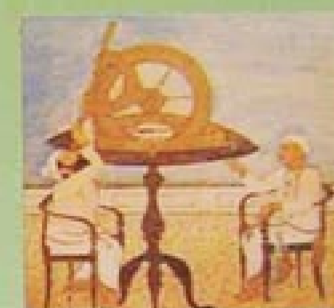
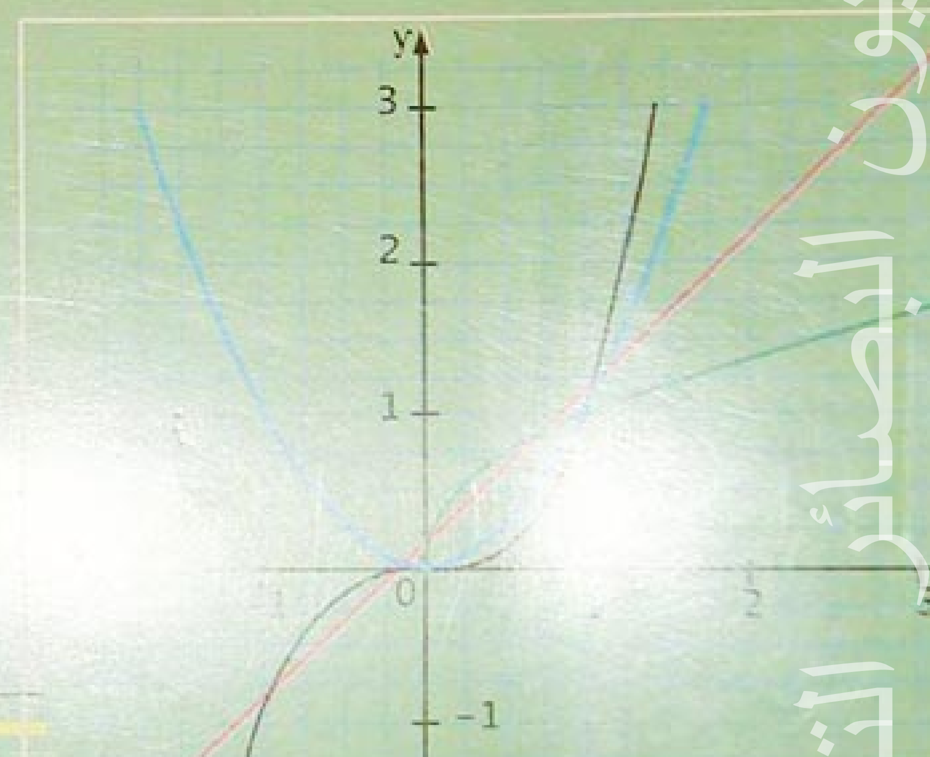
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

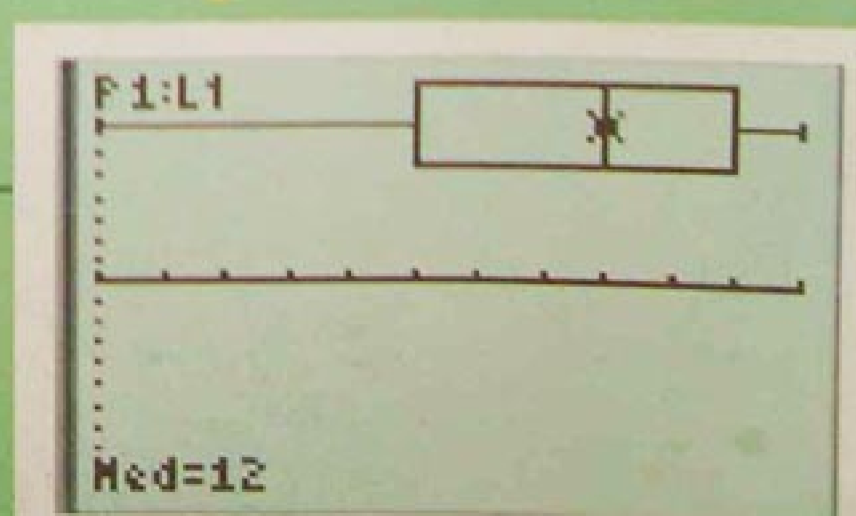
الـرياضيات



السنة الثانية من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي

للشعب : -التسيير و الاقتصاد
-آداب و فلسفة
-لغات أجنبية



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الرياضيات

السنة الثانية من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي

الشّعب

التسيير والإقتصاد

آداب وفلسفة ولغات أجنبية

الإشراف التربوي

وحسن أوديع

مفتش التربية والتكوين

المؤلفون

رابح بناني : مفتش التربية والتكوين

عبد الله جلواح : مفتش التربية والتعليم الأساسي

سليمان حمودي : أستاذ التعليم الثانوي

تصميم وتركيب : السيد/ رباش حكيم

السيدة/ كوال وهيبة المولودة ميباني

تصميم الغلاف : السيد/ حموم كريم

تصميم المخططات : السيدة/ يونسي زهية المولودة شمول

الفهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

مدخل

هذا الكتاب موجه لتلاميذ السنة الثانية من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي ، شعبة التسيير والإقتصاد وشعبتي الآداب و أعدّ وفق البرنامج الرسمي لوزارة التربية الوطنية المقرر تطبيقه إبتداء من الدخول المدرسي 2006 - 2007 .

إن هيكلة الكتاب ومضامينه تستجيب للمقاربة بالكفاءات المعتمدة من طرف وزارة التربية الوطنية والتي تندرج أساسا في إطار إصلاح المنظومة التربوية .

يعتبر هذا الإختيار البيداغوجي والتعليمي قرارا له أهمية بالغة ، كونه يضع المتعلم في مركز إهتمامات الفعل التربوي وبذلك يمنح له الفرصة للمشاركة بصفة فعلية في بناء معارفه وفي إمتلاك الطرائق موضوع الدراسة ، وهي العناصر الضرورية التي تضمن له إكتساب الكفاءات المستهدفة في البرنامج .

وزعت المضامين المقررة على تسعة أبواب بالنسبة إلى شعبة التسيير والإقتصاد وستة أبواب بالنسبة إلى شعبتي الآداب حيث يتضمن كل باب الأجزاء التالية :

- نبذة تاريخية
- إستبيان متعدد الإجابات
- أنشطة تمهيدية
- معارف
- طرائق
- تمرين محلول
- تمارين ومسائل

يستعمل التلميذ هذا الكتاب في مختلف مراحل التعلم سواء تعلق الأمر بمواجهة الوضعيات المقترحة عليه أثناء الدرس أو خارج القسم للمراجعة وإعداد الواجبات . أما بالنسبة إلى الأستاذ ، فيكون إستعماله بصفة خاصة أثناء إعداد حصص التعليم - التعلم .

نأمل أن نكون قد وفرنا للمتعلم وسيلة تعليمية تتناسب مع توجيهه وتحفزه على العمل بنشاط .

عرض البرنامجين

المحاور	الكفاءات المستهدفة: شعبة التسيير والإقتصاد	الكفاءات المستهدفة: شعبتا الآداب
النسب المئوية والمؤشرات	– التمييز بين التغيّر المطلق والتغيّر النسبي . – حساب نسبة مئوية . – إرجاع زيادة أو تخفيض إلى شكل ضرب . – حساب وترجمة مؤشر تطور ظاهرة (سعر ، سكان ، إنتاج ، ...) . – التعبير بنسبة مئوية على زيادة أو تخفيض . – تعيين نسبة التطور الإجمالية بمعرفة نسبتين متتاليتين للتطور .	– التمييز بين التغير المطلق والتغير النسبي. – معرفة حساب نسبة مئوية . – معرفة تحويل زيادة أو نقصان نسبة مئوية إلى ضرب . – معرفة حساب وتفسير مؤشر نمو ظاهرة (سعر ، إنتاج ، عدد السكان ...) . – التعبير عن زيادة أو نقصان بنسبة مئوية. – تحديد نسبة النمو الإجمالي بمعرفة نسبتي نمو متتابعتين .
المتتاليات العددية	– تعريف متتالية عددية واستعمال الكتابات والتعابير المناسبة. – معرفة طرق توليد متتالية. – حساب الحدّ من المرتبة n لمتتالية . – تعريف متتالية حسابية أو هندسية والتعرّف عليها تبعًا لطريقة توليدها ووصفها باستعمال التعبير المناسب . – حساب الحدّ من المرتبة n لمتتالية حسابية أو هندسية بمعرفة حدّها الأول وأساسها . – معرفة اتجاه تغيّر متتالية حسابية أو هندسية . – حساب مجموع n حدا متتابعا لمتتالية حسابية أو هندسية .	– التعرف على متتالية حسابية أو متتالية هندسية . – معرفة واستعمال خاصية ثلاثة حدود متتابعة في متتالية. – معرفة واستعمال الوسط الحسابي ، الوسط الهندسي . – حساب مجموع n حدا الأولى لمتتالية. – تحديد اتجاه تغير متتالية حسابية أو هندسية. – دراسة وضعيات يؤول حلها إلى دراسة متتاليات حسابية أو إلى متتاليات هندسية .
عموميات على الدوال	– معرفة تغيّرات الدالة « مكعب » . – تمثيل الدالة « مكعب » بيانيا. – تعريف مجموع ، جداء ، حاصل قسمة ومركب دالتين عدديتين . – استنتاج منحنيات دوال مرفقة انطلاقا من منحنيات دوال معطاة. – البرهان على أنّ نقطة هي مركز تناظر المنحني الممثل لدالة . – البرهان على أنّ مستقيمًا هو محور تناظر المنحني الممثل لدالة. – مقاربة مفهوم العدد المشتق على مثال . – معرفة العدد المشتق للدوال المرجعية المقررة من أجل قيمة معينة x_0 . – ترجمة عددمشتق بيانيا . – تعيين المعادلة المبسطة لمماس .	– تعيين العدد المشتق لدالة مرجعية (من البرنامج) . – تعيين معادلة المماس لمنحني الدالة « مربع » عند نقطة فاصلتها x_0 . – معرفة تعيين معادلة لمماس منحني دالة مرجعية. – تعيين العدد المشتق لدالة f عند x_0.

الإشتقاق	– إنشاء المماس عند نقطة A للمنحني الممثل لدالة مرجعية مقررة . – تعريف الدالة المشتقة لدالة قابلة للإشتقاق على مجال . – حساب مشتق مجموع وجداء وحاصل قسمة دالتين قابلتين للإشتقاق . – حساب مشتق دالة كثير حدود ودالة ناطقة من الشكل : $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+b}$. – الربط بين اتجاه تغيّر دالة وإشارة مشتقتها . – تعيين القيم الحدية لدالة قابلة للإشتقاق على مجال . – تعيين التقريب التآلفي لدالة عند قيمة انطلاقا من أمثلة بسيطة .	– التعرف على قابلية اشتقاق دالة عند x_0. – تعيين الدوال المشتقة للدوال المرجعية : $x \longmapsto ax+b$ ؛ $x \longmapsto k$ $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ؛ $x \longmapsto x^2$ – معرفة مشتقة مجموع دالتين، مشتقة جداء دالتين ، مشتقة مقلوب دالة، مشتقة الدالة « قوة » . – استعمال إشارة المشتقة لتحديد اتجاه تغير دالة على مجال .
السلوك التقاربي	– تفسير وجود مستقيم مقارب يوازي أحد حاملي المحورين واستعماله في التمثيل البياني . – تفسير وجود مستقيم مقارب مائل واستعماله في التمثيل البياني .	
المعادلات من الدرجة الثانية	– تمثيل دالة من الشكل : $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$ وإنشاء جدول تغيّراتها. – استعمال التمثيل البياني لثلاثي الحدود لإستنتاج وجود حلول المعادلة أو معادلات أو متراجحة من الدرجة الثانية . – حل مشكلات تتدخل فيها ثلاثيات الحدود أو معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية .	– إنشاء التمثيل البياني للدالة . $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ – تحديد جذور ثلاثي الحدود وإشارته اعتمادا على : • التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ • الشكل المختصر . • الشكل النموذجي. • المميز. • العبارة المحللة. • حل معادلة من الدرجة الثانية باستعمال التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ حل معادلة من الدرجة الثانية جبريا .
الجمل الخطية	– حلّ جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل . . – ترجمة متراجحة خطية ذات مجهولين بتجزئة المستوي. – حلّ جملة متراجحتين خطيتين ذات مجهولين بيانيا .	
الإحصاء	– تمثيل سلسلة إحصائية منظمة في فئات مختلفة الاطوال بمدرج تكراري . – حساب انحراف معياري وترجمته.	– إنجاز محاكاة تجارب عشوائية بسيطة. – معرفة مفهوم تذبذب العينات . – حساب الإنحراف المعياري لسلسلة إحصائية وتفسيره.

الإحصاء	– حساب الربيعيات والعشرين الأول والتاسع لسلسلة إحصائية. – تمثيل سلسلة إحصائية بمخطط بالعلبة وترجمته . – مقارنة مخططات بالعلبة لسلاسل مختلفة .	– معرفة تحديد وتفسير الربيعيين الادنى والأعلى Q_1 و Q_3 . – إنشاء وتفسير مخطط بالعلبة . – تعيين الإنحراف الربيعي لسلسلة إحصائية .
الإحتمالات	– تعريف قانون الإحتمال. – تعريف نموذج ملائم لتجربة عشوائية في حالات بسيطة. – تعيين احتمال حادثة انطلاقا من قانون احتمال . – حساب كلٍّ من احتمال الحادثة المضادة لحادثة واتحاد وتقاطع حادثتين .	– تعيين مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية . – حادثة بسيطة ، حادثة مركبة . – العمليات على الأحداث (الإتحاد ، التقاطع ، المتممة) . – معرفة قانون الإحتمال على مجموعة منتهية . – معرفة حساب احتمال حادثة (حالة تساوي الإحتمالات) . – حساب احتمال الحادثة العكسية واتحاد حادثتين وتقاطع حادثتين .

تقديم الكتاب

أنجز هذا الكتاب وفق البرنامج الرسمي للسنة الثانية من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي (شعبة التسيير والإقتصاد وشعبتا الآداب) المقرر تطبيقه إبتداء من السنة الدراسية 2006 – 2007 .

إن هيكلة الكتاب تسهّل العمل به ، وتسمح بتعلم أحسن في مختلف ميادين المادة. حتى يكون إستعماله وجيها، من الضروري فهم هيكلته.

ملاحظة : العلامة * المرفقة ببعض الأبواب أو ببعض فقرات منها تشير إلى أن هذه الأبواب أو الفقرات خاصة بشعبة التسيير والإقتصاد فقط.

تقديم الباب

يقدم في هذه الصفحة عنوان الباب والعناصر المعالجة فيه ، كما تعرض نبذة تاريخية حول تطور بعض المفاهيم الرياضياتية المتعلقة بالموضوع.

إستبيان متعدد الإجابات

يهدف الإستبيان المتعدد الإجابات إلى التقويم التشخيصي لمكتسبات المتعلم قبل الشروع في التعلم الجديد .

أنشطة تمهيدية

تسمح الأنشطة التمهيدية المقترحة معالجة بعض الوضعيات التي تهدف إلى مقاربة المفاهيم الرياضياتية موضوع الدراسة .

معارف

تقدم في هذا الجزء المعارف المستهدفة بصفة وجيزة وواضحة ، مدعمة [illegible] البراهين

طرائق

تقترح في هذا الجزء طرائق لتوظيف المعارف المدروسة ؛ مجسدة بحل تمرين بالتفصيل يسمح للتلميذ بتطبيقها في حل وضعيات متشابهة.

مسألة محلولة

إن الوضعية المقترحة في هذا الجزء هو نشاط مركب ، يسمح للمتعلم بإدماج مكتسباته (معارف وطرائق) وتجنيدها لحل هذه الوضعية .

تمارين ومسائل

تمارين ومسائل

يقترح في بداية هذا الجزء نشاط تحت العنوان « صحيح أو خاطئ » ، يهدف إلى تقويم مدى إكتساب التلميذ للمعارف الأساسية من خلال أسئلة بسيطة وقصيرة تتطلب الإجابة عنها بـ : صحيح أو خاطئ .

وزعت التمارين التطبيقية تبعا لترتيب المفاهيم المعالجة في الدرس فهي تسمح بتوظيف المكتسبات وتدعيمها.

فيما يخص المسائل المدرجة، تعتبر وضعيات ثرية ومتنوعة ، تمكن التلميذ من إثبات تحكمه في المعارف والطرائق وتوظيفها لحل وضعيات مركبة وإدماجية .

أما بالنسبة إلى تكنولوجيا الإعلام والإتصال فقد إستعملنا ضمن النصوص صور الوظائف واللمسات والتعليمات... للحاسبة البيانية والمجدول عند كتابة مختلف البرامج وأخترنا أهم الأجزاء من المنهاج لتوظيفهما قصد مساعدة التلميذ على امتلاك هذه الوسائل بسهولة.

فيما يتعلق بالحاسبة البيانية مثلا، فالانشطة المقترحة تخصّ حساب المؤشرات والتمثيل البياني للتطور ، والمتتاليات ، والدوال. وقد أولينا عناية خاصة بإدماج هذه الوسائل في باب الإحصاء عند تعيين مؤشرات سلسلة إحصائية وإنشاء مخطط بالعلبة وإنجاز محاكاة تجربة وتمثيل نتائج عشوائية بيانيا .

الباب 1 النسب المئوية والمؤشرات

1. نسبة الجزء إلى الكلّ
2. النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى
3. التطورات والنسب المئوية
4. المؤشرات

تاريخ رمز النسبة المئوية

إنّ الأعمال الرياضياتية باللغة اللاتينية، في الأصل، لا يعبر عنها بأرقام أو برموز، بل كانت تعتمد كليا على الكلمات.وهكذا، فإن الكسر $\frac{1}{100}$ كان يكتب" unu per cento " الذي يعنيّ واحد من مئة.

- في سنة *1425* ، بسطت هذه الكتابة بوضع الحرف *P* افقيا على الكلمة cento.
- وفي *1650* تم تقصير الكلمة cento بالاحتفاظ فقط بالحرف الأخير *o*.
- وفي بداية القرن الثامن عشر أخذ رمز النسبة المئوية شكله الحالي %.

رمز النسبة المئوية في القرن الخامس عشر.

رمز النسبة المئوية في القرن السابع عشر.

رمز النسبة المئوية في القرن الثامن عشر.

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1. إزداد سعر منتوج بـ % 20. لحساب سعره الجديد، نضرب سعره الأصلي في	$0,2$	$1,2$	$\frac{80}{100}$
2. قرر تاجر تخفيض سعر منتوج بـ % 7. للحصول على السعر الجديد له، عليه أن يضرب السعر الأصلي في....	$0,93$	$1,07$	$\frac{7}{100}$
3. إزداد عدد سكان مدينة بـ % 4 في سنة 2000 ثم إزداد بـ % 6 في السنة الموالية. النسبة المئوية للزيادة الإجمالية هي....	10 %	24 %	10,24 %
4. كان سعر كتاب 150 دينارا ثم أصبح 180 دينارا. النسبة المئوية للزيادة في السعر هي...	30 %	20 %	12 %
5. نسب النجاح في البكالوريا في ثانوية هي: – % 28 في شعبة علوم الطبيعة والحياة: – % 24 في شعبة الأدب. – % 40 في شعبة الرياضيات. – % 32 في شعبة التسيير والاقتصاد. نسبة النجاح الإجمالية في هذه الثانوية هي....	27 %	31 %	لا نستطيع حسابها
6. تحصل تلميذان على 7 و 5 في فرض الرياضيات. نضيف نقطة واحدة إلى كل منهما، فتكون نسبة الزيادة....	نفسها بالنسبة إلى التلميذين.	أكبر بالنسبة إلى التلميذ الذي تحصل على 7	أكبر بالنسبة إلى التلميذ الذي تحصل على 5
7. لحساب نسبة مئوية لنسبة مئوية أخرى.....	نجمع النسبتين	نطرح النسبة الثانية من النسبة الأولى	نضرب النسبتين
8. إذا إزداد سعر منتوج بـ % 30 ثم إنخفض بـ % 30 ، فإنه...	لا يتغير	يزداد بـ % 9	ينقص بـ % 9
9. يحتوي الاستبيان على 9 أسئلة. إذا تحصلت على n إجابة صحيحة، فإن نسبة نجاحك هي.....	$\frac{9n}{100}$	$\frac{100n}{9}$	$\frac{100+n}{9}$

نشاط 1: نسبة الجزء إلى الكل

يمثل الجدول التالي ورقة التعويض للضمان الاجتماعي والتعاضدية.
تطبق النسبة المئوية للتعويض من طرف الضمان الاجتماعي على مبلغ قاعدي معين، وتطبق نسبة التعويض للتعاضدية على المبلغ المعوّض من طرف الضمان الاجتماعي.

	التاريخ	المبلغ المدفوع	المبلغ القاعدي للتعويض	نسبة التعويض	المبلغ المعوض	نسبة تعويض التعاضدية	المبلغ المعوض
الفحص الطبي	05.01.06	400	50		40	20 %	
الأدوية	06.01.06	2340,50	234,50				
المجموع							

يطلب ملء هذه الورقة بعد الإجابة عن الأسئلة التالية:
1. ما هي النسبة المئوية للتعويض من طرف الضمان الاجتماعي؟
2. ما هي المبالغ المعوّضة من طرف الضمان الاجتماعي؟
3. ما هي المبالغ المعوّضة من طرف التعاضدية؟

نشاط 2: النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى

يتكون نادي الشباب من 192 منخرطا، 20 % منهم بنات، 35 % من البنات مسجلات في فرع الإعلام الآلي.
1. ما هو عدد البنات في هذا النادي؟
2. ما هو عدد المسجلات في فرع الإعلام الآلي؟
3. استنتج النسبة المئوية للمسجلات في الإعلام الآلي بالنسبة إلى عدد المنخرطين في النادي.
4. احسب هذه النسبة المئوية دون اعتبار السؤالين 1 و 2.

نشاط 3: التطوّر والنسبة المئوية

ليكن x سعر منتوج في سنة 2000. خضع هذا السعر إلى زيادة قدرها 10 % في سنة 2001 ثم إلى زيادة أخرى قدرها 15 % في 2002.
1. إذا كان x_1 و x_2 سعري المنتوج في سنتي 2001 و 2002 على الترتيب.
عبر عن x_1 بدلالة x وعن x_2 بدلالة x_1 ثم استنتج عبارة x_2 بدلالة x.
2. ما هي النسبة المئوية للزيادة الإجمالية لسعر هذا المنتوج؟

نشاط 4: المؤشرات

يمثل الجدول التالي تطوّر عدد الولادات (بالآلاف) في الجزائر بين 1997 و 2004.

السنة	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
الولادات	654	607	594	589	619	617	649	669

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات.

نأخذ المؤشر 100 كأساس في السنة 1997 و لحساب المؤشر لسنة 1998 مثلا نتمم جدول التناسبية التالي:

654	607
100	؟

1. احسب مؤشر السنة 1998 ثم بنفس الطريقة اتمم الجدول التالي:

السنة	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
الولادات	654	607	594	589	619	617	649	669
المؤشر	100							

2. استنتج من الجدول النسبة المئوية لتطوّر عدد الولادات بين 1997 و 1998 ثم بين 1997 و2000 وبين 1997 و 2004.

3. احسب النسبة المئوية لتطوّر عدد الولادات بين 2000 و 2003.

1. نسبة الجزء إلى الكلّ

تعريف

لتكن E المجموعة المرجعية ذات n عنصرا و A جزءا من E ذا a عنصرا.
النسبة المئوية للجزء A إلى الكلّ E هو العدد x حيث:
$\frac{x}{100}=\frac{a}{n}$ أي $x=\frac{a}{n}\times 100$.

ملاحظات

- نقول إنّ العدد a يمثل $x\ \%$ من العدد n و هذا يعني أنّ العددين a و n متناسبان مع العددين x و 100.
- يمكن التعبير عن نسبة الجزء إلى الكلّ باستعمال كسر أو عدد عشري.

مثال

يتكون قسم من 30 تلميذا منهم 18 ذكرا. النسبة المئوية للذكور هي: $\frac{18}{30}\times 100=60$ أي $60\ \%$.

$60\ \%$ هو $\frac{3}{5}$ وهو أيضا $0{,}6$.

2. النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى

خاصية

ليكن B جزءا من مجموعة E و A جزءا من B $(A\subset B\subset E)$.
إذا كان B يمثل $y\ \%$ من E و A يمثل $x\ \%$ من B، فإنّ الجزء A يمثل $x\ \%$ من $y\ \%$ من E، أي $\frac{x\times y}{100}\ \%$ من E.

برهان

نعتبر a، b، n أعداد عناصر المجموعات A ، B ، E على الترتيب.
إذا كان B يمثل $y\ \%$ من E، فإن $\frac{y}{100}=\frac{b}{n}$. إذا كان A يمثل $x\ \%$ من B، فإن $\frac{x}{100}=\frac{a}{b}$.
نستنتج أن $\frac{x\times y}{100\times 100}=\frac{x}{100}\times\frac{y}{100}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{n}$. لكن $\frac{a}{b}\times\frac{b}{n}=\frac{a}{n}$ و إذا كانت z النسبة المئوية للجزء A بالنسبة إلى المجموعة E فإن $\frac{z}{100}=\frac{a}{n}$.
ونحصل في الأخير على $\frac{z}{100}=\frac{x\times y}{100\times 100}$ أي $z=\frac{x\times y}{100}$

مثال

في قسم سنة ثانية ثانوي تسيير واقتصاد، يوجد 60% من الذكور، منهم 40% داخليون.

النسبة المئوية للتلاميذ الذكور الداخليين في القسم هي: $\frac{40}{100}\times\frac{60}{100}=\frac{24}{100}$ أي $24\ \%$.

ملاحظة

في مثل هذه الوضعيات، يجب تحديد المجموعة المرجعية بدقة.
في المثال السابق، عدد الداخليين يمثل $24\ \%$ من القسم كله ويمثل 40% من الذكور.

3. التطورات والنسب المئوية

- **التعبير عن زيادة أو تخفيض**

مبرهنة

- زيادة مقدار بنسبة مئوية $a\ \%$ هو ضرب هذا المقدار في $1+\frac{a}{100}$.
- تخفيض مقدار بنسبة مئوية $b\ \%$ هو ضرب هذا المقدار في $1-\frac{b}{100}$.

برهان

ليكن x_0 القيمة الأولية لمقدار ما و x_1 قيمته النهائية بعد زيادة $a\ \%$ منه، إذن

$$x_1=x_0+\frac{a}{100}\times x_0=x_0\times\left(1+\frac{a}{100}\right)$$

في حالة تخفيض x_0 بـ $b\ \%$ نجد بنفس الطريقة $x_1=x_0-\frac{b}{100}\times x_0=x_0\times\left(1-\frac{b}{100}\right)$.

أمثلة

- الزيادة بـ $40\ \%$ هو الضرب في $1+\frac{40}{100}=1,4$.
- التخفيض بـ $25\ \%$ هو الضرب في $1-\frac{25}{100}=0,75$.
- الضرب في $1,085$ هو الزيادة بـ $8,5\ \%$.
- الضرب في $0,9$ هو التخفيض بـ $10\ \%$.

ملاحظة

يمكن التعبير عن زيادة باستعمال عدد موجب وعن تخفيض باستعمال عدد سالب.
فمثلا، الزيادة بـ $15\ \%$ تمثل تطوّرا بـ $+15\ \%$ و التخفيض بـ $38\ \%$ تمثل تطوّرا بـ $-38\ \%$.

- **التطور المطلق والتطور النسبي**

تعريف

ليكن x_0 القيمة الأولية لمقدار x و x_1 قيمته النهائية بعد تطور.
- نسمي **التطوّر المطلق** لهذا المقدار الفرق $x_1 - x_0$ و نرمز له Δx .
- نسمي **التطوّر النسبي** لهذا المقدار حاصل القسمة $\frac{\Delta x}{x_0}$ أي $\frac{x_1 - x_0}{x_0}$.

ملاحظات
- نعبر عن التطور المطلق بنفس وحدة المقدار.
- نعبر عن التطور النسبي بعدد وبدون وحدة.
- إذا كان التطور المطلق (أو النسبي) موجبا، فإن هذا التطور يمثل زيادة.
- إذا كان التطور المطلق (أو النسبي) سالبا، فإن هذا التطور يمثل تخفيضا.

- **المعامل الضربي**

تعريف

ليكن x_0 القيمة الأولية لمقدار ما و x_1 قيمته النهائية بعد تطور. نسمي **المعامل الضربي** العدد k حيث $k = \frac{x_1}{x_0}$.

ملاحظات
- إذا كان k هو المعامل الضربي الموافق لتطوّر ما، فإن النسبة المئوية لهذا التطوّر هو العدد $100 \times (k-1)$.
- إذا كان التطور عبارة عن زيادة، فإن المعامل الضربي اكبر من 1 .
- إذا كان التطور عبارة عن تخفيض، فإن المعامل الضربي أصغر من 1 .

أمثلة
- كان سعر لتر البنزين 20 دينارا في تاريخ t_0 و أصبح 23 دينارا في التاريخ t_1.
- كان سعر الهاتف النقال 5300 دينار في تاريخ t_0 و أصبح 4920 دينارا في التاريخ t_1.

يمثل الجدول التالي الطرق المختلفة المعبرة عن هذا التطوّر.

التطوّر	الدستور	الزيادة	التخفيض
التطوّر المطلق	$\Delta x = x_1 - x_0$	$23 - 20 = 3$ زيادة 3 دنانير	$4920 - 5300 = -380$ تخفيض 380 دينارا
المعامل الضربي	$k = \dfrac{x_1}{x_0}$	$\dfrac{23}{20} = 1,15$	$\dfrac{4920}{5200} \approx 0,9462$
النسبة المئوية للتطور	$(k-1)\times 100$	$(1,15-1)\times 100 = 15$ 15 %	$(0,9462-1)\times 100 = -5,38$ 5,38 %
التطوّر النسبي	$\dfrac{\Delta x}{x_0} = \dfrac{x_1 - x_0}{x_0}$	$\dfrac{3}{20} = 0,15$	$\dfrac{-380}{5200} \approx -0,7308$

- **التطورات المتعاقبة**

خاصية

إذا خضعت قيمة ما إلى تطورات متعاقبة (زيادات أو تخفيضات) ، فإنّ المعامل الضربي الإجمالي يساوي جداء المعاملات الضربية للتطوّرات.

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "\times k_1"] \arrow[rrr, bend right, "\times k"'] & x_1 \arrow[r, "\times k_2"] & x_2 \arrow[r, "\times k_3"] & x_3 \end{tikzcd}$$

$$k = k_1 \times k_2 \times k_3$$

برهان

لدينا

$$x_1 = x_0 \times k_1$$

$$x_2 = x_1 \times k_2 = (x_0 \times k_1) \times k_2 = x_0 \times (k_1 \times k_2)$$

$x_3 = x_2 \times k_3 = x_0 \times (k_1 \times k_2) \times k_3 = x_0 \times (k_1 \times k_2 \times k_3)$ إذن $x = x_0 \times k$ حيث $k = k_1 \times k_2 \times k_3$.

مثال

يزيد سعر منتوج بـ 24% ثمّ ينخفض بـ 17%. ما هي نسبة تطوره ؟

حساب نسبة التطوّر:

$\left(1+\dfrac{24}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{17}{100}\right) = 1,24 \times 0,83 \approx 1,029$ وهذا يمثل زيادة في سعر المنتوج بمقدار $2,9\%$

(لأن $(1,029-1)\times 100 = 2,9$).

حذار

لا تجمع النسب المئوية الخاصة بالتطورات.

مثال

يزداد مقدار بـ $30\ \%$ ثمّ بـ 40%. نسبة تطوره هي:

$\left(1+\dfrac{30}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{40}{100}\right) = 1,3 \times 1,4 = 1,82$ و هذا يعني زيادة بـ $82\ \%$ بينما $82\ \% \neq 30\ \% + 40\ \%$

4. المؤشرات

تعريف

لتكن سلسلة قيم x_0 ، x_1 ، x_2 ، ... ، x_k المرفقة بالأزمنة t_0 ، t_1 ، t_2 ، ... ، t_k على الترتيب.
نأخذ 100 كأساس في الزمن t_0.
نسمي **مؤشرا** في الزمن t_i العدد I_i حيث $I_i = \frac{x_i}{x_0} \times 100$.

خاصية

النسبة المئوية لتطوّر مقدار من الزمن t_0 إلى الزمن t_i تساوي $(I_i - 100)\%$.

برهان

النسبة المئوية لتطوّر مقدار من الزمن t_0 إلى الزمن t_i هو a حيث

$$a = \frac{x_i - x_0}{x_0} \times 100 = \frac{x_i}{x_0} \times 100 - \frac{x_0}{x_0} \times 100 = I_i - 100.$$

مثال

يبين الجدول تطور سعر منتوج خلال السنوات 2003 ، 2004 ، 2005 .

السنة	2003	2004	2005
السعر	15	21	23,40
المؤشر (الأساس 100 في 2003)	100	$\frac{21}{15} \times 100 = 140$	$\frac{23,4}{15} \times 100 = 156$
النسبة المئوية للتطور		40 % لأن $140 - 100 = 40$	56 % لأن $156 - 100 = 56$

1. حساب نسبة الجزء إلى الكلّ

طريقة

لحساب نسبة الجزء إلى الكلّ نحدد بعناية المجموعة المرجعية (المجموعة الكلية).

تمرين

يمثّل الجدول التالي توزيع منخرطي ناد رياضي حسب نوع الرياضة وصنف اللاعبين:

	كرة القدم	كرة اليد	كرة السلة
الأكابر	28	18	15
الأصاغر	24	22	12
الأشبال	36	15	14

1. احسب النسبة المئوية للأصاغر في كرة اليد بالنسبة إلى مجموع لاعبي كرة اليدّ.
2. احسب النسبة المئوية للاعبي كرة القدم بالنسبة إلى مجموع المنخرطين في هذا النادي.
3. احسب النسبة المئوية للأكابر في كرة السلة بالنسبة إلى مجموع المنخرطين في هذا النادي.
(تدوّر النتائج إلى $0,01$).

حل

1. عدد الأصاغر في كرة اليد هو 22 و مجموع لاعبي كرة اليدّ في النادي هو $18+22+15=55$،
وتحسب النسبة المئوية $\frac{22}{55}\times 100 = 40$ أي $40\ \%$.
2. عدد لاعبي كرة القدم هو $28+24+36=88$ ومجموع منخرطي النادي هو $(28+24+36)+(18+22+15)+(15+12+14)=184$،
وتحسب النسبة المئوية $\frac{88}{184}\times 100 \approx 47,83$ أي $47,83\ \%$.
3. عدد الأكابر في كرة السلة هو 15 و مجموع منخرطي النادي هو 184،
وتحسب النسبة المئوية $\frac{15}{184}\times 100 \approx 8,15$ أي $8,15\ \%$.

ملاحظات

- قبل إجراء كل الحسابات، يستحسن حساب المجاميع الأفقية والعمودية المختلفة في الجدول.

	كرة القدم	كرة اليد	كرة السلة	المجموع
الأكابر	28	18	15	61
الأصاغر	24	22	12	58
الأشبال	36	15	14	65
المجموع	88	55	41	184

- عند إجراء القسمات المختلفة، ينبغي الاحتفاظ بالعدد الكافي من الأرقام بعد الفاصلة وتدوير النتيجة النهائية فقط.
- لمعرفة قيمة نسبة مئوية مدوّرة إلى $0,01$، نحسب القيمة العشرية للجزء بـ 5 أرقام بعد الفاصلة ثم ندوّر الرقم الرابع وأخيرا نضرب في 100.

مثال

في السؤال الثاني للتمرين السابق لدينا $\frac{88}{184} \approx 0,47826 \approx 0,4783$

و منه $\frac{88}{184} \times 100 \approx 0,4783 \times 100 \approx 47,83$.

2. حساب النسبة المئوية الإجمالية لتطوّرات متعاقبة

طريقة

لحساب النسبة المئوية الإجمالية لـ n تطوّرا متعاقبا، نتبع المراحل التالية:

- نترجم كلا من التطوّرات المعطاة بالمعامل الضربي الموافق.
- نطبق مبدأ جداء المعاملات الضربية $k = k_1 \times k_2 \times k_3 \times ... \times k_n$.
- نعبر عن التطوّر الإجمالي في شكل نسبة مئوية $a\%$ حيث $a = (k-1) \times 100$.

تمرين

عدد تلاميذ ثانوية في سنة 2002 هو 840 تلميذا و في سنة 2003 ينتقل هذا العدد إلى 882 تلميذا.

في سنة 2004 إزداد هذا العدد بـ 12% وانخفض في سنة 2005 بـ 8%.

احسب النسبة المئوية للتطوّر الإجمالي لتعداد هذه الثانوية مباشرة من 2002 إلى 2005 دون حساب عدد التلاميذ في كل سنة.

حلّ

- المعامل الضربي الموافق للتطوّر في سنة 2003 هو $k_1 = \frac{882}{840} = 1,05$.

المعامل الضربي الموافق للتطوّر في سنة 2004 هو $k_2 = 1 + 0,12 = 1,12$.

المعامل الضربي الموافق للتطوّر في سنة 2005 هو $k_3 = 1 - 0,08 = 0,92$.

- المعامل الضربي الإجمالي هو

$$\begin{aligned} k &= k_1 \times k_2 \times k_3 \\ &= 1,05 \times 1,12 \times 0,92 \\ &= 1,08192 \end{aligned}$$

لنسبة المئوية لهذا التطوّر الإجمالي هو:

$$
\begin{aligned}
a &= (k-1)\times 100 \\
&= (1,08192-1)\times 100 \\
&= 0,08192\times 100 = 8,192 \simeq 8,2
\end{aligned}
$$

إذن ازداد عدد التلاميذ في هذه الثانوية بين 2002 و 2005 بـ %8,2.

3. حساب مؤشرات باستعمال حاسبة بيانية

طريقة:

لحساب مؤشرات باستعمال حاسبة بيانية نستعمل القوائم المختلفة المتواجدة في برنامج الإحصاء ثمّ نطبق الدساتير المناسبة.

تمرين

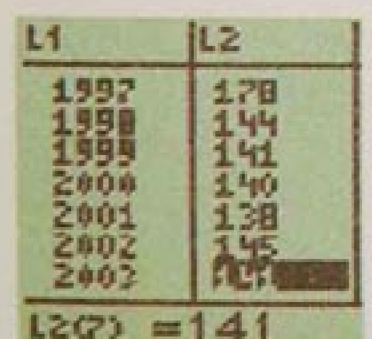
يمثل الجدول التالي تطوّر عدد الوفيات (بالآلاف) في الجزائر من 1997 إلى 2003:

السنة	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
الوفيات	178	144	141	140	138	145	141

يؤخذ المؤشر 100 كأساس في سنة 2000.
باستعمال حاسبة بيانية، عين مؤشرات السنوات الأخرى.

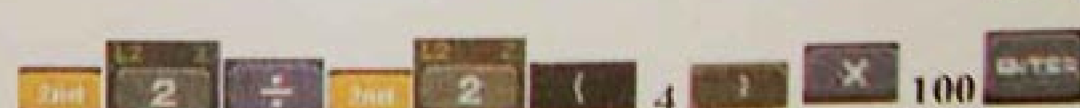
حل

باستعمال الحاسبة TI 83



1. نحجز السنوات في القائمة L1 للحاسبة وأعداد الوفيات الموافقة في القائمة L2 باستعمال اللمسة STAT واختيار الوظيفة 1:Edit... .

2. لحساب المؤشرات نقسم كلا من قيم القائمة L2 على القيمة 140 الموافقة لسنة الأساس 2000 ولهذا:
نضع الزالق في L3 ثم ندخل الدستور" L2/L2(4) × 100 " بتنفيذ البرنامج:



نحصل على المؤشرات التالية:

السنة	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
الوفيات	178	144	141	140	138	145	141
المؤشرات	**127**	**103**	**101**	**100**	**99**	**104**	**101**

4. حساب مؤشرات باستعمال مجدول

طريقة

لحساب مؤشرات باستعمال مجدول نستعمل القوائم المختلفة المتواجدة في برنامج الإحصاء ثم نطبق الدساتير المناسبة.

تمرين

يمثل الجدول التالي عدد السكان و عدد الزيجات في الجزائر من 1990 إلى 2004. يؤخذ المؤشر 100 كأساس في سنة 1995.
عين، باستعمال مجدول، مؤشرات السنوات الأخرى بالنسبة إلى كل من السكان والزيجات.

	A	B	C
1	السنة	السكان (بالآلاف)	الزيجات
2	1990	25 022	149 345
3	1991	25 643	151 467
4	1992	26 271	159 380
5	1993	26 894	153 137
6	1994	27 496	147 954
7	1995	28 060	152 786
8	1996	28 566	156 870
9	1997	29 045	157 831
10	1998	29 507	158 298
11	1999	29 965	163 126
12	2000	30 416	177 548
13	2001	30 879	194 273
14	2002	31 357	218 620
15	2003	31 848	240 463
16	2004	32 364	267 633

حلّ

1. لحساب مؤشرات السكان يجب تقسيم كل من قيم العمود B على القيمة المتواجدة في الخلية B7 الموافقة لسنة الأساس 1995 ولذا:
نكتب في الخلية D2 الدستور كما في الجدول المقابل (تدل الكتابة B7 على " مرجع مطلق" يعني أن قيمة الخلية B7 تبقى ثابتة عند نقل الدستور إلى الخلايا الأخرى).

	A	B	C	D
1	السنة	السكان (بالآلاف)	الزجات	مؤشر السكان
2	1990	25 022	149 345	=B2/B7*100
3	1991	25 643	151 467	
4	1992	26 271	159 380	
5	1993	26 894	153 137	
6	1994	27 496	147 954	
7	1995	28 060	152 786	
8	1996	28 566	156 870	

2. نختار الخلية D2 ونسحب بالزالق حتى الخلية D16 ونحصل على مؤشرات السكان.

	A	B	C	D
1	السنة	السكان (بالآلاف)	الزجات	مؤشر السكان
2	1990	25 022	149 345	89,17
3	1991	25 643	151 467	91,39
4	1992	26 271	159 380	93,62
5	1993	26 894	153 137	95,84
6	1994	27 496	147 954	97,99
7	1995	28 060	152 786	100,00
8	1996	28 566	156 870	101,80
9	1997	29 045	157 831	103,51
10	1998	29 507	158 298	105,16
11	1999	29 965	163 126	106,79
12	2000	30 416	177 540	108,40
13	2001	30 879	194 273	110,05
14	2002	31 357	218 620	111,75
15	2003	31 848	240 463	113,50
16	2004	32 364	267 633	115,34

3. بنفس الطريقة نحصل في العمود E على مؤشرات الزواج.

	A	B	C	D	E
1	السنة	السكان (بالآلاف)	الزجات	مؤشر السكان	مؤشر الزواج
2	1990	25 022	149 345	89,17	97,75
3	1991	25 643	151 467	91,39	99,14
4	1992	26 271	159 380	93,62	[illegible]
5	1993	26 894	153 137	95,84	100,23
6	1994	27 496	147 954	97,99	[illegible]
7	1995	28 060	152 786	100,00	100,00
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	1997	29 045	157 831	103,51	103,30
10	1998	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	1999	29 965	163 126	106,79	106,77
12	[illegible]	30 416	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	2001	30 879	194 273	110,05	127,16
14	2002	31 357	218 620	[illegible]	143,29
15	2003	31 848	240 463	113,50	157,39
16		32 364	267 633	[illegible]	[illegible]

5. التمثيل البياني لتطور باستعمال الحاسبة البيانية

طريقة

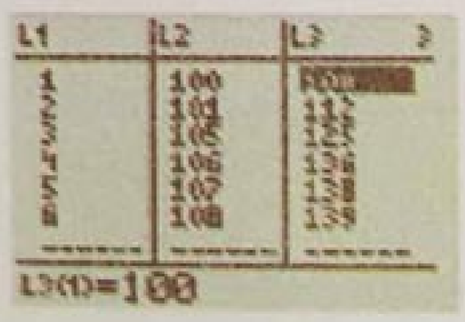
للحصول على التمثيل البياني لتطور باستعمال الحاسبة البيانية من النوع TI 83 نستعمل الوظيفة التي نحصل عليها باللمستين ، .

تمرين

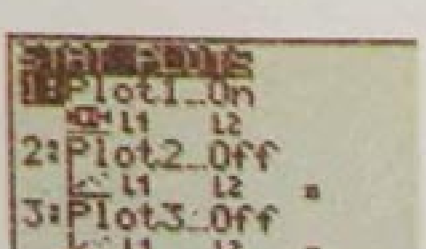
يمثّل الجدول التالي تطوّر مؤشرين، أساسهما *100* في الزمن *1*.
مثّل بيانيا تطوّر كل من هذين المؤشرين ثم قارن التطوّرين الموافقين.

الزمن	المؤشر 1	المؤشر 2
1	*100*	*100*
2	*101*	*112*
3	*105*	*125*
4	*106*	*136*
5	*107*	*138*
6	*108*	*139*

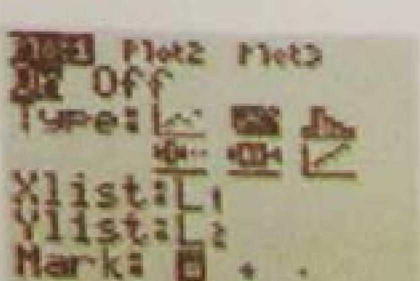
حل



1. نحجز الأزمنة في القائمة L1 للحاسبة وقيم المؤشر *1* في القائمة L2 و قيم المؤشر *2* في القائمة L3 باستعمال اللمسة STAT واختيار الوظيفة 1:Edit...

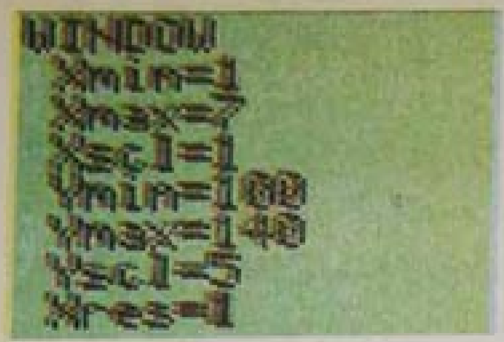


2. نحصل على الوظيفة STAT PLOTS باللمستين 2nd و .

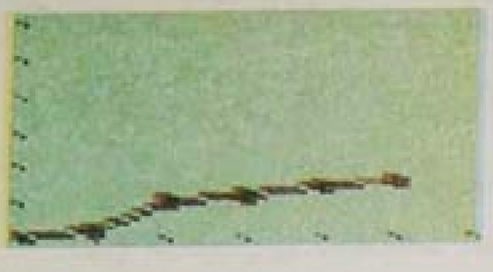


3. للحصول على التمثيل البياني للمؤشر *1* نضغط على (أو على) للحصول على الوظيفة Plot1 ثم نختار النوع الثالث للتمثيل البياني ونسجل L1 في Xlist: و L2 في Ylist: واختيار شكل النقط في Mark:

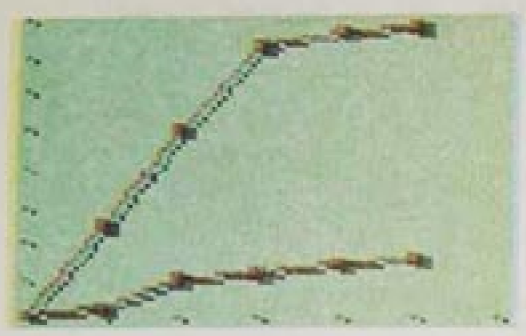
4. نختار النافذة الإحصائية باستعمال اللمسة ZOOM والوظيفة 9:ZoomStat



5. نضبط الفواصل في النافذة بالضغط على اللمسة WINDOW .

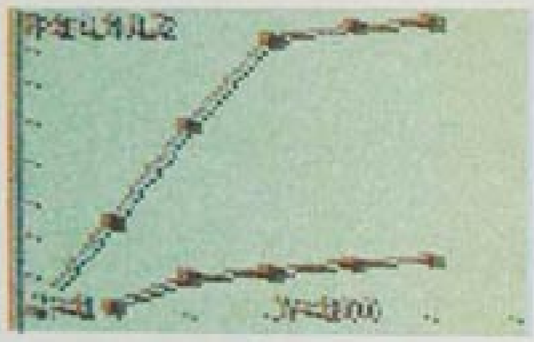


6. نظهر التمثيل باللمسة GRAPH .



7. للحصول على التمثيل البياني للمؤشر2 نتبع نفس المراحل السابقة مع اختيار الوظيفة وتسجيل L1 في Xlist: و L3 في Ylist: .

نحصل على التمثيل البياني للمؤشرين في نفس الورقة باستعمال الوظيفة في PlotsOn .



ملاحظة

يمكن استظهار إحداثيات نقط التمثيل البياني باستعمال اللمسة TRACE و ننتقل من مثيل إلى آخر او من نقطة أحد التمثيلين إلى نقطة أخري منه باستعمال لمسات التنقل 

نلاحظ أن المؤشر 1 يزداد بصفة منتظمة وبيطء، أما المؤشر 2 فيزداد بسرعة في السنوات الأربع الأولى .

مسألة محلولة

دفع مقتصد ثانوية $18\ 000$ دينار لشراء الورق خلال سنة 2004.

1. علما أن رزمة الورق تحتوي على 500 ورقة وسعر الرزمة هو 240 دينارا، احسب عدد الرزم المستهلكة.
2. إزداد سعر الرزمة في 01 جانفي 2005 بـ 5 %.
   أ) إذا استعمل المقتصد نفس المبلغ، ما هو عدد الرزم (بالتقريب إلى الوحدة بالنقصان) الذي يمكن شراؤها خلال سنة 2005؟
   ب) عين النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق في 2005 (تدور النتيجة إلى 0,1).
3. نفرض أن زيادة سعر الورق في 01 جانفي 2005 هي x %.
   أ) بين أن عدد الرزم الذي يمكن للمقتصد شراؤه في 2005 هو $\frac{7500}{100+x}$.
   ب) احسب بدلالة x النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق في 2005.
   ج) إذا لم يرد المقتصد تخفيض استهلاك الورق بأكثر من 8 %. ما هي في هذه الحالة أكبر قيمة للنسبة المئوية x التي يمكن تحمّلها؟

حل

1. $\frac{18000}{240}=75$ إذن عدد الرزم هو 75.

2. أ) بعد زيادة 5 % يصبح سعر الرزمة في 2005 هو $240\left(1+\frac{5}{100}\right)=240\times1,05=252$ أي 252 دينارا.

إذن عدد الرزم الذي يمكن شراؤه خلال سنة 2005 هو $\frac{18000}{252}\approx 71$ أي **71 رزمة**.

ب) النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق في 2005 هو $\frac{75-71}{75}\times100\approx5,3$ أي **5,3 %**.

3. أ) سعر الرزمة في 2004 هو 240 دينارا وبعد الزيادة بـ x % يكون السعر الجديد للرزمة:

$240\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{240(100+x)}{100}$ ومنه عدد الرزّم n بدلالة x هو

$$n=\frac{18000}{\frac{240(100+x)}{100}}=\frac{18000\times100}{240(100+x)}=\frac{7500}{100+x}$$ إذن $n=\frac{7500}{100+x}$

ب) النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق في 2005 هو

$$\frac{75-\frac{7500}{100+x}}{75}\times100=\frac{\frac{7500+75x-7500}{100+x}}{75}\times100=\frac{75x}{75(100+x)}\times100=\frac{100x}{100+x}$$ أي $\frac{100x}{100+x}$ %.

ج) بما أن المقتصد لا يريد تخفيض استهلاك الورق بأكثر من 8 % فينبغي الا تتجاوز النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق 8 % في 2005. إذن لدينا المتراجحة $\frac{100x}{100+x}<8$

أي $100x<8x+800$ أي $x<\frac{800}{92}$ إذن $x<8,7$.

إذن أكبر نسبة مئوية لزيادة سعر الرزمة يمكن تحمّلها هي **8,7 %**.

1. صحيح أو خاطئ

أ) عندما نضرب قيمة في $1,14$، فإن هذه القيمة تزيد بـ $14\ \%$

ب) عندما نضرب قيمة في $0,93$، فإن هذه القيمة تنقص بـ $7\ \%$

جـ) إذا كان $15\ \%$ من التلاميذ في ثانوية داخليين و $23\ \%$ نصف داخليين، فإن $52\ \%$ خارجيون

د) في ثانوية، إذا كان 48% من الذكور لهم أقل من 18 سنة و43% من الإناث لهنّ أقل من 18 سنة، فإن $9\ \%$ من تلاميذ الثانوية لهم أقل من 18 سنة

هـ) عندما يزيد سعر منتوج بـ $x\ \%$ ثم ينقص بـ $x\ \%$ فإنه لا يتغير

و) الزيادة دائما أصغر من $100\ \%$

ز) إذا خضع مقدار لزيادة $20\ \%$ متبوعة بزيادة $25\ \%$، فهذا يعني خضوعه لزيادة $45\ \%$

ي) زيادة مقدار بـ $100\ \%$ تعني ضرب هذا المقدار في 2

نسبة الجزء إلى الكلّ

2. يتكون قسم من 36 تلميذا منهم 21 ذكرا ما هي النسبة المئوية للذكور في هذا القسم؟

3. كان سعر منتوج 175 دينارا ثم أصبح 150 دينارا

عبر عن هذه الزيادة في شكل نسبة مئوية

4. أعط الكتابات العشرية للنسب المئوية التالية:

$56\ \%$ ، $3\ \%$ ، $109\ \%$ ، $7,8\ \%$ ،$0,9\ \%$

5. اكتب الأعداد العشرية التالية في شكل نسب مئوية:

$0,48$ ، $0,2$ ، $0,0035$ ، $1,39$ ، $2,07$

6. تحتوي ثانوية على 850 تلميذا، منهم $28\ \%$ مسجلون في السنة الثانية و $24\ \%$ من تلاميذ السنة الثانية مسجلون في شعبة التسيير والاقتصاد

1) احسب عدد تلاميذ السنة الثانية

2) أ) احسب عدد تلاميذ السنة الثانية تسيير واقتصاد

ب) ما هي النسبة المئوية التي يمثلها هذا العدد بالنسبة إلى عدد تلاميذ الثانوية

7. إليك بعض المعطيات الديمغرافية:

اناث	ذكور
$49,6\ \%$	$50,4\ \%$

ذكور

أكثر من 60 سنة	بين 18 و 60 سنة	أقل من 18 سنة
17%	$65\ \%$	18%

إناث

أكثر من 60 سنة	بين 18 و 60 سنة	أقل من 18 سنة
15%	63%	22%

اتمم الجدول التالي بتحديد النسب المئوية الموافقة للفئات المختلفة بالنسبة إلى المجتمع الكلي:

	أقل من 18 سنة	من 18 إلى 60 سنة	أكثر من 60 سنة	المجموع
ذكور				
إناث				
المجموع				

8. سعر معطف، بعد تخفيض قدره 15% هو 3245 دينارا

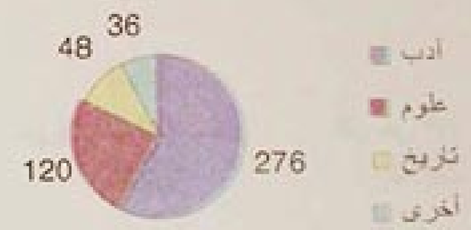
ما هو سعره الأصلي؟

9. نضع مبلغا ماليا قدره 12000 دينار في صندوق التوفير بفائدة سنوية قدرها 3,5 %. في كل سنة تضاف الفائدة إلى المبلغ (فوائد مركبة).
1) ما هو المبلغ الكلي المحصل عليه بعد سنة واحدة ؟ بعد سنتين ؟ بعد 10 سنوات؟
2) بعد كم سنة نحصل على ضعف المبلغ الأولي؟

10. توظف مؤسسة اقتصادية 8 إطارات والباقي عمال.
ما هو عدد الأجراء في هذه المؤسسة علما أن نسبة الإطارات هي 2,75 % من العدد الإجمالي للأجراء؟

11. كان سعر حاسوب 52000 دينار ثم أصبح 50440 دينارا.
ما هي النسبة المئوية الموافقة لهذا التخفيض؟

12. يمثل المخطط الدائري التالي توزيع الكتب في مكتبة حسب أنواعها.



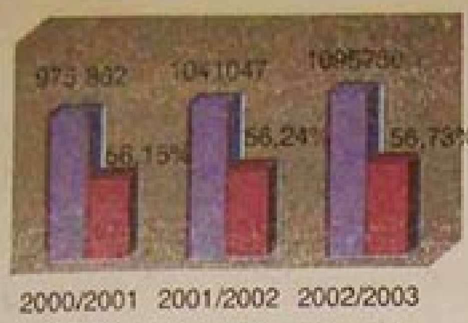
احسب النسبة المئوية لكل نوع.

13. أكمل الجدول التالي لنتائج امتحان البكالوريا في التعليم العام لدورة جوان 2002 :

	ذكور	إناث	المجموع
المسجلون		261 657	449 023
الحاضرون	162 414		
الناجحون	45 727	73 581	
نسبة النجاح %		29,72	

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

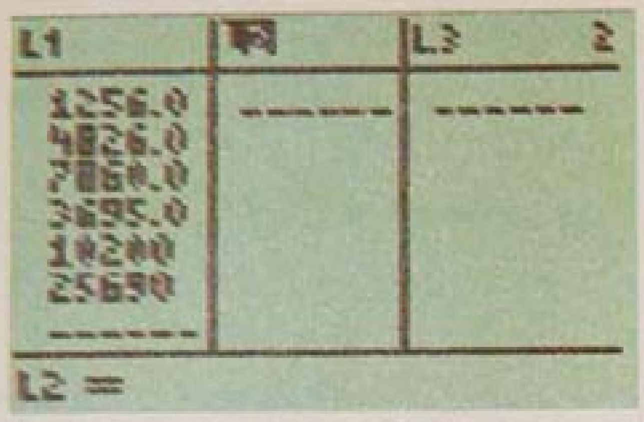
14. يمثل المخطط التالي عدد التلاميذ المسجلين في التعليم الثانوي في الجزائر:



المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

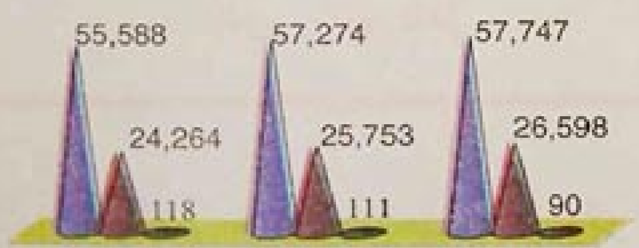
احسب عدد الإناث في كل من السنوات الدراسية المعطاة.

15. تمثل الأعداد المدوّنة في القائمة L1 لحاسبة بيانية أسعار أثاث منزلي (بالدنانير) :



1) إذا علمت أن الرسم على القيمة المضافة هو 17 % فما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L2 للحصول على قيمة هذا الرسم على كل سعر؟
2) استنتج قيمة الرسم على سعر كل أثاث.

16. يمثل المخطط التالي توزيع أساتذة التعليم الثانوي في الجزائر:



المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

احسب النسبة المئوية لكل من فئتي النساء والأجانب، في كل السنوات المدرسية المذكورة.

نسب مئوية لنسب مئوية

17. في ثانوية يوجد 53 % من التلاميذ ذكور حيث 25 % منهم مسجلون في الأقسام النهائية. ما هي النسبة المئوية لعدد الذكور في الأقسام النهائية بالنسبة إلى عدد تلاميذ الثانوية.

18. في مكتبة، نجد 30 % من الكتب أدبية منها 70 % بالعربية.
عبر، بنسبة مئوية، عن حصة الكتب الأدبية العربية بالنسبة إلى العدد الإجمالي للكتب في المكتبة.

19. يسع قسم 60 % بنات حيث 75 % منهن نصف داخليات و 40 % من الذكور خارجيون ولا يوجد تلاميذ داخليون.
عبّر عن نسبة التلاميذ نصف الداخليين في هذا القسم.
تعطى النتيجة في شكل نسبة مئوية ثم في شكل كسر ثم في شكل عدد عشري.

20. خضع سعر منتوج إلى 3 زيادات متعاقبة قدرها 6 %، 8 %، 10 %.
ما هي النسبة المئوية للزيادة الإجمالية؟

21. تحصلت مؤسسة صناعية على فائدة إجمالية قدرها 6 % من دخلها الكلي حيث قدرت الفائدة على إحدى منتوجاتها بـ 15 % من الفائدة الإجمالية.
عبّر بنسبة مئوية عن فائدة هذا المنتوج بالنسبة إلى الدخل الكلي.

22. اشترى رجل قطعة أرض و خصص خمسا منها لتكون حديقة وخصص 25 % من الحديقة للأزهار.
عبر بكسر ثم بنسبة مئوية عن الجزء الذي تمثله القطعة المغروسة بالأزهار بالنسبة إلى قطعة الأرض الكلية.

23. يمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ ثانوية حسب الجنس ومستوى التمدرس.

	1 ثا	2 ثا	3 ثا	المجموع
اناث	18 %	19 %	12 %	49 %
ذكور	24 %	17 %	10 %	51 %
المجموع	42 %	36 %	22 %	100 %

ما هي النسبة المئوية للإناث في السنة الأولى؟

24. عين النسب المئوية الموافقة لما يلي:
أ) 25 % من 18 %، ب) $\frac{1}{10}$ من 40 %،
ج) الثلث من النصف، د) $\frac{3}{4}$ من $\frac{8}{10}$،
هـ) 12 % من $\frac{5}{36}$، و) 20 % من $\frac{4}{5}$.

25. إذا كان 70 % من تلاميذ قسم ذكورا و 25 % منهم يمارسون كرة القدم وعدد لاعبي كرة القدم هو 7.
فما هو عدد التلاميذ في هذا القسم؟

التطوّرات والنسب المئوية

26. سعر منتوج هو 125 دينارا.
احسب سعر هذا المنتوج في كل من الحالتين التاليتين:
أ) بعد زيادة قدرها 6 %.
ب) بعد تخفيض قدره 8 %.

27. عين النسبة المئوية لتطوّر مقدار في الحالات التالية:
1) يضرب المقدار في 3.
2) يضرب المقدار في 0,4.
3) ينقص بالنصف.

28. عين المعاملات الضربية الموافقة للتطوّرات التالية:
أ) الزيادة بـ 25 %، ب) التخفيض بـ 40 %،
ج) التخفيض بـ 3,2 %، د) الزيادة بـ 200 %.

29 عين النسب المئوية للتطورات الموافقة للمعاملات الضربية التالية:
$1,14$ ، $1,028$ ، $0,988$ ، $0,37$، $0,8$ ، $3,24$.

30 عين المعاملات الضربية الموافقة للتطورات التالية:
35% ، 40% ، $7,2\%$ ، -9% ، $0,1\%$ ، -18%.

31 قررت مؤسسة اقتصادية رفع أجور عمالها بنسبة مئوية سنوية قدرها $7,2\%$ طوال 5 سنوات.
1) يتقاضى عامل 12 000 دينار شهريا. ما هو المرتب الشهري لهذا العامل بعد سنة واحدة؟ بعد سنتين ؟ بعد ثلاث سنوات.
2) ليكن x المرتب الشهري لعامل آخر.
احسب المرتب الشهري لهذا العامل بعد سنة واحدة؟ بعد سنتين ؟ بعد ثلاث سنوات.
3) عبر، في شكل نسبة مئوية، عن الزيادة التي يتحصل عليها عامل بعد سنتين ثم بعد خمس سنوات.

32 يقترح بائع سيارات عدة طرق للتخفيض في الأسعار:
- تخفيض 4% متبوعا بتخفيض 6%.
- تخفيض 6% متبوعا بتخفيض 4%.
- تخفيض 5% متبوعا بتخفيض 5%.
- تخفيض 10%.

ما هي الطريقة الأكثر فائدة بالنسبة إلى الزبائن؟

33 نسمي نسبة التضخم في السنة زيادة مؤشر أسعار الاستهلاك من بداية هذه السنة إلى نهايتها.
يمثل الجدول التالي النسب المئوية للتضخم في بلد ما:

السنة	2001	2002	2003	2004	2005
التضخم	15 %	8 %	6 %	12 %	10 %

ما هي النسبة المئوية للتضخم الإجمالي خلال السنوات الخمس؟

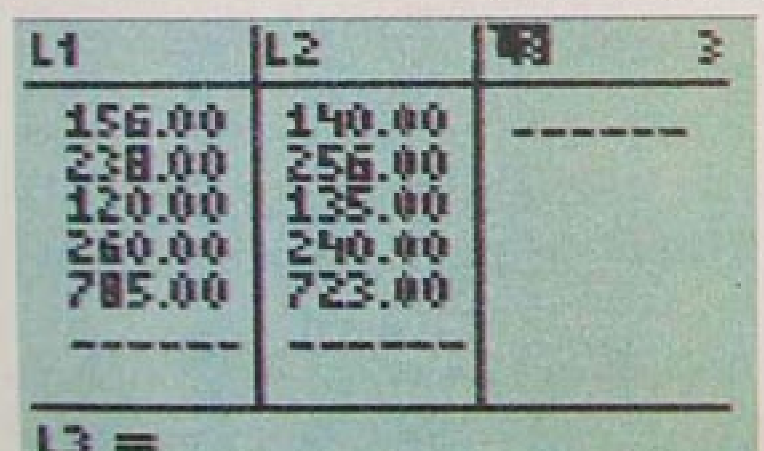
34 كان سعر جهاز التليفزيون 17000 دينار ثم أصبح 16 200 دينار.
احسب كلا من التطوّر المطلق والتطوّر النسبي والمعامل الضربي والنسبة المئوية الموافقة لهذا التطوّر.

35 صار سعر منتوج 845,25 دينارا بعد زيادتين متتاليتين قدراهما 8% و 12%.
ما هو السعر الأولي لهذا المنتوج؟

36 أتمم الجدول التالي:

التخفيض (%)	الزيادة (%)	المعامل الضربي
	1,3	
23		
		0,67
		1,004
	258	
3,5		

37 سجلنا، في القائمة L1 لحاسبة، أسعارا مختلفة وفي القائمة L2 الأسعار الموافقة بعد تطوّرات معينة.



1) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L3 للحصول على التطوّرات المطلقة الموافقة؟
عين هذه التطوّرات
2) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L4 للحصول على التطوّرات النسبية الموافقة؟
عين هذه التطوّرات.
3) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L5 للحصول على المعاملات الضربية الموافقة؟
عين هذه المعاملات.

38. خضع مقدار إلى زيادة قدرها % 50.
ما هو التخفيض الذي يجب أن يخضع له هذا المقدار للعودة إلى قيمته الأصلية؟

39. كان سعر كتاب 296,45 دينارا وبعد تخفيضين متتاليين أصبح 245 دينار.
ما هي النسبة المئوية الموافقة لكل تخفيض.

40. إليك ورقة حساب ايكسال:

	A	B	C	D
1	القيمة الأولية	القيمة النهائية	المعامل الضربي	التطوّر (%)
2	4530	5100		
3	2865	3075		
4	1260	1100		
5	4893	6309		

1) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في الخلية C2 للحصول على المعاملات الضربية الموافقة؟
عين هذه ا المعاملات (تدوّر النتائج إلى 0,0001).
2) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في الخلية D2 للحصول على نسب التطوّرات الموافقة؟
عين هذه النسب (تدوّر النتائج إلى 0,01).

المؤشرات

41. يمثل الجدول التالي إنتاج القمح والشعير في الجزائر بملايين الأطنان:

السنة	1996	1997	1998	1999
القمح	2,983	0,662	2,280	1,503
الشعير	1,8	0,191	0,7	0,481

أتمم الجدول التالي مع أخذ إنتاج سنة 1996 كمؤشر 100 :

السنة	1996	1997	1998	1999
القمح	100			
الشعير	100			

42. يمثل الجدول التالي سعر برميل البترول بالدولار بين 1980 و 1990 .

السنة	1980	1981	1982	1983	1984
السعر	35,69	34,32	31,80	28,78	28,07

1985	1986	1987	1988	1989	1990
27,53	12,97	16,92	13,22	15,69	20,50

1) نعتبر الأساس 100 في سنة 1980.
احسب المؤشر الموافق لكل من السنوات الأخرى.
2) عين نسبة التطوّر لكل من السنوات 1982، 1985، 1990.

43. سجلت أيام الأسبوع في القائمة L1 لحاسبة بيانية والمبيعات الموافقة لهذه الأيام في القائمة L2 :

L1	L2
1	48
2	54
3	24
4	20
5	27
6	36
7	18

1) نعتبر الأساس 100 في اليوم الرابع.
ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L3 للحصول على المؤشرات الموافقة للأيام السبعة؟
عين هذه المؤشرات.
2) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L4 للحصول على النسب المئوية للتطوّرات المختلفة بالنسبة إلى اليوم الرابع؟
عين هذه النسب المئوية.

مسائل

44. يمثل الجدول التالي تطوّر مؤشر أسعار الاستهلاك في الجزائر بين 1989 و 1995.

السنة	1989	1990	1991
المؤشر	100	120,2	150,8

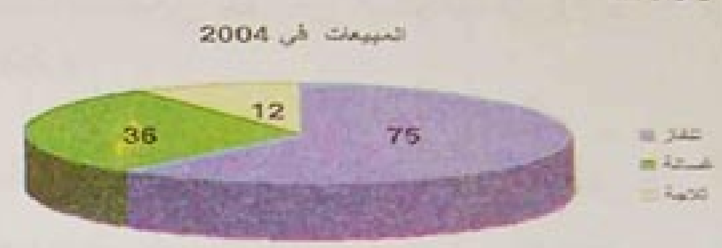
1992	1993	1994	1995
	240,2	316,3	406,2

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات.

نختار المؤشر 100 كأساس في سنة 1989.
1) استنتج من الجدول النسبة المئوية لتطوّر مؤشر الأسعار بين 1989 و 1991 ثم بين 1989 و 1993

2) احسب النسبة المئوية لتطوّر مؤشر الأسعار بين 1990 و 1991.
3) احسب مؤشر سنة 1992 إذا علمت أن النسبة المئوية لتطوّر مؤشر الأسعار بين 1991 و 1992 تساوي % 30,97.

45. يمثل المخططان التاليان مبيعات دكان لأجهزة كهرومنزلية خلال السنتين 2004 و 2005:



1) عين، بالنسبة إلى كل نوع من الأجهزة، نسبة التطوّر خلال السنتين.
2) أسعار هذه الأجهزة هي كالتالي:
التلفاز: 15000 دينار، الغسالة: 23000 دينار، الثلاجة: 28000 دينار.
احسب النسبة المئوية لتطور رقم الأعمال لهذا التاجر خلال السنتين.

46. يمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ السنوات الثانية في ثانوية حسب الجنس و الشعبة.

	أدب	علوم	رياضيات	تسيير واقتصاد
إناث	48	68	18	34
ذكور	30	42	12	32

1) احسب النسبة المئوية التي تمثلها كل فئة بالنسبة إلى عدد التلاميذ في السنوات الثانية.
2) ما هي نسبة الإناث في شعبة الأدب؟
3) في أي شعبة نجد أكبر نسبة للإناث؟

47. يمثل الجدول التالي تطور عدد سكان بلد خلال قرن:

السنة	1900	1925	1950	1975	2000
السكان (ملايين)	6,2	9,8	16,4	32	45

1) احسب المعامل الضربي الذي يسمح بإيجاد عدد السكان في سنة 1925 اعتمادا على عدد السكان في سنة 1900.
استنتج النسبة المئوية لتطور عدد السكان في هذه الفترة.
نسمي هذه النسبة المئوية الزيادة النسبية لعدد السكان خلال هذه الفترة ذات 25 سنة.
2) احسب بالمثل الزيادة النسبية خلال كل فترة من الفترات ذات 25 سنة الموالية.
3) احسب الوسط لهذه الزيادات النسبية المحصل عليها في السؤال السابق ثم استنتج المعامل الضربي الوسطي الذي يحول عدد السكان من 6,2 ملايين إلى 45 مليونا عند تطبيقه في كل فترة ذات 25 سنة من 1900 إلى 2000.

48. القدرة الشرائية

نسمي **القدرة الشرائية** لمستهلك حاصل قسمة المرتب الشهري لهذا المستهلك على السعر المرجعي لمنتوج ما محصل عليه بعد اعتبار مجموعة من منتوجات.

1. خصص رب عائلة ميزانية قدرها 4800 دينار لشراء 25 كتابا في سنة 2003.
ما هو السعر الوسطي للكتاب الواحد ؟
2. يزداد السعر الوسطي للكتاب بـ % 10 خلال سنة 2004 وميزانية رب العائلة لم تتغير.
أ) كم من كتب يمكن أن يشتريها رب العائلة في 2004 (تعطى النتيجة بالتقريب إلى الوحدة بالنقصان).
ب) هل ازدادت أو انخفضت القدرة الشرائية لرب العائلة؟
ج) ما هي نسبة تطوّر عدد الكتب خلال السنتين؟
3. قرر رب العائلة في سنة 2005 زيادة الميزانية المخصصة لشراء الكتب بـ 600 دينار مع شراء الكتب بسعرها الوسطي لسنة 2003.
أ) ما هو عدد الكتب (بالتقريب إلى الوحدة بالنقصان) التي يمكن شراؤها؟
ب) هل ازدادت أو انخفضت القدرة الشرائية لرب العائلة بالنسبة إلى سنة 2003 ؟

الباب 2 الإحصاء

1. السلاسل الزمنية *
2. التمليس بالأوساط المتحركة *
3. المدرجات التكرارية
4. التباين والانحراف المعياري
5. الربعيات والعشريات والمخطط بالعلبة
6. التجربة العشوائية والمحاكاة

تعود إحصاءات السكان الأولى إلى حوالي 4000 سنة قبل الميلاد.

في حوالي 600 سنة قبل الميلاد أعطى المصريون القدماء أهمية بالغة لهذه الإحصاءات إلى درجة إصدار الحكم من طرف احد الفراعنة بالإعدام على كل من يرفض الإدلاء باسمه أو حرفته أو وسائل معيشته أثناء إجراء العمليات الإحصائية.

في القرن 15وفي عصر إمبراطورية الأنكا في البيرو استعملت حزمات من الحبال للاحتفاظ بأرقام ومعلومات يمكن قراءتها وتفسيرها عند الحاجة من قبل المختصين.

وفي العصر العباسي (في عهد المأمون) تميز الكندي في مجال تحليل التواترات حيث عرض في مخطوط له طريقة لفك الرسائل المشفرة التي تعتمد أساسا على تواترات ظهور الحروف في الرسائل المكتوبة بلغة معينة.

الكندي (801- 873)

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1.كيف نسمي عدد مرات ظهور قيمة أو فئة في سلسلة إحصائية؟	التواتر	التكرار	التوزيع
2. كل قيمة في سلسلة أوزان هي متغير....	كمي	كيفي	مستمر
3. مدى سلسلة الأعداد التالية 5 ؛ 7 ؛ 10 ؛ 12 ؛ 14 هو...	10	14	9
4. وسيط سلسلة إحصائية هو...	أصغر قيمة للسلسلة	معيار تشتت	معيار نزعة مركزية
5.التواتر هو عدد محصور بين....	0 و 100	0 و1	1 و 100
6. إذا ضربنا كلّ قيم سلسلة في 10، فإن وسطها ...	يزداد بـ 10	يُقسم على 10	يُضرب في 10
7. يمكن تمثيل سلسلة إحصائية بيانيا بطريقة وحيدة.	صحيح	خطأ	حسب نوعية المتغير
8. تمثل نقطة تقاطع مضلعي التواترات المجمعة الصاعدة والتواترات المجمعة النازلة	الوسط	الوسيط	المنوال
9. في المدرج التكراري، تكون التكرارات متناسبة مع...	أطوال المستطيلات	عروض المستطيلات	مساحات المستطيلات

نشاط 1: التمليس بالأوساط المتحركة

يمثل الجدول المقابل تطوّر مؤشر الإستهلاك في الجزائر من 1989 إلى 2001.

1. اتمم العمود الثالث، بحساب وسط المؤشرات لثلاث سنوات: السنة السابقة، السنة الجارية، السنة الموالية. (مثال: بالنسبة إلى 1992، نجسب وسط المؤشرات للسنوات 1991، 1992، 1993).

2. مثل بمنحن وفي نفس الرسم كلا من سلسلة المؤشرات الأصلية وسلسلة القيم المصححة.

السنة	المؤشرات	القيم المصححة
1989	100	
1990	120,2	
1991	150,8	
1992	197,5	
1993	240,2	
1994	316,3	
1995	406,2	
1996	488,8	
1997	518,4	
1998	550,7	
1999	562,2	
2000	558,7	
2001	578,2	

نشاط 2 : المدرجات التكرارية

سجل رادار سرعات 117 سيارة.

1. اتمم الجدول التالي:

السرعه	التكرار	طول الفئة	الوحدات	الارتفاع
[0 ; 30 [	40			
[30 ; 45 [	30			
[45 ;60 [	35			
[60 ;120 [	12			

2. مثل هذه السلسلة بمدرج تكراري.

نشاط 3 : التباين والانحراف المعياري

سجل أستاذ الرياضيات في فرض مشترك لقسمي السنة الثانية تسيير واقتصاد العلامات التالية:

	العلامة	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2 ت.ا1	عدد التلاميذ	2	4	1	3	1	3	4	5	2	1	3	1	1	0
2 ت.ا2	عدد التلاميذ	0	0	1	4	8	7	9	5	0	0	0	0	0	1

الجزء الأول :

1. احسب وسط (معدل) علامات كلّ من القسمين. ماذا تلاحظ؟.
2. مثّل بالأعمدة وفي نفس الرسم كلا من سلسلتي العلامات وبلونين مختلفين.
3. انطلاقا من هذا التمثيل، ما هو تعليقك على مستوى كل قسم في هذا الفرض.

الجزء الثاني:

نريد مقارنة مستوى القسمين وهذا بدراسة توزيع وتشتت علامات كل قسم حول وسطها.

لذا نضع : $S = n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 +,....+ n_k(x_k-\overline{x})^2$ حيث x_1 ، x_2 ، ...، x_k هي قيم السلسلة و n_1 ، n_2 ، ...، n_k هي التكرارات الموافقة لهذه القيم و N هو التكرار الكلي لهذه السلسة.

1. احسب قيمة S في كل من سلسلتي علامات القسمين.
2. نضع $V = \frac{S}{N}$. احسب قيمة V (بالتدوير إلى $0,1$) بالنسبة إلى كل من السلسلتين.
3. نضع $\sigma = \sqrt{V}$. احسب قيمة σ (بالتدوير إلى $0,1$) بالنسبة إلى كل من السلسلتين.

قارن النتيجتين المحصل عليهما ثم استنتج العلاقة بين قيمة العدد σ وتشتت قيم السلسلة.

نشاط 4 : الوسيط والربعيات

يمثّل الجدول التالي أوزان 19 شخصا، مرتبة ترتيبا تصاعديا.

الشخص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
الوزن	54	55	56	56	57	58	58	59	60	61	62	62	63	63	64	65	67	68	72

1. ما هو وزن الشخص العاشر؟ ما هي نسبة الأشخاص ذوي وزن أصغر من هذا الوزن؟
2. عيّن وزن كلّ من الشخص الخامس والشخص الخامس عشر ثم احسب فرق وزنيهما.
3. إلى كم جزءا تمت تجزئة المجتمع المعطى ؟

نشاط 5: التجربة العشوائية

1. ارم قطعة نقدية 25 مرة ، وسجّل 0 عند ظهور الوجه و 1 عند ظهور الظهر ثم دوّن النتائج في الجدولين التاليين.

جدول النتائج

جدول التواترات

	0	1
التكرار		
التواتر		

2. ضم نتائجك إلى نتائج 3 تلاميذ آخرين ثم احسب تواتر كل من الوجه والظهر في العينة ذات المقاس 100 المحصل عليها. قارن النتيجتين مع نتائجك. هل الفروق كبيرة؟
3. باختيار وحدات ملائمة، مثل في نفس الرسم، التواترات المحصل عليها من طرف التلاميذ الأربعة.
4. ضم نتائج كلّ تلاميذ القسم وأعد حساب التواترين والتمثيل البياني. ماذا تلاحظ ؟

1. السلاسل الزمنية

تعريف

نسمي **سلسلة زمنية** كل سلسلة إحصائية مرتبة وفق الزمن.

مثال

يمثل الجدول التالي سلسلة زمنية تبين تطور عدد الولادات الحية في الجزائر من سنة 1990 إلى سنة 2004.

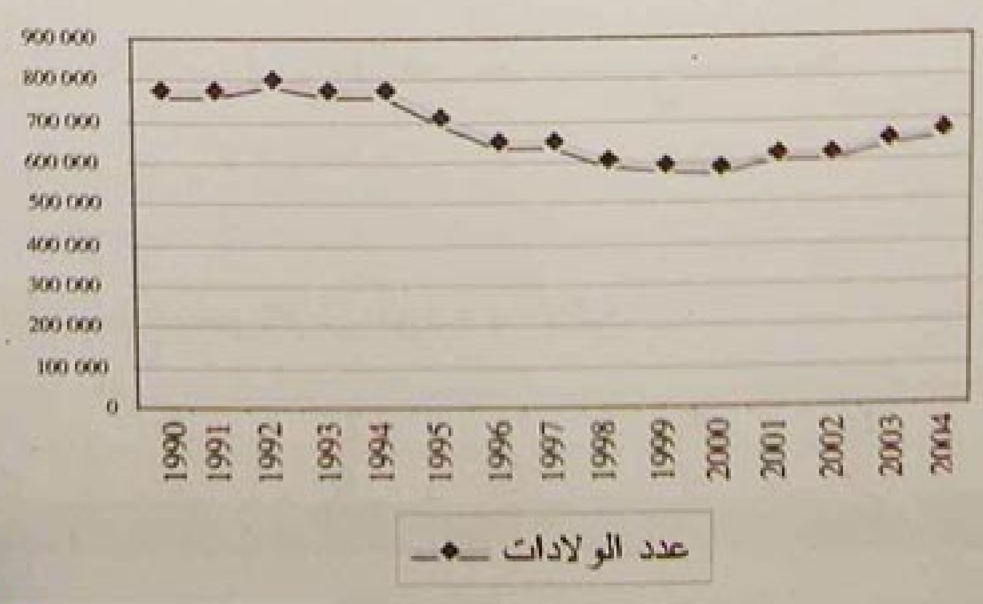
السنة	الولادات الحية
1990	775 000
1991	773 000
1992	799 000
1993	775 000
1994	776 000
1995	711 000
1996	654 000
1997	654 000
1998	607 000
1999	594 000
2000	589 000
2001	619 000
2002	617 000
2003	649 000
2004	669 000

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

ملاحظات

يمكن تمثيل سلسلة زمنية بيانيا ومن خلاله تحدّد المكوّنات الأساسية التالية:

- حركة النزوع (التوجّه) العام الذي يحدد التطوّر العام للظاهرة المدروسة.
- التغيرات الدورية خلال فترة طويلة.
- التغيرات الفصلية التي تتكرر دوريا في فترات معينة.
- التغيرات العرضية.



2. التمليس بالأوساط المتحركة

- **الأوساط المتحركة**

تعريف

نعتبر سلسلة زمنية قيمها x_1 ، x_2 ،.....، x_n من أجل الأزمنة t_1 ، t_2 ، .... ، t_n.

- الوسط المتحرك من الرتبة p حيث $p = 2k + 1$ من أجل t_i $(2 \leq i \leq n-1)$ هو وسط القيم x_{i-k} ، ... ، x_{i-2} ، x_{i-1} ، x_i ، x_{i+1} ، x_{i+2} ، .. ، x_{i+k} أي

$$\frac{x_{i-k} + ... + x_{i-2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{i+k}}{p}$$

- الوسط المتحرك من الرتبة p حيث $p = 2k$ من أجل t_i هو:

$$\frac{\frac{x_{i-k}}{2} + ... + x_{i-2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + \frac{x_{i+k}}{2}}{p}.$$

مثال

يمثل الجدول التالي أقياس ظاهرة مسجلة خلال 9 أزمنة مختلفة.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
5	7	6	4	8	6	5	4	7

- لنحسب الأوساط المتحركة من الرتبة 3:

الوسط المتحرك من الرتبة 3 من أجل t_5 مثلا هو وسط القيم t_4 و t_5 و t_6 أي $6 = \frac{4+8+6}{3}$

والوسط المتحرك من الرتبة 3 من أجل t_8 هو وسط القيم t_7 و t_8 و t_9 $5,33 \approx \frac{5+4+7}{3}$.

نحصل هكذا على الأوساط المتحركة من الرتبة 3 التالية:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
5	7	6	4	8	6	5	4	7
	6,00	5,67	6,00	6,00	6,33	5,00	5,33	

- لنحسب الأوساط المتحركة من الرتبة 4:

الوسط المتحرك من الرتبة 4 من أجل t_3 هو $\frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_5}{2}}{4}$

أي $5,88 \approx \frac{5 \times \frac{1}{2} + 7 + 6 + 4 + 8 \times \frac{1}{2}}{4}$.

