أفريل 2015

ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إني استوعبت هذا الدرس

1 – يجب أن أعرف أن ليس كل حركة ذهاب وإياب هي حركة اهتزازية ، بل يجب أن تحدث حول وضع توازن .

2 – يجب أن أعرف كيفية إيجاد المعادلة التفاضلية لحركة نواس مروني بالطريقتين الحركية والطاقوية .

3 – يجب أن أعرف كيفية إيجاد المعادلة التفاضلية لحركة نواس بسيط بالطريقة الطاقوية .

4 – يجب أن أعرف معاني المفردات التالية :

- اهتزازات حرّة
- اهتزازات حرّة متخامدة
- اهتزازات حرّة غير متخامدة
- اهتزازات مغذاة

5 – يجب أن أحسن استعمال البيانات في هذا الدرس .

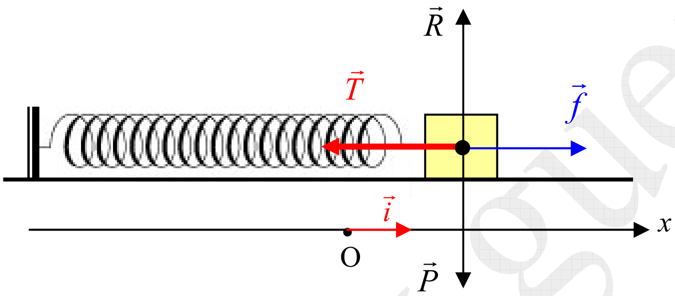
ملخص الدرس

1 - النواس المروني الأفقي

المعادلة التفاضلية : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$

حيث : h : معامل الاحتكاك المائع ، k : ثابت مرونة النابض

بإهمال الاحتكاك يكون : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$



$$x = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -X\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$$

الدور الذاتي : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

التواتر الذاتي : $N_0 = \frac{1}{T_0}$ ،

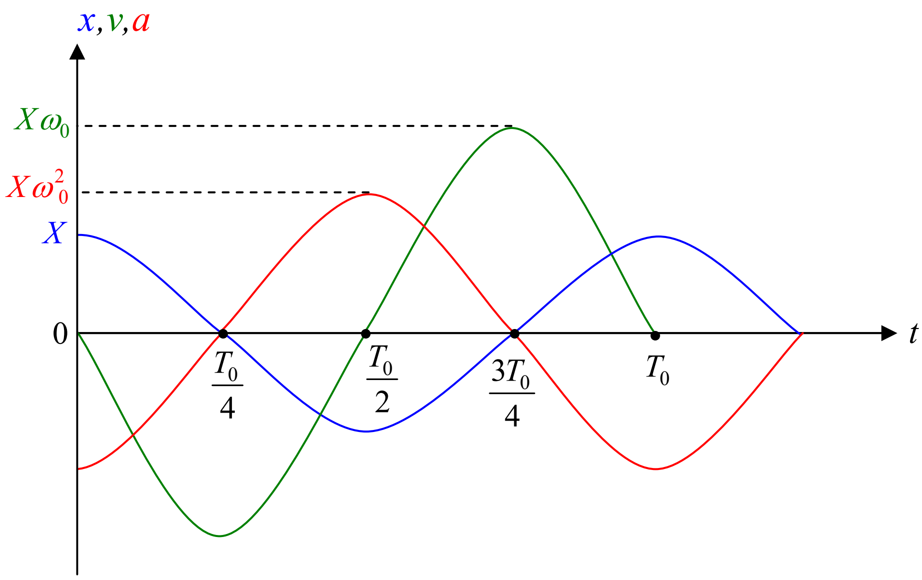
النبض الذاتي : $\omega_0 = 2\pi N_0$

صفحة الحركة : $\omega_0 t + \varphi$

الصفحة الابتدائية φ

تمثيل المطال والسرعة والتسارع :

نأخذ من أجل التبسيط $\varphi = 0$



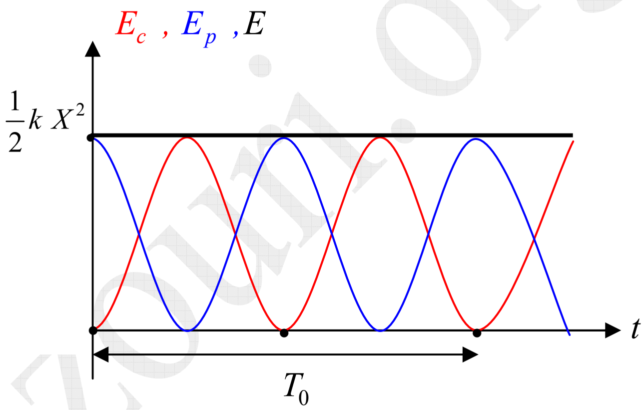
الطاقة الكلية للجملة (جسم – نابض)

