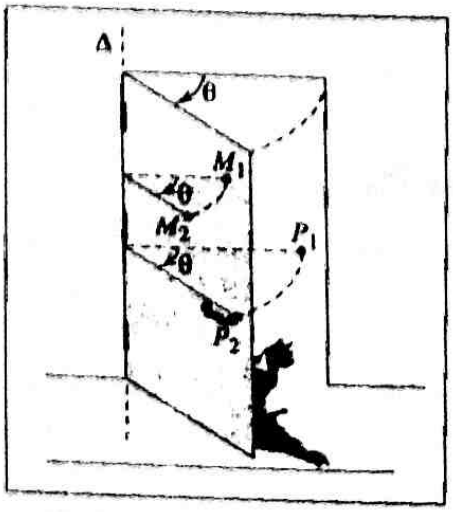
# 3 . العمل و الطاقة الحركية ( الحركة الدورانية )




**مراجعة : الحركة الدورانية**

**1ـ الدوران حول محور ثابت**

ـ نقول عن جسم صلب أنه في حالة دوران حول محور ثابت (Δ) :

✓ إذا كانت كل نقاط الجسم الموجودة على محور الدوران تبقى ساكنة لا تتحرك .

✓ كل نقطة من الجسم الصلب تشكل قوس من دائرة متمركزة على محور الدوران و في مستوى عمودي على المحور(Δ) .

✓ الزاوية الممسوحة بين لحظتين معينتين هي نفسها بالنسبة لكل نقاط الجسم . هذه الزاوية تدعى بزاوية الدوران .

**السرعة :**

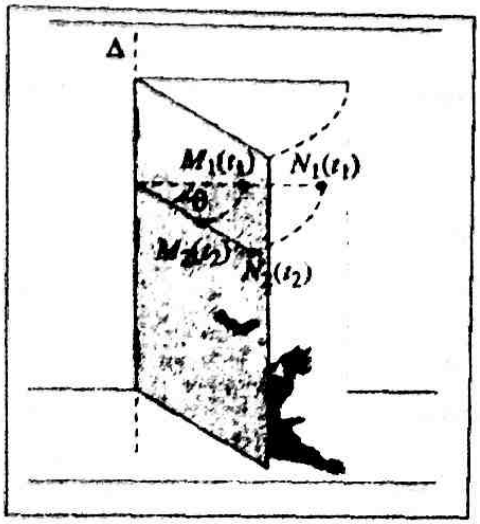
ينتقل جسم نقطي من الموضع $M_1$ في اللحظة $t_1$ الى الموضع $M_2$ في اللحظة $t_2$ .

المسافة المقطوعة على المسار بين اللحظتين $t_1$ و $t_2$ ممثلة بالقوس $L = M_1M_2$ .

الزاوية الممسوحة بين اللحظتين $t_1$ و $t_2$ ممثلة بالقيمة : θ

**ـ السرعة المتوسطة :**

السرعة المتوسطة هي حاصل قسمة المسافة s المقطوعة وفق المسار بين لحظتين $t_1$ و $t_2$ على المدة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ اللازمة لقطع هذه المسافة أي :




$$V_m = \frac{L}{\Delta t}$$

نعبر على طول القوس L بالمتر و الزمن Δt بالثانية فتكون وحدة السرعة : المتر على الثانية (m/s) .

**2ـ السرعة الزاوية للجسم**

خلال الدوران كلما كانت نقطة من الجسم بعيدة عن محور الدوران كلما كبر طول القوس الذي تدوره و بالتالي ليست لكل نقاط الجسم نفس السرعة .

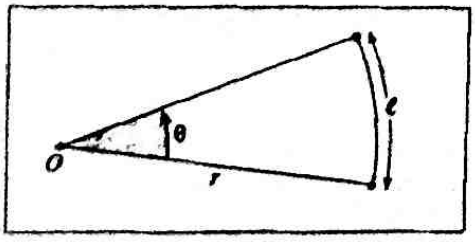
و بالمقابل بما أن كل النقاط تدور بنفس زاوية الدوران فإنه من الأفضل تحديد سرعة الجسم بالتغير في هذه الزاوية خلال لحظات زمنية و التي ندعوها بالسرعة الزاوية و التي هي نفسها لكل نقاط الجسم .

**ـ السرعة الزاوية المتوسطة**

هي حاصل قسمة الزاوية θ الممسوحة بين لحظتين $t_1$ و $t_2$ على المدة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ اللازمة لقطع هذه المسافة أي :

$$\omega_m = \frac{\theta}{\Delta t}$$

نعتبر في نظام الوحدات الدولي وحدة الزاوية بالراديان (rd) و الزمن Δt بالثانية (s) فتكون وحدة السرعة الزاوية ω بالراديان على الثانية (rd/s) .




**العلاقة بين السرعة و السرعة الزاوية**

من أجل نقطة M من جسم صلب في حالة دوران على محور ثابت (Δ) تبعد عنه بمقدار r فإن المسافة المقطوعة خلال مجال زمني $\Delta t = t_2 - t_1$ تعطى بالعبارة

$$L = r\,\theta$$

قيمة السرعة المتوسطة : $V_m = \frac{L}{\Delta t} = r\,.\,\theta/\Delta t$

و منه العلاقة بين السرعة و السرعة الزاوية :

$$V_m = r\,.\,\omega_m$$

مثال :
غسالة السلاطة نصف قطرها $r = 11\ cm$ تدور بسرعة دوران ثابتة تقدر بـ 720 tr/mn
a ـ احسب قيمة السرعة الزاوية للغسالة بـ rd/s
b ـ احسب سرعة قطعة من السلاطة لاصقة على حافة الغسالة .

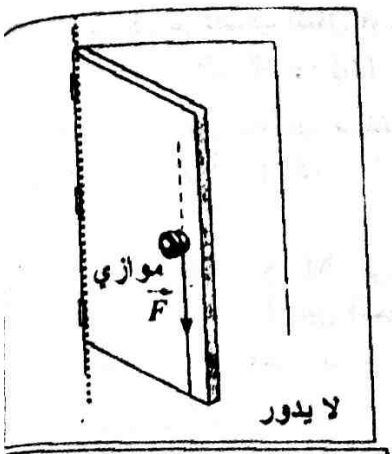
الحل :
الغسالة تعمل $n = 720$ دورة خلال مجال زمني قدره $\Delta t = 60\ s$
كل دورة توافق زاوية دوران تساوي $2\pi\ rd$
a ـ قيمة السرعة الزاوية $\omega = n \cdot 2\pi / \Delta t = 75,4\ rd/s$
b ـ قطعة السلاطة تقع على بعد $r = 0,11\ m$ من محور الدوران إذن سرعته $V = \omega \cdot r = 8,3\ m/s$

## العمل و الطاقة الحركية في حالة الحركة الدورانية

### ـ عزم قوة بالنسبة لمحور ثابت

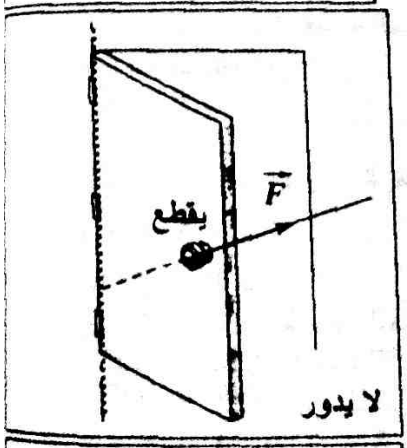
**1 ـ مفهوم العزم**

نشاط :
نعلم أن الأبواب تدور حول محور ثابت ، ندعوه المحور Δ ، يمر من مفاصلها .
1ـ نمسك باب من مقبضه و نطبق عليها قوة نحو الأسفل أو الأعلى بحيث يكون حامل القوة موازيا لمحور دوران الباب .



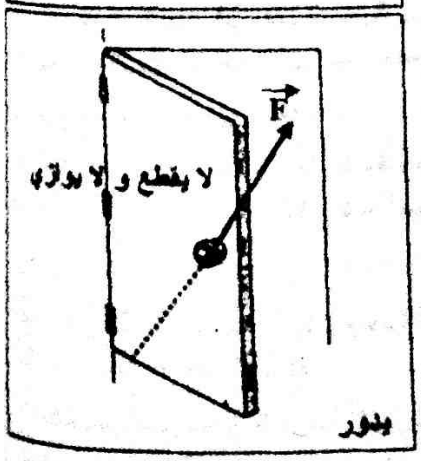

ـ هل يدور الباب ؟
ـ لا . الباب لا يدور

2ـ نغير الآن اتجاه القوة بحيث حاملها يقطع محور دوران هذا الباب كما هو مبين في الشكل .




ـ هل يدور الباب ؟
ـ لا . الباب لا يدور

3ـ نطبق هذه المرة قوة كيفية $\vec{F}$ على مقبضها بحيث لا يقطع حاملها محور دوران الباب و ليس موازي له .




ـ هل لهذه القوة أثر على دوران الباب ؟
ـ نعم . لهذه القوة أثر على دوران الباب

نتيجة :
**حتى يكون لقوة $\vec{F}$ ، مطبقة على جسم صلب متحرك حول محور ثابت ، أثر دوراني على حركته يجب أن لا يكون حامل هذه القوة موازي لمحور الدوران و لا يقطع ( يلاقي) هذا المحور .**

مفهوم العزم
نقول أن لقوة $\vec{F}$ مطبقة على جسم صلب متحرك حول محور ثابت عزم بالنسبة لهذا المحور إذا كان لها أثر دوران على هذا الجسم نرمز لعزم قوة بالنسبة لمحور Δ بالرمز $M_{\vec{F}/\Delta}$ .

**2 ـ عبارة عزم قوة بالنسبة لمحور**

**نشاط ـ1 :**

طبق في نفس الظروف قوة عمودية على مستوى هذا الباب مرة على مقبضها و مرة في نقطة قريبة من محور دورانها .

**1 ـ هل لهذه القوة أثر على دوران الباب في كلتا الحالتين ؟** ـ نعم . لهذه القوة أثر على دوران الباب .

**2 ـ هل الباب يدور بنفس السهولة ؟** ـ لا . الباب لا يدور بنفس السهولة

**3 ـ هل الأثر الدوراني لهذه القوة على الباب يختلف في كل حالة ؟**
ـ نعم . الأثر الدوراني يختلف في كل حالة . الباب يدور بسهولة كلما طبقنا قوة في نقطة بعيدة عن محور دورانها .

**4 ـ ما الذي تستنتجه بالنسبة لعزم القوة ؟**
ـ نستنتج أن عزم القوة يتعلق بموضع تطبيقها .

**نشاط ـ2 :**
ارجع للباب السابق و طبق على مقبضه قوة عمودية على مستوى الباب . أعد التجربة بتطبيق قوة في نفس النقطة و في نفس الإتجاه و بشدة أكبر .

**1 ـ هل يوجد فرق في الأثر الدوراني للقوة على الباب في كل حالة ؟**
ـ نعم . الأثر الدوراني يختلف في كل حالة . الباب يدور بسهولة كلما طبقنا قوة شدتها أكبر.

**2 ـ ما الذي تستنتجه بالنسبة لعزم القوة ؟** ـ نستنتج أن عزم القوة يتعلق بشدتها .

**نشاط ـ3 :**
ارجع للباب السابق و طبق على مقبضه قوة عمودية على مستوى الباب . اعد التجربة بتطبيق في نفس النقطة قوة لها نفس الشدة و اتجاه معاكس لإتجاه القوة السابقة .

**1 ـ هل يدور الباب في نفس الإتجاه ؟** ـ لا . لا يدور الباب في نفس الإتجاه

**2 ـ هل يوجد فرق في الأثر الدوراني للقوة على الباب في كل حالة ؟**
ـ نعم . الأثر الدوراني يختلف في كل حالة . الباب يدور في جهة تتعلق بجهة القوة المطبقة .

**3 ـ ما الذي تستنتجه بالنسبة لعزم القوة ؟**
ـ نستنتج أن عزم القوة يتعلق بجهتها .

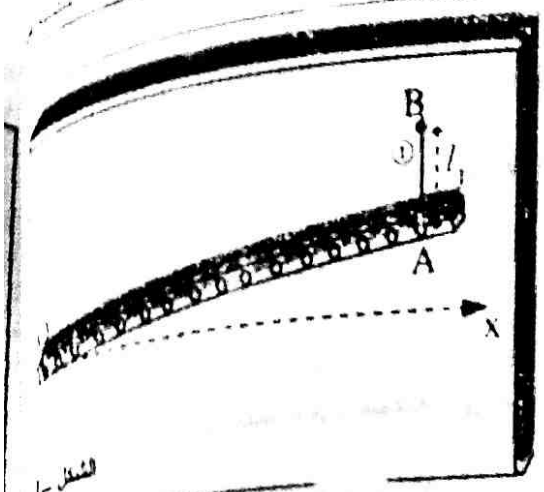
**نتيجة :**
**يتعلق عزم قوة بالنسبة لمحور الدوران Δ حاملها لا يوازي و لا يقطع هذا المحور بشدة و اتجاه هذه القوة و بالبعد العمودي بين حامل القوة و المحور Δ .**

**عمل تجريبي :**

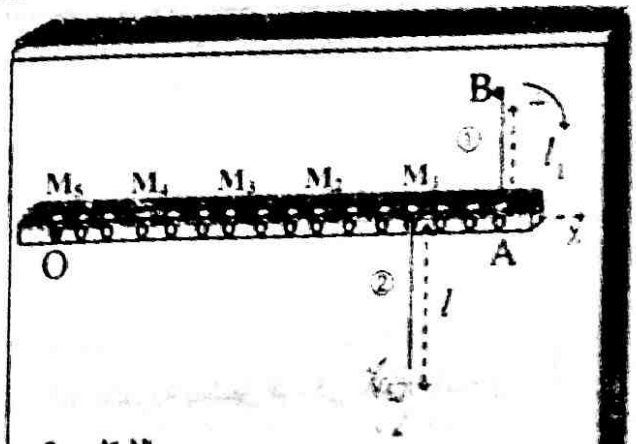
**الأدوات المستعملة :**
1ـ خذ قضيبا من الخشب أبعاده (1 cm × 1 cm × 50 cm) . نهمل ثقله بالنسبة للقوة المعتبرة في هذه التجربة و اجعل فيه ثقوبا صغيرة تسمح لك بتعليق خيوط مطاطية (أو نوابض) .
2ـ خذ لوحا (قطعة مسطحة) من خشب مستطيلة الشكل و غلفها بورق بيضاء تسمح لك بتسجيل قياساتك عليها .
2ـ اغرز في النقطة O مسمارا يسمح للقضيب الدوران حوله ، و اجعل اللوح في وضع شاقولي .
3ـ حضر ديناموميتر تقيس بها شدة القوى .

**مراحل التجربة :**

**الجزء 1) :**
علق القضيب بواسطة خيط مطاطي ① مربوط في النقطتين A و B (الشكل ـ1).
علق مطاطا آخر ② في النقطة $M_1$ ثم اسحبه بيدك حتى يصبح القضيب منطبقا مع المحور الأفقي (ox) الذي نختاره وضعا مرجعيا (الشكل ـ2) ( وضع التوازن) . يكون المطاطان في هذه الحالة شاقوليين .
ـ علم على الورقة طول كل مطاط $L_i$ .
ـ اعد التجربة بتعليق المطاط ② في المواضع $M_2$ ، $M_3$ ، $M_4$ و سجل في كل مرة طول المطاط ② الذي من أجله يكون القضيب أفقيا .
ـ استعمل ديناموميتر بوحدة النيوتن (ربيعة) و حدد شدة القوة الموافقة لكل طول .
ـ ارسم على ورقة التجربة باستعمال سلم مناسب القوى المطبقة على القضيب من طرف المطاطات .
ـ دون نتائجك في الجدولين و أكملهما :




الشكل ـ1




الشكل ـ2

| $L_1$ (cm) | $F_1$(N) | OA (m) | $F_1 . OA$ (N.m) |
|---|---|---|---|
| | | | |

| $L_{2i}$ (m) | $F_{2i}$ (N) | $OM_i$(m) | $F_{2i} . OM_i$ (N.m) |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

ـ قارن قيم جداء شدة القوة $F_{2i}$ المطبقة من طرف النابض ② على القضيب في $OM_i$ أي $(F_{2i} . OM_i)$ . ماذا تلاحظ ؟

ـ نلاحظ أن الجداء $(F_{2i} . OM_i)$ يبقى تقريبا ثابتا .

ـ قارن هذه القيمة مع الجداء $(F_1 . OA)$ المتعلق بالنابض ①

ـ الجداء $(F_{2i} . OM_i)$ يساوي تقريبا قيمة الجداء $(F_1 . OA)$ المتعلق بالنابض ①

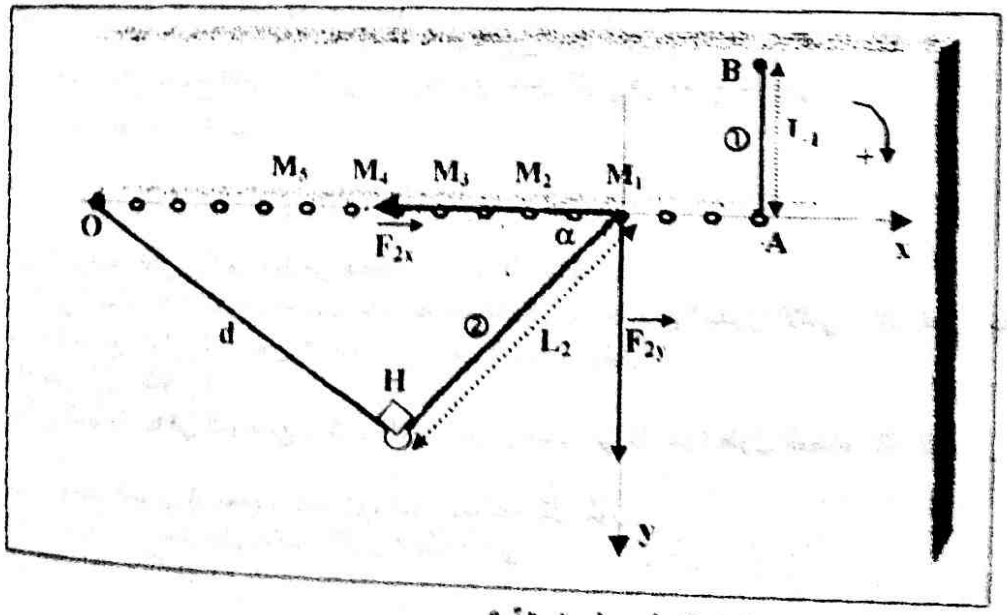
ـ ما هو أثر القوة المطبقة من طرف النابض ① على القضيب ؟ ـ تدير القضيب في الإتجاه المعاكس للإتجاه الموجب

ـ ما هو أثر القوة المطبقة من طرف النابض ② على القضيب ؟ ـ تدير القضيب في الإتجاه الموجب .

ـ ماذا تستنتج ؟ ـ نستنتج أن المجموع الجبري لعزوم القوى المطبقة على القضيب معدوم عند التوازن .

**الجزء b) :**

نميل المطاط ② بحيث يصنع منحاه زاوية $\alpha$ مع القضيب ثم نسحبه حتى يرجع القضيب إلى الوضع الأفقي .




ـ ما هي شدة القوة التي يطبقها المطاط ② في هذه الحالة ؟

ـ شدة القوة التي يطبقها المطاط ② في هذه الحالة تكون أكبر من الحالة السابقة (الجزء a) ) .

ـ احسب الجداء $(F_2 . OM_1)$ و قارنه $(F_1 . OA)$ . ماذا تلاحظ ؟

ـ نلاحظ أن المطاط استطال أكثر مما كان عليه في الجزء a) . الجداء $(F_2 . OM_1)$ أكبر من الجداء $(F_1 . OA)$ المتعلق بالنابض ① بخلاف ما كان عليه في الجزء a) .