نحصل هكذا على الأوساط المتحركة من الرتبة 4 التالية:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
5	7	6	4	8	6	5	4	7
		5,88	6,13	5,88	5,75	5,63		

- **التمليس بالأوساط المتحركة**

تعريف

تمليس منحني سلسلة زمنية بالأوساط المتحركة من الرتبة p هو إنجاز منحني سلسلة زمنية أخرى قيمها هي الأوساط المتحركة من الرتبة p لقيم السلسلة الأصلية.

ملاحظة

عند تمليس سلسلة زمنية بالأوساط المتحركة من الرتبة p ($p=2k$ أو $p=2k+1$) نهمل k قيمة طرفية من كل جهة بالنسبة إلى السلسلة الأصلية.

3. المدرجات التكرارية

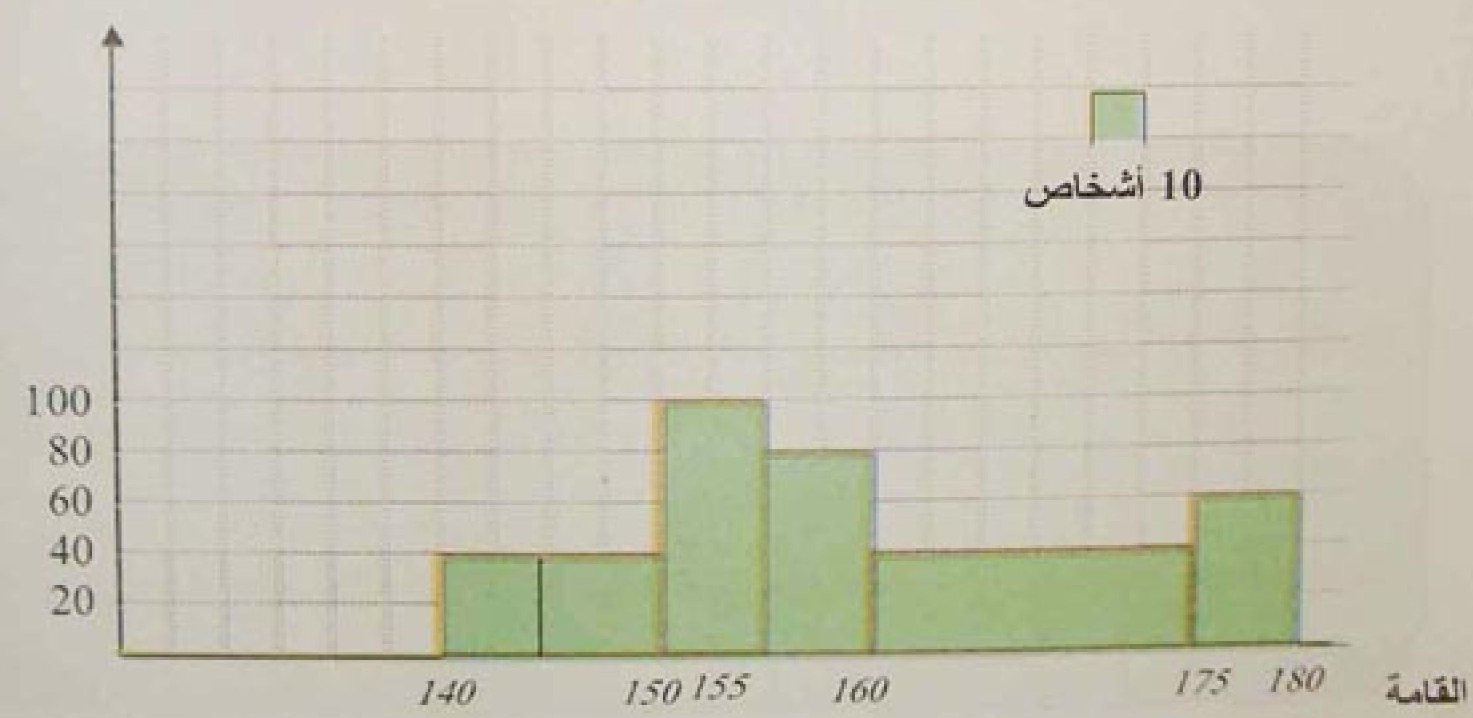
يستعمل المدرج التكراري لتمثيل سلسلة احصائية منظمة في فئات.
مساحات المستطيلات متناسبة مع تكرارات الفئات.

مثال

يمثل الجدول التالي سلسلة قامات 440 شخص بالسنتيمترات.

القامة	$[140;150[$	$[150;155[$	$[155;160[$	$[160;175[$	$[175;180[$
التكرار	80	100	80	120	60

المدرج التكراري



4. التباين - الانحراف المعياري

- **الوسط الحسابي (تذكير)**

تعريف

- الوسط الحسابي $\overline{x}$ لسلسلة إحصائية، هو حاصل قسمة مجموع قيم المتغير الإحصائي x_1 ؛ x_2 ؛.....؛ x_k على التكرار الكلي N للسلسلة ، أي $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{N}$.

إذا كانت قيم السلسلة x_1 ، x_2 ،.....، x_k مرفقة بتكراراتها n_1 ، n_2 ،.....، n_k على الترتيب فإنّ $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$. إذا كانت السلسلة مستمرة ، تؤخذ مراكز الفئات كقيم المتغير الإحصائي.

ملاحظة: الرمز $\sum_{i=1}^{k} x_i$ يدل على المجموع $x_1 + x_2 + ... + x_k$.

خواص

- إذا أضفنا نفس القيمة a إلى كل قيم سلسلة إحصائية فوسطها الحسابي يزداد بنفس القيمة a.
- إذا ضربنا كل قيم سلسلة إحصائية في نفس القيمة b فوسطها الحسابي يضرب في نفس القيمة b.
- إذا جُزئت السلسلة إلى جزأين تكراراهما N_1 ، N_2 على الترتيب ووسطاهما الحسابيان $\overline{x_1}$ ، $\overline{x_2}$ على الترتيب، فالوسط الحسابي لهذه السلسلة هو $\overline{x} = \dfrac{N_1 \times \overline{x_1} + N_2 \times \overline{x_2}}{N_1 + N_2}$.

التباين

تعريف

تباين سلسلة معرفة بكل قيمها x_i ووسطها الحسابي $\overline{x}$، والذي نرمز إليه بالرمز V، هو وسط مربعات الفروق بين هذه القيم ووسطها الحسابي $\overline{x}$، أي : $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N}$ حيث N هو التكرار الكلي للسلسلة.

إذا كانت السلسة معرفة بقيمها x_i والتكرارات n_i لهذه القيم، فإنّ التباين هو $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{N} n_i}$.

مثال

تحصل تلميذ على العلامات التالية في فروض الرياضيات: 15 ، 12 ، 12 ، 14 ، 9 ، 4.
فكان الوسط الحسابي للسلسلة هو 11، و التباين هو :

$$V = \frac{(15-11)^2 + (12-11)^2 + (12-11)^2 + (14-11)^2 + (9-11)^2 + (4-11)^2}{6} \approx 13,33$$

مبرهنة 1 (تقبل)

إذا كانت السلسلة معرفة بقيمها x_i وتكراراتها n_i ، فإنّ التباين هو $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} n_i \times x_i^2}{\sum_{i=1}^{N} n_i} - \overline{x}^2$.

ملاحظة: هذا الدستور عملي أكثر، لأنه لا يتطلب حساب $(x_i - \overline{x})^2$ بل نحسب فقط x_i^2.

مبرهنة 2

إذا كانت السلسلة معرفة بقيمها x_i و تواتراتها f_i ، فإنّ التباين هو: $V = \sum_{i=1}^{N} f_i (x_i - \overline{x})^2$.

برهان

لدينا $\left(\sum_{i=1}^{N} \dfrac{n_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}(x_i - \overline{x})^2 \right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} n_i \times (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{N} n_i} = V$ و $f_i = \dfrac{n_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}$.

إذن $V = \sum_{i=1}^{N} f_i (x_i - \overline{x})^2$.

- **الانحراف المعياري**

تعريف

الانحراف المعياري، والذي نرمز إليه بالرمز σ، هو الجذر التربيعي للتباين:

$\sigma = \sqrt{V}$ أي $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{N} n_i}}$.

مثال

الانحراف المعياري للسلسلة السابقة هو: $\sigma \approx \sqrt{13,3\dot{3}} \approx 3,65$.

ملاحظات

- الانحراف المعياري هو معيار تشتت قيم سلسلة حول وسطها الحسابي.
- يقاس الانحراف المعياري بنفس وحدة قيم السلسلة.
- يتأثر الانحراف المعياري بالقيم الشاذة للسلسلة.

- **مجموع مربعات الفروق**

مبرهنة

الوسط الحسابي $\overline{x}$ هو العدد الذي يجعل المجموع $S(x) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2$ أصغريا.

برهان

نبرهن في حالة سلسلة ذات أربع قيم x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 وسطها $\overline{x}$:

$(x_1-x)^2=x_1^2-2x_1x+x^2$ ، $(x_2-x)^2=x_2^2-2x_2x+x^2$ ، $(x_3-x)^2=x_3^2-2x_3x+x^2$ ،

$(x_4-x)^2=x_4^2-2x_4x+x^2$.

إذن $S(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2(x_1+x_2+x_3+x_4)x+4x^2$.

المجموع $S(x)$ هو من الشكل $c+bx+ax^2$ ، و هو ثلاثي الحدود للمتغير x حيث $a=4$

و $b=-2(x_1+x_2+x_3+x_4)$ و $c=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

بما أن المعامل a موجب، فإن $S(x)$ يقبل قيمة صغرى عند α حيث:

$$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{2(x_1+x_2+x_3+x_4)}{2\times 4}=\frac{x\ +x_2+x_3+x_4}{4}.$$

بصفة عامة، عند جمع N مربعا، فالمعامل a هو N والمعامل b هو $-2\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)$.

المعامل a موجب ومنه ثلاثي الحدود $S(x)$ يقبل قيمة صغرى عند α حيث

$$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{2\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)}{2\times N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N}=\overline{x}.$$

5. الربعيات- العشريات – المخطط بالعلبة

- **الوسيط (تذكير)**

تعريف 1

وسيط سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا، ونرمز إليه بـ Med ، هو العدد الذي من أجله يكون نصف قيم السلسلة على الأقل أصغر أو يساوي هذا العدد.

تعريف 2

السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

- إذا كان التكرار الكلي N للسلسلة فرديا، أي من الشكل $2k+1$ ، فوسيطها هي القيمة المركزية، أي القيمة من المرتبة $k+1$.
- إذا كان التكرار الكلي N للسلسلة زوجيا، أي من الشكل $2k$ ، فوسيطها هو وسط القيمتين المركزيتين، أي وسط القيمتين من المرتبتين k و $k+1$.

مثال

لدينا فيما يلي سلسلتا علامات قسمين، الأول متكون من 25 تلميذا و الثاني من 26 تلميذا.

علامات القسم 2 ت ر 1

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
3	3	3	5	5	6	7	7	7	7	8	8	9	10	10	10	10	10	11	11	12	16	17	17	18	
												9	الوسيط												

علامات القسم 2 ت ر 2

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	11	12	13	14	15	16	16	16	17	17	17
													9,5		الوسيط										

نقرأ في الجدول: وسيط السلسلة الأولى هو 9 ووسيط السلسلة الثانية هو$9,5$.

- **الربعيات والعشريات**

تعريف 1

- **الربعي الأول** ونرمز إليه بـ Q_1 هو أصغر قيمة للسلسلة حيث يكون% 25 على الأقل من قيمها أصغر أو يساوي Q_1.
- **الربعي الثالث** ونرمز إليه بـ Q_3 هو أصغر قيمة للسلسلة حيث يكون % 75 على الأقل من قيمها أصغر أو يساوي Q_3.
- $[Q_1, Q_3]$ هو **المجال الربعي** و $Q_3 - Q_1$ هو **الانحراف الربعي**.

ملاحظات

- الربعي الثاني(الوسيط) Q_2 هو أصغر قيمة للسلسلة بحيث يكون % 50 من قيمها أصغر أو يساوي Q_2.
- الانحراف الربعي هو معيار تشتت قيم سلسلة حول وسيطها.
- بالنسبة إلى مفهوم العشري، نستعمل نفس التعريف السابق بدءا من % 10.
- *الانحراف العشري* هو الفرق بين العشري الأول D_1 والعشري التاسع D_9 أي $D_9 - D_1$.

تعريف 2

قيم السلسلة مرتبة ترتيبا تصاعديا و N هو التكرار الكلي لهذه السلسلة

- إذا كان $\frac{N}{4}$ **عددا طبيعيا** p ، فإن الربعي الأول Q_1 هو القيمة ذات **الرتبة** p ، والربعي الثالث Q_3 هو القيمة ذات **الرتبة** $3p$.

إذا كان $\frac{N}{4}$ **غير طبيعي**، فإن الربعي الأول Q_1 هو القيمة ذات **الرتبة الأكبر مباشرة من** $\frac{N}{4}$، والربعي الثالث Q_3 هو القيمة ذات **الرتبة الأكبر مباشرة من** $3\frac{N}{4}$.

أمثلة

- نعتبر السلسلة 3 ، 3 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5 ، 7 ، 10 ، 14 ، 21 ، 21 ، 25 .
التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 12 و $\frac{12}{4} = 3$، إذن:
  - الربعي الأول Q_1 هو القيمة ذات الرتبة 3 أي القيمة 4.
  - الربعي الثالث Q_3 هو القيمة ذات الرتبة $3 \times 3 = 9$ أي القيمة 14.
- يمثل الجدول التالي سلسلة معطاة بقيمها والتكرارات الموافقة لها.

القيمة	45	47	53	54	60	62	75
التكرار	3	6	2	4	7	8	9

التكرار الكلي لهذه السلسلة هو مجموع التكرارات أي 39 و $\frac{39}{4} = 9,75$، إذن:

- الربعي الأول Q_1 هو القيمة ذات المرتبة 10 أي القيمة 53.

- الربعي الثالث Q_3 هو القيمة ذات المرتبة 30 (وهي القيمة ذات المرتبة الأكبر مباشرة من $3\times 9{,}75$) أي القيمة 62 .

ملاحظة

إذا كانت السلسلة منظمة في شكل فئات، فإنّ:

- الربعي الأول Q_1 هو القيمة الموافقة **للتواتر المجمع الصاعد** المساوي $0{,}25$.
- الربعي الثالث Q_3 هو القيمة الموافقة **للتواتر المجمع الصاعد** المساوي $0{,}75$.

• المخطط بالعلبة (أو مخطط بالربعيات)

يسمح هذا النوع من التمثيل بتلخيص سلسلة إحصائية بيانيا ودراسة توزيع قيم هذه السلسلة حول وسيطها دون اللجوء إلى مفهوم الانحراف المعياري.

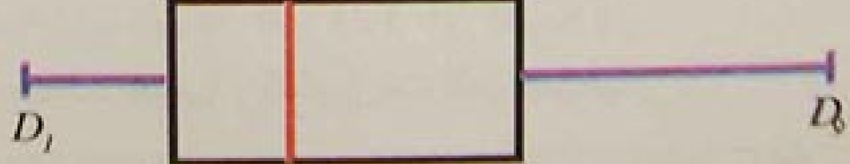
يعتمد هذا المخطط على 5 قيم، هي: القيمة الصغرى، الربعيات الثلاثة Q_1 ، Q_2(الوسيط)، Q_3 والقيمة الكبرى.

ولإنشاء المخطط بالعلبة:

- نختار محورا (أفقيا أو عموديا) مع وحدة ملائمة.
- نعيّن القيم الخمس المذكورة سابقا.
- نرسم علبة مستطيلة الشكل طولها يساوي الانحراف بين ربعيين.
- نصل بخطين العلبة وكلا من القيمة الصغرى والقيمة الكبرى.
- نعيّن الوسيط بخط (أفقي أو عمودي) داخل العلبة (أنظر الشكل).

ملاحظات

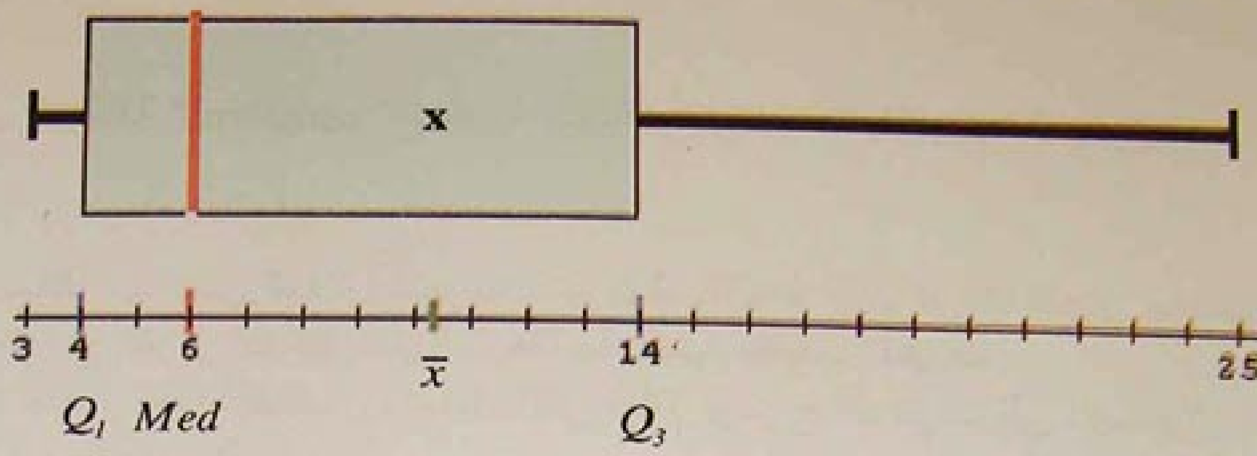
- إذا كانت المعطيات كثيرة جدا ولا نعلم القيمتين الطرفيتين، نستعمل مخططا بالعشريات، حيث نعيّن العشري الأول D_1 والعشري التاسع D_9 .



- غالبا ما نستعمل الإشارة **x** لتحديد قيمة الوسط في العلبة.

مثال

يمثل المخطط بالعلبة الموالي السلسلة المقدمة في المثال الأول من الفقرة السابقة:



ملاحظة

الوسط الحسابي للسلسلة هو $\overline{x} = 10,25$.

6 . التجربة العشوائية- المحاكاة

- **التجربة العشوائية**

تعريف

نسمي **تجربة عشوائية** كلّ تجربة يمكن وصف نتائجها الممكنة مسبقا، دون القدرة على التعيين المسبق للنتيجة التي ستظهر في كل محاولة.

أمثلة

- رمي قطعة نقدية هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الوجه أو ظهور الظهر.
- رمي زهر النرد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الأوجه الستة (1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو6).

- **العينة**

تعريف

نسمي **عينة** لتجربة عشوائية، مجموعة النتائج المحصل عليها عند تكرار هذه التجربة.
عدد النتائج يسمى **مقاس العينة**.

ملاحظات

- ينبغي أن تكون محاولات التجربة متطابقة ومستقلة. بمعنى، أن التجربة تنجز في نفس الظروف في كلّ محاولة وأنّ نتيجة كل محاولة لا تؤثر على المحاولة الموالية.
- عند حساب تواترات الإمكانيات (مخارج)، نحصل على **توزيع تواترات العينة**.

- **محاكاة تجربة عشوائية**

عند البحث عن عينة لتجربة عشوائية، يتعسر الحصول على عدد كبير من التجارب، لذا نلجأ إلى **محاكاة**.
لمحاكاة تجربة عشوائية، نصف هذه التجربة ثم ننمذجها، أي نختار نموذجا لسحب أعداد بصفة عشوائية حيث يكون لهذا النموذج نفس خواص الظاهرة المدروسة ثم نلاحظ تواترات ظهور مختلف النتائج الممكنة.

مثال

لمحاكاة رمي قطعة نقدية نختار نموذج سحب العددين 0 و1 بصفة عشوائية.

ملاحظة

لانجاز محاكاة، يمكن استعمال الوظيفة " random " لحاسبة بيانية او الوظيفة " ALEA " لمجدول.

- **تذبذب العينات**

عندما ننجز عددا من عينات مستقلة لها نفس المقاس لتجربة عشوائية، نلاحظ أن تواترات ظهور مختلف النتائج غير مستقرة إذ يتغير توزيع التواترات لكل عينة، وهذا ما يسمى **بتذبذب العينات**.
عندما يزداد مقاس العينات، نلاحظ أن هذا التذبذب يتضاءل أكثر فأكثر وتنزع التواترت إلى الاستقرار.
ويظهر هكذا انتظام في الظاهرة العشوائية المدروسة.

1. التمليس بالأوساط المتحركة باستعمال مجدول

طريقة

لتمليس سلسلة زمنية باستعمال مجدول، نحسب الأوساط المتحركة باستعمال الدساتير المناسبة ثم نمثل السلسلة الأصلية والسلسلة الناتجة باستعمال البيان "سحابة نقط متصلة بمنحن" ("nuage de points reliés par une courbe") في المساعد البياني.

تمرين

يمثل الجدول التالي سلسلة أعداد الأدوات المبيعة من طرف تاجر خلال 12 شهرا.
أنجز التمليسين من الرتبة 3 والرتبة 5 لهذه السلسلة.

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبيعات	120	170	130	150	180	210	240	180	130	200	150	160

حلّ

C3 | fx =MOYENNE(B2:B4)

	A	B	C	D	E
1	الشهر	المبيعات	التمليس 3	التمليس 5	
2	1	120			
3	2	170	140		
4	3	130			
5	4	150			
6	5	180			
7	6	210			
8	7	240			
9	8	180			
10	9	130			
11	10	200			
12	11	150			
13	12	160			

1. نحجز المعطيات.
2. لحساب الأوساط المتحركة من الرتبة 3، نحجز في الخلية C3 الدستور =MOYENNE(B2:B4) (أو الدستور =SOMME(B2 :B4)/3) ثمّ نسحبه حتى الخلية C12.
3. لتمليس السلسلة بالأوساط المتحركة من الرتبة 5، نحسب الأوساط المتحركة من الرتبة 5 في الخلايا من D4 إلى D11 بنفس الطريقة.
4. نختار مجموعة الخلايا A2 :D13 ثمّ نفتح المساعد البياني ونختار التمثيل " سحابة نقط متصلة بمنحن " (Nuage de points reliés par une courbe)، ثم نمثل السلسلة الأصلية والسلسلتين المحصل عليهما بالتمليس، فنحصل على التمثيل البياني التالي:

2. إنشاء مدرج تكراري لسلسلة معطاة في شكل فئات مختلفة الأطوال

طريقة

لإنشاء المدرجات التكرارية لسلسلة منظمة في فئات مختلفة الأطوال، يمكن تطبيق الطريقة التالية:

- نحسب طول كل فئة ثم نختار مستطيلا لتمثيل الفئة ذات أصغر طول، نحصل هكذا على معامل التناسب k الذي يحقق العلاقة: $h\times e=k\times n$ ، حيث h هو ارتفاع المستطيل و e هو طول الفئة و n هو تكرارها.
- نحسب إرتفاعات المستطيلات الأخرى بتقسيم تكرار كل فئة على طولها ثم نضرب النتيجة في k، أي $h=\frac{n}{e}\times k$.

تمرين

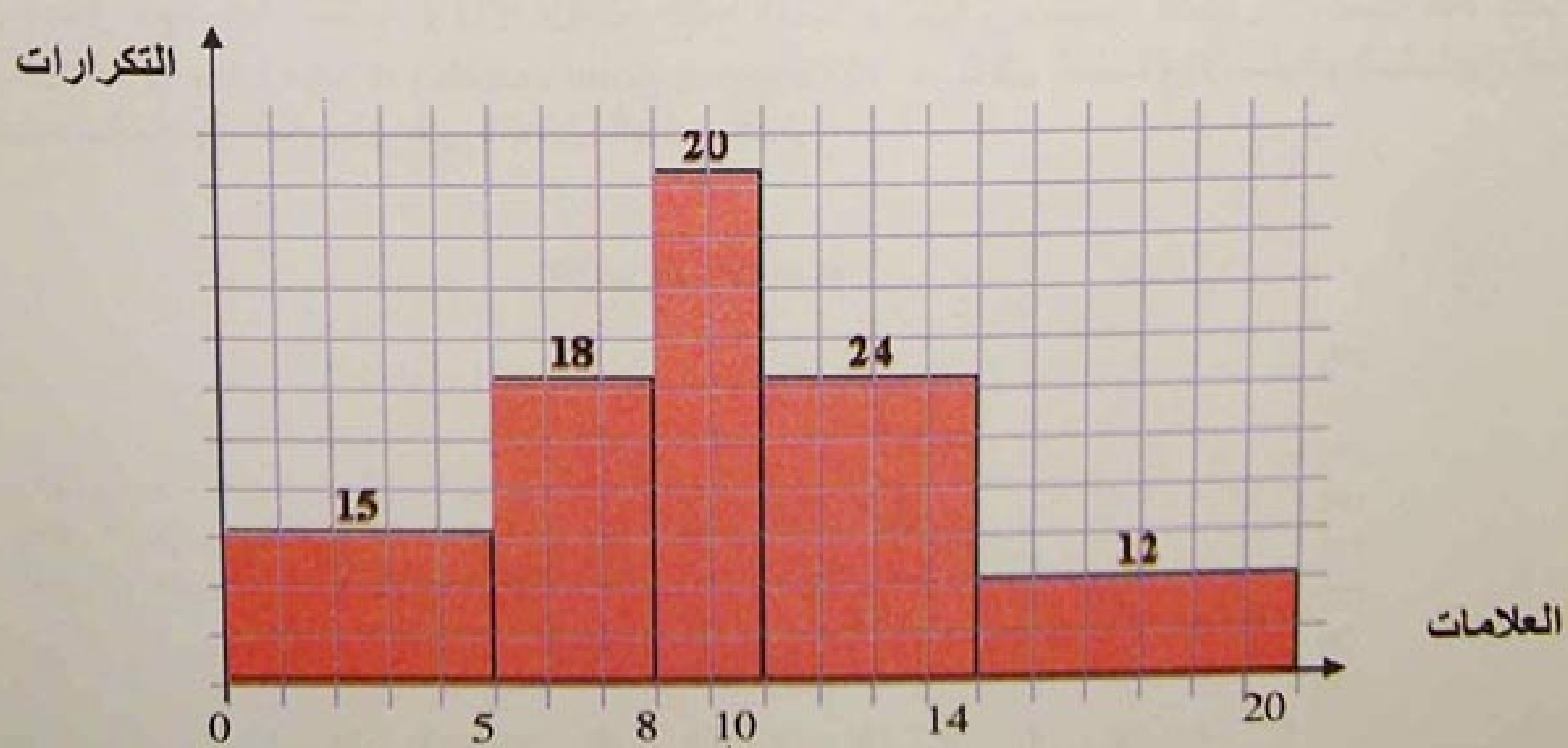
يمثل الجدول التالي علامات قسمين في فرض، موزعة في فئات.
أنشئ المدرج التكراري لهذه السلسلة.

العلامة	[0;5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ;14[	[14; 20[
التكرار n	15	18	20	24	12

حل

نختار ارتفاعا ذا 10 مربعات لتمثيل الفئة [8; 10[ذات التكرار 20 ، فنحصل على معامل التناسب $k=1$. ونستنتج الجدول والمدرج التكراري التاليين:

العلامة	[0;5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ;14[	[14; 20[
التكرار n	15	18	20	24	12
الطول e	5	3	2	4	6
الارتفاع h	3	6	10	6	2



3. تعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة باستعمال حاسبة بيانية

طريقة

لتعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة باستعمال الحاسبة البيانية من النوع TI- 83، نستعمل اللمسة STAT ونختار الوظيفة 1:Edit... .

تمرين

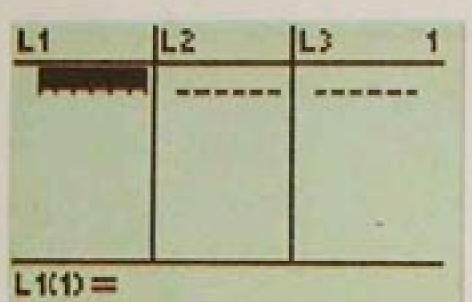
نعتبر السلسلة التالية:

القيمة x_i	6	8	11	12	15
التكرار n_i	2	3	7	9	5

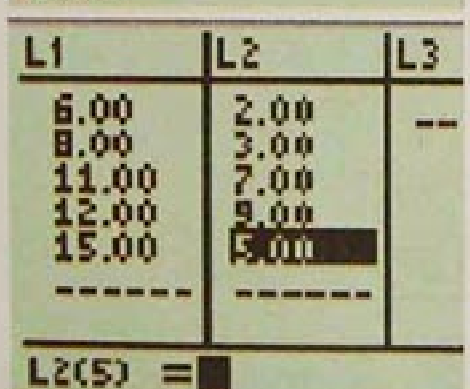
باستعمال حاسبة بيانية، احسب كلا من الوسط والانحراف المعياري والوسيط والربعي الأول والربعي الثالث لهذه السلسلة.

حلّ

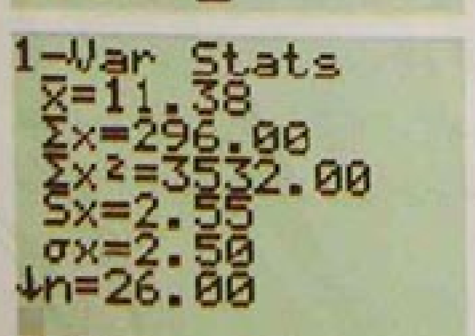
1. نضغط على اللمسة STAT ثم نختار 1:Edit... للحصول على شاشة القوائم.

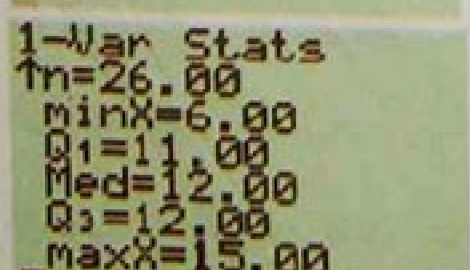


2. نحجز قيم السلسلة في العمود L1 و التكرارات في العمود L2 مع الضغط على ENTER بعد كل قيمة لتصديقها.



3. لاستظهار المؤشرات الإحصائية، ندخل في البرنامج STAT ونختار الوظيفة CALC ثم ننفذ البرنامج:





إذن :

- الوسط هو: $\overline{x} = 11,38$.
- الوسيط هو: $Med = 12$.
- الانحراف المعياري: $\sigma x = 2,5$.
- الربعي الأول هو: $Q_1 = 11$.
- الربعي الثالث هو: $Q_3 = 12$

ملاحظة: في هذا المثال العدد $\sum x$ يوافق العدد $\sum_{i=1}^{5} n_i x_i$ والعدد $\sum x^2$ يوافق العدد $\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2$.

4. حساب الربعيات بالاعتماد على التواترات المجمعة الصاعدة

طريقة

- لتعيين الربعي الأول لسلسلة إحصائية انطلاقا من جدول التواترات المجمعة الصاعدة، نقرأ مباشرة على الجدول أصغر قيمة يكون من أجلها % 25 على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة.
- لتعيين الربعي الثالث لسلسلة إحصائية انطلاقا من جدول التواترات المجمعة الصاعدة، نقرأ مباشرة على الجدول أصغر قيمة يكون من أجلها % 75 على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة.

تمرين

يمثل الجدول التالي سلسلة إحصائية:

القيمة x_i	4	6	8	10	12	15
التكرار n_i	6	24	12	22	6	10

1. أتمم هذا الجدول بحساب كل من التكرارات المجمعة الصاعدة والتواترات المجمعة الصاعدة.
2. عين كلا من الربعي الأول والربعي الثالث.

حلّ

.1

القيمة x_i	4	6	8	10	12	15
التكرار n_i	6	24	12	22	6	10
التكرارات المجمعة الصاعدة	6	30	42	64	70	80
التواترات المجمعة الصاعدة	0,075	0,375	0,525	0,8	0,875	1

2. بقراءة جدول التواترات المجمعة الصاعدة، نلاحظ أن أصغر قيمة للسلسلة والتي يكون من أجلها % 25 على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة هي 6. إذن $Q_1 = 6$.
بقراءة جدول التواترات المجمعة الصاعدة، نلاحظ أن أصغر قيمة للسلسلة والتي يكون من أجلها % 75 على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة هي 10. إذن $Q_3 = 10$.

ملاحظة

إذا كانت السلسلة معرفة بمنحنيها للتواترات المجمعة الصاعدة، فالربعي الأول Q_1 هو فاصلة النقطة من المنحنى التي ترتيبها $\frac{1}{4}$ (أو $0,25$ أو 25%)، والربعي الثالث Q_3 هو فاصلة النقطة من المنحنى التي ترتيبها $\frac{3}{4}$ (أو $0,75$ أو 75%).

5. تعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة باستعمال مجدول

طريقة1

لتعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة، باستعمال مجدول، نحجز الدساتير المناسبة ثم ننفذها.

تمرين

نعتبر السلسلة السابقة. عين، باستعمال مجدول اكسال، كلا من الوسط والتباين والانحراف المعياري.

حلّ

نحجز قيم السلسلة وتكراراتها في العمودين A و B ثم ننجز الحسابات المناسبة والمؤشرات المطلوبة كما في الجدول

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*xi*	*ni*		*ni*xi*	*ni*xi²*			
2	4	3		12	48			
3	6	5		30	180			
4	8	3		24	192			
5	10	7		70	700			
6	12	10		120	1440			
7	15	4		60	900			
8							$\overline{x}$	9,875
9							$\sum ni*xi^2$	3460
10			*N*	32			*V*	10,609
11							σ	3,257

=SOMME(D2:D7)/D10

=SOMME(E2:E7)

=SOMME(B2:B7)

=H9/D10-H8^2

=RACINE(H10)

6. إنشاء مخطط بالعلبة باستعمال حاسبة بيانية

طريقة

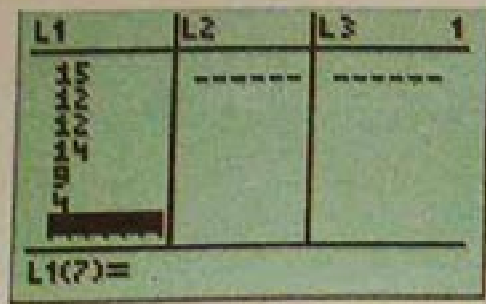
لإنشاء مخطط بالعلبة نستعمل الوظيفة STAT PLOTS المحصل عليها باللمستين 2nd ، Y= .

تمرين

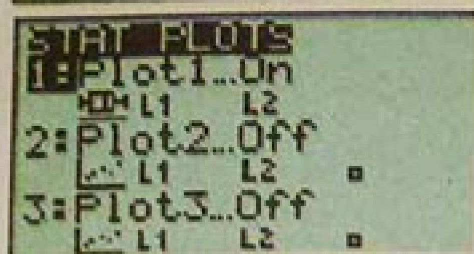
نعتبر السلسلة: 15، 12، 12، 14، 9، 4. باستعمال حاسبة بيانية، مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.

حلّ

1. باستعمال اللمسة STAT نحجز العلامات في القائمة L1 في البرنامج EDIT .

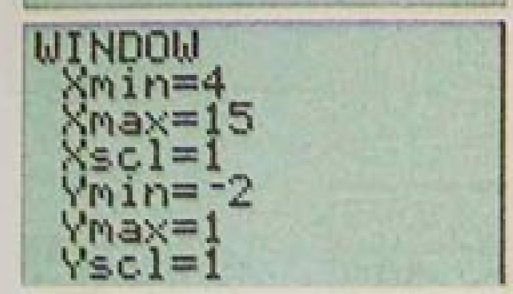


2. نحصل على الوظيفة STAT PLOTS باللمستين 2nd و STAT PLOT Y= .

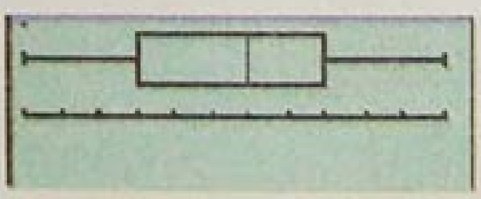


3. نضغط على 1 (أو على ENTER) للحصول على الوظيفة Plot1
ثم نختار النوع الخامس للتمثيل البياني.

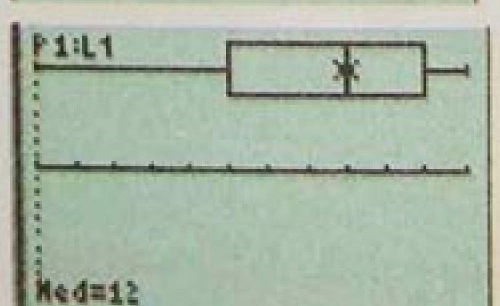
4. نضبط الفواصل في النافذة بالضغط على اللمسة WINDOW .



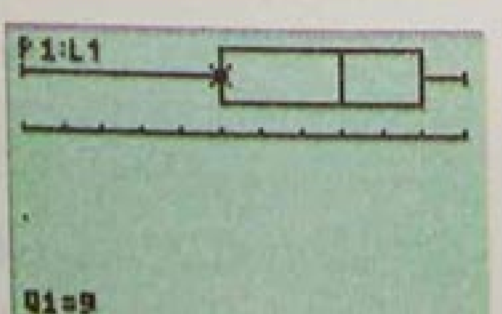
5. نظهر التمثيل باللمسة GRAPH .



6. لاستظهار قيم المؤشرات الإحصائية نضغط على اللمسة TRACE ، فيشير الزالق إلى موقع الوسيط .



7. نحصل عل قيمة أخرى (الربعيان أو القيمة الصغرى أو القيمة الكبرى) بتحريك الزالق باستعمال أسهم التنقل للآلة .



ملاحظات

- يمكن إنشاء علبة لسلسلة أخرى في نفس البيان وهذا بحجز قيم هذه السلسلة في قائمة أخرى (L2 مثلا)، ثم اختيار Plot2 باللمسات 2nd و STAT PLOT Y= و 2 و اتباع نفس المراحل السابقة.

- إذا قدمت السلسلة بقيمها مرفقة بالتكرارات الموافقة، نحجز القيم في إحدى القوائم (L1 مثلا) والتكرارت في قائمة أخرى (L2 مثلا)، ثم بعد اختيار التمثيل نسجل L2 في Freq:L2.

7. إنجاز محاكاة تجربة عشوائية باستعمال حاسبة بيانية

طريقة1

لإنجاز محاكاة بحاسبة بيانية، من النوع TI، نستعمل الوظيفة rand التي تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و1 والتي تنفذ باللمسة MATH والوظيفة PRB .

تمرين

أنجز، باستعمال حاسبة بيانية، محاكاة رمي قطعة نقدية 50 مرة مع تسجيل الحرف F عند ظهور الوجه والحرف P عند ظهور الظهر.

حل

بما أن الوظيفة rand للحاسبة من نوع TI 83 تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و1 متكوّن من 9 أرقام بعد الفاصلة فقط ، فنستعمل التعليمة 10*rand للحصول على عدد محصور بين 0 و10.

```
10*rand
```

1. ننفذ البرنامج: 10 × MATH PRB 1

```
10*rand
      1.374504142
```

2. نضغط على ENTER ونحصل، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و 10. نعتبر كل أرقام هذا العدد ونصطلح أن كل رقم زوجي (مثلا) يمثل الظهر(P) وكل رقم فردي يمثل الوجه (F).
في هذه الحالة العدد المسحوب هو 1,374504142 ويمثل نتيجة 10 رميات : FFFPFPPFPP (نقرأ من اليسار إلى اليمين.)

```
10*rand
      1.374504142
      6.665437149
       .125324079
      5.977514630
      2.771386094
```

نضغط على ENTER 4 مرات أخرى ونحصل على 4 سلاسل تتكون كل منها من 10 أرقام في كل منها وتكون النتيجة النهائية كما يلي:

FFFPFPPFPP
PPPFPFFFPF
PFPFFPPPFF
FFFFFFPPFP
PFFFFPPPFP

ملاحظة

العدد العشوائي 125324079. الظاهر في الشاشة هو العدد العشري 0,125324079.

طريقة 2

لإنجاز محاكاة بحاسبة بيانية، من النوع TI، نستعمل الوظيفة randInt(التي تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد محصور بين عددين كيفيين، والتي تنفذ باللمسة MATH والوظيفة PRB.

تمرين

باستعمال حاسبة بيانية، أنجز محاكاة رمي زهر نرد 20 مرة.

حل

1. نضبط الآلة على 0 رقم بعد الفاصلة باستعمال اللمسة MODE والوظيفة Float .

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
```

2. ننفذ البرنامج: MATH PRB 5

```
randInt(
```

3. ننفذ البرنامج: 1 , 6)

```
randInt(1,6)
```

4. نضغط على ENTER ونحصل، بصفة عشوائية، على عدد طبيعي بين 1 و 6.

```
randInt(1,6)
                3
```

5. نضغط على ENTER 20 مرة ونحصل بصفة عشوائية على سلسلة من 20 عددا محصورا بين 1 و 6.

```
randInt(1,6)
                3
                1
                6
                2
                4
                3
```

ملاحظة

يمكن الحصول مباشرة على n نتيجة مخزنة في إحدى قوائم الحاسبة باستعمال الوظيفة seq(المحصل عليها بالبرنامج 2nd STAT OPS 5 .

تمرين

باستعمال حاسبة بيانية، أنجز محاكاة رمي زهر نرد 120 مرة.

حل

بتنفيذ البرنامج

2nd STAT OPS 5 MATH PRB 5 1 , 6)

, X,T,θ,n , 1 , 120) STO▸ 2nd 1 ENTER

