{AA'} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\text{cotg}\alpha}$$

$$\text{cotg}\alpha = \overline{BB'} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\ ;\ \text{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \text{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$

$\text{tg}(\alpha + k\pi) = \text{tg}\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$

• k nombre relatif •

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$

$\text{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\text{tg}\alpha}$

$\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$

$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$

$\sin\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + 2k\pi$

• k nombre relatif •

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$$

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$$

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos2\alpha$

$4\cos^3\alpha = \cos3\alpha + 3\cos\alpha$

$4\sin^3\alpha = -\sin3\alpha + 3\sin\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}$$

$$\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}$$

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \vee \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \vee \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

$\text{tg}\alpha = \text{tg}\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi$

• k nombre relatif •

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$e = 2{,}718281828...$

i nbre imag: $i^2 = -1$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$$\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta} = \frac{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}{\text{cotg}\alpha - \text{cotg}\beta}$$

$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\theta)$

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\ \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\alpha-\theta)$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\text{ch}\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\ ;\ \text{sh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\text{th}\alpha = \frac{\text{sh}\alpha}{\text{ch}\alpha} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$$

$$\text{cth}\alpha = \frac{\text{ch}\alpha}{\text{sh}\alpha} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$$

$\text{ch}\alpha + \text{sh}\alpha = e^{\alpha}$; $\text{ch}\alpha - \text{sh}\alpha = e^{-\alpha}$

$\text{ch}^2\alpha - \text{sh}^2\alpha = 1$; $\text{th}\alpha\ \text{cth}\alpha = 1$

$\text{sh}(-\alpha) = -\text{sh}\alpha$; $\text{ch}(-\alpha) = \text{ch}\alpha$

$\text{th}(-\alpha) = -\text{th}\alpha$; $\text{cth}(-\alpha) = -\text{cth}\alpha$

$\text{sh}(\alpha\pm\beta) = \text{sh}\alpha\,\text{ch}\beta \pm \text{ch}\alpha\,\text{sh}\beta$

$\text{ch}(\alpha\pm\beta) = \text{ch}\alpha\,\text{ch}\beta \pm \text{sh}\alpha\,\text{sh}\beta$

$$\text{th}(\alpha\pm\beta) = \frac{\text{th}\alpha \pm \text{th}\beta}{1 \pm \text{th}\alpha\,\text{th}\beta}$$

$$\text{sh}2\alpha = 2\text{sh}\alpha\,\text{ch}\alpha = \frac{2\,\text{th}\alpha}{1 - \text{th}^2\alpha}$$

$\text{ch}2\alpha = \text{ch}^2\alpha + \text{sh}^2\alpha = 2\text{sh}^2\alpha + 1$

$$= 2\text{ch}^2\alpha - 1 = \frac{1 + \text{th}^2\alpha}{1 - \text{th}^2\alpha}$$

$$\text{th}2\alpha = \frac{2\,\text{th}\alpha}{1 + \text{th}^2\alpha}\ ;\ \text{cth}2\alpha = \frac{1 + \text{cth}^2\alpha}{2\text{cth}\alpha}$$

$$\text{sh}\alpha \pm \text{sh}\beta = 2\,\text{sh}\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

$$\text{ch}\alpha + \text{ch}\beta = 2\,\text{ch}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\text{ch}\alpha - \text{ch}\beta = 2\,\text{sh}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\text{th}\alpha \pm \text{th}\beta = \frac{\text{sh}(\alpha\pm\beta)}{\text{ch}\alpha\,\text{ch}\beta}$$

$(\text{ch}\alpha \pm \text{sh}\alpha)^n = \text{ch}n\alpha \pm \text{sh}n\alpha$

التحويلات النقطية

f تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.

M' هي صورة (محوّلة) النقطة M: $M'=f(M)$

العبارة المركبة للتحويل: $\boxed{z'=az+b}$

1) $a=1$ $\boxed{z'=z+b}$

f **انسحاب** شعاعه $\vec{U}$ حيث العدد المركب b هو لاحقة $\vec{U}$. مثال: $z'=z+2-i$

2) $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ $\boxed{z'-\omega=a(z-\omega)}$ $\boxed{\overrightarrow{\Omega M'}=a\overrightarrow{\Omega M}}$

f **تحاكي** نسبته a ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$.