ـ ارسم القوة المطبقة من طرف النابض ② ثم حللها إلى مركبتين (أفقية و شاقولية) . بماذا تتميز كل مركبة ؟

ـ عند تحليل القوة $F_2$ إلى مركبتين على المحور x و على المحور y يظهر أن المركبة $F_{2x}$ ليس لها أثر تدويري لأن حاملها يمر من محور الدوران .

ـ أي المركبتان لها أثر تدويري ؟ قارن قيمتها مع القيمة $F_2$ في الحالة السابقة (الجزء a) ) .

ـ للمركبة $F_{2y}$ أثر تدويري على القضيب و نجد أن $F_{2y}$ تساوي $F_{21}$ للجزء a) .

ـ مثل H المسقط العمودي للنقطة O على حامل القوة $F_2$ . نسمي $OH = d$ ذراع القوة $F_2$ .

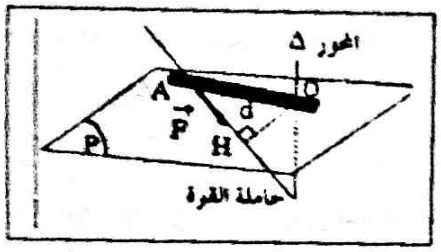
ـ احسب الجداء $(F_2 . d)$ ، ماذا تلاحظ ؟

ـ نلاحظ أن : $F_{2y} . OM_1 = F_2 . d$ .

نتيجة :

يحسب عزم قوة بالنسبة لمحور Δ بجداء شدة هذه القوة في البعد العمودي d بين حامل هذه القوة و المحور Δ و تكتب العبارة على الشكل : $M_{\vec{F}/\Delta} = F . d$ . بعد اختيار اتجاه موجب للدوران يكون عزم القوة موجبا إذا كانت القوة تدير الجسم في الإتجاه الموجب و يكون سالبا إذا كانت تديره في الإتجاه السالب . نكتب حينئذ عبارة عزم القوة كما يلي :

$M_{\vec{F}/\Delta} = \pm F . d$ . في الوحدات الدولية يعبر عن العزم بالوحدة : (N.m)




**كيف نعين المسافة d :**

النقطة O هي تقاطع محور الدوران Δ مع المستوي P العمودي على هذا المحور و الحاوي للقوة $\vec{F}$ . النقطة A هي نقطة تطبيق القوة . تمثل المسافة d البعد بين النقطة O و النقطة H ، حيث H هو المسقط العمودي للنقطة O على حامل القوة $\vec{F}$ .

## تأثير عدة قوى على جسم صلب يدور حول محور ثابت

إذا أثرت عدة قوى على جسم صلب متحرك حول محور ثابت Δ ، يتعلق اتجاه دوران الجسم بالتأثير الدوراني الإجمالي لهذه القوى بالنسبة لهذا المحور . نقبل أن التأثير الدوراني الإجمالي لعدة قوى هو المجموع الجبري لعزوم هذه القوى بالنسبة للمحور Δ و نرمز له بالرمز $M_{/\Delta}$ :

$$M_{/\Delta} = M_{\vec{F1}/\Delta} + M_{\vec{F2}/\Delta} + M_{\vec{F3}/\Delta} + \dots$$

العزم مقدار جبري و إشارته تدل على اتجاه دوران الجسم :

ـ إذا كان العزم موجبا ، يدور الجسم في الإتجاه الموجب المختار .

ـ إذا كان العزم سالب ، يدور الجسم في الإتجاه السالب .

## عبارة الإستطاعة علما أنها تساوي عمل عزم القوة على وحدة الزمن .

ـ $P = ( M_{F/\Delta} . \theta ) / t$ حيث $M_{F/\Delta}$ عزم القوة .

و لكن : $\theta / t = \omega$

و منه : $P = M_{F/\Delta} . \omega$

## مزدوجـــة قوتين

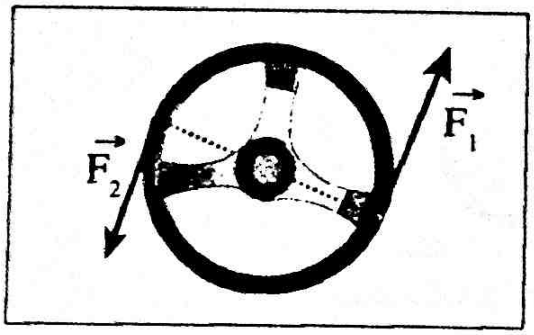
**تعريف المزدوجة**

تدعى جملة قوتين محصلتهما معدومة ( أي القوتين متساويتين في الشدة ) و ليس لهما نفس الحامل مزدوجة قوتين (أو مزدوجة) . نقتصر في هذه الدراسة على المزدوجات $(\vec{F_1} , \vec{F_2})$ الموجودة في المستوي العمودي على محور دوران الجسم الصلب .

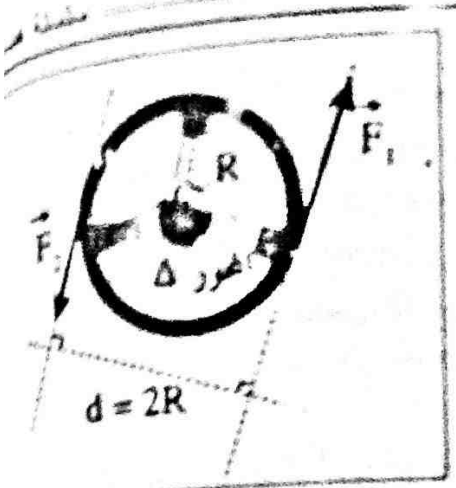
**مثـــال :**

لاحظ على الشكل تأثير القوتين $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ على مقود سيارة .

تمثل هاتان القوتين مزدوجة $(\vec{F_1} , \vec{F_2})$



## عزم المزدوجة




**نشاط ـ1 :**

تؤثر مزدوجة قوتين $(\vec{F_1}, \vec{F_2})$ على مقود سيارة نصف قطره R .

ـ اختر اتجاه دوران موجب

ـ احسب عزم القوة $F_1$ بالنسبة لمحور الدوران .

ـ احسب عزم القوة $F_2$ بالنسبة لمحور الدوران

ـ استنتج عبارة عزم المزدوجة .

**نتيجة :**

يرجع حساب عزم مزدوجة قوتين $(\vec{F_1}, \vec{F_2})$ تؤثر على جسم صلب يدور حول محور Δ الى حساب المجموع الجبري لعزمي القوتين .

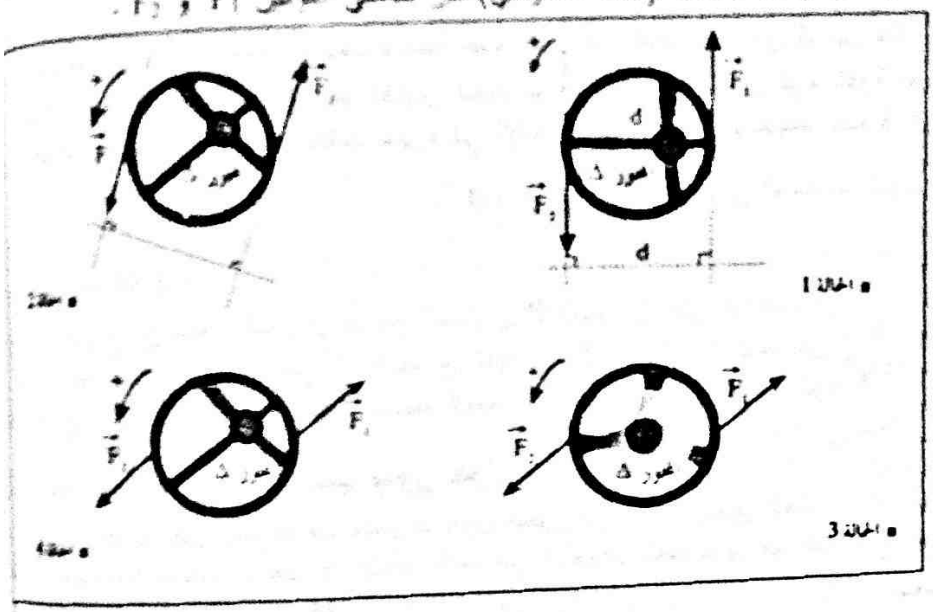
يتعلق عزم هذه المزدوجة بشدة إحدى القوتين و بالبعد العمودي بين حاملي القوتين . ويعبر عنه بالعبارة على الشكل :

$$M_{/\Delta} = F \cdot d$$

ملاحظة نلاحظ في الشكل المرافق أن قطر المقود d يمثل المسافة (البعد العمودي) بين حاملي القوتين $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ .

**نشاط ـ2 :**

تخيل أن المقود السابق يدور حول محور لا يمر من مركزه . لاحظ الأشكال الأربعة التالية ثم اتبع نفس الخطوات السابقة لحساب عزم مزدوجة القوتين اللتين تؤثران على المقود في كل حالة .



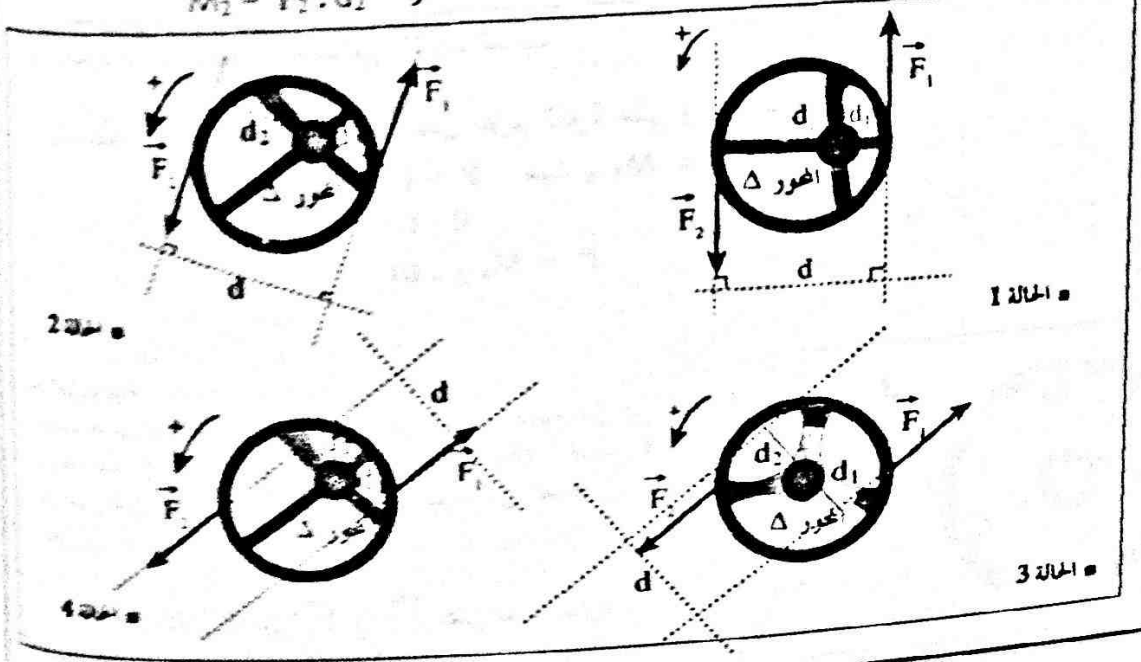

ـ هل يتعلق عزم مزدوجة القوتين بموضع محور الدوران ؟

ـ نضع شدة كل قوة : $F_1 = F_2 = F$

الحالة ـ1 :

$$\left.\begin{array}{l} M = M_1 + M_2 \\ M_1 = F_1 \cdot d_1 \\ M_2 = F_2 \cdot d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow M = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F(d_1 + d_2) = F \cdot d$$

في كل حالة نتبع نفس الطريقة في الحساب و نجد دائما أن عزم المزدوجة يساوي جداء شدة إحدى القوتين في المسافة الفاصلة بين حاملي القوتين و لا تتعلق بموضع محور الدوران .



نتيجة :
لا يتعلق عزم مزدوجة قوتين موجودتين في المستوي العمودي على محور الدوران Δ لجسم صلب بموضع هذا المحور .
يحسب عزم المزدوجة بجداء إحدى القوتين في البعد العمودي d بين حاملي القوتين :

$$M = F . d$$

ملاحظة :
1 ـ عندما نتكلم عن عزم مزدوجة ، لا نذكر المحور خلافا عن عزم القوة الذي يجب دائما ذكر المحور الذي يحسب بالنسبة إليه العزم .
2 ـ تدعى المسافة بين القوتين ذراع المزدوجة .

## عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور ثابت

ـ مركز الكتل
تعريف : يعرف مركز كتل جملة نقاط مادية كتلة كل منها $m_1 , m_2 , m_3 , .....$ و موضع كل منها على التوالي : $M_1 , M_2 , M_3 .....$ على أنه مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $M_i$ الموافقة بالكتل $m_i$ . إذا اعتبرنا موضع مركز الكتل النقطة C يحسب موضعه بالعبارة التالية :

$$m_1 . \overrightarrow{CM_1} + m_2 . \overrightarrow{CM_2} + m_3 . \overrightarrow{CM_3} + ..... = 0$$

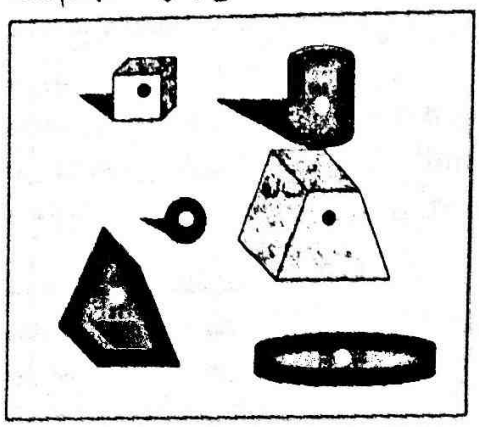
بالنسبة لنقطة O نختاها كمبدأ تكتب العلاقة السابقة على الشكل :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\Sigma m_i \overrightarrow{OM_i}}{\Sigma m_i}$$

ـ مركز العطالة

نشاط :
ضع صفيحة من زجاج على طاولة ثم خذ قطعة صابون و اغرز فيها ثلاثة أعمدة صغيرة (أعمدة ثقاب كبريت مثلا) في مواضع مختلفة حيث أحد الأعمدة يكون في مركز القطعة . بلل قطعة الصابون ثم ضعها على اللوح الزجاجي و ادفعها لتتحرك عليه .
**1 ـ هل لكل الأعمدة مسارات متشابهة خلال الحركة ؟**
1 ـ لا . لكل الأعمدة مسارات غيرمتشابهة ما عدا واحدة خلال الحركة
**2 ـ ما هو العمود الذي له مسار خاص ؟ و ما نوع هذا المسار ؟**
2 ـ العمود الذي له مسار خاص يقع في مركز القطعة له مسار مستقيم .

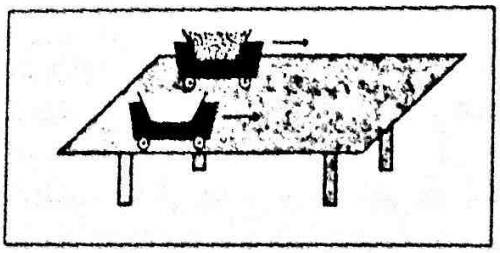
نتيجة :
**في الأجسام الصلبة التي نعتبرها مجموعة نقط مادية توجد نقطة واحدة و وحيدة ، لها حركة خاصة (حركة مستقيمة منتظمة اذا كانت الجملة معزولة ) ندعوها مركز عطالة الجملة و نرمز لها عادة بالرمز C . إذا كانت الكتلة لا تتعلق بسرعة الجسم كما هو الحال في دراستنا ، ينطبق مركز العطالة مع مركز الكتل .**



ـ مركز عطالة بعض الأجسام البسيطة :
نعتبر في دراستنا حالة الأجسام الصلبة المتجانسة .
1 ـ الأجسام الصلبة التي تملك مركز تناظر يكون مركز عطالة هذه الأجسام منطبقا مع مركز تناظرها .
2 ـ الأجسام الصلبة التي لها محور تناظر أو مستوي تناظر ينتمي مركز عطالة هذه الأجسام لمحور التناظر أو مستوي التناظر .

ملاحظة : ينطبق مركز العطالة مع مركز الكتل في كل الحالات التي ندرسها .

ـ عطالة الأجسام الصلبة
نشاط ـ1 :

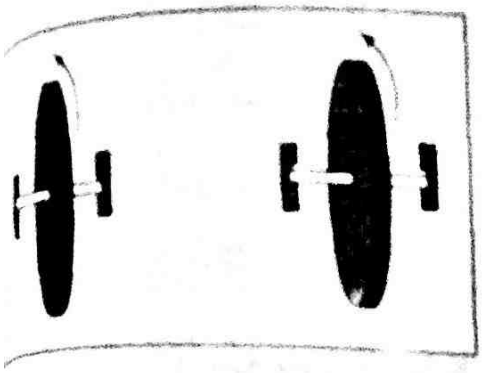


خذ عربتين متماثلتين وضع عليهما إنائين متماثلين فارغين . إملأ أحد الإنائين بالرمل و الأخر بالصوف . ادفع بيدك العربة الأولى ثم ادفع بنفس الكيفية العربة الثانية (أي بتطبيق قوة مماثلة للحالة الأولى ) . ليتحركا بحركة انسحابية .
**ـ ما هي العربة التي أحسست أنها "تسارعت" حركتها أكثر عند الإقلاع ؟**
ـ العربة التي أحسست أنها "تسارعت" حركتها أكثر عند الإقلاع هي العربة المحملة بالصوف .
**ـ ما هي العربة التي أحسست أنها تقاوم أكثر التغير في السرعة ؟ هل هي العربة الثقلية أم الخفيفة ؟**
ـ العربة التي أحسست أنها تقاوم أكثر (تعطل) التغير في السرعة هي العربة الثقلية .

ـ في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الانسحابي ؟ ـ تتعلق هذه المقاومة للأثر الانسحابي بالكتلة .

نشاط ـ2 :

جزء ـa



ا ـ خذ قرصين متماثلين ( نفس القطر و نفس السمك ) واحد من خشب و الآخر من رصاص مثلا ، اجعل كل قرص يدور حول محور افقي يمر من مركزه . طبق على حافة كل قرص و بنفس الكيفية قوة لها قيمة تجعلهما يدوران حول هذين المحورين .

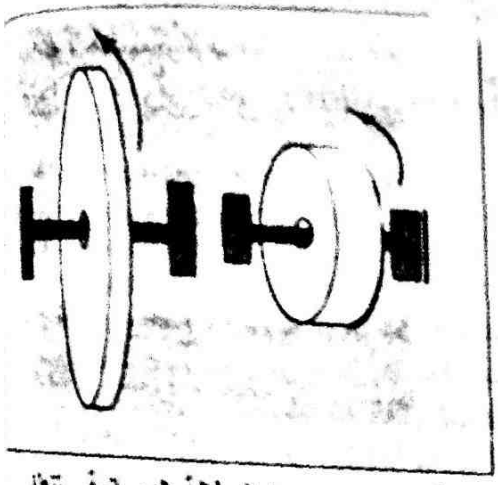
ـ أي قرص يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني لهذه القوة ؟

ـ القرص الذي يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني لهذه القوة هو الثقيل .

ـ في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني ؟

ـ تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني بالكتلة

جزء ـb



خذ كمية من الجبس ، امزجه بالماء ثم اقسمه إلى نصفين متساويين .
اصنع بهما قرصين أحدهما قطره R و الأخر قطره 2 R تقريبا .
طبق على حافة كل قرص و بنفس الكيفية قوة لها نفس القيمة تجعلهما يدوران حول محوريهما .