```
seq(randInt(1,6)
,X,1,120)→L1
{6 3 3 5 5 4 1
```

```
L1
6
3
3
5
5
4
1
L1(1)=
```

تظهر النتائج على الشاشة.

ملاحظة

يمكن استظهار القائمة باللمستين STAT و 1 ثم نستعمل اللمسة ▼ لمشاهدة كل الأعداد.

8.إنجاز محاكاة تجربة عشوائية باستعمال مجدول

طريقة

لإنجاز محاكاة بمجدول، اكسال مثلا، نستعمل الوظيفة **ALEA** التي تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد محصور بين *0* و*1*.

تمرين

باستعمال حاسبة مجدول، أنجز محاكاة رمي قطعة نقدية 50 مرة مع تسجيل الرقم 0 عند ظهور الوجه والرقم 1 عند ظهور الظهر.

حل

نختار الخلية A2 مثلا ونكتب الدستور:
" =ENT(ALEA()* 2) " (أو" =ENT(ALEA()+0,5)").
ثم نسحب نحو اليمين حتى الخلية E2 ونحو الأسفل حتى E11 . نحصل هكذا على 50 عددا (كل عدد هو 0 أو 1) مأخوذة بصفة عشوائية.

A2 =ENT(ALEA()*2)

	A	B	C	D	E	F
1	محاكاة: رمي 50 مرة قطعة نقدية					
2	0	0	0	0	1	
3	0	1	1	1	0	
4	0	1	1	0	1	
5	1	0	0	1	1	
6	1	0	1	1	0	
7	1	0	1	1	1	
8	0	1	0	1	1	
9	1	0	0	0	0	
10	1	1	1	0	1	
11	0	0	1	1	1	

ملاحظة

يمكن الحصول على هذه الأعداد مباشرة بسحب الخلية A2 نحو الأسفل حتى A51.

9. تعيين عدد مرات ظهور نتيجة تجربة عشوائية بعد محاكاة

- باستعمال حاسبة

طريقة

لتعيين عدد مرات ظهور نتيجة تجربة عشوائية بعد محاكاة بحاسبة نستعمل الوظيفة 
المحصل عليها بالبرنامج  .

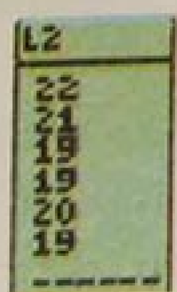
تمرين

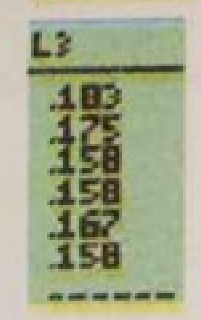
عيّن عدد مرات ظهور كل وجه في محاكاة رمي زهر النرد 120 مرة.

حلّ

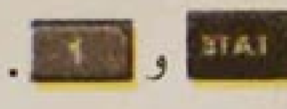
بتنفيذ البرنامج التالي:

تظهر النتائج على الشاشة.



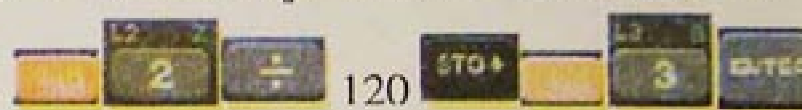


ملاحظات

- يمكن استظهار القائمة L2 باللمستين  .

في هذه الحالة، فإن أعداد ظهور الأوجه الستة *1*، *2* ، *3* ، *4* ، *5*، *6* هي *22* ، *21*، *19*، *19*، *20* ، *19* على الترتيب.

- لتعيين التواترات الموافقة في القائمة L3 يكفي تنفيذ البرنامج التالي:



التواترات الموافقة هي: *0,183* ، *0,175* ، *0,158* ، *0,158* ، *0,167* ، *0,158*.

- باستعمال مجدول

طريقة

لتعيين عدد مرات ظهور نتيجة تجربة عشوائية بعد محاكاة بمجدول نستعمل الوظيفة NB.SI

تمرين

1. عين عدد مرات ظهور كل من الوجه والظهر في محاكاة رمي قطعة نقدية 50 مرة.
2. أحسب تواتر ظهور كل من الوجه والظهر

حلّ

1. لحساب تكرار القيمة 0 (عدد مرات ظهور الوجه)
نختار الخلية H2 مثلا ونكتب الدستور "=NB.SI(A2 :E11 ; 0)" وبنفس الطريقة نحسب تكرار القيمة 1 (عدد مرات ظهور الظهر) في الخلية H3.

2. ونختار الخلية I2 لحساب التواتر الموافق للقيمة 0 باستعمال الدستور "=E2/50" وبنفس الطريقة نحسب تواتر القيمة 1.

H2 =NB.SI(A2:E11;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	محاكاة: رمي 50 مرة قطعة نقدية							التكرار
2	0	0	0	0	1		الوجه: 0	22
3	0	1	1	1	0		الظهر: 1	28
4	0	1	1	0	1			
5	1	0	0	1	1			
6	1	0	1	1	0			
7	1	0	1	1	1			
8	0	1	0	1	1			
9	1	0	0	0	0			
10	1	1	1	0	1			
11	0	0	1	1	1			

10. التمثيل البياني لنتائج تجربة عشوائية بعد محاكاة باستعمال حاسبة

طريقة

لتمثيل نتائج تجربة عشوائية بعد محاكاة ،بيانيا ، بحاسبة نستعمل الوظيفة Plot1 المحصل عليها بالبرنامج 1 STAT PLOT Y= 2nd.

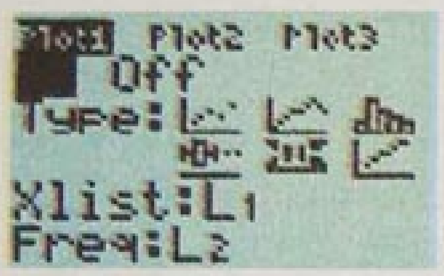
تمرين

أنجز تمثيلا بيانيا لنتائج التجربة العشوائية السابقة.

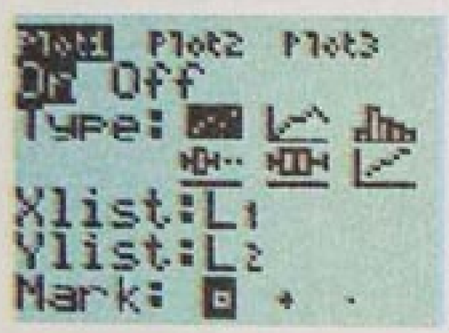
حل

1. نعد " قائمة فواصل" التي نخزنها في أحدى القوائم (L4 مثلا) بتنفيذ البرنامج:
2nd LIST STAT OPS 5 X,T,θ,n , X,T,θ,n ,
STO→ 2nd 4 ENTER 1 , 6)

2. تنفذ البرنامج: 2nd STAT PLOT Y= 1

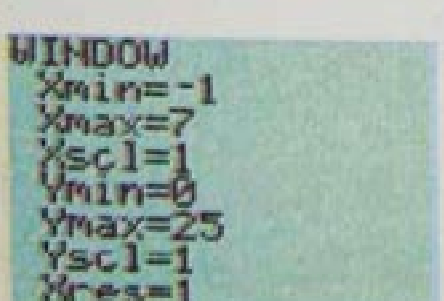


3. نختار أحد البيانات (مثلا) ثم نضغط على ENTER.

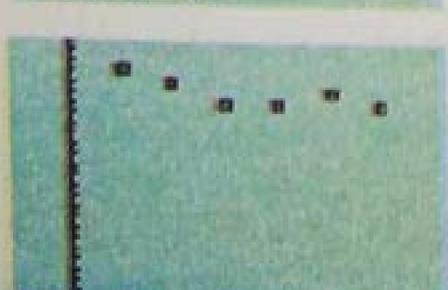


4. نسجل L4 (قيم الوجه) في Xlist: L2 (التكرارات) في Ylist: مع اختيار شكل النقط المراد استعمالها في الرسم

5. نضبط النافذة باختيار القيم الحدية والوحدات الملائمة.



6. نضغط على GRAPH ونحصل على التمثيل البياني.



ملاحظة

يمكن الحصول على التمثيل البياني باستعمال التواترات بدل من التكرارات و هذا باختيار القائمة L3 التي تحتوي على التواترات بدل من القائمة L2.

مسألة محلولة

إليك سلسلة العلامات (على 10) المحصل عليها عند استجواب تلاميذ قسم في مادة الرياضيات:
-8 - 9 -5 -6 -5 -5 -2 -5 -2 -8 -2 - 8 - 7- 5- 2 - 1-1 - 8- 6- 8- 4-8 -8 -7 -5 -5 -8 -3 -2-6-2- 8
.7 -9 - 9 -7 - 5 -5

1. نظم هذه المعطيات في جدول مبينا فيه العلامات من 0 إلى 9 والتكرارات والتكرارات المجمعة الصاعدة والتواترات والتواترات المُجمّعة الصاعدة، في شكل نسب مئوية مع تدوير النتائج إلى 0,1.

2. أ) عين كلا من الوسيط والربعي الأول والربعي الثالث لهذه السلسلة.
ب) مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.
جـ) مثل التكرارات المجمعة الصاعدة بمخطط بالأعمدة، ثم تحقق من صحة قيم المعايير المعينة في السؤال 2.

3. أ) احسب كلا من المدى والوسط $\overline{x}$ والانحراف المعياري σ. تدور النتائج إلى0,01.
ب) احسب (بالتقريب إلى 0,1%) نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على علامة محصورة بين $\overline{x}-\sigma$ و $\overline{x}+\sigma$.

4. بعد الملاحظة أن علامات الاستجواب ضعيفة جدا، قرر الأستاذ تغييرها بإحدى الطريقتين التاليتين:
الطريقة الأولى: يضيف 4 نقط إلى كل العلامات.
الطرقة الثانية: يضعف كلّ العلامات.
أ) عين، في كل حالة، كيف تتغير هذه المعايير بالنسبة إلى معايير السلسلة الأصلية.
ب) استنتج خاصية للانحراف المعياري للسلسلة.

حلّ

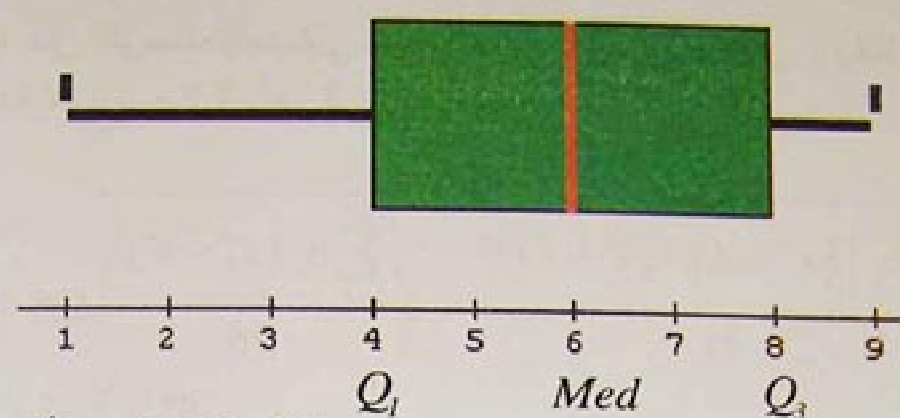
1. تسجل العلامات في الجدول، ثم تعين التكرارات بعناية ويملأ الجدول.

العلامات	1	2	3	4	5	6	7	8	9
التكرارات	2	5	1	1	8	3	4	9	3
التكرارات المجمعة الصاعدة	2	7	8	9	17	20	24	33	36
التواترات (%)	5,6	13,9	2,8	2,8	22,2	8,3	11,1	25	8,3
التواترات المجمعة الصاعدة (%)	5,6	19,5	22,3	25	47,3	55,6	66,7	91,7	100

2. أ) التكرار الكلي لسلسلة العلامات هو 36:

- وسيطها هو وسط العلامة من الرتبة 18 والعلامة من الرتبة 19 إذن: $Med=\frac{6+6}{2}=6$.
فالوسيط هو $Med=6$.
- الربعي الأول هو القيمة من الرتبة $\frac{36}{4}$ أي القيمة من الرتبة 9 ، إذن الربعي الأول هو $Q_1=4$.
- الربعي الثالث هو القيمة من الرتبة $3\times\frac{36}{4}$ أي القيمة من الرتبة 27 ، إذن الربعي الثلث هو $Q_3=8$.

ب) تمثيل السلسلة بالمخطط بالعلبة:



ج)

- الوسيط يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد، يساوي نصف التكرار الكلي، إذن هو **6**.
- لربعي الأول يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد ، يساوي ربع التكرار الكلي، إذن هو **4**.
- الربعي الثالث يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد، يساوي ثلاث أرباع التكرار الكلي، إذن هو**8**.

2) أ)
- المدى هو الفرق بين أصغر علامة واكبر علامة، إذن هو $9-1=8$ أي **8**.
- الوسط الحسابي: $\overline{x} = \dfrac{1\times2+2\times5+3\times1+4\times1+5\times8+6\times3+7\times4+8\times9+9\times3}{36} \approx 5,7$ ،

أي $\overline{x} = 5,7$.
- الانحراف المعياري هو:

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{2\times1^2+5\times2^2+1\times3^2+1\times4^2+8\times5^2+3\times6^2+4\times7^2+9\times8^2+3\times9^2}{36}-5,7^2}$$ أي $\sigma \approx 2,4$

ب) $\overline{x}-\sigma \approx 5,7-2,4 \approx 3,3$ و $\overline{x}+\sigma \approx 5,7+2,4 \approx 8,1$ ، إذن عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة محصورة بين $3,3$ و $8,1$ هو مجموع تكرارات العلامات 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8
أي $1+8+3+4+9=25$.

ومنه النسبة المئوية هي $\dfrac{25}{36}\times100 \approx 69,4$ أي **69,4 %**.

3 . بتطبيق الطريقة الأولى أي إضافة 4 إلى كل علامة:

- مدى السلسلة الجديدة هو: $8 = (1+4)-(9+4)$ أي **8** إذن المدى لا يتغير.
- حسب خواص الوسط الحسابي، فإن الوسط الحسابي للسلسلة الجديدة يزيد بنفس زيادة العلامات.
إذن الوسط الحسابي للسلسلة الجديدة هو: $5,7+4$ أي **9,7**.

الانحراف المعياري للسلسلة الجديدة هو: $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{36} n_i (x_i-\overline{x})^2}{36}} = \sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{36} n_i \left[(x_i+4)-(\overline{x}+4)\right]^2}{36}}$

أي $\sigma \approx 2,4$. إذن الانحراف المعياري لا يتغير.

- بتطبيق **الطريقة الثانية** أي تضعيف كل علامة:
- مدى السلسلة الجديدة هو $(9\times 2)-(1\times 2)$ أي **16**. إذن المدى يضعف.
- حسب خواص الوسط الحسابي ، فإن الوسط الحسابي للسلسلة الجديدة يضعف أيضا.
إذن وسط السلسلة الجديدة هو $5,7\times 2$ أي **11,4**.
- الانحراف المعياري للسلسلة الجديدة هو:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i \left[(x_i\times 2)-(\overline{x}\times 2)\right]^2}{36}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i \left[2(x_i-\overline{x})\right]^2}{36}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i \times 4(x_i-\overline{x})^2}{36}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i \times (x_i-\overline{x})^2}{36}} = 2\times\sigma$$

- أي $2\times 2,4$. إذن الانحراف المعياري يضعّف.

ب) **خاصية**

- إذا أضفنا نفس العدد b إلى كل قيم سلسلة، فإن الانحراف المعياري لا يتغير.
- إذا ضربنا كل قيم سلسلة في نفس العدد a ، فإن الانحراف المعياري يضرب في نفس العدد a.

1. صحيح أو خاطئ

أ) في سلسلة إحصائية % 50 من القيم اصغر أو تساوي الوسيط.

ب) التباين موجب دائما.

ج) كل سلسلة إحصائية تقبل منوالا واحدا.

د) الربعي الأول للسلسلة 4،6،8، 15، 17،17، 20،21، هو 8.

ه) وسيط سلسلة إحصائية اصغر من وسطها.

و) إذا كان الانحراف المعياري لسلسلة إحصائية معدوما فإن كل قيم السلسلة متساوية.

ز) توجد سلاسل إحصائية تقبل وسطا ووسيطا متساويين.

ي) الربعي الأول لسلسلة إحصائية أصغر من ربعيها الثالث.

الأوساط المتحركة

2. نعتبر السلسلة الزمنية التالية التي تعطي درجات الحرارة في مدينة الجزائر خلال أسبوع.

اليوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء
القيمة (°)	15	13	11	12	19

1) احسب الوسط المتحرك من الرتبة 3 بالنسبة إلى كل من الأيام الأحد، الاثنين، الثلاثاء.

2) مثل في نفس البيان كلا من السلسلة الأصلية وسلسلة الأوسا ط المتحركة من الرتبة 3.

3. يمثل الجدول التالي مؤشرات الاستهلاك في مدينة الجزائر من 1990 إلى 2002 ("1989=100").

السنة	1990	1991	1992	1993
المؤشر	117,5	148,38	195,38	235,51

1994	1995	1996	1997	1998
303,1	394,42	468,12	494,93	519,44

1999	2000	2001	2002
532,2	533,8	557,5	565,49

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات.

أنجز التمليس بالأوساط المتحركة من الرتبة 3 لسلسلة المؤشرات.

المدرجات التكرارية

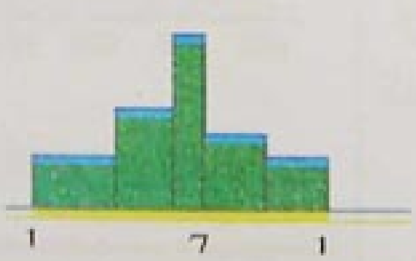
4. مثل السلسلة التالية بمدرج تكراري:

الفئة	[0;6[	[6;10[	[10;12[	[12;16[
التكرار	5	7	12	8

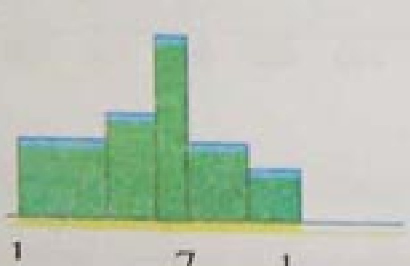
5. عين، من بين المدرجين التكراريين التاليين، الذي يمثل السلسلة التالية ؟

الفئة	[1;4[	[4;6[	[6;7[	[7;9[	[9;11[
التكرار	6	8	7	6	4

①



②



6. مثل كلا من السلاسل التالية بمدرج تكراري:

1)

x_i	[0;20[	[20;30[	[30;40[	[40;60[
n_i	4	6	6	8

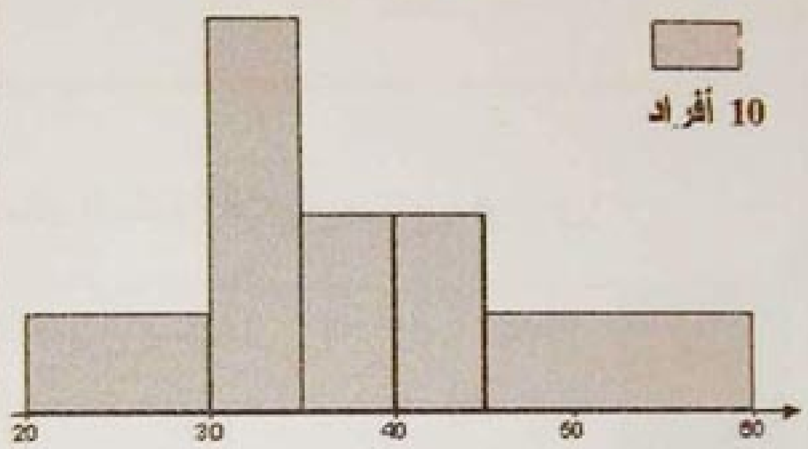
(2

x_i	$[0;100[$	$[100;140[$	$[140;160[$	$[160;200[$
n_i	2	1	5	3

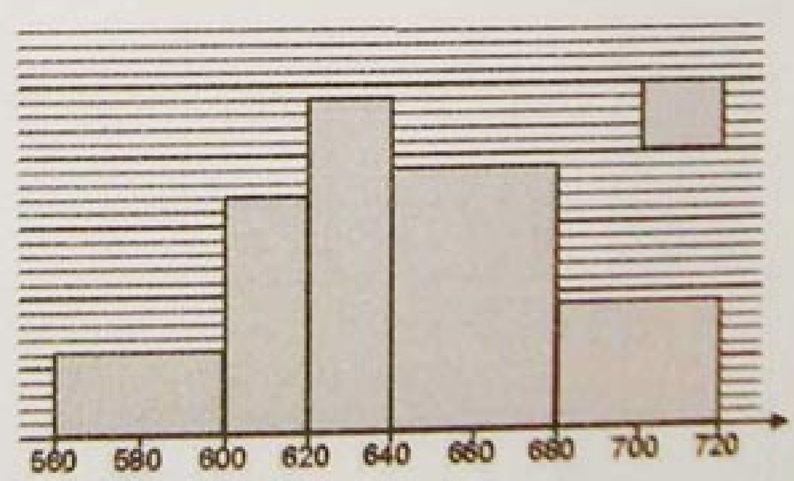
(3

x_i	$[150;155[$	$[155;160[$	$[160;165[$	$[165;170[$
f_i	0.1	0.5	0.3	0.1

.7 عين جدول المعطيات (الفئات والتكرارات) للسلسلة الممثلة بالمدرج التكراري التالي:



.8 نفس السؤال بالنسبة إلى المدرج التكراري التالي:



الوسط الحسابي– التباين– الانحراف المعياري

.9 تحصل محمد على العلامات التالية في التاريخ: 12 ،7 ،11 ،9 ،10 ،11.

1) تحقق أن معدل العلامات هو 10 .

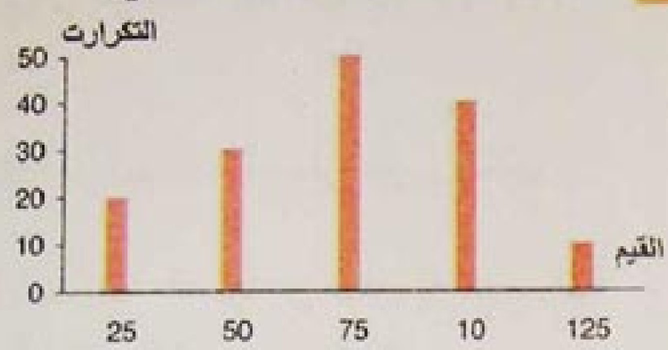
2) احسب التباين والانحراف المعياري لهذه السلسلة.

.10 احسب كلا من الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري المعياري للسلسلة التالية: 1- ، 2- ، 3 ، 2 ، 2- ، 0 ، 1.

.11 باستعمال حاسبة، احسب كلا من الوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة التالية:

القيمة	3	4,5	5	10
التكرار	9	40	125	164

.12 نعتبر المخطط بالأعمدة التالي:



1) اجمع هذه المعطيات في جدول.

2) أحسب كلا من الوسط الحسابي، والتباين، والانحراف المعياري لهذه السلسلة. تدوّر النتائج إلى 0,01.

.13 نعتبر سلسلة معرفة بقيمها x_1 ، x_2 ، ..... ، x_k مرفقة بتكراراتها n_1 ، n_2 ، ..... ، n_k .

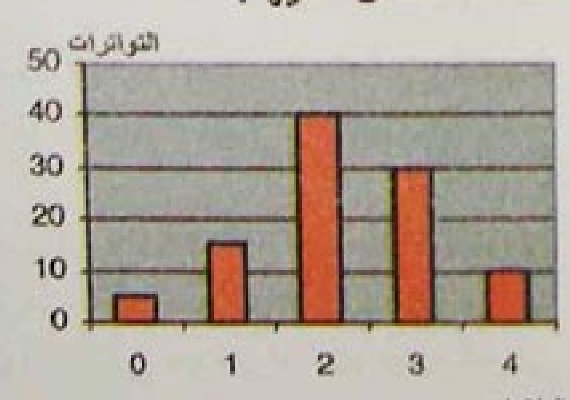
نعلم أن $\sum_{i=1}^{k} x_i = 61$ ، $\sum_{i=1}^{k} n_i = 47$ ،

$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = 740$ ، $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 = 11870$.

1) ما هو التكرار الكلي لهذه السلسلة؟

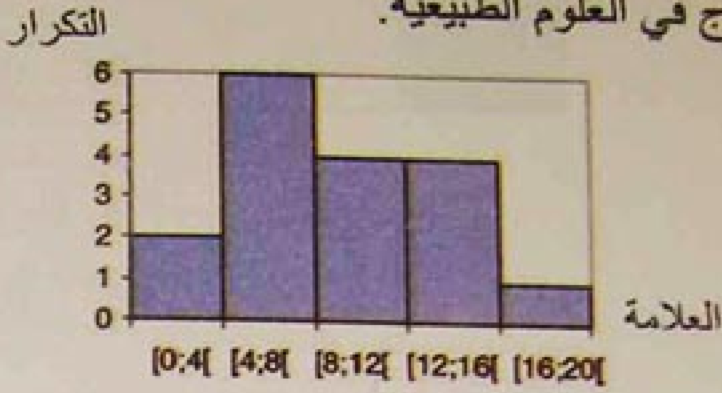
2) احسب كلا من الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذه السلسلة

.14 تم تنقيط تمارين مادة الرياضيات على 4.
المخطط التالي يمثل توزيع تواترات بنسب مئوية للعلامات المحصل عليها:



احسب كلا من الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لسلسة العلامات. تدوّر النتائج إلى 0,1.

15. يمثل المدرج التالي توزيع علامات تلاميذ فوج في العلوم الطبيعية.



احسب كلا من الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة. تعطى النتيجتان بالتدوير إلى 10^{-2}.

16. تحصل تلميذ على العلامات التالية في فروض مادة اللغة العربية: 8، 10، 12، 14.

1) احسب كلا من الوسط الحسابي والانحراف المعياري لسلسلة العلامات.

2) قرر الأستاذ إضافة نقطة واحدة إلى كل علامة من علامات التلميذ. كيف يصبح كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

3) نفس السؤال في حالة إضافة 10% إلى كل علامة.

الوسيط - الربعيات – المخطط بالعلبة

17. احسب كلا من الوسيط والربعي الأول والربعي الثالث للسلاسل التالية:

1) 3، 3، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 9.

2) 2، 3، 4، 5، 6، 7، 7، 7، 7، 7، 7.

3) 13، 13، 15، 15، 15، 15، 16، 17، 17، 18، 18.

18. أنجز المخطط بالعلبة لكل من السلاسل الواردة في التمرين 17.

19. احسب كلا من الوسيط والربعي الأول والربعي الثالث لكل من السلسلتين لتاليتين:

x_i	7	8	9	10	11	12
n_i	62	41	20	6	43	13

x_i	43	46	55	63	80
n_i	3	4	3	8	11

20. يمثل الجدول التالي سلسلة أعداد (60 عددا) محصورة بين 0 و 10 ومسحوبة بصفة عشوائية.

7	1	0	1	2	8	5	3	7	4
8	1	3	2	1	8	3	0	8	0
8	10	3	10	4	7	1	0	0	5
3	0	5	5	4	9	5	1	5	3
5	5	5	3	7	3	5	10	2	0
4	5	8	10	6	5	3	4	8	7

1) احسب كلا من الوسيط ، الربعي الأول والربعي الثالث والعشري الأول والعشري التاسع لسلسلة الأعداد.

2) نضيف العدد 10 إلى السلسلة فتتكون من 61 عددا. ما هي المعايير الإحصائية التي تتغير؟

21. إليك قيمة تقريبية للعدد π :

$\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\;279\,502\;884\;197\,169\,399\,375\;10$

نهتم فقط بالأرقام بعد الفاصلة.

1) احسب عدد مرات ظهور كل رقم، أتمم الجدول التالي:

الرقم	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
التكرارات المجمعة الصاعدة										
التواترات المجمعة المتزايدة (%)										

2) أنشئ مخططا بالعلبة يمثل سلسلة الأرقام العشرة.

22. يمثل الجدول التالي مبيعات دكانين خلال سنة:

الشهر	1	2	3	4	5	6
الدكان أ	51	17	25	39	7	49
الدكان ب	6	7	13	17	20	25

7	8	9	10	11	12
62	41	20	6	43	13
39	41	43	49	51	62

1) احسب كلا من الوسيط، الربعي الأول، الربعي الثالث لكل من سلسلتي المبيعات.

2) مثل كلا من هاتين السلسلتين بمخطط بالعلبة في نفس البيان.

3) قارن بين مبيعات الدكانين خلال السنة.

23. نعتبر السلسلة 3، 14، 19.

1) عين الوسط الحسابي $\overline{x}$ لهذه السلسلة.

2) أ) نسحب، بصفة عشوائية وبإرجاع، قيمتين من قيم السلسلة. أعط كل العينات ذات المقاس 2 المحصل عليها.

ب) احسب الوسط الحسابي لقيمتي كل عينة ثم تحقق أن الوسط الحسابي للأوساط الناتجة يساوي $\overline{x}$.

24. يتصف 20% من أفراد مجتمع بميزة معينة.

1) ما ذا نقول عن عينة متكونة من 120 فردا فيها 14 فردا يتصفون بهذه الميزة؟

2) نفس السؤال بالنسبة إلى عينة من 150 فردا فيها 42 يتصفون بهذه الميزة.

3) لو نختار، في هذا المجتمع، عينة من 1800 فردا بصفة عشوائية، ما هو عدد الأفراد المتوقع أن يتصفوا بهذه الميزة.

25. نعتبر كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى 20.

1) احسب الوسط الحسابي هذه الأعداد.

2) أ) عين، باستعمال حاسبة بيانية أو مجدول، عشر عينات ذات المقاس 50 متكونة من هذه الأعداد مسحوبة بصفة عشوائية.

26 تمت محاكاة رمي زهر نرد ذي 6 أوجه. يمثل الجدول التالي توزيع تواترات ظهور الأوجه الستة بالنسبة إلى عينة ذات المقاس 400.

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار						
التواتر	0,184	0,132	0,183	0,173	0,152	0,176

1) أتمم هذا الجدول.

2) عين تواترات الحوادث التالية:

أ) " الوجه المحصل عليه هو 1".

ب) " الوجه المحصل عليه هو زوجي".

ج)" الوجه المحصل عليه هو فردي".

27. نعتبر التجربة العشوائية التالية:

" نرمي 3 أزهار النرد متماثلة ونسجل مجموع القيم الناتجة".

1) ما هو عدد إمكانيات الحصول على كل من الأعداد 3 ، 4 ، 7 ، 8.

2) باستعمال مجدول، أنجز محاكاة التجربة السابقة لعينة ذات المقاس 300.

أجب بنعم أو لا عن الأسئلة التالية:

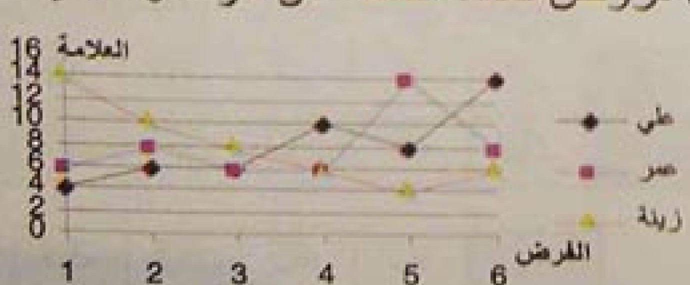
أ) عدد مرات الحصول على العدد 4 أكثر من عدد مرات الحصول على العدد 3.

ب) عدد مرات الحصول على 4 أكثر من عدد مرات الحصول على 7.

ج) عدد مرات الحصول على 7 أكثر من عدد مرات الحصول على 8.

مسائل

28. يمثل البيان التالي العلامات المحصل عليها في 6 فروض لمادة الفلسفة من طرف 3 تلاميذ.



1) من التلميذ الذي تحصل على أكبر معدل؟
2) من التلميذ الذي يعمل بصفة منتظمة أكثر؟

29. يمثل الجدول التالي تطور عدد الزيجات في الجزائر من 1990 إلى 2003.

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
العدد	149345	151467	159380	153137	147954	152786	156870

السنة	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
العدد	157831	158298	163216	177578	194276	218620	240463

المصدر : الديوان الوطني للإحصائيات

1) أنجز التمليس بالأوساط المتحركة من الرتبة 3 لهذه السلسلة.

2) احسب كلا من الوسط والوسيط لهذه السلسلة

30. نعتبر السلسلة : 6، 10، 11، 14، 16، 15 .

1) احسب كلا من الوسط $\overline{x}$ والتباين V والانحراف المعياري σ لهذه السلسلة.

كيف تصبح القيم السابقة إذا أضفنا القيمة 12 (كقيمة سابعة) لهذه السلسلة.

2) نعتبر سلسلة ثانية: 5، 10، 11، 14، 16، 16 .

أ) تحقق أن هذه السلسلة تقبل نفس وسط السلسلة الأولى.

ب) احسب كلا من التباين V والانحراف المعياري σ لهذه السلسلة.

جـ) قارن هذه النتائج مع نتائج السلسلة الأولى.

31. x عدد حقيقي. نعتبر السلسلة التالية:
3 ، 4 ، 5 ، 10 ، 13 ، $6x$.

1) عبر بدلالة x عن كل من الوسط $\overline{x}$ و التباين V لهذه السلسلة.

2) هل توجد قيم للعدد x من أجلها يكون $V = 2$؟

3) أوجد أصغر قيمة للتباين V.

ما هي، في هذه الحالة، قيمة الوسط $\overline{x}$.

32. نعتبر سلسلة معطاة بقيمها x_1، x_2، .....، x_k حيث تكرارها الكلي هو N ووسطها هو $\overline{x}$ وتباينها هو V و انحرافها المعياري هو σ.

نضيف العدد b إلى كل من قيم هذه السلسلة و نحصل على سلسلة جديدة (y_i) حيث $y_i = x_i + b$.

1) $\overline{y}$ ، V' ، σ' هي الوسط والتباين والانحراف المعياري للسلسلة V.

أثبت أن $\overline{y} = \overline{x} + b$ و $V' = V$ و $\sigma' = \sigma$.

2) نضرب كلا من قيم السلسلة الأصلية في العدد الموجب a، فتنتج سلسلة أخرى،

كيف يصبح وسط هذه السلسلة؟ برهن أن تباين السلسلة الناتجة يساوي a^2V ثم استنتج انحرافها المعياري.

3) استنتج الخاصيتين الموافقتين

33. يمثل الجدول التالي علامات تلاميذ ثلاثة أقسام في اختبار مادة الرياضيات:

	العلامة	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15	17	18
القسم 1	عدد التلاميذ	0	1	1	1	6	9	7	0	1	1	0	0	0
القسم 2	عدد التلاميذ	1	1	2	3	1	5	3	8	4	1	1	0	1
القسم 3	عدد التلاميذ	6	4	2	1	1	0	0	1	5	6	3	4	1

1) احسب كلا من الوسط والانحراف المعياري

لكل من الأقسام الثلاثة ثم علق عن هذه النتائج.

2) باستعمال المخطط بالعلبة، مثلا، في نفس البيان، كلا من سلاسل علامات الأقسام الثلاثة.

ماذا تلاحظ؟

34. نعتبر السلسلة 3، 5، 7، 8، 9.

1) احسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة.

2) ارسم، باستعمال حاسبة بيانية منحنى الدالة:

$$f : x \mapsto (x-3)^2 + (x-5)^2 + (x-7)^2 + (x-8)^2 + (x-9)^2$$

3) ماذا نقول عن الوسط الحسابي لهذه السلسلة؟

4) بسط كتابة $f(x)$.

5) استنتج قيمة x التي من أجلها، تكون قيمة هذه العبارة أصغر ما يمكن. احسب هذه القيمة.

احسب صورة الوسط الحسابي بالدالة f.

6) اعد نفس الحساب مع الدالة g:

$$g : x \mapsto (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2 + (x-e)^2$$

حيث a، b، c، d، e أعداد معلومة.

7) استنتج القيمة التي تجعل $g(x)$ أصغرية.

الباب 3 عموميات على الدوال *

1. الدالة "مكعب"
2. العمليات على الدوال
3. المنحنيات والتحويلات النقطية
4. عناصر تناظر منحنيات

يُعتبر ليبنيز أول من أدرج تسمية مفهوم "الدالة" وذلك سنة 1690م، وهو من فصل الدالة عن المنحنى على أساس أن المنحنى يمكن أن يكون تمثيلا لأكثر من دالة بعد تغيير المتحول، هذا التغيير يعني مفهوم تركيب الدوال.

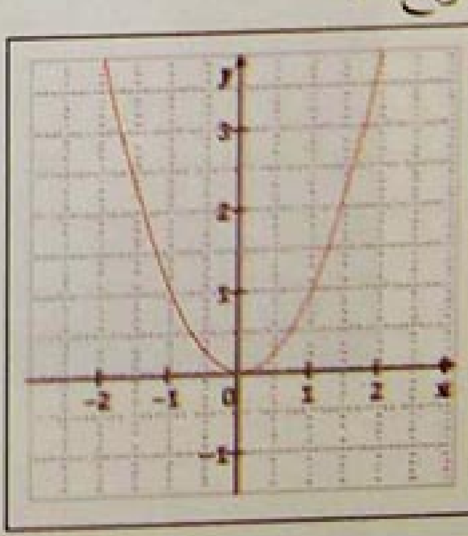
في سنة 1748م عَمَدَ أُولر إلى شرح تغيير المتحول (تركيب الدوال) ودوره في تبسيط شكل الدالة.

وقد كان لنتائج مختلف هذه الدراسات الدور الهام في دراسة خواص دوال اعتمادًا على الخواص المعلومة لدوال مرجعية بسيطة.

ليبنيز "Gottfried wilhelm Leibniz"
(1646 - 1716)

إستبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3x(x-1) - x(1+3x)$ هي	دالة تآلفية	الدالة "مربع"	الدالة "مقلوب"
2) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (4x-1)(4x+1) + 1 - 15x^2$ هي	دالة تآلفية	الدالة "مربع"	الدالة "مقلوب"
3) الدالة h المعرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = \frac{2x+1}{x} - 2$	دالة تآلفية	الدالة "مربع"	الدالة "مقلوب"
4) صورة العدد 4 بالدالة "مربع" هي	2	4	16
5) بالدالة "مربع" العدد 4 له	سابقة واحدة هي 4	سابقة واحدة هي 2	سابقتان هما 2 و-2
6) صورة العدد $\sqrt{2}$ بالدالة "مقلوب" هي	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	2
7) سابقة العدد $\sqrt{2}$ بالدالة "مقلوب" هي	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	2
8) صورة العدد 9 بالدالة "الجذر التربيعي" هي	3	81	9
9) سابقة العدد 9 بالدالة "الجذر التربيعي" هي	3	81	9
10) المنحنى التالي هو المنحنى الممثل للدالة "مربع" . 			
• الدالة مربع	متزايدة على $\mathbb{R}$	متزايدة على $[0 ; +\infty[$	متزايدة على $]-\infty ; 0]$
• المعادلة $x^2 = 1$	تقبل حلا واحدا هو 1	تقبل حلا واحدا هو -1	تقبل حلين هما 1 و -1
• مجموعة حلول المتراجحة $x^2 < 4$	هي $\mathbb{R}$	هي المجال $]-2 ; +2[$	هي $]-\infty ; -2[$

نشاط 1 : مقارنة مكعبي عددين حقيقيين

1. أثبت أن : من أجل كل عددين حقيقيين a و b ؛

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

2. تحقق أن : من أجل كل عددين حقيقيين a و b ؛

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 = a^2+ab+b^2$$

– استنتج إشارة العبارة a^2+ab+b^2

ثم استنتج أن العددين a^3-b^3 و $a-b$ لهما نفس الإشارة.

3. x_1 ؛ x_2 عددان حقيقيان حيث $x_1 < x_2$

– قارن بين x_1^3 و x_2^3.

– أعط نص خاصية تسمح بمقارنة مكعبي عددين حقيقيين.

نشاط 2 : العمليات على الدوال

f ؛ g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = 2(x-1)^2-1 \quad ; \quad g(x) = 4x+3$$

1. أُحسب كل عبارة من العبارات التالية :

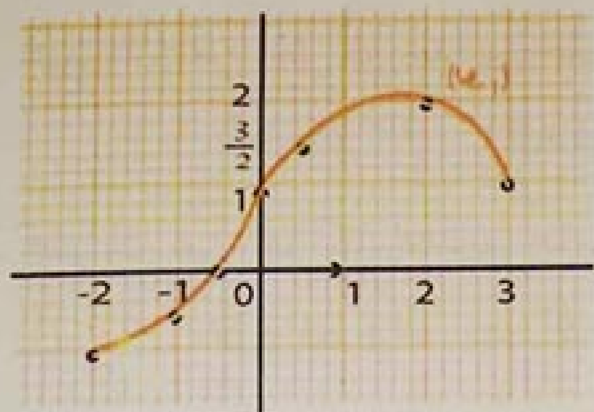
$$f(x)+g(x) \quad ; \quad -g(x) \quad ; \quad f(x)-g(x) \quad ; \quad \frac{1}{2}g(x)$$

$$\frac{1}{g(x)} \quad ; \quad \frac{f(x)}{g(x)} \;.$$

2. عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

$$h_1 : x \longmapsto f(x)+g(x) \quad ; \quad h_2 : x \longmapsto -g(x) \quad ; \quad h_3 : x \longmapsto f(x)-g(x)$$

$$h_4 : x \longmapsto \frac{1}{2}g(x) \quad ; \quad h_5 : x \longmapsto \frac{1}{g(x)} \quad ; \quad h_6 : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$



نشاط 3 : الدوال المرفقة

f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2\,;3]$ بتمثيلها البياني $(\mathscr{C}_1)$ (الشكل).

1. أكمل الجدول التالي معتمدا على القراءة البيانية على الشكل.

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$f(x)$								

2. أعد رسم الشكل السابق.

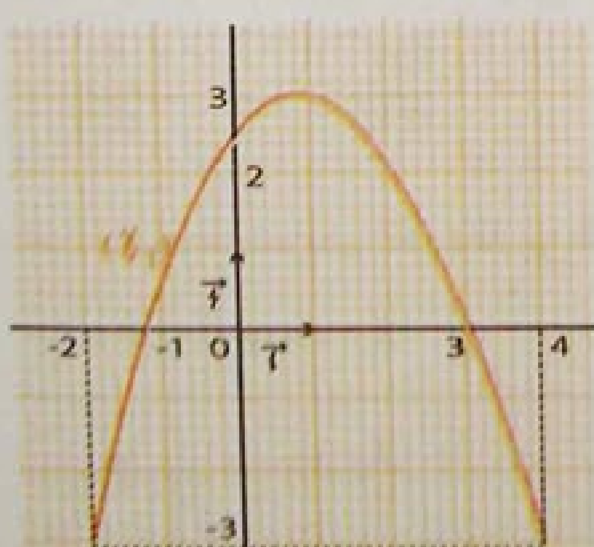
3. أ) أكمل الجدول التالي :

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$f(x)+3$								

ب) علّم النقط ذات الإحداثيات $(x; f(x)+3)$ في المعلم السابق.
ثم أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_2)$ الممثل للدالة $x \longmapsto f(x)+3$.
(يتم رسم المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ بلونين مختلفين).

جـ) بأي تحويل نقطي يمكن الإنتقال من $(\mathscr{C}_1)$ إلى $(\mathscr{C}_2)$ ؟

نشاط 4 : الدوال المرفقة



g هي الدالة المعرفة على المجال $[-2\,;4]$ بتمثيلها البياني (γ_1) (الشكل).

1. أكمل الجدول التالي معتمدا على القراءة البيانية على الشكل.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$							

2. أعد رسم الشكل السابق.

3. أ) إذا كان $x+2$ ينتمي إلى المجال $[0;6]$ ،
فإلى أي مجال ينتمي العدد x ؟

ب) أكمل الجدول التالي :

x	0	1	2	3	4	5	6
$x+2$							
$g(x+2)$							

جـ) أعد رسم الشكل السابق.

د) علم النقط ذات الإحداثيات $(x; g(x+2))$ في المعلم السابق
ثم أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_2)$ الممثل للدالة $x \longmapsto g(x+2)$
(يميز المنحنى $(\mathcal{C}_1)$ عن المنحنى $(\mathcal{C}_2)$ باللون).

هـ) على أي مجال تكون الدالة $x \longmapsto g(x+2)$ معرفة ؟

و) بأي تحويل نقطي يمكن الإنتقال من $(\mathcal{C}_1)$ إلى $(\mathcal{C}_2)$ ؟

نشاط 5 : عناصر تناظر منحنٍ

f ؛ g دالتان معرفتان على كما يلي :

$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$ ؛ $g(x) = x^3 - x$

1. أكمل الجدولين التاليين :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

– قارن بين $f(-x)$ و $f(x)$ ثم بين $g(-x)$ و $g(x)$.

2. أثبت أن، من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(-x) = f(x)$.

3. أثبت أن، من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $g(-x) = -g(x)$.

4. ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للمنحنيين الممثلين للدالتين f و g ؟

1. الدالة "مكعب"

أ) تعريف: الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = x^3$ تسمى الدالة "مكعب".

أمثلة: f هي الدالة "مكعب".

لدينا: $f(-2) = (-2)^3 = -8$ ؛ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$ ؛ $f(3) = 27$ ؛ $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

ب) خاصية: الدالة "مكعب" فردية على $\mathbb{R}$.

البرهان: f هي الدالة "مكعب" و x عدد حقيقي.

لدينا: $(-x)$ عدد حقيقي و $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

أي $f(-x) = -f(x)$.

إذن: من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(-x) = -f(x)$

ينتج أن الدالة "مكعب" فردية على $\mathbb{R}$.

جـ) دراسة تغيرات الدالة "مكعب"

- **إتجاه التغير**

مبرهنة: الدالة "مكعب" متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

البرهان: f هي الدالة "مكعب" و x_1 ، x_2 عددان حقيقيان.

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $x_1^3 < x_2^3$ (حسب النشاط التمهيدي رقم 1).

إذن: من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 ؛

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$.

وبالتالي الدالة "مكعب" متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- جدول التغيرات: مما سبق، يكون جدول تغيرات الدالة "مكعب" كالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

د) التمثيل البياني

• ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة "مكعب"

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$(\|\vec{i}\| = 1 \quad ; \quad \|\vec{j}\| = 1)$

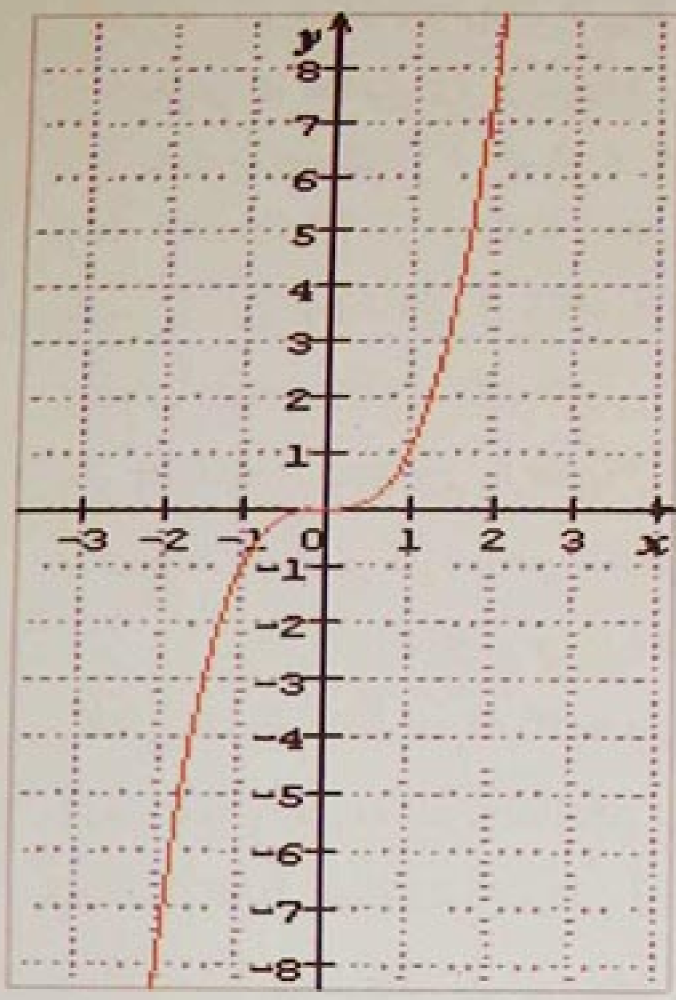
• المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مركز تناظر

وهو النقطة O مبدأ المعلم.

• جدول بعض القيم للدالة "مكعب".

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

• رسم المنحنى $(\mathscr{C})$. الشكل المقابل



2. العمليات على الدوال

f ، g دالتان معرفتان على نفس المجموعة I .

h عدد حقيقي.

أ) مجموع دالتين

تعريف : نسمي مجموع الدالتين f و g ، الدالة $f+g$ المعرفة على I كما يلي: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

مثال : f ، g الدالتان المعرفتان على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي :

$f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$.

مجموع الدالتين f و g هي الدالة $f+g$ ، المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي :

$(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$

• **إتجاه التغير**

مبرهنة :

إذا كان كل من f و g متزايدة تماما على مجال I فإن الدالة $f+g$ متزايدة تماما على I .

إذا كان كل من f و g متناقصة تماما على مجال I فإن الدالة $f+g$ متناقصة تماما على I .

البرهان: f ، g دالتان معرفتان على نفس المجال I.

نفرض أن كلاً من f و g متزايدة تماما على مجال I .

x_1 ، x_2 عددان من I حيث $x_1 < x_2$.

إذن $f(x_1) < f(x_2)$ و $g(x_1) < g(x_2)$ ، (لأن f و g متزايدتان تماما على I).

ينتج أن $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$

وبالتالي $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$

إذن إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$.

نستنتج أن من أجل كل عددين حقيقيين x_1 ، x_2 من المجال I،

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$.

وبالتالي، الدالة $f+g$ متزايدة تماما على I .

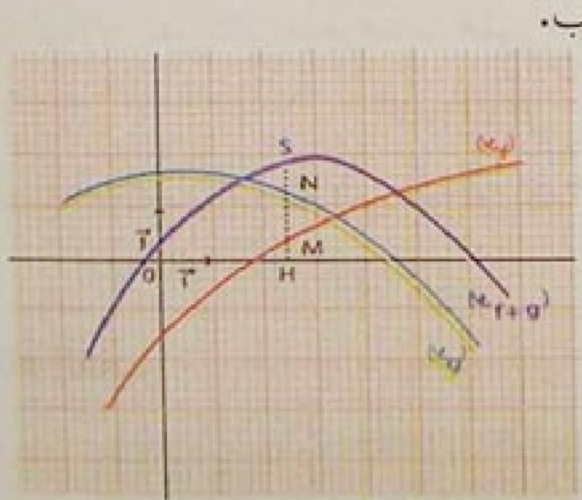
نبرهن بنفس الطريقة أن إذا كان كل من f و g متناقصة تماما على المجال I فإن الدالة $f+g$ متناقصة تماما على I .

ملاحظة: لا توجد قاعدة تخص دالتين مختلفتين في إتجاه التغير.

التمثيل البياني للدالة $f+g$

$(\mathscr{C}_f)$ ، $(\mathscr{C}_g)$ ، $(\mathscr{C}_{f+g})$ هي التمثيلات البيانية للدوال f ، g ، $f+g$ على الترتيب. (الشكل)

x عدد حقيقي. نعتبر النقط H، M ، N ذات نفس الفاصلة x والتي تنتمي إلى محور الفواصل والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ على الترتيب.



ننشئ النقطة S المعرفة كما يلي:

$\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HN}$.

فاصلة النقطة S هي x وترتيبها هو $y_S = y_M + y_N$

نعلم أن $y_M = f(x)$ (لأن M تنتمي إلى $(\mathscr{C}_f)$)

و $y_N = g(x)$ لأن N تنتمي إلى $(\mathscr{C}_g)$).

إذن $y_S = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$.

ينتج أن S هي النقطة من المنحنى $(\mathscr{C}_{f+g})$ التي فاصلتها x .

بتكرارا هذه العملية من أجل قيم أخرى للعدد x ، ننشئ المنحنى $(\mathscr{C}_{f+g})$ نقطة فنقطة.

ب) فرق دالتين

تعريف : نسمي فرق الدالتين f و g ، الدالة $f-g$ المعرفة على I
كما يلي : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

مثال : f ، g الدالتان المعرفتان على المجال $]-\infty ; +\infty[$ كما يلي :
$f(x) = x^2+2x$ ؛ $g(x) = 3x - 5$.

فرق الدالتين f و g هي الدالة $f - g$ ، المعرفة على المجال $]-\infty ; +\infty[$
كما يلي : $(f-g)(x) = x^2 - x + 5$.

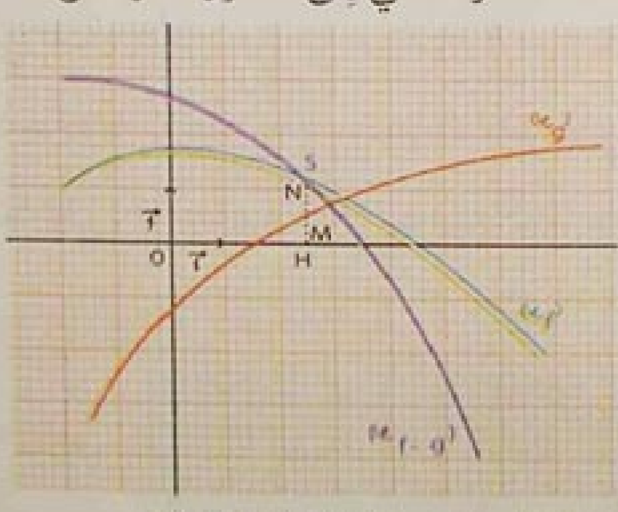
ملاحظة 1 : الدالة $x \longmapsto -g(x)$
تسمى معاكس الدالة g على I .

ملاحظة 2 : الدالتان g ، $-g$ لهما إتجاها تغير متعاكسان؛
أي إذا كانت g متزايدة على I فإن $-g$ متناقصة على I .
و إذا كانت g متناقصة على I فإن $-g$ متزايدة على I.

التمثيل البياني للدالة $f - g$

$(\mathscr{C}_f)$ ، $(\mathscr{C}_g)$ ، $(\mathscr{C}_{f-g})$ هي التمثيلات البيانية للدوال f ، g ، $f-g$ على الترتيب .
(الشكل)

x عدد حقيقي و H ، M ، N نقط ذات نفس الفاصلة x وتنتمي إلى محور الفواصل، والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ على الترتيب.



ننشئ النقطة S المعرفة كما يلي :

$$\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HN}$$

فاصلة S هي x وترتيبها هو $y_S = y_M - y_N$
أي $y_S = f(x) - g(x) = (f-g)(x)$
إذن S تنتمي إلى المنحنى $(\mathscr{C}_{f-g})$.

بتكرار هذه العملية من أجل قيم أخرى للعدد x ، ننشئ $(\mathscr{C}_{f-g})$ نقطة فنقطة.

ملاحظة 1 : المنحنيان $(\mathscr{C}_g)$ ، $(\mathscr{C}_{-g})$ متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل.

ملاحظة 2 : نعلم أن $f - g = f + (-g)$

إذن لإنشاء $(\mathscr{C}_{f-g})$ يمكن إنشاء $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{-g})$ ثم نطبق الطريقة السابقة المتعلقة بالدالة $f + g$.

جـ) جداء دالتين

تعريف : نسمي جداء الدالتين f و g الدالة $f . g$ المعرفة على المجموعة I كما يلي : $(f . g)(x) = f(x) . g(x)$.

مثال : f ، g هما الدالتان المعرفتان على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي :

$f(x) = -3x+4$ و $g(x) = x - 1$.

جداء الدالتين f و g هي الدالة $f . g$ المعرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي :

$$(f . g)(x) = (-3x+4)(x-1)$$

ملاحظة : لا توجد قاعدة تخص اتجاه تغير الدالة $f . g$

في المثال التالي، كل من الدالتين f ، g المعرفتين على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{-1}{x}$ متزايدة تماما على $]0 ; +\infty[$ بينما الدالة $f . g$ المعرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $(f . g)(x) = -x$ متناقصة تماما على $]0 ; +\infty[$.

وفي المثال الآتي كل من الدالتين h و t المعرفتين على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$h(x) = x^2$ و $t(x) = x$ متزايدة تماما على هذا المجال، والدالة $h . t$ المعرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $(h . t)(x) = x^3$ متزايدة تماما على $]0 ; +\infty[$.

د) جداء دالة بعدد حقيقي

تعريف : نسمي جداء الدالة f بالعدد الحقيقي k الدالة $k . f$ المعرفة على المجموعة I كما يلي : $(k f)(x) = k . f(x)$.

مثال : f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3x - 5$.

الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 4(3x - 5)$

هي جداء الدالة f بالعدد 4. نكتب: $g = 4 . f$

• إتجاه التغير

إذا كان $k > 0$ فإن للدالتين f و $k . f$ نفس إتجاه التغير.

إذا كان $k < 0$ فإن للدالتين f و $k . f$ إتجاهي تغير متعاكسين.

البرهان: – نفرض أن f متزايدة تماما على I و $k > 0$.

من أجل كل عددين حقيقيين x_1 ، x_2 ؛

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$ (لأن f متزايدة تماما على I).

وبالتالي $k . f(x_1) < k . f(x_2)$ أي $(k . f)(x_1) < (k . f)(x_2)$

ينتج أن: من أجل كل عددين حقيقيين x_1 ، x_2 ؛

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $(k . f)(x_1) < (k . f)(x_2)$

أي الدالة $k . f$ متزايدة تماما على I.

نستنتج أنه إذا كانت f متزايدة تماما على I و $k > 0$ فإن الدالة $k . f$ متزايدة تماما على I.

– وبالمثل، نبرهن أن، إذا كانت f متناقصة تماما على I و $k > 0$ فإن الدالة $k . f$ متناقصة تماما على I.

وبنفس الطريقة، تدرس الحالة $k < 0$.

مثال: f هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty ; 0]$ كما يلي: $f(x) = x^2$.

– الدالة $\frac{1}{2} . f$ معرفة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty ; 0]$.

– الدالة $-2 . f$ معرفة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty ; 0]$.

ملاحظة: إذا كان $k = 0$ فإن الدالة $k . f$ هي الدالة المنعدمة، وهي دالة ثابتة.

د) حاصل قسمة دالتين

تعريف: نسمي حاصل قسمة الدالتين f و g ، الدالة $\frac{f}{g}$ المعرفة على المجموعة I، باستثناء الأعداد الحقيقية x من I حيث $g(x) = 0$، كما يلي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حالة خاصة: مقلوب الدالة g المعرفة على I هي الدالة $\frac{1}{g}$ المعرفة على I، باستثناء الأعداد الحقيقية x من I حيث $g(x) = 0$ ، كما يلي: $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$.

ملاحظة: يمكن إعتبار الدالة $\frac{f}{g}$ كجداء الدالتين f و $\frac{1}{g}$.

وتكون معرفة كما يلي: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$.

مثال 1: f ، g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = 3x - 1$

حاصل قسمة الدالتين f و g هي الدالة $\frac{f}{g}$ المعرفة على

$]-\infty ; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3} ; +\infty[$ كما يلي: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2}{3x - 1}$

مثال 2: g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -2x + 5$. الدالة $\frac{1}{g}$ هي الدالة المعرفة على $]-\infty ; \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2} ; +\infty[$ كما يلي: $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{-2x + 5}$.

و) مركب دالتين

مثال تمهيدي: f هي الدالة التي ترفق بكل طول (بالأمتار)، المساحة (بالأمتار المربعة) لقطعة أرضية مستطيلة الشكل، طولها ضعف عرضها. من أجل $x > 0$ ، $f(x) = 2x^2$.

g هي الدالة التي ترفق بكل مساحة معطاة (بالأمتار المربعة) ثمن القطعة (بالدنانير) حيث ثمن المتر المربع هو 10 000 دينار. من أجل $\mathcal{A} > 0$ ، $g(\mathcal{A}) = 10\,000\,\mathcal{A}$.

يمكن التعبير مباشرة عن ثمن القطعة الأرضية ، بدلالة عرضها كما يلي:

$x \xmapsto{f} 2x^2 = \mathcal{A} \xmapsto{g} 10\,000\,\mathcal{A} = 20\,000\,x^2$.

الدالة $x \longmapsto 20\,000\,x^2$ ، المحصل عليها بتطبيق الدالة f ثم الدالة g تسمى الدالة المركبة من الدالتين f و g بهذا الترتيب.

تعريف: نسمي الدالة المركبة من الدالتين f و g بهذا الترتيب، الدالة gof المعرفة على المجال I كما يلي: $(gof)(x) = g[f(x)]$.

ملاحظات:
1. الرمز gof يقرأ g "دائرة" f .
2. الكتابة $(gof)(x)$ تقرأ g "دائرة" f لـ x .
3. الكتابة $g[f(x)]$ تقرأ g لـ f لـ x .

مثال 1: f ، g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x - 5$ و $g(x) = x^2 - 3$.

الدالة المركبة من f و g بهذا الترتيب هي الدالة gof المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(2x-5)$$

$$(2x-5)^2-3 = 4x^2-20x+22$$

أي $(gof)(x) = 4x^2-20x+22$

الدالة المركبة من g و f بهذا الترتيب هي الدالة fog المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^2-3)$$

$$2(x^2-3)-5 = 2x^2-11$$

أي $(fog)(x) = 2x^2-11$

ملاحظة: عموما، $gof \neq fog$

3. المنحنيات والتحويلات النقطية البسيطة

f دالة معرفة على المجال I و $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، k عدد حقيقي.

أ) إنشاء المنحنى الممثل للدالة $g: x \longmapsto f(x+k)$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة $g: x \longmapsto f(x+k)$ في المعلم السابق.

خاصية : المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة $g: x \longmapsto f(x+k)$ هو صورة المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f بالإنسحاب الذي شعاعه $-k\vec{i}$.

البرهان: x عنصر من I حيث $g(x) = f(x+k)$. إذن $g(x-k) = f(x)$

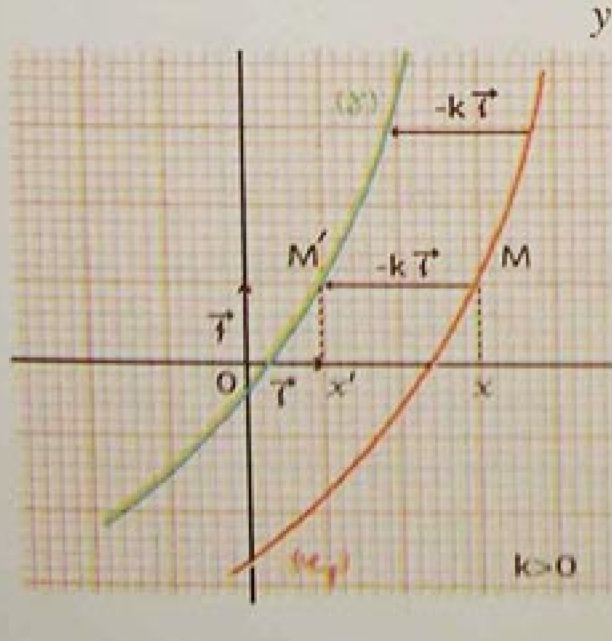
النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى $(\mathscr{C}_f)$ يعني $y = f(x)$

أي $y = g(x-k)$

$y = g(x-k)$ يعني النقطة $M'(x-k;y)$ تنتمي إلى $(\mathscr{C})$.

يكون إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ هما

$\begin{pmatrix} x-k-x \\ y-y \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -k \\ 0 \end{pmatrix}$



ينتج أن $\overrightarrow{MM'} = -k\vec{i}$

وبالتالي كل نقطة ´M من المنحنى $(\mathcal{C})$ هي صورة نقطة M من المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $-k\vec{i}$.

نستنتج أن المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة $x \longmapsto f(x+k)$ هو صورة المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f بالانسحاب الذي شعاعه $-k\vec{i}$

ب) إنشاء المنحنى الممثل للدالة $h: x \longmapsto f(x) + k$

(γ) المنحنى الممثل للدالة $h: x \longmapsto f(x) + k$ في المعلم السابق.

خاصية : المنحنى (γ) الممثل للدالة $h: x \longmapsto f(x) + k$ هو صورة المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.

البرهان: لتكن ´M نقطة من المنحنى (γ)

$M'(x' ; y') \in (\gamma)$ يعني $y' = h(x')$

يعني $y' = f(x') + k$

إذن $y' - k = f(x')$

ينتج أن النقطة $M(x ; y)$ حيث $x = x'$ و $y = y' - k$ تنتمي إلى $(\mathcal{C}_f)$

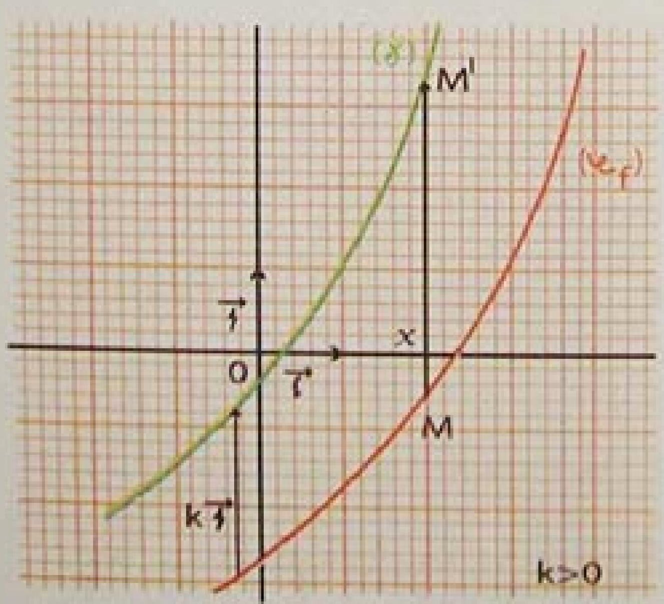
$x = x'$ و $y = y' - k$ إذن $x' - x = 0$

أي $\overrightarrow{MM'} = k\vec{j}$ $\quad y' - y = k$

أي أن ´M هي صورة M بالإنسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.

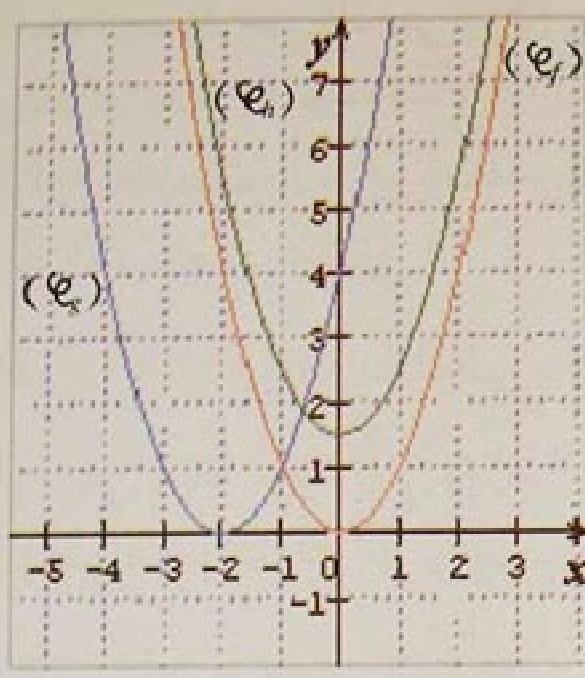
وبالتالي، كل نقطة ´M من المنحنى (γ) هي صورة نقطة M من المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.

نستنتج أن المنحنى (γ) الممثل للدالة $x \longmapsto f(x) + k$ هو صورة المنحنى



$(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f بالإنسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.

ملاحظة : عموما، الدالة f هي دالة مرجعية.



مثال : f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2$ و (H) هو القطع المكافئ الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

أ) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)^2$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ هو صورة $(\mathscr{C}_f)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.

ب) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$h(x) = x^2 + \frac{3}{2}$ و $(\mathscr{C}_h)$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ هو صورة $(\mathscr{C}_f)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\frac{3}{2}\vec{j}$.

جـ) إنشاء المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto k\,.\,f(x)$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto k\,.\,f(x)$

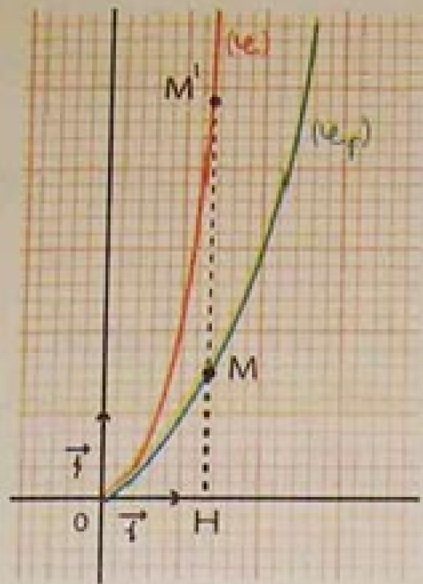
في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

قاعدة : نتحصل على المنحنى $(\mathscr{C})$ بضرب ترتيب كل نقطة من $(\mathscr{C}_f)$ بالعدد الحقيقي k .

فعلا : إذا كانت $H(x\,;0)$ ، $M(x\,;y)$ ، $M'(x\,;y')$ نقطا تنتمي إلى محور الفواصل و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمنحنى $(\mathscr{C})$ على الترتيب .

فإن $y = f(x)$ و $y' = k\,.\,f(x)$ (الشكل).

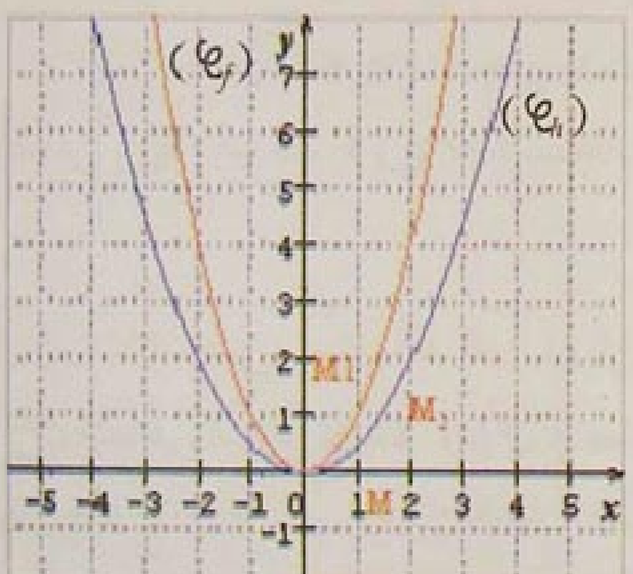
إذن $y' = k \cdot y$.
وبالتالي : نتحصل على M' بضرب ترتيب M
بالعدد الحقيقي k .
وهكذا يتم الحصول على المنحنى ($\mathcal{C}$)
الممثل للدالة $x \longmapsto k \cdot f(x)$
نقطة فنقطة بضرب ترتيب كل نقطة من المنحنى ($\mathcal{C}_f$)
الممثل للدالة f بالعدد الحقيقي k .



ملاحظة: إذا كان $k = -1$ فإن المنحنى ($\mathcal{C}$) هو نظير ($\mathcal{C}_f$) بالنسبة إلى محور الفواصل.

مثال 1: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2$.
($\mathcal{C}_f$) المنحني الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2} x^2$.
و($\mathcal{C}_h$) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

لتكن $M(x ; 0)$ نقطة من محور الفواصل و $M_1(x ; x^2)$ نقطة من ($\mathcal{C}_f$) .
$M_2(x ; \frac{1}{2} x^2)$ نقطة من ($\mathcal{C}_h$).
لدينا : $\overrightarrow{MM_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MM_1}$ ،
إذن M_2 منتصف $[MM_1]$.



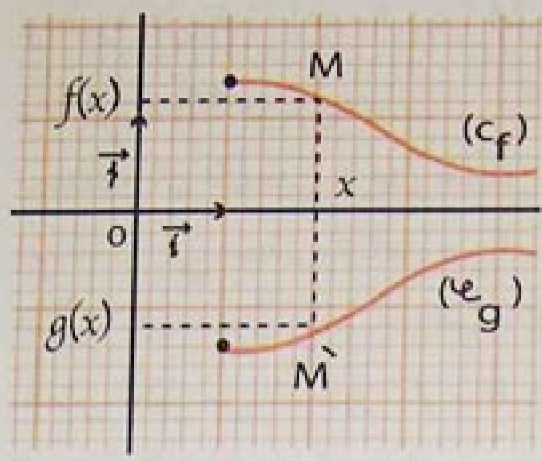
د) إنشاء المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto -f(x)$

f دالة معرفة على مجموعة I ؛ I جزء من $\mathbb{R}$.
($\mathcal{C}_f$) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
نعتبر الدالة g المعرفة على I كما يلي : $g(x) = -f(x)$ و ($\mathcal{C}_g$) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

خاصية: المنحنى ($\mathcal{C}_g$) هو نظير المنحنى ($\mathcal{C}_f$) بالنسبة إلى محور الفواصل .

البرهان: من أجل كل عدد حقيقي x من I ؛ النقطتان $M(x ; f(x))$

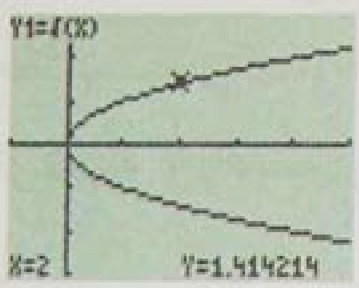
و $M'(x\,;\,-f(x))$ متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.



إذن نظيرة كل نقطة $M(x\,;f(x))$ من $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل تنتمي إلى $(\mathcal{C}_g)$.

ونظيرة كل نقطة $M'(x\,;\,g(x))$ من $(\mathcal{C}_g)$ بالنسبة إلى محور الفواصل تنتمي إلى $(\mathcal{C}_f)$.

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ و$(\mathcal{C}_g)$ متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل، أي $(\mathcal{C}_g)$ هو نظير $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل.



مثال : باستعمال حاسبة بيانية، نظهر على شاشتها المنحنيين الممثلين للدالتين f و g المعرفتين على $[0\,;5]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-\sqrt{x}$.

نلاحظ أن المنحنى الممثل للدالة g هو نظير المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة إلى محور الفواصل.

هـ) إنشاء المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto f(-x)$

f دالة معرفة على مجموعة I ؛ I جزء من $\mathbb{R}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدالة h المعرفة على I كما يلي : $h(x)=f(-x)$ ،

$(\mathcal{C}_h)$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

خاصية : المنحنى $(\mathcal{C}_h)$ هو نظير المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى محور التراتيب .

البرهان : من أجل كل عدد حقيقي x من I ؛ النقطتان $M(x\,;f(x))$ و $M'(-x\,;\,f(x))$ متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب.

نعلم أن $h(x)=f(-x)$ إذن $h(-x)=f(x)$

النقطة $M'(-x\,;\,h(-x))$ تنتمي إلى $(\mathcal{C}_h)$.

أي النقطة $M'(-x\,;f(x))$ تنتمي إلى $(\mathcal{C}_h)$.

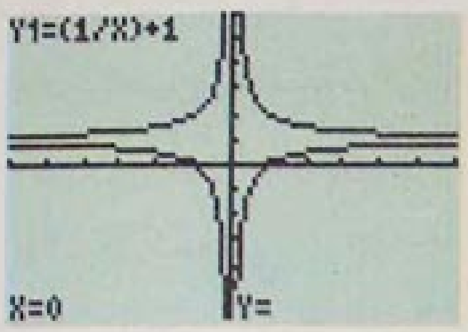
إذن نظيرة كل نقطة $M(x\,;f(x))$ من $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى محور التراتيب هي النقطة $M'(-x\,;f(x))$ من $(\mathcal{C}_h)$.

ونظيرة كل نقطة $M'(x\,;\,f(-x))$ من $(\mathcal{C}_h)$ بالنسبة إلى محور التراتيب هي النقطة $M(x\,;\,f(x))$ من $(\mathcal{C}_f)$.

نستنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_h)$ الممثل للدالة $x \longmapsto f(-x)$ هو نظير المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f في معلم متعامد من المستوى.

مثال : باستعمال حاسبة بيانية، نظهر على شاشتها المنحنى الممثل لكل من الدالتين f و h المعرفتين على المجموعة $[-5;0[\cup]0;5]$ كما يلي :

$f(x) = \frac{1}{x}+1$ و $h(x) = -\frac{1}{x}+1$.



نلاحظ أن المنحنى الممثل للدالة h هو نظير المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة إلى محور التراتيب.

4. عناصر تناظر منحنيات

I جزء من $\mathbb{R}$ و f دالة معرفة على I .

أ) تعريف :

> الدالة f زوجية على I إذا وفقط إذا كان :
>
> من أجل كل عدد حقيقي x من I ؛ $-x$ ينتمي إلى I و $f(-x) = f(x)$

مثال : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2+3$ زوجية (لأن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-x$ عدد حقيقي و $f(-x) = f(x)$).

ب) تعريف :

> الدالة f فردية على I إذا وفقط إذا كان :
>
> من أجل كل عدد حقيقي x من I ؛ $-x$ ينتمي إلى I و $f(-x) = -f(x)$

مثال : الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ فردية (لأن من أجل كل عدد حقيقي x؛ $-x$ عدد حقيقي و $g(-x) = -g(x)$) .

ملاحظة : توجد دوال ليست فردية وليست زوجية مثل الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = -2x+3$.

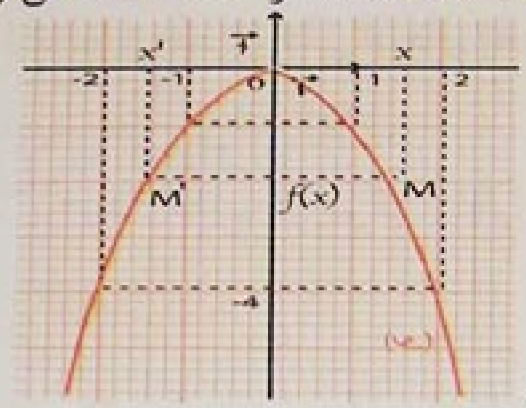
جـ) خواص:

f دالة معرفة على مجموعة I جزئية من $\mathbb{R}$.

و (ج) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

خاصية 1: إذا كانت الدالة f زوجية على I فإن المنحنى (ج) الممثل لها يقبل محور تناظر وهو محور تراتيب المعلم.

البرهان: f دالة زوجية؛ M نقطة من (ج) إحداثياها $(x ; f(x))$ و ´M نقطة من (ج) فاصلتها $-x$ وترتيبها $f(-x)$.



بما أن f زوجية فإن $f(-x) = f(x)$.

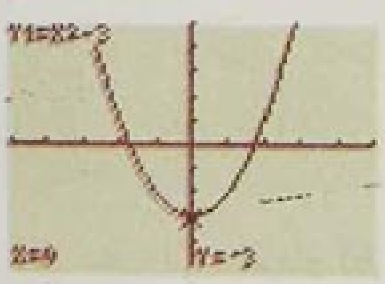
وبالتالي النقطتان M و ´M لهما فاصلتان متعاكستان وترتيبان متساويان،

إذن M و ´M متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب.

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من I ، النقطتان $M(x ; f(x))$ و $M'(-x ; f(-x))$ من (ج) متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب ؛

وبالتالي، محور تراتيب المعلم هو محور تناظر المنحنى (ج) الممثل للدالة f .

مثال: باستعمال حاسبة بيانية، نظهر على شاشتها المنحنى الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[-4 ; 4]$ كما يلي: $f(x) = x^2 - 3$



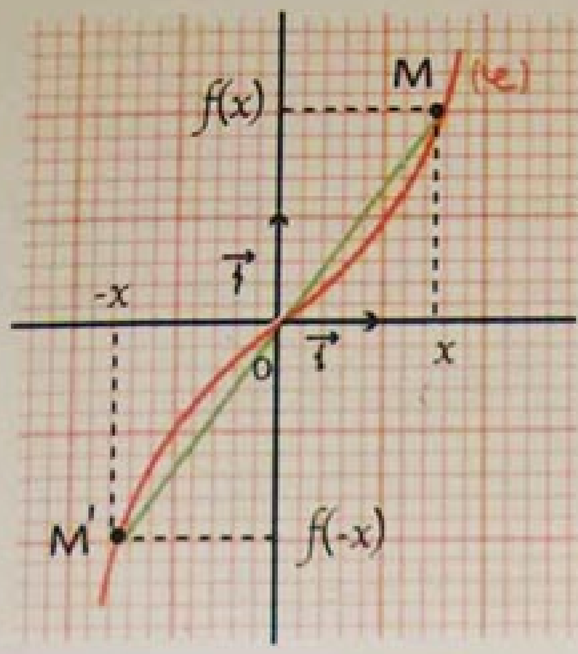
نلاحظ أن محور تراتيب المعلم هو محور تناظر منحنى الدالة f.

خاصية 2: إذا كانت الدالة f فردية على I فإن المنحنى (ج) الممثل لها يقبل مركز تناظر وهو مبدأ المعلم.

البرهان: f دالة فردية؛ M نقطة من (ج) إحداثياها $(x ; f(x))$ و ´M نقطة من (ج) فاصلتها $-x$ وترتيبها $f(-x)$.

بما أن f فردية فإن $f(-x) = -f(x)$.

وبالتالي النقطتان M و ´M لها فاصلتان متعاكستان وترتيبان متعاكسان،



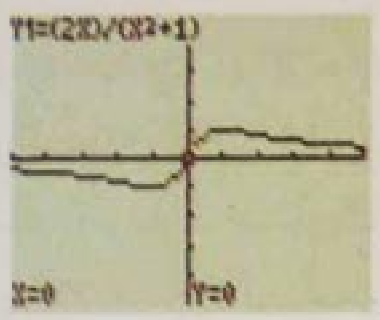
إذن M و ´M متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من I ،

النقطتان $M(x\,;f(x))$ و $M'(-x\,;f(-x))$ من $(\mathscr{C})$ متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

وبالتالي، مبدأ المعلم هو مركز تناظرا لمنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f .

مثال: على شاشة حاسبة بيانية، نظهر المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[-4\,;4]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.



نلاحظ أن مبدأ المعلم هو مركز تناظرا لمنحنى $(\mathscr{C})$.

د) محور تناظر منحن

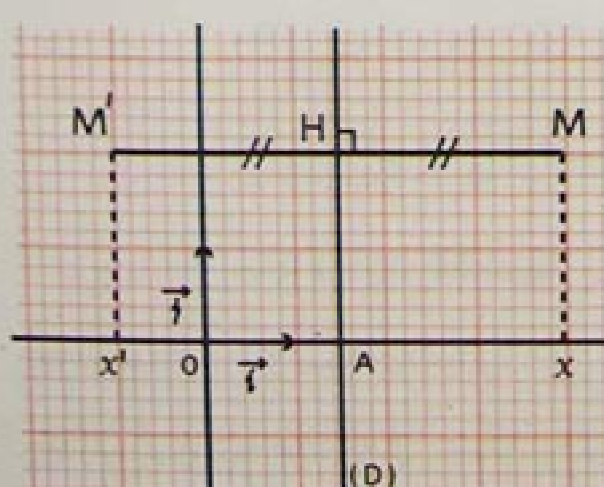
I جزء من $\mathbb{R}$ ، f دالة معرفة على I .

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $x=a$ ؛ a عدد حقيقي.

مبرهنة: المستقيم (D) ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر المنحنى $(\mathscr{C})$ يعني، من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x=a+h$ ، العدد $a-h$ ينتمي إلى I و $f(a+h)=f(a-h)$.

ملاحظة: بعد حساب العدد $f(a+h)$ نحسب العدد $f(a-h)$ بتعويض h بالعدد $-h$ في عبارة $f(a+h)$.



البرهان:

- نفرض أن المستقيم (D) محور تناظرا لمنحنى $(\mathscr{C})$.
- نبرهن أن من أجل كل عدد حقيقي x من I ، حيث $x=a+h$ ، العدد $a-h$ ينتمي إلى I و $f(a+h)=f(a-h)$.

من أجل كل نقطة $M(x\,;y)$ من $(\mathscr{C})$،

نظيرتها $M'(x'\,;y')$ تنتمي إلى $(\mathscr{C})$ وتحقق: $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}$ حيث H هي المسقط

العمودي للنقطة M على (D) .

إحداثيات النقط $H(a\,;f(x))$ ؛ $M(x\,;f(x))$ ؛ $M'(x'\,;f(x'))$ تحقق العلاقتين التاليتين :

$\frac{x'+x}{2}=a$ و $f(x')=f(x)$.

أي $x'=2a-x$ و $f(x')=f(x)$.

بوضع $x=a+h$ ينتج أن $x'=a-h$ و $f(a+h)=f(a-h)$.

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x=a+h$ ، العدد $a-h$ ينتمي إلى I و $f(a+h)=f(a-h)$.

العكس: نفرض أن من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x=a+h$ ، العدد $a-h$ ينتمي إلى I و $f(a+h)=f(a+h)$.

بوضع $x=a+h$ و $x'=a-h$ نتحصل على $f(x)=f(a+h)$ و $f(x')=f(a-h)$.

ينتج أن $a=\frac{x+x'}{2}$ و $f(x)=f(x')$.

إذن النقطتان $M(x\,;f(x))$ ؛ $M'(x'\,;f(x'))$ من المنحنى $(\mathscr{C})$ متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $x=a$. وبالتالي، المستقيم (D) هو محور تناظر لمنحنى $(\mathscr{C})$.

هـ) مركز تناظر منحن

I جزء من $\mathbb{R}$ ، f دالة معرفة على I .

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

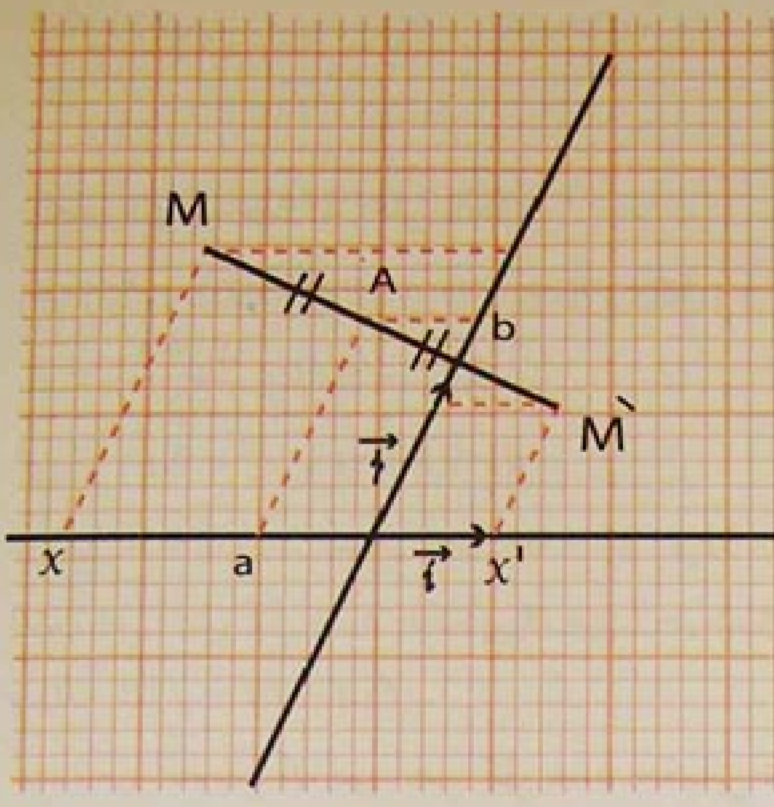
$A(a\,;b)$ نقطة من المستوي .

مبرهنة : النقطة $A(a\,;b)$ مركز تناظر المنحنى $(\mathscr{C})$ يعني من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x=a+h$ ، العدد $a-h$ ينتمي إلى I و $b=\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}$.

البرهان :

– لتكن $M(x\,;y)$ نقطة من $(\mathscr{C})$، $M'(x'\,;y')$ نظيرتها بالنسبة إلى النقطة $A(a\,;b)$ M' هي أيضا نقطة من $(\mathscr{C})$ لأن A مركز تناظر المنحنى $(\mathscr{C})$.

إذن $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}$



وبالتالي $\begin{cases} x' - x = 2(a - x) \\ y' - y = 2(b - y) \end{cases}$

أي $\begin{cases} x' + x = 2a \\ y' + y = 2b \end{cases}$

إذا كان $x = a + h$ فإن $x' = a - h$

و $y' + y = 2b$.

بما أن $y = f(x)$ و $y' = f(x')$

فإن $f(x) + f(x') = 2b$

أي $b = \dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2}$.

ينتج أن، إذا كانت $A(a\,;b)$ مركز تناظر المنحنى (ج)،

فإن من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x = a + h$ ، العدد $a - h$ ينتمي إلى I

و $b = \dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2}$.

العكس: نفرض أن من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x = a + h$ ، العدد $a - h$ ينتمي إلى I و $b = \dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2}$.

بوضع $x' = a - h$ و $f(a+h) = f(x)$ و $f(a-h) = f(x')$ ،

يكون $x' + x = 2a$ و $f(x) + f(x') = 2b$.

لتكن $M(x\,;f(x))$ و $M'(x'\,;f(x'))$ نقطتين من المستوى.

ينتج أن النقطتين M و M' متناظرتان بالنسبة إلى النقطة $A(a\,;b)$.

إذن: كل نقطتين $M(a+h\,;f(a+h))$ و $M'(a-h\,;f(a-h))$ من (ج) متناظرتان بالنسبة إلى النقطة $A(a\,;b)$.

وبالتالي النقطة $A(a\,;b)$ مركز تناظر المنحنى (ج).

1- الحل بيانيا لمعادلات من الشكل $x^3 = k$

طريقة:

k عدد حقيقي.

لحل معادلة من الشكل $x^3 = k$، بيانيا،

- نرسم المنحنى الممثل لكل من الدالتين $x \longmapsto x^3$ و $x \longmapsto k$ في نفس المعلم.

وحلول المعادلة $x^3 = k$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنيين.

تمرين: حل بيانيا كلا من المعادلات التالية: $x^3 = 1$ ؛ $x^3 = 0$ ؛ $x^3 = -8$

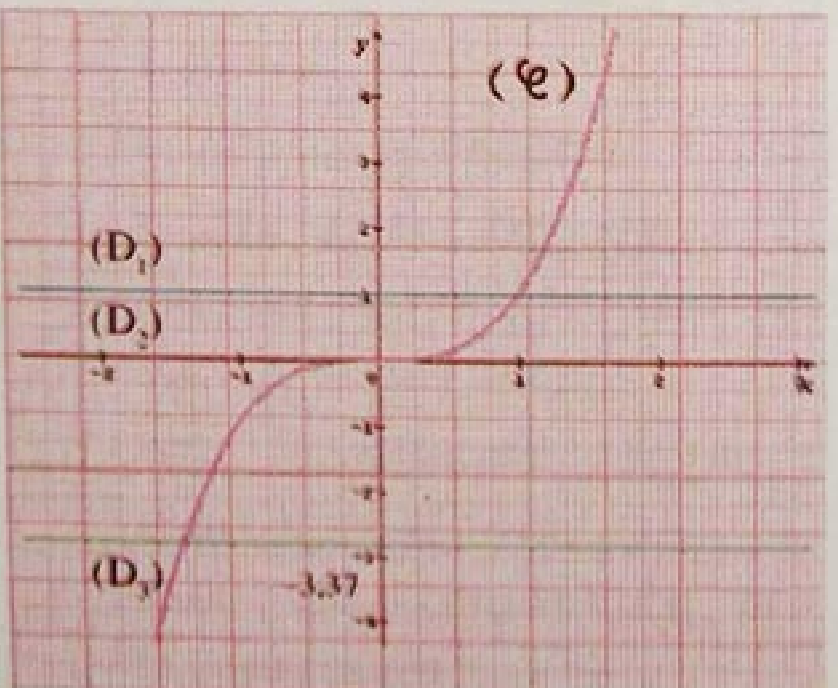
حل: نرسم في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

($\|\vec{j}\| = 1$ ؛ $\|\vec{i}\| = 2$) المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة $x \longmapsto x^3$ والمستقيمات (D_1)، (D_2)، (D_3) الممثلة للدوال $x \longmapsto 1$ ؛ $x \longmapsto 0$ ؛ $x \longmapsto -8$ على الترتيب.

1. المستقيم (D_1) يقطع $(\mathscr{C})$ في نقطة واحدة فاصلتها 1.
إذن المعادلة $x^3 = 1$ تقبل حلاً واحدًا في $\mathbb{R}$ هو 1.

2. المستقيم (D_2) (وهو محور الفواصل) يقطع $(\mathscr{C})$ في نقطة واحدة فاصلتها 0.
إذن المعادلة $x^3 = 0$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو 0.

3. المستقيم (D_3) يقطع $(\mathscr{C})$ في نقطة واحدة فاصلتها -2 .
إذن المعادلة $x^3 = -8$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو -2 .



2- حل معادلات من الشكل $x^3 = k$ ، باستعمال حاسبة بيانية

طريقة: k عدد حقيقي.

لحل معادلة من الشكل $x^3 = k$ ، باستعمال حاسبة بيانية،

– نرسم المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto x^3$ والمستقيم الممثل للدالة $x \longmapsto k$ على شاشة الحاسبة بواسطة اللمسة GRAPH .

– نضغط على اللمسة TRACE ثم نضع الزالق على نقطة من نقط التقاطع؛

– بواسطة اللمسة ZOOM ، نختار البرنامج 2:Zoom In. ثم نضغط على اللمسة ENTER .

– نواصل تحريك الزالق بجوار نقطة التقاطع للحصول على القيمة المقربة (أو التامة) الأفضل لحل المعادلة.

نكرر نفس العمل بالنسبة إلى نقط التقاطع الأخرى إن وجدت.

تمرين: باستعمال حاسبة بيانية، حل كلا من المعادلتين التاليتين: $x^3 = 4$ ؛ $x^3 = -2$.

حل: (تعطى الحلول التامة أو المقربة).

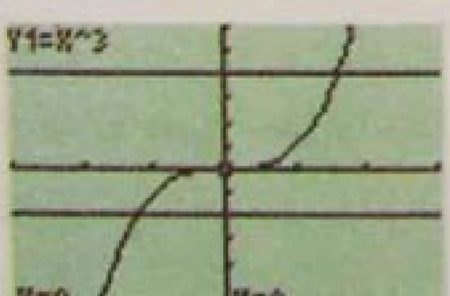
1. نرسم المنحنى الممثل للدالة "مكعب".
2. نرسم المستقيمين حيث معادلتاهما $y = 4$ ؛ $y = -2$.
3. نضغط على اللمسة TRACE و نضع الزالق على إحدى نقطتي تقاطع المنحنى مع المستقيمين.
4. نختار البرنامج 2:Zoom In. بواسطة اللمسة ZOOM .
5. نضغط على اللمسة ENTER ونقرأ قيمة مقربة لفاصلة نقطة التقاطع.

بتكرار نفس العمل بالنسبة إلى نقطة التقاطع الثانية،

نتوصل إلى النتيجتين التاليتين:

العدد 1,59 هو القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالزيادة لحل المعادلة $x^3 = 4$.

العدد 1,27- هو القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالزيادة لحل المعادلة $x^3 = -2$.



3- الحل بيانيا لمتراجحات من الشكل $x^3 \geq k$ أو $x^3 \leq k$

طريقة: k عدد حقيقي.

لحل متراجحة من الشكل $x^3 \geq k$ أو $x^3 \leq k$ ، بيانيا،

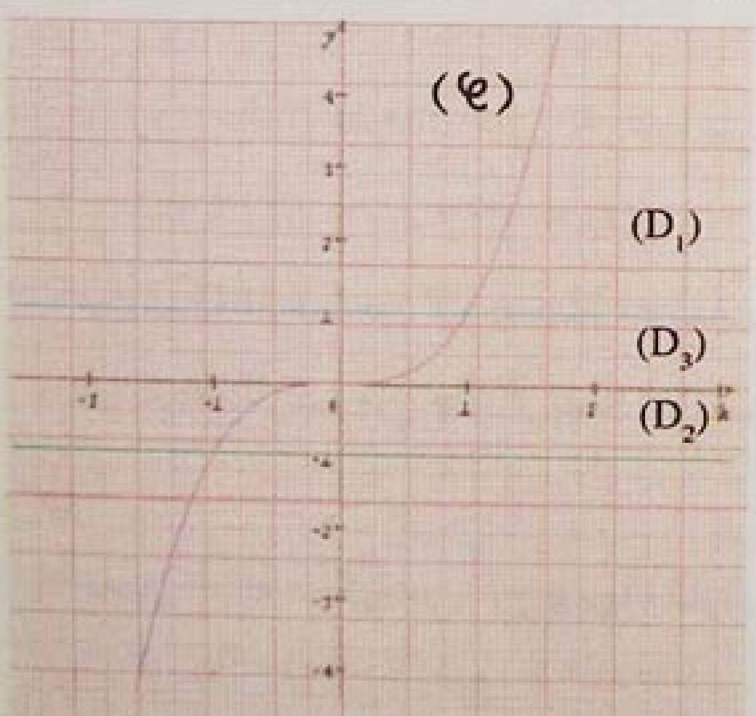
- نرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين $x \longmapsto x^3$ و $x \longmapsto k$ في نفس المعلم ثم ندرس الأوضاع النسبية لهما.
- مجموعة حلول المتراجحة $x^3 \geq k$ هي مجموعة فواصل نقط المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto x^3$ الواقعة فوق المستقيم الممثل للدالة $x \longmapsto k$ أو عليه.
- مجموعة حلول المتراجحة $x^3 \leq k$ هي مجموعة فواصل نقط المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto x^3$ الواقعة تحت المستقيم الممثل للدالة $x \longmapsto k$ أو عليه.

تمرين: حل بيانيا كلا من المتراجحات التالية: $x^3 \geq 1$ ؛ $x^3 \leq -1$ ؛ $x^3 > 0$

حل: نرسم في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

($\|\vec{j}\| = 1$ ؛ $\|\vec{i}\| = 2$) المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة $x \longmapsto x^3$ والمستقيمات (D_1)، (D_2)، (D_3) الممثلة للدوال $x \longmapsto 1$ ؛ $x \longmapsto -1$ ؛ $x \longmapsto 0$ على الترتيب:

1. المستقيم (D_1) يقطع المنحنى $(\mathscr{C})$ في نقطة واحدة فاصلتها 1.



مجموعة نقط المنحنى $(\mathscr{C})$ التي تراتيبها أكبر أو يساوي 1 هي مجموعة نقط المنحنى $(\mathscr{C})$ التي تقع على المستقيم (D_1) أو فوقه.

فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة $x^3 \geq 1$.

إذن مجموعة حلول المتراجحة $x^3 \geq 1$ هي المجال $[1 ; +\infty[$

2. المستقيم (D_2) يقطع المنحنى $(\mathscr{C})$ في نقطة واحدة فاصلتها 1-.

مجموعة نقط المنحنى $(\mathscr{C})$ التي تراتيبها أصغر أو يساوي 1-

هي مجموعة نقط المنحنى $(\mathscr{C})$ التي تقع على المستقيم (D_1) أو تحته.
فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة $x^3 \leq -1$.
إذن مجموعة حلول المتراجحة $x^3 \leq -1$ هي المجال $]-\infty ; -1]$.

3. المستقيم (D_3) (وهو محور الفواصل) يقطع المنحنى $(\mathscr{C})$ في نقطة واحدة فاصلتها 0.
مجموعة نقط المنحنى $(\mathscr{C})$ التي تراتيبها أكبر تماما من 0 هي مجموعة نقط المنحنى $(\mathscr{C})$ التي تقع فوق المستقيم (D_3) .
فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة $x^3 > 0$.
إذن مجموعة حلول المتراجحة $x^3 > 0$ هي المجال $]0 ; +\infty[$.

4- تعيين الدالة المركبة من دالتين

طريقة:

f و g دالتان معرفتان على نفس المجموعة I ؛ I جزء من $\mathbb{R}$.
– لتعيين الدالة gof المركبة من f و g بهذا الترتيب، نحسب $g[f(x)]$.
– لحساب $g[f(x)]$ ، نضع $y = f(x)$ ونحسب $g(y)$ ثم نعوض y بالعدد $f(x)$ في عبارة $g(y)$.
تكون الدالة المركبة من f و g بهذا الترتيب هي الدالة المعرفة على I
بـ: $gof : x \longmapsto g[f(x)]$.

تمرين: f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = -x^2 + 3 \quad ; \quad f(x) = 3x - 2$$

– عين الدالة المركبة من f و g بهذا الترتيب.
– عين الدالة المركبة من g و f بهذا الترتيب.

حل:

1. تعيين الدالة المركبة من f و g بهذا الترتيب.
لدينا $f(x) = 3x - 2$ ، نضع $y = 3x - 2$
حساب $g(y)$.
لدينا $g(y) = -y^2 + 3$
إذن $g(y) = -(3x-2)^2 + 3$

$$= -(9x^2 - 12x + 4) + 3$$
$$= -9x^2 + 12x - 1$$
$$= g[f(x)]$$

ينتج أن الدالة المركبة من f و g بهذا الترتيب هي الدالة gof المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$(gof)(x) = -9x^2 + 12x - 1$.

2. تعيين الدالة المركبة من g و f بهذا الترتيب.

لدينا: $g(x) = -x^2 + 3$. نضع $y = -x^2 + 3$

حساب $f(y)$.

لدينا: $f(y) = 3y - 2$

إذن : $f(y) = 3y - 2 = 3(-x^2 + 3) - 2 = -3x^2 + 7$
$$= f[g(x)]$$

ينتج أن الدالة المركبة من g و f بهذا الترتيب هي الدالة fog المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$(fog)(x) = -3x^2 + 7$.

5- تفكيك دالة

طريقة: لتفكيك دالة، نحدد الدوال المرجعية التي تتركب منها هذه الدالة (الدوال التآلفية؛ الدالة "مربع" ؛ الدالة "مقلوب" ؛ الدالة "جذر تربيعي" ؛ ...) ثم نركب هذه الدوال باستعمال العمليات المناسبة .

ملاحظة : نعبر عن هذا التفكيك بالتمثيل الموالي :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & u(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g[u(x)] \end{tikzcd}$$

يجب التحقق من أن : إذا كان x عنصرا من مجموعة تعريف u .
فإن $u(x)$ عنصر من مجموعة تعريف g .

تمرين 1 : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x^2 - 1$
- عين تفكيكا للدالة f .

حلّ : - نعتبر الدالتين $u : x \longmapsto x^2$ ، $g : x \longmapsto 2x - 1$
المعرفتين على $\mathbb{R}$.

لدينا : $(gou)(x)= g [u(x)] = g(x^2) = 2x^2 - 1 = f(x)$

نكتب : $gou = f$

تعيين الدالتين u و g يعني تفكيك الدالة f إلى الدالتين u و g بهذا الترتيب.

تمرين 2 : f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x+3}$

عين تفكيكا للدالة f.

حل : نعتبر الدالتين $g : x \longmapsto x + 3$ و $h : x \longmapsto \frac{1}{x}$

المعرفتين على المجال $]0 ; +\infty[$.

لدينا : $(hog)(x)= h [g(x)] = h(x + 3) = \frac{1}{x+3} = f(x)$

نكتب : $hog = f$

تعين الدالتين g و h يعني تفكيك الدالة f إلى الدالتين g و h بهذا الترتيب.

6- دراسة إشارة دالة

طريقة :

> f دالة معرفة على مجموعة I . I جزء من $\mathbb{R}$. لدراسة إشارة f على المجموعة I ، ندرس إشارة $f(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من I .

تمرين : أدرس إشارة كل من الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = 5x + 2$ و $g(x) = -2x + 5$