نأخذ $\varphi = 0$

$$E_c = \frac{1}{2} m X^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k X^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} k X^2$$



2 - النواس المروني الشــاقولي

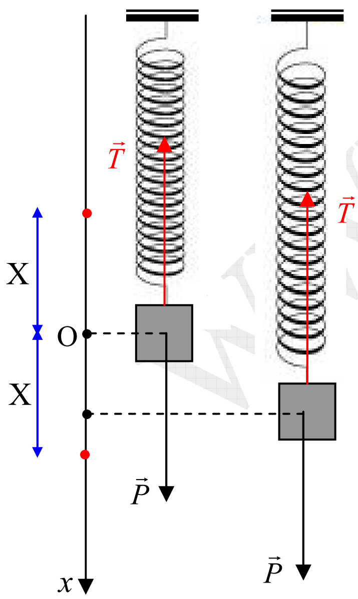
في وضع التوازن :

الشكل – 1 : $P = T = k\,\Delta l$ ، حيث Δl استطالة النابض عند التوازن .

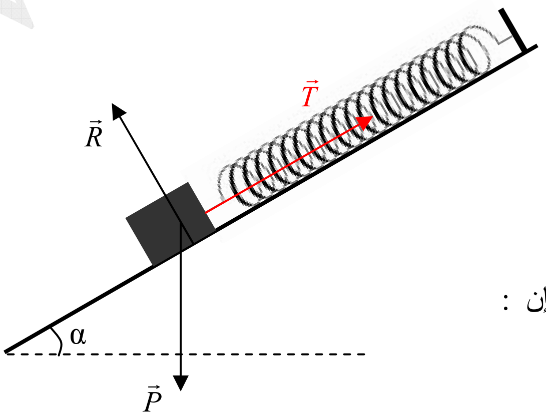
الشكل – 2 : $P \sin\alpha = T = k\,\Delta l$

المعادلة التفاضلية في كل شكل هي :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$



الشكل - 1



الشكل - 2

سواء كان النابض أفقيا أو شاقوليا أو مائلا فإن :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3 - النواس البسيط

تأثير الهواء مهمل .

المعادلة التفاضلية : $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$

من أجل السعات الصغيرة : $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$

النبض الذاتي : $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$

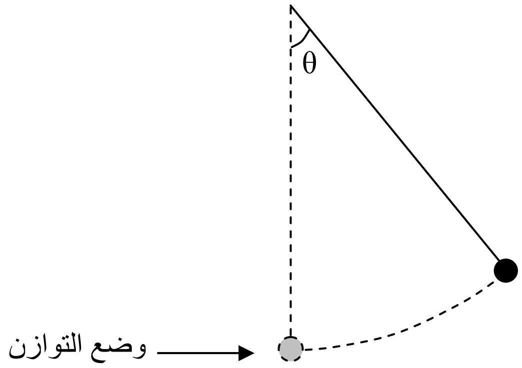
الدور الذاتي : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