ـ أي قرص يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني للقوة المطبقة عليه؟

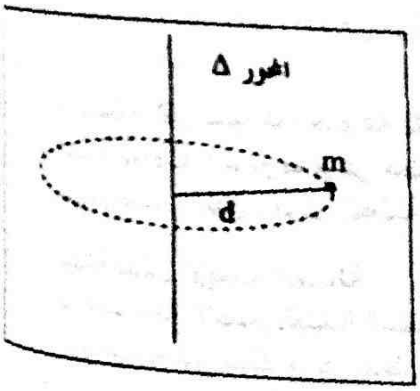
ـ القرص الذي يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني لهذه القوة هو الصغير في نصف القطر .

ـ في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني ؟

ـ تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني بنصف القطر .

نتيجة :

تبدي الأجسام الصلبة المتحركة حول محور Δ مقاومة للأثر الدوراني للقوة المطبقة عليها ندعوها العطالة الدورانية . تتعلق هذه العطالة في الأجسام الصلبة بكتلة و بنصف قطر الجسم .




ـ عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور

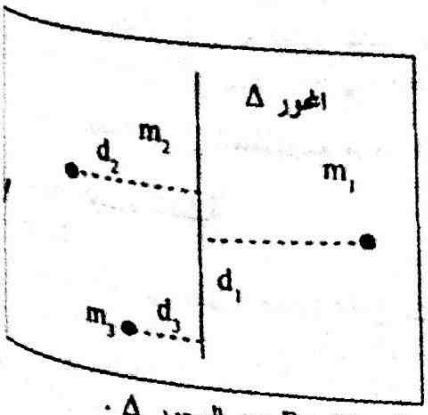
تقاس العطالة الدورانية لجسم صلب يتحرك بالنسبة لمحور Δ ثابت بمقدار فيزيائي يدعى عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور Δ .

يرمز لعزم العطالة بالرمز $J_{/\Delta}$ و هو مقدار ثابت و موجب يميز الجسم .

تعريف

يعرف عزم العطالة $J_{/\Delta}$ بالنسبة للمحور Δ لجسم نقطي كتلته m و يبعد مسافة d عن هذا المحور بالعبارة التالية : $J_{/\Delta} = md^2$

وحدة عزم العطالة في النظام الدولي هي $kg.m^2$




ـ عزم عطالة جملة نقاط مادية

يحسب عزم عطالة جملة نقاط مادية كتلة كل نقطة $m_1$ ، $m_2$ ، $m_3$ .. تبعد كل منها عن محور الدوران على التوالي مسافة $d_1$ ، $d_2$ ، $d_3$ ... . بجمع عزوم عطالة كل نقطة بالنسبة لنفس المحور :

$$J_{/\Delta} = \Sigma\, m_i d^2_i$$

مثـال :

حساب عزم عطالة حلقة نصف قطرها R و كتلتها M .

لحساب هذا العزم نتبع الخطوات التالية :

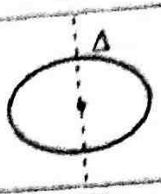
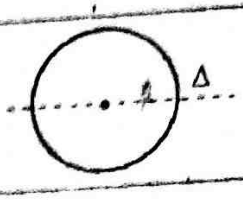
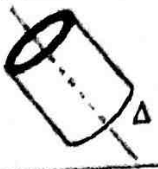
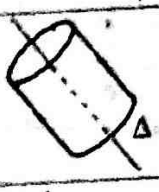
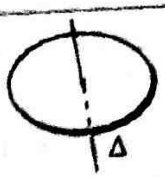
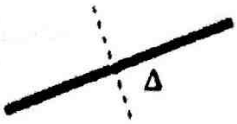
ـ نقسم الحلقة إلى عناصر صغيرة كتلها $m_i$ يمكن اعتبارها نقاطا مادية تبعد كلها نفس المسافة R عن المحور Δ .

ـ تعتبر الحلقة جملة نقاط مادية و يحسب عزم عطالتها بالعبارة التالية : $J_{/\Delta} = m_1R^2 + m_2R^2 + m_3R^2 + \ldots$

أي : $J_{/\Delta} = \Sigma M_i R^2 = (\Sigma m_i) R^2 = M R^2$ حيث أن $\Sigma M_i = M$ هي كتلة الحلقة .

أي : $J_{/\Delta} = M R^2$

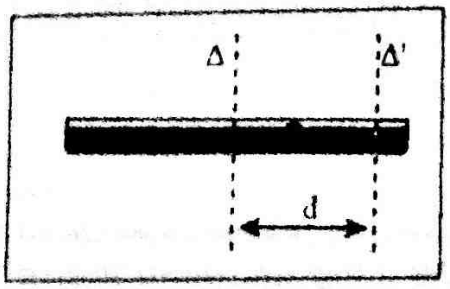
عزم عطالة بعض الأجسام الصلبة المتجانسة :

| الجسم | المحور | عزم العطالة | الشكل |
|---|---|---|---|
| حلقة نصف قطرها R وكتلتها M | محور الحلقة | $J_{/\Delta} = MR^2$ |  |
| حلقة نصف قطرها R وكتلتها M | محور قطري | $J_{/\Delta} = \frac{MR^2}{2}$ |  |
| اسطوانة مجوفة نصف قطرها R و كتلتها M | محور الاسطوانة | $J_{/\Delta} = MR^2$ |  |
| اسطوانة مصمتة نصف قطرها R و كتلتها M | محور الاسطوانة | $J_{/\Delta} = \frac{MR^2}{2}$ |  |
| قرص نصف قطره R وكتلته M | محور القرص | $J_{/\Delta} = \frac{MR^2}{2}$ |  |
| قضيب كتلته M وطوله L | محور عمودي على القضيب و يمر من منتصفه | $J_{/\Delta} = \frac{ML^2}{12}$ |  |
| قضيب كتلته M وطوله L | محور عمودي على القضيب و يمر من احد طرفيه | $J_{/\Delta} = \frac{ML^2}{3}$ |  |
| كرة مصمتة نصف قطرها R وكتلتها M | محور يمر من مركزها | $J_{/\Delta} = \frac{2MR^2}{5}$ |  |

- نظرية هيوغينز huygens

تحسب عزم عطالة الأجسام الصلبة بالنسبة لمحاور تمر من مركز كتلها و توضع في جداول . كيف نحسب عزم عطالة جسم صلب يدور حول محور لا يمر من مركز كتلته ؟

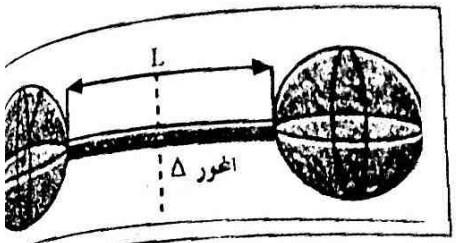
نستعين بنظرية هيوغينز التالية لحساب عزوم عطالة هذه الأجسام .




النظرية :

عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور Δ' لا يمر بمركز كتلته يساوي عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور Δ موازي للمحور Δ' و يمر من مركز كتلته زائد جداء كتلة الجسم في مربع المسافة الفاصلة بين هذين المحورين .

$$J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + M \cdot d^2$$




مثـال :
يمثل الشكل المرافق جسما متكونا من كرتين متماثلتين كتلة كل واحدة منهما m و نصف قطريهما R مرتبطتين بقضيب طوله L و كتلته M .
جد عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور Δ ، المار من منتصف القضيب .

الحـل :
عزم عطالة هذا الجسم مركب من ثلاث حدود : $J_{/\Delta} = J_1 + J_2 + J_3$

ـ الحد الأول هو عزم عطالة القضيب بالنسبة لمحور عمودي عليه ويمر من منتصفه : $J_1 = \frac{M L^2}{12}$

ـ الحد الثاني و الثالث هما عزما عطالة الكرتين بالنسبة لمحور لا يمر من مركز كتليهما . نطبق نظرية هويغنز لحساب عزم عطالة كل كرة :

ـ عزم عطالة الكرة بالنسبة للمحور Δ' ، يساوي عزم عطالة الكرة بالنسبة للمحور Δ ( $\frac{2mR^2}{5}$ حسب الجدول السابق ) جداء كتلة الكرة في مربع المسافة بين المحورين $m(\frac{L}{2} + R)^2$

أي : $J_2 = \frac{2mR^2}{5} + m(\frac{L}{2} + R)^2$

نجمع العزوم الثلاث : $J_{/\Delta} = J_1 + 2\,J_2$

أي : $J_{/\Delta} = \frac{ML^2}{12} + \frac{4mR^2}{5} + 2\,m(\frac{L}{2} + R)^2$

## توازن الجسم الصلب

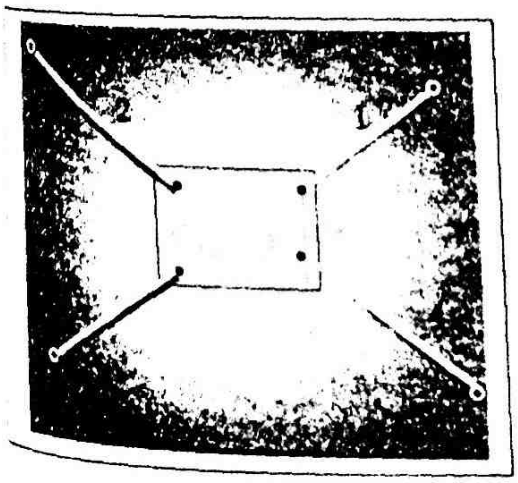
**نشاط ـ1 :**

خذ جسما خفيفا من فلين أو "بوليستيران" . استعن بزميل لك و طبق عليه بواسطة مطاط (خيوط مطاطية ) أربع قوى كيفية . حقق توازن الجسم في وضعية كيفية للأيدي .

**ـ هل يمكنكما الحصول على توازن حيث لا تكون حوامل القوى في نفس المستوي ؟**

ـ لا . ليس كل الوضعيات تحقق التوازن .

**نشاط ـ2 :**




للقيام بالحسابات نقتصر على دراسة أوضاع التوازن التي تكون فيها القوى في نفس المستوي . خذ هذه المرة جسما مسطحا خفيفا من فلين أو ورق مقوى . طبق أربع قوى بواسطة خيوط مطاطية مثبتة بدبابيس على لوح من خشب . ألصق عليه ورقة بيضاء تسمح لك بتعيين موضع الجسم و الخيوط .

1 ـ علم على ورقة بقلم شكل الجسم و حوامل الخيوط المطاطية و نقاط تثبيتها . رقم الخيوط المطاطية .

2 ـ استنتج شدة القوى المطبقة على الجسم باستعمال الينامومتر .

3 ـ مثل على الورقة أشعة القوى المطبقة على الجسم باختيار سلم .

**4 ـ جد المجموع الشعاعي للقوى الأربعة . ماذا تلاحظ ؟**

ـ نلاحظ أنه معدوم .

**5 ـ احسب عزم كل قوة بالنسبة إلى نقطة كيفية تختارها .**

**6 ـ احسب المجموع الجبري لهذه العزوم . ماذا تلاحظ ؟**

ـ نلاحظ أنه معدوم .

**7 ـ استنتج عبارتي شرطي توازن جسم صلب خاضع لأربع قوى تقع في نفس المستوي .**

ـ عبارتي شرطي توازن جسم صلب خاضع لأربع قوى تقع في نفس المستوي :

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{0}.$$

$$M_{/\Delta} = M_{F1/\Delta} + M_{F2/\Delta} + M_{F3/\Delta} + M_{F4/\Delta} = 0$$

**نشاط ـ3 :**

عوض في التجربة السابقة قوتين بقوة واحدة (تعويض المطاطين 1 و 2 مثلا بمطاط واحد 5) محافظا على نفس وضعية توازن الجسم السابق (المرسومة على الورقة ). لتعيين خصائص هذه القوة نتبع المراحل التالية :

**تعيين حامل هذه القوة :**

1 ـ ارسم على الورقة المجموع الشعاعي للقوتين المحذوفتين .

**2 ـ كيف يجب أن يكون حامل المطاط 5 لتحقيق التوازن .**

ـ يجب أن يكون حامل المطاط 5 موازيا لحامل القوة $\vec{F_5}$ التي تمثل المجموع الشعاعي للقوتين المحذوفتين .

**تعيين نقطة تطبيق هذه القوة :**

**استعمل شرط التوازن الثاني $\Sigma M_{F/\Delta} = 0$ لتعيين نقطة تثبيت الخيط المطاطي 5 على الجسم حتى يتحقق التوازن السابق .**

**(يخضع الجسم لتأثير الخيوط المطاطية 3 ، 4 و 5).**

ـ من العبارة : $M_{/\Delta} = M_{F1/\Delta} + M_{F2/\Delta} + M_{F3/\Delta} + M_{F4/\Delta} = 0$ نقوم بتعويض عزمي القوتين المحذوفتين $M_{F2/\Delta} + M_{F1/\Delta}$ بالعزم المكافئ لهما أي : $M_{F4/\Delta} + M_{F3/\Delta} = M_{F5/\Delta}$ و منه :

$F_2 . d_2 + F_1 . d_1 = F_5 . d_5$ حيث $F_5$ هي شدة المحصلة $\vec{F_5}$ . و نعين بذلك المسافة d التي يبعد بها حامل القوة $\vec{F_5}$ عن النقطة المختارة O .

**ملاحظة :**

نقطة التطبيق ليست وحيدة بل هي كل نقطة تنتمي للمستقيم الموازي لحامل القوة $\vec{F_5}$ و الذي يبعد المسافة d عن النقطة المختارة O

**تعيين شدة هذه القوة :**

حقق التوازن المطلوب بسحب المطاط 5 بيدك (بدون تغير استطالتي المطاطين 3 و 4).

**1 ـ استنتج شدة و جهة هذه القوة .**

ـ بعد تثبيت المطاط 5 في نقطة تطبيقه نحقق مرة ثانية التوازن بحيث يبقى للمطاطين الثانيين نفس الإستطالة و نفس الحامل ثم نحدد شدة و جهة القوة $F'_5$ . بعد المقارنة نجد أن : $\vec{F'_5} = \vec{F_5}$ يتحقق أنهما متطابقتان .

**2 ـ مدد على الورقة حوامل القوى الثلاث . ماذا تلاحظ ؟**

ـ عند تمديد حوامل القوى الثلاث يتحقق أنها تلتقي في نقطة واحدة .

**4 ـ هل عبارتي شرطي توازن الجسم الصلب تبقى محققة ؟**

ـ نعم . عبارتي شرطي توازن الجسم الصلب تبقى محققة

**5 ـ استنتج صيغة أخرى لشرطي توازن جسم صلب خاضع لثلاث قوى غير متوازية .**

- $\Sigma \vec{F_i} = \vec{0}$
- **أن تكون القوى الثلاث متقاطعة في نفس النقطة .**

**نشاط ـ4 :**

**عوض هذه المرة في تجربة النشاط 3 القوتين المؤثرتين على الجسم من طرف المطاطين 3 و 4 بقوة واحدة باستعمال مطاط 6 محافظا دائما على نفس وضعية توازن الجسم السابقة (المرسومة على الورقة). ابحث على وضعية التوازن بسحب المطاط 6 بيدك (بدون تغير استطالة المطاط 5).**

1 ـ ابحث عن نقطة تثبيت الخيط المطاطي 6 على الجسم حتى يتحقق التوازن السابق .

2 ـ علم على نفس الورقة حامل الخيط المطاطي 6 بعد تحقيق التوازن .

**3 ـ استنتج خصائص القوة التي يطبقها هذا المطاط على الجسم .**

ـ ـ بعد تثبيت المطاط 6 في نقطة تطبيقه نحقق مرة ثانية التوازن بحيث يبقى للمطاط 5 نفس الإستطالة و نفس الحامل ثم نحدد شدة و جهة القوة $\vec{F_6}$ . بعد المقارنة نجد أن : $\vec{F'_5} = -\vec{F_6}$ يتحقق أنهما متساويتين في الشدة و متعاكستين في الإتجاه .

**7 ـ هل عبارتي شرطي توازن الجسم الصلب تبقى محققة ؟**

ـ نعم . عبارتي شرطي توازن الجسم الصلب تبقى محققة

**8 ـ استنتج صيغة أخرى لشرطي توازن جسم صلب خاضع لقوتين .**

- $\Sigma \vec{F_i} = \vec{0}$ ، **القوتين متساويتين في الشدة و متعاكستين في الإتجاه .**
- **أن تكون القوتين لهما نفس الحامل .**

**نتيجة :**

**يكون الجسم في معلم عطالي (معلم مخبري مثلا ) خاضعا لعدة قوة ، في حالة توازن إذا كان :**

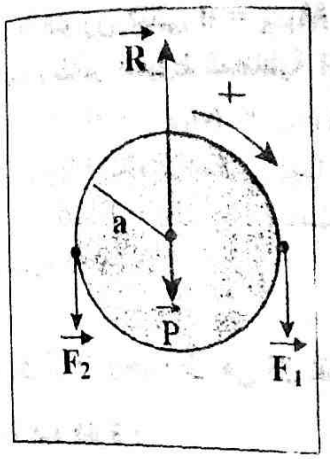
**1ـ كل القوة المؤثرة عليه موجودة في نفس المستوي**

**2ـ الأثر الإجمالي الإنسحابي عليه معدوم أي أن المجموع الشعاعي للقوى المطبقة على هذا الجسم معدوم :**

$$\Sigma \vec{F_i} = \vec{0}$$

3ـ التأثير الإجمالي الدوراني عليه معدوم أي أن المجموع الجبري لعزوم القوى المؤثرة عليه معدوم :

$$\Sigma M_{F/\Delta} = 0$$




**تطبيق : توازن بكرة**

**يبين الشكل المرفق بكرة نصف قطرها a في حالة توازن .**

**قارن بين شدتي القوتين $F_1$ و $F_2$ .**

**الحـل :**

القوى المؤثرة على البكرة هي :

1 ـ $\vec{P}$ تأثير الأرض على البكرة ، نقطة تطبيقها مركز البكرة .

2 ـ $\vec{R}$ تأثير المحور على البكرة ، نقطة تطبيقها مركز البكرة .

3 ـ $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ قوتي تأثير الحبل على البكرة .

من شرطي توازن البكرة نستنتج ما يلي :

a ـ الشرط الأول : محصلة القوى المؤثرة على البكرة معدومة :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

b ـ الشرط الثاني : محصلة عزوم القوى المؤثرة على البكرة ، بالنسبة لمحور يمر من مركزها ، تساوي الصفر :

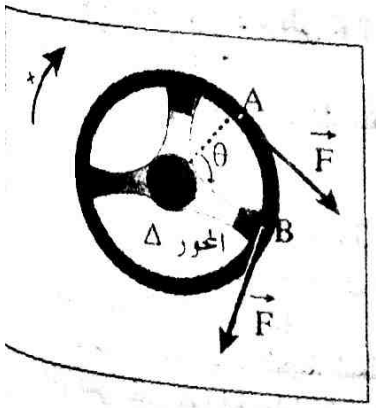
$$\Sigma M_{F/\Delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 . a - F_2 . a + P . 0 + R . 0 = 0$$

أي : $F_1 . a = F_2 . a = 0$

و منه نستنتج أن القوتين لهما نفس الشدة .

## عبارة عمل مزدوجة

تعرفنا في الفصل السابق على عبارة عمل قوة ثابتة شدتها F ، موازية لمسار انتقال نقطة تأثيرها المستقيم طوله d و في جهة الحركة يحسب هذا العمل بالعبارة التالية : $W = F . d$




**نشاط ـ 1 :**

طبق قوة بيدك على مقود شاحنة ، دائري الشكل نصف قطره R ، لتديره بزاوية θ .

نفرض أن القوة التي تطبقها على المقود تبقى شدتها ثابتة و اتجاهها دائما مماسي للمقود عند نقطة التطبيق .