حل : - دراسة إشارة f على $\mathbb{R}$ يعني تعيين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $5x + 2 = 0$.

أي $x = -\frac{2}{5}$

$f(x) > 0$ إذا وفقط إذا كان $5x + 2 > 0$.

أي $x \in]-\frac{2}{5} ; +\infty[$

$f(x) < 0$ إذا وفقط إذا كان $5x + 2 < 0$

أي $x \in]-\infty ; -\frac{2}{5}[$.

إشارة $f(x)$ ملخصة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

ينتج أن الدالة f موجبة على المجال $]-\frac{2}{5} ; +\infty[$

وسالبة على المجال $\left]-\infty\,;-\frac{2}{5}\right[$.

– دراسة إشارة g على $\mathbb{R}$ يعني تعيين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا : $g(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $-2x+5=0$

أي $x=\frac{5}{2}$

$g(x)>0$ إذا وفقط إذا كان $-2x+5>0$

أي $x\in\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$

$g(x)<0$ إذا وفقط إذا كان $-2x+5<0$

أي $x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$.

إشارة $g(x)$ ملخصة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

ينتج أن الدالة g موجبة على المجال $\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right]$

وسالبة على المجال $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.

7– رسم المنحنى الممثل للدالة $x\longmapsto|f(x)|$

طريقة :

f دالة معرفة على مجموعة I جزئية من $\mathbb{R}$.

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

g الدالة المعرفة على المجموعة I كما يلي : $g(x)=|f(x)|$

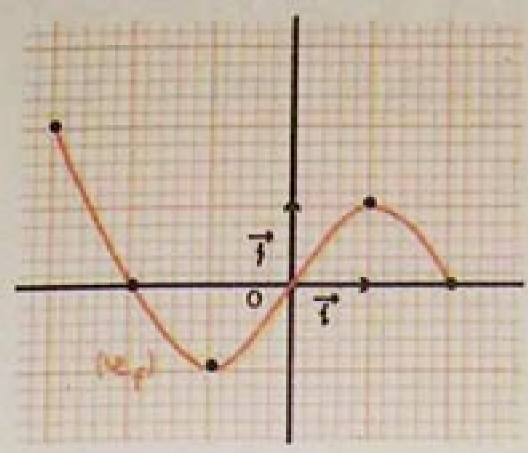
$(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

– لرسم المنحنى الممثل للدالة g ، نعبر عن $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة، ويكون :– $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_f)$ منطبقين في المجالات التي يكون فيها $f(x)\geq 0$

– $(\mathscr{C}_g)$ هو نظير $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيها $f(x)\leq 0$.

ملاحظة: $|f(x)| = f(x)$ إذا كان $f(x) \geq 0$

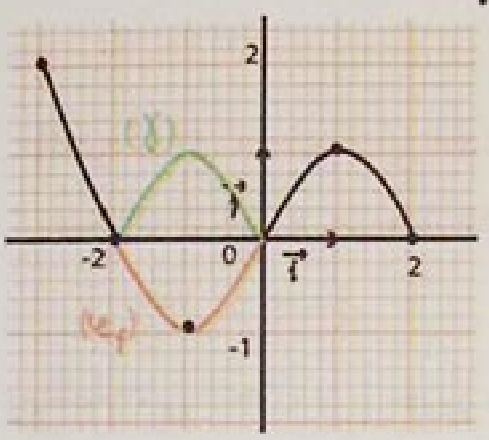
و $|f(x)| = -f(x)$ إذا كان $f(x) \leq 0$.



تمرين : $(\mathscr{C}_f)$ هو المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[-3 ; 2]$ ، في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل).

– أعد هذا الشكل وارسم المنحنى (γ) الممثل للدالة g حيث $g(x) = |f(x)|$.

حل: $f(x) \geq 0$ على كل من المجالين $[-3 ; -2]$ و $[0 ; 2]$.



إذن (γ) و $(\mathscr{C}_f)$ منطبقان.

– $g(x) \leq 0$ على المجال $[-2 ; 0]$.

إذن (γ) هو نظير $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل.

– على الشكل نلاحظ أن $(\mathscr{C}_f)$ هو المنحنى الممثل باللون الأحمر و(γ) هو المنحنى الممثل باللون الأخضر.

8- إثبات أن مستقيما هو محور تناظر منحن

طريقة: f دالة معرفة على مجموعة I جزئية من $\mathbb{R}$.

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $x = a$ ؛ a عدد حقيقي.

لإثبات أن المستقيم (D) ذا المعادلة $x = a$ هو محور تناظر المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f ، يكفي إثبات أن:

من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x = a + h$ ، العدد $a - h$ ينتمي إلى I و $f(a - h) = f(a + h)$.

تمرين : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$

و$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $x = -\frac{5}{4}$ هو محور تناظر المنحنى $(\mathscr{C})$.

حلّ : – من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x=-\frac{5}{4}+h$ ، العدد $-\frac{5}{4}-h$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

– نقارن بين $f\left(-\frac{5}{4}+h\right)$ و $f\left(-\frac{5}{4}-h\right)$.

لدينا $f\left(-\frac{5}{4}+h\right)=2\left(-\frac{5}{4}+h\right)^2+5\left(-\frac{5}{4}+h\right)-1=2h^2-\frac{33}{8}$

إذن $f\left(-\frac{5}{4}+h\right)=2h^2-\frac{33}{8}$

ولدينا أيضا $f\left(-\frac{5}{4}-h\right)=2\left(-\frac{5}{4}-h\right)^2+5\left(-\frac{5}{4}-h\right)-1=2h^2-\frac{33}{8}$

إذن $f\left(-\frac{5}{4}-h\right)=2h^2-\frac{33}{8}$

ينتج أن $f\left(-\frac{5}{4}-h\right)=f\left(-\frac{5}{4}+h\right)$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x=-\frac{5}{4}+h$ ، العدد $-\frac{5}{4}-h$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و $f\left(-\frac{5}{4}-h\right)=f\left(-\frac{5}{4}+h\right)$

نستنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة $x=-\frac{5}{4}$ هو محور تناظر المنحنى (ج) الممثل للدالة f .

9- إثبات أن نقطة هي مركز تناظر منحن

طريقة :

f دالة معرفة على مجموعة I جزئية من $\mathbb{R}$.

(ج) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$A(a;b)$ نقطة من المستوي.

لإثبات أن النقطة $A(a;b)$ هي مركز تناظر المنحنى (ج) ، يكفي إثبات أن:

من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x=a+h$ ؛ العدد $a-h$ ينتمي إلى I و $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$

تمرين : f هي الدالة المعرفة على المجموعة $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

أثبت أن النقطة $A(1 ; 3)$ مركز تناظر المنحنى $(\mathscr{C})$.

حل : – من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ حيث $x = 1 + h$ ،

العدد $1 - h$ ينتمي إلى $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ ، أي $h \neq 0$.

حساب العدد $\dfrac{f(1+h) + f(1-h)}{2}$

لدينا $f(1+h) = \dfrac{3(1+h)+2}{(1+h)-1} = \dfrac{3h+5}{h}$

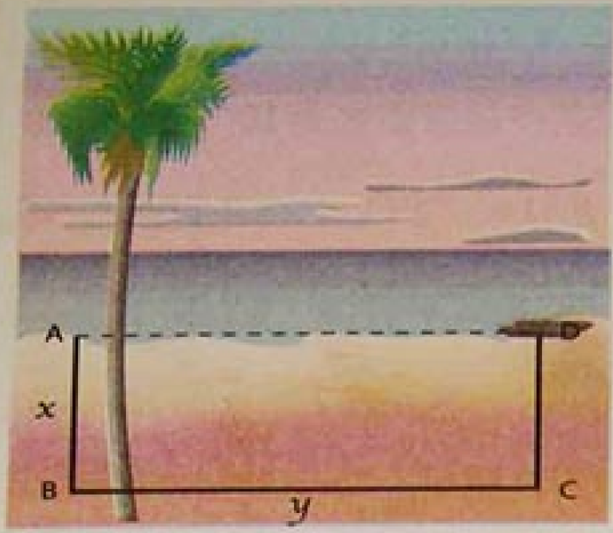
$$f(1-h) = \frac{3(1-h)+2}{(1-h)-1} = \frac{-3h+5}{-h} = \frac{3h-5}{h}$$

$$\frac{f(1+h) + f(1-h)}{2} = \frac{\frac{3h+5}{h} + \frac{3h-5}{h}}{2} = \frac{6h}{2h} = 3$$ (لأن $h \neq 0$).

إذن : $\dfrac{f(1+h) + f(1-h)}{2} = 3$

نستنتج أن النقطة $A(1 ; 3)$ مركز تناظر المنحنى $(\mathscr{C})$.

مسألة 1



لتحديد حيز مستطيل الشكل للاصطياف على شاطئ البحر، ثُبِّت حبل طوله 40 مترًا بواسطة أربعة أوتاد في المواضع A، B، C، D على أن يكون طرفا الحبل هما A، D (كما في الشكل).

نفرض أن $AB = x$ ، $BC = y$ ،

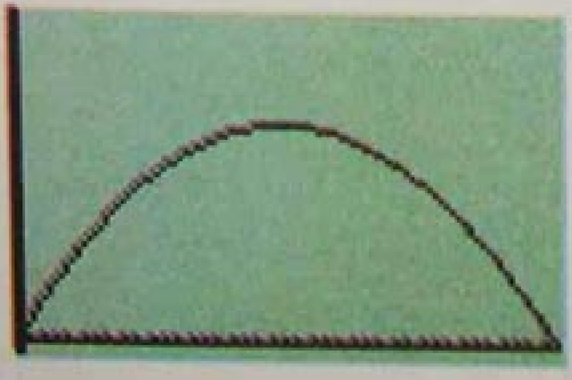
1. اثبت أن، من أجل كل عدد من المجال $[0;20]$ ،
المساحة $f(x)$ للحيز يعبر عنها بالدستور $f(x) = -2x^2 + 40x$

2. أ) أظهر على شاشة حاسبة بيانية، المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f.
– ثم حدِّد القيمة العظمى β للدالة f على المجال $[0;20]$.
– من أجل أية قيمة α ، تبلغ $f(x)$ هذه القيمة العظمى ؟
ب) أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = -2(x-\alpha)^2 + \beta$.

3. أ) g هي الدالة المعرفة كما يلي : $g(x) = -2x^2$.
و $(\mathscr{C}_g)$ هو المنحنى الممثل لها في معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
– ماهو التحويل النقطي الذي يحول $(\mathscr{C}_g)$ إلى $(\mathscr{C}_f)$ ؟
– استنتج إتجاه تغير الدالة f.
ب) ماذا تستنتج بالنسبة إلى عرض وطول الحيز؟

حل:

1. نعلم أن $2x + y = 40$ (طول الحبل) حيث $x \in [0 ; 20]$.
إذن $y = 40 - 2x$
مساحة الحيز هي $f(x)$ حيث $f(x) = x.y$
وبالتالي $f(x) = x.(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$
إذن من أجل x من $[0 ; 20]$ ؛ $f(x) = -2x^2 + 40x$



2. أ) – إظهار، على شاشة حاسبة بيانية، المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f.
– القيمة العظمى β هي 199,99909
– تبلغ $f(x)$ هذه القيمة من أجل

$x = 9,978723$:أي $\alpha = 9,978723$ ؛ بعد التدوير إلى الوحدة ، نجد

$\beta = 200$ و $\alpha = 10$.

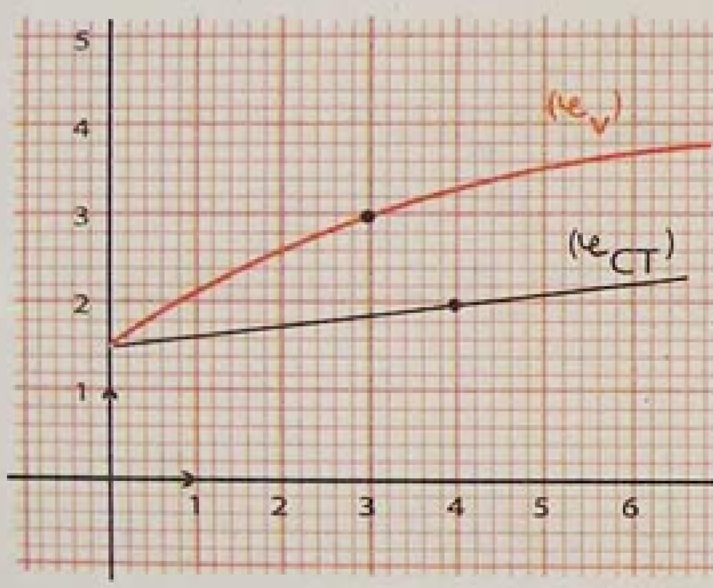
ب) $f(x) = -2(x-10)^2 + 200$

3. أ) التحويل النقطي الذي يحول $(\mathscr{C}_g)$ إلى $(\mathscr{C}_f)$ هو الإنسحاب الذي شعاعه $10\vec{i} + 200\vec{j}$

– الدالة f متزايدة على المجال $[0;10]$ ومتناقصة على $[10;20]$. (من القراءة البيانية).

ب) من أجل $x = 10$ ؛ $y = 20$ (عرض وطول الحيز) يكون للحيز أكبر مساحة.

مسألة 2



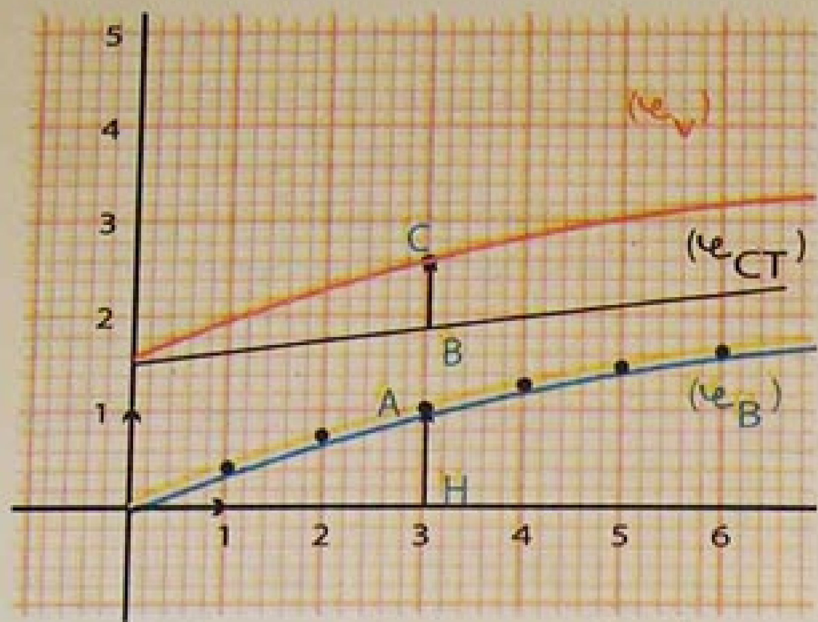
CT هي الدالة التي ترفق بكل كمية x (مقدرة بالأمتار) من بضاعة منتجة، كلفتها (بآلاف الدنانير)، $(\mathscr{C}_{CT})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

V هي الدالة التي ترفق بكل كمية x (مقدرة بالأمتار) من بضاعة مبيعة، ثمن بيعها (بآلاف الدنانير). $(\mathscr{C}_V)$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق (الشكل).

1. عين، بيانيا، بالتقريب إلى 100 دينار، الربح B الناتج عن ثلاثة أمتار مبيعة.

2. لتكن B الدالة التي ترفق بكل كمية x مبيعة الربح $B(x)$ الناتج.

– انشئ نقطة فنقطة المنحنى $(\mathscr{C}_B)$ للدالة B في المعلم السابق.



حلّ :

1. من القراءة البيانية، ينتج أن :
$V(3) \simeq 2{,}9$ ، $CT(3) \simeq 1{,}8$.
من أجل ثلاثة أمتار مبيعة، يكون الربح قريبا من $2{,}9 - 1{,}8$ أي $1{,}1$ أي 1100 دينار.

2. نعلم أن $V(x) = CT(x) + B(x)$
أي $B(x) = V(x) - CT(x)$ ..... (1)

لتكن C نقطة من المنحنى $(\mathscr{C}_V)$ ، B نقطة من المنحنى $(\mathscr{C}_{CT})$.
و H نقطة من محور الفواصل حيث يكون لهذه النقط نفس الفاصلة x .

لتكن A نقطة من $(\mathscr{C}_B)$ فاصلتها x .

من العلاقة (1) ، ينتج أن $y_A = y_C - y_B$

أي $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$

إذن يمكن إنشاء النقطة A إذا علمت النقط H ، B ، C .

لإنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_B)$ نقطة فنقطة، ننشئ نقط $(\mathscr{C}_B)$ التي فواصلها أعداد صحيحة ثم نصل فيما بينها.

1 صحيح أو خاطئ

1. الدالة "مكعب" متناقصة على المجال $]-\infty ; +\infty[$.

2. الدالة "مكعب" فردية على المجال $]-\infty ; +\infty[$.

3. في معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، محور التراتيب هو محور تناظر منحنى الدالة "مكعب".

4. إذا كان x عددا حقيقيا غير منعدم حيث $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x}$ فإن $-f(x) = -\frac{1}{x} + 5x^2$

5. إذا كان x عددا حقيقيا غير منعدم حيث $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ فإن $f(x).g(x) = \frac{x+2}{x}$

6. إذا كان x عددا حقيقيا غير منعدم حيث $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ فإن $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+1}{x}$

7. في معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، التمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = x^3 + 2$ هو صورة منحنى الدالة "مكعب" بالإنسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$.

8. في معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، التمثيل البياني للدالة g حيث $g(x) = (x+2)^3$ هو صورة منحنى الدالة "مكعب" بالإنسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.

9. الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ معرفة على $\mathbb{R}$.

الدالة "مكعب"

2 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x^3$$

أُحسب صورة كل عدد من الأعداد: $-\sqrt{3}$ ؛ $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ؛ 0 ؛ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $\sqrt{3}$ بالدالة f.

3 f هي الدالة "مكعب".

أكمل الجدول التالي:

x	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3
$f(x)$						

4 أكمل الجمل التالية:

إذا كان $x > 2$ فإن x^3 ....

إذا كان $x < -3$ فإن x^3 ....

إذا كان $1 \leq x \leq 3$ فإن .... x^3 ....

إذا كان $x > -1$ فإن x^3 ....

5 عين حصرا للعدد x^3 في كل حالة من الحالات التالية: $x \in [-2 ; 1]$ ؛ $x \in]2 ; \sqrt{5}[$ ؛ $x \in [-3{,}5 ; 2{,}8]$ ؛ $x \in]-1 ; -\frac{1}{2}]$.

6 1. عين أصغر عدد طبيعي n حيث:

إذا كان $x \geq n$ فإن $x^3 \geq 10^6$.

2. عين أصغر عدد طبيعي n حيث:

إذا كان $x \geq n$ فإن $x^3 \geq -10^6$.

7 f هي الدالة "مكعب" .

1) أرسم المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

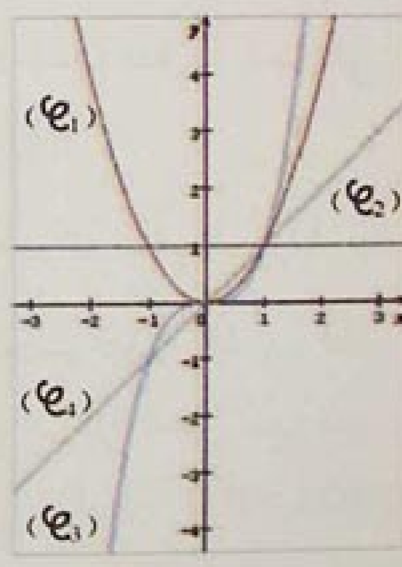
2) حل بيانيا كل معادلة من المعادلات التالية : $x^3 = 2$ ؛ $x^3 = -3$ ؛ $x^3 = 0$.

8 المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(وحدة الطول هي 1 cm .)

f ، g ، h ، t دوال معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 1$ ؛ $g(x) = x$ ؛ $h(x) = x^2$ ؛ $t(x) = x^3$.

1) لاحظ الشكل الموالي وأرفق بكل دالة المنحنى الممثل لها.



2) استعمل المنحنيات $(\mathscr{C}_1)$ ؛ $(\mathscr{C}_2)$ ؛ $(\mathscr{C}_3)$ و $(\mathscr{C}_4)$ لترتيب الأعداد الحقيقية 1 ؛ x ؛ x^2 ؛ x^3 في الحالتين التاليتين : $x \in [0 ; 1]$ ؛ $x \in [1 ; +\infty[$.

9 f ، g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3$ ؛ $g(x) = x^3 + 1$.

$(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنيان الممثلان للدالتين f و g على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة: $\|\vec{i}\| = 2$ ؛ $\|\vec{j}\| = 1$.

1) باستعمال إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ؛ حدد إتجاه تغير الدالة g .

– انجز جدول تغيرات الدالة g .

2) أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم السابق.

3) لتكن $M(x ; x^3)$ نقطة كيفية من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و $M'(x ; x^3 + 1)$ نقطة كيفية من المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ ذات نفس الفاصلة x .

– أثبت أن $\overrightarrow{MM'} = \vec{j}$.

– بأي تحويل نقطي يُحوِّل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ إلى المنحنى $(\mathscr{C}_g)$؟

– ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في المعلم السابق.

العمليات على الدوال

10 عين صورة العدد الحقيقي x بكل دالة من الدوال $f + g$ ؛ $-g$ ؛ $f - g$ ؛ $f \cdot g$ ؛ $\frac{1}{g}$ ؛ $\frac{f}{g}$ في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = 3x - 2$ ؛ $g(x) = -x + 1$

2) $f(x) = x^2 - 2$ ؛ $g(x) = 2x + 3$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$

4) $f(x) = x^2$ ؛ $g(x) = \frac{1}{x}$

– حدد مجموعة تعريف الدالة المحصل عليها في كل حالة.

11 أدرس إشارة الدالة f على المجموعة I في كل حالة مما يلي:

1) $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = -4x + 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2 - 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $I =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

12 f ، g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 + x - 2$ ؛ $g(x) = x^2 - 3$

1. عين صورة العدد الحقيقي x بكل دالة من الدوال التالية: $f + g$ ؛ $-f$ ؛ $f - g$ ؛ $f . g$ ؛ $\frac{1}{f}$ ؛ $\frac{f}{g}$.

2. ماهي مجموعة تعريف كل من هذه الدوال؟

13 في الحالات من 1 إلى 6، عين الدالة gof المعرفة على I والمركبة من الدالتين f و g بهذا الترتيب.

1) $f(x) = -2x + 3$ ؛ $g(x) = 5x - 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x}{7}$ ؛ $g(x) = 7x$ ؛ $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2$ ؛ $g(x) = x + 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = 2x - 3$ ؛ $g(x) = x^2$ ؛ $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = x^2 + 2$ ؛ $g(x) = \frac{x-1}{2}$ ؛ $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = \frac{2x+3}{5}$ ؛ $g(x) = x^2 - 3$ ؛ $I = \mathbb{R}$

14 نفس سؤال التمرين رقم 13.

1) $f(x) = 4x + 5$ ؛ $g(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ ؛ $g(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{2}{x}$ ؛ $g(x) = -4x + 1$ ؛ $I =]-\infty ; 0[$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $g(x) = x^2$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

5) $f(x) = x^2 + 3$ ؛ $g(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $I =]-\infty ; 0[$

15 f ، g دالتان معرفتان كما يلي:

$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ ؛ $g(x) = \frac{x}{x+2}$

نضع $h = gof$

1) عين مجموعة التعريف D_h للدالة h.

أحسب $h(x)$.

2) لتكن t الدالة المعرفة كما يلي:

$t(x) = \frac{x+3}{3x+5}$.

– عين مجموعة التعريف D_t للدالة t.

3) قارن المجموعتين D_h و D_t.

– استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ينتمي إلى D_h ؛ $h(x) = t(x)$.

16 f ، g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x^2 - 1$ ؛ $g(x) = 4x^2 - 3x$

1) أحسب $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

2) هل $fog = gof$ ؟

17 بالإعتماد على الدالة "مربع" والدوال التآلفية، فكك كل دالة من الدوال التالية :

1) $h(x) = 3x^2 - 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$

2) $h(x) = (2x-1)^2$ ؛ $I = \mathbb{R}$

3) $h(x) = x^2 + 4x + 4$ ؛ $I = \mathbb{R}$

4) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$ ؛ $I = \mathbb{R}$

5) $h(x) = 2x^2 + 5x - 3$ ؛ $I = \mathbb{R}$

6) $h(x) = -3x^2 + x + 2$ ؛ $I = \mathbb{R}$

18 بالإعتماد على الدوال المرجعية التالية :

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ ؛ $x \longmapsto x^2$

$x \longmapsto x^3$ ؛ $x \longmapsto \sqrt{x}$ والدوال التآلفية،

فكك كل دالة من الدوال التالية :

1) $h(x) = \frac{1}{3x-1}$ ؛ $I =]\frac{1}{3} ; +\infty[$

2) $h(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ ؛ $I =]-\infty ; -5[$

3) $h(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2$ ؛ $I = \mathbb{R}$

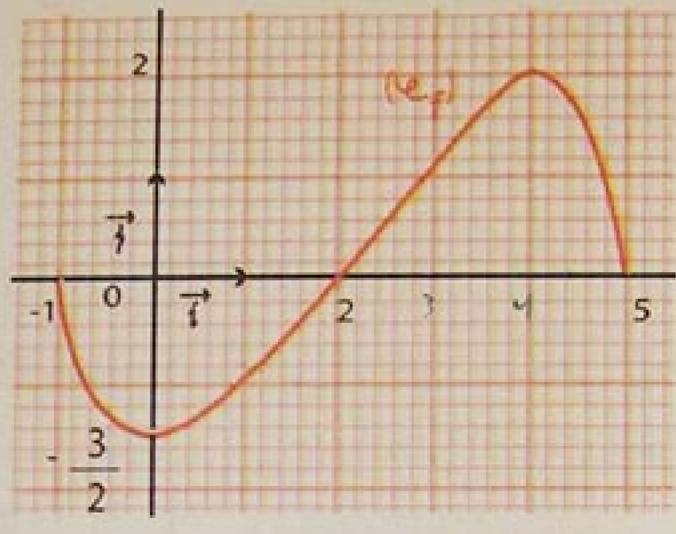
4) $h(x) = \frac{1}{x^3+1}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

5) $h(x) = 2\sqrt{x} + 3$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

6) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

المنحنيات والتحويلات النقطية البسيطة

19 f دالة معرفة على المجال $[-1 ; 5]$ بتمثيلها البياني $(\mathscr{C}_f)$ التالي. (الشكل).



1) أعد رسم الشكل السابق.

2) g ، h دالتان معرفتان كما يلي :

$h(x) = f(x) + 2$ ؛ $g(x) = f(x+2)$

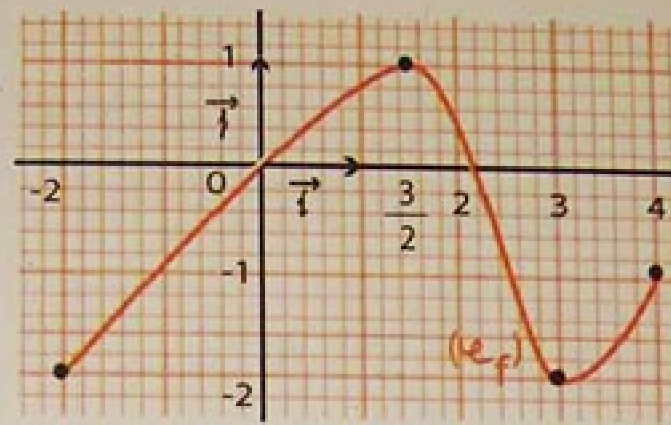
$(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$ المنحنيان الممثلان لهما في المعلم السابق.

– باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، أُرسم المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$.

– ماهو التحويل النقطي المطبق في كل حالة؟

3) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين g و h ؟

20 إليك المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل).



1) أعد رسم الشكل السابق.

2) باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، أُرسم في المعلم السابق المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ الممثل للدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = f(x - 1)$ ، ثم المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ الممثل للدالة h المعرفة كما يلي : $h(x) = f(x) - 1$.

3) ماهو التحويل النقطي الذي طبقته في كل حالة؟

4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين g و h ؟

21 f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2 ; 2]$ كما يلي : $f(x) = x^2$

1) انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2) باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ الممثل للدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = f(x + 3)$.

– انشئ في نفس المعلم السابق، المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ الممثل للدالة h المعرفة كما يلي : $h(x) = f(x) + 3$.

3) ماهو التحويل النقطي الذي طبقته في كل حالة؟

4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين g و h ؟

22 f هي الدالة المعرفة على المجال $]0 ; 4]$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2) باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، انشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$ الممثلين للدالتين g و h المعرفتين كما يلي : $g(x) = f(x - 4)$ ؛ $h(x) = f(x) - 4$.

3) ماهو التحويل النقطي الذي طبقته في كل حالة؟

4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين g و h ؟

23 f دالة معرفة على المجال $[0 ; 5]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x}$

1) انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2) باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ الممثل للدالة g المعرفة كما يلي: $g(x) = f(x-2)$ ، ثم انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ الممثل للدالة h المعرفة كما يلي:
$h(x) = f(x) - 2$.

3) بأي تحويل نقطي نتحصل على المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$؟
نفس السؤال بالنسبة إلى المنحنى $(\mathscr{C}_h)$.

4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين g و h ؟

24 f دالة معرفة على المجال $[-2\,;\,2]$
كما يلي: $f(x) = x^3$

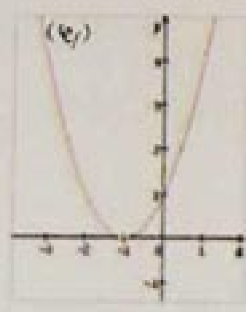
1) انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة: $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ ؛ $\|\vec{j}\| = 0{,}5\text{ cm}$).

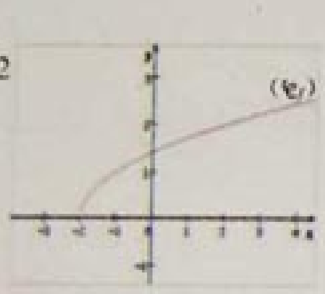
2) باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، انشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$ الممثلين للدالتين f و g على الترتيب والمعرفتين كما يلي:
$g(x) = f(x+2)$ ؛ $h(x) = f(x) + 2$.

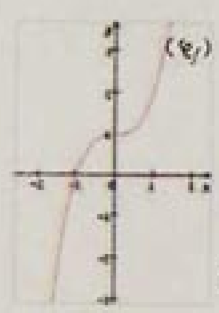
3) ماهو التحويل النقطي الذي طبقته في كل حالة؟

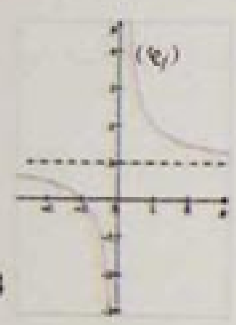
4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين g و h ؟

25 فيما يلي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
التمثيل البياني $(\mathscr{C}_f)$ للدالة f يستنتج بواسطة إنسحاب من تمثيل بياني $(\mathscr{C})$ لدالة من الدوال المرجعية $x \longmapsto x^2$ ؛ $x \longmapsto \frac{1}{x}$
$x \longmapsto x^3$ ، $x \longmapsto \sqrt{x}$.
– عين في كل حالة عبارة $f(x)$ ثم حدد شعاع الإنسحاب.

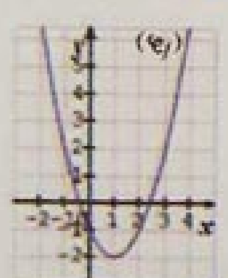
1


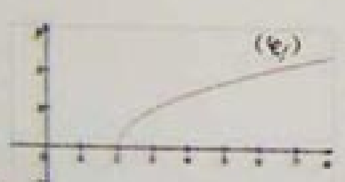
2


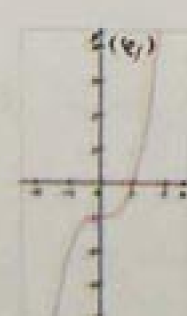
3


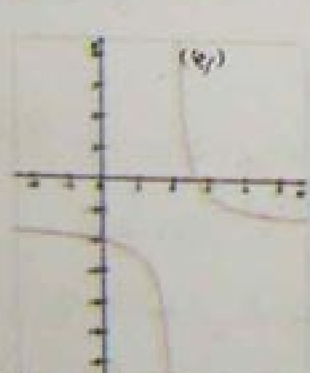
4


26 نفس سؤال التمرين رقم 25 .

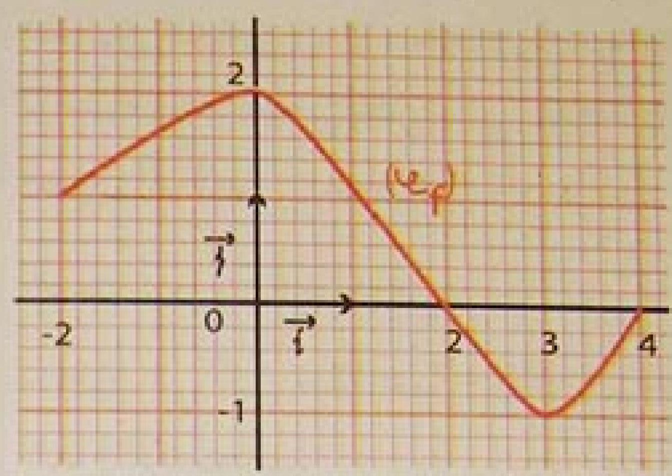
1


2


3


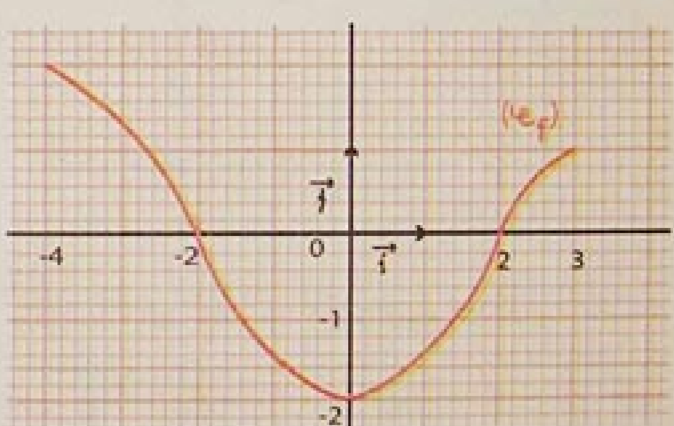
4


27 إليك المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



أعد هذا الرسم ثم أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ للدالة g المعرفة كما يلي: $g(x) = 2f(x)$

28 إليك المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



أعد هذا الرسم ثم أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ للدالة g المعرفة كما يلي: $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$.

29 1) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2$ ؛

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

2) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 0{,}5\,x^2$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

– انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$.

30 1) f دالة معرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x}$

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

2) g دالة معرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = 0{,}5\,\sqrt{x}$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

– انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$.

31 1) f دالة معرفة على المجموعة $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{x}$.

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

2) g و h دالتان معرفتان كما يلي:

$g(x) = \frac{2}{x}$ ؛ $h(x) = -\frac{4}{x}$

$(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$ المنحنيان الممثلان للدالتين g و h في المعلم السابق.

– انشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$.

32 1) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = x^3$ ؛

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

– أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم السابق.

2) g و h دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x) = 0{,}5\,x^3$ ؛ $h(x) = -2\,x^3$ ؛

$(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$ المنحنيان الممثلان للدالتين g و h في المعلم السابق.

– انشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$.

33 f هي دالة مرجعية من بين الدوال التالية : $x \longmapsto x^2$ ؛ $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ؛

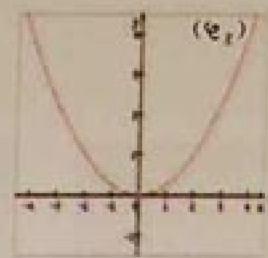
$x \longmapsto \sqrt{x}$ ؛ $x \longmapsto x^3$

g دالة معرفة كما يلي :

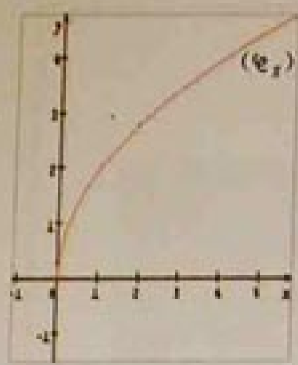
$g(x) = k.f(x)$ و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل).

– لاحظ كل شكل من الأشكال التالية ثم عين الدالة g .

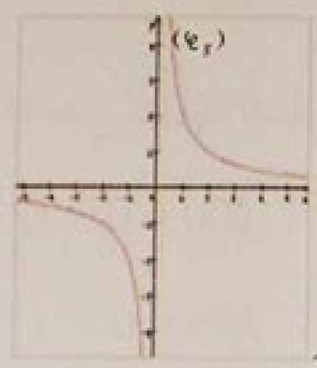
– استنتج في كل حالة الدالة f و العدد الحقيقي k .



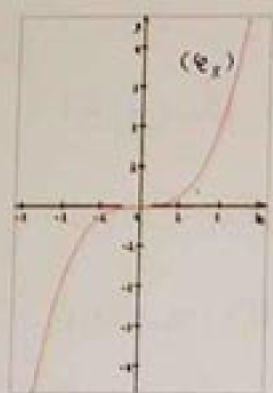
1



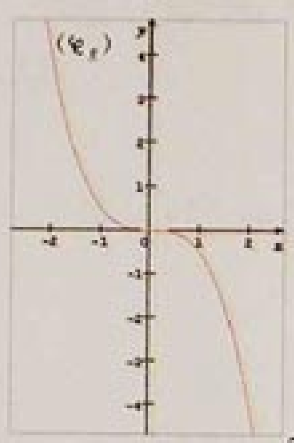
2



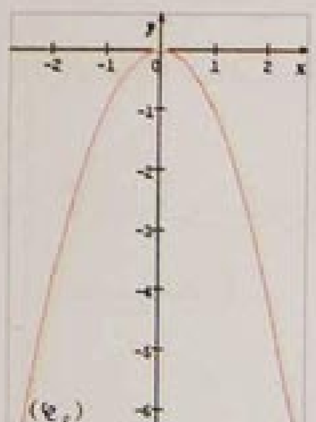
3



4

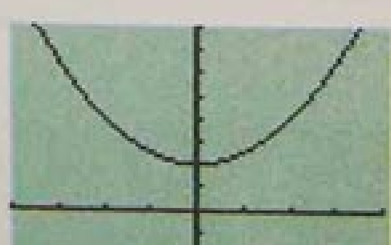


5

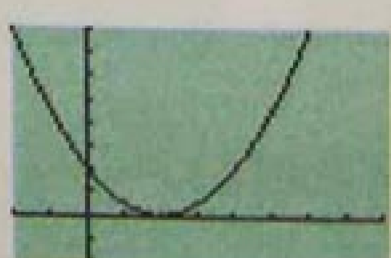


6

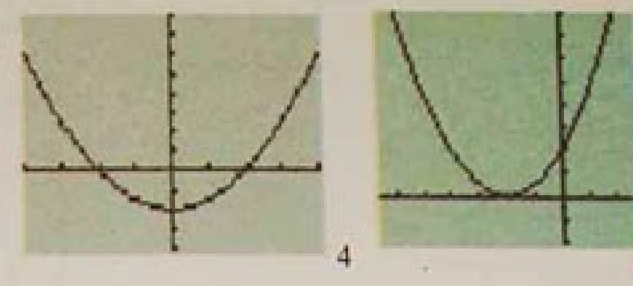
34 إليك منحنيات دوال معرفة على $\mathbb{R}$.



1



2



4 3

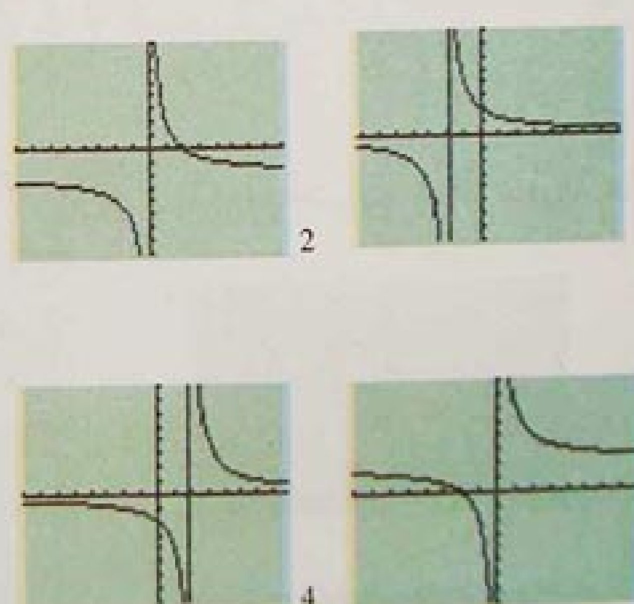
1) أرفق بكل دالة مما يلي تمثيلها البياني.

$f(x) = x^2 - 1$ ؛ $g(x) = (x+1)^2$ ؛

$h(x) = x^2 + 1$ ؛ $k(x) = (x-1)^2$.

2) عين الإنسحاب الذي يحوّل التمثيل البياني (P) للدالة "مربع" إلى كل تمثيل من التمثيلات البيانية السابقة .

35 إليك تمثيلات بيانية لدوال معرفة على مجموعة E .



2 1

4 3

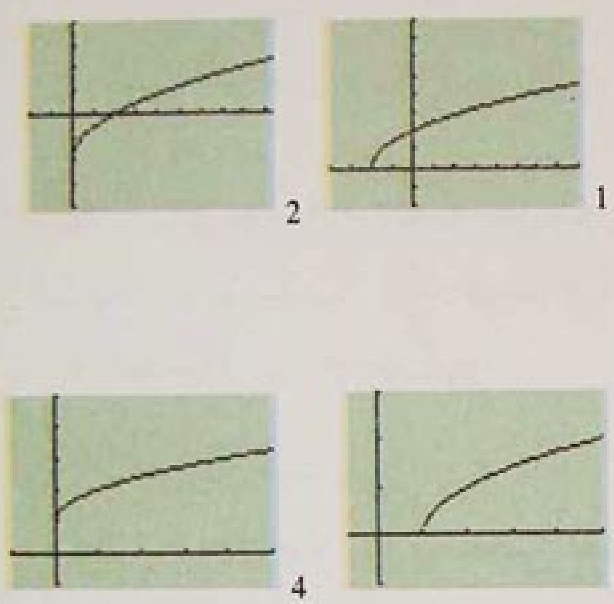
1) أرفق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني .

$f(x) = \frac{1}{x} - 1$ ؛ $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ؛

$h(x) = \frac{1}{x} + 1$ ؛ $k(x) = \frac{1}{x-1}$.

2) عين الإنسحاب الذي يحوّل التمثيل البياني (H) للدالة "مقلوب" إلى كل منحنٍ من المنحنيات السابقة .

36 إليك تمثيلات بيانية لدوال معرفة على مجموعة E .



2 1

4 3

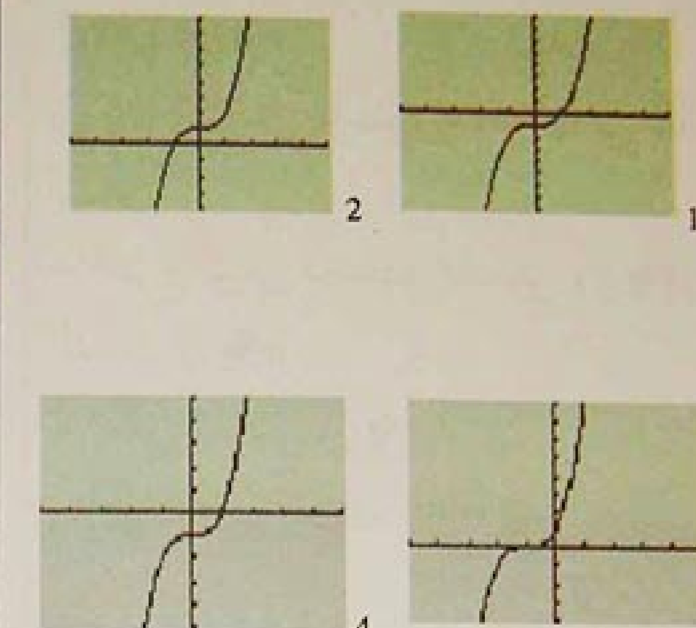
1) أرفق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني .

$f(x) = \sqrt{x+1}$ ؛ $g(x) = \sqrt{x-1}$ ؛

$h(x) = 1+\sqrt{x}$ ؛ $k(x) = \sqrt{x} - 1$

2) عين الإنسحاب الذي يحوّل المنحنى (ج) الممثل للدالة "الجذر التربيعي" إلى كل من التمثيلات البيانية السابقة .

37 هذه منحنيات ممثلة لدوال معرفة على $\mathbb{R}$.



1) أرفق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني .

$g(x) = (x-1)^3$ ؛ $f(x) = (x+1)^3$

$k(x) = x^3 - 1$ ؛ $h(x) = x^3 + 1$

2) عين الإنسحاب الذي يحوّل المنحنى (γ) الممثل للدالة "مكعب" إلى كل من المنحنيات السابقة .

عناصر تناظر منحن

38 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$f(x) = (x-1)^2 + 1$.

2) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $x = 1$ هو محور تناظر المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

39 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$f(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$ ؛

2) بيّن أن المستقيم (D) ذا المعادلة $x = \frac{2}{3}$ هو محور تناظر المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

40 f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$ ؛

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) عين مجموعة التعريف D للدالة f .

2) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$

3) بيّن أن النقطة $A(-2 ; 3)$ مركز تناظر المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

41 f هي الدالة المعرفة كما يلي:

$f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$ ؛

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين مجموعة التعريف D للدالة f.

2) عين العددين الحقيقيين a ، b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛

$f(x) = b + \dfrac{a}{3-x}$.

3) بيّن أن النقطة $B(3\,;-1)$ مركز تناظر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

42 f دالة معرفة على المجموعة $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ كما يلي:

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ ؛

1) عين العددين الحقيقيين a ، b حيث، من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 2،

$f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

– برهن أن النقطة $A(2\,;2)$ مركز تناظر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

– انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم السابق.

4) أدرس إشارة $f(x)$ على المجموعة $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

5) g دالة معرفة على المجموعة $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ كما يلي:

$g(x) = |f(x)|$.

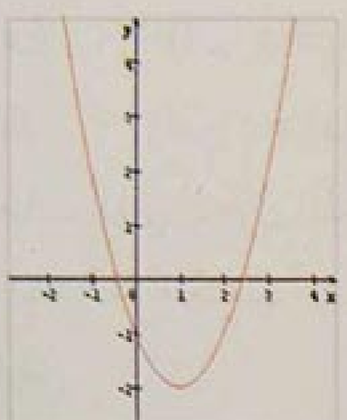
$(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة g في المعلم السابق.

– أشرح كيف نستنتج المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

– انشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$.

– انجز جدول تغيرات الدالة g .

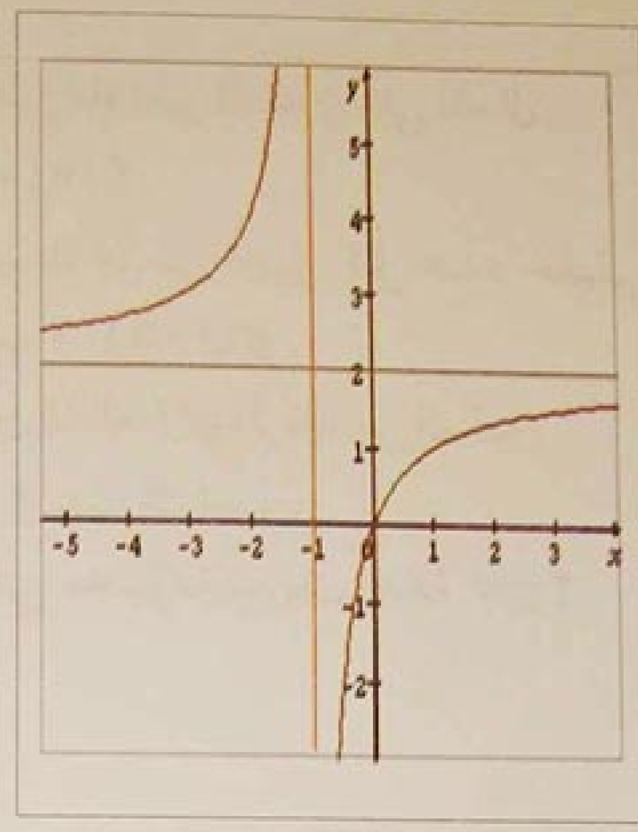
43 المنحنى التالي هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = x^2 - 2x - 1$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



1) هذا المنحنى يسمح بتخمين محور تناظر له. ماهي معادلته؟

2) أثبت صحة التخمين.

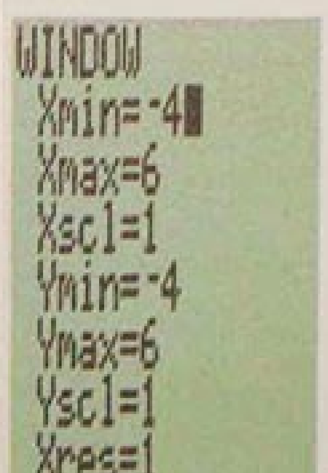
44 المنحنى التالي هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجموعة $]-7;-1[\cup]-1;7[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



1) هذا المنحنى يسمح بتخمين وجود مركز تناظر له. ماهما إحداثياه؟

2) أثبت صحة التخمين.

45 أظهر على نافذة حاسبة بيانية المعلومات المقابلة.



– أظهر المنحنى الممثل للدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$.

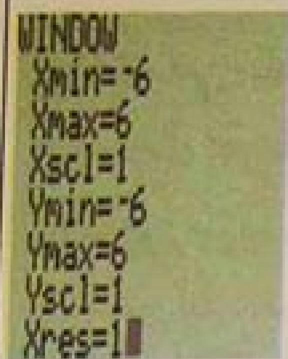
– خمّن وجود مركز تناظر للمنحنى.

– برهن صحة هذا التخمين.

46 أظهر على نافذة حاسبة بيانية المعلومات المقابلة.

– أظهر المنحنى الممثل للدالة f المعرفة كما يلي:

$f(x) = x^2 + 2x + 2$

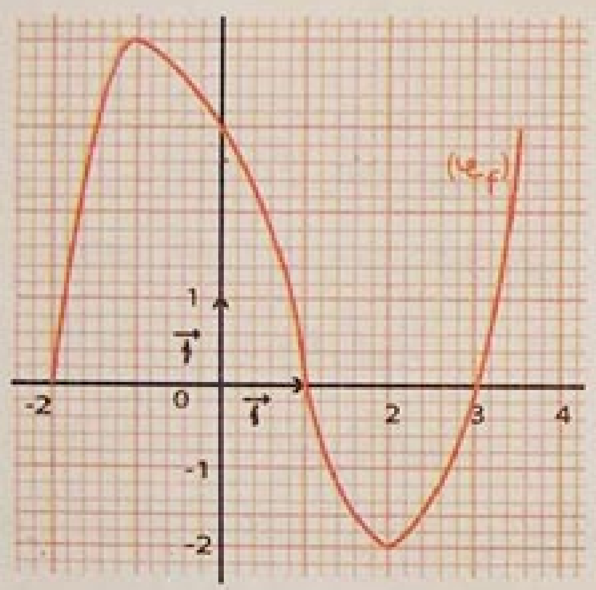


– خمّن وجود محور تناظر للمنحنى.

– برهن صحة هذا التخمين.

مسائل

47 f دالة معرفة على المجال $[-2\,;\frac{7}{2}]$ و$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل).



استعمل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ للإجابة على الأسئلة التالية.

أ) 1. ماهي صورة كل من الأعداد: -2 ؛ -1 ؛ 2 ؟

2) ماهي حلول المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-2\,;\frac{7}{2}]$ ؟

3) ماهي مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ في المجال $[-2\,;\frac{7}{2}]$ ؟

ب) نسمي سابقة عدد b، كل عدد حقيقي a من مجال تعريف الدالة f حيث $f(a) = b$.

1) ماهي سوابق العدد 0 ؟

2) ماهو عدد سوابق العدد 3 ؟

أعط قيمة مضبوطة أو مقربة لكل منها.

– انجز نفس العمل بالنسبة إلى سوابق 4 ؟

ج) g هي الدالة المعرفة على المجال $[-2 ; \frac{7}{2}]$ كما يلي : $g(x) = |f(x)|$.

$(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

– أشرح كيفية رسم المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ ثم أرسمه.

48 f ، g دالتان تآلفيتان حيث :

$g(x) = cx + d$ ؛ $f(x) = ax + b$

a ، b ، c ، d أعداد حقيقية.

1) برهن أن الدالة $f + g$ تآلفية.

2) أثبت أن الدالة gof المركبة من الدالتين f و g بهذا الترتيب هي دالة تآلفية.

3) هل الدالة $f . g$ تآلفية ؟

49 f دالة معرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x^2 + 2x$.

1) ماهو إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$ ؟

– أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي موجب x ؛ $f(x) \geq 0$

2) g دالة معرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = -1+\sqrt{x+1}$.

– ماهو إتجاه تغير الدالة g على المجال $[0 ; +\infty[$ ؟

– أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي موجب x ؛ $g(x) \geq 0$.

3) عين الدالة gof المركبة من الدالتين f و g بهذا الترتيب.

– ماهي مجموعة تعريف الدالة gof ؟

الباب 4 المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

1. ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية
2. المعادلات من الدرجة الثانية
3. المتراجحات من الدرجة الثانية
4. حلّ، بيانيا، معادلات ومتراجحات من الدرجة الثانية

الخوارزمي
(850-788)

ولد أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي في خوارزم بأوزباكستان، وعاش في بغداد في عصر الخليفة المأمون وتوفي فيها.

اشتهر الخوارزمي بكتابه " الجبر والمقابلة " الذي ألفه بطلب من الخليفة المأمون وبتشجيع منه، ويعالج الكتاب، كما يقول الخوارزمي، " ... ما يلزم النّاس من الحاجة إليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسماتهم وأحكامهم وتجارتهم وفي جميع ما يتعاملون به من مساحة الأرضين وكرى الأنهار والهندسة ...". وقد وجد الخوارزمي أنّ " الأعداد التي يحتاج إليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب لا إلى جذر ولا إلى مال ".

وصنّف المعادلات في ستة أنواع هي "...أموال تعدل جذورا، أو أموال تعدل عددا، أو جذور تعدل عددا، أو أموال وجذور تعدل عددا، أو أموال وعدد تعدل جذورا، أو جذور وعدد تعدل أموالا". وبالترميز الحالي، تكتب هذه الضروب على الترتيب كما يلي:

$ax^2 = bx$ ؛ $ax^2 = b$ ؛ $ax = b$

$ax^2 + bx = c$ ؛ $ax^2 + c = bx$ ؛ $bx + c = ax^2$

الجذر هو ما نشير إليه حاليا بالرمز x ، والمال بالرمز x^2 و a ، b ، c أعداد.

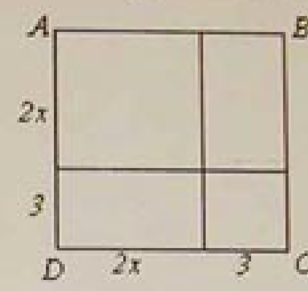
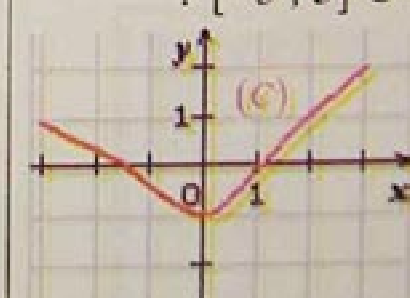
ويقدم الخوارزمي كيفية حلّ الأجناس الثلاثة الأخيرة

"مثل قولك مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما " وهي المعادلة $x^2 + 10x = 39$.

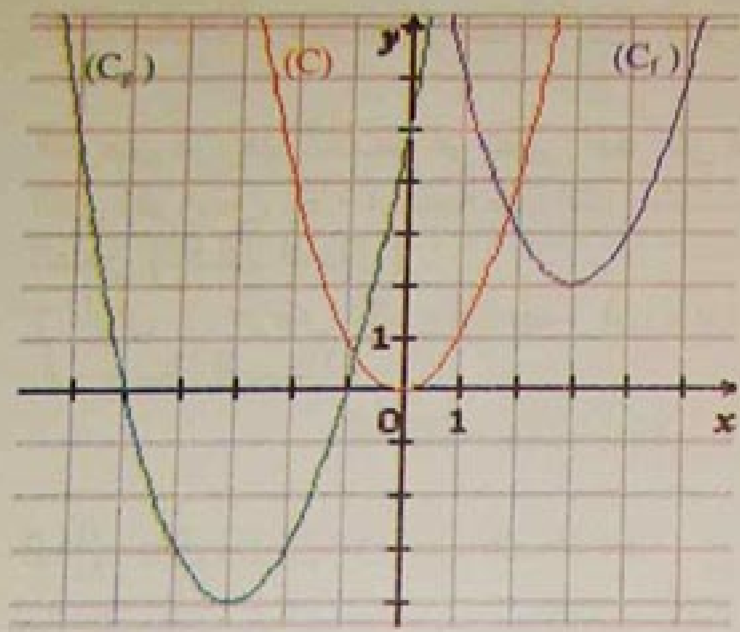
يقدم مراحل حلها خطوة فخطوة (الترميز غير موجود أنذاك) ويجد الحلّ (الموجب) وهو 3، ويبرّر الحلّ التحليلي بالإنشاءات الهندسية.

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1. مساحة المربع $ABCD$ هي: 	$4x+6$	$4x^2+9$	$4x^2+12x+9$
2. x عدد حقيقي. الشكل المبسّط والمرتب للعبارة $5x(4x-3)-x^2$ هو:	$4x^2$	$19x^2-15x$	$20x^2-15x-x^2$
3. x عدد حقيقي. الشكل المحلل للعبارة هو:	$(2x+7)^2$	$(2x-7)^2$	$(2x-7)(2x+7)$
4. $4x^2-28x+49$. في معلم متعامد ومتجانس، التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2$ هو:	قطع مكافئ	مستقيم	قطع زائد
5. للمعادلة $x^2=9$	حلّ واحد هو 3	حلّ واحد هو -3	حلان هما -3 ؛ 3
6. العدد $\frac{1}{2}$ حل للمتراجحة	$x-2\geq 0$	$(x+1)(x-2)>0$	$3x+1>-x+2$
7. (C) هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على المجال $[-3;3]$.  مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي:	$\{-1\}$	$\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$	$\left[-\frac{3}{2};1\right]$

★نشاط1
صورة قطع مكافئ بانسحاب



في الشكل المقابل، (C) هو القطع المكافئ الممثل للدالة "مربع". (C_f) و(C_g) القطعان المكافئان الممثلان لدالتين ثلاثيي الحدود من الدرجة الثانية f و g على الترتيب، حيث كل منهما هو صورة (C) بانسحاب.

1. عيّن الانسحاب الذي يسمح بالمرور من (C) إلى (C_f) ومن (C) إلى (C_g).
2. عيّن دستور كلّ من الدالتين f و g المرفقتين بالدالة "مربع".

★نشاط 2
دراسة دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

نعتبر الدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f المعرّفة كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+6x+5)$.

▪ **دراسة اتجاه تغيّر** f .

1. ادرس اتجاه تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]-\infty;-3]$ و $[-3;+\infty[$
2. أنقل جدول التغيرات الآتي ثمّ أكمله.

x	$-\infty$ $\qquad$ -3 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

تحقق من أنّ f تقبل قيمة صغرى عند -3 يطلب تحديدها.

▪ **رسم المنحني الممثل للدالة** f .

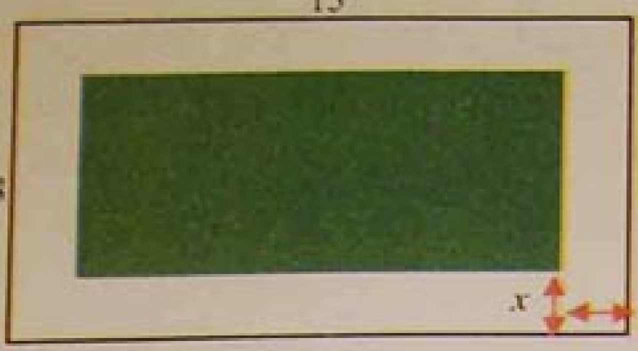
نسمّي (P) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ للمستوي.

1. ليكن S ذروة (P). كيف يكون المماس للمنحني (P) عند S ؟
2. عيّن نقط تقاطع (P) مع المحورين الاحداثيين.
3. ارسم (P). ما هي جهة انفراجه ؟ اربط ذلك بإشارة معامل x^2 في عبارة $f(x)$.
4. تحقق أنّ (P) يقبل محور تناظر.

▪ **حلّ، بيانيا، معادلات أو متراجحات**

1. باتباع نفس الخطوات السابقة، ارسم المنحني الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-x^2+2x+3$.
2. حلّ بيانيا المعادلة $g(x)=0$ ثمّ المتراجحة $g(x)\geq 0$.

نشاط 3
حلّ مشكلة باستخدام معادلة من الدرجة الثانية



الغرض من هذا النشاط هو تعيين العرض الثابت للشريط الذي تكون من أجله مساحة هذا الشريط مساوية لمساحة المستطيل الملوّن (الشكل المقابل).

1. ليكن x عرض الشريط بحيث $0<x<4$، تحقق من أنّ x حلّ للمعادلة:

$$2x^2-23x+30=0$$

2. أ) تحقق من أنّ من أجل كلّ عدد x،

$$2x^2-23x+30=2\left(x-\frac{23}{4}\right)^2-\frac{289}{8}$$

ب) حلّ المعادلة $2x^2-23x+30=0$. ماذا تستخلص؟

نشاط 4
الصيغ المختلفة لثلاثي الحدود

$P(x)$ ثلاثي حدود حيث: $P(x)=(x+2)^2-36$.

1. تحقق من أنّ من أجل كل عدد حقيقي x:

أ) $P(x)=x^2+4x-32$ ؛ ب) $P(x)=(x+8)(x-4)$

2. باختيار الصيغة الأنسب لثلاثي الحدود $P(x)$، حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

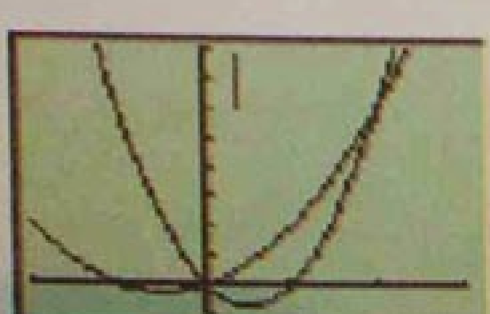
$P(x)=0$ ، $P(x)=13$ ، $P(x)=-32$

نشاط 5: التحقق من حلّ معادلة بحاسبة بيانية

لحلّ المعادلة $3x^2-3x=x(x+1)$ في $\mathbb{R}$،
اقترح تلميذ الحلّ المقابل.

> $3x^2-3x=x(x+1)$ تكافئ $3(x-1)=x+1$
> منه $3x-x=3+1$ وبالتالي $x=2$.
> المعادلة تقبل حلا واحدا هو العدد الحقيقي 2.

1. صحح إجابة التلميذ وفسّر أخطاءه.



2. للتحقق من النتيجة، استعمل التلميذ الحاسبة البيانية فتحصّل على الشاشة المقابلة.
فسّر النتائج المحصّل عليها على الشاشة، ثمّ أعد حلّ المعادلة.

1. ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

- **الدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية**

تعريف

نسمّي دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية كلّ دالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a، b، c أعداد حقيقية و $a\neq 0$

نسمّي أيضا العبارة $f(x)=ax^2+bx+c$ (مع $a\neq 0$) ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

أمثلة

- كلّ من الدوال $f: x\mapsto x^2$ ؛ $g: x\mapsto (x-1)(x+1)$ ؛ $h: x\mapsto x(x-2)$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ هي دوال ثلاثيات الحدود من الدرجة الثانية.
- الدالة $k: x\mapsto (x-1)(x+1)-x^2$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ليست دالة ثلاثي الحدود (عند النشر والتبسيط، نحصل على $k(x)=-1$).

- **الشكل النموذجي لثلاثي الحدود من الدرجة الثانية**

مبرهنة وتعريف

من أجل كلّ عدد حقيقي x، $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ مع $a\neq 0$.

نسمّي الكتابة $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ الشكل النموذجي لثلاثي الحدود.

برهان

بما أنّ $a\neq 0$، يمكن أن نكتب: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

نلاحظ أنّ $x^2+\frac{b}{a}x$ يظهر عند نشر العبارة $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. ومنه

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ملاحظة

بوضع $\alpha=-\frac{b}{2a}$ و $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$، نكتب $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$.

أمثلة

- $x^2-2x-3=(x-1)^2-1-3=(x-1)^2-4$
- $-2x^2-4x+5=-2\left(x^2+2x-\frac{5}{2}\right)=-2\left[(x+1)^2-1-\frac{5}{2}\right]=-2(x+1)^2+7$

تعريف

نسمّي مميّز ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية ax^2+bx+c العدد الحقيقي Δ حيث: $\Delta=b^2-4ac$

- **التمثيل البياني لدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية**

مبرهنة

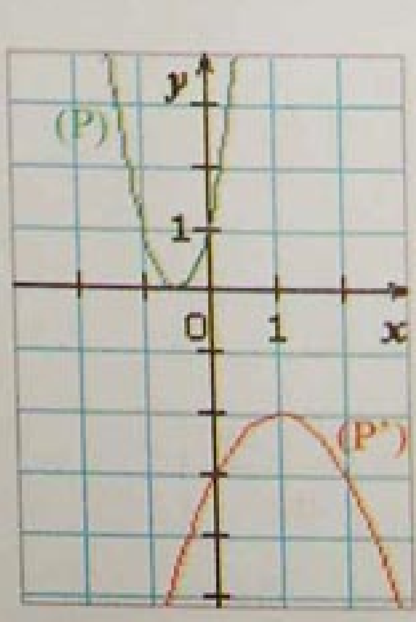
في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ للمستوي، التمثيل البياني لدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f حيث $f(x)=ax^2+bx+c$ (مع $a\neq 0$) هو قطع مكافئ ، ذروته النقطة S ذات الاحداثيين $\left(-\frac{b}{2a};f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته هي: $x=-\frac{b}{2a}$

جهة انفراج القطع المكافئ تتعلق بإشارة a:
- إذا كان $a>0$ فيكون القطع المكافئ منفرجا نحو الأعلى.
- إذا كان $a<0$ فيكون القطع المكافئ منفرجا نحو الأسفل.

★ **ملاحظة**

نحصل على القطع المكافئ الممثل للدالة f المعرفة بـ: $f(x)=ax^2+bx+c$ مع $a\neq 0$ انطلاقا من القطع المكافئ الذي معادلته $y=ax^2$ بانسحاب شعاعه $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$.

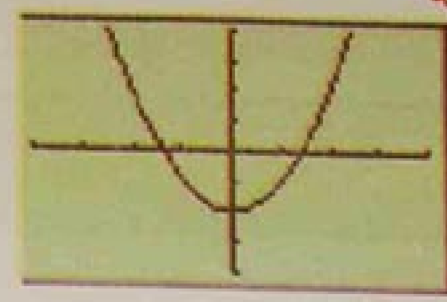
أمثلة



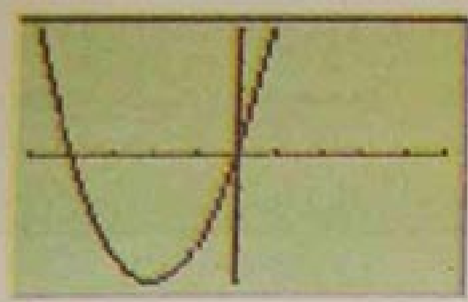
- التمثيل البياني للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=4x^2+4x+1$ هو القطع المكافئ (P) الذي ذروته $S\left(-\frac{1}{2};0\right)$.
وبما أنّ a موجب، فإنّ (P) منفرج نحو الأعلى.

- التمثيل البياني للدالة g المعرفة على R كما يلي:
$g(x)=-x^2+2x-3$ هو القطع المكافئ (P') الذي ذروته $S'(1;-2)$.
وبما أنّ a سالب، فإنّ (P') منفرج نحو الأسفل.

حالات خاصة



- إذا كان $a \neq 0$ و $b = 0$ ، فإنّ ذروة القطع المكافئ الذي معادلته $y = ax^2 + c$ هي $S(0;c)$.



- إذا كان $a \neq 0$ و $c = 0$ ، فيمكن دائما تحليل $ax^2 + bx$ ، بحيث $ax^2 + bx = x(ax + b)$.
القطع المكافئ الذي معادلته $y = ax^2 + bx$ يشمل المبدأ.

• تغيّرات دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

f دالة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية حيث $f(x) = ax^2 + bx + c$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 2ax + b$.

تبعا لإشارة a ، نحصل على تغيّرات f على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

إذا كان $a > 0$ ، فإنّ f متناقصة على المجال $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$.

إذا كان $a < 0$ ، فإنّ f متزايدة على المجال $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ ومتناقصة على المجال $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$.

يمكن تلخيص النتائج السابقة كما يلي:

- $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

- $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ هي قيمة حدية للدالة f عند العدد $-\frac{b}{2a}$.

أمثلة

- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$
نتحقق من أنّ f متناقصة على المجال $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$g(x) = -x^2 + 8x - 12$
نتحقق من أنّ g متزايدة على المجال $]-\infty;4]$ ومتناقصة على المجال $[4;+\infty[$.

2. المعادلات من الدرجة الثانية

تعريف

المعادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، هي كلّ معادلة يمكن كتابتها على الشكل $ax^2+bx+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

مبرهنة

$ax^2+bx+c=0$ (مع $a \neq 0$) معادلة من الدرجة الثانية، مميّزها Δ بحيث $\Delta=b^2-4ac$.

- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا ولا يمكن تحليل ثلاثي الحدود ax^2+bx+c.
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مُضاعفا هو: $-\frac{b}{2a}$.

  ويكون من أجل كل عدد حقيقي x، $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين مختلفين x_1 و x_2 بحيث:

  $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  ويكون من أجل كلّ عدد حقيقي x، $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

برهان

بفرض المعادلة $ax^2+bx+c=0$ (مع $a \neq 0$).

هذه المعادلة تكتب أيضا على الشكل: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$

بوضع $\Delta=b^2-4ac$، نكتب: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$

بما أنّ $a \neq 0$ فإنّ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$.

- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ موجب تماما وبالتالي لا يمكن أن يكون معدوما.

  فالمعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ المعادلة $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ تصبح $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

  ومنه $x=-\frac{b}{2a}$.

  فالمعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$ هو $-\frac{b}{2a}$.

- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ المعادلة $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ تكتب على الشكل $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$

الطرف الأوّل للمعادلة هو فرق مربعين، فنكتب:

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

ومنه $x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ أو $x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ، أي: $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

فالمعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$ هما:

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ملاحظة

عندما يكون المعاملان a و c من إشارتين مختلفتين، يمكن أن نصرّح، دون حساب المميّز، أنّ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ (مع $a\neq 0$) تقبل حلّين مختلفين.
في هذه الحالة، يكون العدد ac سالبا تماما وبالتالي يكون $-(ac)$ موجبا تماما ونستنتج أنّ $\Delta=b^2-4ac$ موجب تماما.

أمثلة

لنحلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

(1) $4x^2-5x+2=0$ (2) $9x^2-6x+1=0$ (3) $-x^2+4x+5=0$

- في المعادلة (1)، لدينا $\Delta=-7$.
$\Delta<0$. فالمعادلة ليس لها حلول.

- في المعادلة (2)، لدينا $\Delta=0$.
$\Delta=0$. فالمعادلة تقبل حلا مُضاعفا هو $\frac{1}{3}$.

- في المعادلة (3)، لدينا $\Delta=36$.
$\Delta>0$. فالمعادلة تقبل حلّين مختلفين هما: $x_1=5$ و $x_2=-1$.

ملاحظة

حلّ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ (مع $a\neq 0$) يسمّي أيضا **جذر** ثلاثي الحدود ax^2+bx+c .

مثال

بفرض $P(x)=x^3-2x^2-x+2$.
الأعداد الحقيقية -1 و 1 و 2 هي جذور $P(x)$ وهي أيضا حلول المعادلة $P(x)=0$.

3. المتراجحات من الدرجة الثانية

مبرهنة

ax^2+bx+c ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، Δ مميّزه.

- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ من أجل كلّ عدد حقيقي x ، إشارة ax^2+bx+c من إشارة a.
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ من أجل كلّ عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{b}{2a}$ فإنّ إشارة ax^2+bx+c من إشارة a.
- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ إشارة ax^2+bx+c من إشارة a من أجل كلّ x من $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$. ومن إشارة $(-a)$ من أجل كلّ x من $]x_1;x_2[$، حيث x_1 و x_2 جذرا ax^2+bx+c و $x_1<x_2$.

برهان

- $\Delta<0$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

بما أن $-\Delta>0$ فإنّ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$.

إذن من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، تكون إشارة ax^2+bx+c من إشارة a.

- $\Delta=0$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

وبما أنّ المربع $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ يكون موجبا أو منعدما.

إذن من أجل كلّ عدد x من $\mathbb{R}-\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$، إشارة ax^2+bx+c من إشارة a.

- $\Delta>0$

لدينا

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2)$$

بفرض $x_1<x_2$، نجد:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		إشارة a	0	إشارة $(-a)$	0	إشارة a	

يمكن تلخيص النتائج السابقة كما يلي:

• $\Delta<0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a

• $\Delta=0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة a

• $\Delta>0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة $(-a)$	0	إشارة a

مثال

$P(x)$ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية حيث $P(x)=-2x^2+3x-1$.

لدينا $\Delta=3^2-4\times(-2)\times(-1)=9-8=1$

$P(x)$ يقبل جذرين مختلفين هما: $x_1=\dfrac{1}{2}$ و $x_2=1$.

وبما أنّ $a<0$، فإنّ إشارة $P(x)$ تكون كما في الجدول:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		-	0	+	0	-	

تعريف

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كلّ متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:

$ax^2+bx+c\geq 0$ ؛ $ax^2+bx+c>0$ ؛ $ax^2+bx+c\leq 0$ ؛ $ax^2+bx+c<0$

حيث a و b و c أعداد حقيقية مع $a\neq 0$.

ملاحظة

حلّ متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، يؤول إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.

مثال

لنحلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $3x^2-5x+2\geq 0$.

من أجل $3x^2-5x+2$، لدينا $\Delta=(-5)^2-4\times 3\times 2=25-24=1$

بما أنّ $\Delta>0$ إذن $3x^2-5x+2$ يقبل جذرين هما: $x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 3}=\frac{2}{3}$ و $x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 3}=1$

ومنه إشارة $P(x)=3x^2-5x+2$ كما في الجدول:

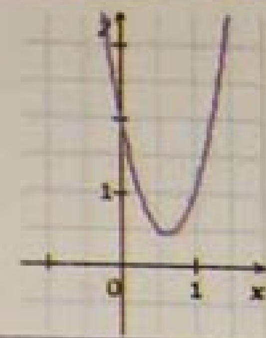
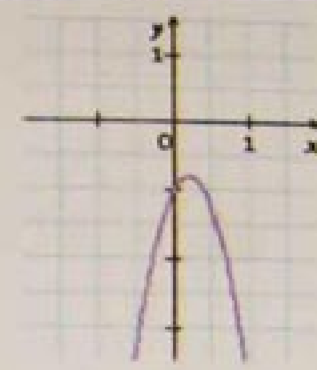
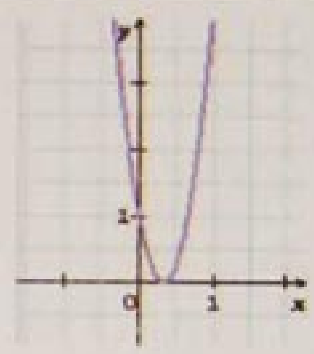
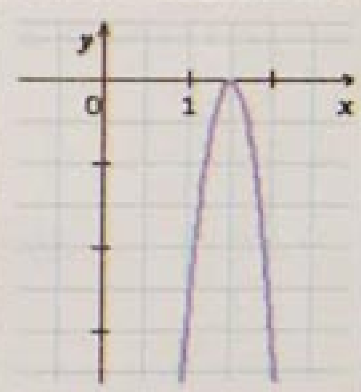
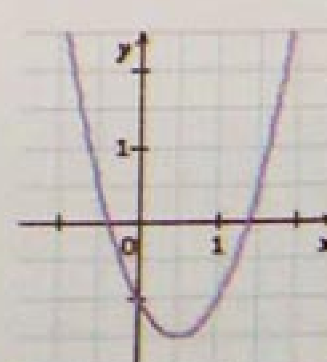
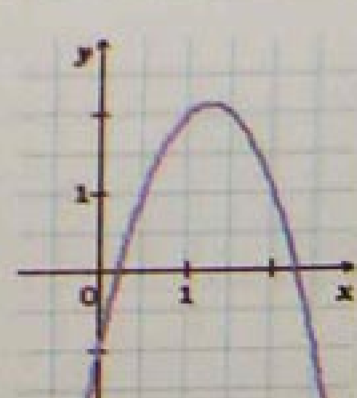
x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

ونستنتج أنّ مجموعة حلول المتراجحة هي: $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[1;+\infty[$.

4. حلّ معادلات ومتراجحات من الدرجة الثانية بيانيا

لحلّ معادلة (أو متراجحة) من الدرجة الثانية، بيانيا، نعتمد على القطع المكافئ الممثل للدالة ثلاثي الحدود.

بفرض $P(x)=ax^2+bx+c$ مع $a\neq 0$ ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية و Δ مميزه.
يمكن تلخيص الدراسة السابقة في الجدول التالي:

إشارة Δ	إشارة a	القطع المكافئ (P)	الوضع النسبي	نتائج
$\Delta<0$	$a>0$		القطع المكافئ (P) يقع فوق محور الفواصل.	لا توجد جذور، ومن أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $P(x)>0$
	$a<0$		القطع المكافئ (P) يقع تحت محور الفواصل.	لا توجد جذور، ومن أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $P(x)<0$
$\Delta=0$	$a>0$		القطع المكافئ (P) يقع فوق محور الفواصل ويمسه في النقطة ذات الفاصلة x_0.	يوجد جذر مضاعف $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ ، ومن أجل كلّ x من $\mathbb{R}-\{x_0\}$ ، $P(x)>0$.
	$a<0$		القطع المكافئ (P) يقع تحت محور الفواصل ويمسه في النقطة ذات الفاصلة x_0.	يوجد جذر مضاعف $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ ، ومن أجل كلّ x من $\mathbb{R}-\{x_0\}$ ، $P(x)<0$.
$\Delta>0$	$a>0$		القطع المكافئ (P) منفرج نحو الأعلى ويقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 و x_2	يوجد جذران مختلفان x_1 و x_2 ، ومن أجل كلّ x من $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$ ، $P(x)>0$. ومن أجل كلّ x من $]x_1;x_2[$ ، $P(x)<0$.
	$a<0$		القطع المكافئ (P) منفرج نحو الأسفل ويقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 و x_2	يوجد جذران مختلفان x_1 و x_2 ، ومن أجل كلّ x من $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$ ، $P(x)<0$. ومن أجل كلّ x من $]x_1;x_2[$ ، $P(x)>0$.

1. كتابة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية على الشكل النموذجي

طريقة

لكتابة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $P(x)$ حيث $P(x)=ax^2+bx+c$ (مع $a\neq 0$) على الشكل النموذجي:

- نحسب $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$.
- نعوّض x بالقيمة الناتجة في عبارة $P(x)$ للحصول على b حيث $\beta=P(\alpha)$.
- نستخلص: $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

تمرين

أكتب كلا من ثلاثيي الحدود التاليين على الشكل النموذجي:

$$Q(x)=-x^2+2x+15 \quad ؛ \quad P(x)=x^2-2x-48$$

حلّ

- من أجل $P(x)$، لدينا $a=1$ و $b=-2$ و $c=-48$.

ونجد: $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{(-2)}{2\times 1}=1$.

$\beta=P(1)=(1)^2-2\times 1-48=-49$.

منه فالشكل النموذجي لـ$P(x)$ هو: $P(x)=(x-1)^2-49$.

- من أجل $Q(x)$، لدينا $a=-1$ و $b=2$ و $c=15$.

ونجد: $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times(-1)}=1$.

$\beta=Q(1)=-(1)^2+2\times 1+15=16$.

منه فالشكل النموذجي لـ$Q(x)$ هو: $Q(x)=-(x-1)^2+16$.

2. دراسة دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

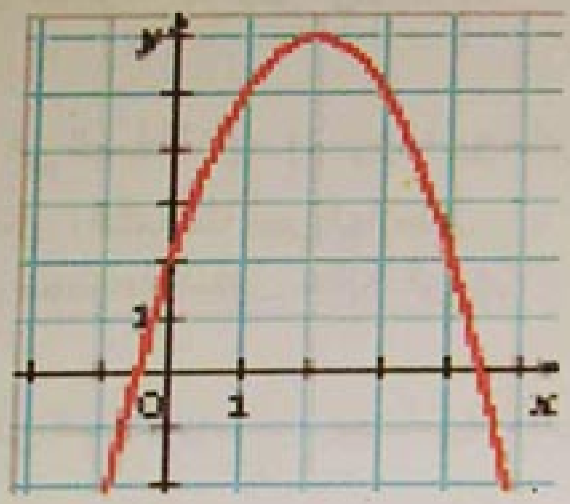
طريقة

لدراسة دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f حيث $f(x)=ax^2+bx+c$ على $\mathbb{R}$، نتبع الخطوات التالية:

- نتمعّن في a معامل x^2، لاستنتاج اتجاه التغيّرات وشكل القطع المكافئ (P):
  - إذا كان $a>0$ يكون (P) منفرجا نحو الأعلى.
  - إذا كان $a<0$ يكون (P) منفرجا نحو الأسفل.
- نحسب $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$، وهي قيمة x التي تغيّر عندها الدالة اتجاهها.
- نعيّن إحداثيي الذروة S وهما $(\alpha;f(\alpha))$.

تمرين

أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ ثمّ ارسم تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.



حل

- لدينا $a = -1$ $(a<0)$ و $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times(-1)} = 2$

يكون جدول تغيّرات f كما يلي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$

$f(2) = -(2)^2 + 4\times 2 + 2 = 6$

- يكون انفراج (P) نحو الأسفل.
- الذروة هي: $S(2\,;6)$.

لرسم القطع المكافئ (P)، نستعين ببعض النقط أو نستعمل حاسبة بيانية.

3. حلّ معادلة من الدرجة الثانية

طريقة

لحلّ معادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ (مع $a \neq 0$)، نختار إحدى الطريقتين التاليتين:

- نحلل، إن أمكن، الطرف الأوّل للمعادلة.
- نستعمل المميّز.

تمرين

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ) $5x^2 + x = 0$ ج) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ هـ) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$

ب) $x^2 - 10x + 25 = 0$ د) $6x^2 - 4x + \frac{2}{3} = 0$

حل

أ) المعادلة $5x^2 + x = 0$ تكافئ $x(5x+1) = 0$.

وبما أنّ جداء عددين حقيقيين يكون منعدما إذا وفقط إذا كان أحد العاملين على الأقل منعدما، إذن: $x(5x+1) = 0$ يكافئ $x = 0$ أو $5x + 1 = 0$.

أي أنّ $x = 0$ أو $x = -\frac{1}{5}$.

إذن مجموعة الحلول هي $\left\{ -\frac{1}{5}\,;0 \right\}$.

ب) المعادلة $x^2-10x+25=0$ تكافئ $(x-5)^2=0$ (لأنّ $x^2-10x+25=(x-5)^2$).
أي $x=5$.
إذن مجموعة الحلول هي $\{5\}$.

ج) في المعادلة $3x^2-2x+1=0$، لدينا $\Delta=(-2)^2-4\times3\times1=-8$.
$\Delta<0$ ، فالمعادلة ليس لها حلول.
إذن مجموعة الحلول خالية أي ϕ.

د) في المعادلة $6x^2-4x+\frac{2}{3}=0$ ، لدينا $\Delta=(-4)^2-4\times6\times\frac{2}{3}=0$.
$\Delta=0$ ، فالمعادلة تقبل حلا مضعفا x_0 حيث $x_0=\frac{-(-4)}{2\times6}=\frac{1}{3}$.
إذن مجموعة الحلول هي $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

هـ) في المعادلة $-2x^2+7x-3=0$ ، لدينا $\Delta=(7)^2-4\times(-2)\times(-3)=25$.
$\Delta>0$ ، فالمعادلة تقبل حلّين مختلفين x_1 و x_2 حيث:

$$x_1=\frac{-7-\sqrt{25}}{2\times(-2)}=3 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-7+\sqrt{25}}{2\times(-2)}=\frac{1}{2}$$

إذن مجموعة الحلول هي $\left\{3\,;\frac{1}{2}\right\}$.

4. حلّ معادلة من الدرجة الثانية باستعمال حاسبة بيانية

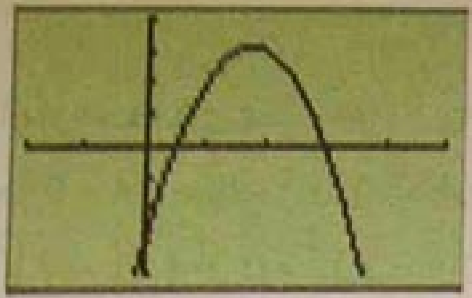
طريقة

لحلّ معادلة من الدرجة الثانية باستعمال حاسبة بيانية، نتبع الخطوات التالية:

- نحجز عبارة الدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.
- نظهر التمثيل البياني للدالة على الشاشة بالضغط على اللمسة TRACE .
- نقرأ على الشاشة عدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة مع محور الفواصل، فواصل هذه النقط هي حلول المعادلة.
- عموما، نعطي قيما مقربة للحلول عند وجودها.

تمرين

حلّ، باستعمال حاسبة بيانية، المعادلة $-2x^2+7x-3=0$.



حلّ

1. نحجز الدالة $x \mapsto -2x^2+7x-3$ وباختيار نافذة مناسبة، نحصل على المنحنى الممثل لها.

2. بقراءة مباشرة على الشاشة، نلاحظ أنّ المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطتين، فاصلتاهما حلا المعادلة.
بوضع الزالق على النقطتين، نقرأ الفاصلتين: $x_1 \approx 0,53191489$ و $x_2 \approx 2,9893617$
وهما قيمتان مقربتان للحلين المضبوطين $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = 3$ للمعادلة $-2x^2+7x-3=0$.

5. حلّ متراجحة من الدرجة الثانية

طريقة

لحلّ متراجحة من الدرجة الثانية، نتبع الخطوات التالية:
- نحلّ المعادلة المرفقة.
- نعيّن إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.
- نستنتج حلول المتراجحة.

تمرين

حلّ في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات الآتية:

أ) $-x^2+2x-3<0$ ب) $2x^2+x-3\geq 0$ جـ) $25x^2-20x+4\leq 0$

حلّ

أ) حلّ المتراجحة $-x^2+2x-3<0$:
لدينا $\Delta = 2^2-4\times(-1)\times(-3)=-8$. إذن $\Delta<0$.
فالمعادلة $-x^2+2x-3=0$ ليس لها حلول.
ومنه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $-x^2+2x-3$ لا ينعدم وهو من إشارة -1 (أي سالب).
إذن مجموعة حلول المتراجحة $-x^2+2x-3<0$ هي $\mathbb{R}$.

ب) حلّ المتراجحة $2x^2+x-3\geq 0$:
لدينا $\Delta = 1^2-4\times 2\times(-3)=25$. إذن $\Delta>0$.

فالمعادلة $2x^2+x-3=0$ تقبل حلين مختلفين، هما $x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$ و $x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 2} = 1$
ومنه إشارة ثلاثي الحدود $2x^2+x-3$ كما في الجدول:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن مجموعة حلول المتراجحة $2x^2+x-3\geq 0$ هي $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup [1 ; +\infty[$.

ج) حلّ المتراجحة $25x^2-20x+4 \le 0$:

المتراجحة $25x^2-20x+4 \le 0$ تكافئ $(5x-2)^2 \le 0$.

أي $(5x-2)^2 < 0$ أو $(5x-2)^2 = 0$.

أي $5x-2=0$ (لأنّ $(5x-2)^2$ لا يكون سالبا).

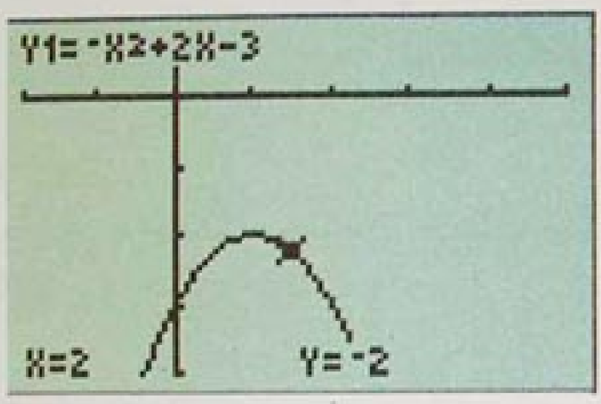
ومنه $x = \frac{2}{5}$.

إذن مجموعة حلول المتراجحة $25x^2-20x+4 \le 0$ هي $\left\{ \frac{2}{5} \right\}$.

ملاحظة

يمكن أن نتحقق من الحلول بيانيا، برسم المنحني الممثل للدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية وملاحظة الوضع النسبي له مع محور الفواصل.

في السؤال أ) مثلا، نرسم المنحنى الممثل للدالة: $x \mapsto -x^2+2x+3$
ونجد الشكل المقابل.



نلاحظ أن المنحنى يقع تحت محور الفواصل ولا يقطعه.
هذا ما يؤكد النتائج المحصل عليها بالحساب.

6. حلّ مشكلات باستعمال معادلات (أو متراجحات) من الدرجة الثانية

طريقة

لحلّ مشكلة باستعمال معادلة (أو متراجحة)، نتبّع الخطوات التالية:
- نختار مجهولا.
- نترجم المشكلة بمعادلة (أو متراجحة).
- نحلّ المعادلة (أو المتراجحة).
- نتحقق من انسجام الإجابة مع معطيات المشكلة.

تمرين 1

عيّن أطوال أضلاع مثلث قائم، علما أنّ أطوال هذه الأضلاع أعداد طبيعية متتابعة.

حلّ

- نفرض أنّ أطوال أضلاع المثلث هي $x-1$ و x و $x+1$ حيث x عدد طبيعي أكبر من 1.
الضلع الأكبر في المثلث القائم هو الوتر، فيكون $x+1$ طول الوتر و $x-1$ و x طولي ضلعي الزاوية القائمة.

- وحسب نظرية فيثاغورس، يكون المثلث قائما إذا وفقط إذا كان $(x+1)^2 = x^2+(x-1)^2$.

المعادلة $(x+1)^2 = x^2+(x-1)^2$ تكافئ $x^2+2x+1 = x^2+x^2-2x+1$ أي $x^2-4x=0$.

- المعادلة $x^2-4x=0$ من الدرجة الثانية ولحلها نكتب:

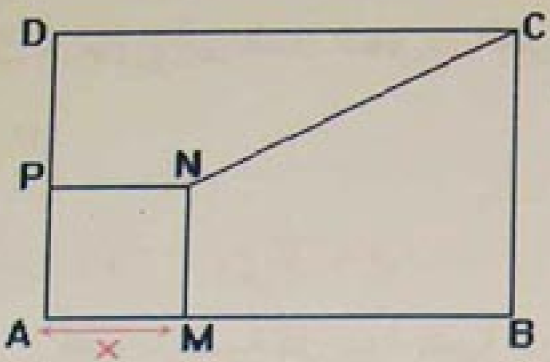
$x^2-4x=0$ يكافئ $x(x-4)=0$.

وبما أنّ $x\neq 0$، إذن $x(x-4)=0$ يكافئ $x-4=0$.

أي أنّ $x=4$.

- الحلّ $x=4$ يسمح بإيجاد مثلث قائم أطوال أضلاعه 3، 4، 5.

تمرين 2



ABCD مستطيل طوله 10cm وعرضه 6cm.

ننشئ مربعا AMNP، بحيث تكون M على $[AB]$ و P على $[AD]$. نضع $AM=x$.

1. احسب $a(x)$ مساحة شبه المنحرف $MNCB$ بدلالة x.
2. عيّن قيمة x التي من أجلها تكون المساحة $a(x)$ أعظمية (أكبر ما يمكن). احسب $a(x)$ في هذه الحالة.
3. هل توجد قيمة للعدد x تكون من أجلها مساحتا $MNCB$ و $PNCD$ متساويتين ؟
4. هل توجد قيم للعدد x تكون من أجلها المساحة $a(x)$ أصغر من مساحة المربع AMNP ؟

حلّ

1. حساب مساحة شبه المنحرف $MNCB$:

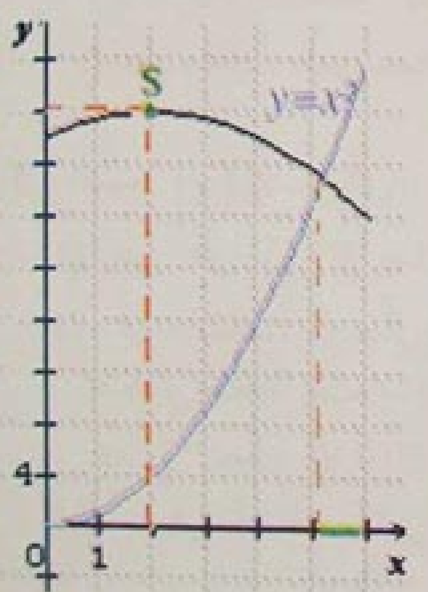
لدينا $a(x)=\dfrac{(x+6)(10-x)}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x^2-4x-60\right)$ و $0<x<6$.

2. نعلم أنّ المنحني الممثل للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$a(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2-4x-60\right)$$

قطع مكافئ، ذروته النقطة $S(2;32)$ (الشكل المقابل).

في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.



- على المجال $]0;6[$، تكون المساحة $a(x)$ أعظمية من أجل $x=2$، عندئذ $a(x)=32\,cm^2$.

3. لتكن $a'(x)$ مساحة شبه المنحرف $PNCD$، لدينا:

$$a'(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2+4x-60\right)$$

- نبحث عن وجود قيمة لـ x في المجال $]0;6[$، بحيث $a(x)=a'(x)$.

$a(x)=a'(x)$ يعني $-\dfrac{1}{2}(x^2-4x-60)=-\dfrac{1}{2}(x^2+4x-60)$، وهذا يعني $-x=x$.

منه $2x=0$. وبالتالي $x=0$.

لكن، $x\in]0;6[$ وبالتالي لا توجد قيمة لـ x بحيث $a(x)=a'(x)$.

4. لتكن $a''(x)$ مساحة المربع $AMNP$، لدينا $a''(x)=x^2$

نبحث عن وجود قيم لـ x في المجال $]0;6[$، بحيث $a(x)<a''(x)$.

لكن $a(x) < a''(x)$ يعني $x^2 < -\frac{1}{2}(x^2-4x-60)$.

فالمطلوب عندئذ، هو البحث عن قيم x في المجال $]0\,;6[$ التي من أجلها يكون المنحني الممثل للدالة $x \mapsto a(x)$ تحت المنحني الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ كما هو مبيّن في الشكل. وهو ما يعني حلّ، بيانيا، المتراجحة $a(x) < a''(x)$.

ملاحظة