المطال الزاوي θ

المطال الزاوي الأعظمي θ_0

صفحة الحركة $(\omega_0 t+\varphi)$

الصفحة الابتدائية φ

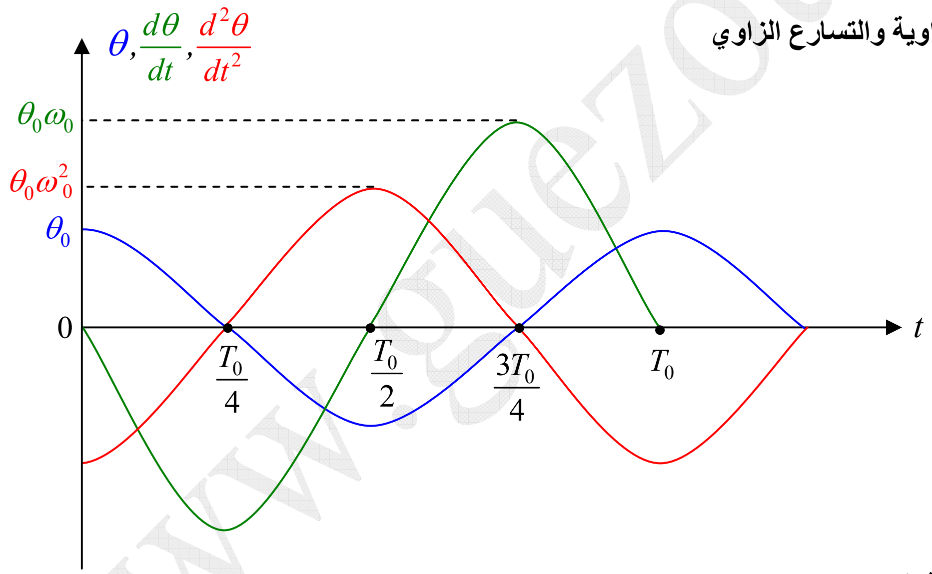


$$\theta=\theta_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

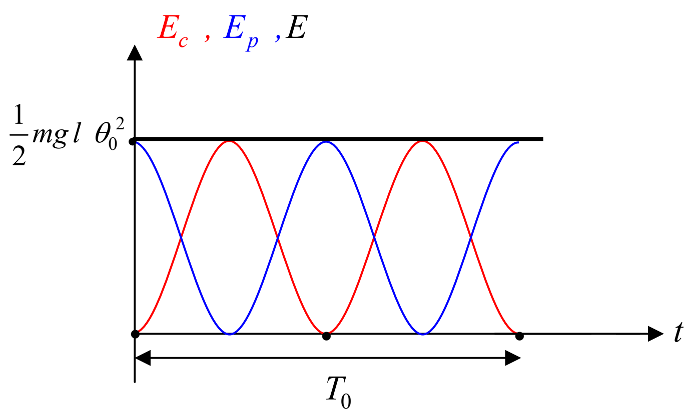
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi)=-\omega_0^2\theta$$

تمثيل المطال الزاوي والسرعة الزاوية والتسارع الزاوي



الطاقة الكلية للجملة (نواس – أرض)

نأخذ $\varphi=0$



1 - الحركة الاهتزازية الميكانيكية

صورة من موقع www.fotosearch.fr

هي كل حركة ذهاب وإياب لجملة حول وضع توازن هذه الجملة .

حركة الطفلة صعودا ونزولا ليست اهتزازية ، لأنها لا تملك وضع توازن .

المعادلة الزمنية لحركة هزّاز من الشكل :

$$x = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

AB : طول المسار

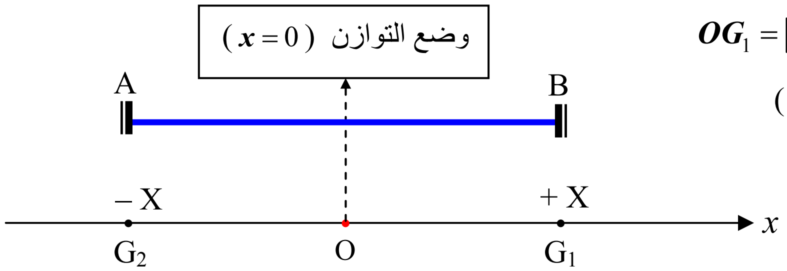
x : المطال

X : المطال الأعظمي (السّعة) دائما موجب ، $OG_1 = |OG_2| = X$

ω_0 : النبض الذاتي (سميناه ذاتيّا لأنه لم يتحكم فيه هزاز آخر)

$\omega_0 t + \varphi$: صفحة الحركة

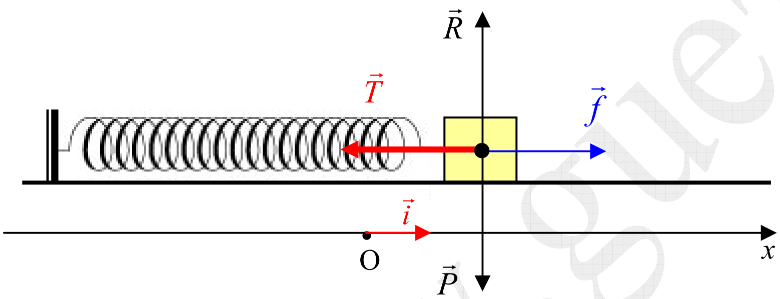
φ : الصفحة الابتدائية (الصفحة من أجل $t = 0$)



1 – 1 – حركة النواس المروني

النواس المروني الأفقي : (تُجرى التجربة فوق طاولة هوائية للتخلّص من الاحتكاك الصلب)

حالة الاحتكاك المائع (الاحتكاك مع الغازات أو السوائل) :



قوة الاحتكاك : معاكسة دائما لشعاع السرعة وتتناسب معها .

$$\vec{f} = -h\vec{v} = -h\frac{dx}{dt}\vec{i}$$

حيث h معامل الاحتكاك المائع (مع الهواء في هذه الحالة) .