**ـ جزء المسار الدائري AB للقوة إلى قطع صغيرة نعتبرها مستقيمة و احسب عمل القوة عندما تنتقل نقطة تطبيقها على كل جزء ـ باعتبار عمل القوة من A إلى B هو مجموع أعمال القوة على كل جزء ، جد عمل القوة من A إلى B .**

ـ إذا كانت كل القوى ثابتة يكون مجموعها أيضا ثابت فيكون عملها :

$$W_{AB}(\Sigma \vec{F}) = \Sigma (W_{AB} \vec{F})$$

$$\Sigma (W_{AB} \vec{F}) = W_{AB1}(\vec{F}) + W_{B1B2}(\vec{F}) + W_{B2B}(\vec{F}))$$

$$= \vec{F} . \vec{AB_1} + \vec{F} . \vec{B_1B_2} + F . \vec{B_1B}$$

$$= (\vec{AB_1} + \vec{B_1B_2} + \vec{B_2B_3}) . \vec{F}$$

$$= \widehat{AB} . F$$

**ـ بين أن هذه العبارة تكتب على الشكل التالي : $W_M = M_{F/\Delta} . \theta$ حيث $M_{F/\Delta}$ هو عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران .**

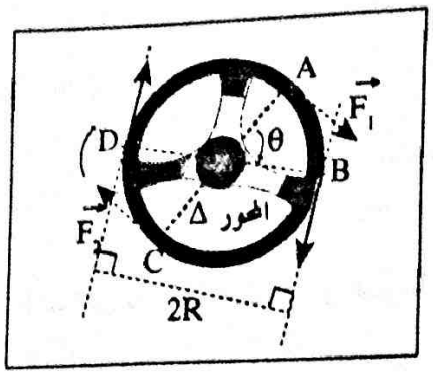
ـ من العلاقة السابقة : $W_{AB}(F) = \widehat{AB} . F$

نعوض عن قيمة طول القوس $\widehat{AB}$ : $\widehat{AB} = R . \theta$

نعوض بقيمة طول القوس في علاقة العمل فنجد : $W_{AB}(F) = \widehat{AB} . F = R . \theta . F$

نلاحظ في هذه العلاقة أن $F . R$ تمثل عزم القوة F أي : $M_{F/\Delta} = F . R$

و منه : $W_M = M_{F/\Delta} . \theta$




نشاط ـ2 :

طبق هذه المرة بيديك الإثنين مزدوجة قوتين على المقود لتديره بزاوية θ .

ـ اتبع نفس خطوات النشاط السابق لحساب عمل هذه المزدوجة .

ـ بين أن عبارة عمل هذه المزدوجة تكتب على الشكل :

$$W_M = M . \theta$$

حيث M عزم المزدوجة .

ـ جد عبارة الإستطاعة علما أنها تساوي عمل المزدوجة على وحدة الزمن .

$P = (M . \theta) / t$ حيث M عزم المزدوجة .

و لكن : $\theta / t = \omega$

و منه : $P = M . \omega$

## ـ عبارة الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة دورانية

نشاط ـ1 :

يدور جسم نقطي كتلة m حول محور ثابت بسرعة v ثابتة و يرسم مسارا دائريا نصف قطره R .

ـ جد عبارة طاقته الحركية .

ـ بالإعتماد على علاقة السرعة v بالسرعة الزاوية بين أن الطاقة الحركية تكتب على الشكل التالي :

$$E_c = 1/2 . J_\Delta . \omega^2$$

حيث $J_{/\Delta} = mR^2$ هو عزم عطالة الجسم النقطي بالنسبة لمحور الدوران .

ـ من عبارة الطاقة الحركية للنقطة المادية المستخرجة في الحركة الإنسحابية نستنتج :

$$E_c = 1/2 . m . v^2$$

و لكن : $v = R . \omega$ و منه : $v^2 = R^2 . \omega^2$

إذن : $E_c = 1/2 . m . R^2 . \omega^2$

و لكن : $J_\Delta = m . R^2$

إذن : $E_c = 1/2 . J_\Delta . \omega^2$

نتيجة :

**الطاقة الحركية الدورانية لجسم صلب يدور حول محور ثابت Δ هو جداء عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لنفس المحور في مربع السرعة الزاوية (السرعة الدورانية) لهذا الجسم : $E_c = 1/2 . J_\Delta . \omega^2$.**

ملاحظة :

لاحظ التشابه بين عبارتي الحركة الإنسحابية ($E_c = 1/2\, m\, v^2$) و الطاقة الحركية الدورانية ($E_c = 1/2\, J_\Delta\, \omega^2$)

حيث نعوض :

- المقدار الذي يقيس العطالة الإنسحابية ، الكتلة m ، بالمقدار الذي يقيس العطالة الدورانية ، عزم العطالة $J_\Delta$
- السرعة الخطية v بالسرعة الدورانية ω .

# الخلاصـــة

**1 ـ السرعة اللحظية الخطية و السرعة اللحظية الدورانية**

العلاقة التي تربط السرعة الخطية اللحظية بالسرعة اللحظية الدورانية هي : $v = R\theta$

تمثل $\omega$ السرعة اللحظية الدورانية ، R نصف قطر المسار الدائري .

**2 ـ عزم قوة بالنسبة لمحور ثابت**

في حالة قوة $\vec{F}$ عمودية على محور الدوران $\Delta$ يحسب عزم هذه القوة بالنسبة لهذا المحور بالعبارة التالية : $M_{F/\Delta} = F\,d$

يمثل d البعد العمودي بين محور الدوران و حامل القوة

- يكون عزم القوة موجبا إذا كانت القوة تدير الجسم في الإتجاه الموجب المختار
- يكون عزم القوة سالبا إذا كانت القوة تدير الجسم عكس الإتجاه الموجب المختار

**3 ـ المزدوجة**

هي جملة قوتين في نفس المستوي ، لهما نفس الشدة ، متعاكستان في الإتجاه و ليس لهما نفس الحامل .

**4 ـ عزم المزدوجة**

عبارة عزم المزدوجة تكتب على الشكل : $M_{/\Delta} = F\,d$ ، حيث d البعد العمودي بين حاملي القوتين .

**5 ـ عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور**

تبدي الأجسام الصلبة المتحركة حول محور $\Delta$ مقاومة للأثر الدوراني للقوة المطبقة عليها ندعوها العطالة الدورانية .

تقاس هذه العطالة الدورانية بمقدار فيزيائي يدعى عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور $\Delta$ و نرمز له بالرمز $J_{/\Delta}$ .

- عزم عطالة جسم نقطي كتلته m ، يبعد مسافة d عن المحور يحسب بالعبارة التالية : $J_{/\Delta} = m\,d^2$ .

**6 ـ نظرية هويغنز**

عزم عطالة جسم صلب كتلته m بالنسبة لمحور $\Delta'$ موازي للمحور $\Delta$ الذي يمر من مركز قصوره يعطى بالعبارة :

$J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + m\,d^2$ حيث :

- $J_{/\Delta'}$ عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة للمحور $\Delta'$
- $J_{/\Delta}$ عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة للمحور $\Delta$
- d المسافة الفاصلة بين المحورين

**7 ـ شرطا توازن جسم صلب**

يكون جسم متحرك في حالة توازن إذا تحقق الشرطان :

مجموع القوى المؤثرة عليه معدوم $(\Sigma \vec{F_i} = \vec{0})$ و المجموع الجبري لعزوم القوى المطبقة عليه معدوم $\Sigma M_{F/\Delta} = 0$ .

**8 ـ عبارة عمل قوة في حالة الحركة الدورانية**

عندما يدور جسم بزاوية $\theta$ حول محور $\Delta$ تكتب عبارة عمل القوة المطبقة عليه على الشكل : $W = M_{F/\Delta}\,\theta$

حيث $M_{F/\Delta}$ هو عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران .

**9 ـ عبارة عمل مزدوجة**

- عبارة عمل مزدوجة عندما يدور جسم بزاوية $\theta$ حول محور $\Delta$ تكتب على الشكل : $W_M = M\,\theta$ حيث M عزم المزدوجة
- عبارة استطاعة مزدوجة : $P = M\,\omega$ ، $\omega$ السرعة الزاوية التي يدور بها الجسم .

**10 ـ عبارة الطاقة الحركية (حالة الدوران)**

عبارة الطاقة الحركية الدورانية لجسم صلب يدور حول محور ثابت $\Delta$ هي : $E_c = 1/2\, J_\Delta\, \omega^2$

$J_\Delta$ عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور الدوران .

# تمـــاريـــن

**التمرين ـ1**

**اجب بصحيح أو خاطئ**

**1ـ يبقى شعاع السرعة ثابتا في الحركة الدائرية المنتظمة .**

**2ـ في الحركة الدائرية المنتظمة العلاقة بين السرعة الخطية و السرعة الزاوية هي : $\omega = V/R$ .**

**3ـ الطاقة الحركية مقدار شعاعي .**

**4ـ وحدة الطاقة الحركية هي Watt**

**5ـ تتعلق الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة انسحابية بقيمة سرعة نقطة كيفية من الجسم .**

**6ـ تتعلق الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة دورانية بكتلة الجسم و سرعته الزاوية فقط .**

**7ـ يميز عزم العطالة ، عطالة الأجسام الصلبة في حركات دورانية .**

**8ـ الطاقة الحركية الإنسحابية مستقلة عن معلم الدراسة .**

**9ـ الطاقة الحركية الدورانية مستقلة عن موضع محور الدوران .**

**10ـ الطاقة الحركية لجسم في حركة انسحابية ثابتة .**

**11ـ يتعلق تغير الطاقة الحركية فقط بالحالة الإبتدائية و الحالة النهائية .**

**الحل ـ1**

1ـ خطأ . لأن شعاع السرعة ، في حركة منتظمة ، ثابت في الشدة و لكن يغير اتجاهه خلال الزمن . لذا لا يمكن لجسم معزول أن يتحرك بحركة دائرية منتظمة .

2ـ صحيح : في الواقع هذه العلاقة بين السرعة الخطية و السرعة الزاوية دائما صحيحة ليس فقط في الحركة الدائرية المنتظمة.

3ـ خطأ : لأن الطاقة ليست مقدار شعاعي و لكن الطاقة هي مقدار سلمي ، لا يمكن لشكل منها أن يكون مقدار شعاعيا .

4ـ خطأ : الطاقة الحركية هي شكل من أشكال الطاقة و وحدتها هي وحدة الطاقة أي الجول (J) .

5ـ صحيح : تعريف الحركة الإنسحابية هو أن يكون لكل نقاط الجسم نفس السرعة ، و منه فإن سرعة نقطة كيفية منه هي سرعة الجسم .

6ـ خطأ : في الحركة الدورانية ليس لكل نقاط الجسم نفس السرعة و لهذا فإن الطاقة الحركية للجسم تتعلق بسرعة كل نقطة مادية من هذا الجسم أي بكيفية توزيع هذه النقاط بالنسبة لمحور الدوران . يميز هذا التوزيع عزم عطالة الجسم المتحرك .

7ـ نعم : تبدى الأجسام الصلبة التي تدور حول محور ثابت مقاومة للأثر الدوراني التي ندعوها العطالة الدورانية .

8ـ خطأ : تتعلق الطاقة الحركية الإنسحابية بمعلم الدراسة لأن السرعة الإنسحابية تحسب بالنسبة لمعلم أي تتعلق بمعلم الدراسة.

9ـ خطأ : تتعلق الطاقة الحركية الدورانية بموضع محور الدوران لأن عزم عطالة الجسم المتحرك يتعلق بمحور الدوران ، أي أن كيفية توزيع نقاط الجسم الصلب تتعلق بموضع محور الدوران .

10ـ خطأ : إذا تغيرت سرعة الجسم فإن طاقته الحركية بالضرورة تتغير .

11ـ صحيح : لأن الطاقة الحركية دالة حالة معرفة في كل لحظة .

**التمرين ـ2**

**احسب السرعة الزاوية لدوران عقارب ساعة .**

**الحل ـ2**

حساب السرعة الزاوية لدوران عقارب ساعة :

السرعة الزاوية هي النسبة بين الزاوية الممسوحة على الزمن اللازم لمسحها .

ـ عقرب الساعات : خلال 24 ساعة أي 86400 s يقوم بدورة واحدة أي يمسح زاوية قدرها $2\pi$ rd و منه :

$$\omega_1 = 2\pi / 86400 = 7,27 \,.\, 10^{-5} \text{ (rd /s)}$$

ـ عقرب الدقائق : خلال 1 ساعة أي 3600 s يقوم بدورة واحدة أي يمسح زاوية قدرها $2\pi$ rd و منه :

$$\omega_1 = 2\pi / 3600 = 1,74 \,.\, 10^{-3} \text{ (rd /s)}$$

ـ عقرب الثواني : خلال 1 دقيقة أي 60 s يقوم بدورة واحدة أي يمسح زاوية قدرها $2\pi$ rd و منه :

$$\omega_1 = 2\pi / 60 = 10,47 \,.\, 10^{-2} \text{ (rd /s)}$$

**التمرين ـ3**

**احسب السرعة الزاوية لدوران الأرض في المعلم المركزي الأرضي .**

**الحل ـ3**

حساب السرعة الزاوية لدوران الأرض في المعلم المركزي الأرضي :

خلال 24 ساعة أي 86400 s تقوم الأرض بدورة واحدة أي تمسح زاوية قدرها $2\pi$ rd و منه :

$$\omega_T = 2\pi / 86400 = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ (rd /s)}$$

**التمرين ـ4**

**ما هي السرعة الزاوية لجسم يدور و ينجز 300 دورة في الثانية ؟**

**الحـل ـ4**

إذا رمزنا لعدد الدورات التي يدورها جسم حول محور معين في الثانية بالرمز N فإن العلاقة التي تربطها بالسرعة الزاوية هي : $N = 2\pi / \omega$ أو $\omega = 2\pi N$ أي إذا كانت السرعة الزاوية تساوي $2\pi$ (rd /s) يدور الجسم 1 دورة في الثانية

من أجل جسم يدور 300 دورة في الثانية سرعته الزاوية تساوي : $\omega = 2\pi N = 6{,}28 \cdot 300 = 1884$ (rd /s)

**التمرين ـ5**

**كم دورة في الدقيقة يدورها جسم سرعته الزاوية 10 rd/s .**

**الحـل ـ5**

عدد الدورات في 1 ثانية : $N = 2\pi / \omega = 10 / 2\pi = 1{,}59$ (tr / s)

عدد الدورات في الدقيقة أي 60 ثانية : $N = (2\pi / \omega) \cdot 60 = (2\pi / 10) \cdot 60 = 95{,}54$ (tr / mn)

**التمرين ـ6**

**يدور جسم تحت تأثير مزدوجة عزمها $M = 100$ N . m بسرعة زاوية $\omega = 6$ rd/s**

**ما هي استطاعة المزدوجة التي تديره ؟**

**الحـل ـ6**

حساب استطاعة المزدوجة التي تديره :

استطاعة المزدوجة هي عمل هذه المزدوجة على وحدة الزمن : $P = (M \cdot \theta) / t = M \cdot \omega = 100 \cdot 6 = 600$ Watt

**التمرين ـ7**

**نطبق قوة مماسية شدتها $F = 100$ N على بعد $d = 10$ cm من محور دوران جسم أسطواني .**

**ما هو العمل المنجز خلال 10 دورات لهذا الجسم ؟**

**الحـل ـ7**

حساب العمل المنجز خلال 10 دورات لهذا الجسم :

عندما يدور الجسم 10 دورات معناه يمسح زاوية قدرها : $\theta = 10 \cdot 2\pi = 20\pi$ rd

و منه : $W = M \cdot \theta = F \cdot d \cdot \theta = 100 \cdot 0{,}1 \cdot 20\pi = 628$ J

**التمرين ـ8**

**يفرمل جسم بتأثير مزدوجة شدة قوتيها $F = 15$ N و متباعدتان بمسافة $d = 10$ cm .**

**1ـ ما هي إشارة العمل ؟ 2ـ احسب هذا العمل من أجل 50 دورة .**

**الحـل ـ8**

1ـ إشارة العمل : سالبة لأن القوتان تعرقلان حركة الجسم .

2ـ حساب هذا العمل من أجل 50 دورة :

عندما يدور الجسم 50 دورة معناه يمسح زاوية قدرها : $\theta = 50 \cdot 2\pi = 100\pi$ rd

و منه : $W = -M \cdot \theta = -F \cdot d \cdot \theta = -15 \cdot 0{,}1 \cdot 100\pi = -471$ J

**التمرين ـ9**

**يخضع جسم : ـ لقوة مماسية محركة شدتها $f = 5$ N تبعد بمسافة $d = 10$ cm عن محور الدوران .**

**ـ لمزدوجة قوتين مفرملة شدة كل قوة من قوتيها $F = 7$ N و المسافة بينهما $d = 3$ cm .**

**1ـ احسب العمل المنجز خلال 10 دورات لهذا الجسم في كل حالة .**

**2ـ احسب العمل الكلي المنجز خلال 10 دورات إذا خضع هذا الجسم للحالتين .**

**الحـل ـ9**

ـ حساب العمل المنجز خلال 10 دورات لهذا الجسم في الحالة الأولى :

$$W_M = M \cdot \theta = F \cdot d \cdot \theta = 5 \cdot 0{,}1 \cdot 20\pi = 31{,}4 \text{ J}$$

ـ حساب العمل المنجز خلال 10 دورات لهذا الجسم في الحالة الثانية :

$$W_R = -M \cdot \theta = -F \cdot d \cdot \theta = -7 \cdot 0{,}03 \cdot 20\pi = -13{,}19 \text{ J}$$

2ـ حساب العمل الكلي المنجز : $W = W_R + W_M = 31{,}4 - 13{,}9 = 18{,}21$ J

**التمرين ـ10**

ما هي المعطيات اللازمة لحساب :

1 ـ السرعة الزاوية لدوران الأرض حول الشمس . 2 ـ سرعة رأس العقرب الكبير للساعة .

3 ـ عزم مزدوجة محرك سيارة . 4 ـ عزم مزدوجة القوى المطبقة على مثقب كهربائي .