يمكن الرجوع إلى الحلّ الجبري للمتراجحة $a(x)<a''(x)$ أي $\frac{3}{2}x^2-2x-30>0$ في المجال $]0;6[$.

★ تمرين 3: الربح الأعظمي

تنتج مؤسسة كلّ سنة كمية قدرها x من مادة معينة لتبيعها. نضع $C(x)$ الكلفة الإجمالية بالدنانير لإنتاج الكمية x. نفرض أنه من أجل كلّ عدد x من المجال $[0\,;9\,000]$، يكون:

$$C(x)=\frac{1}{50}x^2+20x+150\,000$$

1. احسب الكلفة الإجمالية للإنتاج من أجل $x=100$ ؛ $x=1\,000$ ؛ $x=5\,000$ ؛ $x=7\,500$.

2. لتكن $R(x)$ الحصيلة بالدنانير الناتجة عن بيع الوحدة بسعر 190 دينارا.
أ) احسب الحصيلة $R(x)$ بدلالة x ثمّ من أجل $x=100$ ؛ $x=1\,000$ ؛ $x=5\,000$ ؛ $x=7\,500$.
ب) هل حققت المؤسسة ربحا من أجل هذه الكميات المنتجة والمبيعة ؟

3. نضع $B(x)=R(x)-C(x)$ من أجل x من المجال $[0\,;9\,000]$.
أ) عبّر عن $B(x)$ بدلالة x.
ب) عيّن، بيانيا، المجال الذي ينبغي أن ينتمي إليه x حتى تكون المؤسسة رابحة.
(نختار معلما متعامدا ومتجانسا. على محور الفواصل $1cm$ يمثل 1000 وعلى محور التراتيب $1cm$ يمثل 50000).
جـ) ما هي قيمة x التي يكون من أجلها الربح أعظميا ؟ ما هو هذا الربح ؟

حلّ

1) للإجابة على السؤال 1 ولإجراء الحسابات المطلوبة، نستعمل مجدول اكسال كما هو مبيّن على الشكل المقابل.

B2 fx =(1/50)*A2^2+20*A2+150000

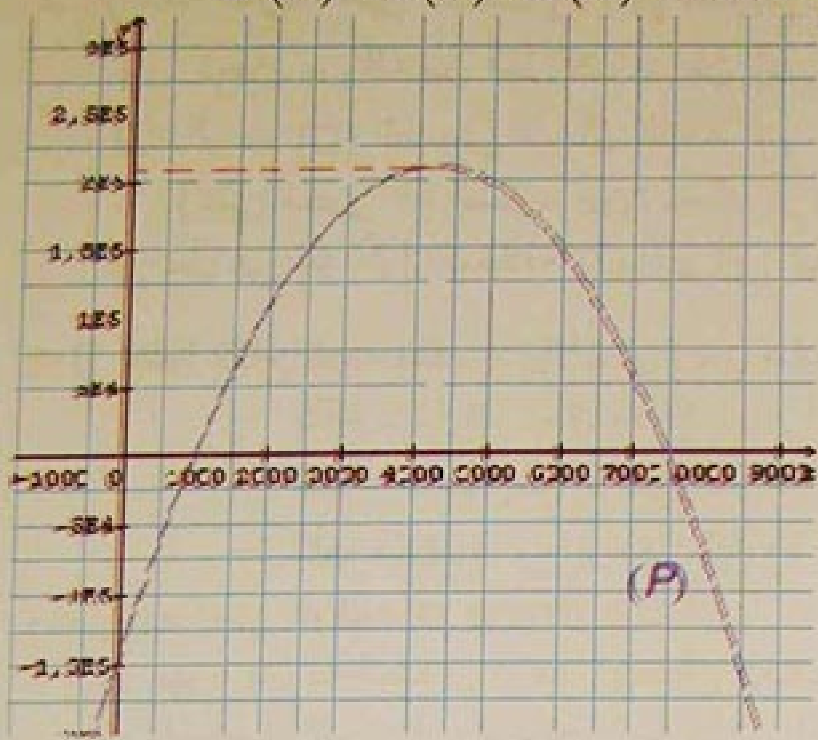
	A	B	C	D
1	x	C(x)	R(x)	B(x)
2	100	152200	19000	-133200
3	1000	190000	190000	0
4	5000	750000	950000	200000
5	7500	1425000	1425000	0
6				

وبقراءة مباشرة للعمود D، نستنتج أن المؤسسة تخسر 200 133 دينارا عندما تنتج وتبيع كمية $x=100$ وتحقق ربحا قدره 000 200 دينارا من أجل $x=5\,000$. بينما من أجل الكميتين $x=1\,000$ و $x=7\,500$ فهي تحقق التوازن بين $R(x)$ و $C(x)$.

2) $R(x)=190x$ حيث x من المجال $[0\,;9\,000]$.

3. أ) عبارة $B(x)$ بدلالة x: $B(x)=R(x)-C(x)=190x-\frac{1}{50}x^{2}-20x-150\,000$

أي أن $B(x)=-\frac{1}{50}x^{2}+170x-150\,000$



• B هي دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية للمتغيّر x.

ندرس هذه الدالة ونمثلها في معلم متعامد ومتجانس حسب المقياس المعطى ونجد:

ب) تكون المؤسسة رابحة من أجل $x\in]1000\,;7\,500[$.

ج) يكون الربح أعظميا من أجل $x=4\,250$

وهو $B(4250)=211250$.

أي يبلغ هذا الربح 211250 دينارا.

مسألة محلولة

مسألة

I. f دالة معرّفة على المجال $[1;9]$ كما يلي: $f(x)=-5000(x^2-10x+16)$.

1. تحقق من أنه من أجل كلّ x من $[1;9]$، $f(x)=-5000(x-5)^2+45000$.
2. أرسم (C) المنحني الممثل للدالة f.
(على محور الفواصل، $1cm$ يمثل 1 و على محور التراتيب، $1cm$ يمثل 10000).
3. حلّ في $[1;9]$ المعادلة $f(x)=0$. استنتج إشارة $f(x)$ عندما يتغير x في $[1;9]$.

★ II. كلفة إنتاج كمية (مقدرة بالأطنان) من مادة معينة من طرف مؤسسة هي كما يلي:
- كلفة ثابتة قدرها $80\,000$ دينارا.
- كلفة متناسبة مع الإنتاج قدرها 45000 دينارا للطن الواحد.
- كلفة متناسبة مع مربع الإنتاج، معامل التناسبية هو 5000.

وثمن بيع الطن الواحد هو 95000 دينارا.

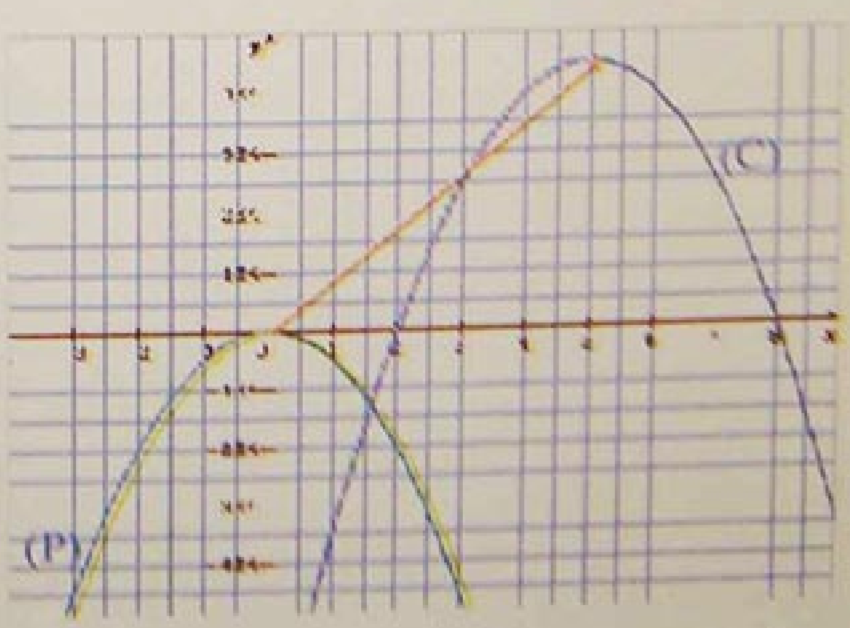
1. عبّر، بدلالة العدد x (عدد الأطنان المنتجة) عن ربح المؤسسة.
2. باستعمال الجزء I ، استنتج قيمة x من $[1;9]$ التي من أجلها يكون ربح المؤسسة أعظميا.
احسب هذا الربح. تحقق من النتيجة بالحساب.

حلّ

I. 1) من أجل كلّ x من $[1;9]$،

$$f(x)=-5000(x-5)^2+45000$$
$$=-5000(x^2-10x+25)+45000$$
$$=-5000(x^2-10x+25-9)$$
$$=-5000(x^2-10x+16)$$

2) المنحني (C) الممثل للدالة f هو صورة المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto -5000x^2$ بالانسحاب الذي شعاعه $5\vec{i}+45000\vec{j}$



3) المنحني (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما هما حلا المعادلة $f(x)=0$ في $[1;9]$.

إذن مجموعة حلول المعادلة هي $\{2;8\}$.

باستعمال المنحنى (C) نستنتج إشارة f :

x	1		2		8		9
$f(x)$		-	0	+	0	-	

II. الكلفة الإجمالية للإنتاج $C(x)$ هي:

$$C(x)=5\,000x^2+45\,000x+80\,000$$

نضع $R(x)$ و $B(x)$ دخل وربح المؤسسة على الترتيب، لدينا $B(x)=R(x)-C(x)$ ونجد:

$$B(x)=95000x-(5000x^2+45000x+80000)$$

أي أنّ: $B(x)=-5000(x^2-10x+16)$.

حسب نتائج الجزء I، يكون الربح أعظميا عندما تبيع المؤسسة منتوج 5 أطنان ونجد بقراءة بيانية: $B(5)=45000$.

تحقيق: $B(x)=-5000(x-5)^2+45000$

أي أنّ $B(x)=5000\left[9-(x-5)^2\right]$.

بما أنّ $(x-5)^2\geq 0$ من أجل كلّ عدد x،

فإنّ $9-(x-5)^2\leq 9$ وبالتالي $B(x)\leq 45000$.

فالدالة B تبلغ قيمتها الكبرى عندما يكون $(x-5)^2=0$ أي $x=5$.

1. صحيح أو خاطئ:

أ) الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $-x^2+2x-4$ هو $-(x-1)^2+3$

ب) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $f(x)=x(x+1)$ يشمل مبدأ المعلم.

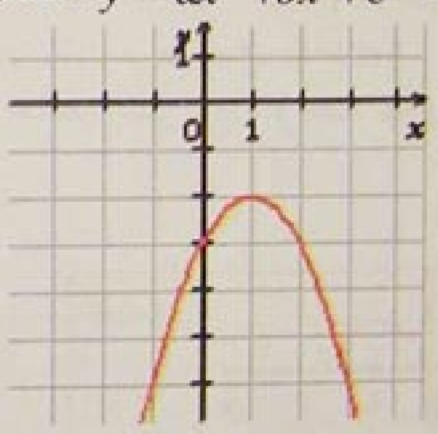
ج) القطع المكافئ الذي معادلته $y=4x^2+7x+4$ يقطع محور الفواصل في نقطتين.

د) المعادلة $3x^2-3x=x(x+1)$ تكافئ $3(x-1)=x+1$.

هـ) مميّز المعادلة $x^2+5x=-4$ هو $\Delta=41$.

و) من أجل ثلاثي الحدود $-3x^2+4x-2$، لدينا $\Delta=-8$ و $a<0$.

ز) إذا كان $\Delta>0$ و $a<0$، فإنّ للقطع المكافئ الذي معادلته $y=ax^2+bx+c$ الشكل الآتي:



ي) مجموعة حلول المتراجحة $-x^2+2x-3\leq 0$ هي $\mathbb{R}$.

الشكل النموذجي لثلاثي الحدود

2. نريد تعيين الشكل النموذجي لثلاثي الحدود x^2-6x+2.

أ) انشر $(x-3)^2$.

ب) أكمل ما يلي:

$x^2-6x=(x-3)^2-\ldots$

حـ) ماذا تستخلص ؟

3. عيّن الشكل النموذجي لكلّ ثلاثي حدود مما يلي:

أ) x^2+4x+3 حـ) $-3x^2+x+1$

ب) x^2-5x-1 د) $4x^2-x+1$

4. نفس السؤال السابق.

أ) x^2-6x+2

ب) $-3x^2+3x+1$

حـ) x^2+2x

5. $P(x)$ ثلاثي الحدود، حيث:

$P(x)=-3x^2-5x+1$

أ) اكتب $P(x)$ على الشكل النموذجي.

ب) استنتج أنه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $P(x)\leq\frac{37}{12}$.

6. عيّن، في حالة وجودها، جذور كلّ ثلاثي حدود مما يلي ثمّ حلله.

أ) $x^2-10x+21$ حـ) $4t^2-4\sqrt{3}t+3$

ب) $x^2-0,49$ د) $-x^2-5x-60$

7. حلل بسط ومقام كلّ من العبارتين الناطقتين التاليتين ثمّ اختزل عند الإمكان.

أ) $\frac{x^2+x-2}{x^2+1}$ ب) $\frac{2x^2+5x+2}{4x^2-1}$

8. بفرض $P(x)=-x^2+2x+15$

1) تحقق من أنّ $P(x)=-(x-1)^2+16$

استنتج تحليلا لـ $P(x)$.

2) باستعمال العبارة المناسبة:

أ) احسب $P(1)$ و $P(0)$.

ب) بيّن أنّ $P(x)$ يقبل قيمة حدية يطلب تعيينها

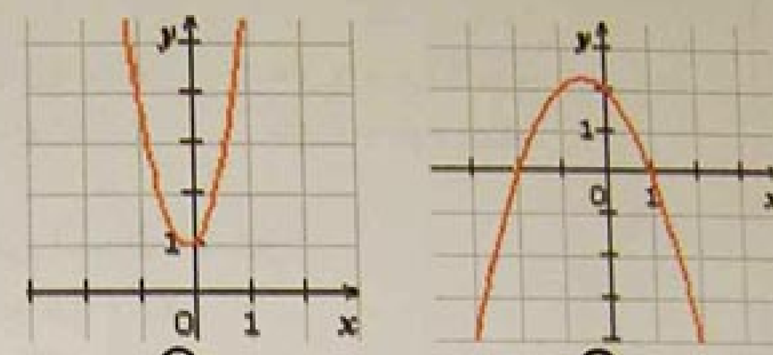
ج) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين $P(x)=0$ و $P(x)=15$.

الدالة ثلاثي الحدود

9. أرفق كلّ دالة بتمثيلها البياني.

أ) $x \xrightarrow{f} -x^2 - x + 2$

ب) $x \xrightarrow{g} 4x^2 + x + 1$



10. ادرس تغيّرات كلّ دالة مما يلي ثمّ ارسم تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) $x \xrightarrow{f} x^2 - 4x + 5$

ب) $x \xrightarrow{g} -2x^2 - x + 6$

11. أ) عيّن دالة ثلاثي حدود f ذات جدول التغيرات أسفله.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$\frac{9}{2}$	↘	

ب) نفس السؤال السابق من أجل الجدول أسفله.

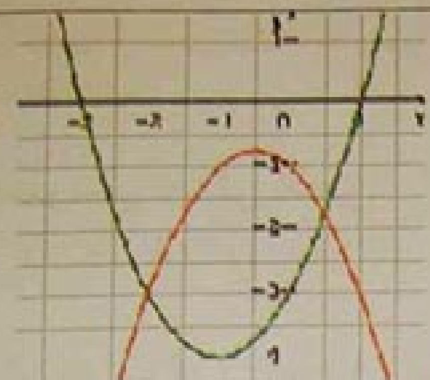
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

12. f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = ax^2 - x - 1$$

$$g(x) = x^2 + 2x - c$$

تمثيلاهما البيانيان كما في الشكل.



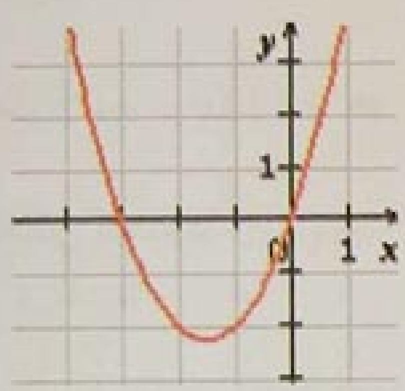
أرفق كلّ دالة بتمثيلها البياني ثمّ عيّن a و c.

13. نعتبر الدالتين المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 3x^2 - x - 1$$

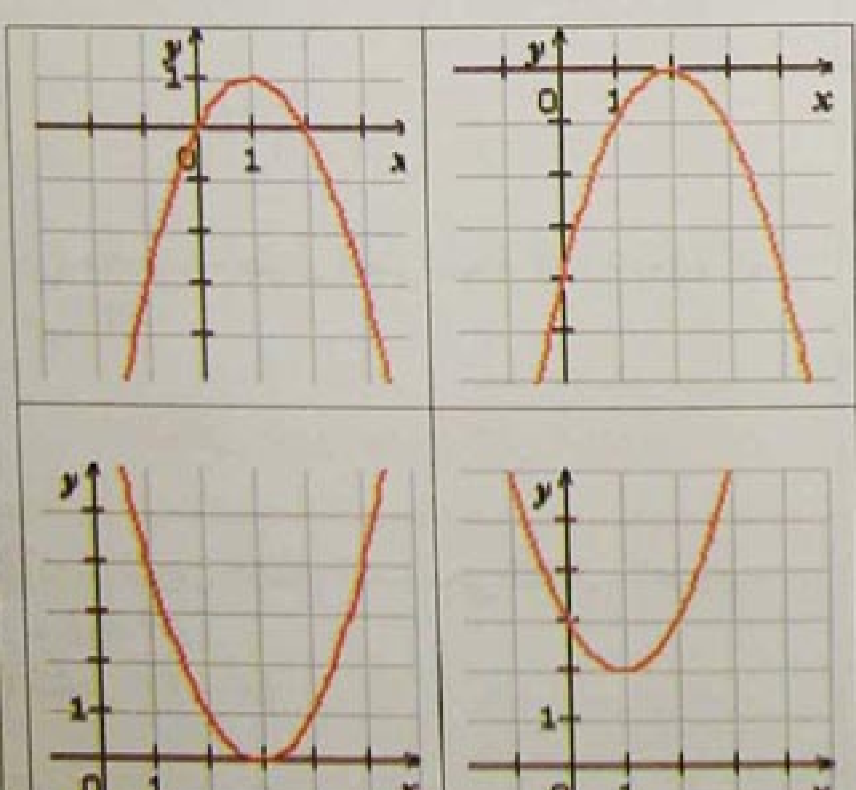
$$g(x) = x^2 + 5x$$

من بين هاتين الدالتين، ما هي الدالة الممثلة كما يلي ؟ برّر إجابتك.



14. إليك التمثيلات البيانية لأربع دوال من الشكل $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$ (مع $a \neq 0$).

عيّن، في كلّ حالة، إشارة a وعدد جذور $f(x)$ وإشارة المميّز.



15. 1) أظهر على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين الممثلين للدالتين f و g حيث:

$x \xrightarrow{f} 13x-12$ و $x \xrightarrow{g} x^2+6x+3$

2) هل يتقاطع المنحنيان ؟

3) تحقق من ذلك حسابيا.

المعادلات من الدرجة الثانية

16. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية دون استعمال المميّز.

أ) $x^2+1=0$ ، حـ) $x^2-3x=0$

ب) $x^2=2$ ، د) $(x-1)^2-(2-3x)^2=0$

17. حلل باستعمال متطابقة شهيرة أو بأخذ عامل مشترك ثمّ حلّ المعادلات في $\mathbb{R}$.

أ) $x^2+4x+4=0$

ب) $(2x-1)^2=4x^2-2x$

حـ) $-3x^2+6x-3=0$

د) $25x^2-10x+1=0$

هـ) $(2x+3)^2=(4x^2-9)$

18. اكتب $P(x)$ على الشكل النموذجي ثم حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

أ) $P(x)=4x^2-7x-11$

ب) $P(x)=3x^2-7x+4$

حـ) $P(x)=-2x^2+3x+1$

19. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

أ) $3x^2+5x-12=0$

ب) $6x^2-11x+4=0$

حـ) $2x^2+\sqrt{3}x-3=0$

د) $25x^2-10x+1=0$

هـ) $x^2+1.5x=1$

20. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

أ) $(2x+1)^2=-2x+5$

ب) $x^3+x^2-x=0$

حـ) $(x+2)(x^2-3)=(2x+3)(x^2+x-2)$

21. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

أ) $x-1=\dfrac{x}{x+1}$

ب) $\dfrac{3x+1}{x-2}=\dfrac{x+2}{3x+1}$

22. نسمّي معادلة مُضعّفة التربيع ذات المجهول x كلّ معادلة من الشكل $ax^4+bx^2+c=0$ مع $a\neq 0$. ولحلّ مثل هذه المعادلة، نضع $y=x^2$ ...

تطبيق: حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^4-2x^2-8=0$.

23. بتطبيق الطريقة السابقة، حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين:

أ) $-2x^4+3x^2-1=0$

ب) $x^4+5x^2+4=0$

إشارة ثلاثي الحدود

24. ادرس إشارة كلّ ثلاثي حدود مما يلي:

أ) x^2+x-6 ، حـ) $x^2+3x-40$

ب) $-2x^2-x+3$ ، د) $-x^2+2x+48$

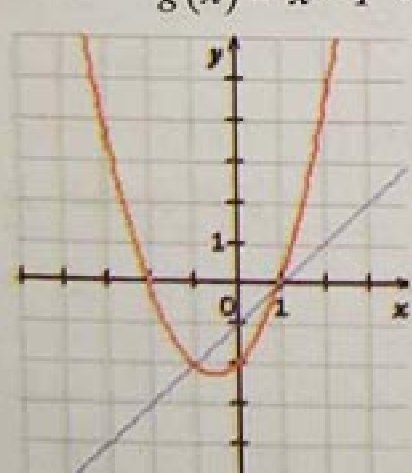
25. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحات الآتية:

أ) $x^2-7x+10<0$ ، ب) $2x^2-x+5\le 0$

حـ) $6x^2+8x-\dfrac{8}{3}\ge 0$ ، د) $9x^2+6x+1\ge 0$

26. يُعطى في الشكل الموالي التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=x^2+x-2$ ؛ $g(x)=x-1$



1. عيّن حسابيا:

أ) نقط تقاطع القطع المكافئ مع محور الفواصل.

ب) نقط تقاطع القطع المكافئ مع محور التراتيب.

جـ) نقط تقاطع القطع المكافئ مع المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$.

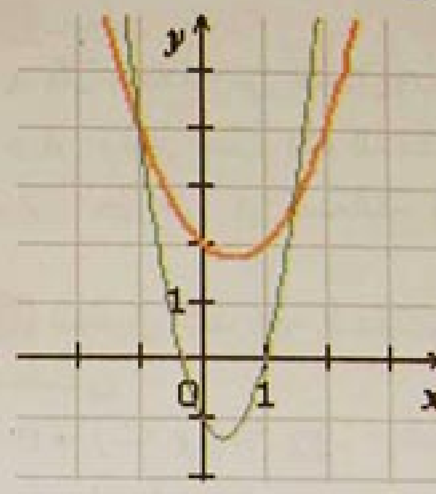
2. تحقق بيانيا من النتائج.

27. حدد بيانيا نقط تقاطع المنحنيين الممثلين للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x^2 - x + 2$ ؛

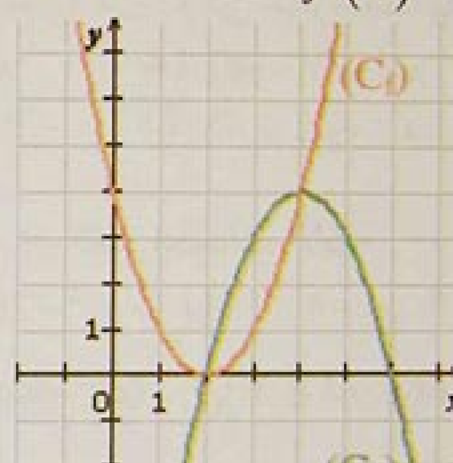
$g(x) = 3x^2 - 2x - 1$

ثم تحقق من ذلك حسابيا.



28. يعطي في الشكل الموالي التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g(x) = -x^2 + 8x - 12$ ؛ $f(x) = x^2 - 4x + 4$



حلّ بيانيا المتراجحة $f(x) \le g(x)$ وتحقق من ذلك حسابيا.

29. الغرض من هذا التمرين هو دراسة إشارة $f(x)$ حيث

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - 3x - 2)$$

أ) أكمل الجدول الآتي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$x-1$			0		
$2x^2-3x-2$		0		0	
$f(x)$		0	0	0	

ب) استنتج حلول المتراجحة $f(x) < 0$ في $\mathbb{R}$.

30. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحتين:

أ) $(-6x^2 + x + 2)(x + 2) \ge 0$

ب) $3x^2 - x - 10 \ge 0$

31. عيّن دون استعمال المميّز جذور ثلاثي الحدود الوارد في الطرف الأوّل لكلّ متراجحة ثمّ حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة:

أ) $(x+1)(x-4) \ge 0$

ب) $-5x^2 + 2x \le 0$

جـ) $1 - 3x^2 < 0$

32. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحتين:

أ) $\dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 2x} < 0$

ب) $\dfrac{x^2 + 5}{x - 1} > 3$

33. نفس السؤال السابق.

أ) $\dfrac{3x^2 + x - 3}{x^2 + 4x - 3} \le 0$

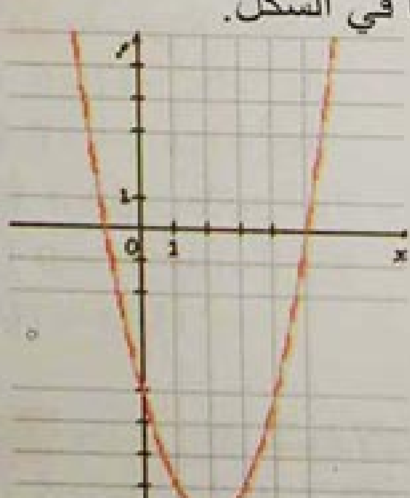
ب) $\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x^2 + 1} < 0$

حلّ معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية بيانيا.

34. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور:

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

وتمثيلها البياني معطى كما في الشكل.



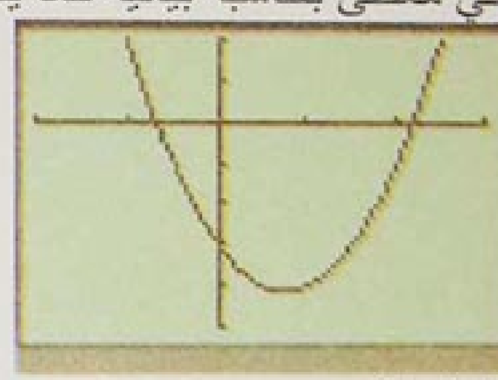
أ) احسب السوابق الممكنة لكلّ من الأعداد 0 و $5-$ و $9-$ و $10-$ بالدالة f .

ب) تحقق من النتائج بيانيا.

35. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور:
$$f(x) = -x^2 - 4x + 5$$
أ) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.
ب) أظهر المنحنى الممثل للدالة f على شاشة حاسبة بيانية ثمّ تحقق من النتائج المحصل عليها في السؤال أ).

36. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور:
$$f(x) = -3x^2 + 2x - 1$$
أ) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f(x) < 0$.
ب) تحقق من النتائج باستعمال حاسبة بيانية.

37. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور:
$$f(x) = 2x^2 - 3x - 3$$
تمثيلها البياني معطى بحاسبة بيانية كما يلي:

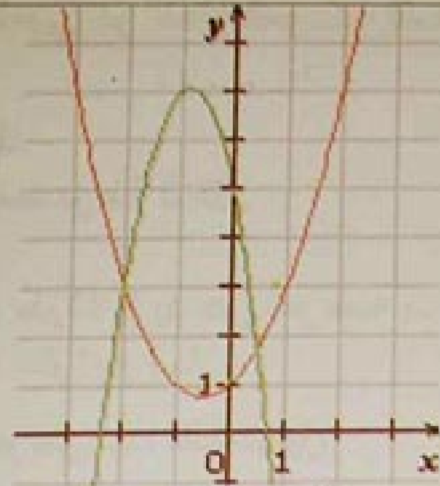


هل يمكن القول إنّ:
أ) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 .
ب) من أجل كلّ x من $]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$ ، $f(x) \geq 0$.

38. عيّن احداثيات النقط المشتركة للقطعين المكافئين اللذين معادلتاهما:
$$y = x^2 - 2x - 8 \quad \text{و} \quad y = -2x^2$$
تحقق بحاسبة بيانية.

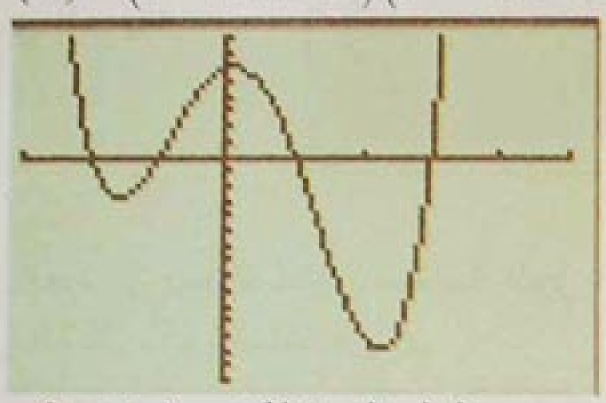
39. 1) مثّل باستعمال حاسبة بيانية الدالتين المعرفتين كما يلي:
$$x \xrightarrow{f} x + 2 \quad \text{و} \quad x \xrightarrow{g} x^2 + x - 2$$
2) بقراءة بيانية، حلّ المتراجحة $f(x) \leq g(x)$.
3) تحقق من النتائج حسابيا.

40. الدالتان الممثلتان كما في الشكل معرفتان كما يلي:
$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = -3x^2 - 5x + 5$$



عيّن القيم المضبوطة لإحداثيات نقط تقاطع المنحنيين.

41. بفرض (C) المنحني الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 4x + 3)$$



أ) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟
ب) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.
ج) باستعمال (C)، مثّل حلول المتراجحة $f(x) < 0$.
د) حلّ المتراجحة $f(x) < 0$.

مسائل

42. عيّن عددين طبيعيين متعاقبين بحيث يكون جداؤهما مساويا $341\ 640$.

43. هل توجد أعداد صحيحة نسبية x بحيث $x^2 = x + 1$ ؟ $x^2 = x - 1$ ؟

44. عيّن أطوال أضلاع مثلث قائم علما أنّ هذه الأطوال أعداد زوجية متعاقبة.

45. مثلث قائم وتره 47 ومحيطه 108.
عيّن أطوال أضلاعه.

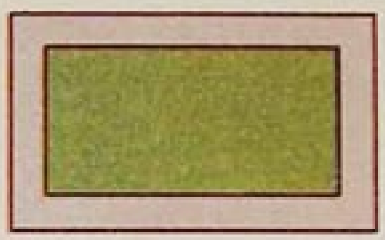
46. العدد الذهبي هو الحلّ الموجب للمعادلة:

$$x^2 = x + 1$$

ونرمز إليه Φ.
أعط القيمة المضبوطة لـ Φ.

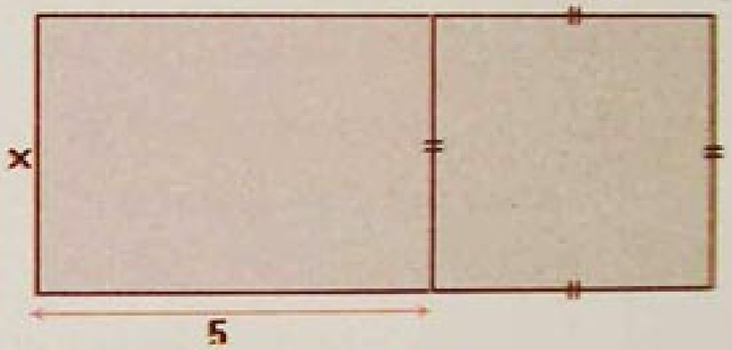
47. مستطيل طوله يزيد عن عرضه بـ 7 أمتار ومساحته 60 مترا مربعا.
عيّن طول وعرض هذا المستطيل.

48. حديقة مستطيلة محيطها $280m$. خصّص منها صاحبها ممرا عرضه $2m$ (كما في الشكل)، فبقيت مساحة قدرها $4\,256m^2$ صالحة للزراعة.



عيّن بُعدي الحديقة.

49. عيّن العدد x بحيث تكون مساحة الجزء المظلل في الشكل أكبر تماما من 6.



50. وضع شخص $250\,000$ دينارا في البنك بكيفيتين:

- جزء A بفائدة قدرها $t\ \%$.
- الجزء الآخر B بفائدة قدرها $(t+1)\ \%$.

عند نهاية السنة، جلب المبلغ A فائدة قدرها 4000 دينارا وجلب المبلغ B فائدة قدرها 7500 دينارا.

أ) بيّن أن t حلّ للمعادلة: $\frac{40}{t} + \frac{75}{t+1} = 25$.

ب) احسب t ثمّ A و B.

51. تعطى كلفة إنتاج مادة بالعبارة:

$$C(x) = \frac{x^3}{27} - 10\frac{x^2}{3} + 150x.$$

الكلفة المتوسطة هي: $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$

(مع $x > 0$).

1. عبّر عن $C_M(x)$ بدلالة x.

2. احسب $C_M(9)$ ثمّ حلّ المعادلة $C_M(x) = C_M(9)$.

3. عيّن الكمية x التي ينبغي أن تنتجها هذه المؤسسة حتى تكون الكلفة المتوسطة للإنتاج أصغرية.

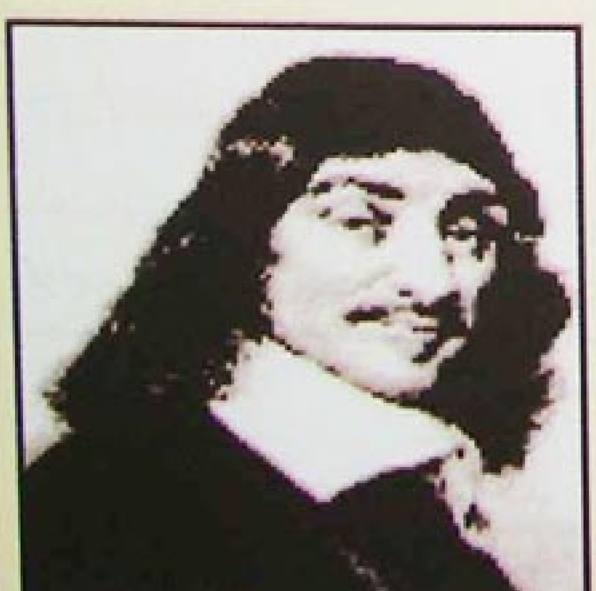
الباب 5 الإشتــــقـــاق

يقول «ديكارت» حول مماسات منحن :

«إني لا أتوانى عن القول أن هذا الموضوع هو الأجدى والأعم حسب إعتقادي. إنه الشيء الذي لم أتوقع أني سأبحث فيه في يوم ما في ميدان الهندسة.»

إن الأبحاث المنجزة في القرن السابع عشر في ميادين متنوعة مثل: الميكانيك، علم الفلك، الضوء... أدت بالعلماء إلى طرح العديد من المشاكل حول مماسات منحن، كتعيين مماس منحن عند نقطة منه، وتعيين مماس منحن يوازي مستقيما معلوما،... ثم حلها.

أدت هذه الأعمال بالكثير من العلماء مثل: ديكارت، نيوتن، ليبنيز، أولر، لاڤرانج، كوشي،... إلى إستنباط مفهوم المشتق المستعمل في يومنا هذا في الرياضيات والعلوم الفيزيائية والعلوم الإقتصادية.

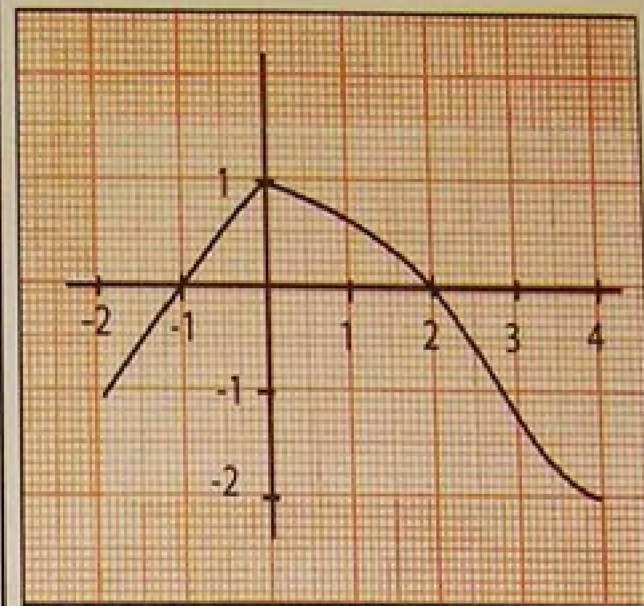


ديكارت (1569 - 1650)

استبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة

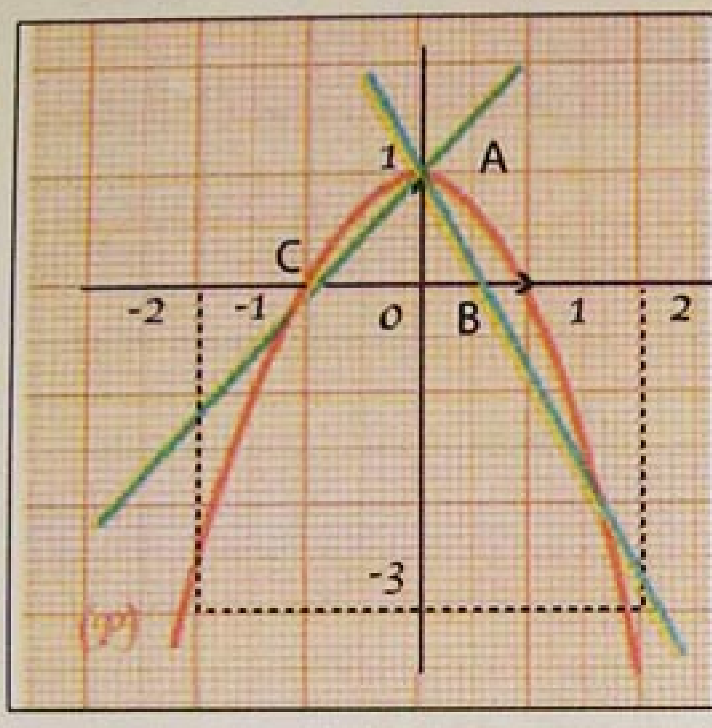
السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1) المستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (D) مستقيم معادلته $y = 3x - 5$. معامل توجيه المستقيم (D) هو . . .	3	- 5	$\frac{5}{3}$
2) المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ $A(x_o;y_o)$، $B(x_1;y_1)$ نقطتان من المستوي حيث $x_1 \neq x_o$. معامل توجيه المستقيم (AB) هو . . .	$y_1 - y_o$	$x_1 - x_0$	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
3) المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $y = -2x + 1$. للمستقيم (D) شعاع توجيه مثل . . .	$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$
4) f دالة معرفة على مجال I يشمل العددين x_o و x_1 حيث $x_1 \neq x_o$. تزايد الصورة بين x_o و x_1 هو . .	$f(x_1) - f(x_0)$	$x_1 - x_o$	$\frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$
5) f دالة معرفة على مجال I يشمل العددين x_o ، x_1 حيث $x_1 \neq x_o$. نسبة تزايد الدالة f بين x_o و x_1 هي . . .	$f(x_1) - f(x_0)$	$x_1 - x_o$	$\frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$

6) f دالة معرفة على المجال $[-2;4]$ بتمثيلها البياني التالي :  الدالة f ...	متزايدة على المجال $[-2;4]$.	متناقصة على المجال $[-2;4]$.	متزايد على المجال $[-2;0]$. ومتناقصة على المجال $[0;4]$.
7) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-1$. الدالة f تقبل...	القيمة الكبرى -1 عند العدد 0.	القيمة الصغرى -1 عند العدد 0.	لا تقبل قيمة حدية على $\mathbb{R}$.
8) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=-x^2+1$. الدالة f تقبل...	القيمة الكبرى 1 عند العدد 0 .	القيمة الصغرى 1 عند العدد 0 .	لا تقبل قيمة حدية على $\mathbb{R}$.

نشاط 3 : مستقيمات قاطعة لمنحن تشمل نقطة

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x^2 + 1$

(P) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$



الهدف هو دراسة معامل توجيه كل مستقيم يقطع (P) في النقطة A.

1) أحسب معامل توجيه كل من المستقيمين (AB) و (AC).

2) h عدد حقيقي غير منعدم و M النقطة من (P) التي فاصلتها $1+h$.

أ) بين أن معامل توجيه القاطع (AM) للمنحنى (P) هو $m = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

ثم عبّر عن m بدلالة h.

ب) أكمل الجدول التالي:

h	- 0,1	- 0,01	- 0,001	0,001	0,01	0,1
m						

كيف تصبح قيم m عندما يأخذ h قيما « أقرب فأقرب » من العدد 0؟

نشاط 4 : مفهوم السرعة اللحظية

تُطلق كرية من نقطة 0 واقعة على ارتفاع 10m من السطح (P)،

تعطي المسافة $d(t)$ التي تقطعها الكرية عند اللحظة t

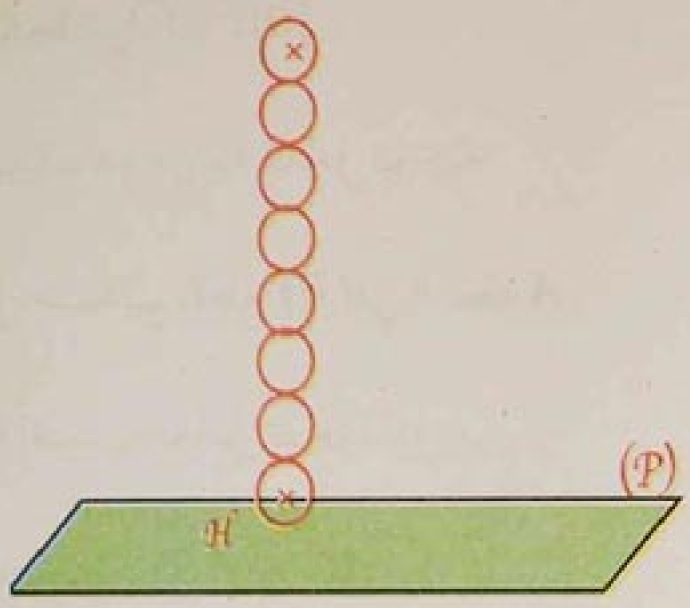
بالدستور: $d(t)=5t^2$ حيث تقدر t بالثواني و$d(t)$ بالأمتار.

يرمز $v(t)$ إلى سرعة الكرية في اللحظة t.

في اللحظة $t=2$، تكون

سرعة الكرية المتحركة هي $v(2)$.

كيف تحسب هذه السرعة اللحظية؟



(يمكن إستعمال السرعة المتوسطة بين اللحظتين 2 و $2+h$ عندما يكون h قريبا من العدد 0).

1 – تحقق أن السرعة المتوسطة للكرية بين اللحظتين 2 و $2+h$ هي $5h+20$.

(نذكر أن السرعة المتوسطة بين t و $t+h$ حيث $h \neq 0$ تحسب بالدستور التالي:

$$v(t)=\frac{d(t+h)-d(t)}{h}$$.)

2 – احسب قيم هذه السرعة المتوسطة الموافقة لقيم h التالية:

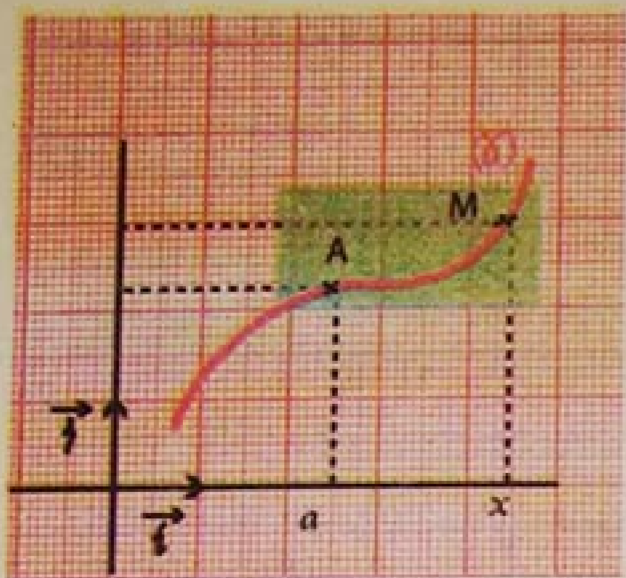
$-0{,}1$ ؛ $-0{,}05$ ؛ $0{,}05$ ؛ $0{,}01$ ؛ $0{,}0001$.

1 - العدد المشتق

f دالة معرفة على مجال I ؛ a عنصر من I.

(γ) المنحنى الممثل لها في المستوي

المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل)



A و M نقطتان من المنحنى (γ)، إحداثيا هما

$(a;f(a))$ ؛ $(x\,;\,f(x))$ بهذا الترتيب .

عندما يأخذ x قيما أقرب فأقرب من a

يأخذ $f(x)$ قيما أقرب فأقرب من $f(a)$.

وبالتالي M تقترب أكثر فأكثر من النقطة

الثابتة A.

أ - النهاية عند 0

نقبل أن :

إذا كانت الدالة f معرفة على مجال I يشمل العدد 0 فإن حساب نهاية f عند 0 يؤول إلى حساب $f(0)$.

نكتب : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

ونقرأ : نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 0 تساوي $f(0)$.

مثال

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

f معرفة على $\mathbb{R}$ وبالتالي f معرفة عند العدد 0 و$f(0) = 3$.

عندما يؤول x إلى العدد 0 فإن $f(x)$ يؤول إلى $f(0)$.

إذن $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x + 3) = 3$

أي $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

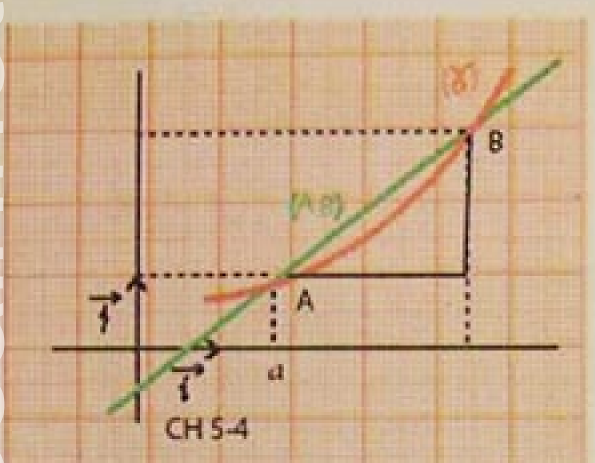
ب – نسبة تزايد دالة بين عددين حقيقيين

تعريف

a ، b عددان حقيقيان مختلفان من المجال I .نسبة تزايد الدالة بين b و a هي النسبة $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

التفسير البياني

النسبة $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هي معامل توجيه المستقيم (AB) القاطع للمنحنى (γ)
حيث $A(a;f(a))$ و $B(b;f(b))$ نقطتان من المنحنى (γ).



بوضع $b=a+h$ ، يكون $b-a=h$ ونسبة
تزايد f بين a و b تكتب $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
– يرمز عادة لهذه النسبة بالرمز $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

مثال 1

f هي الدالة « مربع » . من أجل $a=2$
تكون نسبة تزايد الدالة f بين 2 و $2+h$ هي :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}=\frac{(2+h)^2-4}{h}=\frac{h^2+4h}{h}=h+4$$

إذن : عندما يؤول h الى 0 فإن $2+h$ يؤول إلى 2
والعدد $h+4$ يؤول إلى 4 .
وبالتالي : $\lim\ (h+4)=4$

أي : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=4$ أو أيضا $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=4$

مثال 2

الكلفة الهامشية لوحدة منتجة . إذا كانت $C(x)$ هي الكلفة الإجمالية لإنتاج x وحدة فإن الكلفة الهامشية $C_m(x)$ المتعلقة بالوحدة المنتجة ذات الرقم x هي تزايد الكلفة عند إنتاج هذه الوحدة رقم x حيث $C_m(x)=C(x+1)-C(x)$.

جـ) العدد المشتق عند a

مبرهنة وتعريف

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a عدد حقيقي ينتمي إلى I.
إذا كانت نهاية الدالة $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ عددا حقيقيا
عندما يؤول h إلى 0 فإن الدالة f قابلة للإشتقاق عند a.
نهاية هذه الدالة، إن وجدت، تسمى العدد المشتق للدالة f عند a ونرمز لها بالرمز $f'(a)$

ونكتب $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

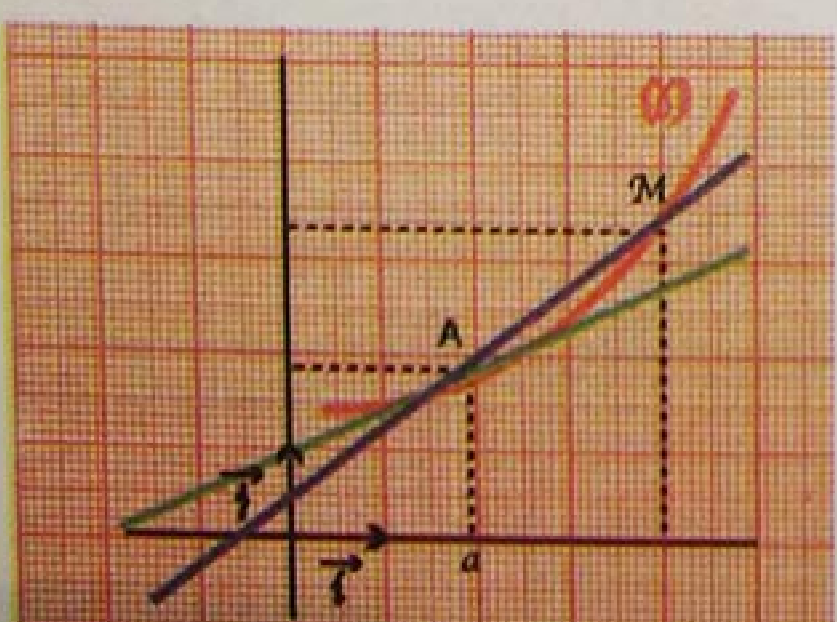
ملاحظة: إذا كان نهاية الدالة $h \longmapsto f'(a)$ غير منتهية
(أي$+\infty$ أو $-\infty$) فإن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند a .

مثال

f هي الدالة « مربع » .
– الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 (لأن $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
هي عدد حقيقي) .
– العدد المشتق للدالة f عند 2 هو $f'(2)$ حيث $f'(2)=4$.

التفسير البياني

f دالة قابلة للإشتقاق عند a.



(γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الشكل) .
A نقطة من (γ) فاصلتها a وترتيبها $f(a)$.
M نقطة متغيرة على (γ) فاصلتها $a+h$ وترتيبها $f(a+h)$؛ h عدد حقيقي قريب من العدد 0 .

عندما يؤول h إلى 0 فإن $a+h$ يؤول إلى a وبالتالي فالنقطة M تقترب من النقطة A.

إذن النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تؤول إلى العدد $f'(a)$.

والقاطع (AM) للمنحني (γ) يقترب من وضعية المستقيم (T). (الشكل)

وهي الوضعية "النهاية" للقاطع (AM)

2 - معادلة المماس لمنحنٍ عند نقطة

f دالة معرفة على مجال مفتوح I .

(γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

تعريف

نسمي مماسا للمنحنى (γ) عند نقطة A، فاصلتها a، المستقيم الذي يشمل A ومعامل توجيهه العدد المشتق للدالة f عند a.

- المعادلة المختصرة لهذا المماس هي: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

ملاحظة

إذا كان $f'(a) = 0$ فإن معادلة المماس (T) تكتب $y = f(a)$.

في هذه الحالة، المماس (T) يوازي محور الفواصل.

مثال : f هي الدالة « مربع » و (P) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- الدالة « مربع » قابلة للإشتقاق عند 2 و $f'(2) = 4$.

- معادلة المماس (T) للمنحنى (P) عند النقطة ذات الفاصلة 2 هي:
$y = f'(2)(x-2) + f(2)$

لدينا $f(2) = 4$. إذن المعادلة المختصرة للمماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة التي فاصلتها 2 هي : $y = 4x - 4$.

3 - الدوال المشتقة

أ- قابلية للإشتقاق لدالة على مجال

f دالة معرفة علي مجال I جزئي من $\mathbb{R}$.

مبرهنة

الدالة f قابلة للإشتقاق على I إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I .

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I فإن العدد المشتق للدالة f عند كل عدد حقيقي x من I موجود .

ب - الدالة المشتقة لدالة

f دالة معرفة علي مجال I جزئي من $\mathbb{R}$.

مبرهنة

الدالة f' المعرفة على I والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من I ، العدد المشتق $f'(x)$ للدالة f عند x تسمى الدالة المشتقة للدالة f .

نكتب : $f' : x \longmapsto f'(x)$

ملاحظة : نذكر أن $f'(x)$ معرف كما يلي :

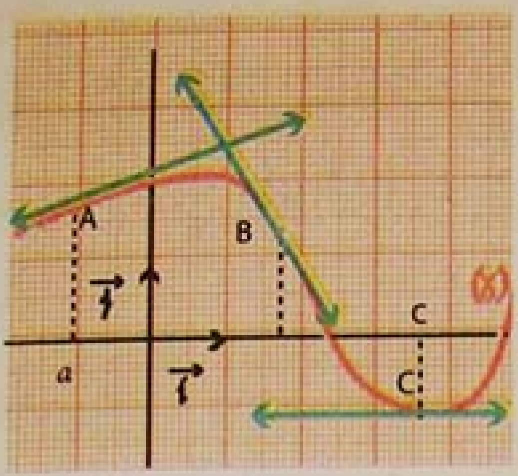
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ؛ h عدد حقيقي غير منعدم .

مثال f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3x - 5$.

x عدد حقيقي . االعدد المشتق لدالة f عند x هو $f'(x)$

حيث
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} = 3$$

إذن الدالة المشتقة f' للدالة f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f'(x) = 3$.



التفسير البياني

(γ) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

إذا كانت f قابلة للإشتقاق على مجال I فإن تمثيلها البياني (γ) يقبل مماسا عند كل نقطة منه، ومعامل توجيه هذا المماس هو $f'(x)$ حيث

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

– يمكن دراسة الوضع النسبي للمنحنى (γ) بالنسبة إلى المماس.

جـ – الدوال المشتقة لدوال مألوفة

1 – الدالة المشتقة للدالة f حيث $f(x) = k$

k عدد حقيقي. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = k$.

الدالة f هي دالة ثابتة.

x عدد حقيقي و h عدد حقيقي غير منعدم.

لدينا: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = \frac{0}{h} = 0$

إذن: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

ينتج أن: من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 0$.

مبرهنة

k عدد حقيقي. الدالة f حيث $f(x) = k$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f'(x) = 0$.

نقول إن الدالة المشتقة لدالة ثابتة هي الدالة المنعدمة.

2 - الدالة المشتقة لدالة تآلفية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = ax + b$ ؛ a ، b عددان حقيقيان.

الدالة f هي دالة تآلفية.

x عدد حقيقي و h عدد حقيقي غير منعدم.

لدينا $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(a(x+h) + b) - (ax+b)}{h} = \dfrac{ah}{h} = a$

إذن $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$ أي $f'(x) = a$.

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = a$.

مبرهنة

> الدالة f حيث $f(x) = ax + b$ ؛ a ، b عددان حقيقيان، قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f'(x) = a$.

حالة خاصة: الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x$ هي الدالة f' المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f'(x) = 1$.

مثال: الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -5x + 1$

هي الدالة f' المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f'(x) = -5$.

3 - الدالة المشتقة للدالة «مربع»

f هي الدالة «مربع» المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2$

x عدد حقيقي و h عدد حقيقي غير منعدم.

لدينا: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$

$$= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 2x$.

مبرهنة

الدالة f حيث $f(x) = x^2$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي : $f'(x) = 2x$.

4 - الدالة المشتقة للدالة «مكعب»

f هي الدالة «مكعب» المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3$

x عدد حقيقي و h عدد حقيقي غير منعدم .

لدينا
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$
$$= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

إذن
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = 3x^2$.

مبرهنة

الدالة f حيث $f(x) = x^3$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي : $f'(x) = 3x^2$.

5 - الدالة المشتقة للدالة f حيث $f(x) = x^n$ ؛ n عدد طبيعي أكبر تماما من 1

f هي الدالة «قوة» المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^n$ ،. n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.

نقبل بدون برهان المبرهنة التالية :

مبرهنة

الدالة f حيث $f(x) = x^n$ ؛ n عدد طبيعي أكبر تماما من 1، قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي : $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال

الدالة المشتقة للدالة f حيث $f(x) = x^4$ هي الدالة $f\,'$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f\,'(x) = 4x^3$.

6 - الدالة المشتقة للدالة «مقلوب»

f هي الدالة «مقلوب»، معرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

x و h عددان حقيقيان غير منعدمين.

لدينا

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{x^2+xh}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x^2+xh} = -\frac{1}{x^2}$$

ينتج أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $f\,'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

مبرهنة

الدالة f المعرفة كما يلي $f(x) = \frac{1}{x}$ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ ودالتها المشتقة $f\,'$ معرفة كما يلي: $f\,'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

7 - الدالة المشتقة للدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ؛ n عدد طبيعي غير منعدم

الدالة f معرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. نقبل بدون برهان المبرهنة التالية:

مبرهنة

الدالة f المعرفة كما يلي $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ؛ n عدد طبيعي غير منعدم قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ ودالتها المشتقة $f\,'$ معرفة كما يلي: $f\,'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

مثال

f هي الدالة المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

– الدالة f معرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ وقابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

– الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة f' المعرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$.

8 – الدالة المشتقة للدالة «الجذر التربيعي»

الدالة f هي الدالة «الجذر التربيعي»، معرفة على المجال $[0;+\infty[$.

x و h عددان حقيقيان موجبان تماما.

لدينا:
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ينتج أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

مبرهنة

الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

الجدول التالي يلخص الدوال المشتقة للدوال المألوفة.

الدالة f حيث	معرفة على	قابلة للإشتقاق على	ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي:
$k \in \mathbb{R}$، $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$ a، b عددان حقيقيان	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ $n > 1$ و $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$، n عدد طبيعي غير منعدم	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4 - عمليات على الدوال المشتقة

f، g دالتان معرفتان على نفس المجال المفتوح I من $\mathbb{R}$ ، k عدد حقيقي.

أ- الدالة المشتقة لمجموع دالتين

مبرهنة

إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للإشتقاق على المجال I فإن الدالة $f+g$ قابلة للإشتقاق على I ودالتها المشتقة $(f+g)'$ معرفة كما يلي:
من أجل كل عدد حقيقي x من I، $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

نكتب: $(f+g)' = f' + g'$

البرهان: h عدد حقيقي غير منعدم و x عدد حقيقي ينتمي إلى I حيث $x+h$ ينتمي إلى I.

- حساب النسبة $R(x) = \dfrac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$

لدينا:

$$R(x) = \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

نعلم أن f و g قابلتان للإشتقاق على I.

إذن: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ و $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$

ينتج أن $\lim\limits_{h \to 0} R(x) = f'(x) + g'(x) = (f' + g')(x)$

بما أن $\lim\limits_{h \to 0} R(x) = (f+g)'(x)$

فإن $(f+g)'(x) = (f' + g')(x)$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ، $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

مثال

f ، g الدالتان المعرفتان على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$.

- الدالة $f + g$ معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$

- الدالة $f + g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة $(f + g)'$

معرفة كما يلي : $(f + g)'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

حالات خاصة :

1) إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I، فإن الدالة $-f$ قابلة للإشتقاق على I ودالتها المشتقة $(-f)'$ معرفة كما يلي : $(-f)'(x) = -f'(x)$

2) إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للإشتقاق عى المجال I فإن الدالة $f - g$ قابلة للإشتقاق على المجال I ودالتها المشتقة $(f - g)'$ معرفة على I كما يلي :

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

ب - الدالة المشتقة لجداء دالتين

مبرهنة

إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للإشتقاق على المجال I فإن الدالة $f.g$ قابلة للإشتقاق على I ودالتها المشتقة معرفة على I كما يلي: $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$.

برهان : f عدد حقيقي غير منعدم. x عدد حقيقي ينتمي إلى I حيث $x + h$ ينتمي إلى I.

النسبة $R(x) = \frac{(f\,g)(x+g) - (f\,g)(x)}{h}$ يمكن أن تكتب:

$$R(x) = \frac{(f\,g)(x+h) - (f\,g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}g(x+h) + \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}f(x)$$

لدينا: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} g(x+h) = f'(x) g(x)$

و $\lim\limits_{h \to 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} f(x) = g'(x) f(x)$

إذن $\lim\limits_{h \to 0} R(x) = f'(x) g(x) + g'(x) f(x) = (f'g + g'f)(x)$

نعلم أن $\lim\limits_{h \to 0} R(x) = (fg)'(x)$. إذن $(fg)'(x) = (f'g + g'f)(x)$

مثال

p هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $p(x) = x^2(3x - 1)$.

f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2$ و $g(x) = 3x - 1$.

– الدالتان f و g قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

وبالتالي الدالة p حيث $p = f.g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

– الدالة المشتقة p' للدالة p معرفة كما يلي:

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $p'(x) = 2x(3x - 1) + x^2 \times 3$

أي الدالة p' معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $p'(x) = 9x^2 - 2x$

حالات خاصة

1) نضع، من أجل كل عدد حقيقي x من I، $(f^2)(x) = (f.f)(x)$.

$= f(x)\, f(x)$

إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن الدالة f^2 قابلة للإشتقاق على I ودالتها المشتقة $(f^2)'$ معرفة كما يلي $(f^2)'(x) = 2f(x) f'(x)$.

2) إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على I فإن الدالة $k.f$ قابلة للإشتقاق على I ودالتها المشتقة $(kf)'$ معرفة كما يلي: $(kf)'(x) = k f'(x)$ ، (حيث k عدد حقيقي).

أمثلة

1) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (3x - 1)^2$.

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي: $f'(x) = 2.(3x - 1).3$

أي: $f'(x) = 18x - 6$

2) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 5(x^2 - 1)$

g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' معرفة كما يلي: $g'(x) = 5 \times 2x$

أي: $g'(x) = 10x$.

جـ) الدالة المشتقة لمقلوب دالة

مبرهنة

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I حيث، من أجل كل عدد x من I ، $f(x) \neq 0$

فإن الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للإشتقاق على I ودالتها المشتقة $\left(\frac{1}{f}\right)'$ معرفة كما يلي:

من أجل كل عدد x من I حيث $f(x) \neq 0$ ، $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

برهان

h عدد حقيقي غير منعدم.

x عدد حقيقي ينتمي إلى I حيث $x + h$ ينتمي إلى I و $f(x) \neq 0$.

عندما يؤول h إلى العدد 0 فإن $x+h$ يؤول إلى x. وبالتالي: $f(x + h)$ يؤول إلى $f(x)$.

أي $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$

نفرض أن f قابلة للإشتقاق على I.

النسبة $R(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{f}\right)(x + h) - \left(\frac{1}{f}\right)(x)}{h}$ يمكن أن تكتب:

$$R(x) = \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x + h) - \left(\frac{1}{f}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}$$

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x)f(x+h)} = -\frac{1}{f(x)f(x+h)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

لدينا $\lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{f(x)f(x+h)} = -\frac{1}{[f(x)]^2}$ و $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

إذن . $\lim\limits_{h \to 0} R(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

بما أن $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim\limits_{h \to 0} R(x)$ فإن $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$.

نستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من I حيث $x+h$ ينتمي إلى I و $f(x) \neq 0$ ،

$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)^2]}$.

مثال

g هي الدالة المعرفة على $\left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$ كما يلي : $g(x) = \frac{1}{5x-2}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $\left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$ ودالتها المشتقة g' معرفة على $\left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$

كما يلي: $g'(x) = \frac{-5}{(5x-2)^2}$.

حالة خاصة : n عدد طبيعي غير منعدم .

الدالة f المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي $f(x) = \frac{1}{x^n}$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[$ وعلى $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة f' معرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

كما يلي: $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$.

مثال

f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة f' معرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$.

د – الدالة المشتقة لحاصل قسمة دالتين

مبرهنة

إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للإشتقاق على المجال I حيث من أجل كل عدد x من I ، $g(x) \neq 0$

فإن الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للإشتقاق على I ودالتها المشتقة $\left(\frac{f}{g}\right)'$ معرفة كما يلي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{[g(x)^2]}$$

لإثبات صحة هذه المبرهنة، نضع $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$، ثم نطبق المبرهنتين المتعلقتين بالدالة المشتقة لجداء دالتين والدالة المشتقة لمقلوب دالة.

مثال

f هي الدالة المعرفة على $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right[\cup \left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$ كما يلي:

$f(x) = \frac{2x+1}{4x+6}$ الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$ و $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ ودالتها المشتقة f' معرفة على $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right[\cup \left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$ كما يلي:

$f'(x) = \frac{8}{(4x+6)^2}$.

هـ – الدالة المشتقة للدالة كثير الحدود

f هي الدالة كثير الحدود المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي و $a_0; a_1; a_2; \ldots; a_{n-1}; a_n$ أعداد حقيقية و $a_n \neq 0$.

مبرهنة

الدالة كثير الحدود f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي: $f'(x) = n.a_n.x^{n-1} + (n-1).a_{n-1}.x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$.

لإثبات صحة هذه المبرهنة، نطبق المبرهنات المتعلقة بالدوال المشتقة للدالة $x \longmapsto x^n$ والدالة $x \longmapsto k.f(x)$ و لمجموع دالتين.

مثال: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$.

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي: $f'(x) = 12x^2 - 4x$.

و - الدالة المشتقة للدالة التناظرية

الدالة التناظرية هي الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث d,c,b,a أعداد حقيقية و $c \neq o$ و $ad - bc \neq 0$.

f دالة ناطقة (أي حاصل قسمة دالتين كثيري الحدود).

f معرفة على المجموعة $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$

وقابلة للإشتقاق على كل من المجالين $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ و $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$.

مبرهنة

الدالة المشتقة f' للدالة التناظرية f المعرفة على المجموعة $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$ هي الدالة المعرفة على $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$ كما يلي: $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

برهان

بوضع $g(x) = ax + b$ و $h(x) = cx + d$.

لدينا $g'(x) = a$ و $h'(x) = c$.

نعلم أن $f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{[h(x)]^2}$

أي $f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

وبالتالي: $f'(x) = \frac{ab-bc}{(cx+d)^2}$.

مثال

f هي الدالة المعرفة على $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كما يلي $f(x) = \frac{x+1}{4x-2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي: $f'(x) = \frac{-6}{(4x-2)^2}$.

الجدول التالي يلخص العمليات على الدوال المشتقة.

f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ؛ k عدد حقيقي.

الدالة	قابلة للإشتقاق على	ودالتها المشتقة هي
$f+g$	I	$f'+g'$
$-f$	I	$-f'$
$f-g$	I	$f'-g'$
$k.f$	I	$k.f'$
f^2	I	$2f.f'$
$\frac{1}{f}$	I باستثناء قيم x حيث $f(x)=0$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	I باستثناء قيم x حيث $g(x)=0$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+2a_2x+a_1$
$c\neq 0; f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$	$\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$	$f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

5 - الدالة المشتقة وإتجاه التغير

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال I .

نقبل بدون برهان المبرهنة التالية :

مبرهنة

أ) إذا كان؛ من أجل كل عدد x من I ، $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

ب) إذا كان؛ من أجل كل عدد x من I، $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

جـ) إذا كان؛ من أجل كل عدد x من I ، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

ملاحظة

يبقى النصان أ) – ب) في المبرهنة السابقة صحيحين عندما ينعدم $f'(x)$ من أجل عدد منته من قيم x .

مثال

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3 - 3x$

- f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد x ، $f'(x) = 3x^2 - 3$
- إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

- f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$.
- f متناقصة تماما على المجال $[-1;1]$.

الدالة الرتيبة – الدالة الرتيبة تماما على مجال

مبرهنة

– الدالة f رتيبة على المجال I إذا وفقط إذا كانت متزايدة أو متناقصة على I .
– الدالة f رتيبة تماما على I إذا وفقط إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما على I.

6 - القيم الحدية لدالة

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $[a;b]$ ؛ x_0 عنصر من $[a;b]$.

مبرهنة

إذا إنعدم $f'(x)$ عند x_0 وغير إشارته فإن الدالة f تقبل قيمة حدية $f(x_0)$ عند x_0.

ملاحظة

عموما، تقبل دالة f قيمة حدية «محلية» عند x_0 إذا وجد مجال I يشمل x_0 حيث تكون هذه القيمة حدية للدالة f على I.

الجدولان التاليان يوضحان طبيعة القيمة الحدية حسب إتجاه تغير الدالة f.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

$f(x_0)$ هي القيمة الصغرى للدالة f على المجال $[a;b]$

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

$f(x_0)$ هي القيمة الكبرى للدالة f على المجال $[a;b]$.

مثال

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 - 2x$.

- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 2x - 2$.
- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ملخصة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- الدالة f تقبل القيمة الصغرى عند 1 وهي $f(1)$ حيث $f(1) = -1$.

ملاحظة

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 3x$.

- f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = 3x^2 - 3$.

- إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

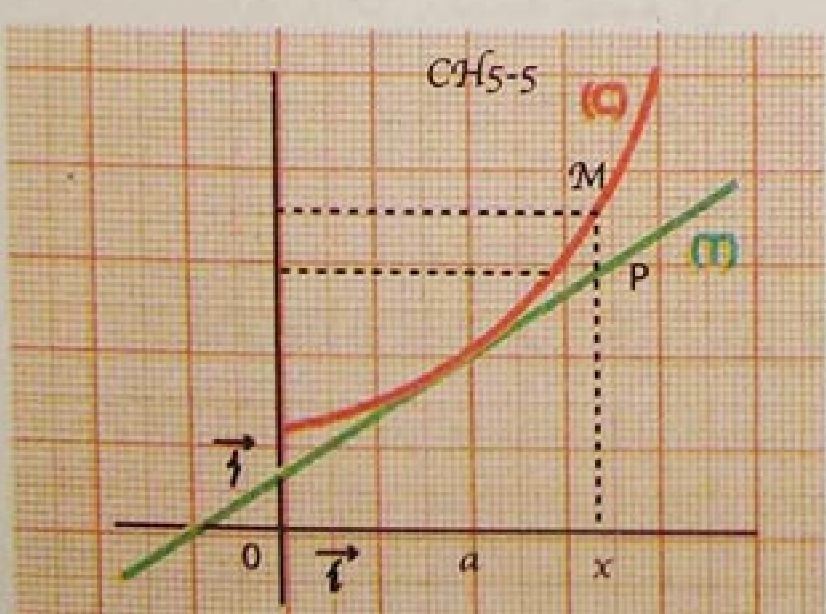
- $f(-1) = 2$ و $f(1) = -2$

- نلاحظ أن $f'(x)$ تنعدم وتغير الإشارة عند $1-$ و 1 ومع هذا فإن $f(-1)$ و $f(1)$ ليستا قيمتين حديتين للدالة f على $\mathbb{R}$.

لكن على المجال $]-\infty;1]$ ؛ $f(-1)$ هي القيمة الكبرى للدالة f وعلى المجال $[-1;+\infty[$ ؛ $f(1)$ هي القيمة الصغرى للدالة f.

7 - التقريب التآلفي المماسي لدالة

f دالة معرفة على المجال I يشمل العدد الحقيقي a، وتقبل الإشتقاق عند a .



(C) التمثيل البياني لها في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A نقطة فاصلتها a. (T) مماس المنحني (C) عند النقطة A ، معادلته $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

هذا المماس هو التمثيل البياني للدالة التآلفية g ‏ $g(x) = f'(a).(x-a) + f(a)$.

كلما اقترب x من a، اقترب العدد $f(x)$ من العدد $f'(a)(x-a)+f(a)$.

نقول إن الدالة التآلفية g هي التقريب التآلفي المماسي للدالة f عند a.

نكتب عادة: $f(x) \simeq f'(a)(x-a)+f(a)$.

مثال

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

(γ) التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

معادلة مماس (γ) عند النقطة A ذات الفاصلة -1 هي :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \quad \text{أي} \quad y = -10x - 2$$

إذن التقريب التآلفي المماسي للدالة f حيث $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ عند العدد -1

هو الدالة التآلفية g حيث $g(x) = -10x - 2$.

نكتب $3x^2 - 4x + 1 \simeq -10x - 2$ من أجل x قريب من -1 .

مثال: $f\left(-\frac{5}{7}\right) \simeq \frac{36}{7}$.

ملاحظات

- يمكن لدالة تآلفية يشمل المستقيم الممثل لها النقطة A، ذات الفاصلة a، أن تكون تقريبا تآلفيا لدالة f عند العدد a. نقبل أن أفضل تقريب تآلفي للدالة f عند a هي الدالة التآلفية الممثلة بمماس منحنى الدالة f عند النقطة A والذي يسمى التقريب التآلفي المماسي للدالة f عند a.

- h عدد حقيقي غير منعدم ، حيث $a+h$ ينتمي إلى I .بوضع $x = a + h$ يكون $f(a+h) \simeq hf'(a) + f(a)$ من أجل h قريب من 0.

ب – تقريب n زيادة متتابعة

- **حالة زيادتين متتابعتين**

نفرض أن منتوجا معينا يخضع إلى زيادتين متتابعتين قدراهما 1% . ليكن P_0 الثمن الإولي، P_1 الثمن بعد الزيادة الأولى و P_2 الثمن بعد الزيادة الثانية للمنتوج.

لدينا: $P_1 = (1 + 0{,}01)P_0$ و $P_2 = (1 + 0{,}01)P_1$

إذن: $P_2 = (1 + 0{,}01)^2 P_0$

ليكن P'_2 ثمن المنتوج إذا خضع إلى زيادة قدرها 2% من P_0.

لدينا $P'_2 = (1 + 0{,}02)P_0$

- حساب: $P_2 - P'_2$

$$P_2 - P'_2 = (1 + 0{,}01)^2 P_0 - (1 + 0{,}02)P_0 = 10^{-4} P_0$$

يمكن القول أن P'_2 قريب من P_2 .

خاصية

من أجل قيمة t صغيرة، تكون زيادتان متتابعتان، قدر كل منها t % قريبتين من زيادة قدرها $(2t)$ %.

ملاحظة

نتحصل على نفس النتيجة في حالة تخفيضين متتابعين.

- **حالة n زيادة متتابعة قدر كل واحدة منها t %**

خاصية

من أجل قيمة t صغيرة، تكون n زيادة متتابعة قدر كل واحدة منها t % قريبة من زيادة قدرها (nt) %.

مثال

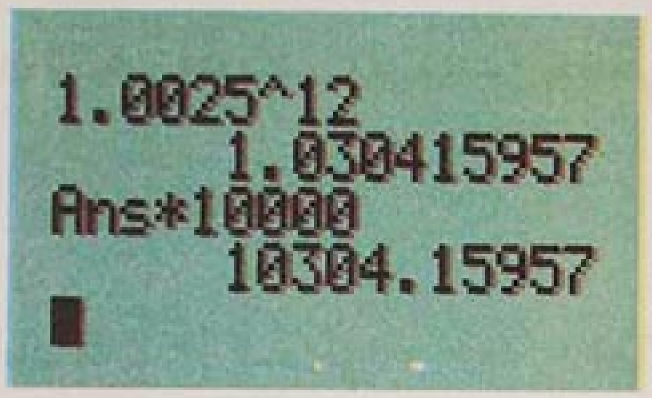
تم إدخار مبلغ قدره 10000 دينار بنسبة شهرية قدرها 0,25 %.

- بعد سنة، يزداد هذا المبلغ بنسبة قدرها 3 % (أي 0,25 x 12) .
- معامل الزيادة خلال شهر واحد هو 1,0025 (أي 0,25 % + 1).

- معامل الضرب الإجمالي (خلال سنة كاملة) هو C_{Mg} حيث

$$C_{Mg} = 1,0025 \times 1,0025 \times ... \times 1,0025$$
$$= (1,0025)^{12} \simeq 1,0304...$$

- بعد سنة، يصبح المبلغ المدخر مساويا 10000x1,0304 أي 10304 دينار.
- باستعمال حاسبة علمية، نلاحظ أنه من أجل 10000 دينار مدخرة يكون الفارق هو 0,16 وهو مدور العدد 10304,15957 إلى 10^{-2} بالزيادة (أي 10304 ـ 10304,16).



❶ حساب نسبة تزايد دالة

طريقة

f دالة معرفة على مجال I ؛ a ، b عددان حقيقيان مختلفان من I.

لحساب نسبة تزايد الدالة f بين العددين a و b ، نحسب العدد الحقيقي $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ملاحظات

1) نسبة تزايد الدالة f بين العددين a و b تسمى أيضا التزايد المتوسط للدالة f بين a و b .

2) نعبّر، هندسيا، عن تساوي تزايدين متوسطين بين قيمتين بقطعتي مستقيم حاملاهما متوازيان.

تمرين 1

f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي: $f(x) = x^2 - x$

عين نسبة تزايد الدالة f بين العددين 1- و 1 ثم بين العددين 0 و 2.

حل

نسبة تزايد الدالة بين العددين 1- و 1 هي $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$

لدينا $f(1)=0$ و $f(-1)=2$

إذن $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{0-2}{2} = -1$

وبالتالي: نسبة تزايد الدالة f بين العددين 1- و 1 هي 1-.

• نسبة تزايد الدالة f بين العددين 0 و2 هي $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$

لدينا $f(0)=0$ و $f(2)=2$

إذن $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{2-0}{2} = 1$

وبالتالي: نسبة تزايدالدلة f بين العددين 0 و2 هي 1.

تمرين 2

الكمية التي تنتجها آلة في مصنع، بدلالة مدة تشغيلها ممثلة في الجدول التالي :

x (مدة التشغيل بالساعات)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$p(x)$ (الإنتاج بالأطنان)	0	1	1,8	2,2	3,6	4,3	4,8	5,5	7	7,5	8,2

1 – بين أن التزايد المتوسط بين المدتين 0 و 2 يساوي التزايد المتوسط بين المدتين 3 و 4,5 .

2 – تحقق، هندسيا، من صحة هذه النتيجة .

حل : 1) التزايد المتوسط بين المدتين 0 و 2 هو $\dfrac{p(2)-p(0)}{2-0}$

لدينا $p(2) = 3,6$ و $p(0) = 0$

إذن $\dfrac{p(2)-p(0)}{2-0} = \dfrac{3,6-0}{2} = 1,8$

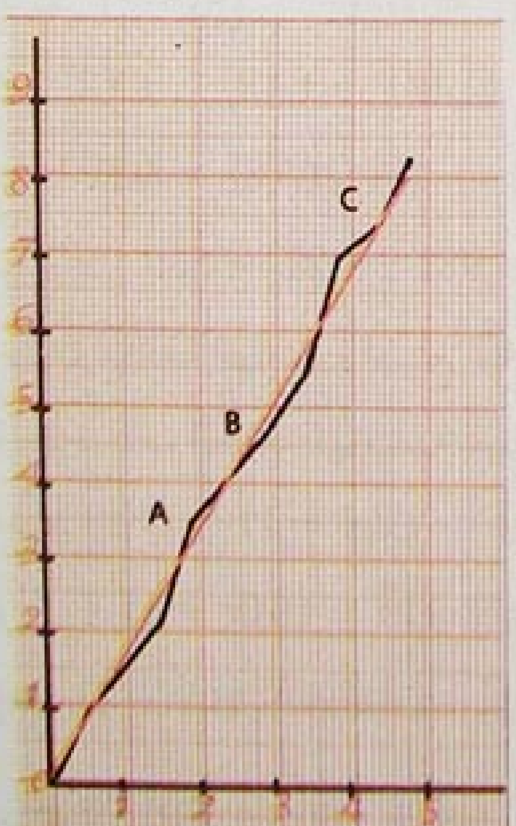
- التزايد المتوسط بين المدتين 3 و 4,5 هو $\dfrac{p(4,5)-p(3)}{4,5-3}$

لدينا $p(4,5) = 7,5$ و $p(3) = 4,8$

إذن $\dfrac{p(4,5)-p(3)}{4,5-3} = \dfrac{7,5-4,8}{1,5} = 1,8$

ينتج أن : $\dfrac{p(2)-p(0)}{2-0} = \dfrac{p(4,5)-p(3)}{4,5-3}$

أي أن التزايد المتوسط بين المدتين 0 و 2 تساوي التزايد المتوسط بين المدتين 3 و 4,5 .



2) التحقق هندسيا من صحة هذه النتيجة نمثل بيانيا الإنتاج $P(x)$ (بالاطنان)، بدلالة المدة x (بالساعات).

للمستقيمين (OA) و (BC) نفس معامل التوجيه وهو 1,8.

إذن (OA) يوازي (BC) وبالتالي : حاملا القطعتين (OA) و (BC) متوازيان .

❷ حساب الكلفة الهامشية للوحدة الإضافية المنتجة ذات الرتبة $x+1$

طريقة

يرمز $C(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج كمية ذات x وحدة.

الكلفة الهامشية لإنتاج وحدة إضافية هي $Cm(x)$، تحسب بالدستور التالي:
$Cm(x) = C(x+1) - C(x)$.

ملاحظة: نذكر أن الربح الهامشي $B_m(x)$ والدخل الهامشي $R_m(x)$ المتعلقين بالوحدة الإضافية ذات الرتبة $x+1$ تحسب بالدستورين التاليين:

$$B_m(x) = B(x+1) - B(x)$$
$$R_m(x) = R(x+1) - R(x)$$

حيث $B(x)$ و $R(x)$ هما الربح الإجمالي والدخل الإجمالي لإنتاج يشمل x وحدة.

تمرين: الكلفة الإجمالية لإنتاج x ثلاجة هي دالة C معرفة بالدستور التالي:
$C(x) = 100x^2 + 10x + 1$ ، x ينتمي إلى المجال $[0;10]$.

1 – احسب الكلفة الهامشية لصنع الثلاجة الثالثة.

2 – احسب الكلفة الهامشية لصنع ثلاجة إضافية مرتبتها $x+1$.

حل: 1 – حساب الكلفة الهامشية لصنع الثلاجة الثالثة.

لدينا $C_m(x) = 100x^2 + 10x + 1$ و $C_m(x) = C(x+1) - C(2)$

إذن $C_m(2) = C(3) - C(2)$

لدينا $C(3) = 931$ و $C(2) = 421$.

ينتج أن: $C_m(2) = 931 - 421 = 510$

أي أن الكلفة الهامشية لصنع الثلاجة الثالثة هي 570 دينارا.

2 – حساب الكلفة الهامشية لصنع ثلاجة إضافية ذات الرتبة $x+1$.

لدينا $Cm(x) = C(x+1) - C(x)$

و $C(x+1) = 100(x+1)^2 + 10(x+1) + 1$

إذن $C_m(x) = [100(x+1)^2 + 10(x+1) + 1] - [100x^2 + 10x + 1]$

ينتج أن $C_m(x) = 200x + 110$.

③ حساب نهاية دالة عند العدد 0

طريقة

لحساب نهاية دالة f عند العدد 0، نعتمد على ما يلي:

1 - إذا كانت الدالة f معرفة على مجال I يشمل العدد 0 فإن $f(0)$ هو عدد حقيقي ويكون: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

2 - إذا كانت الدالة f معرفة على مجال I بإستثناء العدد 0، نبسط عبارة $f(x)$ بوضع الشرط $x \neq 0$ ثم نحسب نهاية الدالة f عند العدد 0 باستعمال الدستور المبسط للدالة f.

ملاحظة

تدرس الحالات الأخرى المتعلقة بحساب النهايات في باب « السلوك التقاربي لمنحن ».

تمرين

f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

1) احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى 0.

2) h عدد حقيقي غير منعدم. احسب نهاية الدالة $h \longmapsto \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ عندما يؤول h إلى 0.

حل

1) حساب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى 0.

الدالة f معرفة عند العدد 0 و $f(0) = 2$.

وبالتالي: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

أي $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

2) حساب نهاية الدالة $h \longmapsto \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ عندما يؤول h إلى 0.

لدينا $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\dfrac{h}{2h(2+h)}$

بما أن $h \neq 0$ فإن $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\dfrac{1}{2(2+h)}$

إذن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}$

وبالتالي : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\dfrac{1}{4}$

4 حساب العدد المشتق لدالة f عند العدد a

طريقة I

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد a.

h عدد حقيقي غير منعدم حيث $a + h$ ينتمي إلى I.

لحساب العدد المشتق للدالة f عند a:

- نحسب النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ و نبسطها.
- نحسب نهاية الدالة $h \longrightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ عندما يؤول h إلى 0

ويكون $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

تمرين

f دالة معرفة على المجال $[-5;5]$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 3x$.

احسب العدد المشتق للدالة f عند العدد 3.

حل

الدالة معرفة عند العدد 3 و $f(3) = 9 - 9 = 0$

لدينا $\dfrac{(3+h)h}{h} = \dfrac{3h+h^2}{h} = \dfrac{(3+h)^2-3(3+h)-0}{h} = \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

بما أن $h \neq 0$ فإن $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = 3 + h$

وبالتالي $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(3+h) = 3$

يتنج أن $f'(3) = 3$.

طريقة 2

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة.

لحساب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f عند العدد a من I

$f'(x)$

ويكون $f'(a)$ هو العدد المشتق للدالة f عند a .

تمرين : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$.

احسب العدد المشتق للدالة f عند كل من العددين 1 و 1- .

حل : الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة كثير الحدود).

من أجل كل عدد حقيقي x؛ $f'(x) = 3x^2 + 6x$.

لدينا $f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = 3 - 6 = -3$ أي $f'(-1) = -3$

و $f'(1) = 3(1)^2 + 6(1) = 3 + 6 = 9$ أي $f'(1) = 9$.

5 حساب العدد المشتق لدالة f عند a باستعمال حاسبة بيانية

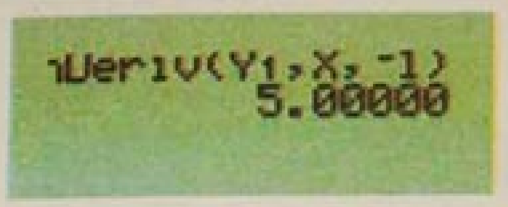
طريقة

لحساب العدد المشتق لدالة f عند a ، بحاسبة بيانية، نتبع البرنامج التالي (من اليسار إلى اليمين):

تمرين : f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 + 2x$.

أحسب العدد المشتق للدالة f عند العدد 1 – باستعمال حاسبة بيانية .

حل : بعد تنفيذ البرنامج السابق، نجد $f'(-1) = 5$.



6 تعيين معادلة المماس لمنحن عند نقطة منه

طريقة

f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ وقابلة للإشتقاق عند العدد a من I .

(γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لتعيين معادلة المماس للمنحنى (γ) عند النقطة A ذات الفاصلة a

- نحسب $f(a)$ و $f'(a)$ ونعوضهما في المعادلة
$$y = f'(a).(x-a) + f(a)$$
- نكتب المعادلة السابقة على الشكل $y = mx + p$.

وتكون هذه المعادلة هي معادلة المماس للمنحنى (γ) عند النقطة A ذات الفاصلة a .

تمرين

f هي الدالة المعرفة عى المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

(γ) المنحى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 – عين معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة التي فاصلتها 0.

2 – أظهر على شاشة حاسبة بيانية، المنحنى (γ) والمماس (T).

حل

1) تعيين معادلة المماس (T)

الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق عند العدد 0 .

إذن المنحنى (γ) يقبل مماسا (T) عند النقطة التي فاصلتها 0.

من أجل كل عدد x من المجال $]-2;+\infty[$ ؛ $f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

إذن $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

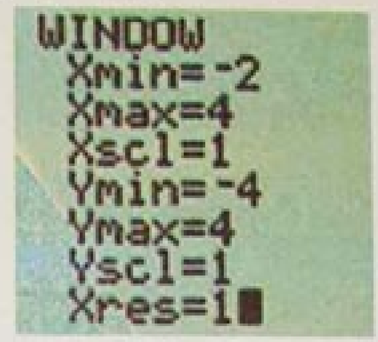
لدينا أيضا: $f(0) = 0$.إذن معادلة (T) هي $y = \frac{1}{2}(x - 0) + 0$.

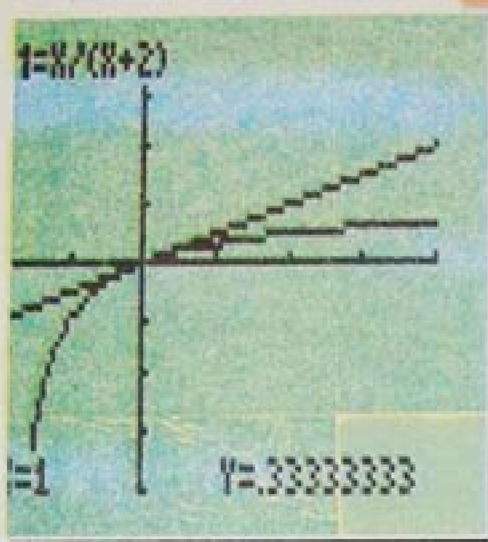
أي : $(T): y = \frac{1}{2}x$.

2) رسم (γ) و (T) على شاشة حاسبة بيانية.

بعد تنفيذ برنامج صب $f(x)$ و $\frac{1}{2}x$ في الحاسبة، نختار نافذة لإظهار (γ) و (T) ثم نظهر على شاشة حاسبة (γ) و (T) بواسطة اللمسة **GRAPH** .

مثلا:





7 دراسة إتجاه تغير دالة

طريقة

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

لدراسة إتجاه تغير للدالة f على مجال I

– ندرس قابلية إشتقاق الدالة f على I

– نحسب $f'(x)$ من أجل كل عدد x من I

– ندرس إشارة $f'(x)$

ثم نستنتج إتجاه تغير الدالة f على I.

تمرين 1

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$

أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

حل

• الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لانها دالة كثير الحدود).

من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = x^2 + 2x + 1$

• نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = (x+1)^2$

ينتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) \geq 0$

و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

تمرين 2: g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي: $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R} - \{2\}$.

حل

• الدالة g قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 2 ، $g'(x) = \dfrac{-7}{(x-2)^2}$

• نلاحظ ان من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 2 ، $g'(x) < 0$

ينتج أن الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;2[$ و على المجال $]2;+\infty[$.

8 - تعيين القيم الحدية لدالة

طريقة

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

لتعيين القيم الحدية للدالة f على مجالات جزئية من I،

– نحسب $f'(x)$ من أجل كل عدد x من I.

– ندرس اشارة $f'(x)$.

وتكون صور الاعداد x من I (أو على المجالات الجزئية) التي ينعدم من أجلها $f'(x)$ و يغير إشارته، هي القيم الحدية للدالة f على I (أو على المجالات الجزئية من I).

ملاحظة: تحدد طبيعة القيم الحدية (صغرى أو كبرى) للدالة f ، إن وجدت،بتحديد إتجاه تغير الدالة f على I .

تمرين: f دالة معرفة على المجال $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ كما يلي : $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$

عين القيم الحدية للدالة f .

حل

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ و دالتها المشتقة f' معرفة كما يلي:

$$f'(x) = 9x^2 - 12x$$

أي $f'(x) = 3x(3x-4)$

إشارة $f'(x)$ و تغيرات الدالة f ملخصة في الجدول.

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{25}{8}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{13}{9}$	$\nearrow$	$\frac{13}{8}$

من هذا الجدول، ينتج أن f تقبل قيمة كبرى عند العدد 0 (على مجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right]$)
و هي 5 و تقبل قيمة صغرى عند $\frac{4}{3}$ و هي $\frac{13}{9}$ (على مجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$).

9 إيجاد التقريب التآلفي المماسي لدالة

طريقة

f دالة معرفة على مجال I يشمل a.

(γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد a فإن التقريب التآلفي المماسي للدالة f عند العدد a هو $f'(a).(x-a)+f(a)$