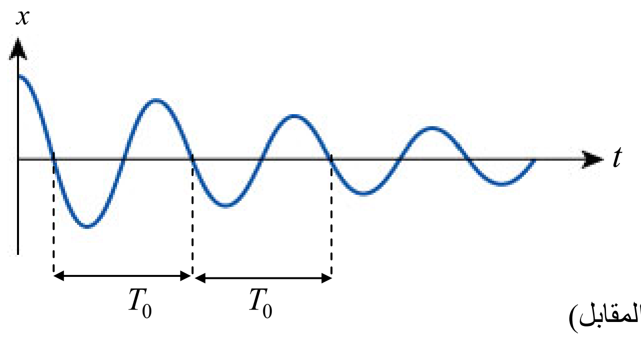
قوّة الإرجاع التي يؤثر بها النابض :

- حاملها محور النابض
- تكون جهتها حيث دائما تحاول إرجاع الجسم نحو وضع التوازن $\vec{T} = -k\,x\vec{i}$
- شدّتها $T = k|x|$ ، حيث x هي فاصلة مركز عطالة الجسم ، k ثابت مرونة النابض .

قوة الثقل $\vec{P}$ وقوة رد فعل المستوي $\vec{R}$ تتكافآن بحيث $\vec{P} + \vec{R} = 0$

حسب القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = m\,\vec{a}$ ، وبالتعويض نكتب : $-kx\,\vec{i} - h\frac{dx}{dt}\vec{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$ ، وباختصار $\vec{i}$ من الطرفين نجد :

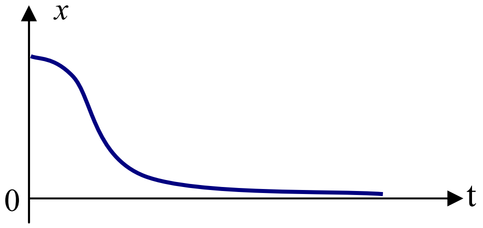
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1)$$



هذه المعادلة التفاضلية حلها ليس من البرنامج .

- إذا كانت قوة الاحتكاك ضعيفة تكون الاهتزازات حرّة متخامدة شبه دورية . السعة تتناقص بمرور الزمن وشبه الدور $T \approx T_0$ (الشكل المقابل)

- إذا كانت قوة الاحتكاك معتبرة تكون الإهتزازات لا دورية ، فبمجرّد أن تظهر الإهتزازات تتخامد ويتوقف الجسم عن الحركة .



- بإهمال الاحتكاك تكون الاهتزازات حرّة غير متخامدة

المعادلة التفاضلية نتحصل عليها بوضع $h = 0$ في المعادلة (1) ، أي :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (2)$$

حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$x = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

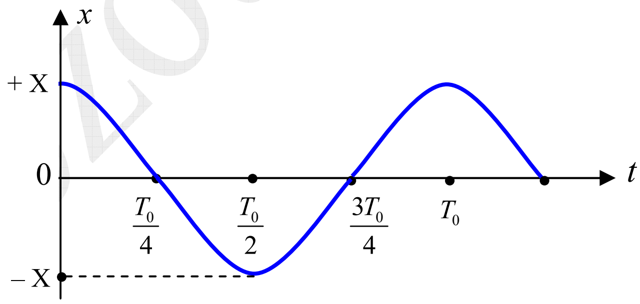
باشتقاق عبارة المطال بالنسبة للزمن مرة ثم مرة أخرى نتحصل على التسارع $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$.

بمطابقة هذه العلاقة مع العلاقة (2) نجد $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ والدور الذاتي $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

تمثيل $x(t)$:

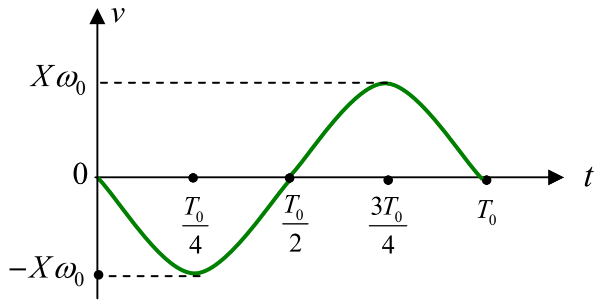
للتبسيط نعتبر الصفحة الابتدائية $\varphi = 0$ ، ونكتب المعادلة الزمنية : $x = X\cos\frac{2\pi}{T_0}t$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	X	0	– X	0	X