مثال: $z'=2z-3+4i$

3) $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|=1$ و $\theta\neq k\pi$ $\boxed{z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)}$

f **دوران** زاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$.

مثال: $z'=iz+4$ $\Omega M'=\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta$

إذا كان $z'=e^{i\theta}z$ فإن f دوران مركزه O وزاويته θ.

4) $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|\neq1$ و $\theta\neq k\pi$

f **تشابه مباشر** نسبته $|a|$ وزاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$. مثال: $z'=(1+i)z-2+5i$

- التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات ويحافظ كذلك على الزوايا الموجهة.
- الانسحاب والتحاكي والدوران عبارة عن تشابهات مباشرة.
- الانسحاب والدوران عبارة عن تقايس: $M_1M_2=M'_1M'_2$

التحويلات النقطية

f تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.

M' هي صورة (محوّلة) النقطة M: $M'=f(M)$

العبارة المركبة للتحويل: $\boxed{z'=az+b}$

1) $a=1$ $\boxed{z'=z+b}$

f **انسحاب** شعاعه $\vec{U}$ حيث العدد المركب b هو لاحقة $\vec{U}$. مثال: $z'=z+2-i$

2) $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ $\boxed{z'-\omega=a(z-\omega)}$ $\boxed{\overrightarrow{\Omega M'}=a\overrightarrow{\Omega M}}$

f **تحاكي** نسبته a ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$.

مثال: $z'=2z-3+4i$

3) $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|=1$ و $\theta\neq k\pi$ $\boxed{z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)}$

f **دوران** زاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$.

مثال: $z'=iz+4$ $\Omega M'=\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta$

إذا كان $z'=e^{i\theta}z$ فإن f دوران مركزه O وزاويته θ.

4) $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|\neq1$ و $\theta\neq k\pi$

f **تشابه مباشر** نسبته $|a|$ وزاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$. مثال: $z'=(1+i)z-2+5i$

- التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات ويحافظ كذلك على الزوايا الموجهة.
- الانسحاب والتحاكي والدوران عبارة عن تشابهات مباشرة.
- الانسحاب والدوران عبارة عن تقايس: $M_1M_2=M'_1M'_2$

المتتاليات (الحسابية والهندسية)

المتتالية الحسابية

$$\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$$

r هو الأساس ($r\in\mathbb{R}$)

الحد العام:

$$\boxed{u_n=u_p+(n-p)r}$$

n و p عددان طبيعيان

$$u_n=u_0+nr$$

$$u_n=u_1+(n-1)r$$

الوسط الحسابي:

$$\boxed{a+c=2b}$$

a، b و c حدود متتابعة

المجاميع:

$$S_n=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n$$

$$\boxed{S_n=\frac{n-p+1}{2}(u_p+u_n)}$$

$$u_0+u_1+\ldots+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$$

$$u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$$

$$\boxed{1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

المتتالية الهندسية

$$\boxed{v_{n+1}=q.v_n}$$

q هو الأساس ($q\in\mathbb{R}^*$)

الحد العام:

$$\boxed{v_n=v_p\,.\,q^{n-p}}$$

$$v_n=v_0\,.\,q^n \qquad v_n=v_1\,.\,q^{n-1}$$

الوسط الهندسي:

$$\boxed{a\times c=b^2}$$

a، b و c حدود متتابعة.

المجاميع:

$$S_n=v_p+v_{p+1}+\ldots+v_n$$

$$\boxed{S_n=v_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)} \qquad q\neq 1$$

$$v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$\boxed{1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

المتتاليات (التغيرات والتقارب)

تغيرات متتالية

- لدراسة تغيرات متتالية، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$
  - $u_{n+1}-u_n>0$: المتتالية (u_n) متزايدة تماما
  - $u_{n+1}-u_n<0$: المتتالية (u_n) متناقصة تماما
  - $u_{n+1}-u_n=0$: المتتالية (u_n) ثابتة.
- إذا كانت $u_n>0$: نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.
- إذا كانت $u_n=f(n)$: ندرس تغيرات f على $[0\,;+\infty[$.

وهناك طرق أخرى لدراسة تغيرات متتالية.