نكتب : $f(x) \simeq f'(a).(x-a)+f(a)$ ، (x قريب من a).

تمرين: f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$.

1) عين التقريب التآلفي المماسي للدالة f عند العدد 2.

2) احسب قيمة مقربة للعدد $f(1{,}99)$.

حل: 1) • الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$.

• f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

ومن أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم؛ $f'(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}$.

• لدينا $f(2)=\frac{17}{2}$ و $f'(2)=\frac{47}{4}$.

إذن التقريب التآلفي المماسي للدالة f عند 2 هو $f'(2).(x-2)+f(2)$

أي $\frac{47}{4}x-15$

نكتب $x^3+\frac{1}{x}\simeq\frac{47}{4}x-15$.

2) حساب قيمة مقربة للعدد $f(1,99)$.

لدينا $f(1,99)\simeq\frac{47}{4}\times 1,99-15$.

أي $f(1,99)\simeq 8,3825$.

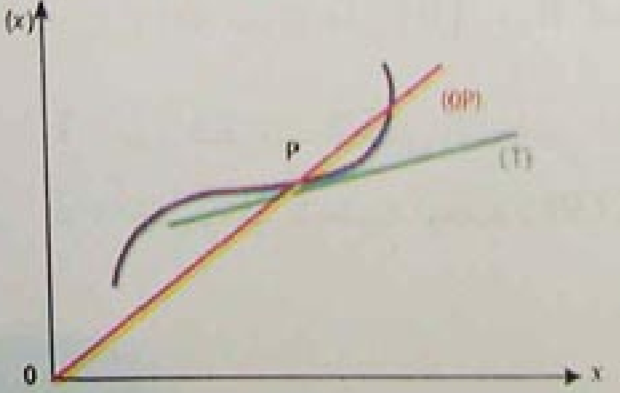
10 العلاقة بين الكلفة المتوسطة والكلفة الهامشية

طريقة

• الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ لكمية إنتاج x تحسب بالدستور التالي: $C_M(x)=\frac{C(x)}{x}$ حيث $C(x)$ هي الكلفة الإجمالية لإنتاج كمية من منتوج قدرها x .

• الكلفة الهامشية $C_m(x)$ لإنتاج الوحدة ذات المرتبة $x+1$ تحسب ، عمليا، بالدستور التالي: $C_m(x)=C'(x)$. حيث $C'(x)$ هي عبارة الدالة المشتقة للدالة التي ترفق بكل كمية x الكلفة الإجمالية $C(x)$.

التفسير البياني: الكلفة المتوسطة $C_m(x)$ هي معامل توجيه (أو ميل) المستقيم القاطع (OP) للمنحنى الممثل للدالة $x\longrightarrow C(x)$ عندما تمسح P منحنى هذه الدالة.



– الكلفة الهامشية هي معامل توجيه (أو ميل) المماس للمنحنى الممثل للدالة $x\longrightarrow C(x)$ عند النقطة P من المنحنى الممثل لدالة الكلفة الإجمالية.

تمرين

$C(x)$ هي الكلفة الإجمالية (بالدنانير) لإنتاج كمية قدرها x (بالأطنان) معرفة على المجال $[0;20]$ كما يلي : $C(x) = x^2 + 10x + 100$.

1 ـ احسب الكلفة المتوسطة والكلفة الهامشية للكمية x .

2 ـ انجز جدول تغيرات الدالة $x \longmapsto C_M(x)$ على المجال $]0;20]$.

3 ـ تحقق أنه عندما تكون الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ أصغر ما يمكن، تكون الكلفة المتوسطة تساوي الكلفة الهامشية $C_m(x)$.

حل

1) حساب الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ من أجل $x \neq 0$.

لدينا $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 10x + 100}{x}$.

إذن $C_M(x) = x + 10 + \dfrac{100}{x}$.

حساب الكلفة الهامشية $C_m(x)$.

لدينا $C_m(x) = C'(x)$.

و $C'(x) = 2x + 10$

إذن: $C_m(x) = 2x + 10$

2) الدالة المشتقة للدالة « الكلفة المتوسطة » على المجال $]0;20[$ هي الدالة $x \longmapsto C'_M(x)$ حيث $C'_M(x) = 1 - \dfrac{100}{x^2}$.

دراسة إشارة الدالة $x \longmapsto C'_M(x)$ على المجال $]0;20[$.

من أجل كل عدد من المجال $]0;20[$ ؛ $C'_M(x) = \dfrac{x^2 - 100}{x^2}$.

إشارة $C'_M(x)$ ملخصة في الجدول التالي :

x	0		10		20
$C'_M(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

يلخص إتجاه تغير الدالة C'_M في الجدول التالي :

x	0		10		20
$C'_M(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	$\|\|$	$\searrow$	30	$\nearrow$	35

$$C_M(10) = 10 + 10 + \frac{100}{10} = 30$$

• تأخذ الكلفة المتوسطة قيمة صغرى من أجل $x = 10$ وهي الكلفة المقدرة في هذه الحالة بمبلغ 30 دينارا على الكيلو غرام الواحد أو 30000 دينار على الطن الواحد من المنتوج. في هذه الحالة، الكلفة الهامشية هي $C_m(10)$ ومقدرة بالمبلغ $C_m(10) = 2 \times 10 + 10 = 30$ أي 30 دينارا على الكيلو غرام الواحد أو 30000 دينار على الطن الواحد من المنتوج.

إذن: عندما تكون الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ أصغر ما يمكن تكون الكلفة المتوسطة مساوية للكلفة الهامشية $C_m(x)$.

مسألة 1

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x-1)(x+3)$.

(γ)هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 – أدرس تغيرات الدالة f.

2 – انجز جدول تغيراتها.

3 – عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى(γ) مع محوري الإحداثيات.

4 – أكتب معادلة المماس للمنحنى(γ) عند كل نقطة من هذه النقط.

5 – أظهر على شاشة حاسبة بيانية المنحنى(γ) وهذه المماسات.

حل

1) دراسة تغيرات الدالة f :

• الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = 2x + 2$ (لحساب $f'(x)$ ،نطبق النظرية المتعلقة بالدالة المشتقة لجداء دالتين).

• إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

• الدالة f متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;-1]$.

2) جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

$f(-1) = -4$

3) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (γ) مع محوري الإحداثيات.

• تقاطع (γ) مع محور الفواصل :

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

لدينا $f(x) = 0$ يعني $(x-1)(x+3) = 0$.

يعني $x - 1 = 0$ أو $x + 3 = 0$.

ينتج أن: $x = 1$ أو $x = -3$.

إذن (γ) يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(1;0)$ و $B(-3;0)$.

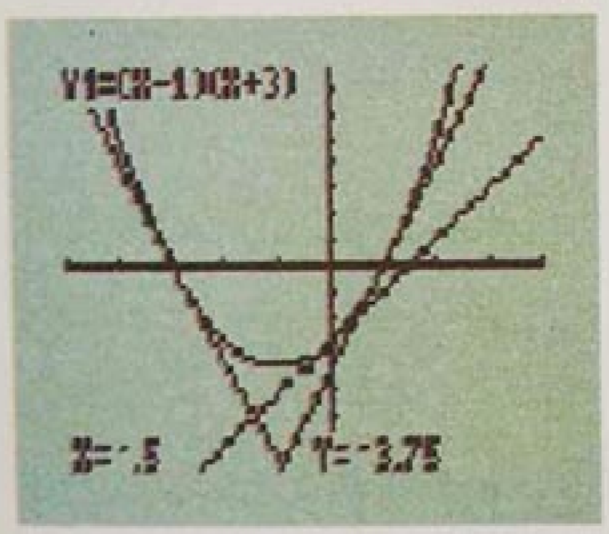
• تقاطع (γ) مع محور الترتيب :

لدينا $f(0) = -3$.

إذن (γ) يقطع محور الترتيب في النقطة $C(0;-3)$.

4) كتابة معادلة المماس عند كل من النقط A ، B و C .

• معادلة المماس (T_A) للمنحنى (γ) عند النقطة A.



لدينا $f(1) = 0$ و $f'(1) = 4$.

إذن $(T_A): y = 4x - 4$.

معادلة المماس (T_B) للمنحنى (γ) عند النقطة B.

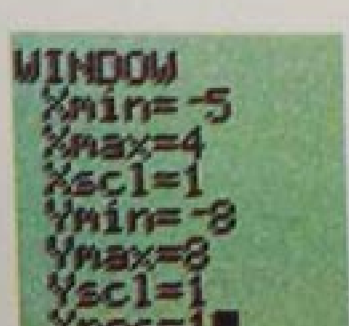
لدينا $f(-3) = 0$ و $f'(-3) = -4$

$:(T_B): y = -4x - 12$

• معادلة المماس (T_C) للمنحنى $(\gamma$

لدينا $f(0) = -3$ و $f'(0) = 2$.

إذن $(T_C): y = 2x - 3$.



• إظهار (γ) ، (T_A) ، (T_B) و (T_C) على شاشة حاسبة بيانية.

باختيار نافذة مناسبة، مثلا (النافذة المقابلة)

نظهر المنحنى (γ) و المماسات (T_A) ، (T_B) و (T_C).

مسألة 2 : «الكلفة الهامشية»

ينتج مصنع أجهزة متماثلة، يتراوح عددها بين 0 و 40. كلفة إنتاج x وحدة بالدنانير هي دالة C معرفة كما يلي: $C(x) = \frac{10}{3}x^3 - 15x^2 + 250x$

الكلفة الهامشية هي المصاريف الناتجة عن إنتاج وحدة إضافية.

نفرض أن $C_m(x) = C'(x)$.

1) احسب الكلفة الهامشية لإنتاج وحدة إضافية.

2) ما هي الكلفة الهامشية لإنتاج 10 وحدات؟ 30 وحدة؟

حل

1 ـ حساب الكلفة الهامشية $C_m(x)$ لإنتاج وحدة إضافية.

لدينا $C'(x) = 10x^2 - 30x + 250$.

بما أن $C_m(x) = C'(x)$.

إذن $C_m(x) = 10x^2 - 30x + 250$.

2 ـ حساب $C_m(10)$ و $C_m(30)$.

لدينا: $C_m(10) = 10 \times 100 - 10 \times 30 + 250 = 950$.

$C_m(30) = 10 \times 900 - 30 \times 30 + 250 = 8350$.

إذن الكلفة الهامشية لإنتاج 10 وحدات هي 950 دينار والكلفة الهامشية لإنتاج 30 وحدة هي 8350 دينار.

1 - صحيح أو خاطىء

1 - نسبة تزايد دالة f بين عددين حقيقيين x_0 و x_1 من مجال I هي $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ حيث $x_0 \neq x_1$.

2 - إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد الحقيقي a فإن العدد المشتق للدالة f عند a هو $f(a)$.

3 - إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد الحقيقي a فإن المنحنى الممثل لها يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a.

4 - إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد 0 فإن معادلة المماس للمنحنى الممثل لها عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y = f'(0).x + f(0)$.

5 - معامل توجيه المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها x_0 هو $f(x_0)$.

6 - إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإن المماس للمنحى الممثل للدالة f يوازي محور التراتيب .

7 - إذا كانت الدالة موجبة على المجال I فإنها متزايدة على I.

8 - إذا كانت الدالة المشتقة f' للدالة f موجبة على المجال I فإن الدالة f متزايدة على I.

9 - إذا إنعدمت الدالة f' و غيرت إشارتها عند العدد الحقيقي x_0 من المجال I فإن الدالة f تقبل قيمة حدية $f(x_0)$ عند العدد x_0.

نسبة تزايد دالة - النهاية عند 0

2 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$f(x) = 3x + 5$

h عدد حقيقي غير منعدم .

- احسب $f(1 + h)$ ؛ $f(1 - h)$ ؛ $f(-2 + h)$.

- احسب و بسط النسب التالية :

$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ ؛ $\frac{f(1 - h) - f(1)}{h}$ ؛ $\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$

3 g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

h عدد حقيقي غير منعدم.

- احسب و بسط النسب التالية :

$\frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h}$ ؛ $\frac{f(3 - h) - f(3)}{h}$ ، $\frac{f(h) - f(0)}{h}$

4 g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2x^2 - 3$

h عدد حقيقي غير منعدم .

- عين مجموعة تعريف الدالة g .

- احسب و بسط النسبتين التاليتين :

$\frac{g(1 + h) - g(1)}{h}$ ، $\frac{g(-1 + h) - g(-1)}{h}$

5 g هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

h عدد خقيقي غير منعدم .

– عين مجموعة تعريف الدالة g .

– احسب و بسط النسبتين التاليتين :

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} \text{ ؛ } \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$$

6 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = -2x + \frac{1}{3}$$

1) احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ ؛ } \lim_{x \to 1} f(x) \text{ ؛ } \lim_{x \to -2} f(x)$$

2) h عدد حقيقي غير منعدم .

– احسب النسبة $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

– احسب نهاية هذه النسبة لما يؤول h إلى 0.

7 g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

1) احسب نهاية الدالة عندما يؤول x إلى 0.

2) h عدد حقيقي غير منعدم.

– احسب النسبة

$$\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$$

– استنتج نهاية هذه النسبة لما يؤول h إلى 0 .

8 f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f

2) احسب $\lim_{x \to 0} f(x)$

3) h عدد حقيقي غير منعدم.

احسب $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

9 احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to 0}(5x-3) \text{ ؛ } \lim_{x \to 0}(-4x+2)$$

$$\lim_{x \to 2}(3x-6) \text{ ؛ } \lim_{x \to -2}\frac{1}{2}x+1$$

$$\lim_{x \to 0}(x^2-x) \text{ ؛ } \lim_{x \to 3}(x^2-9)$$

$$\lim_{x \to -1}(x^2-3x+2) \text{ ؛ } \lim_{x \to 1} x(-x^2+1)$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{x^2-x}{x} \text{ ؛ } \lim_{x \to 0}\frac{(2x-1)(x+1)+1}{x}$$

التزايد المتوسط

10 * انتجت شركة 41 000 جهاز تلفاز خلال سنة 2001 و 64 300 جهاز خلال سنة 2005.

– احسب التزايد المتوسط السنوي للأنتاج (تدور النتيجة إلى العشرة).

– إذا فرضنا أن هذا التزايد مستقر، ما هو عدد الأجهزة التي ستنتج في سنة 2008 ؟

الكلفة الهامشية

11 * $C(x)$ هي الكلفة الإجمالية (بالدنانير) لمنتوج حيث : $C(x) = x^2 + x + 30$

x يتغير في المجال $[0;20]$

احسب الكلفة الهامشية للوحدة الثالثة المنتجة ثم الكلفة الهامشية للوحدة العاشرة المنتجة .

– عبر بدلالة x عن الكلفة الهامشية للوحدة من المرتبة x المنتجة، عندما يتغير x في المجال $[0;20]$.

12 * ينتج مصنعٌ أجهزة للتدفئة. الكلفة الإجمالية $C(x)$ (بالدنانير) لـ x جهازا مماثلا منتجا معرفة كما يلي: $C(x) = 2x^3 + x^2 + 1000$.

– احسب الكلفة الهامشية للوحدة الرابعة المنتجة.

– احسب الكلفة الهامشية للوحدة التاسعة المنتجة.

– عبر بدلالة x عن الكلفة الهامشية للوحدة من المرتبة x المنتجة.

العدد المشتق

13 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$.

عين العدد المشتق للدالة f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x) = 3x - 1$ ؛ $a=0$

2) $f(x) = \frac{-1}{8}x + \frac{1}{8}$ ؛ $a=1$

3) $f(x) = -x^2 + x$ ؛ $a=-1$

4) $f(x) = 3x^2 - 3$ ؛ $a=2$

14 في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب العدد المشتق للدالة f عند العدد a.

1) $f(x) = x^3 + 2$ ؛ $a=0$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ ؛ $a=-1$

3) $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ ؛ $a=1$

4) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ؛ $a=2$

5) $f(x) = \sqrt{x+3}$ ؛ $a=-1$

6) $f(x) = (x+1)(2x-3)$ ؛ $a=-2$

15 نفس السؤال السابق :

1) $f(x) = x^2 - x - 1$ ؛ $a=1$

2) $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ؛ $a=0$

3) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ ؛ $a=-1$

4) $f(x) = \frac{-3x}{2x+3}$ ؛ $a=1$

16 في كل حالة من الحالات التالية، احسب العدد المشتق للدالة f عند العدد a.

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $a \in \mathbb{R}_- \{0\}$

2) $f(x) = x^3$ ؛ $a \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ؛ $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

4) $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $a \in]0; +\infty[$

17 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

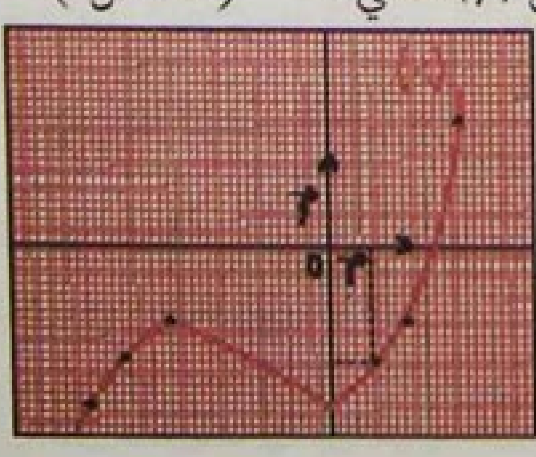
$$f(x) = 2x^2 - 3x + 170$$

1 – احسب تزايد الصورة بين العددين $-1,5$ و -1 .

2 – احسب نسبة تزايد الدالة f بين العددين a و $a+h$ ، a و h عددان حقيقيان حيث $h \neq 0$

3 – استنتج قيمة $f'(a)$.

18 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (γ) التالي: (الشكل)



1 ـ احسب تزايد الصورة بين العددين 0و1 .

2 ـ عين نسبة تزايد الدالة f بين العددين 0 و 1 .

3 ـ عين معامل توجيه القاطع (D) للمنحنى (γ) الذي يشمل النقطتين A و B ذات الفاصلتين 0 و 1 على الترتيب .

4 ـ عين العدد المشتق للدالة f عند كل من العددين 0 و 1 .

19 في كل حالة من الحالات التالية .

ـ احسب العدد المشتق للدالة f عند العدد a بدون استعمال حاسبة .

ـ تحقق من النتائج باستعمال حاسبة .

1) $f(x) = 3x^4 + \sqrt{3}x^2 - 1$ ، $a=-1$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ ، $a=2$

3) $f(x) = x\sqrt{x}$ ، $a=1$

معادلة المماس

20 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = x^2$

(P) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 ـ عين العدد المشتق للدالة f عند العدد 1ـ.

2 ـ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (P) عند النقطة A التي فاصلتها 1ـ.

3 ـ أظهر على شاشة حاسبة بيانية (P) و (T) باختيار نافذة مناسبة .

21 g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{1}{x}$

(H) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 ـ احسب العدد المشتق للدالة g عند العدد 1 .

2 ـ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (H) عند النقطة B التي فاصلتها 1 .

3 ـ اظهر على شاشة حاسبة بيانية (H) و (T) باختيار نافذة مناسبة .

22 f و g هما الدالتان المعرفتان كما يلي :

$f(x) = -x^2 + 1$ ؛ $g(x) = 2 + \sqrt{x}$

(γ_f) و (γ_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 ـ عين مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g .

2 ـ احسب العدد المشتق للدالة f عند العدد 1.

3 ـ احسب العدد المشتق للدالة g عند العدد 4.

4 ـ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (γ_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .

5 ـ اكتب معادلة للمماس (T') للمنحني (γ_g) عند النقطة B التي فاصلتها 4.

23 نفس السؤال بالنسبة إلى الدالتين f و g المعرفتين كما يلي :

$f(x) = \frac{2}{x} - 1$ ،

$g(x) = \frac{1}{x^3}$

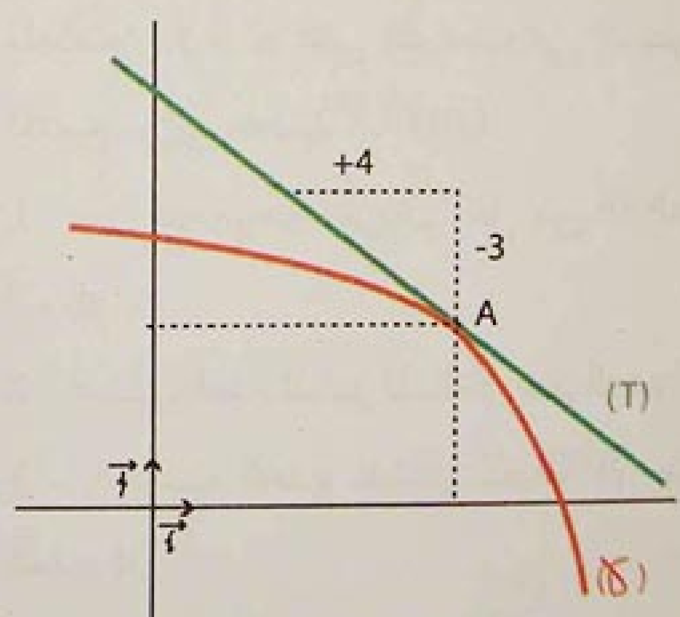
24 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3 - 2x + 1$

(γ) المنحني الممثل لها في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

عين معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة التي فاصلتها -1.

25 f هي الدالة المعرفة بتمثيلها البياني (γ) في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل).

باستعمال المنحنى (γ)، اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة A.



26 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$f(x) = x^2 - 6x + 4$

(γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 – اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة فاصلتها 2.

2 – تحقق أن هذا المماس يشمل مبدأ المعلم.

27 f و g هما الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 + 3x$

و $g(x) = -x^2 - x + 2$

(γ_f) و (γ_g) المنحنيان الممثلان للدالتين f و g على الترتيب في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 – عين العدد المشتق لكل من الدالتين f و g عند العدد -1.

2 – اكتب معادلة كل من المماسين (T) و (T ') للمنحنيين (γ_f) و (γ_g) على الترتيب في نفس النقطة A التي فاصلتها -1.

3 - هل هذان المماسان متوازيان؟

28 f، g، h هي دوال معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = -x^2 + 3x + 6$$
$$g(x) = x^3 - x^2 + 4$$
$$h(x) = x^2 + 7x + 8$$

1 - عين العدد المشتق لكل دالة من الدوال f ، g ، h عند العدد -1.

2 - اكتب معادلة المماس لكل من المنحنيات الممثلة للدوال f ، g، h عند النقطة ذات الفاصلة -1.

3 – تحقق أن المنحنيات الثلاثة لها نفس المماس عند هذه النقطة.

29 f و g دالتان معرفتان كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \text{ ؛ } f(x) = \frac{3x}{x+2}$$

(γ_f) و (γ_g) المنحنيان الممثلان للدالتين f و g في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - اظهر على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على المجال $]-1;+\infty[$.

2 - يبدو أن المنحنيين (γ_f) و (γ_g) يقبلان نفس المماس عند مبدأ المعلم.
تحقق من ذلك.

30 f هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x}$$

1 - عين مجموعة تعريف الدالة f.

2 - (γ) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
برهن أن المماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة التي فاصلتها 2 - يشمل المبدأ.

الدوال المشتقة

31 عين $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x - 1$

2) $f(x) = \frac{5}{2} - x$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$

4) $f(x) = 2x^2 + 3$

5) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

32 عين $f'(x)$ حيث $x \in D$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ ؛ $D =]0;+\infty[$

2) $f(x) = 5x - \frac{2}{x}$ ؛ $D =]0;+\infty[$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$ ؛ $D =]0;+\infty[$

4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ؛ $D = \mathbb{R}$

5) $f(x) = -5x^2 + 2x + \sqrt{2}$ ؛ $D = \mathbb{R}$

33 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (2x+1)(x-2)$$

1) احسب $f'(x)$.

2) انشر $f(x)$ ثم أحسب $f'(x)$.

3) قارن بين عبارتي $f'(x)$.

-نفس الأسئلة بالنسبة إلى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

1) $f(x) = (1-3x)(x^2+x)$

2) $f(x) = (1+2x)(1-2x)$

34 f، g، h دوال معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2-x)(x^2+1)$ ؛

$g(x) = -2x^2(3x+1)$ ؛

$h(x) = 3(6+2x)^2$

عين الدوال المشتقة لكل من الدوال f, g, h, k.

35 f، g، h ، k دوال معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x-2)^2$ ؛

$g(x) = x^2(1-x)^2$ ؛

$h(x) = -3x + 1 + 2(3x-1)^2$ ؛

$k(x) = -2(x+2)^2$

عين الدوال المشتقة للدوال f، g، h ، k.

36 f، g، h ، k دوال معرفة على المجال $]0;+\infty[$ و قابلة للإشتقاق على المجال

حيث: $]0;+\infty[$

$f(x)=(3x+1).\sqrt{x}$ ؛

$g(x)=2\sqrt{x}-x+1$ ،

$h(q)=-2q+3\sqrt{q}$ ؛

$k(x)=(1-3x).\sqrt{x}$.

عين الدوال المشتقة للدوال f ،g ،h ، k .

37 f ،g ،h ، k دوال معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x}$ ،

$g(x)=\dfrac{1-x^2}{4x}$

$h(x)=5x+3+\dfrac{2}{3x}$ ؛

$k(x)=(x-1)(\frac{1}{x}-2)$.

- عين الدوال المشتقة للدوال f .g .h . k

38 f ،g ،h ، k دوال معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ ؛ $g(x)=\dfrac{5-x^2}{x^2+5}$

$h(x)=\dfrac{-x+2}{x^2+x+1}$ ؛ $k(x)=\dfrac{3x^2-x}{3}$

عين الدوال المشتقة للدوال f .g .h . k .

39 عين الدالة المشتقة للدالة f على المجال I في الحالات التالية :

1) $f(x)=-2x+3-\dfrac{10}{x}$ ، $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$ ؛ $I=]\frac{3}{2};+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ ، $I=]1;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x-3}$ ، $I=]3;+\infty[$

40 عين الدالة المشتقة للدالة f على المجال I في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2+3}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=2x-3+\dfrac{1}{x-3}$ ؛ $I=]3;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}-2+2x^2$ ، $I=]-\infty;-0[$

41 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$

1 ـ عين الدالة المشتقة للدالة f على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$.

2 ـ ادرس إشارة $f'(x)$ على المجموعة $\mathbb{R}-\{-2\}$.

دراسة تغيرات دالة

42 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x^2-7x+11$

1 ـ عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

2 ـ ادرس اتجاه تغير الدالة f .

3 ـ انجز جدول تغيرات الدالة f .

43 ادرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها D في الحالات التالية :

1) $f(x)=3x-5$ ؛ $D=\mathbb{R}$

2) $f(x)=-5x+3$ ؛ $D=\mathbb{R}$

3) $f(x)=2x^2+3x-5$ ؛ $D=\mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{132}{x+3}$ ، $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

5) $f(x) = \frac{x+2}{2x-4}$ ؛ $D = \mathbb{R} - \{2\}$

6) $f(x) = -6x^2 + 3x - 1$ ؛ $D = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ $D =]0; +\infty[$

8) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 10$ ؛ $D = \mathbb{R}$

44 انقل و أكمل جدول تغيرات الدالة f القابلة للإشتقاق على المجال $[-1;3]$.

x	-1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	4	↘	

45 نفس سؤال التمرين رقم 44.

x	-4		-3		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

46 نفس سؤال التمرين رقم 44 .

x	-5		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗	

47 عين دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث تكون دالتها المشتقة هي $x \longmapsto 3x^2 - 2x$

48 انقل و أكمل جدول تغيرات الدالة f التالي :

x	-2		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	-3	↘	

1) اعط إشارة كل من :

$f(3)$ ؛ $f'(3)$ ؛ $f(-2)$ ؛ $f'(-2)$

2) حدد إشارة $f(x)$. علل إجابتك .

49 انقل واكمل جدول تغيرات الدالة f التالي :

x	-6		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-1	↘	-3	↗	-2

1 – ما هي إشارة كل من :

$f'(-1)$ ؟ $f'(1)$ ؟ $f'(3)$ ؟

2 – حدد إشارة $f(x)$.علل إجابتك .

50 انقل و اكمل جدول تغيرات الدالة f التالي: علما أن $f(1) = 2$ و $f(7) = 1$

x	-3 1 5 7
$f'(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$
$f(x)$	↘ 2 ↗ ↘ 1

1 - حدد إشارة $f'(0)$ ثم إشارة $f(0)$.

2 - ما هي إشارة $f(x)$ ؟ علل إجابتك .

القيم الحدية لدالة

51 1) برهن أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 4(x^2 + 1,5)$ تقبل قيمة حدية عند العدد 0.

2) حدد طبيعة هذه القيمة الحدية .

52 برهن أن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 3x$ لا تقبل قيما حدية .

53 برهن، باستعمال العمليات على الدوال المشتقة، أن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}$$

تقبل قيما حدية . حددها .

54 f هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+2}$$

1 - ماهي مجموعة تعريف الدالة f ؟

2 - برهن أن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

3 - برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{-5(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

4 - ادرس تغيرات الدالة f و انجز جدول تغبراتها.

5 - حدد القيم الحدية للدالة f.

التقريب التآلفي المماسي لدالة

55 عين التقريب التآلفي المماسي لكل دالة من الدوال التالية عند العدد a.

1) $f(x) = -3x^2 + x$ ؛ $a = 0$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + x$ ؛ $a = -1$

3) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ ؛ $a = 1$

4) $f(x) = x^3 + x + 1$ ؛ $a = -2$

56 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$$

1 - ادرس تغيرات الدالة f و انجز جدول تغيراتها .

2 - عين التقريب التآلفي المماسي للدالة f عند العدد 1 .

3 - اعط قيمة مقربة للعدد $f(1,099)$ إلى 10^{-2} بالنقصان .

مسائل

57 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

(γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 ـ عين إحداثيات النقط من المنحنى (γ)، يكون من أجلها معامل توجيه المماس يساوي 1.

2 ـ عين إحداثيات النقط من المنحنى (γ)، يكون من أجلها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته :

$$y = 3x + 5$$

58 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{5-2x}{3x-4}$

1 ـ اثبت أنه يوجد عددان حقيقيان a، b حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ ،

$$f(x) = a + \frac{b}{3x-4}$$

2 ـ على أي مجالات تقبل الدالة f الإشتقاق ؟

ـ عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

3 ـ ادرس تغيرات الدالة f و انجز جدول تغيراتها.

4 ـ بين أن الدالة f لا تقبل قيما حدية .

5 ـ عين معادلة المماس (T) للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة فاصلتها $1-$.

6 ـ عين المماسات للمنحنى الموازية للمماس (T).

59 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -x^3 + 3x + 3$

1 ـ عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

2 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$f'(x) = 3(1-x)(1+x)$$

ـ حل المعادلة $f'(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

ثم أدرس إشارة $f'(x)$.

3 ـ استنتج إتجاه تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم انجز جدول التغيرات .

4 ـ المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عين معادلة المماس (T) للمنحني (γ) الممثل للدالة f عند النقطة A التي فاصلتها $2-$.

5 ـ ارسم المنحني (γ) و المماس (T) في المعلم السابق.

6 ـ حل بيانيا المعادلة $f(x) = 1$.

60 f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$$

(γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين مجموعة التعريف D للدالة f.

2) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية c،b،a حيث من أجل كل عدد x من D ؛

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

3) عين المجالات التي تقبل فيها الدالة f الإشتقاق ثم عين دالتها المشتقة f' .

4) أثبث أن $f'(x)$ من إشارة $x^2 + 4x - 8$ على D.

5) ادرس تغيرات الدالة f وانجز جدول تغيراتها .

6) اكتب معادلة للماس (T) للمنحنى (γ) عند النقطة التي فاصلتها $1-$.

7) حل المعادلة $f'(x) = f'(-1)$.

فسر، هندسيا النتيجة .

8) ارسم، بحاسبة بيانية، المنحنى (γ) باختيار النافذة $[-10;10]$ للمتغير x.

9) حل جبريا المعادلة $f(x) = 0$ وتحقق من صحة النتائج بيانيا .

10) m عدد حقيقي .

أدرس، حسب قيم m، عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ ، مستعينا بالمنحنى (γ).

61 يسوّق مركب بيترو كميائي مادة سائلة . الكمية اليومية المبيعة تتراوح بين 2 و 15 مترا مكعبا.

ثمن بيع المتر المكعب الواحد (بآلاف الدنانير) هي دالة p معرفة كما يلي :

$$p(x) = -4,33x + 124,2$$

1 – ارسم المنحنى (D) الممثل للدالة p، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد. و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الوحدة : $1cm$ يقابله $1m^3$ على محور الفواصل.

و $1cm$ يقابله 10 000 دينار على محور التراتيب .

2 – يرمز v إلى ثمن البيع (بآلاف الدنانير) لكمية قدرها x مترا مكعبا.

بين أن $v(x) = -4,33x^2 + 124,2x$

3 – عين عدد الأمتار المكعبة التي من أجلها يكون الدخل أعظميا .

ماهو عندئذ، ثمن المتر المكعب الواحد و ما هو الدخل الكلي ؟

الباب 6 السلوك التقاربي *

1. نهايات دوال مألوفة
2. العمليات على النهايات
3. المستقيمات المقاربة

ظهر مفهوم اللانهاية في الرياضيات مع ظهور الرياضيات بذاتها عند الإغريق.

أما عند العرب فقد قبل ثابت ابن قرة (836 -901) وجود كميات لانهائية ومختلفة فيما بينها تنفي نتائج أرسطو ومؤيديه. وأعطى ابن البناء تعريفا للانهاية يتوافق مع الطبيعة العملية لهذا المفهوم الرياضياتي، ويعتبر أن اللانهاية حكم وليس وصفا، وأنه من مجال الفكر وليس من الملموس. ومعنى اللانهاية يتمثل في أنه لا يمكن بلوغ نهاية دون اضافة شيء إليها.

أما مفهوم النهاية فقد اُستعمل وهو في مرحلة التطور، من طرف فيرما "Fermat" و أولر "Euler" وعلماء آخرين في القرنين السابع عشر والثامن عشر وانتظر القرن التاسع عشر ليظهر جليا. لقد ادرج هذا المفهوم بدقة في البراهين في القرن التاسع عشر من طرف كوشي "Cauchy" ، وأكتسب المعنى الذي يُعرَف به حاليا في حدود سنة 1860 من خلال الأعمال التي انجزها الرياضياتي الألماني كارل وارستراس "Karl weirstrass" .

ابن البناء
(1321 - 1256)

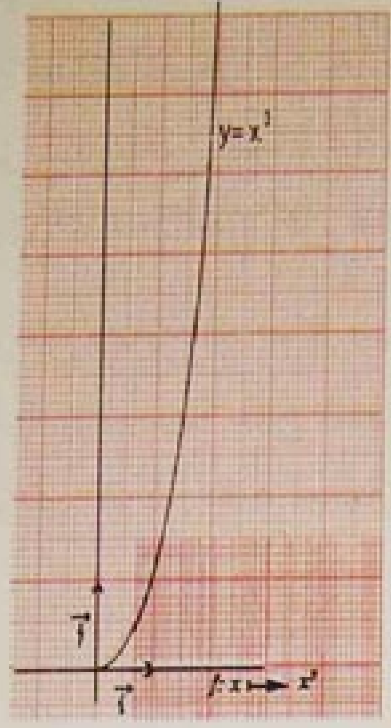
إستبيان متعدد الإجابات

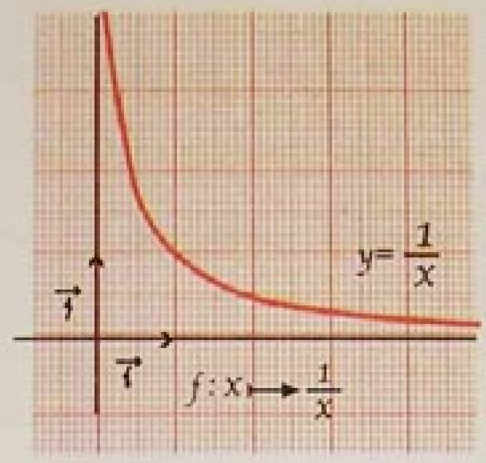
إختر الإجابة الصحيحة

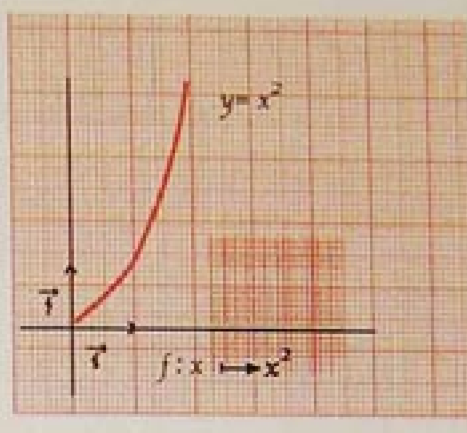
السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1) a و b عددان موجبان . إذا كان $a < b$ فإن	$a^2 < b^2$	$a^2 = b^2$	$a^2 > b^2$
2) a و b عددان سالبان . إذا كان $a < b$ فإن	$a^2 < b^2$	$a^2 = b^2$	$a^2 > b^2$
3) a و b عددان غير منعدمين . إذا كان $a < b$ فإن	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
4) a و b عددان موجبان . إذا كان $a < b$ فإن	$\sqrt{a} < \sqrt{b}$	$\sqrt{a} = \sqrt{b}$	$\sqrt{a} > \sqrt{b}$
5) a و b عددان حقيقيان . إذا كان $a < b$ فإن	$a^3 < b^3$	$a^3 = b^3$	$a^3 > b^3$
6) $\lim\limits_{x \to 0} x$ هي	0	$\frac{1}{2}$	1
7) $\lim\limits_{x \to 0} x^2$ هي	0	$\frac{1}{4}$	1
8) $\lim\limits_{x \to 0} x^3$ هي	0	$\frac{1}{8}$	1
9) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$ هي	0	$\frac{1}{2}$	1
10) المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $x = -1$	يوازي محور الفواصل	يوازي محور التراتيب	يشمل المبدأ
11) المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y = 2$	يوازي محور الفواصل	يوازي محور التراتيب	يشمل المبدأ
12) المستقيم (L) المعرف بالمعادلة $y = x + 3$	يوازي محور الفواصل	يوازي محور التراتيب	لا يوازي محوري المعلم

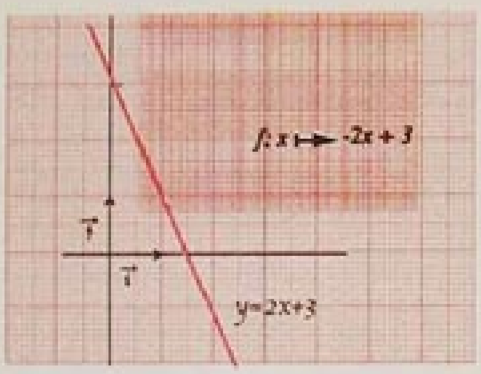
نشاط 1 : دراسة بعض الدوال بجوار $+\infty$

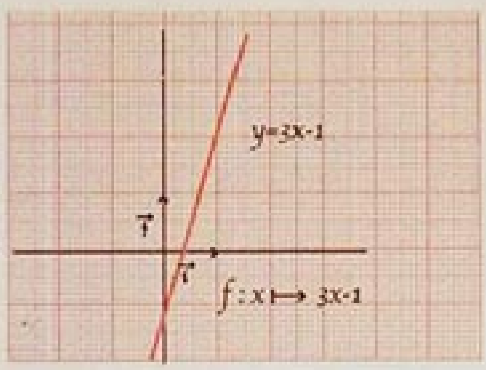
نعتبر الدوال f وتمثيلاتها البيانية ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ (الشكل).

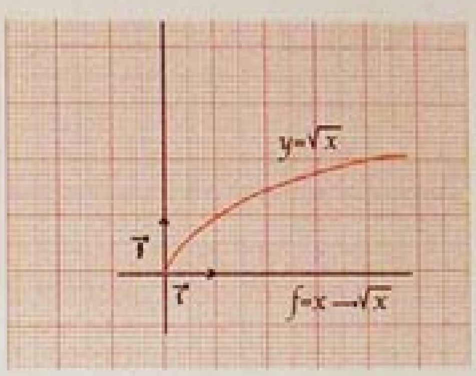












– إذا كان x عنصرا من المجموعة $\{10^6\,;10^4\,;10^3\}$، أُحسب $f(x)$ في كل حالة.

– بالنسبة إلى كل دالة من الدوال المقترحة في هذه الأمثلة، ومن بين الإجابات 1؛ 2؛ 3، ماهي الإجابة التي تختارها لإتمام الجمل التالية :

عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر في المجال $]0\,;+\infty[$ فإن قيم $f(x)$ تصبح

1) أكبر فأكبر.

2) تقترب من عدد حقيقي معين. حدد في هذه الحالة هذا العدد.

3) سالبة، ولكن قيمتها المطلقة كبيرة.

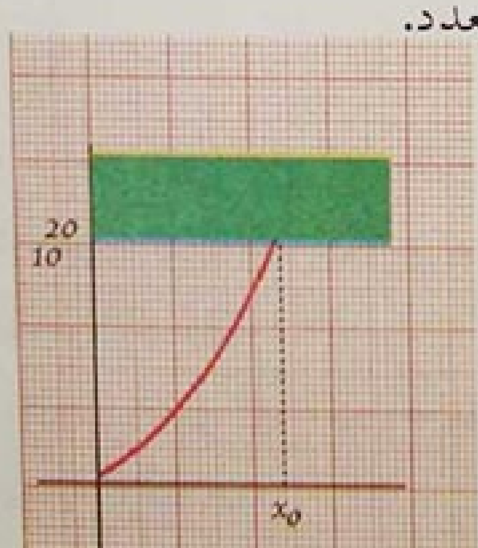
نشاط 2 : النهاية غير المنتهية بجوار $+\infty$

أ) دراسة نهاية الدالة f حيث $f(x)=x^2$ في جوار $+\infty$.

الدالة f حيث $f(x)=x^2$ متزايدة تماما على المجال $[0\,;+\infty[$.

بالتمعن في المنحنى الممثل للدالة f (الشكل)

نتوقع أن قيم $f(x)$ تصبح كبيرة كلما كان x كبيرا .



1) تحقق أنه يمكن إيجاد عدد x_0 موجب تماما حيث $x_0^2 = 10^{20}$

2) أثبت أن من أجل كل عدد x حيث $x > x_0$ ؛ $x^2 > 10^{20}$ ؟

3) بصفة عامة، نفرض أن A عدد حقيقي كيفي، كبير بقدر الإمكان.

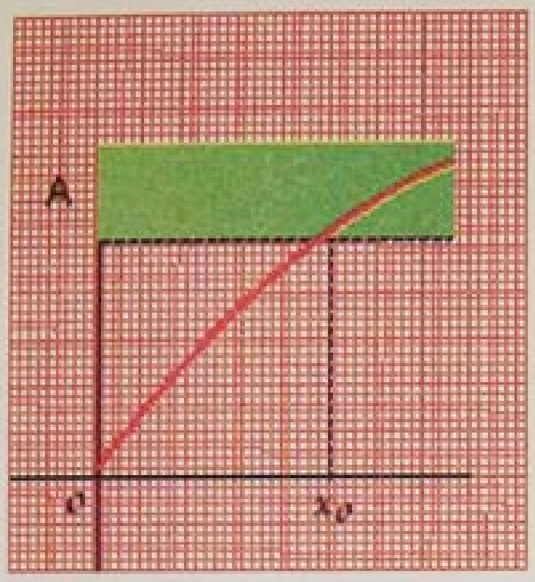
– تحقق أنه يمكن إيجاد عدد x_0 موجب تماما بحيث $x_0^2 = A$.

– أثبت أن من أجل كل عدد x حيث $x > x_0$ ؛ $x^2 > A$ ؟

ب) دراسة نهاية الدالة g حيث $g(x) = \sqrt{x}$ في جوار $+\infty$

الدالة g معرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ ومتزايدة تماما على هذا المجال.

نفرض أن A عدد حقيقي موجب وكبير بقدر الإمكان.



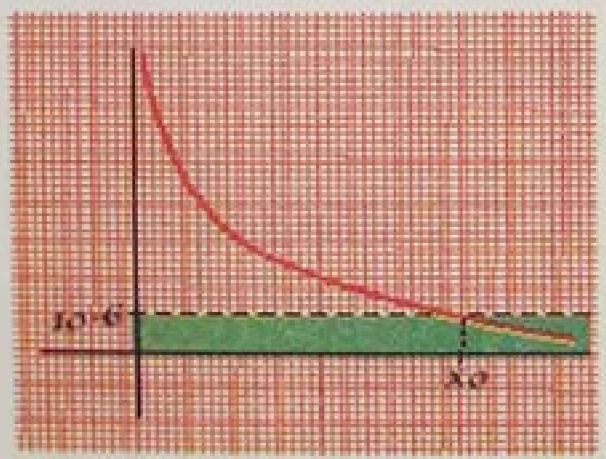
1) تحقق أنه يمكن إيجاد عدد حقيقي x_0 حيث $\sqrt{x_0} = A$.

2) أثبت أن من أجل كل عدد x حيث $x > x_0$ ؛ $\sqrt{x} > A$.

نشاط 3 : أ) النهاية المنتهية بجوار $+\infty$

الدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

المنحنى الممثل لها يظهر أقرب أكثر فأكثر من محور الفواصل. الأعداد $\frac{1}{x}$ قريبة أكثر فأكثر من العدد 0 كلما كان x أكبر فأكبر.



1) تحقق أنه، يمكن إيجاد عدد x_0 موجب تماما بحيث $\frac{1}{x_0} = \frac{1}{10^6}$.

2) أثبت أن من أجل كل عدد x حيث $x > x_0$ ؛ $\frac{1}{x} < \frac{1}{10^6}$ ؟

3) بصفة عامة، أثبت أنه يمكن إيجاد عدد x_0 حيث $r = \frac{1}{x_0}$ ، r عدد حقيقي موجب تماما وصغير بقدر الإمكان.

4) اثبت أنه من أجل كل عدد x حيث $x > \frac{1}{r}$ ؛ $\frac{1}{x} < r$ ، r عدد حقيقي موجب تماما وصغير بقدر الإمكان.

ب) النهاية غير المنتهية بجوار العدد 0 عن اليمين

المنحنى الممثل للدالة f يظهر أقرب، أكثر فأكثر من محور التراتيب كلما كانت الفواصل الموجبة لنقطه تقترب أكثر فأكثر من العدد 0 . وبالتالي، الأعداد $\frac{1}{x}$ تصبح أكبر فأكبر كلما كان x (الموجب) أقرب إلى العدد 0 بقدر الإمكان.

1) تحقق أنه، يمكن إيجاد عدد x_0 موجب تماما بحيث $\frac{1}{x_0} = 10^6$.

2) اثبت أن من أجل كل عدد موجب x غير منعدم حيث $x < x_0$ ؛ $\frac{1}{x_0} > 10^6$.

3) بصفة عامة، اثبت أنه يمكن إيجاد عدد x_0 حيث $\frac{1}{x_0} = \mathrm{B}$ ، B عدد حقيقي موجب تماما وكبير بقدر الإمكان.

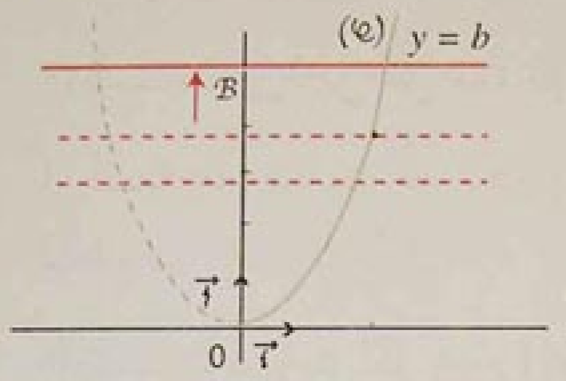
4) اثبت أن من أجل كل عدد x موجب تماما بحيث $x < \frac{1}{\mathrm{B}}$ ؛ $\frac{1}{x} > \mathrm{B}$ ، B عدد حقيقي موجب تماما وكبير بقدر الإمكان.

1. نهايات دوال مألوفة

أ) نهايات الدالة "مربع"

الدالة "مربع" هي الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2$.

($\mathscr{C}$) هو القطع المكافئ الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



• **النهاية عند $+\infty$**

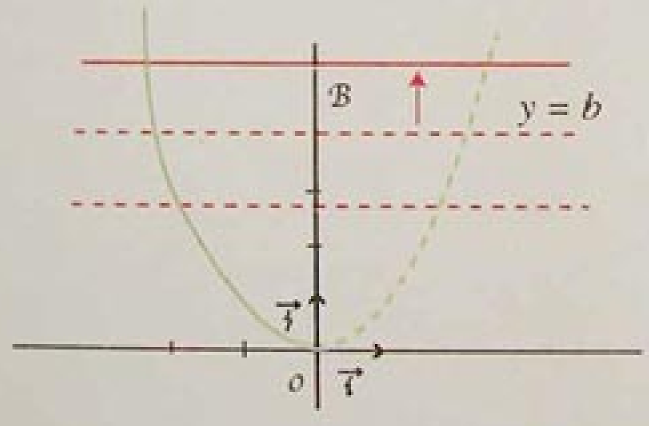
عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر، فالأعداد x^2 تأخذ قيما أكبر من أي عدد حقيقي b .

المنحنى ($\mathscr{C}$) الممثل للدالة "مربع" يقع فوق أي مستقيم معادلته $y = b$.

نقول عندئذ : نهاية الدالة $x \longmapsto x^2$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

أو أيضا : x^2 يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$.

نكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



• **النهاية عند $-\infty$**

الدالة "مربع" زوجية على $\mathbb{R}$ ؛ إذن المنحنى ($\mathscr{C}$) يقبل محور تناظر وهو محور تراتيب المعلم.

نكتب $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

هذه النتيجة تدل على أنه عندما يأخذ x قيما سالبة، بقيم مطلقة أكبر فأكبر، فالأعداد x^2 تأخذ قيما أكبر من أي عدد حقيقي b . المنحنى ($\mathscr{C}$) يقع فوق أي مستقيم معادلته $y = b$.

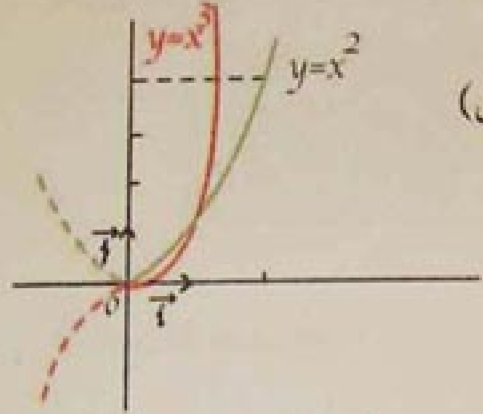
مثلا : عندما يأخذ x القيم -10 ؛ -100 ؛ -10^4 ؛ ....

العدد x^2 يأخذ القيم 10^2 ؛ 10^4 ؛ 10^8 ؛ .... على الترتيب.

ب) نهايات الدالة "مكعب"

الدالة "مكعب" هي الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3$.
($\mathcal{C}$) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

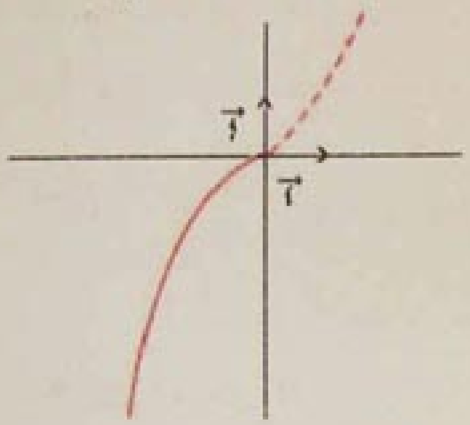
• **النهاية عند $+\infty$**



نعلم أن من أجل كل عدد x حيث $x \geq 1$ ، $x^3 \geq x^2$ (الشكل)

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ فإن: $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty}$

• **النهاية عند $-\infty$**

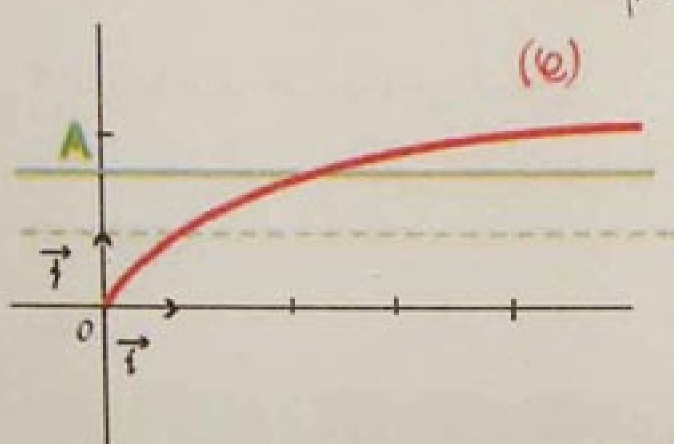


نعلم أن الدالة "مكعب" فردية على $\mathbb{R}$ ،
والمنحنى ($\mathcal{C}$) الممثل لها يقبل مركز تناظر.

ينتج أن: $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty}$

جـ) نهايات الدالة "الجذر التربيعي"

الدالة "الجذر الربيعي" هي الدالة f المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x}$.
($\mathcal{C}$) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم
متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



– الدالة الجذر التربيعي متزايدة على $[0 ; +\infty[$
وبالتالي، عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر،
فالعدد $\sqrt{x}$ يأخذ قيما أكبر، حيث $\sqrt{x}$ يصبح
أكبر من أي عدد حقيقي A ،
نقول: عندما يؤول x إلى $+\infty$ ، $\sqrt{x}$ يؤول إلى $+\infty$
ونكتب $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty}$

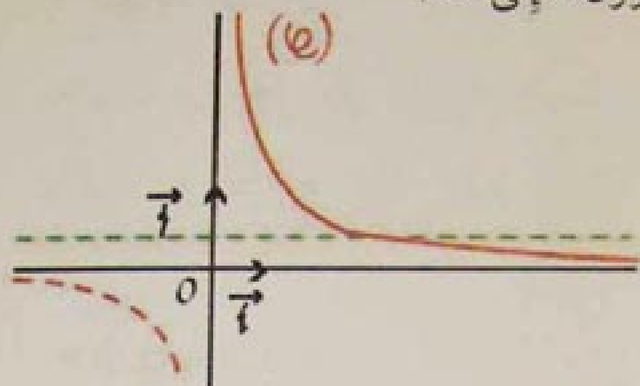
د) نهايات الدالة "مقلوب"

الدالة "مقلوب" هي الدالة f المعرفة على المجموعة $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ حيث $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
($\mathcal{C}$) القطع الزائد الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

• **النهاية عند $+\infty$**

نعلم أنه عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر في المجال $]0\,;+\infty[$ فالعدد $\frac{1}{x}$ موجب ويقترب أكثر فأكثر من 0 .

فنقول إن نهاية الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ هي 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$

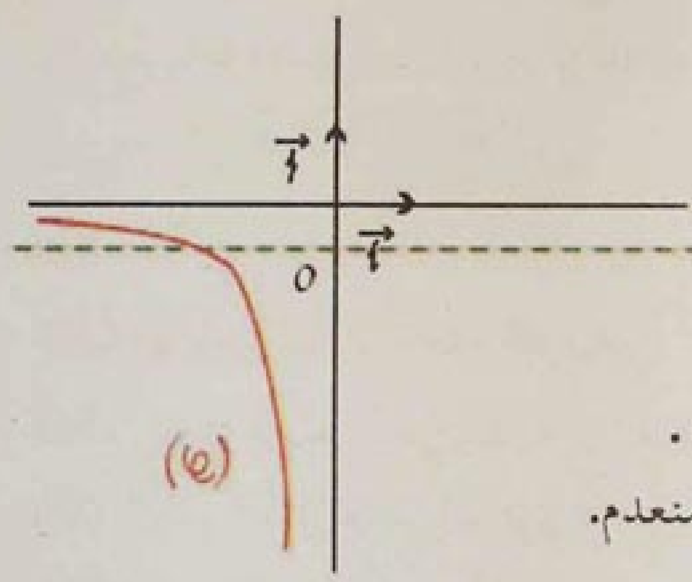


ونكتب

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

• **النهاية عند $-\infty$**

نعلم أن الدالة "مقلوب" فردية، إذن المنحنى (ح) الممثل لها يقبل مركز تناظر وهو مبدأ المعلم.



ينتج أن :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

• النهاية عند 0

الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ليست معرفة عند العدد 0 .

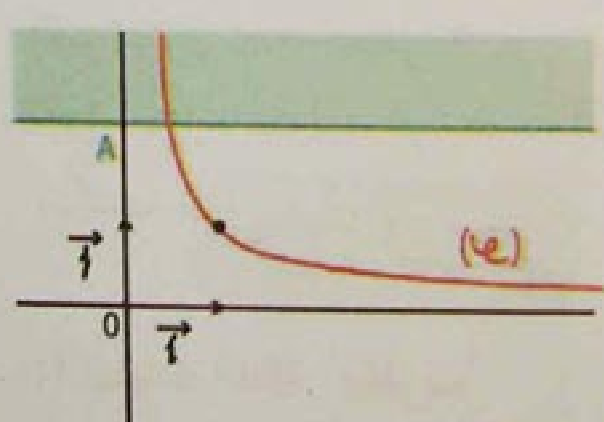
هذه الدالة معرفة عند كل عدد حقيقي x غير منعدم.

• النهاية عند العدد 0 عن اليمين

عند قسمة العدد 1 على أعداد موجبة تماما x وقريبة من العدد 0 ، نتحصل على أعداد أكبر فأكبر.

مثلا :

x	10^{-10}	10^{-5}	$10^{-2}=0{,}01$	$10^{-1}=0{,}1$	...
$\frac{1}{x}$	10^{10}	10^{5}	100	10	...



للحصول على $\frac{1}{x} > \mathrm{A}$ ، يكفي اختيار x حيث $0 < x < \frac{1}{\mathrm{A}}$.

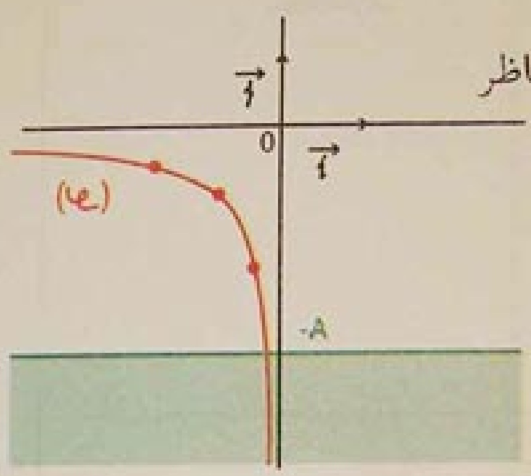
نقول إن نهاية الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ هي $+\infty$ عند العدد 0 عن اليمين أي $\frac{1}{x}$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x (الموجب تماما) إلى 0 .

نكتب
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$$

• النهاية عند العدد 0 عن اليسار

المنحنى (ج) الممثل للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ يقبل مركز تناظر وهو مبدأ المعلم.

ينتج أن
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$$



جدول إستخلاصي لنهايات الدوال المرجعية

الجدول التالي يلخص نتائج نهايات الدوال المرجعية عند 0 ، $+\infty$ و $-\infty$.

النهايات	الدالة
$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$	$x \longmapsto x$
$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	$x \longmapsto x^2$
$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$x \longmapsto \sqrt{x}$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$
$x \longmapsto x^3$	$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

2. العمليات على النهايات

إذا عُرِفت نهايتا كل من الدالتين f و g عند عدد حقيقي أو $-\infty$ أو $+\infty$ فإن النظريات المنصوص عليها في الجداول التالية، والتي تقبل بدون برهان، تسمح بحساب نهايات مجموعهما وجدائهما وحاصل قسمتهما، عند الإمكان. هذه النظريات لا يمكن تطبيقها في بعض الحالات. نسمي هذه الحالات حالات عدم التعيين ونشير إليها في الجدول بالعلامة؟

أ) نهاية مجموع دالتين

مبرهنة 1: ℓ و ℓ' عددان حقيقيان.

α هو عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كانت $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ هي	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
و $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ هي......	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x)+g(x))$ هي	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	؟

في هذه المبرهنة، توجد حالة عدم تعيين واحدة.
كل حالة عدم تعيين تتطلب دراسة خاصة.

أمثلة :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3+x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 4} \left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right) = 2,25$ لأن $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{x} = 0,25$ و $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

ب) نهاية جداء دالتين

مبرهنة ℓ و ℓ' عددان حقيقيان.

يرمز α إلى عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كانت $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x))$ هي...	ℓ	ℓ $\ell>0$	ℓ $\ell>0$	ℓ $\ell<0$	ℓ $\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
ونهاية $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ هي......	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
فإن $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \cdot g(x)$ هي..	$\ell \cdot \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	؟

في هذه المبرهنة، توجد حالة عدم تعيين واحدة.

أمثلة : • $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)x = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+1)x = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

• ؟ = $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) \cdot \frac{1}{x}$ حالة عدم التعيين.

رفع حالة عدم التعيين . لدينا من أجل $x \neq 0$ ؛ $(x+1) \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\frac{1}{x} = 1$

جـ) نهاية مقلوب دالة

مبرهنة : ℓ عدد حقيقي، α هو عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كان $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ هي..	ℓ $(\ell \neq 0)$	0 من أجل $f(x) > 0$ كل عدد x قريب من α .	0 من أجل $f(x) < 0$ كل عدد x قريب من α .	$+\infty$	$-\infty$
فإن $\lim\limits_{x \to \alpha} \left(\frac{1}{f(x)}\right)$ هي..	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

أمثلة : 1) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x-1}$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$ ومن أجل $x > 1$ ؛ $x - 1 > 0$.

ومن أجل $x < 1$ ؛ $x - 1 < 0$.

إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x-1} = +\infty$ أي $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (f(x)) = +\infty$

و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ أي $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (f(x)) = -\infty$

2) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ كما يلي : $g(x) = 3 + \dfrac{1}{x+2}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$

ولدينا أيضا $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 3$

د) نهاية دالة كثير الحدود عند $-\infty$ أو $+\infty$

f هي الدالة كثير الحدود المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي غير منعدم و $a_n, \ldots a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية .

حيث $a_n \neq 0$.

لدينا : من أجل $x \neq 0$ ؛ $f(x) = x^n\left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \ldots\ldots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right)$

– حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_{n-1}}{x} = 0$ ، . . . و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_1}{x^{n-1}} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_0}{x^n} = 0$

وبالتالي : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \ldots\ldots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right) = a_n$

ينتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$

إذا كان $a_n > 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n = +\infty$ أي $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

إذا كان $a_n < 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n = -\infty$ أي $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

– حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$.

إذا كان n زوجيا فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

إذا كان n فرديا فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

ولدينا أيضا $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots\dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n$

ينتج أن

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

الحالة الأولى : n عدد زوجي – إذا كان $a_n < 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

– إذا كان $a_n > 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

الحالة الثانية : n عدد فردي – إذا كان $a_n < 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

– إذا كان $a_n > 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

مبرهنة : نهاية الدالة كثير الحدود f عند $-\infty$ أو $+\infty$ هي نهاية الدالة $x \longmapsto a_n x^n$ عند $-\infty$ أو $+\infty$.

أمثلة : • $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

• $g(x) = -4x^3 + 5x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x^3) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^3) = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

هـ) نهاية الدالة التناظرية عند $-\infty$ أو $+\infty$

g هي دالة تناظرية معرفة كما يلي: $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

حيث a ، b ، c ، d أعداد حقيقية $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$.

الدالة g معرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

أي على المجموعة $\left]-\infty ; -\dfrac{d}{c}\right[\cup \left]-\dfrac{d}{c} ; +\infty\right[$.

لدينا: من أجل $x \neq 0$ ؛ $g(x) = \dfrac{a + \dfrac{b}{x}}{c + \dfrac{d}{x}}$

نعلم أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{b}{x} = 0$

وكذلك $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{d}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{d}{x} = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{a}{c}$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \dfrac{a}{c}$

مبرهنة:

> g هي دالة تناظرية حيث $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ؛ $c \neq 0$
>
> $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \dfrac{a}{c}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{a}{c}$

أمثلة: • $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-1}{2x+4} = \dfrac{3}{2}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{2x+4} = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+1}{1-3x} = \dfrac{2}{3}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+1}{1-3x} = \dfrac{2}{3}$

3. المستقيمات المقاربة

المستوي منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$، $(\mathcal{C})$ النحنى الممثل للدالة f.

أ) المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

a عدد حقيقي.

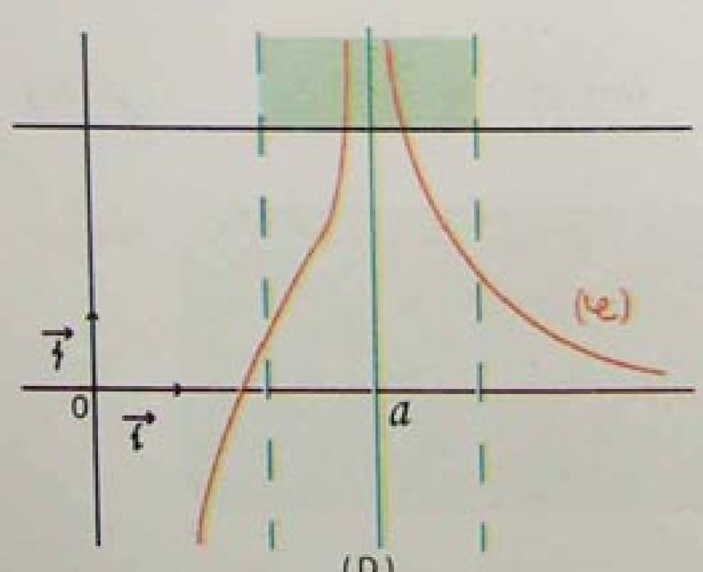
تعريف: المستقيم (D) ذو المعادلة $x = a$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathcal{C})$

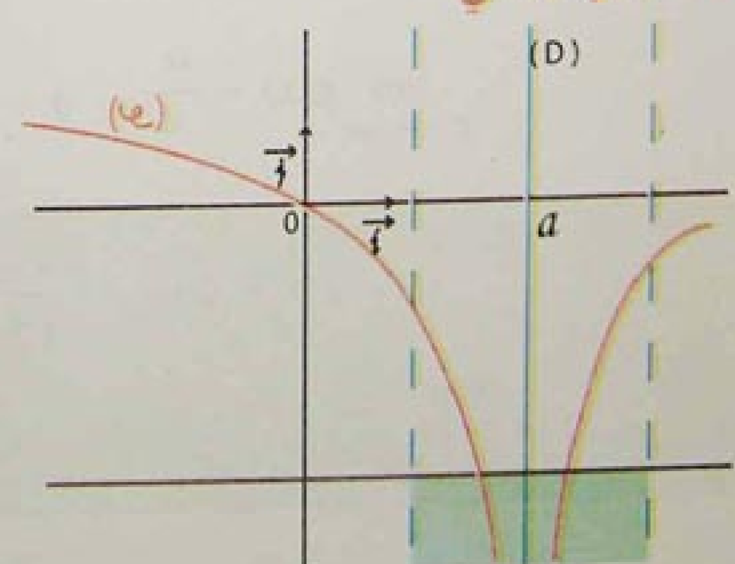
يعني $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

ملاحظة: إذا كان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ فإن المنحنى $(\mathcal{C})$ يُحصر في شريط يشمل

المستقيم ذا المعادلة $x = a$ من أجل x قريب بقدر الإمكان من a.

التفسير البياني





أمثلة : 1) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}$

($\mathcal{C}_f$) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x}=-\infty$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (أي محور التراتيب) هو مستقيم مقارب للمنحنى ($\mathcal{C}_f$).

2) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $g(x)=\frac{3}{x+1}$

($\mathcal{C}_g$) المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{3}{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{3}{x+1}=-\infty$

إذن المنحنى ($\mathcal{C}_g$) يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور التراتيب وهو المستقيم ذو المعادلة $x=-1$.

ب) المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

ℓ عدد حقيقي.

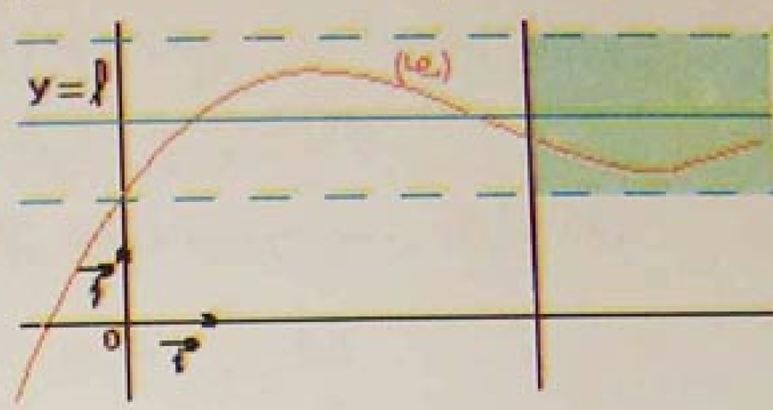
تعريف : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\ell$ مستقيم مقارب للمنحنى ($\mathcal{C}$)
يعني $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\ell$ أو $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\ell$

ملاحظات : • إذا كان $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\ell$ فإن المستقيم (Δ) ذ المعادلة $y=\ell$ مستقيم مقارب للمنحنى ($\mathcal{C}$) ، يوازي محور الفواصل.

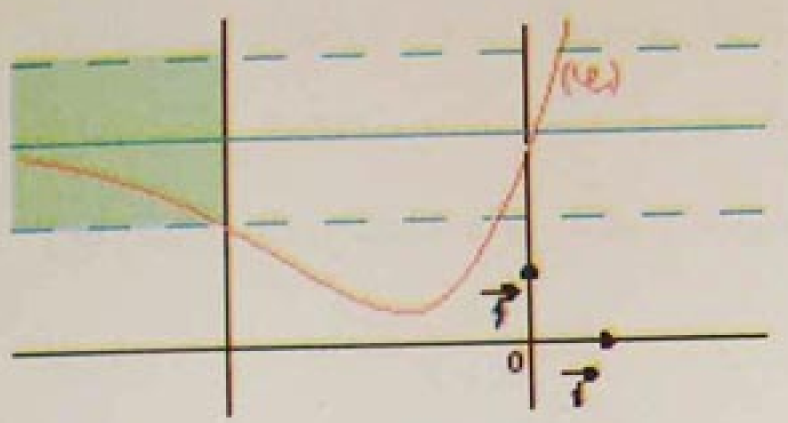
• إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\ell$ فإن المستقيم (Δ) ذ المعادلة $y=\ell$ مستقيم مقارب للمنحنى ($\mathcal{C}$) ، يوازي محور الفواصل.

التفسير البياني

- إذا كان $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ فإن المنحنى (ج) يحصر في شريط يشمل المستقيم ذا المعادلة $y = \ell$ ، من أجل x صغير بقدر الإمكان.
- إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ فإن المنحنى (ج) يحصر في شريط يشمل المستقيم ذا المعادلة $y = \ell$ ، من أجل x كبير بقدر الإمكان.



عند $+\infty$



عند $-\infty$

مثال : f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$

(ج) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j})$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -2$ مستقيم مقارب للمنحنى (ج).

جـ) المستقيم المقارب المائل

تعريف : المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب للمنحنى (ج) الممثل للدالة f يعني

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ (أو $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$).

مبرهنة :

إذا كانت الدالة f معرفة على مجال من الشكل $[h;+\infty[$
(أو $]-\infty;h]$) حيث $f(x)=ax+b+q(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)=0$

(أو $\lim\limits_{x\to-\infty} q(x)=0$)

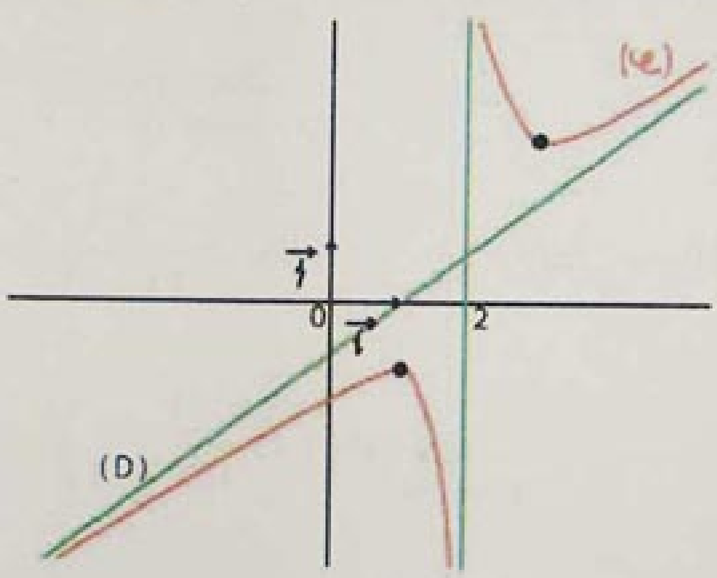
فإن المستقيم المعرف بالمعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathcal{C})$.

أمثلة : 1) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$

لدينا : من أجل كل عدد x يختلف عن 2 ، $f(x)-(x-1)=\dfrac{1}{x-2}$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathcal{C})$.



2) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{4\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+8}{x-4}$

لدينا من أجل كل عدد x يختلف عن 4 ، $f(x)=2x+\dfrac{8}{x-4}$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x-4}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x-4}=0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$.

1- رفع حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

طريقة: لرفع حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$ يمكن إستخراج عبارة مناسبة كعامل مشترك ثم تطبيق المبرهنات حول النهايات.

تمرين: f دالة معرفة على المجال $]-1 ; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{x+1}$

أحسب نهاية f عند $+\infty$.

حل: لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{-x^2}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{-x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}(-x) = -\infty$

تظهر حالة عد م التعيين من الشكل «$+\infty - \infty$» عند تطبيق المبرهنات.

من أجل كل عدد x من المجال $]-1 ; +\infty[$ $\quad f(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{x+1}$

$$= x^3\left(1 - \frac{x^2}{x^3(x+1)}\right) = x^3\left(1 - \frac{1}{x(x+1)}\right)$$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x+1) = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(x+1)} = 0$ وبالتالي: $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x(x+1)} = 1$

ينتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \dfrac{1}{x(x+1)}\right) = +\infty$

أو $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^3 - \dfrac{x^2}{x+1}\right) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2- رفع حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ أو من الشكل $\frac{0}{0}$

طريقة: لرفع حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ، يمكن استخراج عبارة مناسبة في البسط والمقام وتبسيط عبارة الدالة ثم تطبيق المبرهنات حول النهايات.

تمرين 1 : f دالة معرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

احسب نهاية f عند $+\infty$.

حل : لدينا $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$

تظهر حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عند تطبيق المبرهنات.

رفع حالة عدم التعيين :

لدينا، من أجل كل عدد x من المجال $]1 ; +\infty[$ ؛ $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

ومن أجل $x > 1$ ؛ $\frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x}(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

وبالتالي : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x-1)} = 0$

ينتج أن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = 0$ إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

تمرين 2 : g هي الدالة المعرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

احسب نهاية g عند 1 عن اليمين.

حل : لدينا $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} - 1 = 0$ و $\lim_{x \to 1} x - 1 = 0$

تظهر حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ عند تطبيق المبرهنات.

3- رفع حالة عدم التعيين من الشكل $\infty \times 0$

طريقة : لرفع حالة عدم التعيين من الشكل $\infty \times 0$ ، يمكن تحويل عبارة الدالة إلى شكل مجموع ثم تطبيق المبرهنات حول النهايات.

تمرين : f دالة معرفة على المجال $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (x-1)\left(2 - \frac{1}{x-1}\right)$

أحسب نهاية f عندما يؤول x إلى 1 .

حل : لدينا : $\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} (x-1) = 0$ إذن $\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

وبالتالي : $\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \left(2 - \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$

تظهر حالة عدم التعيين من الشكل $0 \times \infty$ عند تطبيق المبرهنات.

رفع حالة عدم التعيين.

لدينا، من أجل كل عدد x من المجال $]1\,;+\infty[$ ؛ $f(x) = (x-1)\left(2 - \frac{1}{x-1}\right)$

$$= 2(x-1) - \frac{(x-1)}{(x-1)}$$

$$= 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

من أجل كل عدد x من المجال $]1\,;+\infty[$ ؛ $f(x) = 2x - 3$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (2x-3) = -1$$

إذن $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -1$

4- تعيين المستقيمات المقاربة الموازية لأحد المحورين

طريقة:

f دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) إذا وجد عدد حقيقي x_0 حيث $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (أو $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$)

فإن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x = x_0$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور التراتيب.

2) إذا وجد عدد حقيقي b حيث $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ (أو $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$)

فإن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = b$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور الفواصل.

تمرين: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x+2}{3x-1}$

(ℭ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (ℭ).

حل: الدالة f معرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ أي المجموعة $]-\infty;\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3};+\infty[$.

حساب نهايات f عندما يؤول x إلى $\frac{1}{3}$ وإلى $-\infty$ وإلى $+\infty$.

إذا كان $x>\frac{1}{3}$ فإن $3x-1>0$. إذن $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{3} \\ >}} f(x)=+\infty$

إذا كان $x<\frac{1}{3}$ فإن $3x-1<0$. إذن $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{3} \\ <}} f(x)=-\infty$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{1}{3}$ مستقيم مقارب للمنحنى (ℭ)، يوازي محور التراتيب.

حساب نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty}\frac{x+2}{3x-1}=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to +\infty}\frac{x+2}{3x-1}=\frac{1}{3}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{3}$ مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل للمنحنى (ℭ).

5- إثبات أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى الممثل لدالة

طريقة:

f دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

(ℭ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم.

(D) المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ ، $a\neq 0$.

لإثبات أن المستقيم (D) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (ℭ).

نحسب الفرق $f(x)-(ax+b)$.

إذا كان $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (أو $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$)

فإن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (ℭ).

تمرين: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$

($\mathscr{C}$) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=2x+3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}$).

حل:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ أي $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{1\}$ ؛

$$f(x)-(2x+3)=\frac{2x^2+x+1}{x-1}-(2x+3)=\frac{(2x^2+x+1)-(2x+3)(x-1)}{x-1}$$

$$=\frac{4}{x-1}$$

إذن من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{1\}$ ؛ $f(x)-(2x+1)=\dfrac{4}{x-1}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x+3)]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]=0$

ينتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}$).

مسألة محلولة

f هي الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x+1}$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. اثبت أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، c حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3. ادرس تغيرات الدالة f وانجز جدول تغيراتها.

4. بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل. عين معادلة لكل منهما.

5. حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ والمستقيم المقارب المائل.

6. ارسم، بعناية، المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

حل:

1. البحث عن a ، b ، c حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ،

$$ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

اذن من أجل كل عدد x يختلف عن -1
$$\frac{x^2+4x-5}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

ينتج أن
$$ax^2+(a+b)x+b+c=x^2+4x-5$$

وبالتالي: $a=1$ و $a+b=4$ و $b+c=-5$ وهي جملة معادلات

حلها يعطي: $a=1$ ؛ $b=3$ ؛ $c=-8$.

إذن من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ؛ $f(x)=x+3-\dfrac{8}{x+1}$

2. تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

لدينا $\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

إذن نعين نهايات f عند -1 ؛ $-\infty$ ؛ $+\infty$.

لدينا: $\lim_{x \to -1} (x+1) = 0$ و $\lim_{x \to -1} (x^2+4x-5) = -8$

وإذا كان $x > -1$ فإن $x+1 > 0$.
وإذا كان $x < -1$ فإن $x+1 < 0$.

وبالتالي: $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$ و $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

إذن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة: يمكن استعمال العبارة الثانية لـ $f(x)$ أي $x+3-\frac{8}{x+1}$.

نلاحظ أن $\lim_{x \to -\infty} \frac{-8}{x+1} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{-8}{x+1} = 0$

إذن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+3) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+3) = +\infty$

3. دراسة تغيرات الدالة f .

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; -1[$ و $]-1 ; +\infty[$

ومن أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ؛ $f'(x) = 1 + \frac{8}{(x+1)^2}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ؛ $f'(x) > 0$

(مجموع عددين موجبين تماما).

إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; -1[$ و $]-1 ; +\infty[$

- جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

4. البحث عن المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور التراتيب.

ولدينا أيضا $f(x)$ يكتب على الشكل $x + 3 - \dfrac{8}{x+1}$ حيث

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-8}{x+1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{-8}{x+1} = 0$$

إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = x + 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

5. تحديد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و (Δ') .

ندرس إشارة العبارة $f(x) - (x + 3)$ على كل من المجالين $]-\infty ; -1[$ و $]-1 ; +\infty[$