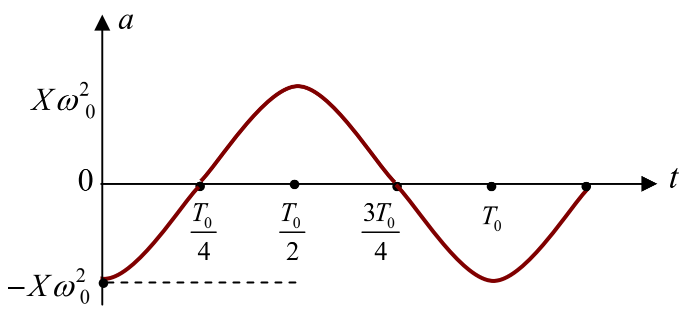
تمثيل $v(t)$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-X\omega_0$	0	$X\omega_0$	0



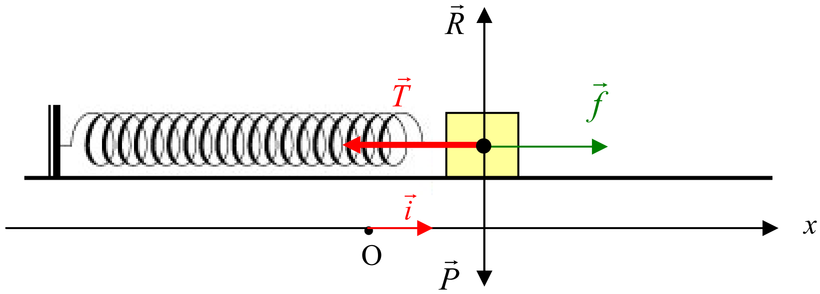
تمثيل $a(t)$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-X\omega_0^2$	0	$+X\omega_0^2$	0	$-X\omega_0^2$



حالة الاحتكاك الصلب (الاحتكاك مع السطوح) :

في هذه الحالة تكون قوة الاحتكاك ثابتة مهما كان الزمن .



$\vec{P}+\vec{R}+\vec{f}+\vec{T}=m\,\vec{a}$ وبالإسقاط :

$-kx+f=ma$

المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x-\frac{f}{m}=0$$

الطاقة الكلية للجملة (نابض – جسم)

نعتبر الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية هو المستوي الأفقي الذي يتحرك فوقه الجسم ونهمل الاحتكاك بنوعيه .

$$E=E_C+E_{Pe}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$

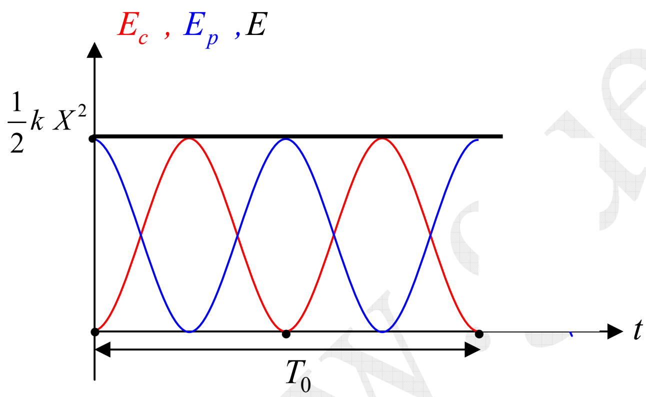
$$E=\frac{1}{2}mX^2\omega_0^2\ sin^2(\omega_0t+\varphi)+\frac{1}{2}kX^2\ cos^2(\omega_0t+\varphi)$$

ولدينا $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ ، وبالتالي : $E=\frac{1}{2}mX^2\frac{k}{m}sin^2(\omega_0t+\varphi)+\frac{1}{2}kX^2\ cos^2(\omega_0t+\varphi)$

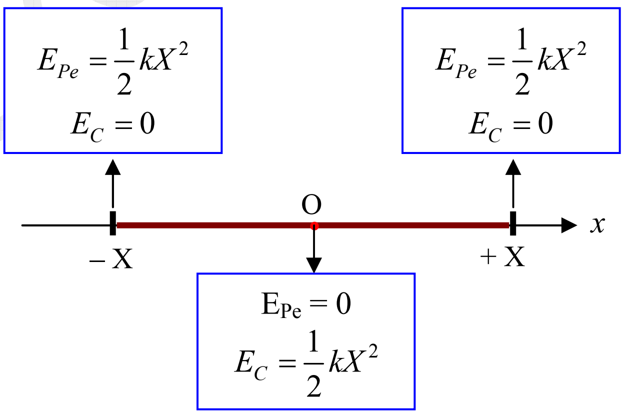
$$E=\frac{1}{2}kX^2$$

مخطط الطاقة

نلاحظ أنه كلما كانت الطاقة الحركية معدومة تكون الطاقة الكامنة عظمى ، والعكس كذلك .