تقارب متتالية

المتتالية (u_n) متقاربة إذا كانت: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

- إذا كانت (u_n) <u>محدودة من الأعلى</u> $(u_n<\mathrm{M})$ و<u>متزايدة</u> فإنها متقاربة.
- إذا كانت (u_n) <u>محدودة من الأسفل</u> $(u_n>\mathrm{m})$ و<u>متناقصة</u> فإنها متقاربة.

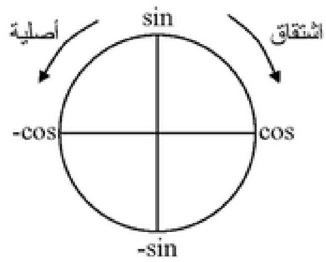
متتاليتان متجاورتان

- إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

المتتاليتان المتجاورتان تقبلان النهاية نفسها.

الدوال الأصلية

$f(x)$	$F(x)$
a (حقيقي)	$ax+C$
$x^n \quad (n\neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$u'.u^n \quad (n\neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$
$\sin(ax+b) \quad (a\neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\cos(ax+b) \quad (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\frac{u'}{u} \quad (u\neq 0)$	$\ln\lvert u\rvert+C$
$u'.e^u$	e^u+C



الحساب التكاملي

f دالة مستمرة على $I=[a;b]$ و F دالة أصلية للدالة f على I. التكامل من a إلى b لـ f يرمز بـ: $\boxed{\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)}$

♦ علاقة شال

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^b f(x)dx+\int_a^c f(x)dx$$

$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ و $\int_a^a f(x)dx=0$

• f فردية: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ • f زوجية: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

♦ الخطية

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

♦ الإيجابية

إذا كانت $f(x)\geq 0$ و $(a\leq b)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

♦ المقارنة

إذا كانت $f(x)\leq g(x)$ و $(a\leq b)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

♦ القيمة المتوسطة

القيمة المتوسطة لـ f على $I=[a;b]$ هي: $\boxed{\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

♦ الحصر

إذا كانت $m\leq f(x)\leq M$ و $(a\leq b)$ فإن $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

♦ التكامل بالتجزئة

$$\boxed{\int_a^b f(x).g'(x)dx=[f(x).g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x).g(x)dx}$$

التحليل التوفيقي

الترتيبات

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

n عدد طبيعي حيث $(n \geq p \geq 0)$

$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

$A_n^p = n(n-1)\times \ldots \times (n-p+1)$

التوفيقات

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

كذلك: $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

التبديلة

$$\boxed{A_n^n = n!}$$

القائمة

$$\boxed{n^p}$$

خواص

$C_n^1 = n$ $\quad$ $C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_{n+1}^n = n+1$ $\quad$ $0! = 1! = 1$

السحب

لدينا n قريصة، نسحب p قريصة:

- في آن واحد نستعمل: C_n^p
- على التوالي بدون إرجاع: A_n^p
- على التوالي بالإرجاع: n^p

الجمعيات

- ذكر وظيفة الأشخاص: A_n^p
- لا نذكر وظيفة الأشخاص: C_n^p

دستور ثنائي الحد

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p}$$

$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^n y^n$$

مثال

$$(x+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} 1^p$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1$$

التحليل التوفيقي

الترتيبات

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

n عدد طبيعي حيث $(n \geq p \geq 0)$

$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

$A_n^p = n(n-1)\times \ldots \times (n-p+1)$

التوفيقات

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

كذلك: $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

التبديلة

$$\boxed{A_n^n = n!}$$

القائمة

$$\boxed{n^p}$$

خواص

$C_n^1 = n$ $\quad$ $C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_{n+1}^n = n+1$ $\quad$ $0! = 1! = 1$

السحب

لدينا n قريصة، نسحب p قريصة:

- في آن واحد نستعمل: C_n^p
- على التوالي بدون إرجاع: A_n^p
- على التوالي بالإرجاع: n^p

الجمعيات

- ذكر وظيفة الأشخاص: A_n^p
- لا نذكر وظيفة الأشخاص: C_n^p

دستور ثنائي الحد

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p}$$

$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^n y^n$$

مثال

$$(x+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} 1^p$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1$$