من أجل كل عدد x يختلف عن -1 ؛ $f(x) - (x+3) = \dfrac{-8}{x+1}$

إذن إشارة $f(x) - (x + 3)$ هي إشارة $\dfrac{-8}{x+1}$ على المجالين $]-\infty ; -1[$ و $]-1 ; +\infty[$

الجدول المقابل يوضح إشارة $f(x) - (x + 3)$.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ $+\infty$
$\dfrac{-8}{x+1}$	$+$	$-$
النتائج	$(\mathscr{C})$ فوق (Δ')	$(\mathscr{C})$ تحت (Δ')

6. رسم المنحنى $(\mathscr{C})$

– إحداثيات نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع محوري الإحداثيات.

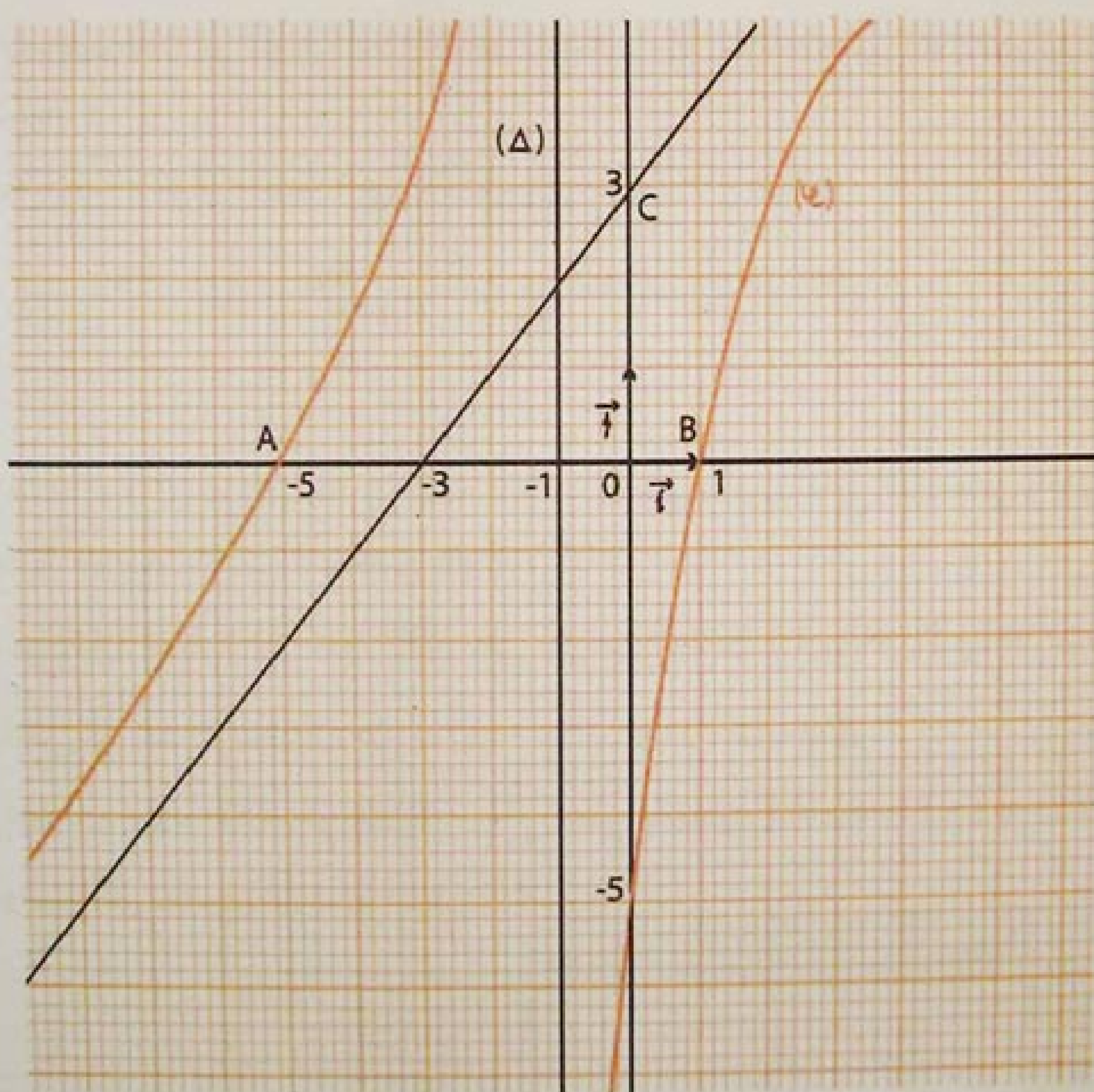
لدينا $f(0) = -5$ إذن $(\mathscr{C})$ يقطع محور التراتيب في النقطة $C(0\ ;\ -5)$

ولدينا $f(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x^2 + 4x - 5 = 0$

نحل في $\mathbb{R} - \{-1\}$ المعادلة $x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = 36$ أي $\Delta > 0$ إذن المعادلة $x^2 + 4x - 5 = 0$ تقبل حلين مختلفين هما -5 و1.

إذن $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(-5\ ;\ 0)$ و $B(1\ ;\ 0)$



1 صحيح أو خاطئ:

1) $\lim_{x \to +\infty} (x^2+4) = +\infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} (x^2+4) = -\infty$

3) إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$

فإن $\lim_{x \to a} [f(x)+g(x)] = 0$

4) إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$

فإن $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$

5) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{h \to 0} f(2+h)$

6) إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

فإن $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

7) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$

8) $\lim_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = +\infty$

نهايات دوال مألوفة

2 عين نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x) = \frac{1}{4}x$ ؛ $f(x) = -3x$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ؛ $f(x) = -5x^2$

$f(x) = 3x^3$ ؛ $f(x) = -\sqrt{2}x^3$

3 أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x) = -10x$ ؛ $f(x) = \frac{2}{3}x$

$f(x) = 0{,}5x^2$ ؛ $f(x) = -\frac{1}{10}x^2$

$f(x) = \frac{2}{9}x^3$ ؛ $f(x) = -8x^3$

4 عين نهايات الدالة f عند $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ ؛ $f(x) = 4\sqrt{x}$

$f(x) = 10^4\sqrt{x}$ ؛ $f(x) = \frac{1}{10}\sqrt{x}$

5 عين النهاية عند $-\infty$ ، $+\infty$ وعند العدد 0 عن اليمين وعن اليسار للدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي:

$f(x) = -\frac{1}{3x}$ ؛ $f(x) = \frac{4}{x}$

$f(x) = -\frac{4}{x^2}$ ؛ $f(x) = \frac{2}{x^2}$

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2x^2}$ ؛ $f(x) = \frac{1}{-3x^2}$

$f(x) = \frac{-20}{x^3}$ ؛ $f(x) = \frac{40}{x^3}$

6 أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=\frac{x}{2}+3$ ؛ $f(x)=-\frac{1}{4}x+5$

$f(x)=x^2+2$ ؛ $f(x)=-x^2+\frac{1}{3}$

$f(x)=x^3-10^2$ ؛ $f(x)=-x^3+10^{10}$

7 حدّد نهاية الدالة f عند $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=1-\sqrt{x}$ ؛ $f(x)=3+\sqrt{x}$

$f(x)=-10^5+\sqrt{x}$ ؛ $f(x)=-\sqrt{x}+10^3$

8 في كل حالة من الحالات التالية، عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

$f(x)=x^2+x$ ؛ $f(x)=-x^2+3x$

$f(x)=-x^2-x$ ؛ $f(x)=2x^2+3x-1$

$f(x)=x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ ؛ $f(x)=x^2+3x-\frac{1}{x^2}$

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ ؛ $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+5$

9 في كل حالة من الحالات التالية، عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

$f(x)=3+\frac{2}{4x-1}$ ؛ $f(x)=-1+\frac{2}{x+3}$

$f(x)=1+\frac{1}{-x+1}$ ؛ $f(x)=1-\frac{2}{2-x}$

$f(x)=x(2x^2+1)$ ؛ $f(x)=(1-x)(1+x)$

$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)(2x+5)$ ؛ $f(x)=\left(1+\frac{3}{x}\right)(x^2+1)$

10 f و g دالتان تحققان

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-2$

حدّد النهايتين عند $+\infty$ للدالتين

$f+g$ و $f\cdot g$

11 f و g دالتان حيث

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x)=+\infty$

حدّد نهاية g عند $+\infty$.

12 f و g دالتان حيث

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-8$

حدّد النهايتين عند $-\infty$ للدالتين.

$f+g$ و $f\cdot g$

حالات عدم التعيين

13 حدّد النهايتين عند $-\infty$ و $+\infty$ للدوال كثيرات الحدود f التالية:

$f(x)=x^2-x+5$ ؛ $f(x)=-4x^2+x-1$

$f(x)=\frac{x^2}{3}-2x+6$ ؛ $f(x)=10^{-3}x^2+10^3x+2$

$f(x)=2x^3+4x^2+5x-1$ ؛ $f(x)=-x^3+4x^2+x-4$

$f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-11$ ؛ $f(x)=-6x^3+5x+6$

$f(x)=-4x+4x^2+4$ ؛ $f(x)=x-3x^3+2x^2-1$

14 حدّد نهايات الدوال f عند $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x) = x - 2\sqrt{x}$ ؛ $f(x) = -x^2 + 3\sqrt{x}$

$f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{\sqrt{x}}{2} + x$ ؛ $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{x} + 1$

15 عيّن نهايات الدوال f عند $-\infty$ و $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x) = x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ ؛ $f(x) = (x^2 + 2x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)$

$f(x) = (x^2 - x)\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ ؛ $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

$f(x) = (x^2 - 4x)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$

16 أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 8x + 5)$ ؛ $\lim_{x \to -\infty} (3x^2 - 8x + 5)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{(2x^2 + x - 5)}{x + 1}$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x^2 + x - 5)}{x + 1}$

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{(2x^2 + x - 5)}{x + 1}$ ؛ $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{(2x^2 + x - 5)}{x + 1}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(2x - 4)$ ؛ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(x^2 + 3x)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$ ؛ $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

17 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

حدّد نهايات الدالة f عند -1 ، 3 ، $+\infty$ و $-\infty$.

18 g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)}$$

عين نهايات الدالة g عند 0 ، -1 ، $+\infty$ و $-\infty$.

المستقيمات المقاربة

19 عين نهاية الدالة f عند العدد a وعين معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ ؛ $a = 0$

$f(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$ ؛ $a = 0$

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} + 1$ ؛ $a = 0$

$f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - 5$ ؛ $a = 0$

$f(x) = 2 + \frac{1}{x - 1}$ ؛ $a = 1$

$f(x) = -3 + \frac{2}{x - 2}$ ؛ $a = 2$

$f(x) = 2 - \frac{1}{2x - 3}$ ؛ $a = \frac{3}{2}$

20 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1}$$

1) عين عددين حقيقيين a و b حيث من

أجل كل عدد x يختلف عن $\frac{1}{3}$ ؛
$f(x) = a + \frac{b}{3x-1}$

2) أحسب نهاية f عندما يؤول x إلى $\frac{1}{3}$ بقيم أكبر وبقيم أصغر.

21 لاحظ جدول تغيرات الدالة f التالي ثم عين معادلات المستقيمات المقاربة الموازية للمحورين.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	↗ $+\infty$	‖ $+\infty$ ↘	‖ ↗ 1	

22 1) لاحظ جدول تغيرات الدالة f التالي ثم عين معادلات المستقيمات المقاربة الموازية للمحورين.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	3 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘ 4	↗ 6	

2) استنتج أن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور التراتيب. حدّد معادلة له.

3) اثبت أن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل. حدّد معادلة له.

23 حدّد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{7}{x} - 3$.

24 حدّد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في الحالتين التاليتين:
$f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$ ؛ $f(x) = -x + 3 + \frac{6}{x-1}$

25 عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{4x+1}{x-3}$

26 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:
$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$

$(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المزود بمعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) عيّن نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف $\mathbb{R} - \{-1\}$.

2) اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ؛ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
حيث a ، b ، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathcal{C})$.

4) حدّد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ مع المستقيم المقارب المائل.

التمثيلات البيانية

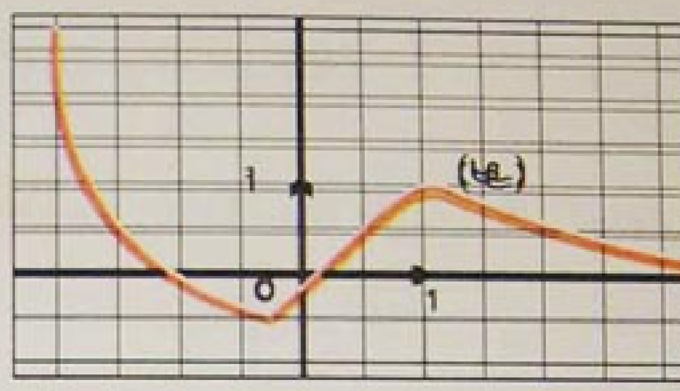
27 في كل حالة من الحالات التالية، f دالة معرفة بتمثيلها البياني $(\mathcal{C})$.

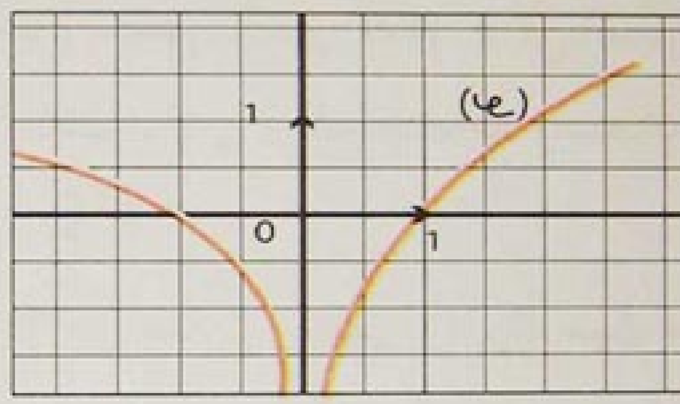
1) عيّن مجموعة تعريف الدالة f .

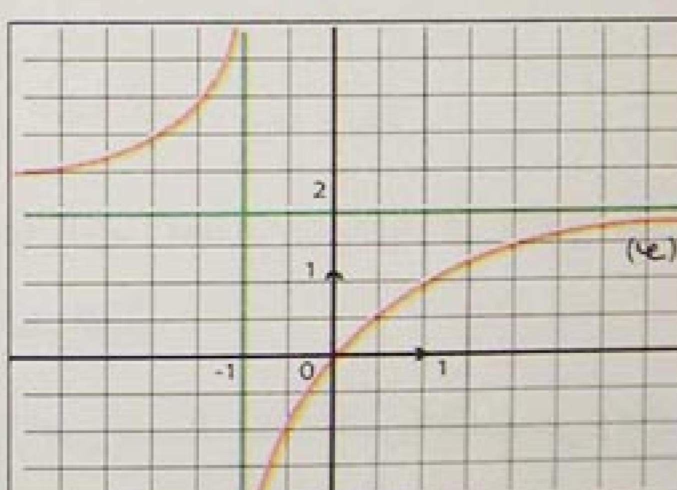
2) ماهي نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

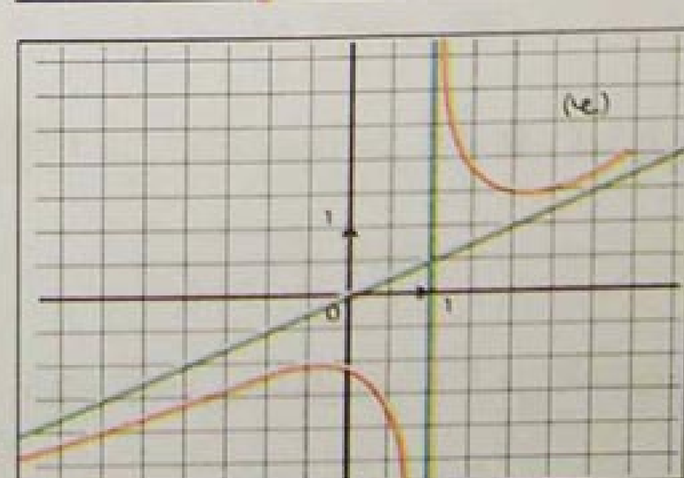
3) أكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (ج).

4) أنجز جدول تغيرات الدالة f .









دراسة دوال

28 في كل حالة من الحالات التالية، f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و (ج) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث:

$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x + 4$ ؛ $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$

$f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x - 1$ ؛ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 5$ ؛ $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

– عين نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$.

– عين $f'(x)$.

– ادرس تغيرات f وانجز جدول تغيراتها.

– ارسم المنحنى (ج) .

29 في كل حالة من الحالات التالية، f دالة معرفة على مجموعة D و(ج) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث:

$f(x) = \frac{-x+1}{x+2}$ ؛ $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

$f(x) = -3 - \frac{4}{x-4}$ ؛ $f(x) = 2 - \frac{1}{3x-2}$

$f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$ ؛ $f(x) = \frac{2x}{x^2-x+2}$

– عين المجموعة D .

– أحسب نهايات f عند حدود D .

– ادرس تغيرات f وانجز جدول تغيراتها.

– حدّد المستقيمات المقاربة للمنحنى (ج).

– ارسم المنحنى (ج) .

30 في كل حالة من الحالات التالية، f دالة معرفة على مجموعة D و($\mathscr{C}$) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث:

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ ؛ $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-1}{3x+2}$

$f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x+2}$ ؛ $f(x)=\dfrac{x^2+5x-4}{2x}$

– عين المجموعة D .

– ادرس تغيرات f وانجز جدول تغيراتها.

– حدّد المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}$).

– ارسم المنحنى ($\mathscr{C}$) .

مسائل

31 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-3\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$$

($\mathscr{C}$) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) اثبت أنه يوجد عددان حقيقيان a ، b حيث من أجل كل عدد x يختلف عن -3 ؛

$$f(x)=a+\frac{b}{x+3}$$

2) عين نهايات الدالة f عند -3 ، $+\infty$ و $-\infty$.

3) ادرس تغيرات الدالة f وانجز جدول تغيراتها.

4) حدّد المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}$).

5) ارسم المنحنى ($\mathscr{C}$) .

32 g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{4x-1}{-x+2}$$

($\mathscr{C}$) المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين عددين حقيقيين α وβ حيث من أجل كل عدد x يختلف عن 2 ،

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta}{-x+2}$$

2) ادرس تغيرات الدالة g وانجز جدول تغيراتها.

3) عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}$).

5) انشئ، بعناية، المنحنى ($\mathscr{C}$) .

33 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{2x^2-3x-2}{x-2}$$

($\mathscr{C}$) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c حيث من أجل كل عدد x يختلف عن 2 ؛

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

2) عين نهايات الدالة f عند 2 ، $+\infty$ ، $-\infty$.

3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

4) ادرس تغيرات الدالة f وانجز جدول تغيراتها.

5) حدّد إحداثيات نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع محوري الإحداثيات.

6) حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

7) ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

34 g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1 ; 3\}$ كما يلي : $g(x) = \dfrac{1-3x}{x^2 - 2x - 3}$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) عين العددين الحقيقيين α وβ حيث من أجل كل عدد x يختلف عن -1 و 3 ،

$$g(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

2) عين نهايات الدالة g عند -1 ، 3 ، $-\infty$ و $+\infty$.

3) ادرس تغيرات الدالة g وانجز جدول تغيراتها.

4) عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

5) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ مع محور الفواصل.

6) انشئ، بعناية، المنحنى $(\mathscr{C})$

35 يزداد عدد سكان بلد حسب الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{7x + 200}{x + 20}$

حيث x هو عدد السنوات التي مرّت منذ نهاية سنة 1980 و $f(x)$ عدد السكان بملايين نسمة.

1) عين العددين الحقيقيين a ، b حيث $f(x) = a + \dfrac{b}{x+20}$ ؛ x ينتمي إلى المجال $[0 ; +\infty[$.

2) أ) حسب دستور الدالة f المقدم في السؤال 1 ، تحقق إن كان عدد سكان هذا البلد يزداد أو يتناقص.

ب) ادرس نهاية f عند $+\infty$.

فسّر هذه النتيجة.

جـ) حل المعادلة $\frac{7x + 200}{x + 20} = 8$

باستعمال إتجاه تغير الدالة f ، حدد إن كان عدد السكان يفوق 8 ملايين نسمة أو يقل عنها، بعد سنة 2020 .

36 يعطى دستور الكلفة المتوسطة لإنتاج مادة من طرف مؤسسة صناعية كما يلي :

$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 10}{x}$ حيث x هي الكمية (بالكيلوغرامات) للمادة المنتجة، وينتمي إلى المجال $]0 ; +\infty[$ ، الكلفة $f(x)$ تحسب بملايين الدنانير.

1) أكتب $f(x)$ على الشكل

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ ؛

حيث a ، b ، c أعداد يطلب تحديدها.

2) بين أن، من أجل كميات كبيرة منتجة، يكون سلوك الكلفة المتوسطة هو سلوك دالة تآلفية.

3) كيف تكون قيم الكلفة المتوسطة عندما تكون كلفة الإنتاج قريبة من الصفر؟

4) ادرس تغيرات الدالة f .

5) مثّل، بيانيا، الدالة f ، في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

السلم: 1 cm لكل 1 kg على محور الفواصل و 0,5 cm لكل مليون دينار على محور التراتيب.

الباب 7 المتتاليات العددية

1. عموميات. *
2. المتتاليات الحسابية.
3. المتتاليات الهندسية.

متتالية فيبوناتشي

ليوناردو بيزانو(1170-1250) الملقب فيبوناتشي أعظم رياضي أوروبا في عصره. ارتبط اسمه بمتتالية عددية عرضها عام 1228 في كتابه المسمى Liber Abaci نمذجة وحلا للمشكلة التالية:

نضع في حظيرة زوجا من أرنبين (ذكر وأنثى).
يلد كلّ زوج عمره شهران على الأقل، كلّ شهر، زوجا جديدا من أرنبين (ذكر وأنثى).
إذا فرضنا أنّ ليس هناك أرنب يموت، ما هو عدد أزواج الأرانب بعد n شهرا ؟

وهكذا،فإذا كان u_n هو عدد أزواج الأرانب الموجودة خلال الشهر من المرتبة n، نحصل على متتالية معرّفة بالشكل:

ومن أجل كلّ عدد طبيعي n حيث $n>1$ ،

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}$$

في هذه المتتالية، يكون كلّ حدّ هو مجموع الحدّين السابقين له مباشرة وهي تشرح انتظام توالد الأرانب كما ذكر فيبوناتشي، وقد اكتشف توافقها كذلك مع بعض الظواهر الطبيعية كتفرّع بعض الأشجار التي تنبت في بعض البلدان الباردة وتوجّه بعض النباتات (زهرة الأقحوان، عباد الشمس،...) نحو الشمس.
كما ساهمت هذه المتتالية في إثراء العديد من مواضيع الرياضيات وحلّ الكثير من المعضلات.

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1. u عدد حقيقي. في الكتابة u^3، العدد 3 هو:	أساس	أسّ	قوّة
2. العدد -2^4 يساوي	-8	16	-16
3. u_{2006} هو عدد سكان الجزائر في سنة 2006. في الكتابة u_{2006}، العدد 2006 هو:	أس	دليل	أساس
4. الأعداد 1 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 7 ؛ ...هي حدود متتابعة لمتتالية. حسب الانتظام السابق، يكون أحد حدود هذه المتتالية هو:	100	54	73
5. الأعداد 2 ؛ 8 ؛ 32 ؛ 128 ؛ ... هي حدود متتابعة لمتتالية. حسب الانتظام السابق، الحدّ الذي يتبع العدد 128 في هذه المتتالية هو:	256	512	1024
6. الأعداد 1 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 8 ؛ ... هي حدود متتابعة لمتتالية. الحدّ الذي يتبع العدد 8 في هذه المتتالية هو:	11	12	13
7. إذا كانت u دالة معرفة على $\mathbb{N}$ بالدستور $u(n)=n^2$، فإنّ $u(n+1)$ يساوي:	n^2+1	$(n+1)^2$	n^2+n+1

نشاط 1: تطوّر السكّان

قدّر عالم الإقتصاد الإنجليزي طوماس مالتوس (*T. Malthus*) (1766-1834) أنّ عدد سكان بلاده يتزايد كلّ سنة بنسبة 2%. في سنة 1800، كان عدد سكان إنجلترا 8 ملايين نسمة.

I. أ) أكمل الجدول الآتي:

السنة n	1800	1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807	1808	1809	1810
عدد السكان (بملايين نسمة)	8										

ب) ما هي العلاقة بين عدد سكان سنة معيّنة و عدد سكان السنة السابقة لها ؟

II. n عدد طبيعي حيث $n \geq 1800$. بفرض u_n هو عدد سكان إنجلترا في السنة n.

أ) عيّن العلاقة التي تعطي u_{n+1} بدلالة u_n من أجل كلّ عدد طبيعي n.

بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n \geq 1800}$ معرّفة بالشكل:

$$(1) \begin{cases} u_{1800} = 8 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}02 \end{cases}$$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 1800$،

ب) ما هو عدد العمليات التي يجب إنجازها لحساب عدد سكان إنجلترا في سنة 2006 ؟

III. نقترح فيما يلي تعيين علاقة صريحة تعطي u_n من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq 1800$.

أ) انطلاقا من حساب الحدود الأولى u_n ($1800 \leq n \leq 1810$)، استنتج أنّ:

$u_n = 8 \times (1{,}02)^{n-1800}$ ، من أجل كلّ n بحيث $n \geq 1800$.

ب) بالاستعانة بحاسبة، احسب u_{2006} (حسب تقدير مالتوس).

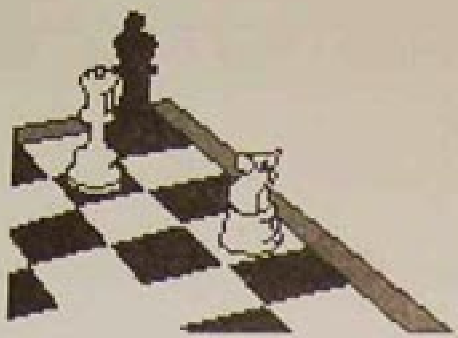
نشاط 2: المتتاليات الحسابية

وضع تلميذ مبلغ 5000 دينار في البنك بفوائد بسيطة لعدة سنوات.
بمعنى، أنه عند نهاية كلّ سنة، يمنح له البنك فائدة قدرها 5%، ليزيد ادخاره كلّ سنة بمبلغ ثابت يساوي 5% من المبلغ الابتدائي.
لمساعدة التلميذ على معرفة المبلغ الإجمالي كلّ سنة، نعرّف متتالية عددية كما يلي:
نفرض أنّ S_0 هو المبلغ الابتدائي و S_1 المبلغ الإجمالي المدخر بعد سنة، وبصفة عامة، S_n المبلغ الإجمالي المدخر بعد n سنة.

1) احسب S_1، S_2، S_3.
2) تحقق أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_{n+1} = S_n + 250$.
3) عبّر عن S_n بدلالة n.
4) ما هو عدد السنوات التي يجب انتظارها ليضعّف التلميذ المبلغ الابتدائي.

نشاط 3: المتتاليات الهندسية

يروي الصفدي أنّ شيرهام أحد ملوك الفرس خيّر مبتكر لعبة الشطرنج سيسا في مكافأة مقابل هذا الابتكار، فما كان من هذا الأخير إلا أن طلب حبة قمح مقابل الخانة الأولى من رقعة الشطرنج والضعف مقابل الثانية وضعف الخانة الثانية مقابل الثالثة ...
وهكذا يضعّف العدد من خانة إلى أخرى إلى آخر خانة.
فابتسم الملك لـ " تواضع " طلب المبتكر !!



1. أ) ما هو عدد خانات رقعة الشطرنج ؟
ب) عدد حبات القمح المطلوبة يضعّف من خانة إلى أخرى. هل هذه المتتالية حسابية أم هندسية ؟
احسب أساس هذه المتتالية.
حـ) عيّن العبارة التي تعطي عدد حبات القمح في الخانة ذات الرتبة n بدلالة n.

2. بالاستعانة بحاسبة، احسب عدد حبات القمح في الخانات ذات الرتب 16 و 24 و 64.
أعط رتبة مقدار العدد الأخير.

3. باستعمال مجدول، حضّر ورقة حساب كما يلي:
أ) تحقق من عدد الحبات الموجود في الخانات 16 و 24 و 64.
ب) ابتداء من أية خانة يتجاوز عدد الحبات المليون ؟ المليار ؟

C8   fx =B8+C7

	A	B	C
1	رتبة الخانة n	عدد الحبات في الخانة	عدد الحبات الإجمالي
2	1	1	1
3	2	2	3
4	3	4	7
5	4	8	15
6	5	16	31
7	6	32	63
8	7	64	127
9	8	128	255
10	9	256	511
11	10	512	1023
12	11	1024	2047
13	12	2048	4095

4. إذا علمت أنّ طنا من القمح يشمل حوالي 2×10^7 حبة، ما هو بالتقريب عدد الأطنان التي ينبغي أن يعطيها الملك لصاحب الابتكار؟

معارف

1. عموميات

- **مفهوم متتالية**

تعريف

نسمّي متتالية عددية كلّ دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

اصطلاحات وتعابير

- يُرمز عادة لمتتالية بأحد الرموز u ، v، w، ...
- يرمز لصورة عدد طبيعي n بمتتالية u بالشكل $u(n)$ أو بالشكل u_n (نقرأ: u دليل n).
- العدد u_n هو الحدّ الذي دليله (أو رتبته) n ويسمّى أيضا الحدّ العام للمتتالية u.
- يرمز أيضا للمتتالية u بالشّكل (u_n) أو $(u_n)_{n\in N}$.

أمثلة

أ) قائمة المربعات 0، 1، 4، 9 تشكّل متتالية u معرّفة على $D=\{0;1;2;3\}$، حيث:
$u_0=0$ ؛ $u_1=1$ ؛ $u_2=4$ ؛ $u_3=9$.

ب) v هي المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالشّكل: $v_n=\dfrac{1}{n}$.

الحدّ الذي رتبته 10 لهذه المتتالية هو $v_{10}=\dfrac{1}{10}$

حـ) لتكن w المتتالية المعرفة كالآتي: $w_0=2$ و $w_{n+1}=3w_n+1$، من أجل كلّ عدد طبيعي n.
يمكن حساب الحدود w_1 ؛ w_2 ؛ w_3 ؛...
نجد: $w_1=3w_0+1=3\times2+1=7$ ؛ $w_2=3w_1+1=3\times7+1=22$ ؛ ...

ملاحظة

يمكن أن تكون المتتالية معرفة بدءا من رتبة معينة.

مثال

المتتالية (u_n)، حيث $u_n=\sqrt{n-3}$، تكون معرفة من أجل $n\geq3$ و u_3 هو حدّها الأوّل.

- **طرق توليد متتالية**

هناك ثلاث طرق لتوليد متتالية:

1. بإعطاء قائمة كلّ حدود المتتالية (عدد الحدود منته).

مثال

1 ؛ $\dfrac{5}{2}$ ؛ 4 ؛ $\dfrac{11}{2}$ ؛ 7.

2. بعبارة من الشكل $u_n=f(n)$

يمكن تعريف متتالية بعبارة صريحة (دستور) تسمح بحساب كلّ حدّ بدلالة n مباشرة.

مثال

u متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة $u_n = 2n^2 - 1$.

في هذه الحالة، $u_0 = -1$ ، $u_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$ ، $u_2 = 2 \times 2^2 - 1 = 7$ ، ...

3. بعلاقة تراجعية

يمكن تعريف متتالية u بإعطاء:

- الحدّ الأوّل u_0.
- وعلاقة تسمح بتعيين كلّ حدّ انطلاقا من الحدّ السابق له مباشرة.
  نسمّي مثل هذه العلاقة علاقة تراجعية.

مثال

لتكن v المتتالية المعرفة بحدّها الأوّل v_0، حيث $v_0 = 2$ والعلاقة $v_{n+1} = 3v_n - 1$.

لدينا $v_1 = 3v_0 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$ ، $v_2 = 3v_1 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14$ ، $v_3 = 3v_2 - 1 = 41$، ...

إذا كانت f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3x - 1$ ، فتكون المتتالية (v_n) معرّفة إذا علم v_0 والعلاقة التراجعية $v_{n+1} = f(v_n)$ التي تعبّر عن الحدّ من المرتبة $n+1$ بدلالة الحدّ من المرتبة n.

- **التمثيل البياني لمتتالية**

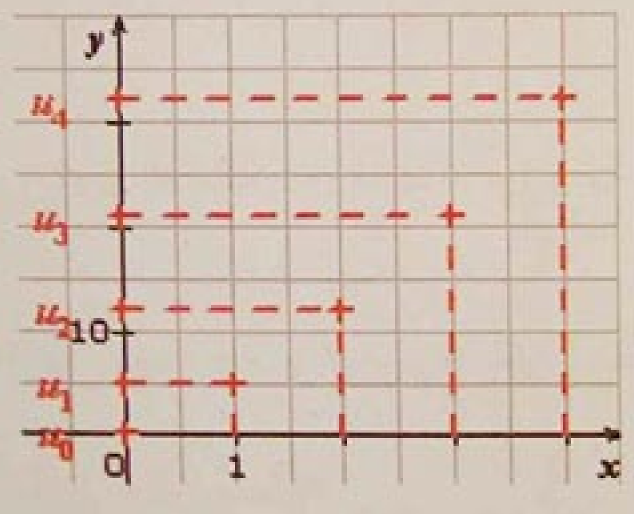
تعريف

التمثيل البياني لمتتالية u هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات $(n; u_n)$ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ للمستوي.

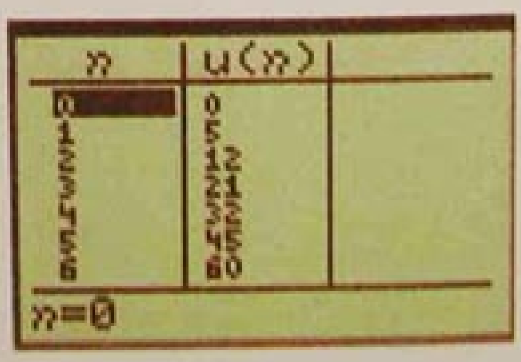
مثال

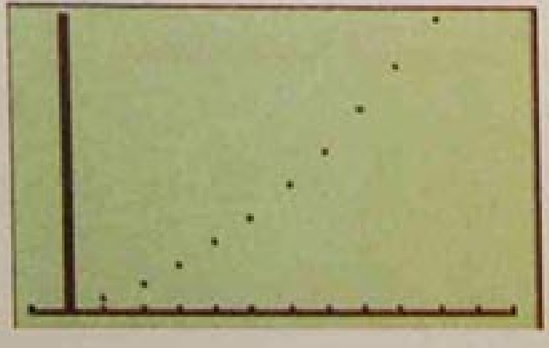
لتكن u المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = n^2 + 4n$.

النقط الخمس الأولى من التمثيل البياني لهذه المتتالية هي كما في الشكل المقابل.



كما هو الحال بالنسبة إلى الدوال، يمكن أن نعطي جدول قيم متتالية وتمثيلها البياني بحاسبة بيانية.





- **اتجاه تغيّر متتالية**

تعريف

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

- نقول إنّ (u_n) متتالية متزايدة تماما عندما يكون:
من أجل كلّ عدد طبيعي n $u_n < u_{n+1}$
- نقول إنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما عندما يكون:
من أجل كلّ عدد طبيعي n $u_n > u_{n+1}$

عندما نستبدل الرمز > (أو <) بالرمز ≤ (أو ≥) في التعريف السابق، نقول إنّ المتتالية u متزايدة (أو متناقصة).

أمثلة

- المتتالية (u_n) حيث من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = n^2$ متزايدة تماما.

بالفعل، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

وبالتالي $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

وبما أنّ $2n + 1 > 0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n.

إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي أنّ $u_{n+1} > u_n$.

- المتتالية (v_n) حيث من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = \frac{1}{n+1}$ متناقصة تماما.

بالفعل، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$.

وبالتالي $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$.

وبما أنّ $\frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n.

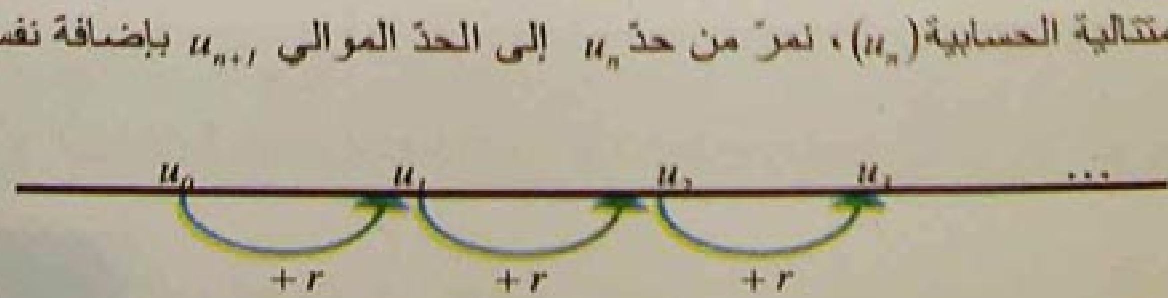
إذن $v_{n+1} - v_n < 0$ أي أنّ $v_{n+1} < v_n$.

2. المتتاليات الحسابية

- **تعريف**

نقول عن متتالية (u_n) إنّها متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r، حيث:
من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + r$.
يسمّى العدد الحقيقي r أساس المتتالية (u_n).

معنى ذلك أنّه في المتتالية الحسابية (u_n)، نمرّ من حدّ u_n إلى الحدّ الموالي u_{n+1} بإضافة نفس العدد الثابت r دائما.



أمثلة

- متتالية الأعداد الفردية 1، 3، 5، 7، ... هي متتالية حسابية، أساسها 2.
- (u_n) متتالية حسابية، أساسها $-\frac{1}{2}$ وحدّها الأوّل $u_0 = 7$.

الأعداد $u_1 = 6{,}5$ ، $u_2 = 6$ ، ... هي حدود للمتتالية (u_n).

> تسمية المتتالية متتالية حسابية باعتبار أن كل حد فيها هو الوسط الحسابي للحد الذي يسبقه والحد الذي يليه
> $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.

ملاحظة

يمكن أن يكون العدد الحقيقي r موجبا أو سالبا.
إذا كان $r = 0$ ، فإنّ كلّ الحدود متساوية:أذن المتتالية ثابتة.

- **حساب الحدّ العام u_n**

1. بإعطاء الحدّ الأوّل u_0 والأساس r

مبرهنة 1

> (u_n) متتالية حسابية ذات الحدّ الأوّل u_0 والأساس r يعني أنّ ،
> من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = u_0 + nr$.

برهان

$$\begin{array}{cccc} & u_1 & u_2 & \\ \hline u_0 & u_0 + r & u_0 + 2r & \dots \end{array}$$

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_0 وأساسها r،
فإنّنا نمرّ من حدّ إلى الحدّ الذي يليه مباشرة بإضافة r دائما.
أي أنّ $u_1 = u_0 + r$ ، $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$ ، ...ونقبل أنّ $u_n = u_0 + nr$.
وبالعكس، بالنسبة إلى متتالية (u_n)، إذا كان $u_n = u_0 + nr$، فإنّ
$u_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = u_n + r$.
ومنه فالمتتالية (u_n) متتالية حسابية.

أمثلة

- الحدّ العام للمتتالية الحسابية للأعداد الفردية ذات الحدّ الأوّل 1 والأساس 2 هو: $u_n = 1 + 2n$.
- (u_n) متتالية حسابية حيث $u_0 = 10$ و $r = -6$. إذن $u_n = 10 - 6n$
والأعداد $u_3 = -8$ ، $u_{100} = -590$ ، ... حدود لها.

2. بإعطاء حد كيفي للمتتالية والأساس

مبرهنة 2

> (u_n) متتالية حسابية علم حدّ منها u_p وأساسها r يعني:
> من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = u_p + (n-p)r$

برهان

p عدد طبيعي.

من أجل كلّ عدد طبيعي n:

$u_p = u_0 + pr$ و $u_n = u_0 + nr$.

منه $u_n - u_p = nr - pr = (n-p)r$.

وبالتالي $u_n = u_p + (n-p)r$

$$u_p \xrightarrow{+r} u_{p+1} \xrightarrow{+r} u_{p+2} \quad \dots \quad u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n$$

من u_p إلى u_n نضيف $(n-p)$ مرّة الأساس r.

مثال

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_{10} = 15$ وأساسها $\frac{3}{2}$.

$$u_{35} = u_{10} + (35-10) \times \frac{3}{2} = 52{,}5$$

$$u_3 = u_{10} + (3-10) \times \frac{3}{2} = 4{,}5 \,.$$

تسمح العلاقة الواردة في النظرية 2 بحساب أي حدّ u_n من متتالية حسابية انطلاقا من أحد حدودها u_p وأساسها r

- **مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية**

مبرهنة 3

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_0 وأساسها r.

من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)\dfrac{(u_0 + u_n)}{2}$

نحصل على مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية بالقاعدة:

$$\frac{(\text{الحدّ الأخير} + \text{الحدّ الأوّل})}{2} \times \text{عدد الحدود}$$

برهان

نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$.

وبكتابة $S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1 + u_0$ والجمع طرفا إلى طرف، نحصل على:

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_1 + u_{n-1}) + (u_0 + u_n)$$

لكن،

$$u_0 + u_n = u_0 + (u_0 + nr) = 2u_0 + nr$$

$$u_1 + u_{n-1} = (u_0 + r) + [u_0 + (n-1)r] = 2u_0 + nr$$

$$u_2 + u_{n-2} = (u_0 + 2r) + [u_0 + (n-2)r] = 2u_0 + nr$$

...

كلّ من المجاميع السابقة يساوي $u_0 + u_n$.

إذن، نكتب: $2S_n = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)}_{(n+1) \text{ مرّة}} = (n+1)(u_0 + u_n)$

أي أنّ $S_n = (n+1)\dfrac{(u_0 + u_n)}{2}$.

مثال

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = 2n+1$.

لدينا: $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2} = (n+1)^2$

تطبيق

$$1+3+5+7+9+11+13 = 7\frac{(1+13)}{2} = 7^2$$

نتيجة

متتالية الأعداد الطبيعية غير المنعدمة هي متتالية حسابية، حدّها الأول 1 وأساسها 1.

ومجموع n حدّا الأولى لها هو: $1+2+3+ ... +n = \frac{n(n+1)}{2}$

مثال

$$1+2+ \quad ... \quad +99 = \frac{99(99+1)}{2} = 4950$$

- **التمثيل البياني**

مبرهنة 4

التمثيل البياني لمتتالية حسابية هو مجموعة نقط منعزلة وواقعة على نفس الاستقامة.

برهان

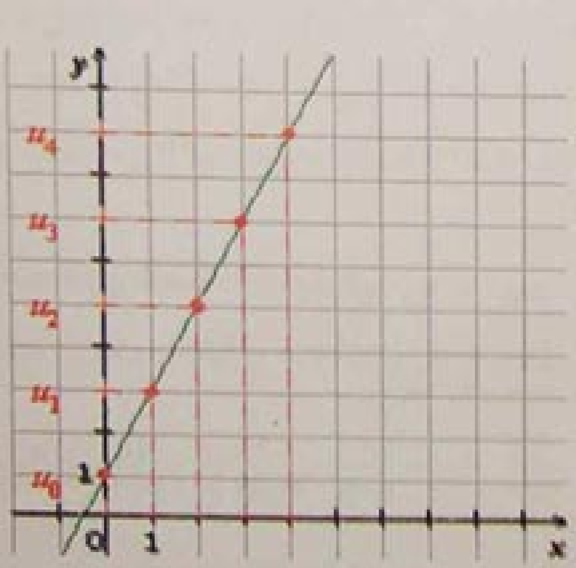
نعلم أنّ التمثيل البياني لمتتالية عددية (u_n) هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات $(n;u_n)$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للمستوي.

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_0 وأساسها r، فإنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = rn + u_0$.

معنى ذلك أنّ كلّ النقط $M(n;u_n)$ تكون على المستقيم الذي معادلته $y = rx + u_0$.

مثال

التمثيل البياني للمتتالية الحسابية التي حدّها الأول 1 وأساسها 2 هو كما في الشكل المقابل.



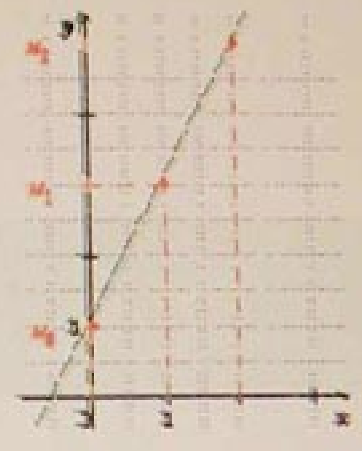
- **اتجاه التغيّر**

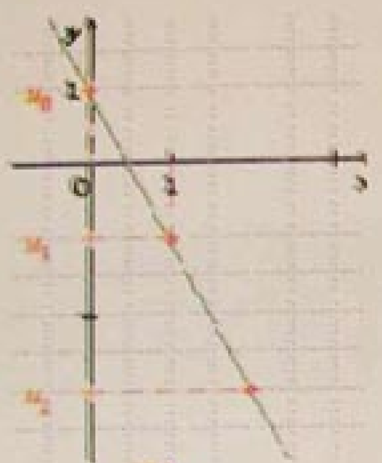
مبرهنة 5

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها r.
- إذا كان r موجبا تماما فالمتتالية متزايدة تماما.
- إذا كان r سالبا تماما فالمتتالية متناقصة تماما.
- إذا كان r منعدما فالمتتالية ثابتة.

مثال

المتتالية الحسابية الممثلة كما في الشكل (1) متزايدة تماما والمتتالية الحسابية الممثلة كما في الشكل **(2)** متناقصة تماما.


(1)


(2)

ملاحظة

معامل توجيه المستقيم في كلّ من التمثيلين هو أساس المتتالية الحسابية الممثلة.

3. المتتاليات الهندسية

- **تعريف**

نقول عن متتالية (u_n) إنها متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم q، حيث:
من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = q \times u_n$.
يسمّى العدد الحقيقي q أساس المتتالية (u_n).

معنى ذلك أنه في المتتالية الهندسية (u_n)، نمرّ من حدّ u_n إلى الحدّ الذي يليه مباشرة u_{n+1} **بالضرب في** نفس العدد الثابت q دائما.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \quad \cdots$$

أمثلة

- متتالية قوى العدد 3، أي 1، 3، 9، 27، 81، 243، ... هي متتالية هندسية حدّها الأول **1** وأساسها 3.

سُميت المتتالية متتالية هندسية باعتبار أنّ كلّ حدّ فيها هو الوسط الهندسي للحدّ الذي يسبقه والحدّ الذي يليه:
$u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$.
(كلّ الحدود موجبة).

- (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 2$.

تحسب الحدود الأولى لهذه المتتالية كالآتي:

$$u_1 = q \times u_0 = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \quad ; \quad u_2 = q \times u_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_3 = q \times u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ملاحظة

إذا كان أساس متتالية هندسية هو 1 فكلّ حدودها متساوية، فهي متتالية ثابتة.

- **حساب الحدّ العام u_n**

1. بإعطاء الحدّ الأوّل u_0 والأساس q

مبرهنة 6

(u_n) متتالية هندسية ذات الحدّ الأوّل u_0 والأساس q (مع $q \neq 0$) يعني:
من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = q^n u_0$.

برهان

(u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل u_0 وأساسها q.

$$u_0 \quad q\,u_0 \quad q^2 u_0 \quad \ldots$$

بضرب حدّ من المتتالية (u_n) في العدد q، نحصل على الحدّ الذي يليه مباشرة ونستنتج أن $u_n = q^n u_0$.

وبالعكس، إذا كان $u_n = q^n u_0$، فإنّ $u_{n+1} = q^{n+1} u_0 = (q \times q^n) u_0 = q(q^n u_0) = q u_n$.
ومنه فالمتتالية (u_n) متتالية هندسية.

أمثلة

- (u_n) متتالية هندسية حيث $u_0 = 1$ و $q = 2$. الجدول أدناه يعطي الحدود العشرة الأولى للمتتالية (u_n).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
u_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...

- n عدد طبيعي. المتتالية ذات الحدّ العام $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ متتالية هندسية حدّها الأوّل 2 وأساسها $\frac{1}{3}$.

2. بإعطاء حد كيفي للمتتالية والأساس

مبرهنة 7

q عدد حقيقي غير منعدم. إذا كانت (u_n) متتالية هندسية علم حدّ منها u_p وأساسها q فإنّ:
من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = u_p q^{n-p}$

برهان

لدينا: $u_n = q^n u_0$.

لكن $u_p = q^p u_0$، منه $u_0 = \dfrac{u_p}{q^p}$ $(q \neq 0)$.

وبالتالي $u_n = q^n \dfrac{u_p}{q^p} = u_p q^{n-p}$

$$u_p \xrightarrow{\times q} u_{p+1} \xrightarrow{\times q} u_{p+2} \quad \dots \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n$$

من u_p إلى u_n نضرب $(n-p)$ مرّة في الأساس q.

تسمح العلاقة الواردة في النظرية 7 بحساب أي حد u_n من متتالية هندسية انطلاقا من أحد حدودها u_p والأساس q

مثال

(u_n) متتالية هندسية، بحيث $u_3 = \dfrac{27}{4}$ وأساسها $\dfrac{3}{2}$.

لدينا: $u_5 = u_3 q^{5-3} = \left(\dfrac{27}{4}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{243}{16}$

و $u_0 = u_3 q^{0-3} = \left(\dfrac{27}{4}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = 2$.

- **مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية**

مبرهنة 8

q عدد حقيقي يختلف عن 1، (u_n) متتالية هندسية أساسها q.

من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

برهان

نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$.

لدينا $qS_n = \quad u_1 + \quad \dots \quad + u_n + u_{n+1}$.

منه $S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1}$. أي أنّ $(1-q)S_n = u_0 - u_{n+1}$

وبالتالي $S_n = \dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = \dfrac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$، لأنّ $q \neq 1$.

ملاحظات

- في العلاقة $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$، عدد حدود المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ هو $n+1$.
- إذا كان $q = 1$ فإنّ $u_0 = u_1 = \dots = u_n$ وبالتالي $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0$.

مثال

(u_n) متتالية هندسية حيث $u_0 = 2$ و $q = \frac{3}{2}$.

لدينا: $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 2\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^4}{1-\frac{3}{2}} = 16,25$

نتيجة

من أجل كلّ عدد حقيقي x يختلف عن1، $1+x+x^2+...+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

مثال

$$1+2+2^2+2^3+\ ...\ +2^9 = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10}-1 = 1023$$

- **اتجاه التغيّر**

مبرهنة 9

(u_n) متتالية هندسية، u_0 حدّها الأوّل و q أساسها بحيث $u_0>0$ و $q>0$.

تكون المتتالية (u_n):

- متزايدة تماما، إذا كان $q>1$.
- متناقصة تماما، إذا كان $0<q<1$.
- ثابتة، إذا كان $q=1$.

برهان

- إذا كان $q>1$، فإنّ $qu_n > u_n$ وبالتالي $u_{n+1} > u_n$. إذن (u_n) متزايدة تماما.
- إذا كان $0<q<1$، فإنّ $qu_n < u_n$ وبالتالي $u_{n+1} < u_n$. إذن (u_n) متناقصة تماما.
- إذا كان $q=1$، فمن أجل كلّ عدد طبيعي n يكون $u_n = u_0$. إذن (u_n) ثابتة.

ملاحظة

إذا كان $q<0$ فإنّ المتتالية الهندسية غير رتيبة (ليست متزايدة وليست متناقصة).

أمثلة

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_n = 2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ و $v_n = \frac{3}{2^n}$.

- u_n من الشكل u_0q^n، (u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل 2 وأساسها $\frac{3}{2}$.

بما أنّ الحدّ الأوّل u_0 والأساس q موجبان و $q>1$، فإنّ المتتالية متزايدة تماما.

- لدينا: $v_n = \frac{3}{2^n} = 3\times\frac{1}{2^n} = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

v_n من الشكل u_0q^n، (v_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل 3 وأساسها $\frac{1}{2}$.
بما أنّ الحدّ الأوّل u_0 والأساس q موجبان و $q<1$، فإنّ المتتالية متناقصة تماما.

★ نمذجة وضعيات باستعمال متتاليات

الفوائد البسيطة والفوائد المركبة

تعاريف

عندما يودع مال في صندوق توفير، فإنّ هذا الأخير يمنح فوائد على المبلغ المدخر.

- تُحسب الفوائد البسيطة انطلاقا من الرصيد الابتدائي، وهي متناسبة مع المدة الزمنية للادخار.
- نقول إنّ الفوائد مركبة، عندما تضاف الفوائد المكتسبة خلال سنة إلى الرصيد الابتدائي للادخار، ويصبح رصيد سنة معينة يساوي رصيد السنة السابقة مباشرة زائد الفوائد المكتسبة.

مسألة

أراد شخص إيداع مبلغ 50000 دينار. فعرض عليه البنك كيفيتين:

1. الإيداع بفوائد بسيطة قدرها $5,5\%$ في السنة، حيث يستفيد كلّ سنة بمبلغ ثابت يساوي $5,5\%$ من المبلغ الابتدائي، أي 2750 دينارا.

2. الإيداع بفوائد مركبة قدرها 5% في السنة، حيث يزيد رصيده كلّ سنة بمبلغ يساوي 5% من المبلغ المدخر في السنة الجارية. فالزيادة في هذه الحالة ليست ثابتة.

I. الكيفية الأولى: نسمي S_n المبلغ المدخر بعد n سنة.

1. احسب S_0 و S_1 و S_2 و S_3.

2. أ) احسب S_{n+1} بدلالة S_n.

ب) استنتج طبيعة المتتالية (S_n).

جـ)عبّر عن S_n بدلالة n.

II. الكيفية الثانية: نسمي C_n المبلغ المدخر بعد n سنة.

1. احسب C_0 و C_1 و C_2 و C_3.

2. أ) احسب C_{n+1} بدلالة C_n.

ب) استنتج طبيعة المتتالية (C_n).

جـ)عبّر عن C_n بدلالة n.

III. بالنسبة إلى ادخار لفترة من سنة إلى 10 سنوات، ما هي الكيفية الأكثر فائدة ؟ يمكن الاستعانة بمجدول.

حلّ

I. الكيفية الأولى:

1. لدينا:

$S_0 = 50000$ ، $S_1 = 52750$ ، $S_2 = 55\,500$ ، $S_3 = 58\,250$

2. أ) بالتمعّن في الحدود S_0 و S_1 و S_2 و S_3 نلاحظ أننا نمرّ من حدّ إلى الحدّ التالي له بإضافة $2\,750$ ، وبصورة عامة:

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $S_{n+1} = S_n + 2\,750$

معنى ذلك أنّ (S_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $S_0 = 50000$ وأساسها $r = 2\,750$.

ب) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $S_n = S_0 + nr = 50000 + 2750n$.

II. الكيفية الثانية:

1. لدينا:

$C_0 = 50000$ ، $C_1 = 52\,500$ ، $C_2 = 55\,125$ ، $C_3 = 57\,881,25$

2. أ) بالتمعّن في الحدود C_0 و C_1 و C_2 و C_3 نلاحظ أننا نمرّ من حدّ إلى الحدّ التالي له بالضرب في $1,05$، وبصورة عامة:

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $C_{n+1} = C_n + \frac{5}{100} \times C_n = 1,05 \times C_n$

معنى ذلك أنّ (C_n) متتالية هندسية حدّها الأول $C_0 = 50000$ وأساسها $q = 1,05$.

ب) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $C_n = C_0 \times q^n = 50000 \times (1,05)^n$.

III. باستعمال مجدول، نلاحظ أن الإيداع بالكيفية الثانية يصبح أكثر فائدة ابتداء من السنة الخامسة.

Fichier Edition Affichage Insertion For

Arial

A7 f_x 5

	A	B	C
1	n	Sn	Cn
2	0	50000	50000
3	1	52750	52500
4	2	55500	55125
5	3	58250	57881,25
6	4	61000	60775,3125
7	5	63750	63814,0781
8	6	66500	67004,782
9	7	69250	70355,0211
10	8	72000	73872,7722

1. استعمال حاسبة في حالة المتتاليات

طريقة

- لحجز عبارة u_n:
  - في MODE، نختار Séq ثمّ ENTER .
  - نختار=Y. على السطر = u(n) ، نحجز عبارة u_n باستعمال X,T, θ ,n ثمّ ENTER.
  - على السطر = u(nMin)، نحجز قيمة الحدّ الأوّل ثمّ ENTER.
- لإظهار جدول قيم متتالية:
  - نضبط وسائط الجدول باستعمال 2nd TBLSET.
  TblStart : القيمة الأولى لـ n في الجدول.
  ΔTbl : الفرق بين قيمتين متتابعتين لـ n.
  - نظهر جدول القيم باستعمال 2nd TABLE.

ملاحظة

لإظهار التمثيل البياني لمتتالية نضبط النافذة WINDOW ونستعمل اللمسةGRAGH.

تمرين

عيّن في كلّ من الحالتين التاليتين وباستعمال حاسبة بيانية بعض حدود المتتالية المعطاة:

1. حالة متتالية معرفة بعبارة من الشكل $u_n = f(n)$

(u_n) متتالية معرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بالشكل: $u_n = -n^2 + 3n + 10$

2. حالة متتالية معرّفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

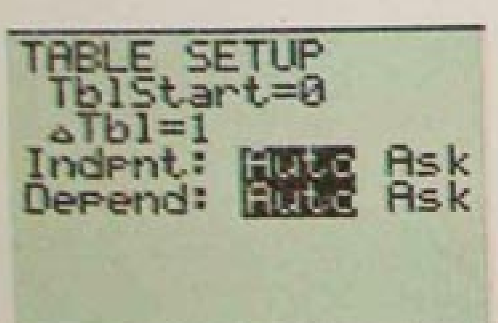
(v_n) متتالية عددية معّرفة بالشكل:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

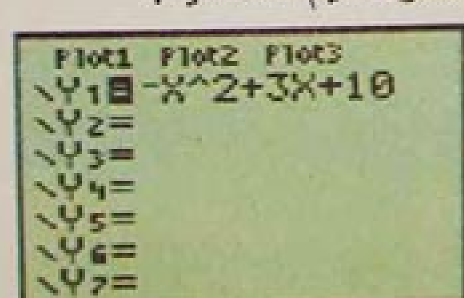
حلّ

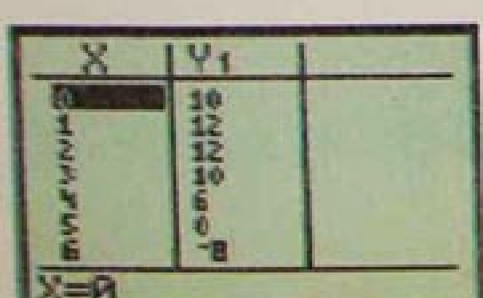
1. لتعيين بعض حدود المتتالية، نستعمل حاسبة لبيانية كما في الدوال:

- نضبط جدول القيم كما هو مبين على الشاشة المقابلة



- نحجز عبارة u_n ثمّ نحصل على جدول قيم المتتالية.

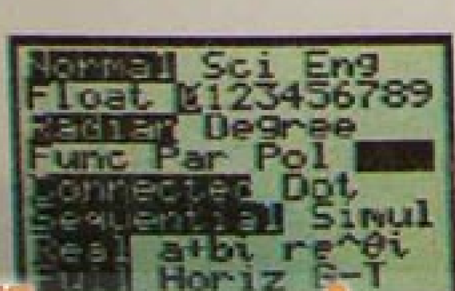




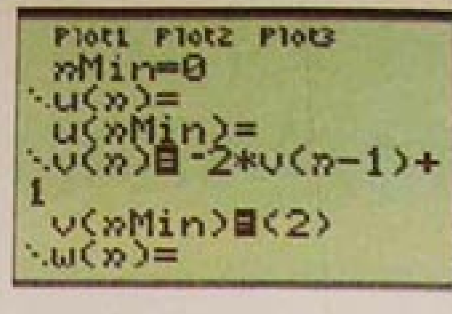
2. لحجز المتتالية، نستعمل « mode «séq للحاسبة:

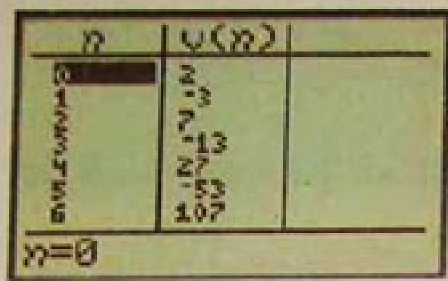
<u>ملاحظة</u>: الحاسبة تعطي v_n بدلالة v_{n-1}، نحجز:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_n = -2v_{n-1} + 1 \end{cases}$$



وللحصول على الحرف v، نستعمل 8 2de.





$nMin$: رتبة الحدّ الأوّل.
$v(nMin)$: قيمة الحدّ الأوّل.

ونحصل على جدول قيم المتتالية:

2. تعيين اتجاه تغيّر متتالية

طرائق

للبرهان أنّ متتالية (u_n) متزايدة (أو متناقصة):

طريقة 1: ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.

- إذا كان من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n \geq 0$، فإنّ (u_n) متزايدة.
- إذا كان من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n \leq 0$، فإنّ (u_n) متناقصة.

طريقة 2: نقارن حاصل القسمة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.

من أجل متتالية ذات حدود موجبة تماما.

1. إذا كان من أجل كلّ عدد طبيعي n، $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$، فإنّ (u_n) متزايدة.
2. إذا كان من أجل كلّ عدد طبيعي n، $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$، فإنّ (u_n) متناقصة.

طريقة 3: ندرس اتجاه تغيّر الدالة f، بحيث $u_n = f(n)$. على $[0;+\infty[$

- إذا كانت f متزايدة ، فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

تمرين

ادرس اتجاه تغيّر كلّ من المتتاليات المعرفة كما يلي:

أ) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n = \frac{1}{2}\left(n^2+1\right)$

ب) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$، $u_n = \frac{n}{5^n}$

حـ) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n = 2n^2+2n-5$

حلّ

أ) نطبّق الطريقة 1.

لدينا $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}\left[(n+1)^2+1\right]-\frac{1}{2}\left(n^2+1\right) = n+\frac{1}{2}$.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}-u_n \geq 0$. وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

ب) بما أنّ حدود المتتالية موجبة تماما، يمكن تطبيق الطريقة 2.

لدينا $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\dfrac{n+1}{5^{n+1}}}{\dfrac{n}{5^n}}=\dfrac{n+1}{5^{n+1}}\times\dfrac{5^n}{n}=\dfrac{n+1}{5n}$

من أجل كلّ n حيث $n\geq 1$، $n+1\leq 5n$. منه $\dfrac{n+1}{5n}\leq 1$.

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

حـ) المتتالية (u_n) معرفة بالشكل $u_n=f(n)$ ، حيث $f(x)=2x^2+2x-5$. يمكن تطبيق الطريقة 3.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. ومن أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=4x+2$.

بدراسة إشارة $f'(x)$ ، نجد:

x	$-\infty$ $\quad$ $-0,5$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $\quad$ $-5,5$ $\quad$ $\nearrow$

على المجال $]-0,5;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ، الدالة f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

وبالتالي، المتتالية (u_n) متزايدة .

3. التعرّف على متتالية حسابية

طريقة

للتعرّف على متتالية حسابية (u_n) حدّها الأوّل u_0 ، يمكن:

- البرهان على أنّ (u_n) دالة تآلفية لـ n ، بمعنى البرهان على وجود عدد حقيقي r حيث، من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n=u_0+nr$.

أو

- حساب الفرق $u_{n+1}-u_n$ والبرهان على أنّه ثابت من أجل كل عدد طبيعي n ويساوي r. أي أنّ $u_{n+1}=u_n+r$.

تمرين

من بين المتتاليات (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ التالية، عيّن المتتاليات الحسابية:

أ) $u_n=-5n+12$ ب) $u_n=n^2+n+1$ حـ) $\begin{cases}u_0=4\\2u_{n+1}-2u_n=3\end{cases}$

حل

أ) الحدّ العام من الشكل $u_n=u_0+nr$ ، حيث $u_0=12$ و $r=-5$.

وبالتالي، (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل 12 وأساسها -5.

ب) لدينا: $u_0=1$ ، $u_1=3$ ، $u_2=7$ ونلاحظ أنّ $u_1-u_0\neq u_2-u_1$.

وبالتالي، (u_n) ليست متتالية حسابية.

حـ) لدينا من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $2u_{n+1}-2u_n=3$. ونكتب $u_{n+1}=u_n+\frac{3}{2}$.

المتتالية تحقق: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=u_n+r$.

(u_n) متتالية حسابية ذات الأساس $\frac{3}{2}$.

4. تعيين متتالية حسابية عُلم حدّان منها

طريقة

لتعيين متتالية حسابية (u_n) علم حدان u_m و u_p منها :
نستعمل الدستور $u_m=u_p+(m-p)r$ لتعيين الأساس r ثمّ الدستور $u_m=u_0+mr$ لتعيين الحدّ الأوّل u_0.

تمرين

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_5=4$ و $u_{10}=-11$. عيّن هذه المتتالية.

حل

ليكن r أساس هذه المتتالية و u_0 حدّها الأوّل.

لدينا $u_{10}=u_5+(10-5)r$ أي $-11=4+5r$.

ومنه $r=-3$. أساس المتتالية (u_n) هو -3

لدينا أيضا $u_5=u_0+5\times(-3)$ أي $4=u_0-15$.

ومنه $u_0=19$. الحدّ الأوّل للمتتالية هو 19.

نستنتج أنّ (u_n) هي المتتالية التي حدّها الأوّل 19 وأساسها -3.

وبمعنى آخر، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=19-3n$.

5. التعرّف على متتالية هندسية

طريقة

للتعرّف على متتالية هندسية (u_n) حدّها الأوّل u_0، يمكن:

- البرهان على وجود عدد حقيقي غير منعدم q حيث من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n=u_0q^n$.

أو

- حساب حاصل القسمة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ والبرهان على أنه ثابت q (مع $q\neq 0$)، أي أنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$.

تمرين

من بين المتتاليات (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ التالية، عيّن المتتاليات الهندسية:

أ) $u_n=2^n$ ب) $u_n=-3\times 7^n$ حـ) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=3u_n+1 \end{cases}$

حلّ

أ) الحدّ العام من الشكل $u_n = u_0 q^n$ مع $u_0 = 1$ و $q = 2$. (u_n) متتالية هندسية أساسها 2.

ب) بنفس الطريقة، نستخلص أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها 7.

ج) لا يمكن وضع $u_{n+1} = 3u_n + 1$ على الشكل $u_{n+1} = qu_n$ (مع $q \neq 0$). (u_n) ليست متتالية هندسية.

6. تعيين متتالية هندسية علم حدّان منها

طريقة

لتعيين متتالية هندسية (u_n) علم حدان u_m و u_p منها :

نستعمل الدستور $u_m = u_p q^{m-p}$ لتعيين الأساس q ثمّ الدستور $u_m = u_0 q^m$ لتعيين u_0.

تمرين

(u_n) متتالية هندسية بحيث $u_3 = 24$ و $u_5 = 96$. عيّن هذه المتتالية.

حلّ

ليكن q أساس هذه المتتالية و u_0 حدّها الأوّل.

لدينا $u_5 = u_3 q^{5-3}$ أي $96 = 24q^2$ ونجد $q^2 = 4$.

ومنه $q = -2$ أو $q = 2$.

- من أجل $q = -2$، لدينا أيضا $u_3 = u_0 \times (-2)^3$ أي $24 = u_0 \times (-2)^3$.

ومنه $u_0 = -3$.

- من أجل $q = 2$، لدينا أيضا $u_3 = u_0 \times 2^3$ أي $24 = u_0 \times 2^3$.

ومنه $u_0 = 3$.

نستنتج أنّه توجد متتاليتان هندسيتان حيث $u_3 = 24$ و $u_5 = 96$:

المتتالية التي أساسها -2 وحدّها الأوّل -3 والمتتالية التي أساسها 2 وحدّها الأوّل 3.

مسألة محلولة

مسألة

يتوزع سكان ولاية معينة سنة 2005 كما يلي:

- 450000 نسمة يسكنون المدن.
- 250000 نسمة يسكنون الريف.

نفرض أنّ عدد سكان المدن يزيد بنسبة 5% وأنّ عدد سكان الريف يزيد بـ 10000 نسمة كلّ سنة.

1. احسب عدد سكان كلّ فئة بعد 5 سنوات.
2. في أية سنة يتجاوز عدد سكان الولاية مليون نسمة.

حلّ

1. n عدد طبيعي. ليكن U_n عدد سكان المدن ، R_n عدد سكان الريف، مقدرا بالآلاف، T_n العدد الإجمالي لسكان الولاية في السنة $(2005+n)$.

لدينا $U_0=450$ و $R_0=250$.

- بما أنّ عدد سكان المدن يزيد بنسبة 5% كلّ سنة، إذن:

$$U_{n+1}=U_n+U_n\times 0,05=1,05\times U_n$$

المتتالية (U_n) متتالية هندسية أساسها q حيث $q=1,05$ وبالتالي:

$$U_n=U_0q^n=450\times 1,05^n.$$

ومنه $U_5=450\times 1,05^5\approx 574$.

- بما أنّ سكان الريف يزيد بـ 10 آلاف نسمة كلّ سنة، إذن:

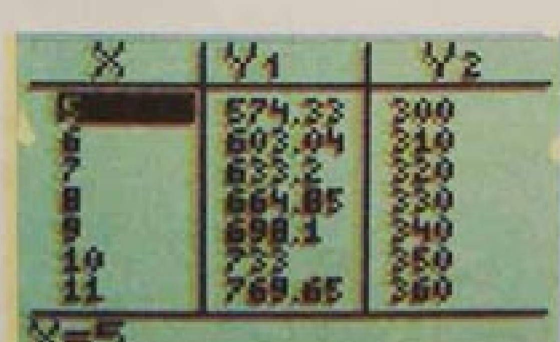
$$R_{n+1}=R_n+10$$

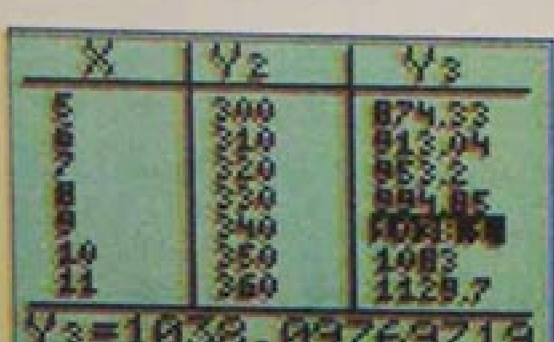
المتتالية (R_n) متتالية حسابية أساسها r حيث $r=10$ وبالتالي:

$$R_n=R_0+nr=250+10n$$

ومنه $R_5=250+10\times 5=300$.

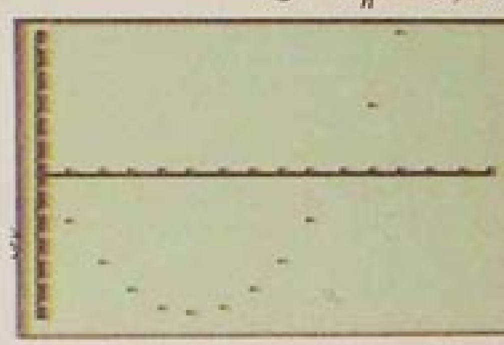
2. باستعمال حاسبة بيانية، نتحصل على جدول قيم المتتاليات (R_n) و (U_n) و (T_n) كما في الشاشات الآتية. وبقراءة قيم (T_n)، نجد أنّ عدد سكان الولاية سيتجاوز مليون نسمة في السنة $(2005+9)$ أي 2014.





1. صحيح أو خاطئ

- في المتتالية 7، 3، -1، -5، -9 ذات الحدّ الأوّل $u_0=7$، الحدّ u_2 يساوي -1.
- الحدّ الأوّل للمتتالية u المعطاة بالعبارة $u_n=n^2+n-3$.
غير موجود لأنه من أجل $n=0$ نجد عددا سالبا.
- الحدود u_1، u_2، u_3 للمتتالية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n} \end{cases}$
هي على التوالي: $0,2$، 5، $0,2$
- التمثيل البياني للمتتالية المعرفة بالعبارة $v_n=0,5n-3$ هو:



- المتتالية (u_n) بحيث $u_{n+1}=-0,5n+1$ متزايدة.
- الأعداد $2,5$، 3، $3,6$، $5,3$ هي حدود لمتتالية هندسية.
- $2n+5$ هو الحدّ العام للمتتالية الحسابية التي حدّها الأوّل $u_0=2$ وأساسها 5.
- 3×7^n هو الحدّ العام للمتتالية الهندسية التي حدّها الأوّل $u_0=3$ وأساسها 7.
- عدد حدود المجموع $u_7+u_8+...+u_{106}$ هو 100.

عموميات

2. (u_n) متتالية معرفة كما يلي:
من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n=2n^2-3n+2$
عيّن بدلالة n كلا من:
u_{n+1}، u_{n+3}، u_{2n+1}، u_n-1.

3. في كلّ من المتتاليات التالية، اكتب بعض الحدود التي توافق انتظام الحدود المعطاة:

أ) 0، 2، 4، 6، ...

ب) -2، $0,5$، 3، $5,5$، ...

جـ) 1، 5، 25، 125، ...

4. n عدد طبيعي، احسب الحدود الخمسة الأولى لكلّ من المتتاليات (u_n) التالية، حيث:

أ) $u_n=2n-7$

ب) $u_n=-3n+4$

جـ) $u_n=n^2-n+1$

د) $u_n=\dfrac{2n-1}{n+3}$

5. n عدد طبيعي، احسب الحدود الخمسة الأولى لكلّ من المتتاليات (u_n) التالية حيث:

أ) $u_n=3^n$

ب) $u_n=(-2)^n$

جـ) $u_n=n\times 3^n$

6. احسب الحدود u_1، u_2، u_3، u_4 بالنسبة إلى كلّ من المتتاليات (u_n) التالية حيث:

أ) $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=u_n+3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3u_n+2 \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n^2-1 \end{cases}$

د) $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=(n+1)u_n \end{cases}$

7. باستعمال حاسبة، أعط القيم المقربة إلى 10^{-3} للحدود الخمسة الأولى للمتتالية المعرفة كما يلي:

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{3-u_n}$ و $u_0=-1$

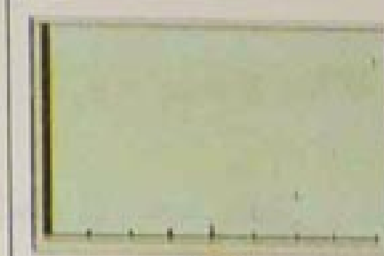
8. n عدد طبيعي. مثّل بيانيا الحدود الخمسة الأولى لكلّ من المتتاليات المعرفة كما يلي:

أ) $u_n = \dfrac{7}{n+2}$ ب) $u_n = (-1)^n \times n$

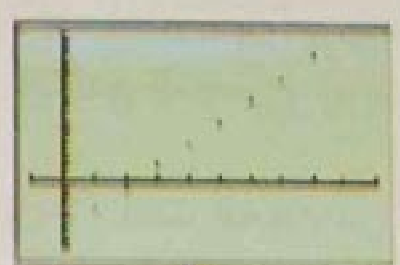
جـ) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4} + u_n \end{cases}$

9. أرفق كلّ متتالية بتمثيلها البياني.

أ) $u_n = 3n - 7$ ب) $u_n = 2^n$



❶



❷

10. عيّن اتجاه تغيّر كلّ من المتتاليات المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

أ) $u_n = -\dfrac{n}{2}$

ب) $u_n = 2n^2 + n$

جـ) $u_n = 1 - 2n^2$

د) $u_n = (n+1) \times 2^n$

11. نفس السؤال السابق.

أ) $u_n = \dfrac{2}{n+1}$

ب) $u_n = (n+1) \times 2^n$

12. (u_n) متتالية معرفة كما يلي:

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

أ) أظهر على شاشة حاسبة جدول قيم المتتالية (u_n) ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّراتها.

ب) تحقق من صحة التخمين.

13. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_n = (-2)^n$.

احسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) واستنتج أن المتتالية ليست رتيبة.

14. نعتبر المتتالية المعرفة كما يلي:

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2 - u_n}{3} \end{cases}$

1) احسب، باستعمال حاسبة، الحدود u_1، u_2، u_3، u_4.

2) هل المتتالية رتيبة ؟

15. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = n^2 - 10n + 1$

1) لاحظ أنّ (u_n) معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة يطلب تعيينها.

2) باستعمال حاسبة، أظهر التمثيل البياني للدالة f.

3) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

المتتاليات الحسابية

16. من بين المتتاليات التالية المعرفة من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، عيّن المتتاليات الحسابية:

أ) $u_n = 2n - 3$ ب) $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$

جـ) $u_n = n^2 - 2n + 1$ د) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

17. n عدد طبيعي هل المتتاليات التالية حسابية؟ في حالة الإيجاب، عيّن الأساس والحدّ الأوّل.

أ) $u_n = \dfrac{2}{3}n + 0,5$

ب) $u_n = -n + 2$

جـ) $u_n = 2\sqrt{n} + 1$

18. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

أ) احسب u_1، u_2 و u_3.

ب) بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية.

ما هو أساسها؟

19. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0 = 14$ وأساسها -3.

أ) احسب u_1، u_2، u_3 و u_{25}.

ب) عيّن عبارة u_n بدلالة n.

20. (u_n) متتالية حسابية بحيث $u_2 = 11$ و $u_7 = 31$.

أ) احسب الحدّ الأوّل u_0 والأساس r.

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n.

21. مثّل بيانيا المتتالية الحسابية ذات الحدّ الأوّل 1 والأساس 3.

22. 1) بيّن أنّ الأعداد a، b، c بهذا الترتيب تكون حدودا متتابعة لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $2b = a + c$.

2) الأعداد a، b، c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية. عيّن هذه الأعداد علما أنّ:

$$\begin{cases} 4a - 5b + c = -9 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 210 \end{cases}$$

23. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0 = 10$ وأساسها $0,5$.

أ) احسب u_1 و u_{20}.

ب) احسب المجموع $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$

24. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0 = 1$ ومجموع الحدود الأولى لها هو S حيث:

$S = 1 + 8 + 15 + \ldots + 603$

1. عيّن أساس (u_n).
2. ما هي عبارة u_n بدلالة n ؟
3. عيّن n بحيث $u_n = 603$.
4. احسب S.

25. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$، $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$
2. استنتج المجموع $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ بدلالة n.

26. 1) أثبت أنّه من من أجل كلّ عدد حقيقي x ،

$$3x^2 - 2x - 280 = 3\left(x + \frac{28}{3}\right)(x - 10)$$

2) عيّن عدد حدود المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساس 6 بحيث:

$u_1 = 6$ و $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 280$

27. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0 = -2$ وأساسها $r = 5$.

احسب المجموع $u_{11} + u_{12} + \ldots + u_{20}$

المتتاليات الهندسية

28. بيّن أنّ المتتاليات التالية المعرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n ، هي متتاليات هندسية:

أ) $u_n = 3^n$ ب) $u_n = 2 \times 5^n$

جـ) $u_n = 2 \times 3^{-n}$ د) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{5} \end{cases}$

29. هل الأعداد التالية هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية ؟

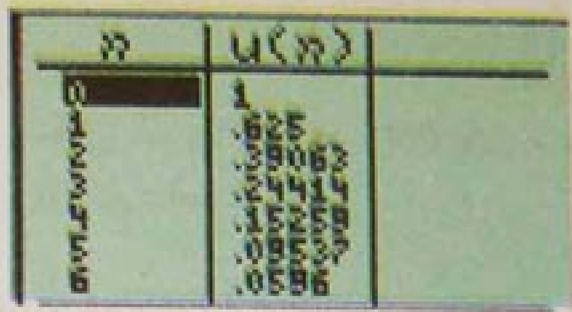
أ) $\dfrac{2}{7}$، $\dfrac{8}{21}$، $\dfrac{32}{63}$، $\dfrac{128}{189}$ ب) $\dfrac{5}{2}$، $\dfrac{10}{3}$، $\dfrac{20}{3}$

30. هل المتتاليات التالية هندسية؟ في حالة الإيجاب، عيّن الأساس والحدّ الأوّل.

أ) $u_n = \frac{n}{3}$ ب) $u_n = 5^{2n+1}$

جـ) $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ د) $u_n = 4 + 6n$

31. إليك جزءا من جدول قيم متتالية (u_n) محصل عليه باستعمال حاسبة.



أ) هل يمكن أن تكون (u_n) متتالية هندسية؟

ب) في حالة الإيجاب، ما هو أساسها وحدّها الأوّل؟

32. (u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل $u_1 = 48$ وأساسها $0,5$.

أ) احسب u_1، u_2، u_3.

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n.

33. 1) بيّن أنّ الأعداد a، b، c بهذا الترتيب تكون حدودا متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $b^2 = a \times c$.

2) الأعداد a، b، c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية. عيّن هذه الأعداد علما أنّ: $\begin{cases} ac = 10b \\ a+b+c = 35 \end{cases}$

34. عيّن العدد الحقيقي الموجب α بحيث تكون الأعداد 18، α، 32 بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية.

35. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية، أعط حدّها الأوّل وأساسها.

36. 1) (u_n) متتالية معرفة كما يلي:

$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$ من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$،

احسب u_1 و u_2..

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية. أعط حدّها الأوّل وأساسها.

ب) عيّن عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n.

37. أدرس تغيّرات المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \frac{3}{5^n}$

38. (u_n) متتالية هندسية معرفة كما يلي:

من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = 3 \times 5^n$

أ) بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية.

ب) احسب المجموع $S_1 + S_2 + \dots + S_9$

39. 1) احسب المجموع

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$$

2) بيّن أنّ $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

40. احسب المجموع التالي:

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{128}{2187}$$

41. نفس السؤال السابق.

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{256}$$

مسائل

42. أودع شخص مبلغ 10000 دينار بفوائد بسيطة لمدة 3 سنوات بنسبة سنوية قدرها 12%.

ما هو رصيده عند نهاية الإيداع ؟

43. أودع مبلغ 60000 دينار بفوائد بسيطة بنسبة قدرها $9,5\%$ سنويا وجلب فائدة قدرها 7600 دينار.
ما هي مدة الإيداع ؟

44. نودع 20000 دينار لمدّة خمس سنوات بفوائد بسيطة شهرية قدرها 1%.
باستعمال حاسبة، احسب الرصيد في نهاية المدّة.

45. يريد شخص الحصول على رصيد قدره 11236 دينار بعد سنتين.
ما هو المبلغ الذي ينبغي إيداعه علما أن البنك يقترح عليه فوائد مركبة بنسبة قدرها 6% في السنة ؟

46. يريد شخص إيداع 25000 دينار في صندوق التوفير وله أن يختار إحدى الكيفيتين:
أ) بفوائد مركبة سنوية قدرها 5%.
ب) بفوائد بسيطة سنوية قدرها $5,5\%$.
نسمي u_n و v_n الرصيدين المُحصلين بعد n سنة بالكيفيتين أ وب على الترتيب.
1. عبّر عن كلّ من u_n و v_n بدلالة n.
2. باستعمال حاسبة أو مجدول، عيّن الكيفية الأفضل للمدخر تبعا لمدّة الإيداع.

47. اقترحت شركة على المترشحين للتوظيف كيفيتين للتعاقد:

- مرتب شهري قدره 15000 دينار عند 2000/01/01 وزيادة 450 دينارا عند أول جانفي من كلّ سنة.
- مرتب شهري قدره 15000 دينارا عند 2000/01/01 وزيادة 8% عند أوّل جانفي من كلّ سنة.

1. باستعمال مجدول، حضّر ورقة حساب تسمح بمقارنة المرتبين الشهريين للتعاقد بالكيفيتين على عدة سنوات.
2. ابتداء من أي سنة، يكون المرتب الشهري حسب التعاقد بالكيفية الثانية أكبر من المرتب الشهري حسب التعاقد بالكيفية الأولى ؟

48. قارن تطوّر سكان المدينتين أ و ب:
- عدد سكان المدينة أ هو 500000 نسمة ويزيد بمقدار 10000 نسمة.
- عدد سكان المدينة ب هو 800000 نسمة ويزيد بنسبة 8% في السنة.

49. نترك كرة مطاطية تسقط بدون سرعة ابتدائية من ارتفاع $2m$ لترتد وتبلغ ارتفاع $1,60m$ وهكذا لتبلغ في كلّ مرّة ارتفاعا قدره $\frac{4}{5}$ ارتفاع الارتداد السابق.
ليكن h الارتفاع (بالأمتار) الذي تبلغه الكرة عند الارتداد من المرتبة n $(h_0 = 2)$.
1. أ) احسب h_1، h_2، h_3.
ب) أعط عبارة h_{n+1} بدلالة h_n. ما هي طبيعة المتتالية (h_n) ؟
ج) أعط عبارة h_n بدلالة n.
2. عيّن n عدد الارتدادات التي يكون بعدها h أصغر تماما من $40cm$.