مخطط الطاقة



النواس المروني الشاقولي :

عند التوازن $(x=0)$ يكون : $mg=T+\Pi=k\ \Delta l+\Pi$ ، حيث $\vec{\Pi}$ هي دافعة أرخميدس .

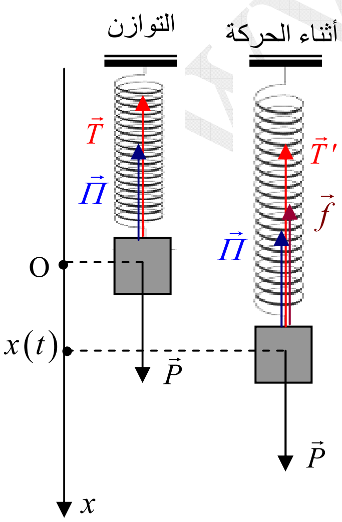
في اللحظة t نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P}+\vec{f}+\vec{T}+\vec{\Pi}=m\,\vec{a}$

بالإسقاط على المحور Ox : $P\vec{i}-hv\vec{i}-kx\,\vec{i}-\Pi\,\vec{i}=m\,a\vec{i}$

$mg-hv-k(\Delta l+x)-\Pi=m\ a$

$mg-hv-k\Delta l-kx-\Pi=m\ a$ ، ولدينا عند التوازن $mg=k\ \Delta l+\Pi$ ، وبالتالي :

$k\ \Delta l+\Pi-hv-k\Delta l-kx-\Pi=m\ a$ ، ومنه المعادلة التفاضلية :



$$\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

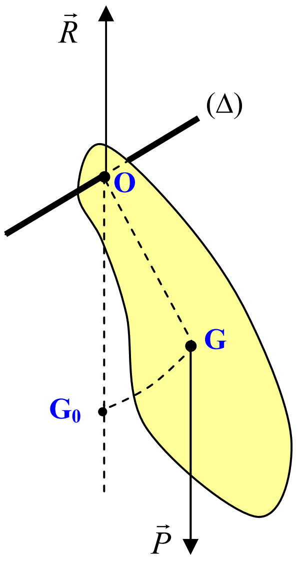
1 – 2 - حركة النواس الثقلي

تعريف : النواس الثقلي هو كل جسم قابل للدوران حول محور لا يمر من مركز ثقله .

المسافة بين محور الدوران ومركز ثقل النواس هي $a = OG$

وضع التوازن المستقر للنواس الثقلي :

يكون النواس في وضع توازنه المستقر عندما يكون مركز ثقله على الشاقول المار من O وأسفله .



نواس ثقلي مركب

النواس الثقلي البسيط

إذا ربطنا جسما بواسطة خيط معلق أو سلك وكانت أبعاد الجسم مهملة أمام طول الخيط ، نكون قد شكلنا نواسا ثقليا بسيطا .

النواس الثقلي هو النواس الذي يهتز بفعل ثقله ، وهو إما نواس ثقلي مركب أو نواس ثقلي بسيط .

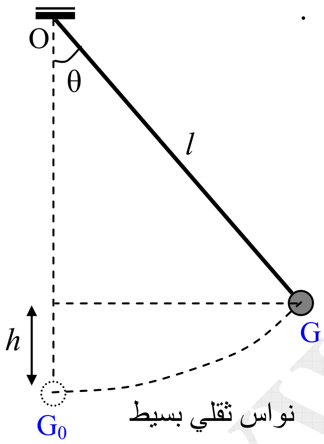
نقتصر في دراستنا على النواس الثقلي البسيط .

من أجل نواس بسيط يكون $OG \approx l$

المعادلة التفاضلية

نحرف الخيط ابتداء من وضع توازن النواس (G_0) بزاوية θ_0 ونتركه بدون سرعة .

نطبّق مبدأ إنحفاظ الطاقة للجملة (نواس – أرض) عندما يصبح الخيط صانعا مع الشاقول الزاوية θ .