**الحل ـ10**

1 ـ مدة دورة واحدة لدوران الأرض حول الشمس (الدور T) . $\omega = 2\pi / T$

2 ـ مدة دورة واحدة + طول عقرب الساعة . $v = \omega . R = 2\pi / (T . R)$

3 ـ الإستطاعة + عدد دوران المحرك في الدقيقة (N) . $P = M . \omega \Rightarrow M = P / 2\pi N$

4 ـ الإستطاعة + عدد دوران المحرك في الدقيقة . $P = M . \omega \Rightarrow M = P / 2\pi N$

**التمرين ـ11**

**نعتبر الجملة المكونة من اسطوانتين لهما نفس المحور Δ . نصف قطر الأسطوانة الأولى $R_1 = 25$ cm نصف قطر الثانية $R_2 = 50$ cm . نلف على كل اسطوانة حبلا يحمل في أحد طرفيه جسما .**
**عندما تدور الجملة يلف الحبلين في اتجاهين مختلفين . احسب سرعة كل جسم عندما تكون السرعة الزاوية للجملة N = 20 tr/mn (عشرون دورة في الدقيقة).**

**الحل ـ11**

حساب سرعة كل جسم عندما تكون السرعة الزاوية للجملة N = 20 tr/mn : عندما تدور الجملة بسرعة زاوية معينة فإن الأسطوانتين تمسحان نفس الزاوية و بالتالي تكون لهما نفس السرعة الزاوية : $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

و لكن نقطة تطبيق قوتي الحبلين تمسحان قوسين أطوالهما غير متساوية و منه تكون سرعتي الأسطوانتين مختلفة : $V_1 \neq V_2$

$$V_1 = R_1 . \omega = (2\pi . N . R_1) / 60 = (6,28 . 20 . 0,25) / 60 = 0,52 \text{ (m/s)}$$

$$V_1 = R_2 . \omega = (2\pi . N . R_2) / 60 = (6,28 . 20 . 0,5) / 60 = 1,05 \text{ (m/s)}$$

**التمرين ـ12**

**يبقي قمر اصطناعي أرضي ثابتا على الشاقول المار من نقطة محددة على خط الإستواء .**
**يدور هذا القمر على بعد 36000 km فوق سطح الأرض . نصف قطر الأرض عند خط الإستواء يساوي 6400 km .**
**1 ـ احسب السرعة الزاوية للقمر الإصطناعي . 2 ـ ما هي سرعته الخطية ؟**

**الحل ـ12**

1 ـ حساب السرعة الزاوية للقمر الإصطناعي :

حتى يبقي القمر الإصطناعي ثابتا على الشاقول المار من نقطة محددة على خط الإستواء فإنه يجب أن تكون السرعة الزاوية للقمر الإصطناعي هي نفسها التي تدور بها الأرض حول محورها : $\omega_s = \omega_T = 2\pi / 86400 = 7,27 . 10^{-5}$ (rd /s)

2 ـ إيجاد سرعته الخطية : $V = R . \omega_s = (R_T + h) \omega_s = [(6400 + 36000) . 1000 . 7,27 . 10^{-5} = 3082$ (m/s)

أي : $V = 3082 . 3,6 = 11095,2$ km/h

**التمرين ـ13**

**تتحرك سيارة بسرعة ثابتة V = 100 km/h ، نصف قطر عجلات السيارة R = 35 cm .**
**1 ـ احسب السرعة الزاوية لكل عجلة**
**2 ـ ما هي الزاوية الممسوحة من قبل نقطة على العجلة عند قطع مسافة 1 km .**

**الحل ـ13**

1 ـ حساب السرعة الزاوية لكل عجلة : $\omega = V / R = (100 . 1000) / (3600 . 0,35) = 79,4$ (rd /s)

2 ـ حساب الزاوية الممسوحة من قبل نقطة على العجلة عند قطع مسافة 1 km :

المسافة المقطوعة : $S = R\theta$ و منه : $\theta = S / R = 1000 / 0,35 = 2857$ (rd)

**التمرين ـ14**

**لدراجة مهرج سيرك عجلتين مختلفتين في القطر . الأولى قطرها 50 cm و الثانية قطرها 1 m .**
**تتحرك هذه الدراجة بسرعة 7,5 km/h .**
**1 ـ احسب السرعة الزاوية لكل عجلة .**
**2 ـ ما هي الزاوية الممسوحة من نقطة على العجلة الكبيرة عندما تدور العجلة الصغيرة بدورة واحدة ؟**

**الحل ـ14**

1 ـ حساب السرعة الزاوية لكل عجلة :

العجلتين ليس لديهما نفس محور الدوران فسرعة الدراجة تمثل سرعة أي نقطة على محيط العجلة الصغيرة منها أو الكبيرة .
فعندما تنتقل الدراجة مسافة معينة فإن العجلة الكبية تقوم بالدوران بزاوية معينة تقابل طول القوس المساوي للمسافة المقطوعة من قبل الدراجة و في المقابل فإن العجلة الصغيرة تدور بزاوية بالطبع تكون أكبر حتى تقابل القوس الذي يساوي المسافة المقطوعة .
الخلاصة : تكون السرع الخطية للعجلتين متساوية و تختلف في السرع الزاوية .

ـ السرعة الزاوية لكل عجلة : $\omega_1 = V / R_1 = (7,5 \cdot 1000) / (3600 \cdot 0,25) = 8,32$ (rd / s)

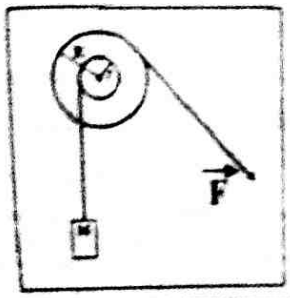
$\omega_2 = V / R_2 = (7,5 \cdot 1000) / (3600 \cdot 0,5) = 4,16$ (rd / s)

2 ـ الزاوية الممسوحة من نقطة على العجلة الكبيرة عندما تدور العجلة الصغيرة بدورة واحدة :

$$\left.\begin{array}{l} S = R_1\,\theta_1 \\ S = R_2\,\theta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow R_1\,\theta_1 = R_2\,\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = (R_1\,\theta_1) / R_2 = \pi\,(rd)$$

الزاوية الممسوحة من نقطة على العجلة الكبيرة عندما تدور العجلة الصغيرة بدورة هي : $\theta_2 = \pi$ (rd) أي نصف دورة .

**التمرين ـ15**




**للبكرة محزان يلتف حولهما الحبل ، الأول نصف قطره 50 cm و الثاني نصف قطره 10 cm .**
**نرفع بهذه البكرة حمولة كتلتها 100 kg .**

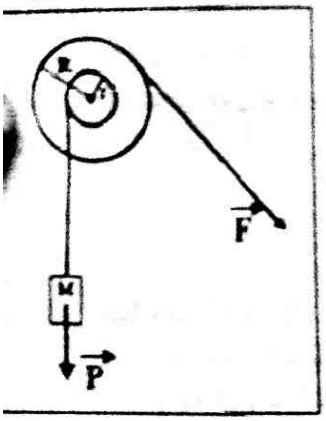
**1 ـ على أي محز يستحسن لف الحبل الذي يرفع الحمولة ؟**

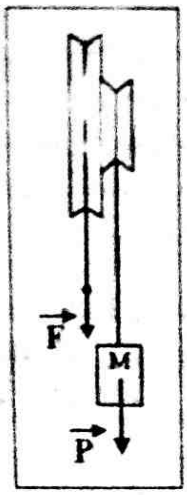
**2 ـ احسب قوة السحب عندما يصعد الجسم بسرعة ثابتة .**

**3 ـ ترفع الحمولة إلى ارتفاع h = 2 m . ما هو طول الحبل المسحوب ؟**

**4 ـ ما هي الزاوية الممسوحة من نقطة على البكرة ؟**

**الحـل ـ15**




عند التوازن يحدث تساوي العزمان اللذان يديران البكرة :

$$F \cdot R = P \cdot r \Rightarrow F = (P \cdot r) / R$$

قوة السحب تقل بزيادة نصف القطر للبكرة الكبيرة R

1 ـ يستحسن لف الحبل على البكرة التي لها قطر أصغر حتى تصغر شدة القوة التي تسحب الحبل على البكرة الكبيرة .

2 ـ حساب قوة السحب عندما يصعد الجسم بسرعة ثابتة :

تكون السرعة ثابتة (توازن)عندما يحدث تساوي العزمان اللذان يديران البكرة :

$$F \cdot R = P \cdot r \Rightarrow F = (P \cdot r) / R$$

$$F = (1000 \cdot 10) / 50 = 200\ N$$

3 ـ إيجاد طول الحبل المسحوب :

طول الحبل المسحوب يساوي إلى طول القوس الذي تدور به البكرة الصغيرة لأن الحمولة معلقة على البكرة الصغيرة :

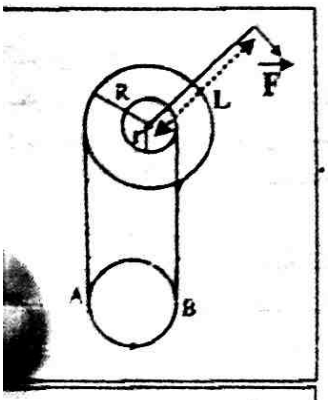
$$h = r \cdot \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = h / r = L / R \Rightarrow L = (h \cdot R)/r = (2 \cdot 50)/10 = 10\ m.$$

لأن البكرتان لهما نفس المحور و بالتالي تدوران بنفس الزاوية أي : $\theta_2 = \theta_1$

4 ـ الزاوية الممسوحة من نقطة على البكرة :

$$\theta_2 = \theta_1 = (h / r) = L / R = 2 / 0,1 = 10 / 0,5 = 20\ rd\ .$$

**التمرين ـ16**



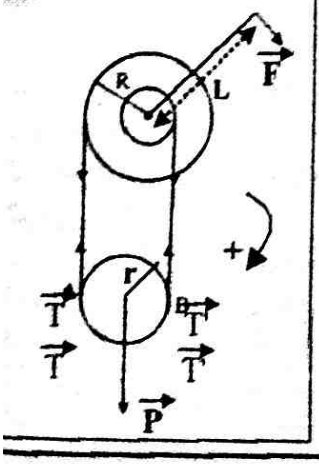

**ملفاف تفاضلي مكون من اسطوانتين مترابطتين لهما نفس المحور نصف قطرهما مختلفان ، الأول R = 15 cm و الثاني r = 10 cm .يلف على كل منهما طرفي حبل حامل لبكرة متحركة .**

**طول مقبض التدوير L = 50 cm .**

**1 ـ ما هي القوة التي يجب تطبيقها عموديا على المقبض حتى يرفع ثقل P = 500 N ؟**

**2 ـ ماذا يحدث لو كان R = r ؟ فسر النتيجة .**

**الحـل ـ16**




1 ـ القوة التي يجب تطبيقها على المقبض لجعل الملفاف في حالة توازن :

تخضع البكرة المتحركة لثلاث قوى :

قوة الثقل $\vec{P}$ ، توتر الخيط في الجهتين $\vec{T}$ و $\vec{T'}$ .

شرط التوازن : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{T'} = \vec{0}$ أي : $P = T + T'$

الثقل $\vec{P}$ مطبق في مركز البكرة (على نفس البعد من نقطتي تطبيق التوترين $\vec{T}$ و $\vec{T'}$)

نستنتج أن : $T = T'$ و تصبح عبارة التوازن : $P = 2\,T$

و كذلك الملفاف يخضع لثلاث قوى :

القوة المطبقة $\vec{F}$ ، توتر الخيط في الجهتين $\vec{T}$ و $\vec{T'}$ .

شرط التوازن ينص على أن المجموع الجبري لعزوم القوى المؤثرة على الملفاف معدوم أي : مجموع عزوم القوى التي تحاول تدوير الملفاف في جهة عقارب الساعة يساوي إلى مجموع

عزوم القوى التي تحاول تدوير الملفاف في الجهة المعاكسة : $F . L + T . r = T . R$

لكن : $T = T' = P / 2$

$F . L + (P / 2) . r = (P / 2) . R$

و منه نستنتج : $F = (P/2 L) . (R - r) = (500 . 0,05) / (2 . 0,5) = 25 N$

2 ـ تفسير ماذا يحدث لو كان $R = r$ : تكون القوة $F$ صغيرة كلما كان الفرق بين نصف القطرين صغيرا .

ـ في حالة ما إذا كان $R = r$ يكون عزمي $\vec{T}$ و $\vec{T'}$ متساويين بحيث مهما تكن القوة $\vec{F}$ صغيرة تدير الملفاف le Treuil

**التمرين ـ17**

**ينتج محرك سيارة استطاعة عظمى قدرها $P = 120 kW$ عندما يدور المحرك بسرعة $N = 6000 tr/mn$ .**
**قيمة المزدوجة المحركة العظمى عندما يدور المحرك بسرعة $N' = 3500 tr/mn$ هي : $170 N . m$ .**
**أقصى سرعة للسيارة على الطريق هي $V = 210 km/h$ .**

**1 ـ هل توافق المزدوجة المحركة العظمى السرعة العظمى ؟**
**2 ـ احسب المزدوجة المحركة عند السرعة العظمى .**
**3 ـ احسب الإستطاعة التي توافق المزدوجة المحركة العظمى .**
**4 ـ احسب محصلة قوى الإحتكاك المطبقة على السيارة عند السرعة العظمى باعتبار الحركة مستقيمة منتظمة على طريق أفقي**

**الحـل ـ17**

1 ـ هل توافق المزدوجة المحركة العظمى السرعة العظمى ؟

لا : لأن المزدوجة العظمى تكون عند سرعة دوران المحرك $3500 tr/mn$ التي هي ليست عظمى لأن السرعة العظمى توافق الإستطاعة العظمى و الإستطاعة تكون عظمى عندما يدور المحرك بسرعة $6000 tr/mn$ .

2 ـ حساب المزدوجة المحركة عند السرعة العظمى : $M = P. 60 /(2 \pi N)$

توافق السرعة العظمى عند الإستطاعة العظمى $P$ : $M = 120 . 60 . 1000/(2 . 3,14 . 6000) = 191 N . m$

3 ـ حساب الإستطاعة التي توافق المزدوجة المحركة العظمى : $P = M . \omega = M . 2 \pi N'$

$P = 170 . 2 . 3,14 . (3500/60) = 62,27 kW$ .

4 ـ حساب محصلة قوى الإحتكاك المطبقة على السيارة عند السرعة العظمى :

$P = F . V \Rightarrow F = P / V = (120 . 10^3 . 3600) / (210 . 10^3) = 2057 N$ .

**التمرين ـ18**

**تنزلق كرة كتلتها $M = 500 g$ نصف قطرها $R = 10 cm$ بحركة انسحابية و بسرعة قدرها $V = 5 m/s$ .**

**1 ـ جد الطاقة الحركية لهذه الكرة .**
**2 ـ عين سرعتها الزاوية لو كانت تدور بنفس الطاقة الحركية حول محور يمر من مركزها .**

**الحـل ـ18**

1 ـ إيجاد الطاقة الحركية لهذه الكرة :

الطاقة الحركية للكرة و هي تنزلق ولا تتدحرج أي أن لها حركة انسحابية و طاقتها الحركية تكتب على شكل :

$E_c = 1/2 . M . V^2 = 1/2 . 0,5 . 5^2 = 6,25 (J)$

2 ـ تعيين سرعتها الزاوية لو كانت تدور بنفس الطاقة الحركية حول محور يمر من مركزها :

لو كانت الكرة تدور حول محور فإن طاقتها الحركية تكتب على الشكل : $E_{cR} = 1/2 . J_{/\Delta} . \omega^2$ حيث $J_{/\Delta}$ عزم عطالة الكرة : $J_{/\Delta} = 2/5 . M . R^2$

و منه : $E_{cR} = 1/2 (2/5 . M . R^2) \omega^2$ و منه : $E_{cR} = 1/5 (M . R^2) \omega^2$

و منه نستنتج : $\omega = 79 rd/s$

**التمرين ـ19**

**ينتقل دراج ، كتلته هو و دراجته $90 kg$ ، على طريق أفقي بسرعة $V = 25 km/h$ .**
**يكافئ الإحتكاك و مقاومة الهواء قوة تعاكس حركته شدتها $f = 20 N$ .**

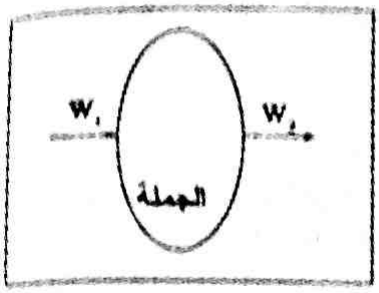
**1 ـ جد العمل الذي يبذله الدراج لقطع مسافة $1 km$ .**
**2 ـ جد الإستطاعة $P$ التي يبذلها في هذه الظروف .**
**3 ـ جد الإستطاعة $P'$ التي سوف يبذلها إذا احتفظ بنفس السرعة و صعد طريقا مائلا ميله $5 \%$ .**

**الحـل ـ19**

1 ـ إيجاد العمل الذي يبذله الدراج لقطع مسافة $d = 1 km$ :

**الطريقة الأولى :**

ـ تمثيل الحصيلة الطاقوية للجملة :




ـ بما أن سرعة الجملة ثابتة فلا يحدث أي تغير في طاقتها فلا نمثل أعمدة داخل الفقاعة و يكون تمثيل الحصيلة الطاقوية كما في الشكل المقابل ، حيث أن الجملة تستقبل طاقة عن سبيل ميكانيكي (تحويل ميكانيكي) محسوبة بقيمة العمل $W_1$ و هو عمل محرك و تفقد طاقة بسبب قوى الإحتكاك f و هو تحويل ميكانيكي أيضا $W_2$ و هو عمل مقاوم .

ـ إيجاد العمل اللازم بذله : نكتب معادلة انحفاظ الطاقة كالتالي : $Ec_1 + W_1 - W_2 = Ec_2$

بما أن سرعة الجسم ثابتة أي : $Ec_1 = Ec_2$ نستنتج أن : $W_1 = W_2$

قيمة العمل اللازم بذله هي إذن : $W_1 = F . d = f . d = 20 . 1000 = 20\ kJ$

**الطريقة الثانية :**

الجملة (ينتقل دراج بسرعة $V = 25\ km/h$) يفهم منها أن السرعة ثابتة و حتى تكون كذلك يجب أن يولد الدراج قوة محركة $\vec{F}$ تساوي القوة المعاكسة له و هي قوة الإحتكاك و هذا حتى تكون محصلة القوى المؤثرة معدومة حسب مبدأ العطالة لنيوتن .

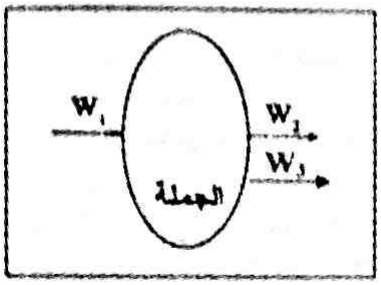
العمل الذي يبذله لقطع مسافة d : $W = F . d = 20 . 1000 = 20\ kJ$

2 ـ إيجاد الإستطاعة P التي يبذلها في هذه الظروف :

الإستطاعة التي يبذلها : $P = F . V = (20 . 25 . 10^3) / 3600 = 139\ W$

3 ـ إيجاد الإستطاعة P' التي سوف يبذلها إذا احتفظ بنفس السرعة و صعد طريقا مائلا سيله 5 % :

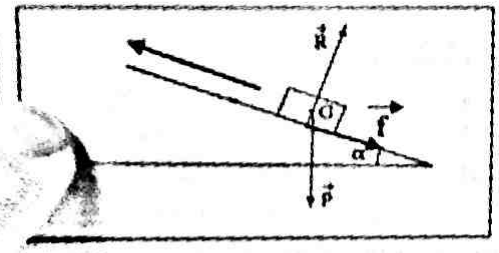
**الطريقة الأولى :**




ـ تمثيل الحصيلة الطاقوية الجملة :

ـ بما أن سرعة الجسم ثابتة فلا يحدث أي تغير في طاقته فلا نمثل أعمدة داخل الفقاعة و يكون تمثيل الحصيلة الطاقوية كما في الشكل المقابل ، حيث أن الجملة تستقبل طاقة عن سبيل ميكانيكي (تحويل ميكانيكي) محسوبة بقيمة العمل $W_1$ و هو عمل محرك و تفقد طاقة بسبب عمل قوى الإحتكاك f و هو تحويل ميكانيكي أيضا $W_2$ و هو عمل مقاوم . و تفقد طاقة أخرى بسبب عمل قوة الثقل وهو تحويل ميكانيكي أيضا $W_3$ و هو عمل مقاوم .