نواس ثقلي بسيط

$$E_C + E_{PP} = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh + E_{PP0} = E$$

E_{PP0} هي قيمة للطاقة الكامنة الثقالية تتعلق بالوضع المرجعي ، فإذا كان الوضع المرجعي هو المستوي الأفقي المار من G_0 تكون $E_{PP0} = 0$.

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 l^2 + mg\left(l - l\cos\theta\right) + E_{PP0} = E \qquad (3)$$

مع العلم أن السرعة الخطية (v) تساوي السرعة الزاوية $(\frac{d\theta}{dt})$ × نصف القطر (l) .

باشتقاق طرفي العلاقة (3) بالنسبة للزمن :

$$2\times\frac{1}{2}m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\times l^2\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgl\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0 \quad \text{، ومنه} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

إذا كانت الزاوية θ_0 صغيرة تكون كذلك θ ، وفي هذه الحالة يكون $\sin\theta \approx \theta$ ، حيث θ بالراديان (rd) .

تصبح المعادلة التفاضلية (4) بالشكل :

$$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0} \qquad (5)$$

وهي معادلة تفاضلية حلها من الشكل : $\theta=\theta_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$ (6)

θ : الفاصلة الزاوية (المطال الزاوي) ، θ_0 : السعة الزاوية (المطال الزاوي الأعظمي)

ω_0 : النبض الذاتي ، $\omega_0 t+\varphi$: الصفحة ، φ : الصفحة الابتدائية

باشتقاق المعادلة الزمنية (6) مرّتين بالنسبة للزمن نجد : $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega_0^2\,\theta$ ، أي $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\,\theta=0$ (7)

بمطابقة العلاقتين (5) و (7) نجد

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

تصحيح الدور : لاحظ في هذا الجدول أنه كلما كانت الزاوية صغيرة يكون $\sin\theta\approx\theta$ ، فمن أجل $\theta=10°$ تكون الدقة في المساواة تقترب من $\frac{1}{1000}$ ، أي أن الرقم الثالث بعد الفاصلة في كل من θ و $\sin\theta$ هو نفسه تقريبا .

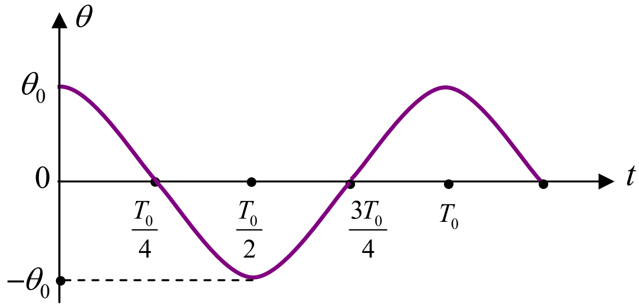
إذن يمكن اعتبار من الآن $\sin\theta=\theta$ إذا كانت $\theta<10°$

$\theta(°)$	3	7	9	10	16	22
$\theta(rd)$	0,0523	0,1218	0,1570	0,1744	0,2791	0,3837
$\sin\theta$	0,0523	0,1218	0,1564	0,1736	0,2756	0,3746

إذا كانت السعة معتبرة (حوالي 22°) نصحّح الدور بالعلاقة $T=T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)$ ، حيث T_0 هو الدور من أجل السعات الصغيرة

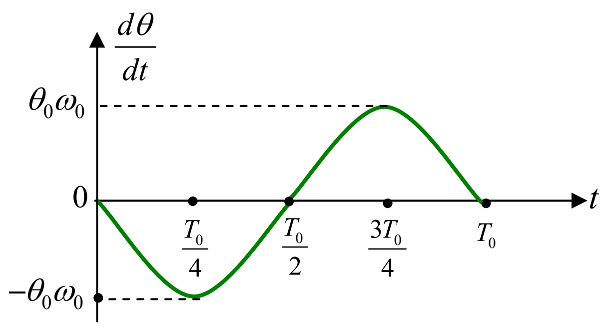
أي $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ، θ_0 هي السعة المعتبرة مقاسة بـ (rd)

تمثيل الفاصلة الزاوية $\theta(t)$: للتبسيط نأخذ الصفحة الابتدائية $\varphi=0$ ، وبالتالي نكتب $\theta=\theta_0\cos\frac{2\pi}{T_0}t$