ـ إيجاد العمل اللازم بذله :




نكتب معادلة انحفاظ الطاقة كالتالي :

الطاقة الإبتدائية للجملة + الطاقة المستقبلة – الطاقة المقدمة = الطاقة النهائية للجملة

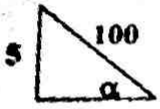
$$Ec_1 + W_1 - W_2 - W_3 = Ec_2$$

بما أن سرعة الجسم ثابتة فإن : $Ec_1 = Ec_2$ نستنتج أن : $W_1 = W_2 + W_3$

قيمة العمل اللازم بذله هي إذن : $W_1 = P . h + f . d = P . d . \sin\alpha + f . d$

$W_1 = P . d . \sin\alpha + f . d = 900 . 10^3 . (5/100) + 20 . 10^3 = 65\ kJ$

ـ إيجاد الإستطاعة P' :




$\sin\alpha = 5/100$

نعلم أن : $P' = E/t$ حيث وحدة الإستطاعة هي الواط W

حيث : E هو التحويل الطاقوي و في هذه الحالة هو عمل القوة أي : $W_1 = E$

$\Delta t$ هو الزمن اللازم لإنجاز هذا العمل هنا : $\Delta t = d/V = 1000 /(25 . 1000/3600) = 144\ s$

و منه : $P' = W_1 / \Delta t = 65000 / 144 = 451,38\ W$

**الطريقة الثانية :**

حتى تكون السرعة ثابتة كذلك على طريق مائل يجب أن يولد الدراج قوة محركة F تساوي القوى المعاكسة له و هي قوة الإحتكاك و المركبة المماسية للطريق لقوة الثقل التي تعاكس مباشرة القوة المحركة و هذا حتى تكون محصلة القوى المؤثرة معدومة حسب مبدأ العطالة لنيوتن .

ـ عندما يصعد الدراج طريقا مائلا تضاف مركبة الثقل الموازية لاتجاه الحركة ( $P . \sin\alpha$ ) إلى قوة الإحتكاك .

$$P = (f + P . \sin\alpha) V = [(20 + 900 . (5 / 100)] . 25000 /3600 = 451,38\ W$$

**<u>التمرين ـ20</u>**

**يدير محرك كهربائي ، استطاعته $P = 3\ kW$ ثابتة ، اسطوانة متجانسة نصف قطرها $R = 75\ cm$ و كتلتها $m = 250\ kg$ . بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة جد أقصر مدة زمنية يستلزم للأسطوانة حتى تدور ، انطلاقا من السكون ، بسرعة 1750 tr/mn . عزم عطالة الأسطوانة $J_\Delta = 1/2 . M R^2$ .**

**<u>الحـل ـ20</u>**

إيجاد أقصر مدة زمنية يستلزم للأسطوانة حتى تدور ، انطلاقا من السكون ، بسرعة 1750 tr/mn : $0 + W - 0 = E_c$

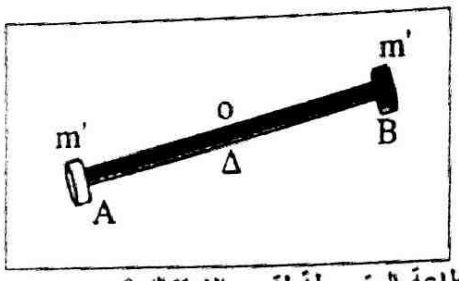
بما أن الحركة دورانية : $E_c = 1/2 . J_\Delta . \omega^2$ و الطاقة المكتسبة : $W = P . t$ و منه : $P . t = 1/2 . J_\Delta . \omega^2$

و منه نستنتج الزمن اللازم للأسطوانة حتى تدور ، انطلاقا من السكون ، بسرعة بسرعة 1750 tr / mn :

$t = [(1/4 . M R^2) . (2 \pi N)^2] / P$

$t = [(1/4 . 250 . 0,75^2) . (6,28 . 1750/60)^2] / 3000 = 393,15$ s.

**التمرين 21**




قضيب AB طوله $2 L = 1m$ و كتلته $m = 500 g$ يدور حول محور Δ أفقي يمر من مركزه O . يعطى عزم عطالته بالنسبة للمحور $J_\Delta = 1/3 m L^2$

يحمل القضيب على طرفيه جسمين نعتبرهما نقطيين كتلة كل منهما $m' = 200 g$ .

1 ـ ندير الجملة بسرعة 100 tr/mn .

ما هي حينئذ الطاقة الحركية للجملة (القضيب + الكتلتين)؟

2 ـ تعرقل قوى الإحتكاك حركة الجملة بحيث تتوقف خلال 10 mn . ما هي الإستطاعة المتوسطة لقوى الإحتكاك ؟

3 ـ يتوقف القضيب بعدما يدور 400 دورة . احسب عزم قوى الإحتكاك باعتباره ثابتا .

**الحل 21**

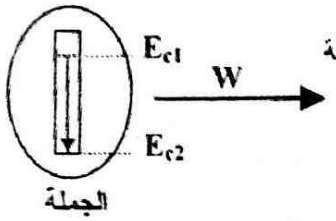
1 ـ إيجاد الطاقة الحركية للجملة (القضيب + الكتلتين) : $Ec = Ec_b + Ec_{2m} = 1/2 J_\Delta . \omega^2 + 2 . 1/2 J'_\Delta . \omega^2$

بالتعويض نجد : $Ec = 1/2 ( 1/12 . m . (2L)^2) . \omega^2 + 2 . 1/2 (m' . L) . \omega^2$

$Ec = 1/2 [(m/3 + 2 m')] [(2 \pi N L / 60]^2$

$Ec = 1/2 [(0,5/3 + 2 . 0,2)] [(6,28 . 100 . 0,5 / 60]^2 = 7,76$ J

2 ـ إيجاد الإستطاعة المتوسطة لقوى الإحتكاك : ـ تمثيل الحصيلة الطاقوية للجملة :




ـ سرعة الجملة تتناقص إلى أن تنعدم فيحدث تغير في طاقتها الحركية و يكون تمثيل الحصيلة الطاقوية كما في الشكل المقابل ، حيث أن الجملة تفقد طاقة بسبب قوى الإحتكاك f و هو تحويل ميكانيكي أيضا W و هو عمل مقاوم .

ـ إيجاد العمل اللازم بذله : نكتب معادلة انحفاظ الطاقة كالتالي : $Ec_1 - W = Ec_2$

بما أن السرعة النهائية معدومة فإن : $Ec_2 = 0$ نستنتج أن : $Ec_1 = W$

قيمة العمل اللازم بذله هي إذن : $W = Ec_1 = 7,76$ J

ـ الإستطاعة المتوسطة لقوى الإحتكاك : نعلم أن : $P = E/t$ حيث وحدة الاستطاعة هي الواط W

حيث : E هو التحويل الطاقوي و في هذه الحالة هو عمل القوة أي : $W = E$

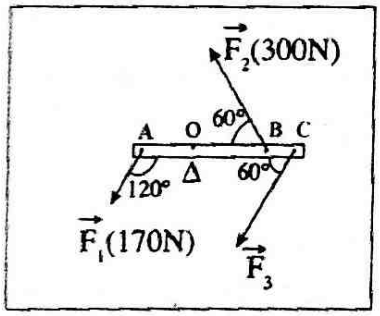
Δt هو الزمن اللازم لإنجاز هذا العمل هنا : $\Delta t = 600$ s . $P = W / \Delta t = 7,76 / 600 = 12,93 . 10^{-3}$ W

3 ـ يتوقف القضيب بعدما يدور 400 دورة . حساب عزم قوى الإحتكاك باعتباره ثابتا :

عندما يدور القضيب 400 دورة فإنه يمسح زاوية قدرها : $\theta = 400 . 2 \pi = 800 \pi$ rd

$W = M_f . \theta = Ec_1 \Rightarrow M_f = Ec_1 / \theta = 7,76 / 800 \pi = 3,09 . 10^{-3}$ m . N

**التمرين 22**




مسطرة مهملة الكتلة يمكنها الدوران حول محور ثابت Δ يمر من النقطة O .

تتوازن هذه المسطرة تحت تأثير ثلاثة قوى موجودة في المستوى العمودي للمحور .

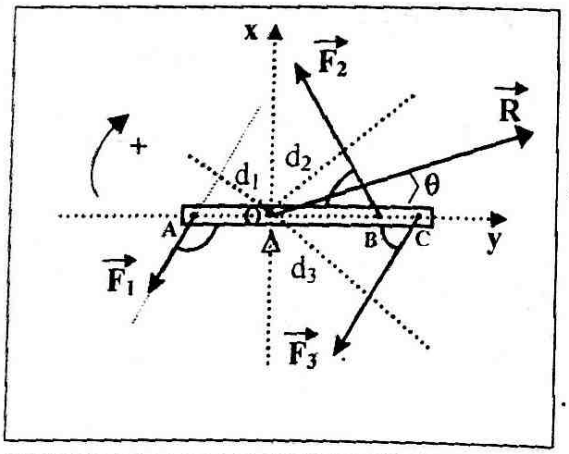
تعطى : $OC = 40$ cm و $OB = 30$ cm و $OA = 20$ cm .

1 ـ اذكر شروط توازن جسم متحرك حول محور ثابت .

2 ـ احسب عزم القوة $\vec{F_3}$ ثم استنتج شدتها

3 ـ عين مميزات الفعل $\vec{R}$ للمحور على المسطرة . يمكن اسقاط القوة $\vec{R}$ على محورين ملائمين تختارهما ثم استنتج شدة $\vec{R}$ و الزاوية التي يصنعها حامل $\vec{R}$ مع المستقيم OC .

**الحل 22**




1 ـ ذكر شروط توازن جسم متحرك حول محور ثابت :

يكون جسم متحرك في حالة توازن إذا تحقق الشرطان :

ـ مجموع القوى المؤثرة عليه معدوم $(\Sigma \vec{F_i} = 0)$

ـ المجموع الجبري لعزوم القوى المطبقة عليه معدوم $\Sigma M_{F/\Delta} = 0$

2 ـ حساب عزم القوة $F_3$ ثم استنتاج شدتها :

$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{R} = \vec{0}$

و $M_{F1/\Delta} + M_{F2/\Delta} + M_{F3/\Delta} + M_{R/\Delta} = 0$

$M_{R/\Delta} = 0$

لأن حامل القوة $\vec{R}$ يقطع محور الدوران لأن نقطة تطبيقها هي النقطة O .

نستنتج : $M_{F1/\Delta} + M_{F2/\Delta} + M_{F3/\Delta} = 0$

أي :

$$M_{F3/\Delta} = F_1 . d_1 + F_2 . d_2$$

$$M_{F3/\Delta} = F_1 . OA . \sin 60 + F_2 . OB \sin 60$$

ت . ع :

$$M_{F3/\Delta} = 170 . 0.2 . 0.866 + 300 . 0.3 . 0.866 = 107.38 \text{ N . m}.$$

ـ استنتاج شدة القوة من عبارة عزمها :

$$M_{F3/\Delta} = F_3 . OC . \sin 60 \Rightarrow F_3 = M_{F3/\Delta} / (OC . \sin 60)$$

و نجد :

$$F_3 = 107.38 / (0.4 . \sin 60) = 309,77 \text{ N}.$$

3 ـ عين مميزات الفعل $\vec{R}$ للمحور على المسطرة . يمكن اسقاط القوة $\vec{R}$ على محورين ملائمين تختارهما ثم استنتج شدة R و الزاوية التي يصنعها حامل R مع المستقيم OC .

3 ـ عزم الفعل بالنسبة للمحور Δ معدوما إذا ليس له أثر دوراني لكنه يحقق أحد شرطي التوازن :

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = (F_1 + F_2 + F_3) . \cos 60$$

$$R_Y = (F_{1Y} - F_{2Y} + F_{3Y}) = (F_1 - F_2 + F_3) . \sin 60$$

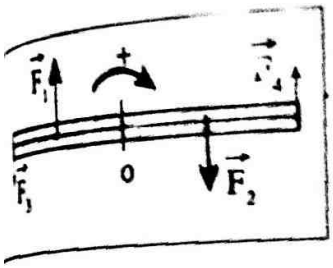
ت . ع : $R_x = 389,5$ N و $R_Y = 155$ N و R 419,20 N

ـ استنتاج الزاوية التي يصنعها حامل $\vec{R}$ مع المستقيم OC .

$$tg(OC . R) = tg(\theta) = Ry / Rx \Rightarrow \theta = 21,7° .$$

**التمرين ـ23**

**طول القضيب الموضح على الشكل المرافق هو L = 4 l = 80 cm يمكنه الدوران حول محوره Δ ثابت يمر من مركز عطالته في النقطة O و يخضع لأربع قوى حواملها عمودية عليه: $F_1 = F_2 = 6,0$ N و $F_3 = F_4 = 2,0$ N .**




**1 ـ احسب عزمي المزدوجتين .**

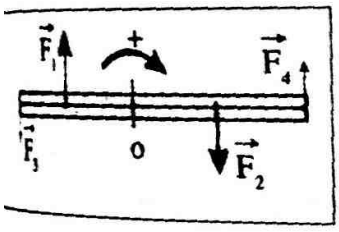
**2 ـ احسب مجموع عزمي المزدوجتين المؤثرتين على القضيب .**

**3 ـ هل هذا القضيب في حالة توازن ؟**

**4 ـ إذا كان الجواب لا ، فما هو العزم للأزم إضافته حتى يتوازن القضيب ؟**

**5 ـ نحقق هذا العزم بقوتين $F_5$ و $F_6$ اتجاهيهما عموديين على القضيب و مطبقين على طرفيه . مثل القوتين في رسم توضيحي ثم احسب شدتيهما .**

**الحل ـ23**




1 ـ حساب عزمي المزدوجتين :

$$M_{F1,F2} = F_1 . 2 . l = 6 . 0,4 = 2.4 \text{ m . N}$$

$$M_{F3,F4} = - F_3 . 4 . l = - 2 . 0,8 = - 1.6 \text{ m . N}$$

2 ـ حساب مجموع عزمي المزدوجتين المؤثرتين على القضيب :

$$M_{F1,F2} + M_{F3,F4} = 2,4 - 1,6 = 0,8 \text{ m . N}$$

3 ـ هل هذا القضيب في حالة توازن ؟

ـ لا . القضيب ليس في حالة توازن لأن المجموع الجبري للعزوم غير معدوم و هو أحد شروط التوازن .

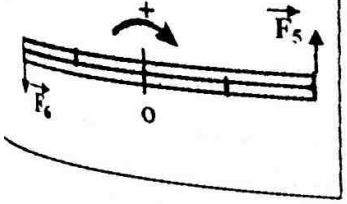
4 ـ العزم M اللأزم إضافته حتى يتوازن القضيب يجب أن يحقق شرط التوازن و هو :

$$M_{F1,F2} + M_{F3,F4} + M = 0$$

و منه :

$$M = - (M_{F1,F2} + M_{F3,F4}) = - (2,4 - 1,6) = - 0,8 \text{ m . N}$$

العزم M اللأزم إضافته حتى يتوازن القضيب هو : $M = 0,8$ m . N




5 ـ تمثيل القوتين $F_5$ و $F_6$ في رسم توضيحي :

ـ حساب شدتيهما :

$$M_{F5,F6} = - F_5 . 0,8 = - 0,8 \text{ m . N}$$

و منه :

$$F_5 = F_6 = 1 \text{ N} .$$

# تمـــاريـــن نمـــاذج للفروض و الإختبارات

**التمرين 1**

**مقرجملة عجلتين مسننتين أنصاف أقطارها $R_1$ و $R_2$ تدوران معا . العجلة الأولى تحتوي 100 سنة وتدور بسرعة زاوية $\omega = 2\ rad/s$ . العجلة الثانية $R_2$ تحتوي 20 سنة .**

**1ـ ما هي سرعة دوران العجلة الثانية ؟**

**2ـ عزم عطالة العجلة الأولى $R_1$ هو $J_{/\Delta} = 10^{-2}\ kg.m^2$ . ما هي الطاقة الحركية لها ؟**

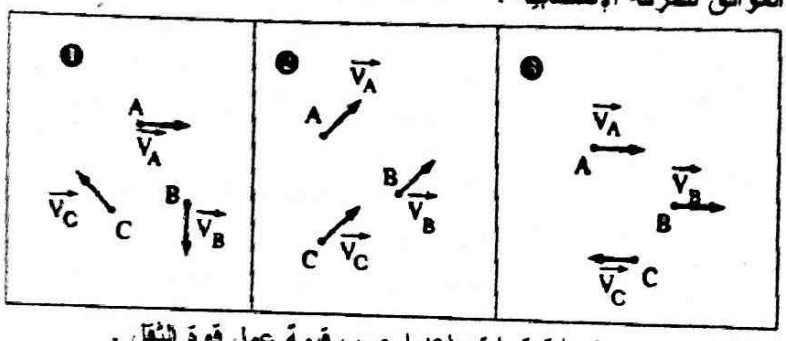
**الحل 1**

1ـ سرعة دوران العجلة الثانية : العجلة الثانية $R_2$ تحتوي على عدد الأسنان أقل بخمس مرات من العجلة الأولى $R_1$ إذن تدور بسرعة أكبر بخمس مرات سرعة العجلة الأولى أي سرعتها الزاوية : $\omega' = 10\ rad/s$ .

2ـ الطاقة الحركية لها : $Ec = 1/2\ J_{/\Delta}.\omega^2 = 1/2\ .10^{-2}\ .2^2 = 2\ .10^{-2}\ J$

**التمرين 2**

**1ـ من خلال الأشكال الثلاث الآتية ، ما هو الشكل الموافق للحركة الإنسحابية ؟**



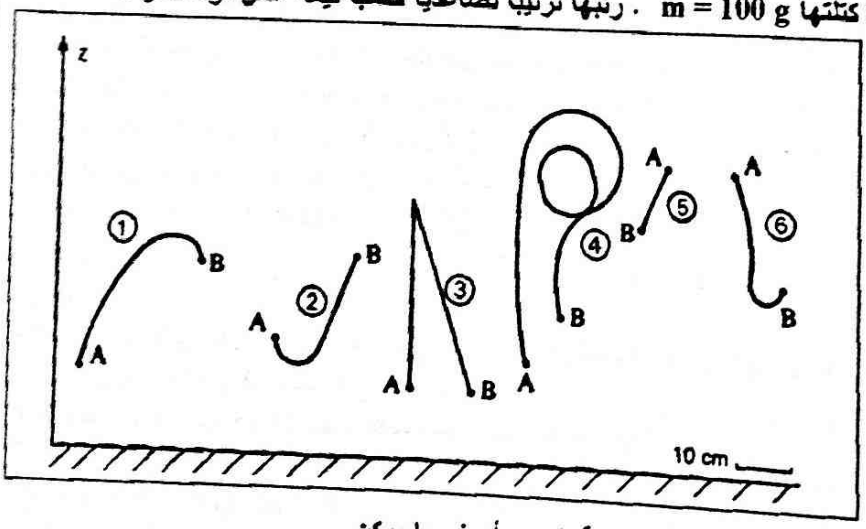

**الحل 2**

ـ عندما يكون جسم صلب غير قابل للتشوه في حركة انسحابية ، كل نقاطه لها نفس شعاع السرعة من حيث الجهة و المنحى و الشدة .

ـ فقط الشكل ❶ يوافق الحركة الإنسحابية .

**التمرين 3**

**2ـ الأشكال الثلاث المرفقة تمثل مسار كرة كتلتها $m = 100\ g$ . رتبها ترتيبا تصاعديا حسب قيمة عمل قوة الثقل .**




**الحل 3**

عمل الثقل عند الإنتقال من A إلى B :

$W_{AB}(\vec{P}) = -m.g(Z_B - Z_A)$

$Z_B - Z_A = 0{,}4\ m$ ❶

$Z_B - Z_A = 0{,}4\ m$ ❷

$Z_B - Z_A = 0\ m$ ❸

$Z_B - Z_A = 0{,}2\ m$ ❹

$Z_B - Z_A = 0{,}2\ m$ ❺

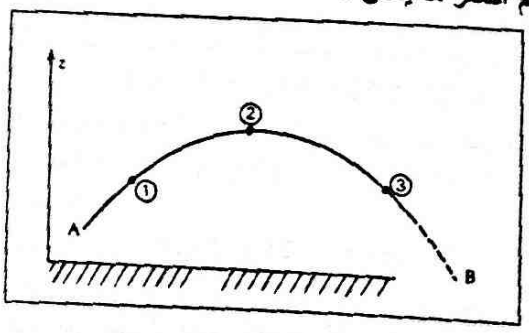
$Z_B - Z_A = -0{,}4\ m$ ❻

عمل الثقل يتعلق بالفرق في الإرتفاع :

$W_1 = W_2 < W_4 = W_5 < W_3 < W_6$

**التمرين 4**

**على المسار ، في الشكل المرفق ، حدد النقطة أين تكون الطاقة الحركية للجسم أصغر ما يمكن .**




**الحل 4**

النقطة أين تكون الطاقة الحركية للجسم أصغر ما يمكن هي ❷ لأنه عند انتقال من A إلى ❷ عمل ثقل الجسم مقاوم أي يصرف طاقة أي تتناقص طاقته الحركية و بعد ❷ يصبح عمل ثقل الجسم محرك فتزداد طاقته الحركية

**التمرين 5**

**5ـ لكي يكون العمل معدوم يجب :**

**a ـ أن تكون القوة معدومة .b ـ أن يكون الإنتقال معدوم .**

**c ـ توجد حالات أخرى .**

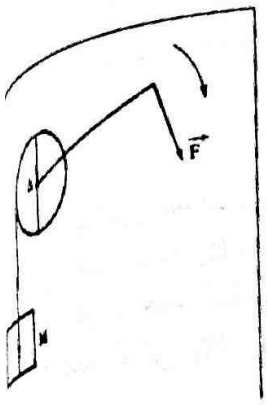
**اختر الإجابة أو الإجابات الصحيحة .**

$$W_{AB} = F \cdot AB \cos(\vec{F}, \vec{AB})$$

**الحل ـ5**

كل الإجابات صحيحة لأنه :

إذن ينعدم هذا العمل في إحدى الحالات الثلاث : إما $F = 0$ أو $AB = 0$ أو $\vec{AB} \perp \vec{F}$




**التمرين ـ6**

**منفاف (Treuil) نصف قطره $R = 10\ cm$ نديره بواسطة ساق (Manivelle) طولها $L = 1\ m$ .**

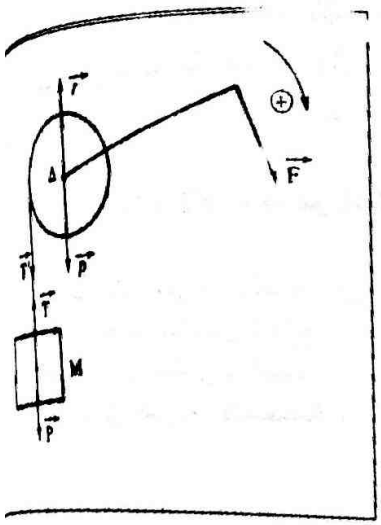
**m = 50 kg كتلته جسم لسحب لساق على عموديا تطبيقها الواجب F القوة هي ما ـ1**

**بحركة مستقيمة منتظمة ؟ . تعطى : $g = 10\ N/Kg$**

**2ـ احسب عمل هذه القوة من أجل دورة واحدة .**

**3ـ احسب عمل ثقل الجسم عندما يلف الخيط الذي يجره بدورة واحدة . ماذا تستخلص ؟**

**4ـ إذا استبدلنا الساق و القوة التي تديره بمحرك له محور دورانه في مركز الملفاف . فما هي السرعة الزاوية للملفاف من أجل محرك إستطاعته $2\ kW$ .**




**الحل ـ6**

1ـ القوة F الواجب تطبيقها لسحب الجسم بحركة مستقيمة منتظمة :

حتى ينسحب الجسم بحركة مستقيمة منتظمة يجب أن يكون مجموع القوى المؤثرة عليه معدوم : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ و منه : $P = T$

و كذلك يجب أن يدور الملفاف بحركة منتظمة : المجموع الجبري لعزوم القوى المؤثرة على الملفاف معدوم أي :

مجموع عزوم القوى التي تحاول تدوير الملفاف في جهة عقارب الساعة يساوي إلى مجموع عزوم القوى التي تحاول تدوير الملفاف في الجهة المعاكسة :

$$F \cdot L = T' \cdot R$$

الخيط مهمل الكتلة عديم الإمتطاط : $T' = T = P$

و منه : $F \cdot L = P \cdot R \Rightarrow F = (P \cdot R)/L = (500 \cdot 0{,}1)/1 = 50\ N$

2ـ حساب عمل هذه القوة من أجل دورة واحدة :

$$W = M_F \cdot \theta = F \cdot L \cdot \theta = 50 \cdot 1 \cdot 2\pi = 100\pi = 314\ J$$

3ـ حساب عمل ثقل الجسم عندما يلف الخيط الذي يجره بدورة واحدة :

عندما يلف الخيط الذي يجره بدورة واحدة فإن الجسم يرتفع ما مقداره محيط البكرة أي : $h = 2\pi R$

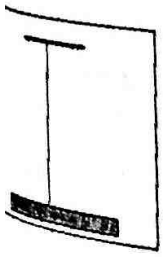
و منه عمل الثقل : $W_{AB}(\vec{P}) = -m \cdot g \cdot 2\pi R = -50 \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot 0{,}1 = 314\ J$

4ـ السرعة الزاوية للملفاف من أجل محرك إستطاعته $2\ kW$ :

حتى يعوض المحرك الساق يجب أن يكون له نفس عزم القوة F المؤثرة عليها .

و منه : $P = M_F \cdot \omega \Rightarrow \omega = P/M_F = P/(F \cdot L) = 2000/(50 \cdot 1) = 40\ rad/s$

و منه سرعة الدوران : $N = \omega/2\pi = 6{,}37$ دورة/s



**التمرين ـ7**

**نعتبر نواس أفقي يتكون من قضيب أفقي عزم عطالته بالنسبة لمحور الدوران يمر من مركزه $J_{/\Delta} = 10^{-2}\ kg \cdot m^2$ مثبت إلى خيط شاقولي .**

**1ـ أوجد الطاقة الحركية للقضيب عندما يدور بسرعة 5 Tours/s .**

**2ـ نضع في إحدى نهايتي القضيب على بعد $d = 20\ cm$ من محور الدوران كتلة نقطية $m = 100\ g$ . أوجد الطاقة الحركية للكتلة النقطية من أجل نفس سرعة الدوران السابقة للقضيب .**

**الحل ـ7**

1ـ إيجاد الطاقة الحركية للقضيب عندما يدور بسرعة 5 Tours/s :

$$Ec = 1/2\ J_{/\Delta} \cdot \omega^2 = 1/2 \cdot 10^{-2} \cdot (2\pi N)^2 = 1/2 \cdot 10^{-2} \cdot (2\pi \cdot 5)^2 = 5\ J$$

2ـ إيجاد الطاقة الحركية للقضيب من أجل نفس سرعة الدوران السابقة : $J'_{/\Delta} = J_{/\Delta} + m \cdot d^2$

$$E'c = 1/2\ J'_{/\Delta} \cdot \omega^2 = 1/2 \cdot (10^{-2} + 0{,}1 \cdot 0{,}2^2) \cdot (2\pi \cdot 5)^2 = 1/2 \cdot 10^{-2} \cdot (2\pi \cdot 5)^2 = 6.9\ J$$

**التمرين ـ8**

**نابض فتل لميقاتية ثابت فتله $C = 10^{-3}\ N.m/rad$ . نقوم بتدوير النابض (نفتله) بثلاث دورات إنطلاقا من وضع الراحة.**

**aـ ما هي الطاقة التي يختزنها ؟**

**bـ من أجل أن ينجز العقرب الكبير للميقاتية دورة واحدة يتطلب طاقة قدرها $6 \cdot 10^{-3}\ J$ . ما هي مدة إشتغال الميقاتية إذا أهملنا حركة العقرب الصغير ؟**

جـ علما أن العقرب الصغير يستهلك نفس الطاقة $6 . 10^{-3}$ J من أجل دورة واحدة . ما هي المدة الزمنية الحقيقية لإشتغال الميقاتية ؟

**الحل 8**

أ- الطاقة التي يختزنها النابض : $Ep = 1/2 . C . \theta^2$ حيث $\theta$ هي زاوية الدوران انطلاقا من السكون .

كل دورة تعادل زاوية قدرها $2\pi$ rad و منه 3 دورات تعادل : $6\pi$ rad

و منه : $Ep = 1/2 . C . \theta^2 = 1/2 . 10^{-3} . (6\pi)^2 = 1,77 . 10^{-1}$ J

ب- مدة إشتغال الميقاتية إذا أهملنا حركة العقرب الصغير :

من أجل أن ينجز العقرب الكبير للميقاتية دورة واحدة يتطلب طاقة قدرها $6 . 10^{-3}$ J . و لكي يصرف كل الطاقة المختزنة $1,77 . 10^{-1}$ J فإنه ينجز : $(1,77 . 10^{-1}) / (6 . 10^{-3}) = 29,5$ دورة

و كل دورة تعادل مدة زمنية قدرها ساعة واحدة و منه : مدة إشتغال الميقاتية هو 29,5 ساعة .

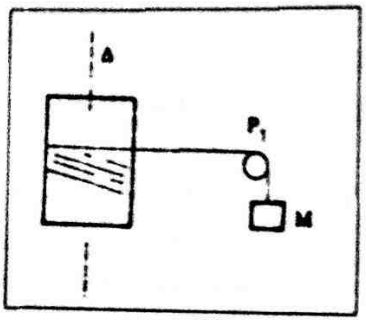
جـ- المدة الزمنية الحقيقية لإشتغال الميقاتية ، علما أن العقرب الصغير يستهلك نفس الطاقة $6 . 10^{-3}$ J من أجل دورة واحدة :

كلما أنجز العقرب الكبير للميقاتية دورة واحدة ينجز العقرب الصغير 1/12 دورة .

إذن : كلما أنجز العقرب الكبير للميقاتية n دورة ينجز العقرب الصغير n/12 دورة .

و منه الطاقة المصروفة : $6 . 10^{-3} n + 6 . 10^{-3} (n/12) = 1,77 . 10^{-1} \Rightarrow n = 27,2$ دورة

**التمرين 9**




ندرس حركة دولاب (volant) عزم عطالته $J_{/\Delta} = 1$ kg . m² ، نصف قطره $R = 10$ cm يدور بدون إحتكاك حول محور ثابت Δ . يلف حول الدولاب خيط عديم الإمتطاط كتلته مهملة ، تتدلى في نهايته جسم كتلته $M = 0,5$ kg . $P_1$ بكرة لا تؤخذ بعين الإعتبار خلال الدراسة. نترك الجملة بدون سرعة إبتدائية . تعطى : $g = 10$ N/Kg

1- ما هي العلاقة الموجودة بين السرعة الزاوية للدولاب و السرعة الخطية للجسم ؟

2- ما هي سرعة الجسم بعد نزوله $h = 3$ m بالنسبة لموضع الإنطلاق ؟

**الحل 9**

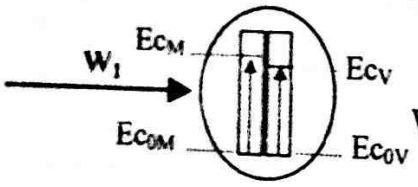
1- العلاقة الموجودة بين السرعة الزاوية للدولاب ω و السرعة الخطية للجسم v :

عندما تنتقل نقطة من الخيط مسافة L فإن الجسم ينزل نفس المسافة L خلال نفس المدة الزمنية Δt فتكون إذن سرعته :

$v = L/\Delta t$ . و كذلك لدينا : $L = R\theta$ و منه : $v = R(\theta/\Delta t)$ و لكن : $\theta/\Delta t = \omega$ و منه : $v = R\omega$

2- سرعة الجسم بعد نزوله 3 m بالنسبة لموضع الإنطلاق :

3- تمثيل الحصيلة الطاقوية للجملة و كتابة معادلة انحفاظ الطاقة :




الدولاب + الجسم

- الجملة (الدولاب + الجسم) تستقبل طاقة عن سبيل ميكانيكي محسوبة بقيمة العمل $W_1$ و هو عمل محرك لعمل قوة الثقل وتتحول هذه الطاقة سبيل ميكانيكي إلى طاقة حركية انسحابية بالنسبة للجسم و إلى طاقة حركية دورانية بالنسبة للدولاب .

- نكتب معادلة انحفاظ الطاقة كالتالي :

$$Ec_{0v} + Ec_{0M} + W_1 = Ec_v + Ec_M$$ و لكن : $Ec_{0v} + Ec_{0M} = 0$ ( السرعة الإبتدائية معدومة )

$$W_1 = Ec_v + Ec_M$$

$$1/2 . M . v_m^2 + 1/2\ J_{/\Delta} . \omega^2 = M . g . h$$

$$1/2 . M . v_m^2 + 1/2\ J_{/\Delta} . (v_m/R)^2 = M . g . h$$

و منه : $v_m = 0,55$ m/s

**التمرين 10**

ندعو نواس مركب ، جسم كتلته $M = 1$ kg يمكنه الدوران بحرية حول محور ثابت Δ عمودي على مستوي الشكل . مركز العطالة G للجسم يكون على بعد ثابت a من Δ $(a = 0,5$ m$)$ .عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لـ Δ هو $J_{/\Delta} = 0,05$ kg . m²

1- نزيح هذا الجسم بـ α درجة بالنسبة لوضع توازنه . أكتب عبارة طاقته الكامنة الثقلية بدلالة α .

2- ارسم منحنى الدالة $E_p = f(\alpha)$ من أجل $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$

3- مستعينا بالمنحنى البياني $E_p = f(\alpha)$ ، أحسب الطاقة الحركية للجسم عندما نتركه للسقوط بدون سرعة إبتدائية من موضع زاوية إنحرافه $\alpha = 60°$ :

a- عندما يمر من الموضع زاوية إنحرافه $\alpha = 30°$ . b- عندما يمر من موضع التوازن

c- عندما يمر من الموضع زاوية إنحرافه $\alpha = 45°$ ؟

4- ما هي السرعة الواجبة إعطاءها للنواس إنطلاقا من موضع التوازن حتى يصعد إلى زاوية إنحراف $\alpha = 45°$ ؟

**الحل 10**

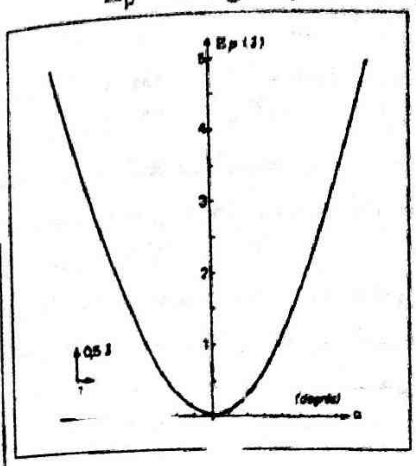
1- كتابة عبارة طاقته الكامنة الثقلية بدلالة α : $E_p = m . g (AG - AH)$

و منه : $AG - AH = a - a \cdot \cos\alpha$ و منه : $E_p = m \cdot g \cdot a(1 - \cos\alpha)$

2ـ رسم منحنى الدالة $E_p = f(\alpha)$ من أجل $-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$

$E_p = m \cdot g \cdot a(1 - \cos\alpha) = = 1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5(1 - \cos\alpha) = 4{,}9(1 - \cos\alpha)$

$$E_p = 4{,}9(1 - \cos\alpha)$$




3ـ حساب الطاقة الحركية للجسم :

a ـ عندما يمر من الموضع زاوية إنحرافه $\alpha = 30°$

الطاقة الكلية لجسم تكون ثابتة إذا كانت كل أعمال القوى ( ما عدا ثقله) المؤثرة عليه معدوم . الجسم أثناء سقوطها خاضع لثقله و قوة رد فعل الحامل التي عملها معدوم . إذن الطاقة الكلية للجسم تكون ثابتة أي لها قيمة ثابتة خلال سقوطها .

الطاقة الكلية عند إنحرافه $\alpha = 60°$ أخذا النقطة G مرجعا للطاقات الكامنة :

$$E_0(60°) = E_c(60°) + E_p(60°)$$

ولكن $E_c(60°) = 0$ إذن : $E_0 = E_p(60) = 4{,}9(1 - \cos 60°) = 2{,}45\ J$

الطاقة الكامنة عند $\alpha = 30°$ : $E_p(30°) = 4{,}9(1 - \cos 30°) = 0{,}60\ J$

و منه : $E_c(30°) = E_0 - E_p(30°) = 2{,}45 - 0{,}60 = 1{,}85\ J$

3ـ حساب الطاقة الحركية للجسم : b ـ عندما يمر من موضع التوازن :

عند المرور من موضع التوازن تكون $\alpha = 0°$ و منه : $E_p(0°) = 0$ إذن : $E_c(0°) = E_0 - E_p(0°) = 2{,}45 - 0 = 2{,}45\ J$

4ـ السرعة الواجب إعطاءها للنواس إنطلاقا من موضع التوازن حتى يصعد إلى زاوية إنحراف $\alpha = 45°$ :

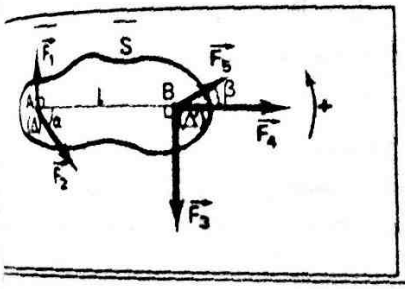
على المنحنى $E_p = f(\alpha)$ نقرأ : $E_p(45°) = 1{,}43\ J$ إذن يجب أن تكون $E_c(0°) = 1{,}43\ J$ حسب مبدأ انحفاظ الطاقة

و منه : $1/2\ J_{/\Delta} \cdot \omega^2 = 1{,}43 \Rightarrow \omega = \pm 7{,}56\ rad/s$

الإشارة السالبة تعني أننا يمكن قذف النواس في جهة معينة أو في جهة أخرى معاكسة .

و لكن لدينا : $v = a\,\omega$ و منه : $v = \pm 3{,}78\ m/s$

**التمرين ـ10**



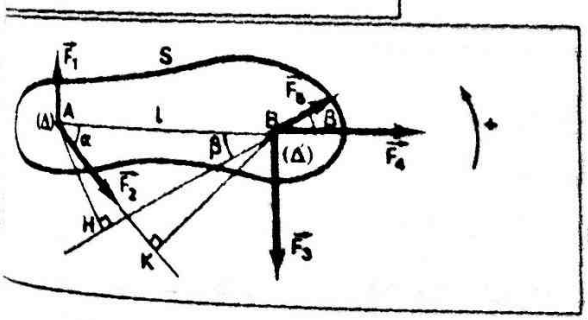

**الجسم الصلب S الممثل في الشكل المرفق خاضع لخمسة قوى $\vec{F_1}$ ، $\vec{F_2}$ ، $\vec{F_3}$ ، $\vec{F_4}$ ، $\vec{F_5}$ . حيث : $F_1 = 10\ N$ ، $F_2 = 15\ N$ ، $F_3 = 20\ N$ . $F_4 = 20\ N$ ، $F_5 = 10\ N$ . $\alpha = 45°$ ، $\beta = 30°$ ، $L = 10\ cm$ .**

**أحسب عزم كل قوة ثم استنتج مجموع عزومها :**

**1ـ بالنسبة للمحور (Δ) العمودي على مستوي الشكل عند A**

**2ـ بالنسبة للمحور (Δ') العمودي على مستوي الشكل عند B**

**الحل ـ10**




1ـ حساب عزم كل قوة بالنسبة للمحور (Δ) العمودي على مستوي الشكل عند A :

$M_{F1/\Delta} = 0$ ، $M_{F2/\Delta} = 0$ ، $M_{F4/\Delta} = 0$

لأن $\vec{F_1}$ ، $\vec{F_2}$ ، $\vec{F_4}$ تلاقي المحور (Δ) .