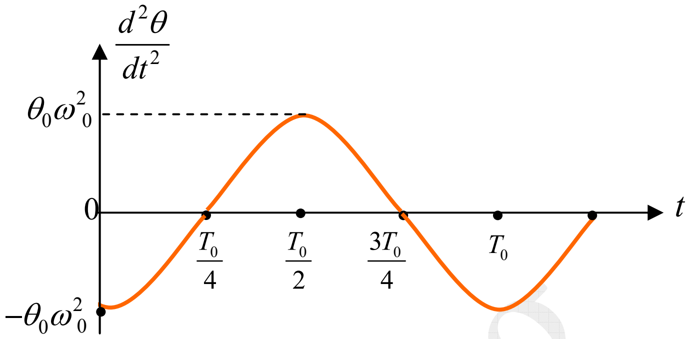
t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
θ	θ_0	0	$-\theta_0$	0	θ_0

تمثيل السرعة الزاوية $\frac{d\theta}{dt}(t)$: $\frac{d\theta}{dt}=-\theta_0\omega_0\sin\frac{2\pi}{T_0}$

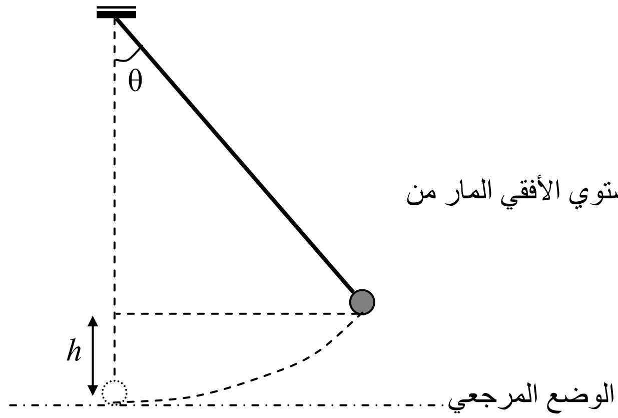


t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\frac{d\theta}{dt}$		$-\theta_0\,\omega_0$	0	$\theta_0\,\omega_0$	0

تمثيل التسارع الزاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2}(t)$ **:** $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\,\theta$



t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$-\theta_0\,\omega_0^2$	0	$+\theta_0\,\omega_0^2$	0	$-\theta_0\,\omega_0^2$



الطاقة الكلية للجملة (نواس – أرض)

نهمل تأثير الهواء .

$E = E_C + E_{PP}$ ، نعتبر الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية المستوي الأفقي المار من مركز عطالة الجسم عند وضع التوازن .

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\theta_0^2\,\omega_0^2\,\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

$$E_{PP} = mgh = mgl(1-\cos\theta)$$

من أجل زاوية θ صغيرة لدينا $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$ ، وبالتالي تصبح $E_{PP} = \frac{1}{2}mgl\theta^2$ ، ولما نعوّض عبارة $\theta(t)$ نجد

$$E_{PP} = \frac{1}{2}mgl\theta_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\ .$$

الطاقة الكلية هي : $E = \frac{1}{2}ml^2\theta_0^2\,\omega_0^2\,\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}mgl\theta_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$

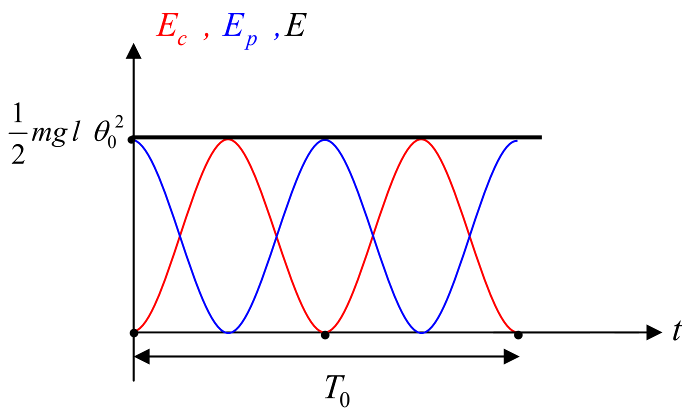
لدينا $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ ، ومنه : $E = \frac{1}{2}ml^2\theta_0^2\,\frac{g}{l}\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}mgl\theta_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$

$$E = \frac{1}{2}mgl\theta_0^2\left[\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \cos^2(\omega_0 t+\varphi)\right]$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}mgl\theta_0^2}$$

مخطط الطاقة

نعتبر $\varphi = 0$



2 - تغذية الإهتزازات

يمكن بواسطة عامل خارجي تعويض الطاقة الضائعة بفعل الإحتكاك في نواس مروني ، وبدون التأثير على السعة والدور ، فتصبح بذلك إهتزازات النواس غير متخامدة .

ملاحظة :

شعبة العلوم التجريبية غير معنية بالنواس المروني الشاقولي وحالة وجود الإحتكاك في النواس المروني الأفقي