$M_{F3/\Delta} < 0$ لأن $\vec{F_3}$ تؤثر في عكس الجهة الموجبة المختارة

$M_{F3/\Delta} = -F_3 \cdot AB = -F_3 \cdot L = -2\ Nm$ .

$M_{F5/\Delta} > 0$ لأن $\vec{F_5}$ تؤثر في نفس الجهة الموجبة المختارة .

$M_{F5/\Delta} = +F_5 \cdot AH = F_5 \cdot L \sin\beta = +0{,}5\ Nm$ .

استنتاج مجموع عزومها : $M_{F1/\Delta} + M_{F2/\Delta} + M_{F3/\Delta} + M_{F4/\Delta} + M_{F5/\Delta} = -1{,}5\ N$

ـ حساب عزم كل قوة بالنسبة للمحور (Δ') العمودي على مستوي الشكل عند B :

$M_{F3/\Delta'} = 0$ ، $M_{F4/\Delta'} = 0$ ، $M_{F5/\Delta'} = 0$ . لأن $\vec{F_3}$ ، $\vec{F_4}$ ، $\vec{F_5}$ تلاقي المحور (Δ) .

$M_{F1/\Delta'} < 0$ لأن $\vec{F_1}$ تؤثر في عكس الجهة الموجبة المختارة . $M_{F1/\Delta} = -F_1 \cdot AB = -F_1 \cdot L = -1\ Nm$ .

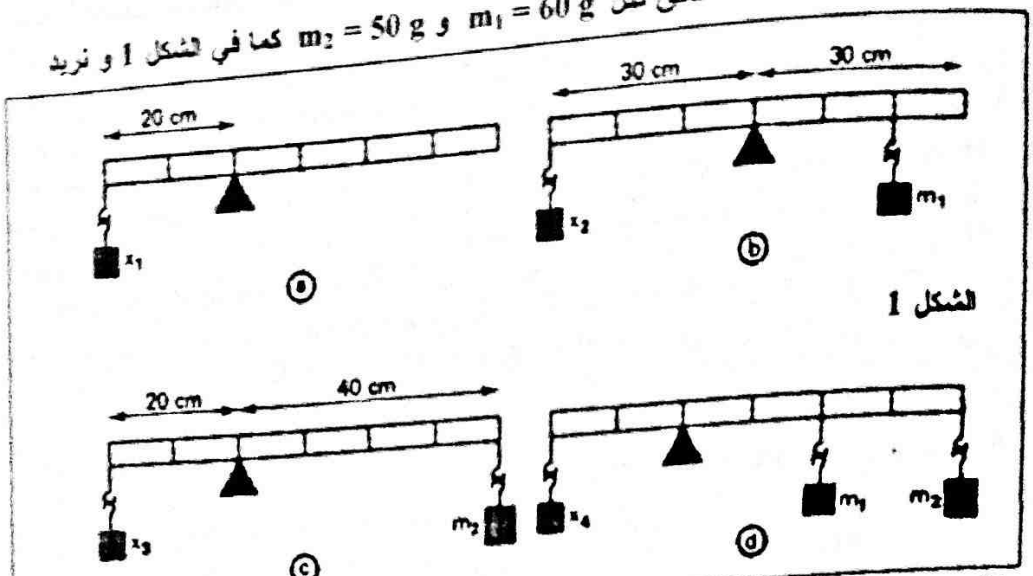
$M_{F2/\Delta'} > 0$ لأن $\vec{F_2}$ تؤثر في نفس الجهة الموجبة المختارة . . $M_{F2/\Delta} = +F_2 \cdot BK = F_2 \cdot L \sin\alpha = +1{,}06\ Nm$ .

استنتاج مجموع عزومها : $M_{F1/\Delta'} + M_{F2/\Delta'} + M_{F3/\Delta'} + M_{F4/\Delta'} + M_{F5/\Delta'} = +6{,}1 \cdot 10^{-2}\ N$

**التمرين ـ11**

نعتبر ساق متجانسة طولها 60 cm كتلتها M = 200 g . نعلق كتل $m_1 = 60$ g و $m_2 = 50$ g كما في الشكل 1 و نريد الحصول على التوازن .

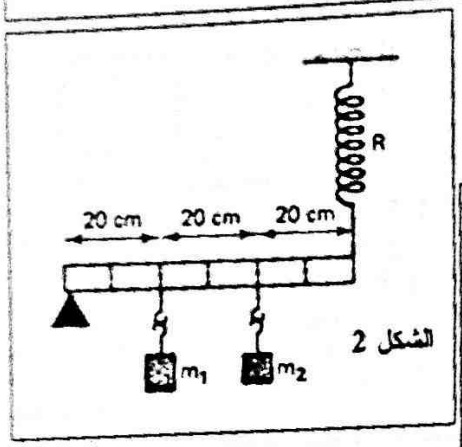
1ـ حدد في كل حالة قيمة x : قيمة الكتلة الواجب تعليقها على يسار الساق لتحقيق التوازن .



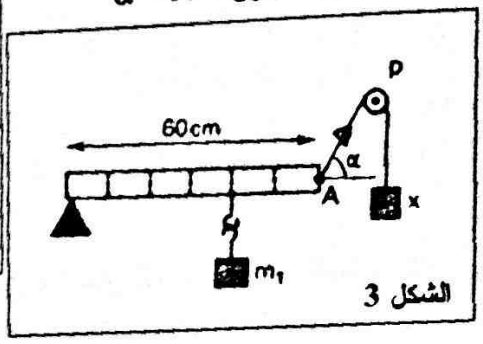

الشكل 1

2ـ بنفس الساق و الكتل السابقة $m_1$ و $m_2$ نحقق التوازن في الشكل 2 .
أوجد شدة توتر النابض و استطالته y علما أن ثابت مرونته k = 20 N/m .

3ـ بنفس الساق و الكتلة $m_1$ السابقة نحقق التوازن في الشكل 3 .
أوجد قيمة x : قيمة الكتلة الواجب تعليقها لتحقيق التوازن. $\alpha = 60°$
الساق أفقية و البكرة مهملة الكتلة .




الشكل 2




الشكل 3

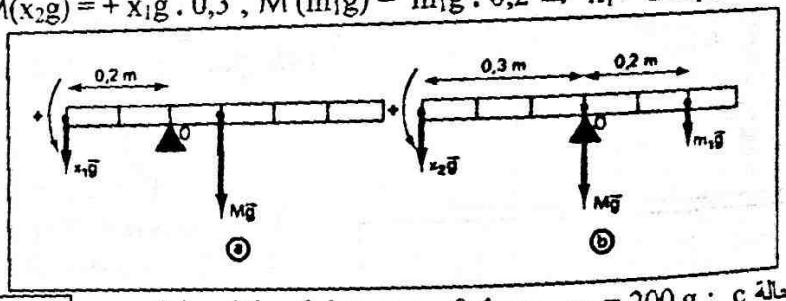
**الحل ـ11**

1ـ تحديد قيمة x :

الحالة a و b :

$M(x_1g) = + x_1g \cdot 0,2$ , $M(Mg) = Mg \cdot 0,1 \Rightarrow x_1 = M/2 = 100$ g

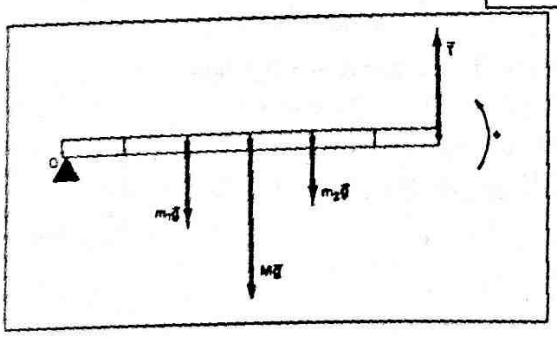
$M(x_2g) = + x_1g \cdot 0,3$ , $M(m_1g) = m_1g \cdot 0,2 \Rightarrow x_1 = 2\, m_1/3 = 40$ g




الحالة c : $x_3g \cdot 0,2 = Mg \cdot 0,1 + m_2g \cdot 0,4 \Rightarrow x_3 = 200$ g

الحالة d : $x_4g \cdot 0,2 = Mg \cdot 0,1 + m_1g \cdot 0,2 + m_2g \cdot 0,4$

$\Rightarrow x_4 = 260$ g




2ـ إيجاد شدة توتر النابض :

$T \cdot 0,6 = Mg \cdot 0,3 + m_1g \cdot 0,2 + m_2g \cdot 0,4$

$\Rightarrow T = 1,5$ N

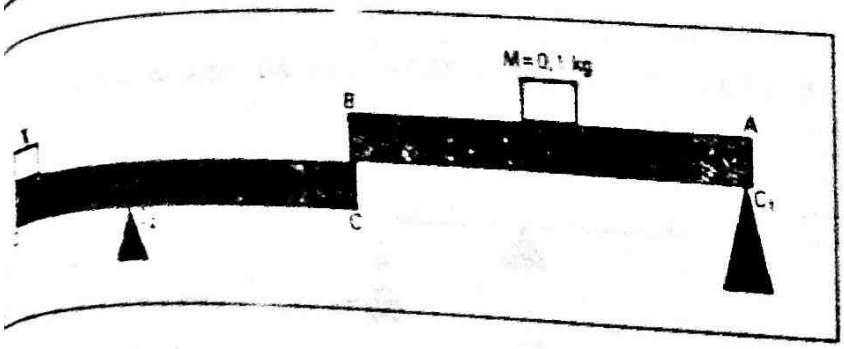
$T = k \cdot y \Rightarrow y = T/k = 1,5/20 = 7,5 \cdot 10^{-2}$ m = 7,5 cm .

3ـ تحديد قيمة x :

$Mg \cdot 0,3 + m_1g \cdot 0,4 = xg \cdot 0,6 \cdot \sin 60° \Rightarrow x = 161$ g

**التمرين ـ12**

الجملة الآتية تتشكل من مسطرتين متماثلتين AB و CD ، متجانستين ، طول كل منهما L = 50 cm و كتلة m = 40 g تعطى : $DC_2 = 20$ cm ، M = 0,1 kg . الكتلة M موضوعة في منتصف المسطرة AB . من أجل تحقيق توازن




الجملة نضيف كتل نقطية عند النقطة D .

1ـ احسب قيمة x الموضوعة عند D

2ـ احسب شدة ردود الأفعال $R_1$ و $R_2$ للحوامل عند $C_1$ و $C_2$ على المسطرتين

3ـ احسب شدة رد الفعل R عند نقطة تماس المسطرتين .

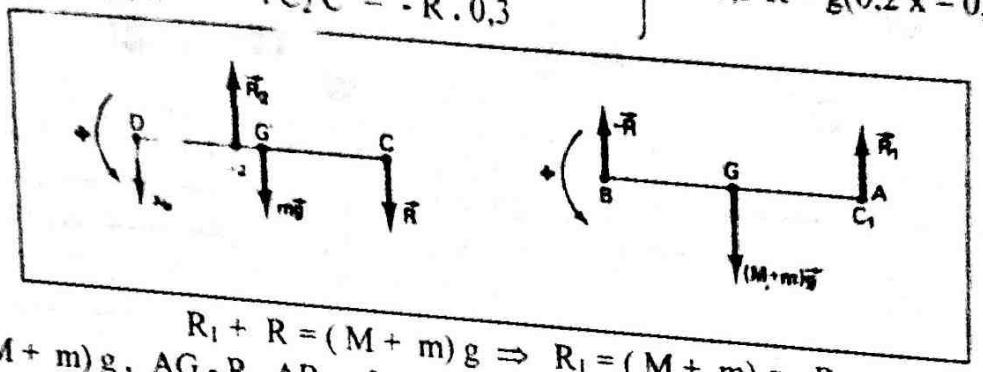
**الحل ـ12**

1ـ حساب قيمة x الموضوعة عند D :

$$x\,g + R_2 + m\,g + R = 0 \Rightarrow R_2 = R + (x + m)\,g$$

$$M_{(x\,g)/\Delta} + M_{(R2)/\Delta} + M_{(m\,g)/\Delta} + M_{(R)/\Delta} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{(x\,g)/\Delta} = +x\,g\,.\,C_2D = x\,g\,.\,0{,}2 \\ M_{(m\,g)/\Delta} = -m\,g\,.\,C_2G' = -m\,g\,.\,0{,}05 \\ M_{(R)/\Delta} = R\,.\,C_2C = -R\,.\,0{,}3 \end{array}\right\} \Rightarrow 0{,}3\,R = g(0{,}2\,x - 0{,}05\,m)$$




$$R_1 + R = (M + m)\,g \Rightarrow R_1 = (M + m)\,g - R$$

$$(M + m)\,g\,.\,AG - R\,.\,AB = 0 \Rightarrow 0{,}5\,R = (M + m)\,g\,.\,0{,}25 \Rightarrow R = 0{,}69\ N$$

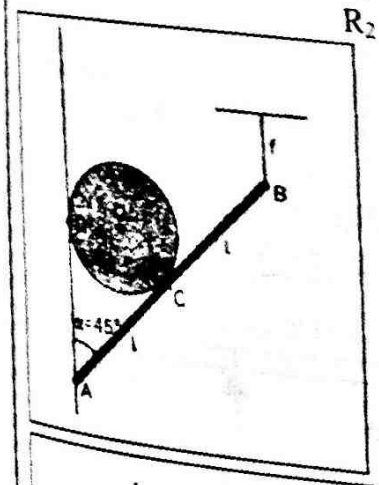
$$0{,}2\,x - 0{,}05\,m = 0{,}3\,R/g = 2{,}1\,.\,10^{-2} \Rightarrow x = 115\ g$$

$$R_1 = (M + m)\,g - R = (M + m)g/2 = R = 0{,}69\ N$$

$$R_2 = R + (x + m)\,g = 0{,}69 + 0{,}155\,.\,9{,}8 = 2{,}2\ N$$

**التمرين ـ13**

الجملة الممثلة في الشكل في حالة توازن تتشكل من ساق AB طولها 2L كتلتها مهملة و التي تتمفصل عند A في حائط شاقولي حيث تشكل معه زاوية $\alpha = 45°$ يشد الساق من نهايته الأخرى B خيط شاقولي f مثبت إلى حامل . بين الساق و الحائط يوجد قرص متجانس مركزه O ثقله $P = 20\ N$ نقطة تماسه C مع الساق توجد في منتصف AB . تهمل كل الإحتكاكات . حدد شدة ردود الأفعال $\vec{R_C}$ و $\vec{R_D}$ للساق و الحائط على القرص و كذا شدة توتر الخيط T . أثبت أن قوة رد الفعل الحائط $\vec{R_A}$ على الساق أفقية .




**الحل ـ13**

ـ تحديد شدة ردود الأفعال $\vec{R_C}$ و $\vec{R_D}$ للساق و الحائط على القرص :

$$\vec{P} + \vec{R_C} + \vec{R_D} = \vec{0}$$

$$R_C = P/\cos\alpha = 20/\cos 45° = 28{,}3\ N$$

$$R_D = R_C\,.\,\sin\alpha = P = 28{,}3\ N$$

$$M(\vec{R_A}) = 0 \text{ لأن } M(-\vec{R_C}) + M(\vec{T}) = 0$$

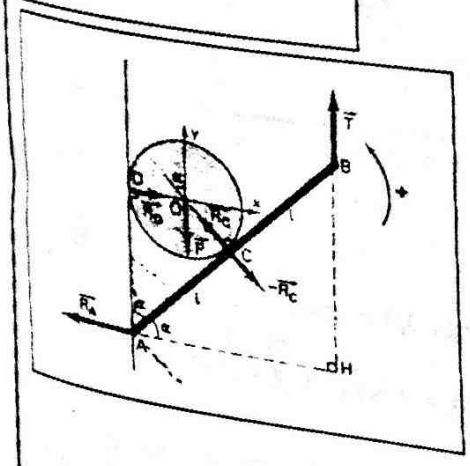
$$M(\vec{T}) = +T\,.\,AH = T\,.\,2L\cos\alpha = +0{,}5\ Nm$$

$$M(-\vec{R_C}) = (-R_C)\,.\,L \Rightarrow R_C = 2T\cos\alpha$$

$$T = R_C/(2\cos\alpha) = 1/(2\cos\alpha)\,.\,P/(\cos\alpha) = P/(2\cos^2\alpha) = 20\ N.$$

$$\vec{T} + (-\vec{R_C}) + \vec{R_A} = \vec{0}$$ إذن $\vec{R_A}$ تمر من H نقطة تقاطع T و $(-\vec{R_C})$

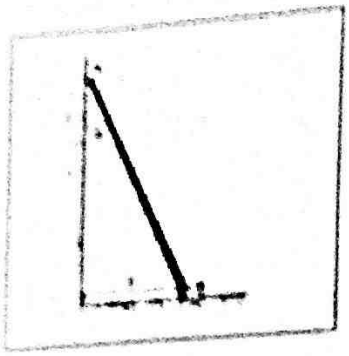
و منه : $\vec{R_A}$ أفقية .



**تمرين 14**

سلم (Echelle) AB متجانس طوله L ثقله P مسند على حائط شاقولي بحيث يصنع معه زاوية α . تهمل كل الاحتكاكات . لجعل السلم في حالة توازن ، تثبت النهاية الأخرى له B إلى خيط f الذي بدوره يثبت إلى حائط .

- أوجد شدة توتر الخيط .
- أوجد شدة ردود الأفعال المطبقة على السلم عند A و B .



**الحل 14 ( حل مختصر)**

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_A} + \vec{R_B} = \vec{0}$ بالإسقاط نجد : $T = R_A$ و $R_B = P$

من نظرية العزوم نجد : $M(\vec{T}) = M(\vec{R_B}) = 0 \Rightarrow M(\vec{P}) + M(\vec{R_A}) = 0$

$P \cdot L/2 \cdot \sin\alpha = R_A \cdot L \cdot \cos\alpha \Rightarrow R_A = t = P/2 \cdot tg\,\alpha$

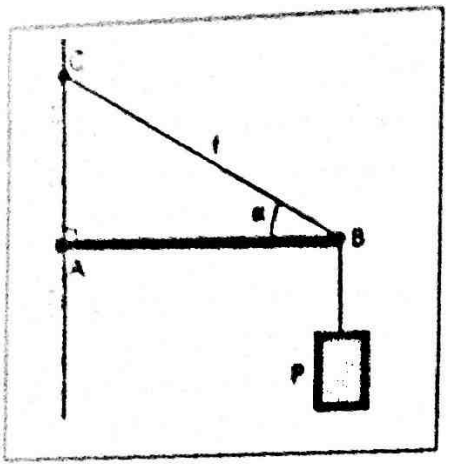
**تمرين 15**

نحقق التركيب المبين في الشكل حيث الثقل $P = 10^3$ N معلق عند النقطة B في نهاية ساق AB متجانسة ، التي بدورها مشدودة بواسطة خيط f يصنع معها زاوية $\alpha = 30°$ .

- أوجد شدة توتر الخيط في الحالتين :

a ـ بفرض أن ثقل الساق مهمل .

b ـ بفرض أن ثقل الساق هو $P' = 100$ N



**الحل 15 ( حل مختصر)**

أ ـ إيجاد شدة توتر الخيط : a ـ بفرض أن ثقل الساق مهمل :

$M(\vec{P}) + M(\vec{T}) + M(\vec{R_A}) = \vec{0}$

$M(\vec{P}) = -P \cdot L \quad , \quad M(\vec{T}) = T \cdot L \cdot \sin\alpha$

$T = +P/(\sin\alpha) = 2P = +2 \cdot 10^3$ N

أ ـ إيجاد شدة توتر الخيط : b ـ بفرض أن ثقل الساق هو $P' = 100$ N :

$M(\vec{P}) + M(\vec{T}) + M(\vec{P'}) = \vec{0}$

$M(P') = -P' \cdot L/2 \Rightarrow T = 1/\sin\alpha \cdot (P + P'/2)$

$T = 2{,}1 \cdot 10^3$ N