50. يتطلب حفر بئر كلفة ثابتة قدرها 12000 دينار. كلفة المتر الأوّل المحفور هو 400 دينار وتزيد كلفة كلّ متر إضافي بمبلغ 50 دينارا عن سابقه. ليكن C_n الكلفة الإجمالية لحفر بئر بعمق n مترا.
1. احسب C_1، C_2، C_3.
2. ما هي طبيعة المتتالية (C_n) ؟ استنتج عبارة C_n بدلالة n.
3. احسب كلفة حفر بئر عمقه $40m$.

الباب 8 الجمل الخطّية *

1. المعادلات الخطية لمجهولين.
2. جمل معادلتين خطيتين لمجهولين.
3. جمل ثلاث معادلات خطية لثلاثة مجاهيل.
4. المتراجحات الخطية لمجهولين.

الجمل الخطية عند الصينيين القدامى

" فنّ الرياضيات في تسعة فصول" عنوان مخطوط صيني قديم، يعود إلى القرن الأوّل بعد الميلاد. ورد في الفصل الثامن منه تحت عنوان" مقارنة الأوضاع " أنّ المشكلات تحلّ **بجمل معادلات خطية** لمجهولين أو ثلاثة مجاهيل.
يرمز فيه إلى الأعداد بأعواد أفقية وأعواد عمودية كما يلي:

أعواد عمودية	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
أعواد أفقية	𝍩	𝍪	𝍫	...	...	𝍮	...	...	...

تستعمل الرموز العمودية للآحاد وللمئات ولعشرات الآلاف،... وتستعمل الرموز الأفقية للعشرات وللآلاف، ...
ويمثّل الصفر بفراغ.
فمثلا، نكتب العدد 1947 على الشكل: 𝍩𝍨𝍫𝍦
توضع الأعواد على لوحة تسمى " سوان بان " (بمعنى لوحة أعواد) وتجرى الحسابات كما في الحساب المكتوب بالنسبة إلى العمليات الأربع.

ونجد بالخصوص طريقة لحلّ جمل معادلات خطية قريبة من الطريقة المعروفة حاليا بطريقة غوص:
لحلّ جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل، نضع معاملات المجاهيل الثلاثة على الأسطر الثلاثة الأولى والحدود الثابتة على السطر الأخير للوحة الأعواد. وبإجراء عمليات بسيطة على الأعمدة، نحوّل الجملة إلى جملة " مثلثية " بحيث نجعل إحدى معادلات الجملة بمجهول واحد فقط. نعيّن هذا المجهول ونستنتج المجاهيل الأخرى.

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

السؤال	إجابة 1	إجابة2	إجابة 3
E مجموعة النقط ذات الاحداثيات $(x;y)$ حيث $3x-2y+8=0$. 1. إحدى نقاط E هي:	$M(-3;0)$	$M(4;0)$	$M(0;4)$
2. E مستقيم معامل توجيهه:	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$
3. المعادلة المختصرة لـ E هي:	$y=-\frac{3}{2}x-4$	$y=\frac{3}{2}x+4$	$x=\frac{2}{3}y-\frac{8}{3}$
4. E هي المستقيم (AB) حيث	$A(0;4)$ و $B(-2;1)$	$A(1;5,5)$ و $B(1;1)$	$A(-1;2,5)$ و $B(-4;0)$
5. E تشترك مع محور الفواصل في النقطة	$M_0\left(0;-\frac{8}{3}\right)$	$M_0\left(-\frac{8}{3};0\right)$	$M_0(0;4)$
6. المستقيمان (D) و (D') حيث $(D):y=\frac{1}{3}x+1$ و $(D'):y=-3x+1$	متقاطعان	متوازيان تماما	متطابقان
7. العددان الحقيقيان $x=-1$ و $y=10$ يحققان المعادلة	$0,5x-y=-10,5$	$0,5x+y=10,5$	$x-0,5y=-5,5$
8. المستقيمان (D) و (D') حيث $(D):x+y-1=0$ و $(D'):x-y+1=0$ يشتركان في النقطة	$A(0;1)$	$B(1;0)$	$C(1;1)$
9. المستقيم الذي معادلته $x=1$	يوازي محور الفواصل	يوازي محور التراتيب	يقطع المحورين
10. المستقيم الذي معادلته $y=1$	يوازي محور الفواصل	يوازي محور التراتيب	يقطع المحورين

نشاط 1: جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

جاء في كتاب"عناصر الجبر"، للرياضياتي ليونارد أولر المنشور سنة 1774، النصّ التالي:
يحمل بغل وحمار حمولة تزن بعض القناطير. اشتكى الحمار من ثقل حمولته وقال للبغل:
" بقي أن أحمل قنطارا من حمولتك حتى أحمل ضعف ما ستحمل ".
فأجابه البغل قائلا: " نعم، ولكن إذا أعطيتني قنطارا من حمولتك سأحمل ثلاثة أضعاف حمولتك ".
نريد معرفة حمولة كلّ من البغل والحمار.

- اختيار المجاهيل وترييض المشكلة

لتكن x و y حمولتي البغل والحمار على الترتيب (بالقناطير).

بيّن أن ترجمة المشكلة بإدخال المجهولين x و y تؤدي إلى الجملة: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-3y=-4 \end{cases}$

- حلّ المشكلة

أ) باستعمال المعادلة الأولى، عبّر عن x بدلالة y ثمّ عوّض القيمة المحصل عليها في المعادلة الثانية.
ب) حلّ المعادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول x المحصل عليها هكذا ثمّ احسب قيمة y .
ج) تحقق من أنّ الثنائية $(x;y)$ الناتجة هي بالفعل حلّ للجملة.

- السؤال

ما هي حمولة كلّ من البغل والحمار؟

نشاط 2: القطع المكافئ المار بثلاث نقط

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A ، B ، C ذات الإحداثيات $(1;3)$، $(-1;3)$، $(2;9)$ على الترتيب.

نقترح فيما يلي تعيين القطع المكافئ الذي معادلته $y=ax^2+bx+c$ والمار بالنقط A ، B ، C في حالة وجوده.

1. بيّن أنّ الأعداد الحقيقية a ، b ، c تحقق الجملة: $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a-b+c=3 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases} \quad (S)$

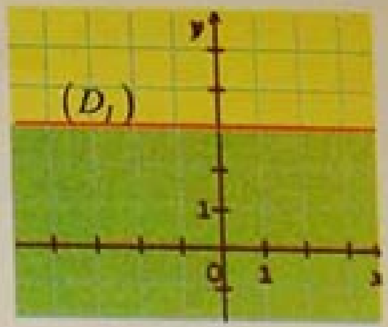
2. أ) باستعمال المعادلتين الأولبين للجملة (S)، بيّن أنّ العددين a ، c يحققان المعادلة $a+c=3$.
ب) باستعمال المعادلتين الأخيرتين للجملة (S)، بيّن أنّ العددين a ، c يحققان المعادلة $6a+3c=15$.

3. حلّ الجملة: $\begin{cases} a+c=3 \\ 6a+3c=15 \end{cases}$

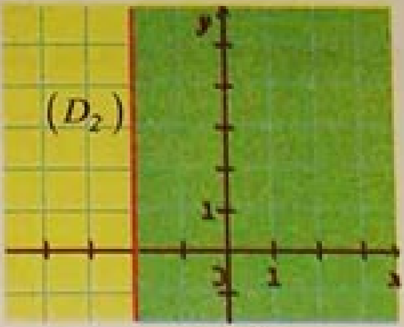
4. بتعويض قيمتي a ، c الناتجتين ، احسب b .
5. برّر أنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا.
6. ارسم القطع المكافئ المطلوب.

نشاط 3: تجزئة المستوي

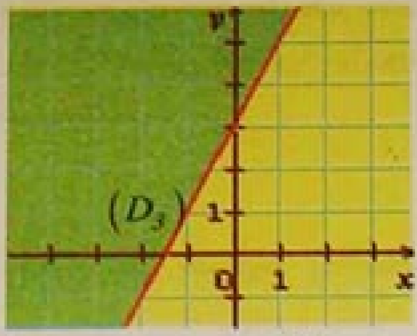
1. أ) عيّن المعادلة المختصرة لكلّ من المستقيمات (D_1)، (D_2)، (D_3)، (D_4) المرسومة أدناه.



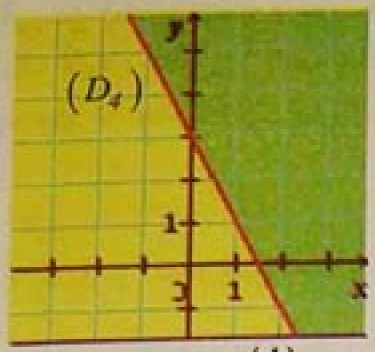
(1)



(2)



(3)



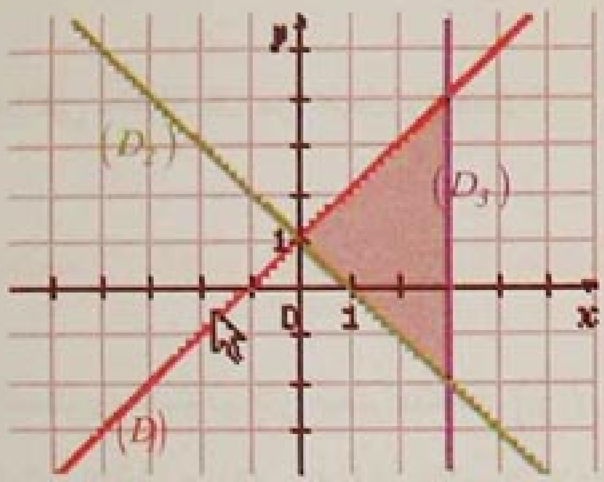
(4)

ب) ما هي مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $y = 2x+3$ ؟ $y > 2x+3$ ؟ $y < 2x+3$ ؟

جـ) عبّر بمتراجحة خطية عن مجموعة النقط $M(x;y)$ من الجزء الملون بالأخضر في كلّ من التمثيلين البيانيين 3 و4.

2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
(D_1) و (D_2) و (D_3) ثلاثة مستقيمات مرسومة على البيان المقابل.

عبّر بجملة متراجحات خطية عن مجموعة النقط $M(x;y)$ للجزء الملون على الشكل.



1. المعادلات الخطية لمجهولين

• تعريف

كلّ معادلة من الشكل $ax+by+c=0$ ، حيث a و b و c أعداد حقيقية مفروضة، هي معادلة خطية لمجهولين حقيقيين x و y.

المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

مبرهنة

a و b و c أعداد حقيقية حيث a و b غير منعدمين معا.
مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث $ax+by+c=0$ هي مستقيم.

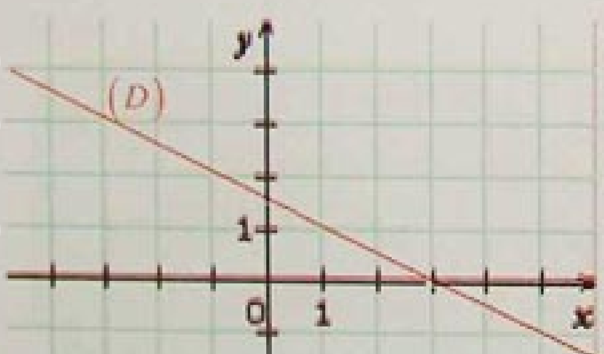
برهان

- إذا كان $b=0$ فإنّ $a\neq 0$ (لأنّ a و b غير منعدمين معا) وتكون المعادلة من الشكل $ax+c=0$ أي $x=-\dfrac{c}{a}$.
وهي معادلة لمستقيم يوازي محور التراتيب.

- إذا كان $b\neq 0$ فيمكن أن نكتب المعادلة $ax+by+c=0$ على الشكل $by=-ax-c$
أي $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{a}$.
هذه المعادلة من الشكل $y=mx+p$ وبالتالي فالمجموعة E مستقيم.

مثال

مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث $x+2y-3=0$ أي $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$
هي المستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\dfrac{1}{2}$ والترتيب إلى المبدأ $\dfrac{3}{2}$.



2. جمل معادلتين خطيتين لمجهولين

• تعريف

نسمّي جملة معادلتين خطيتين لمجهولين كلّ جملة (S) يمكن وضعها على الشكل:

$$(S):\quad \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

حيث a ، b ، c ، a' ، b' ، c' أعداد حقيقية مفروضة و x ، y المجهولان.

- **تفسير هندسي**

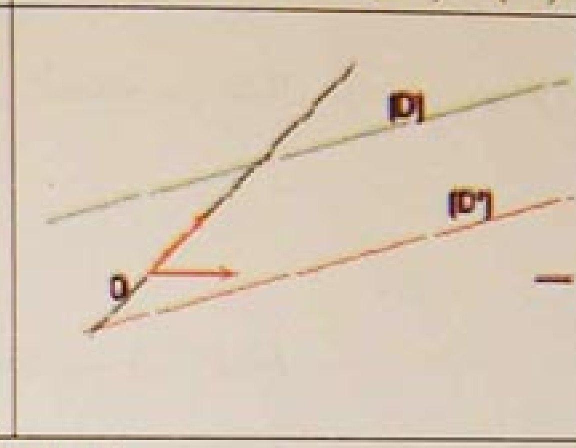
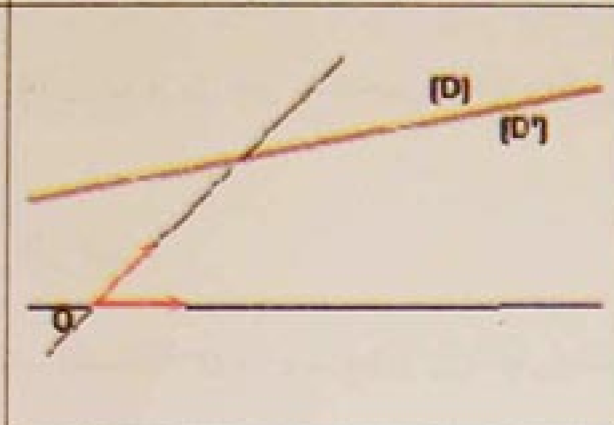
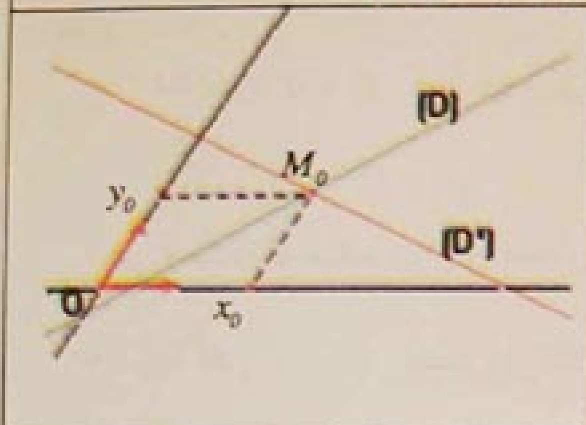
لتكن الجملة $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases} : (S)$ حيث a و b من جهة و a' و b' من جهة أخرى غير منعدمين معا.

في المستوي المنسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، المعادلتان (1) و (2) هما معادلتا مستقيمين (D) و (D').

تكون الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا للجملة (S) إذا وفقط إذا كانت النقطة $M_0(x_0;y_0)$ تنتمي إلى (D) وإلى (D').

وبالتالي يؤول حلّ الجملة (S) إلى دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (D').

ونجد:

(D) و (D') متوازيان تماما	(D) و (D') متطابقان	(D) و (D') متقاطعان
		
$ab'-ba'=0$		$ab'-ba'\neq 0$
الجملة (S) ليس لها حلول.	الجملة (S) لها مجموعة غير منتهية من الحلول.	الجملة (S) لها حلّ وحيد: $(x_0;y_0)$ إحداثيا النقطة M_0

نتيجة

لتكن الجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} : (S)$.

- إذا كان $ab'-ba'\neq 0$ فإنّ (S) تقبل حلا وحيدا.
- إذا كان $ab'-ba'=0$ فإنّ (S) تقبل مجموعة غير منتهية من الحلول أو ليس لها حلول.

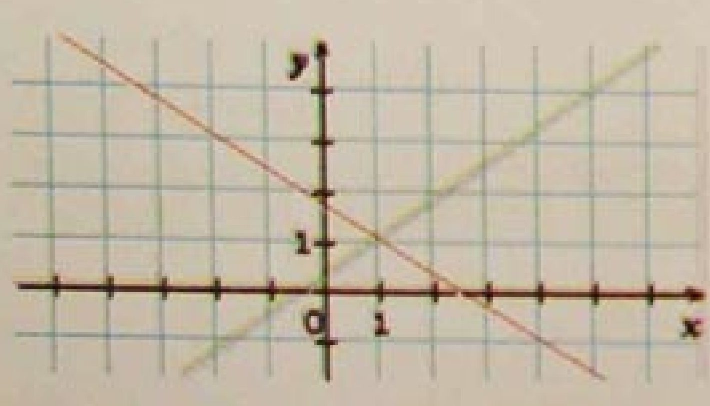
يسمى العدد $ab'-ba'$ **محدد** الجملة (S) ويرمز إليه بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ ونكتب $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$.

مثال

لتكن الجملة $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-4y=-1 \end{cases} : (S)$.

محددها $ab'-ba' = 2\times(-4)-3\times 3 = -17 \neq 0$.

بما أن المحدد غير منعدم، فالجملة تقبل حلا وحيدا هو $(1;1)$ كما هو مبيّن على الشكل.



3. جمل ثلاث معادلات خطية لثلاثة مجاهيل

تعريف

نسمّي جملة لثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل كلّ جملة من الشكل:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

حيث a، b، c، d، a'، b'، c'، d'، a''، b''، c''، d'' أعداد حقيقية معطاة و x، y، z مجاهيل.

يكون حلّ مثل هذه الجملة، في حالة وجوده، على شكل ثلاثية $(x;y;z)$.

مثال

الثلاثية $(2,5;2;-1)$ حلّ للجملة $\begin{cases} 2x+3y-z=12 \\ 4x-2y+3z=3 \\ 6x-y+2z=11 \end{cases}$.

خواص

العمليات الآتية لا تغيّر حلول جملة خطية:

- تبادل سطرين: $L_1 \leftrightarrow L_3$
- ضرب طرفي معادلة في نفس العدد غير المنعدم: $L_1 \to \alpha \times L_1$
- تعويض سطر بمجموع هذا السطر وسطر آخر: $L_1 \to L_1 + L_2$
- التعبير، في إحدى المعادلات، عن أحد المجاهيل بدلالة المجهولين الآخرين وتعويضه في المعادلتين الأخريين.

مثال

لحلّ الجملة $\begin{cases} 5x-2y+3z=7 \\ 2x+y+z=-1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$، نستعمل الخواص المناسبة ونحصل على جمل متكافئة كما يلي:

- نبادل بين السطرين L_1 و L_3 لكتابة المعادلة المناسبة أكثر لطريقة التعويض في البداية فنجد:

$$\begin{cases} 5x-2y+3z=7 \\ 2x+y+z=-1 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=-1 \\ 5x-2y+3z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z \\ 2x+y+z=-1 \\ 5x-2y+3z=7 \end{cases}$$

- نختار مثلا المعادلة الأولى للتعبير عن المجهول x بدلالة المجهولين الآخرين ثمّ نعوضه في المعادلتين الأخريين. وبذلك نحصل على جملة معادلتين لمجهولين كالآتي:

$$\begin{cases} x=y-z \\ 2x+y+z=-1 \\ 5x-2y+3z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z \\ 2(y-z)+y+z=-1 \\ 5(y-z)-2y+3z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z \\ 3y-z=-1 \\ 3y-2z=7 \end{cases}$$

- بضرب طرفي المعادلة الثانية في نفس العدد غير المنعدم (-1) نحصل على جملة يكون فيها معاملا المجهول y متعاكسين كما يلي:

$$\begin{cases} x=y-z \\ 3y-z=-1 \\ 3y-2z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z \\ -3y+z=1 \\ 3y-2z=7 \end{cases}$$

- بجمع السطرين الأخيرين طرفا إلى طرف، نحصل على جملة يكون z في المعادلة الثالثة منها المجهول الوحيد:

$$\begin{cases} x = y - z \\ -3y + z = 1 \\ 3y - 2z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ -3y + z = 1 \\ -z = 8 \end{cases}$$

- ننهي حلّ الجملة بحساب قيمة z في المعادلة الثالثة و y في المعادلة الثانية بالتعويض بقيمة z ثمّ x في المعادلة الأولى بالتعويض بقيمتي y و z ونجد أنّ:
الجملة تقبل حلا وحيدا هو الثلاثية $(5;-3;-8)$.

4. المتراجحات الخطية لمجهولين

- **تجزئة المستوي**

المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

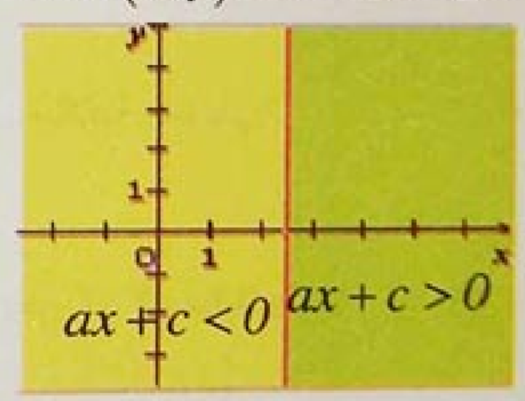
مبرهنة

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين معا.
المعادلة $ax+by+c=0$ تعرّف مستقيما (D) يجزئ المستوي إلى ثلاثة أجزاء.

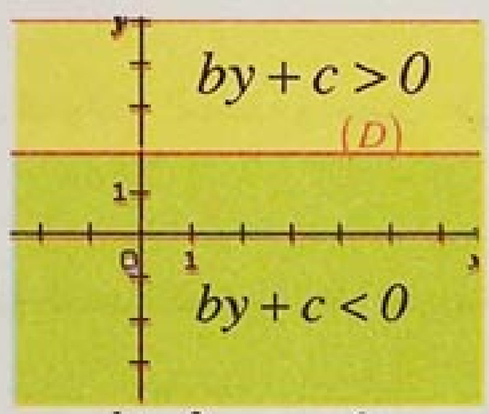
ملاحظة

- $M(x;y)$ تمسح المستقيم (D) إذا كان $ax+by+c=0$.
- إذا كان $M(x;y)$ تمسح أحد نصفي المستويين المفتوحين المحدودين بالمستقيم (D)، فإنّ العبارة $ax+by+c$ لها إشارة ثابتة.

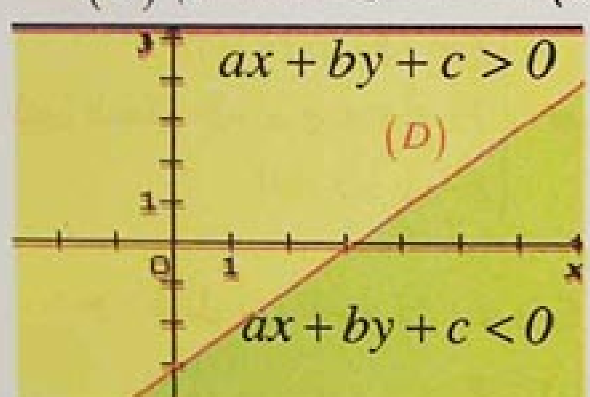
تسمّى مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c>0$ (أو $ax+by+c<0$) نصف مستو حدّه المستقيم (D).



$b=0$ و $a>0$



$a=0$ و $b>0$



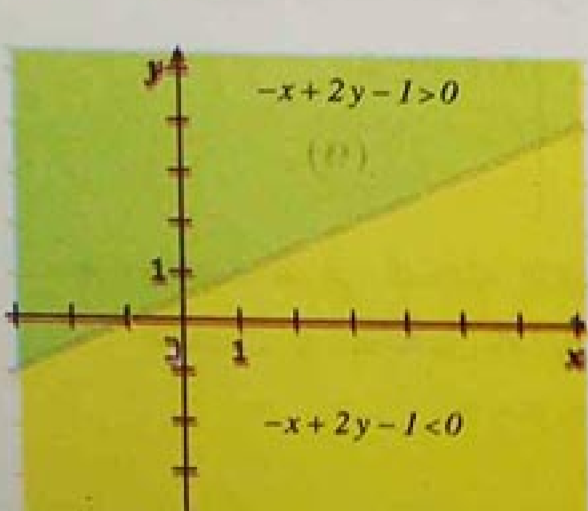
a و b غير منعدمين و $b>0$

المتراجحات الخطية لمجهولين

نحلّ متراجحة خطية بتمثيل مجموعة حلولها بيانيا.

مثال

حلّ بيانيا المتراجحة $-x+2y-1<0$.
نرسم في البداية المستقيم (D) الذي معادلته $-x+2y-1=0$.
ثمّ نعيّن نصف المستوي المناسب باختبار إشارة $-x+2y-1$ من أجل نقطة غير واقعة على المستقيم (D) ولتكن المبدأ O.
نعوّض كلا من x و y بالعدد 0 فنجد -1.
بما أنّ $-x+2y-1<0$ من أجل $(0;0)$ أي أنّ النقطة O تحت المستقيم (D)، إذن مجموعة حلول المتراجحة هي نصف المستوي الذي حدّه (D) والذي يشمل المبدأ O.



1. حلّ جمل خطية

• طريقة التعويض

لحلّ جملة خطية ذات n معادلة و p مجهولا بطريقة التعويض، نتبع الخطوات الآتية:
- نعبّر، في إحدى المعادلات، عن أحد المجاهيل بدلالة المجاهيل الأخرى
- ونعوّض هذا المجهول في المعادلات الأخرى للجملة بالعبارة المحصل عليها.

نحصل هكذا على جملة مكافئة ذات $(n-1)$ معادلة و $(p-1)$ مجهولا.
- نكرر تطبيق هذه الطريقة إلى أن نحصل على معادلة من الجملة لا تتضمن أكثر من مجهول واحد ونستنتج مجموعة حلول الجملة.

تمرين

حلّ بطريقة التعويض الجملة: $\begin{cases} 3x-y+2z=2 \\ 4x+3y-2z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$

حلّ

- نختار المعادلة الثالثة لنعبّر عن y بدلالة x و z فنجد: $y=1-2x+z$.
- نعوّض y في المعادلتين الأخريين بالعبارة المحصل عليها فنجد: $\begin{cases} y=1-2x+z \\ 3x-(1-2x+z)+2z=2 \\ 4x+3(1-2x+z)-2z=2 \end{cases}$

أي $\begin{cases} y=1-2x+z \\ 5x+z=3 \\ -2x+z=-1 \end{cases}$.

- نختار المعادلة الثالثة من الجملة الأخيرة لنعبّر عن z بدلالة x، فنجد: $z=2x-1$.
- نعوّض z في المعادلة الثانية بالعبارة المحصل عليها فنجد: $\begin{cases} y=1-2x+z \\ 5x+(2x-1)=3 \\ z=2x-1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} y=1-2x+z \\ 7x=4 \\ z=2x-1 \end{cases}$.

نلاحظ أن المعادلة الثانية لا تتضمن إلا مجهولا واحدا هو x .

نجد $x=\frac{4}{7}$ ونستنتج مجموعة حلول الجملة المعطاة وهي $S=\left\{\left(\frac{4}{7};0;\frac{1}{7}\right)\right\}$.

- **طريقة المقارنة**

لحلّ جملة خطية بطريقة المقارنة:
- نعبّر عن أحد المجاهيل بدلالة المجاهيل الأخرى في كلّ المعادلات
- ثمّ نقارن العبارات المحصل عليها.

تمرين

حلّ بطريقة المقارنة الجملة: $\begin{cases} x-12y=\frac{3}{4} \\ x+5y=1 \end{cases}$

حلّ

نعبّر عن x بدلالة y في كلّ من المعادلتين ونحصل على الجملة المكافئة: $\begin{cases} x=12y+\frac{3}{4} \\ x=1-5y \end{cases}$.

وبالتالي فكلّ حلّ $(x;y)$ للجملة يحقق المعادلة $12y+\frac{3}{4}=1-5y$.

أي $17y=\frac{1}{4}$.

ومنه $y=\frac{1}{68}$ و $x=1-5y=\frac{63}{68}$.

إذن مجموعة حلول الجملة هي $S=\left\{\left(\frac{63}{68};\frac{1}{68}\right)\right\}$

- **طريقة التركيب الخطي**

لحلّ جملة خطية بطريقة التركيب الخطي، نقوم بما يلي:
- نضرب طرفي معادلتين من معادلات الجملة المعطاة في أعداد حقيقية مختارة بشكل يسمح بإبراز معاملين متعاكسين بالنسبة إلى مجهول معيّن في هاتين المعادلتين.
- نجمع المعادلتين الناتجتين طرفا إلى طرف للحصول على علاقة بين المجاهيل الأخرى للجملة.

نكرر هذه العملية لتعيين الحلول الممكنة للجملة ونتحقق من أنّ الحلول المحصل عليها تحقق بالفعل كلّ معادلات الجملة.

تمرين

حلّ بطريقة التركيب الخطي الجملة: $\begin{cases} 5x-17y=-80 \\ -4x+7y=31 \end{cases}$.

حلّ

بضرب طرفي المعادلة الأولى في 4 وطرفي المعادلة الثانية في 5، نحصل على الجملة المكافئة
$\begin{cases} 20x-68y=-320 \\ -20x+35y=155 \end{cases}$.

وبجمع المعادلتين الناتجتين طرفا إلى طرف، نجد: $y = 5$.

وباستعمال المعادلة $5x - 17y = -80$ مثلا، نجد $x = \frac{17 \times 5 - 80}{5} = 1$.

نتحقق من أن الثنائية $(1;5)$ حلّ لكلّ معادلة في الجملة.

إذن مجموعة حلول الجملة هي $S = \{(1;5)\}$.

2. توظيف الجمل الخطية

- **كتابة عبارة ناطقة على شكل مجموع عبارة صحيحة وعبارة ناطقة**

طريقة

$f(x)$ عبارة ناطقة. لتعيين معاملات عبارة $f(x)$ المعطاة على شكل مجموع عبارة صحيحة وعبارة ناطقة تتضمن المعاملات a، b، c:

- نوحدّ مقامات العبارة التي تتضمن المجاهيل a، b، c.
- نطابق بسطها ببسط عبارة $f(x)$ الأولى.
- نحلّ جملة معادلات ذات المجاهيل a، b، c.
- نكتب عبارة $f(x)$ على شكل مجموع عبارة صحيحة وعبارة ناطقة.

تمرين

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-3\}$ بالدستور $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2}{x+3}$.

عيّن الأعداد الحقيقية a و b و c حيث $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.

حلّ

من أجل كلّ عدد x من $\mathbb{R} - \{-3\}$، نكتب:

$$ax + b + \frac{c}{x+3} = \frac{ax(x+3) + b(x+3) + c}{x+3} = \frac{ax^2 + (3a+b)x + 3b + c}{x+3}$$

إذن $\frac{ax^2 + (3a+b)x + 3b + c}{x+3} = \frac{2x^2 + 5x - 2}{x+3} = f(x)$ من أجل كلّ x من $\mathbb{R} - \{-3\}$.

ومنه الجملة:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 3a + b = 5 \\ 3b + c = -2 \end{cases}$$

وهذا يعني

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 - 3a = 5 - 3 \times 2 = -1 \\ c = -2 - 3b = -2 - 3 \times (-1) = 1 \end{cases}$$

ونجد من أجل كلّ عدد x من $\mathbb{R} - \{-3\}$، $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+3}$.

- تعيين معادلة لمنحن معرّف بنقط منه

طريقة

لتعيين معادلة لمنحن معرّف بنقط منه:
- نكتب عبارة الشكل العام لمعادلة المنحني بدلالة x و y.
- نعوّض x و y في عبارة المعادلة بإحداثيي كلّ نقطة يشملها المنحني فنحصل على جملة خطية.
- نحلّ الجملة الخطية ونكتب العبارة المطلوبة.

تمرين

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.
عيّن الأعداد الحقيقية a و b و c التي من أجلها يشمل القطع المكافئ (P) الذي معادلته $y = ax^2 + bx + c$ النقط $A(-1;6)$ و $B(0;3)$ و $C(1;2)$.

حلّ

$y = ax^2 + bx + c$ هي معادلة للقطع المكافئ (P).

النقطة $A(-1;6)$ تنتمي إلى (P) يعني $f(-1) = 6$ أي $a - b + c = 6$.

النقطة $B(0;3)$ تنتمي إلى (P) يعني $f(0) = 3$ أي $c = 3$.

النقطة $C(1;2)$ تنتمي إلى (P) يعني $f(1) = 2$ أي $a + b + c = 2$.

نحصل هكذا على جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل a و b و c وهي $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 3 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$.

نحلّ هذه الجملة ونجد $c = 3$ و $a = 1$ و $b = -2$.

ومنه $y = x^2 - 2x + 3$ هي معادلة للقطع المكافئ (P).

3. حلّ جملة متراجحات خطية

طريقة

لحلّ جملة متراجحات خطية:
- نبسّط كلّ متراجحة من الجملة.
- في مستو منسوب إلى معلم، نرسم المستقيات حدود أنصاف المستويات التي تحقق متراجحات الجملة.
- نحدد، بالنسبة إلى كلّ متراجحة، نصف المستوي الموافق ونشطب النصف الآخر.

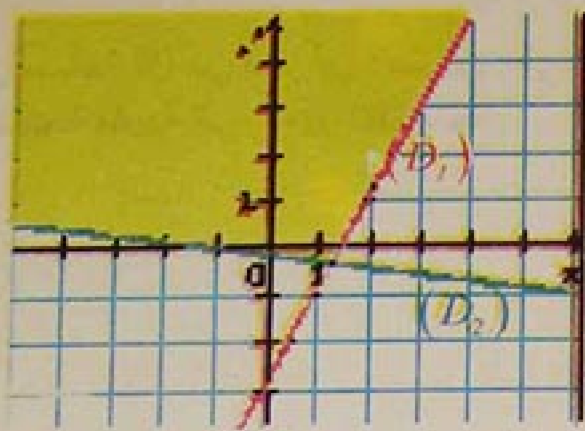
وتتعيّن مجموعة الحلول، بيانيا، بتقاطع أنصاف المستويات الموافقة.

تمرين

حلّ الجملة: $\begin{cases} 2x - y - 3 < 0 & (1) \\ x + 7y < -1 & (2) \end{cases}$

حلّ

1. في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$، نمثل المستقيمين:
(D_1) الذي معادلته $2x-y-3=0$ و (D_2) الذي معادلته $x+7y=-1$



2. نعيّن نصفي المستويين المعينين بكلّ من المستقيمين (D_1) و (D_2) وذلك باختبار إشارة كلّ من $2x-y-3$ و $x+7y+1$ عند نقطة غير واقعة على المستقيمين ولتكن النقطة O.

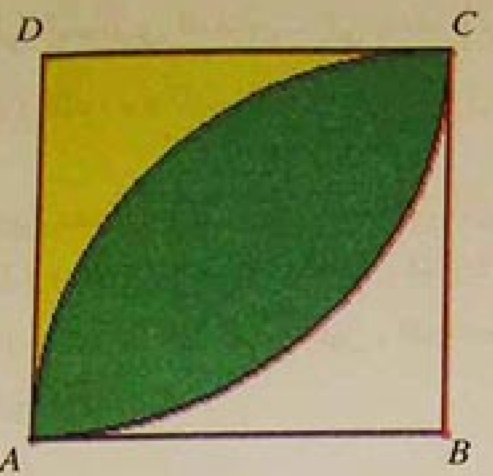
بما أنّ $2x-y-3$ سالب من أجل $(0;0)$، يكون نصف المستوي الموافق للمتراجحة (1) هو نصف المستوي الذي حدّه (D_1) والذي يشمل O.
وبالمثل، بما أن $x+7y+1$ موجب من أجل $(0;0)$، يكون نصف المستوي الموافق للمتراجحة (2) هو نصف المستوي الذي حدّه (D_2) والذي لا يشمل O.

3. مجموعة حلول الجملة هي تقاطع نصفي المستويين السابقين (الجزء المظلل على الشكل).

مسألة محلولة

مسألة

يمثل الشكل المقابل مربعا $ABCD$ ضلعه $8\,cm$.
نرسم بداخله ربعي دائرتين مركزاهما B و D ونصف قطر كلّ منهما $8\,cm$.



عيّن مساحة كلّ من الجزأين الملوّنين على الشكل.
أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لكلّ منهما.

حلّ

- **اختيار المجاهيل وترييض المشكلة**

ليكن x و y مساحتي الجزأين الملوّنين على الترتيب بالأصفر والأخضر معبّر عنهما بالسنتيمترات المربعة.

مساحة المربع $ABCD$ تساوي $2x+y$ (باعتبار المستقيم (AC) محور تناظر للشكل).
ومنه $2x+y=64$.
مساحة ربع الدائرة الذي مركزه D والمحدود بالضلعين $[DA]$ و $[DC]$ يساوي $x+y$.
ومنه $x+y=\frac{1}{4}(64\pi)$ أي $x+y=16\pi$.

- **حلّ المشكلة**

حلّ المشكلة يؤول إلى حلّ الجملة : $\begin{cases} 2x+y=64 \\ x+y=16\pi \end{cases}$

بضرب طرفي المعادلة الثانية في -1 والجمع مع الأولى طرفا إلى طرف، نجد: $x=64-16\pi$
أي $x=16(4-\pi)$.
وبتعويض هذه القيمة في المعادلة الثانية، نجد: $y=16\pi-16(4-\pi)$
ومنه $y=32(\pi-2)$.

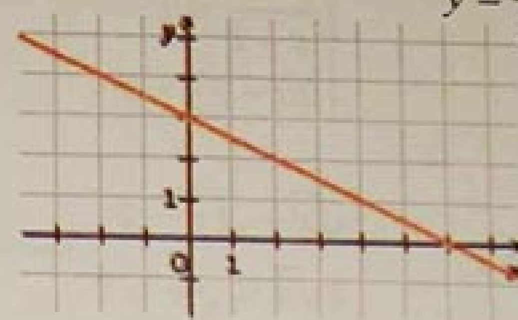
- **الإجابة**

المساحة المضبوطة للجزء الملوّن بالأصفر هي $16\,(4-\pi)\;cm^2$ و $13{,}73\,cm^2$ قيمة مقربة إلى 10^{-2} لها.
المساحة المضبوطة للجزء الملوّن بالأخضر هي $32\,(\pi-2)\;cm^2$ و $36{,}53\,cm^2$ قيمة مقربة إلى 10^{-2} لها.

1. صحيح أو خاطئ

أ) معادلة المستقيم (D) المرسوم أدناه هي:

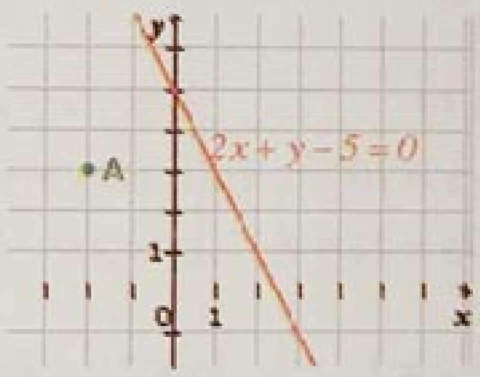
$$y = \frac{1}{2}x + 3$$



ب) المستقيمان (D_1) و (D_2) اللذان معادلتاهما $y = -\frac{1}{3}x - 1$ و $y = 3x + 2$ على الترتيب متقاطعان.

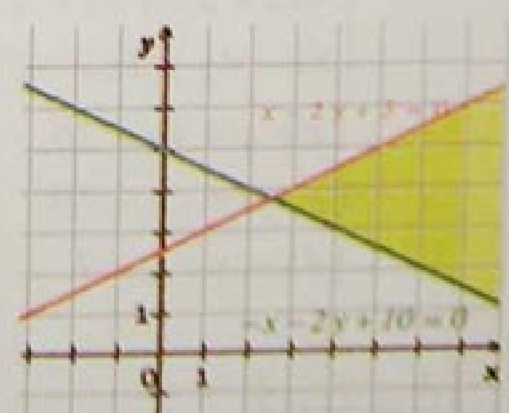
ج) الجملة $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + 3y = 7 \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا.

د) إحداثيا النقطة A على البيان أدناه يحققان $2x + y - 5 < 0$.



هـ) الجزء الملون بالأصفر على البيان أدناه معرّف بالجملة:

$$\begin{cases} x - 2y + 5 < 0 \\ -x - 2y + 10 < 0 \end{cases}$$

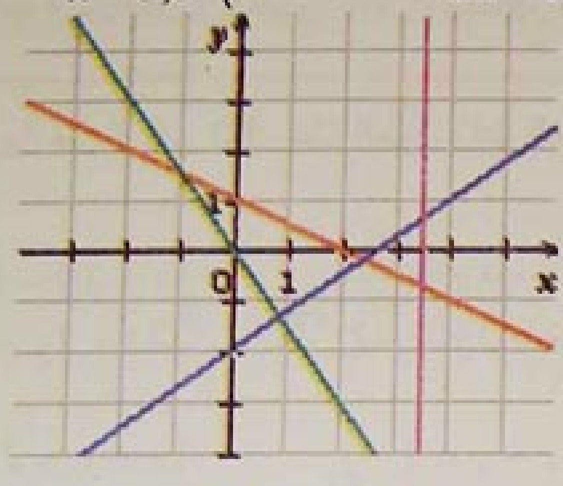


المعادلات الخطية لمجهولين

2. أرفق كلّ مستقيم ممثل على الشكل الآتي بمعادلته:

أ) $x + 2y = 2$ ج) $3x - 4y = 8$

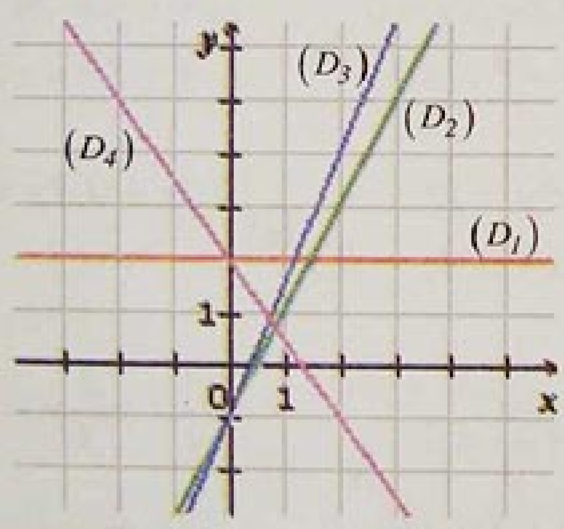
ب) $-3x - 2y = 0$ د) $x = 3,5$



3. ارسم في المستوي المنسوب إلى معلم المستقيم (D_1) الذي معادلته $y = -x + 1$ ثمّ المستقيم (D_2) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x - 2$.

4. إحدى المستقيمات الممثلة أدناه ليس لها معادلة في القائمة الآتية، عيّن هذا المستقيم:

أ) $y = 2$ ب) $y = 2x - 1$ ج) $y = 2,5x - 1$



5. عيّن في كلّ حالة الوضع النسبي للمستقيمين ثمّ مثلهما في المستوي المنسوب إلى معلم.

أ) $(D_1): \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ، $(D_2): 4x + 3y = 12$

ب) $(D_1): y = -x + 2$ ، $(D_2): x = -2$

ج) $(D_1): x - 2y = 5$ ، $(D_2): -2x + 4y = 10$

6. المستوي مزوّد بمعلم. هل النقط الآتية تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y = 3x - 2$ ؟

$A(1;1)$ ؛ $B(-1;1)$ ؛ $C(2;4)$ ؛ $D(-2;8)$

جمل معادلتين خطيتين ذات مجهولين

في التمارين من 7 إلى 13، حلّ الجمل ذات المجهولين x و y.

7. أ) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 3x-4y=-11 \\ 5x+2y=-1 \end{cases}$

8. أ) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -3x+y=3 \end{cases}$

9. أ) $\begin{cases} 2x=2 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 4x+y=2 \end{cases}$

10. أ) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x+4y=2 \end{cases}$

11. أ) $\begin{cases} 2x+y=24 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} -2x+5y=0 \\ 3x-7y=0 \end{cases}$

12. أ) $\begin{cases} 0{,}1x+0{,}3y=1 \\ x-3y=3 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 6x+3y=12 \\ -0{,}2x+0{,}4y=0{,}1 \end{cases}$

13. أ) $\begin{cases} \frac{3}{4}x+\frac{2}{3}y=5 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3 \\ -x+3y=0 \end{cases}$

14. نفس السؤال.

أ) $\begin{cases} 3x\sqrt{2}+2y=3\sqrt{2} \\ x-2y\sqrt{3}=1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)x+y=-1 \\ x-\sqrt{2}y=\frac{1}{3} \end{cases}$

15. نفس السؤال.

$$\begin{cases} 24x+71y=-469 \\ 2x+116y=-1250 \end{cases}$$

16. حلّ الجملة الآتية بعد كتابتها على شكل جملة خطية لمعادلتين بمجهولين:

$$\begin{cases} \frac{y+1}{x-1}=1 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$$

17. نعتبر الجملة $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \\ 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \end{cases}$ (S)

أ) هل الجملة (S) جملة خطية ؟

ب) لتكن (S') الجملة الناتجة بوضع $X=\sqrt{x}$ و $Y=\sqrt{y}$ في الجملة (S).

هل (S') جملة خطية؟

ج) حلّ (S') واستنتج الحلول الممكنة للجملة (S).

جمل ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل

في التمارين من 18 إلى 20، حلّ الجمل ذات المجاهيل x و y و z.

18. أ) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+2y+z=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x-y=13 \\ x+y-z=10 \\ 2x-10y-3z=3 \end{cases}$

19. أ) $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x+y-2z=3 \\ x+y=1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+2y+2z=3 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

20. أ) $\begin{cases} -3x+2y-z=26 \\ -2x+3y+2z=22 \\ 5x-4y+3z=-50 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x+y+4z=10 \\ x+4y+z=13 \\ 4x+y+z=1 \end{cases}$

21. نعتبر الجملة $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} \\ 2x-3y-2z=23 \end{cases}$ (S)

1.) نضع $t=\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$

عبّر بدلالة t عن المجاهيل x و y و z.

2) اكتب بدلالة t المعادلة $2x-3y-2z=23$.

استنتج قيمة t ثمّ مجموعة حلول الجملة (S).

22. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور:

$$f(x)=3x^2-7x+4$$

عيّن الأعداد الحقيقية a و α و β حيث:

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$$

23. ليكن ثلاثي الحدود $P(x)=x^3-7x-6$.

احسب $P(1)$ ثمّ استنتج أنّ $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

24. المستوي مزوّد بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عيّن المعادلة $y=ax^2+bx+c$ للقطع المكافئ (C) الذي يمر بالنقط $A(-1;10)$ و $A(5;0)$ و $C(2;1)$.

25. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالدستور

$$f(x)=\frac{2x^2+x-4}{x+1}.$$

عيّن الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}.$$

المتراجحات الخطية

المستوي مزوّد بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

26. 1) مثّل المستقيم الذي معادلته $x+3y=7$.

2) هل النقطة $A(1;2)$ من نصف المستوي المعرّف بالمتراجحة $x+3y<7$ ؟

استنتج مجموعة حلول المتراجحة $x+3y<7$.

27. مثّل بيانيا مجموعة حلول المتراجحة $-x+3y<2$.

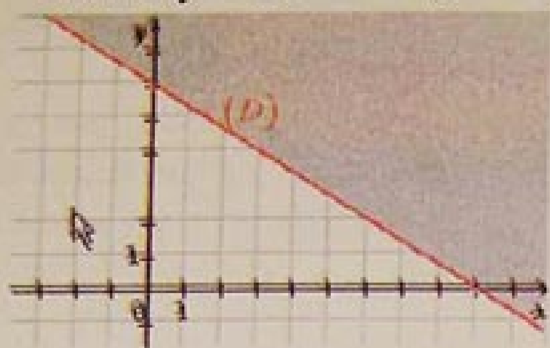
استنتج حلول المتراجحة $-x+3y\le 2$.

28. حلّ بيانيا المتراجحة $\frac{4}{3}x+2y\le 1$.

29. نفس السؤال.

$y<x$

30. (D) مستقيم معادلته $2x+3y=18$.



عيّن المتراجحة التي تعرّف الجزء غير الملوّن على الشكل.

جمل متراجحات خطية

المستوي مزوّد بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

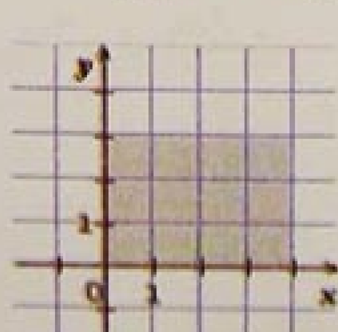
عيّن فيما يلي الجزء من المستوي المعرّف بكلّ جملة.

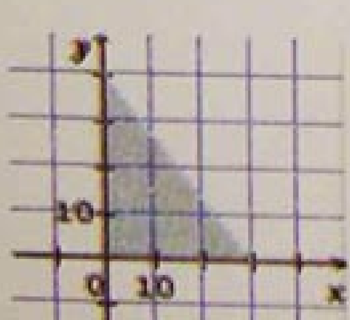
31. أ) $\begin{cases}x+y\le 5\\ x-y\ge 2\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x-2y\le 7\\ x+3y<2\end{cases}$

32. أ) $\begin{cases}0\le x\le 5\\ 0\le y\le 2\end{cases}$ ب) $\begin{cases}0\le x\le y\\ x+y\le 6\end{cases}$

33. أ) $\begin{cases}x\le y\\ x+y\le 0\\ y\ge -2\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x+y>0\\ x-y>0\\ x-y-2<0\end{cases}$

34. عرّف كلّ جزء ملون من المستوي بجملة متراجحات خطية.





مسائل

35. أوجد عددين طبيعيين حيث مجموعها هو 298 وفرقهما هو 148.

36. عيّن عددا طبيعيا مكتوبا برقمين حيث مجموع رقميه هو 12 وبتبديل رقميه ينقص العدد بـ 18.

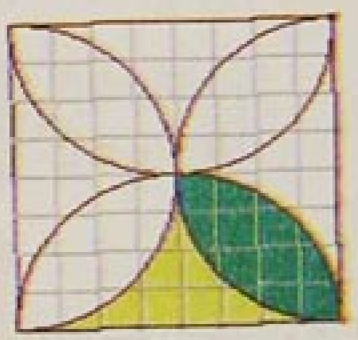
37. عيّن ثلاثة أعداد طبيعية حيث مجموعها هو 100 والقسمة الإقليدية للعدد الثاني على الأول تعطي 3 كحاصل القسمة و 4 كباقي القسمة والقسمة الإقليدية للعدد الثالث على الثاني تعطي 2 كحاصل القسمة و 18 كباقي القسمة.

38. اشترى سمير 6 خبزات و 4 حلويات بمبلغ 131 دينارا ودفعت سعاد عند نفس المخبزة لشراء 5 خبزات و 5 حلويات مبلغ $142,50$ دينارا.
ما هو سعر كلّ من الخبزة الواحدة والحلوية الواحدة ؟

39. ترك أب، عند وفاته، إرثا قسمه أبناؤه كالآتي:
- حصة الأول 100 دينار وعشر الباقي.
- حصة الثاني 200 دينار وعشر الباقي.
- حصة الثالث 300 دينار وعشر الباقي.

وهكذا...
وتبيّن في النهاية أن التقسيم كان بالتساوي بين الأبناء.
أوجد عدد الأبناء وحصة كلّ واحد.

40. $ABCD$ مربع ضلعه $8\,cm$. نرسم بداخله أنصاف الدوائر التي أقطارها أضلاع هذا المثلث (الشكل).



احسب مساحة الوردة.

(نضع x مساحة الجزء الملوّ... الجزء الملوّن بالأصفر).

41. وُضع مبلغان متناسبان مع العددين 5 و 7 في البنك بفوائد بسيطة: الأول بنسبة قدرها 11% والثاني بنسبة قدرها 9%.
عيّن المبلغين علما أنّ الرصيد السنوي الإجمالي يساوي 35400 دينار.

42. أودع رصيدان بفوائد بسيطة، الأول بنسبة قدرها 16% لمدة 3 أشهر والثاني بنسبة قدرها 20% لمدة 7 أشهر. الرصيدان يجلبان نفس الفائدة.
إذا زدنا كلّ رصيد بمبلغ 1500 دينار تكون نسبتهما $\frac{38}{15}$.
احسب الرصيدين والفائدة المشتركة.

43. أودع رصيدان متساويان بفوائد مركبة لمدة سنتين: الأول بنسبة قدرها 4% والثاني بنسبة قدرها 6%.
عند نهاية الإيداع، بلغ الفرق بين الفوائد الناتجة $859,05$ دينارا.
عين القيمة المشتركة للرصيدين.

الباب 9 الاحتمالات

1. مفردات الاحتمالات
2. الاحتمالات

ظهر حساب الاحتمالات بصورة فعلية في القرن 17 عندما اهتم علماء الرياضيات، منهم بسكال (Pascal) و فيرما (Fermat) و بعدهما هيكنز (Huygens) وبرنولي (Bernoulli) بدراسة الظواهر العشوائية من خلال ألعاب الحظ ثم تطور تطورا معتبرا في القرن 19 ليوظف في العلوم الاجتماعية والعلوم الفيزيائية وحاليا في كل الميادين مثل البحث الطبي.

ويعتبر جاك برنولي أول من عبر رياضيا على أن" كلما كررنا تجربة عشوائية عددا كبيرا من المرات، كلما اقترب تواتر حادثة من احتمال تحققها". وهو ما يسمى "قانون الأعداد الكبيرة".

جاك برنولي (1654 – 1705)

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
بعد رمي زهر نرد مزيف 200 مرة ، سجل، في الجدول التالي، عدد مرات ظهور كل وجه. (6: 31 ، 5: 35 ، 4: 28 ، 3: 36 ، 2: 40 ، 1: 30) بالاعتماد على هذا الجدول، اجب عن الأسئلة من 1 إلى 4.			
1. النسبة المئوية لظهور رقم زوجي هي...	50 %	49,5 %	50,5 %
2. النسبة المئوية لظهور رقم فردي هي...	50 %	49,5 %	50,5 %
3. النسبة المئوية لظهور رقم أكبر أو يساوي 4 هي ...	41 %	50 %	47 %
4. الرقم الذي يظهر أكثر هو....	زوجي	6	2
% 30 من منخرطي نادي شباب، يمارسون رياضة. من بين هؤلاء الرياضيين % 15 يمارسون كرة السلة و% 20 يمارسون كرة اليد و% 5 يمارسون كرة السلة وكرة اليد في نفس الوقت. بالاعتماد على المعطيات السابقة، اجب عن الأسئلة من 5 إلى 8.			
5. نسبة ممارسي كرة السلة هي...	4,5 %	50 %	15 %
6. نسبة المنخرطين الذين لا يمارسون أية رياضة هي ...	70 %	65 %	30 %
7. نسبة ممارسي الرياضة ما عدا كرة السلة و كرة اليد هي...	65 %	21 %	19,5 %
8. نسبة المنخرطين الذين يمارسون كرة السلة ولا يمارسون كرة اليد هي...	3 %	10 %	4,5 %

6	5	4	3	2	1
31	35	28	36	40	30

أنشطة تمهيدية

نشاط 1: الحوادث

نضع في علبة 10 كريات من نفس اللون، مرقمة من 21 إلى 30. نسحب كرة واحدة بصفة عشوائية ونسجل رقمها.

1) عين مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة العشوائية.

2) نعتبر الحادثتين:
- " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 ".
- " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 4 ".

عين مجموعة إمكانيات كل من هاتين الحادثتين.

3) عين مجموعة إمكانيات كل من الحادثتين التاليتين.
- " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 ومضاعف للعدد 4 في آن واحد".
- " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 أو مضاعف للعدد 4 ".

نشاط 2: الاحتمال والجدول الإحصائي

يتكون قسم من 30 تلميذا منهم 9 ذكور و 9 إناث مسجلين في النظام نصف الداخلي و 3 ذكور و 9 إناث مسجلين في النظام الخارجي.

1) أنجز جدول توزيع تواترات تلاميذ هذا القسم في شكل نسب مئوية وهذا حسب الجنس ونظام التسجيل.

2) يسأل أستاذ الرياضيات أحد أفراد القسم عشوائيا.

أ) أشرح لماذا توجد 4 إمكانيات (حظوظ) من 10 لأن يكون هذا الفرد ذكرا. نقول إن الاحتمال أن يكون الفرد ذكرا يساوي 0,4.

ب) ما هو الاحتمال أن يكون هذا الفرد أنثى؟

جـ) ما هو الاحتمال أن يكون هذ الفرد خارجيا؟

د) ما هو الاحتمال أن يكون هذ الفرد ذكرا وخارجيا؟

هـ) ما هو الاحتمال أن يكون هذ الفرد أنثى وخارجية؟

3) أ) أحسب نسبة الذكور الخارجيين.

ب) يسأل الأستاذ أحد الذكور عشوائيا.

أشرح لماذا توجد إمكانية (حظ) واحدة من 4 لكي يكون هذا التلميذ خارجيا.

استنتج الاحتمال أن يكون هذا التلميذ خارجيا.

نشاط 3: قانون احتمال

1. التجربة

ارم، في آن واحد، قطعتين نقديتين 10 مرات متتالية ثم سجل النتائج المحصل عليها حيث:
- " 0 " يمثل الحادثة: " لا يظهر الوجه".
- " 1 " يمثل الحادثة: "يظهر الوجه مرة واحدة".
- " 2 " يمثل الحادثة: "يظهر الوجه مرتين".

	الرمية 1	الرمية 2	الرمية 3	الرمية 4	الرمية 5	الرمية 6	الرمية 7	الرمية 8	الرمية 9	الرمية 10
عدد مرات ظهور الوجه										

2. توزيع التواترات

أ) ما هي التواترات f_0 ، f_1 ، f_2 للحوادث " 0 " ، " 1 " ، " 2 " ؟

ب) احسب $f_0 + f_1 + f_2$.

3. المحاكاة

نستعمل المجدول إكسال لإنجاز المحاكاة المتعلقة بالتجربة السابقة.

أ) - تحقق أنه، للحصول بطريقة عشوائية على رقم من الأرقام الثلاثة: 0 ، 1 ، 2 ، نستعمل الدستور

" =ENT(ALEA()+0,5)+ENT(ALEA()+0,5) "

- أنجز هذه المحاكاة بالنسبة إلى 200 رمية.
- احسب التواترات f_0 ، f_1 ، f_2 في هذه الحالة.
- أعد المحاكاة باستعمال اللمسة F9 عدة مرات.

ب) ما هي القيم التي تتذبذب حولها كلّ من التواترات f_0 ، f_1 ، f_2 ؟

معارف

1. مفردات الإحتمالات

- إمكانية تجربة عشوائية هي أية نتيجة ممكنة لهذه التجربة.
- مجموعة الإمكانيات هي مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة. نرمز إليها عادة بالحرف Ω.

مثال

رمي زهر النرد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الأوجه الستة (1، 2، 3، 4، 5، 6).
إذن $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$.

- **الحادثة**

تعريف

نسمي **حادثة** كل جزء من مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية أي مجموعة النتائج التي تتميز بنفس الخاصية.

مثال

A هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه فردي" عند رمي زهر النرد، إذن $A=\{1;3;5\}$.

- **الحوادث الخاصة**

  - **الحادثة الإكيدة**

هي Ω أي مجموعة كل النتائج الممكنة .

  - **الحادثة المستحيلة**

هي $\varnothing$ المجموعة الخالية (لا تحتوي على أية إمكانية).

  - **الحادثة البسيطة**

هي حادثة متكونة من نتيجة واحدة. فهي مجموعة أحادية.

مثال

الحوادث البسيطة لرمي زهر النرد هي: $\{1\}$، $\{2\}$، $\{3\}$، $\{4\}$، $\{5\}$، $\{6\}$.

- **تقاطع حادثتين**

تعريف

نسمي **تقاطع** الحادثتين A و B ونرمز إليه بـ $A\cap B$ الحادثة المتكونة من النتائج المشتركة للحادثتين.

مثال

في تجربة رمي زهر النرد، الحادثة $A=\{2;4;6\}$ هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه زوجي" والحادثة
$B=\{3,6\}$ هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه مضاعف للعدد 3 " وبالتالي الحادثة $A\cap B$ هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه زوجي ومضاعف للعدد 3 " وهي $A\cap B=\{6\}$.

- **الحادثتان المنفصلتان (غير المتلائمتين)**

تعريف

نسمي حادثتين **منفصلتين** (أو **غير متلائمتين**) A و B الحادثتين اللتين لايشتركان في أي نتيجة . أي $A \cap B = \varnothing$

مثال

A هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه فردي" و B هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه مضاعف للعدد 4"
عند رمي زهر النرد، فإن $A = \{1;3;5\}$ و $B = \{4\}$ و بالتالي $A \cap B = \varnothing$. إذن A و B منفصلتان.

- **اتحاد حادثتين**

تعريف

نسمي **اتحاد** الحادثتين A و B ونرمز له $A \cup B$ الحادثة المتكونة من نتائج الحادثة A أو نتائج الحادثة B .

مثال

عند رمي زهر النرد، A هي الحادثة: " الحصول على وجه زوجي" و B هي الحادثة: " الحصول على وجه أكبر أو يساوي العدد 3"، فيكون $A = \{2;4;6\}$ و $B = \{3;4;5;6\}$ و منه $A \cup B = \{2;3;4;5;6\}$.

- **الحادثة المعاكسة**

تعريف

نسمي الحادثة **المعاكسة** لحادثة A ، ونرمزلها $\overline{A}$ (نقرأ " لا A ")، مجموعة النتائج التي لا تنتمي إلى A .

مثال

في تجربة رمي زهر النرد، A هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه زوجي" يعني $A = \{2;4;6\}$ ، فتكون الحادثة المعاكسة لها هي $\overline{A} = \{1;3;5\}$.

2. الاحتمالات

- **قانون الاحتمال**

لتكن Ω مجموعة ذات n إمكانية لتجربة عشوائية: $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_i; ...; x_n\}$. يعرّف قانون احتمال p على E بإرفاق كل إمكانية x_i بعدد موجب p_i حيث مجموع الأعداد p_i يساوي 1.

x_1	x_2	x_3	.....	x_i	.....	x_n
p_1	p_2	p_3	.....	p_i	......	p_n

مع $p_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

مثال

العدد p_i هو احتمال وقوع الإمكانية x_i .

- **قانون متساوي الاحتمال**

تعريف

لتكن Ω مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية. إذا كان لكلّ الإمكانيات نفس الاحتمال، نقول إنّ قانون الاحتمال **متساوي التوزيع** أو **متسلوي الاحتمال**.
بمعنى:
إذا كان n عدد عناصر Ω، فإنّ احتمال وقوع كل عنصر x_i من Ω هو: $p_i = \frac{1}{n}$.

ملاحظة

بعض التعابير تدل على وضعية متساوية الاحتمال:
- نختار بصفة **عشوائية**.
- نرمي قطعة نقدية **متوازنة**.
- نرمي زهر **نرد غير مزيف**.
- القريصات أو الكرات الموجودة داخل كيس **لا نفرق بينها** عند اللمس.

أمثلة

- عند رمي قطعة نقدية متوازنة، فإن احتمال ظهور الوجه أو الظهر يساوي $\frac{1}{2}$.
- عند رمي زهرنرد غير مزيف ذي 6 أوجه ، فإن احتمال الحصول على أحد الأوجه هو $\frac{1}{6}$.
- نقبل أنّ الاحتمال أن تعطي الوظيفة ENT(ALEA)*10 لمجدول أحد الأرقام من 0 إلى 9 يساوي $\frac{1}{10}$.

نظرية

$\Omega = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_i ; ... ; x_n\}$ مجموعة امكانيات تجربة عشوائية معرّف عليها قانون الاحتمال $p : x_i \to p_i$

في حالة قانون متساوي الاحتمال على مجموعة Ω وإذا كانت A حادثة من Ω، فإنّ احتمال A يساوي حاصل قسمة عدد عناصر A على عدد عناصر Ω.
أي، إذا كان a عدد عناصر A و n عدد عناصر Ω فإنّ $p(A) = \frac{a}{n}$.

برهان

لدينا $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_i ; ... ; x_n\}$ و $p(x_i) = \frac{1}{n}$.
إذا كان عدد عناصر A هو a فإنّ $p(A) = a \times \frac{1}{n} = \frac{a}{n}$.

ملاحظات

- نسمي عناصر الحادثة A الحالات **المواتية** (أو **الملائمة**) لهذه الحادثة وعناصر Ω الحالات **الممكنة**.
- تسمى النظرية السابقة أيضا قانون لبلاس (*Laplace*).

أمثلة

- نرمي زهر نرد متوازن ونعتبر الحادثة A : " الحصول على وجه رقمه زوجي" و الحادثة B : " الحصول على وجه رقمه أكبر أو يساوي العدد 3 " .

لدينا $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ ، $A=\{2;4;6\}$ ، $B=\{3;4;5;6\}$

ومنه $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ و $p(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

- قسم متكون من 12 بنتا و 20 ولدا.

نختار تلميذا من القسم بصفة عشوائية، فيكون احتمال الحصول على بنت هو $\frac{12}{32}$ أي $\frac{3}{8}$.

- الاحتمال والحوادث
- توزيع التواترات وقانون الاحتمال

عند القيام بدراسة لمجتمع، نحصل على توزيع التواترات لكل النتائج الممكنة.
إذا سحبنا بصفة عشوائية أحد أفراد هذا المجتمع، نقبل أنّ توزيع التواترات يمثل قانون الاحتمال للتجربة العشوائية.
من أجل كل نتيجة x_i ، لدينا $p_i=f_i$

مثال

تحتوي علبة على كرات ملونة ومن نفس الشكل. يتوزع تواتر الألوان كما يلي:

اللون x_i	أبيض	أحمر	أسود	أخضر
التواتر f_i	0,35	0,40	0,15	0,10

$\sum f_i=1$

نسحب إحدى الكرات بصفة عشوائية.
الاحتمال أن تكون هذه الكرة سوداء هو $0,15$.

- احتمال حادثة

تعريف

لتكن Ω مجموعة نتائج تجربة عشوائية مرفقة بقانون احتمال و A حادثة.
احتمال الحادثة A هو مجموع احتمالات إمكانيات هذه الحادثة.

مثال

النتائج المحصل عليها بعد رمي زهر نرد مزيف عددا كبيرا من المرات، سمحت باقتراح قانون الاحتمال المعرف كما يلي:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

احتمال الحصول على رقم زوجي يساوي $p(\{2\})+p(\{4\})+p(\{6\})$ أي $\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$

إذن $p(\{2;4;6\})=\frac{2}{3}$.

خواص

- بما أن الاحتمال $p(A)$ لحادثة A هو مجموع جزئي للاحتمالات p_i وبما أن المجموع الكلي لهذه الاحتمالات يساوي 1، إذن $p(A)$ هو عدد محصور بين 0 و1 ،أي $0 \le p(A) \le 1$.
- احتمال الحادثة المستحيلة منعدم: $p(\varnothing) = 0$.
- احتمال الحادثة الأكيدة يساوي 1: $p(\Omega) = 1$.
- إذا كان A و B حادثتين من نفس المجموعة Ω فإن:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

برهان

نفرض أن $A = \{x_1 ; x_2 ; x_3\}$ و $B = \{x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5\}$.

لدينا $A \cup B = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5\}$ و $A \cap B = \{x_2 ; x_3\}$.

منه

$$p(A \cup B) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) + p(x_5) \quad (1)$$

و

$$\begin{aligned} p(A) + p(B) - p(A \cap B) &= \left[p(x_1) + p(x_2) + p(x_3)\right] + \left[p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) + p(x_5)\right] \\ &\quad - \left[p(x_2) + p(x_3)\right] \\ &= p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) + p(x_5) \quad (2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

إذن المساواة محققة في هذه الحالة الخاصة ويمكن البرهان عليها بنفس الطريقة في الحالة العامة.

- إذا كانت الحادثتان A و B غير متلائمتين، فإنّ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (لأن $p(A \cap B) = p(\varnothing) = 0$).
- A حادثة من المجموعة Ω و $\overline{A}$ الحادثة المعاكسة لها، ، في هذه الحالة يكون $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

برهان

بما أن $\overline{A}$ معاكسة للحادثة A فإن $A \cap \overline{A} = \varnothing$ و $A \cup \overline{A} = \Omega$.

منه $p(A \cup \overline{A}) = p(\Omega)$ أي $p(A) + p(\overline{A}) = 1$ أي $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

1. تعيين قانون احتمال لتجربة عشوائية

طريقة

لتعيين قانون احتمال لتجربة عشوائية يمكن الاعتماد على وضعية متساوية الاحتمال.

تمرين

نرمي زهري النرد و نهتم بالمجموع المحصل عليه.
عين قانون الاحتمال المرفق بهذه التجربة العشوائية.

حلّ

عند رمي زهري النرد نحصل على ثنائية من الأرقام من 1 إلى 6.

يمثل الجدول المقابل المجموع المحصل عليه بالنسبة إلى كل ثنائية من الثنائيات الممكنة.
فمثلا الثنائية $(3;4)$ تعطي المجموع $3+4=7$.
يوجد 36 ثنائية ولكلّ منها نفس احتمال الظهور، إذن مجموعة الثنائيات مزودة بقانون متساوي الاحتمال.

الزهر 1 / الزهر 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

المجموع المحصل عليه هو عنصر من المجموعة: $\Omega=\{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$

الثنائيات الثلاث $(1;3)$، $(2;2)$، $(3;1)$ تعطي المجموع 4. إذن $p(4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

الثنائيات الخمس $(1;5)$، $(2;4)$، $(3;3)$، $(5;1)$، $(4;2)$ تعطي المجموع 6 . إذن $p(6)=\frac{5}{36}$.

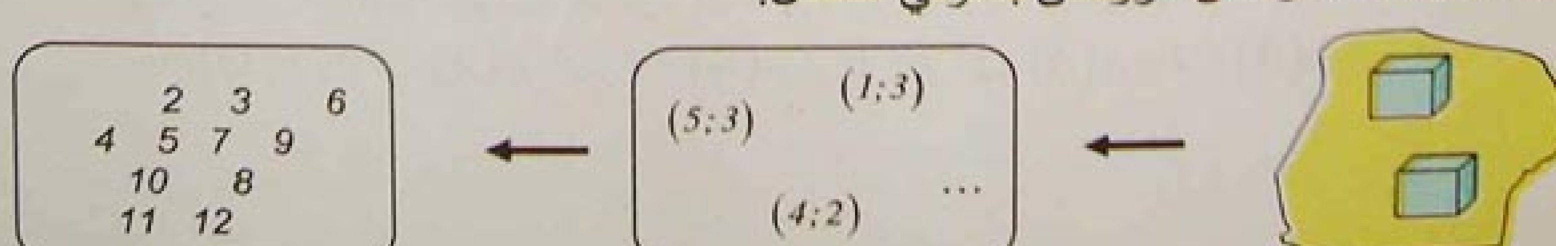
وهكذا نستنتج قانون الاحتمال التالي:

المجموع x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

يمكن التحقق أن المجموع $\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)$ يساوي 1.

ملاحظة

في هذا المثال توجد مجموعتان مزودتان بقانوني احتمال.



الوضعية — مجموعة الثنائيات مزودة بقانون متساوي الاحتمال. — مجموعة المجاميع مزودة بقانون غير متساوي الاحتمال

3. حساب احتمال حادثة باعتماد جدول تواترات

طريقة

لحساب احتمال حادثة اعتمادا على جدول تواترات نتبع الطريقة التالية:
- نعين الاحتمال بالقراءة المباشرة عل الجدول للتواتر المناسب.
- أو ننجز جدولا جزئيا يعطي التواتر المستهدف.

تمرين

يمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ ثانوية حسب الجنس وسنة التمدرس.

المستوى / الجنس	1 ثا	2 ثا	3 ثا	المجموع
ذكور (%)	23	14	11	48
إناث (%)	19	17	16	52
المجموع	42	31	27	100

1. نختار تلميذا واحدا بصفة عشوائية.ما هو الاحتمال أن يكون :
   - ذكرا ؟
   - تلميذا في السنة الثالثة ؟
   - ذكرا في السنة الثانية ؟
2. نختار بنتا واحدة بصفة عشوائية.ما هو الاحتمال أن تكون تلميذة من السنة الأولى؟
3. نختار تلميذا واحدا من السنة الأولى بصفة عشوائية.ما هو الاحتمال أن يكون أنثى؟

حلّ

1. نقرأ في الجدول أنّ :
   - % 48 من التلاميذ هم ذكور. إذن الاحتمال أن يكون التلميذ ذكرا هو 0,48.
   - % 27 من التلاميذ هم في السنة الثالثة. إذن الاحتمال أن يكون التلميذ في السنة الثالثة هو 0,27.
   - الذكور في السنة الثانية يمثلون % 14 من مجموع تلاميذ الثانوية ، إذن الاحتمال أن يكون التلميذ ذكرا في السنة الثانية هو 0,14.

2.

المستوى / الجنس	1 ثا	2 ثا	3 ثا	المجموع
إناث (%)	19	17	16	52
	36,5	32,7	30,8	100

$\times \frac{100}{52}$

% 36,5 من الإناث هن في السنة الأولى، إذن الاحتمال أن تكون البنت، تلميذة من السنة الأولى هو 0,365.

.3

الجنس \ المستوى	1 ثا	
ذكور (%)	23	54,8
إناث (%)	19	45,2
المجموع	42	100

$\times \dfrac{100}{42}$

$45,2\,\%$ من تلاميذ السنة الأولى هم إناث.
إذن الاحتمال أن يكون تلميذ من السنة الأولى أنثى هو $0,452$.

4. حساب احتمال حادثة باعتماد قانون احتمال

طريقة

لحساب احتمال حادثة اعتمادا على قانون احتمال، نعيّن الإمكانيات (النتائج) التي تتكون منها هذه الحادثة ثم نطبق قانون لبلاس أو إحدى خواصه.
A ، B حادثتان.
- الحادثة " A و B " تعني أن كلا من نتائجها مواتية (ملائمة) للحادثتين A و B **في آن واحد**، فهي تنتمي إلى **تقاطع** الحادثتين.
- الحادثة " A **أو** B " تعني أن كلا من نتائجها مواتية (ملائمة) للحادثة A **أو** للحادثة B (أو للحادثتين معا)، فهي تنتمي إلى **اتحاد** الحادثتين.

تمرين

أنجزت دراسة إحصائية حول ظهور كلّ رقم من الأرقام 0، 1، 2، 3، ... ،9 في الأسعار المسجلة في دكان للمواد الغذائية. نقبل أن هذه الدراسة سمحت بإنشاء قانون الاحتمال التالي على المجموعة $\Omega=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ للنتائج الممكنة عندما نسحب بصفة عشوائية أحد الأرقام لأحد الأسعار المسجلة.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0,3	0,1	0,03	0,03	0,03	0,12	0,03	0,03	0,03	0,3

احسب احتمال كل من الحوادث التالية:
- A : " الرقم المحصل عليه فردي".
- B : " الرقم المحصل عليه مضاعف للعدد 3".
- C : " الرقم المحصل عليه فردي و مضاعف للعدد 3".
- E : " الرقم المحصل عليه فردي أو مضاعف للعدد 3".
- F : " الرقم المحصل عليه ليس مضاعفا للعدد 3 ".

حل

• لدينا $A=\{1;3;5;7;9\}$

إذن

$$p(A)=p_1+p_3+p_5+p_7+p_9$$
$$=0,1+0,03+0,12+0,03+0,3=0,58$$

• لدينا $B=\{0;3;6;9\}$

إذن

$$p(B)=p_0+p_3+p_6+p_9$$
$$=0,3+0,03+0,03+0,3=0,66$$

• لدينا $C=A\cap B=\{3;9\}$

إذن

$$p(C)=0,03+0,3=0,33$$

• لدينا $E=A\cup B$

إذن

$$p(E)=p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

أي

$$p(F)=0,58+0,66-0,33=0,91$$

ملاحظة

يمكن أيضا حساب $p(E)$ بتعيين عناصر الحادثة E حيث $E=\{0;1;3;5;6;7;9\}$.

▪ F هي الحادثة « الرقم المحصل عليه ليس مضاعفا للعدد 3 ".

إذن F هي الحادثة المعاكسة للحادثة B أي أنّ $F=\overline{B}$.

نستنتج أنّ $p(F)=p(\overline{B})=1-p(B)$

أي $p(F)=1-0,66=0,33$.

ملاحظة

يمكن أيضا حساب $p(F)$ بتعيين عناصر الحادثة F

نرمي زهر نرد رباعي الوجوه حيث تكون هذه الوجوه مرقمة من 1 إلى 4 ونسجل رقم الوجه الذي سقط عليه زهر النرد.

1. أ) اذكر مجموعة الإمكانيات Ω.
ب) اذكر حادثة بسيطة.
جـ) اذكر الحادثة المعاكسة لهذه الحادثة.

2. نسمي p_i احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم i حيث i محصور بين 1 و 4.
نعلم أن $p_1=0,16$ ، $p(\{1;2\})=0,42$ ، $p_3=0,21$.
أ) احسب p_2 و p_4.
ب) احسب احتمال الحادثة $A=\{2;4\}$.
جـ) استنتج احتمال الحادثة $\overline{A}$.
د) احسب احتمال الحادثة B : " الوجه يحمل رقما مساويا 2 على الأقل".

حلّ

1. أ) $\Omega=\{1,2,3,4\}$.
ب) يمكن اعتبار الحادثة E : " رقم الوجه مضاعف للعدد 4" أي $E=\{4\}$.
جـ) الحادثة المعاكسة للحادثة E هي الحادثة $\overline{E}$:" رقم الوجه ليس مضاعفا للعدد 4 " أي $E=\{1;2;3\}$.

2. أ) الحادثتان $\{1\}$ و $\{2\}$ غير متلائمتين. إذن $p(\{1;2\})=p(\{1\})+p(\{2\})$
إذن $p(\{2\})=p(\{1;2\})-p(\{1\})=0,42-0,16=0,26$.

$$p(\{1\})+p(\{2\})+p(\{3\})+p(\{4\})=p(\Omega)=1$$

وبالتالي:

$$p(\{4\})=1-\left[p(\{1\})+p(\{2\})+p(\{3\})\right]$$

$$p(\{4\})=1-[0,16+0,26+0,21]=0,37$$

ب) الحادثة A متكونة من الحادثتين البسيطتين $\{2\}$ و $\{4\}$.
إذن $p(A)=p(\{2\})+p(\{4\})=0,26+0,37=0,63$.

جـ) $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0,63=0,37$.

د) **الطريقة الأولى**
بما أن الحادثة B هي : " الوجه يحمل رقما مساويا 2 على الأقل" فإن $B=\{2,3,4\}$.
ومنه $p(B)=p(\{2\})+p(\{3\})+p(\{4\})=0,26+0,21+0,37=0,84$.

الطريقة الثانية
بما أن الحادثة B هي : " الوجه يحمل رقما مساويا إلى 2 على الأقل" فإن الحادثة المعاكسة $\overline{B}$ هي : "رقم الوجه هو1" و منه $p(\overline{B})=p(\{1\})=0,16$
ونستنتج أن: $p(B)=1-p(\overline{B})=1-0,16=0,84$.

1. صحيح أو خاطئ

أ) الحادثة هي مجموعة من الاحتمالات.
ب) مجموع احتمالات الحوادث البسيطة من Ω يساوي 1.
حـ) إذا كان تواتر حادثة هو $30\ \%$ ، فإن احتمال هذه الحادثة هو $0,3$.
د) الحادثة البسيطة لا تحتوي على أي إمكانية.
هـ) الحادثة الأكيدة تحتوي على كل الإمكانيات.
و) إذا كان $p(A)=0,35$ ، فإن $p(\overline{A})=0,65$.
ك) إذا كان $p(B)=\frac{1}{4}$ ، فإن $p(\overline{B})=\frac{1}{4}$.
ل) إذا كان $p(A)=0,2$ و $p(B)=0,4$ ، فإن $p(A\cap B)=0,08$.
ق) إذا كان $p(A)=0,3$ و $p(B)=0,4$ ، فإن $p(A\cup B)=0,7$.
ي) إذا كان $p(\{a\})=0,2$ و $p(\{b\})=0,1$ ، فإن $p(\{a;b\})=0,3$.

الحوادث

2. في رمي قطعة نقدية. عين مجموعة الإمكانيات.

3. في رمي زهر نرد. اكتب خمس حوادث تحتوي كل منها على إمكانيتين.

4. تحتوي علبة على 7 كرات زرقاء مرقمة من 1 إلى 7.
نسحب كرة بصفة عشوائية. ما هي مجموعة الإمكانيات ؟

5. أوجه زهر النرد مرقمة كما يلي: 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 3 ، 3.
كم يوجد من الإمكانيات المختلفة؟

6. نضع ،في كيس، 8 قريصات مرقمة من 1 إلى 8 ثم نسحب قريصة بصفة عشوائية.
نعتبر الحادثتين التاليتين:
A: " القريصة المسحوبة تحمل رقما فرديا ".
B: " القريصة المسحوبة تحمل رقما أكبر أو يساوي 3 ".

أجب بصحيح أو خاطئ عن التصريحات التالية:
أ) $A=\{2;4;6;8\}$.
ب) $\overline{A}=\{2;4;6;8\}$.
حـ) $A\cup B=\{2;3;5;7\}$.
د) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{4;6;8\}$.
هـ) $\overline{A\cap B}=\{2;4;5;6;7;8\}$.

7. نرمي زهر نرد ونعتبر الحادثتين:
أ : " الحصول على رقم زوجي".
ب: " الحصول على رقم أكبر من أو يساوي 4 ".
عيّن كلا من الحادثتين العكسيتين للحادثتين أ و ب.

8. نرمي زهر النرد و نعتبر الحادثتين:
أ : " الحصول على رقم زوجي".
ب: " الحصول على رقم مضاعف للعدد 3.
هل الحادثتان أ و ب غير متلائمتين؟ برر إجابتك.

9. نرمي زهري نرد و نعتبر الحادثتين:
أ : " الحصول على الأقل على الرقم 6".
ب: " الحصول على الأقل على الرقم 1".
هل الحادثتان أ و ب غير متلائمتين؟ برر إجابتك.

10. يحتوي كيس على 20 كرة كل منها ملونة بأحد الألوان التالية:أحمر، أسود، ابيض.
نسحب كرة واحدة ونسجل لونها ثم نرجعها إلى الكيس ونسحب كرة أخرى ونسجل لونها.

1) نهتم بلون الكرتين المسحوبتين دون اعتبار ترتيب اللونين.
ما هي مجموعة الإمكانيات المحصل عليها؟
2) يسمح سحب الكرة الحمْراء بربح نقطتين، وسحب الكرة السوداء بربح 3 نقط وسحب الكرة البيضاء بربح نقطة واحدة.
نهتم بمجموع النقط المحصل عليه.
ما هي مجموعة الإمكانيات في هذه الحالة؟

11. نعتبر نفس وضعية التمرين السابق.
نسحب كرة واحدة ونسجل لونها ثم نرجعها إلى الكيس ونعيد العملية مرتين.
1) نهتم بعدد الكرات الحمراء المسحوبة.
ما هي مجموعة الإمكانيات المحصل عليها؟
2) نهتم بلون الكرات الثلاث المسحوبة دون إعتبار ترتيب الألوان.ما هي مجموعة الإمكانيات؟

قانون الاحتمال

12. يوجد في علبة عدد كبير من كرات تحمل الألوان: أصفر، أخضر، أسود. نقبل أن أحد القوانين التالية صادق.

اللون x_i	أصفر	أخضر	أسود
القانون 1: p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
القانون 2: p_i	$0,3$	$0,6$	$0,1$
القانون 3: p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

ننجز محاكاة ذات 5000 سحب، نتحصل على جدول التكرارات التالي:

اللون x_i	أصفر	أخضر	أسود
التكرارت	1660	2499	841

ما هو قانون الاحتمال الذي يمكن اختياره لارتكاب أقل خطأ ممكن؟ علّل.

13. تحتوي علبة على 20 كرة حمراء و 15 كرة بيضاء و 13 كرة صفراء.
نسحب كرة واحدة بصفة عشوائية.
1. احسب احتمال كلّ من الحوادث التالية:
أ) الكرة المسحوبة حمراء.
ب) الكرة المسحوبة بيضاء.
جـ) لكرة المسحوبة صفراء..

2. ما هو الاحتمال ألاّ تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟

14. نرمي زهر نرد غير مزيف.
ما هو الاحتمال أن يكون الرقم المحصل عليه:
1) قاسما للعدد 12 ؟
2) قاسما للعدد 15 ؟

15. تحتوي تجربة عشوائية على 12 حادثة بسيطة متساوية الاحتمال و نرمز إليها بـ x_1، x_2، x_3، ...، x_{12}.

احسب احتمال كلّ من:
1) حادثة بسيطة.
2) الحادثة $\{x_1;x_2;x_3\}$.
3) الحادثة $\{x_1;x_4;x_5;x_7;x_9\}$.
4) الحادثة $\{x_1;x_2;x_3\}\cup\{x_1;x_4;x_5;x_7;x_9\}$.
5) الحادثة $\{x_1;x_2;x_3\}\cap\{x_1;x_4;x_5;x_7;x_9\}$.

16. نعتبر زهر نرد مزيفا حيث:
$p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=\frac{1}{8}$.
($p(i)$ هو احتمال ظهور الوجه ذي الرقم i).
احسب $p(6)$.

17. نعتبر مجموعة الإمكانيات $\Omega=\{a;b;c;d\}$ وقانون الاحتمال p المعرف على Ω.
نعلم أن $p(\{a\})=0,23$، $p(\{b\})=0,15$، $p(\{c\})=0,4$.
احسب كلا من:
أ) $p(\{d\})$ ؛ ب) $p(\{a;c\})$ ؛ جـ) $p(\overline{\{c\}})$.

18. نعتبر $\Omega=\{a;b;c;d\}$ وقانون الاحتمال p المعرّف على Ω.
نعلم أن $p(\{a\})=\frac{1}{3}$، $p(\{b\})=\frac{1}{4}$، $p(\{c\})=\frac{1}{6}$.
احسب كلا من:
أ) $p(\{d\})$ ؛ ب) $p(\{b;c;d\})$ ؛ جـ) $p(\overline{\{a;c\}})$

19. نعتبر زهر نرد مزيفا حيث:
$p(1)=p(2)=p(3)=k$، $p(4)=p(5)=0,1$، $p(6)=0,2$
($p(i)$ هو احتمال ظهور الوجه ذي الرقم i).
1) احسب k.
2) احسب احتمال ظهور رقم فردي.
3) استنتج احتمال ظهور رقم زوجي.

20. نعتبر زهر نرد مزيفا حيث:

$p(1)=p(5)=k$

و $p(2)=p(3)=p(4)=0,14$

و $p(6)=0,06$.

1) احسب k.

2) احسب احتمال ظهور مضاعف للعدد 2.

في أي مجال يوجد كل من الأعداد $p(1)$ ، $p(2)$ ، $p(3)$ ؟

21. ليكن قانون الاحتمال p المعرف على Ω.

نعتبر حادثتين غير متلائمتين A و B حيث:

$p(A)=0,23$ و $p(B)=0,38$.

1) احسب $p(\overline{A})$ و $p(\overline{B})$.

2) عين $p(A\cap B)$ و $p(A\cup B)$.

22. ليكن قانون الاحتمال p المعرف على Ω.

نعتبر حادثتين A و B حيث:

$p(A)=0,65$ و $p(B)=0,48$.

هل يمكن أن تكون A و B غير متلائمتين؟ علل.

23. نرمي قطعة نقدية 3 مرات على التوالي.

نعتبر الحادثتين A و B المعرفتين كما يلي:

A : " نحصل على الظهر مرة واحدة على الأقل".

B : " نحصل على الوجه مرتين على الأقل".

هل الحادثتان A و B غير متلائمتين؟ علل.

24. نعتبر حادثتين A و B حيث:

$p(A\cup B)=0,78$ و $p(B)=0,54$

و $p(A\cap B)=0,235$.

احسب $p(A)$.

25. نعتبر حادثتين A و B حيث:

$p(A\cup B)=0,257$ و $p(A)=0,158$

و $p(A\cap B)=0,125$.

احسب $p(\overline{B})$.

26. نرمي زهر نرد ونسمي A الحادثة:

" الحصول على رقم زوجي" و B الحادثة:

" الحصول على مضاعف للعدد 3".

احسب احتمال الحادثة " A أو B ".

27. نرمي زهر نرد مزيفا . نعلم أن احتمال الحصول على رقم فردي يساوي $\frac{1}{10}$.

28. تتوزع أعمار تلاميذ قسم كما يلي:

% 24تبلغ أعمارهم16سنة،% 31 تبلغ أعمارهم17 سنة %30 تبلغ أعمارهم 18 سنة، %15 تبلغ أعمارهم 19 سنة..

نختار تلميذا بصفة عشوائية.

احسب احتمال كل من الحادثتين التاليتين:

A : " التلميذالمختارله 17 سنة على الأقل".

B : "عمر التلميذالمختاراكبر تماما من 17 سنة ".

29. علبةفيها قريصات، الربع منها بيضاء والثلث سوداء و الباقي حمراء.

نسحب قريصة واحدة بصفة عشوائية.

احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A : " القريصة بيضاء".

B : " القريصة سوداء ".

C: " القريصة حمراء ".

30. يحتوي قسم على 36 تلميذا. يسأل الأستاذ أحد التلاميذ بصفة عشوائية. إذا كان الاحتمال أن يكون هذا التلميذ ذكرا يساوي $\frac{4}{9}$، فما هو عدد الذكور في القسم؟

31. تصنع آلة قطعا حديدية دائرية الشكل حيث القطر النظري لكل منها يساوي $10\ cm$.

بعد سحب 1000 قطعة بصفة عشوائية ومراقبة أقطارها الحقيقية سجلت النتائج في الجدول التالي:

القطر	$[9,95;10[$	$[10;10,02[$	$[10,02;10,05[$
التكرار	200	640	160

نأخذ قطعة بصفة عشوائية.

احسب احتمال كل من الحادثتين:

A : " قطر القطعة أكبر أو يساوي 10,02 cm".

الاحتمالات والجداول

32. يمثل الجدول التالي نتائج المترشحين في امتحان البكالوريا في ثانوية:

	ذكور	إناث
ناجح	104	78
راسب	38	20

1. نصادف أحد المترشحين.
ما هو الاحتمال أن يكون هذا التلميذ:
أ) ذكرا ناجحا؟
ب) أنثى؟
ج) راسبا؟

2. نصادف أحد المترشحين الذكور.
ما هو الاحتمال أن يكون هذا المترشح ناجحا.
قارن هذه النتيجة مع نتيجة السؤال 1. أ).

3. نصادف أحد المترشحين الراسبين.
ما هو الاحتمال أن يكون هذا المترشح أنثى؟

33. % 25 من تلاميذ السنة الثانية أدب داخليون و% 35 نصف داخليين و % 40 خارجيون.
% 48 من تلاميذ السنة الثانية أدب ذكور ونصف عددهم في النظام نصف الداخلي و الثلث خارجي.
1. أنجز جدول التواتر لتوزيع تلاميذ السنة الثانية أدب.

2. نختار أحد التلاميذ بصفة عشوائية.
ما هو الاحتمال أن يكون هذا التلميذ.
أ) ذكرا؟
ب) ذكرا نصف داخلي؟
ج) أنثى خارجية؟

34. نعتبر زهري نرد أوجههما مرقمة كما يلي:
زهر النرد الأول: 1، 2، 2، 3، 4، 4.
زهر النرد الثاني: 1، 3، 4، 5، 6، 8.
نرمي زهري النرد و نسجل مجموع الرقمين x المحصل عليه.
نفرض أن كل الأوجه لها نفس احتمال الظهور.
1) اتمم الجدول التالي بتدوين قيمة x في كل خانة.

B : " قطر القطعة أكبر أو يساوي $10\ cm$".

زهر 2 \ زهر 1	1	2	2	3	4	4
1						
3						
4						
5						
6						
8						

2) أعط كل قيم المجموع x ثم احسب احتمال الحصول على كل منها.
3) ما هو احتمال الحصول على مجموع فردي؟

35. يمثل الجدول التالي توزيع 1000 شخص حسب الزمرة الدموية والمعامل Rh (rhésus).

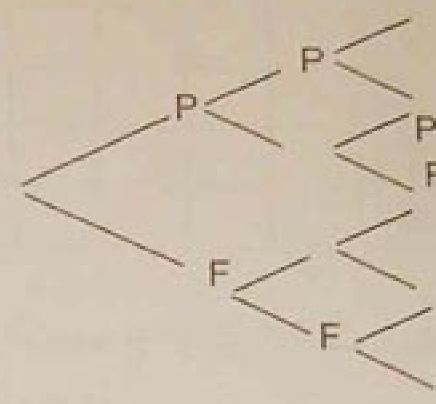
المعامل Rh \ الزمرة الدموية	A	B	AB	O
Rh +	328	81	42	360
Rh -	72	19	8	90

نسأل أحد الأشخاص بصفة عشوائية.
1) ما هو الاحتمال أن يكون من الزمرة O ؟
2) ما هو الاحتمال أن يكون من المعامل - Rh ؟
3) نعلم أن شخصا معينا من الزمرة O. ما هو الاحتمال أن يكون من المعامل - Rh ؟
4) نعلم أن شخصا معينا من المعامل - Rh. ما هو الاحتمال أن يكون من الزمرة O؟

36. نعتبر المجموعة $\Omega = \{1,2,3\}$.
1. باستعمال شجرة، اكتب كلّ الأعداد المتكونة من 3 أرقام من Ω دون تكرار أي رقم من هذه الأرقام.
2. نختار أحد هذه الأعداد ذات 3 أرقام بصفة عشوائية. ما هو الاحتمال أن يكون العدد:
أ) زوجيا؟
ب) مضاعفا للعدد 3؟
ج) مضاعفا للعدد 6؟

الاحتمالات والأشجار

37. نرمي قطعة نقدية 3 مرات على التوالي و نرمز بالحرف F للوجه وبالحرف P للظهر.
1) أتمم الشجرة التالية للحصول على كل النتائج الممكنة.



احسب احتمال كل من الحوادث التالية:
A : " الحصول 3 مرات على الظهر".
B : " الحصول مرة واحدة على الأكثر على الظهر ".
C : " الحصول مرة واحدة على الأقل على الظهر ".

38. تحتوي علبة على 5 كرات ، اثنتان حمراوان ، واحدة صفراء، واحدة خضراء وواحدة سوداء.
1. نسحب كرة واحدة من العلبة بصفة عشوائية.
أ) احسب احتمال الحصول على كرة صفراء.
ب) احسب احتمال الحصول على كرة حمراء.

2. نسحب كرة واحدة من العلبة بصفة عشوائية ونسجل لونها ثم نرجعها إلى العلبة.نسحب كرة ثانية ونسجل لونها.
أنجز شجرة مبينا فيه كل الإمكانيات.

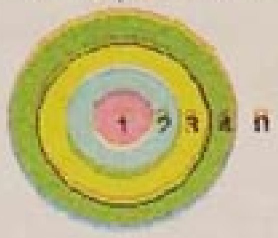
3. أ) ما هو عدد إمكانيات هذه التجربة؟
ب) ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون؟

39. تحتوي علبة على 4 كرات: واحدة صفراء نرمز إليها بـ J_1 و 3 خضراء نرمز إليها بـ V_1، V_2، V_3. وتحتوي علبة ثانية على كرتين: إحداهما صفراء نرمز إليها بـ J'، والثانية خضراء نرمز إليها بـ V'.

نسحب، بصفة عشوائية، كرة من العلبة الأولى ثم كرة من العلبة الثانية.
1. مثل هذه التجربة بشجرة.
2. أ) ما هو عدد إمكانيات السحب المختلفة؟
ب) اكتب كل إمكانيات الحادثة:" الكرتان خضراوان".
3. احسب احتمال كل من الحوادث التالية:
أ) A : " الكرتان من لونين مختلفين".
ب) B : " الكرة الأولى صفراء ".

مسائل

40. تتكون الدرينة من 4 مناطق دائرية متمركزة ومرقمة من 1 إلى 4.
أنصاف قطر هذه المناطق هي $5cm$، $10cm$، $15cm$، $20cm$.
نسمي p_i احتمال إصابة المنطقة ذات الرقم i
ونسمي p_0 احتمال عدم إصابة الدرينة



نفرض أن احتمال إصابة إحدى المناطق متناسبة مع مساحة هذه المنطقة و $p_1 = 0,02$.

1) أوجد قانون الاحتمال على المجموعة $\Omega = \{0;1;2;3;4\}$.
2) عين احتمال كل من الحادثتين التاليتين:
A : " إصابة الدرينة في نقطة تبعد بأكثر من $5cm$ عن مركز هذه الدرينة ".
B : " إصابة الدرينة في نقطة تبعد بأقل من $15cm$ عن مركز هذه الدرينة ".

41. يمثل الجدول التالي توزيع 400 عامل مؤسسة اقتصادية حسب الجنس والمرتب الشهري (بالدنانير).

	رجال	نساء
$[8000;12000[$	120	80
$[12000;16000[$	80	45
$[16000;20000[$	40	10
$[20000;24000[$	20	5

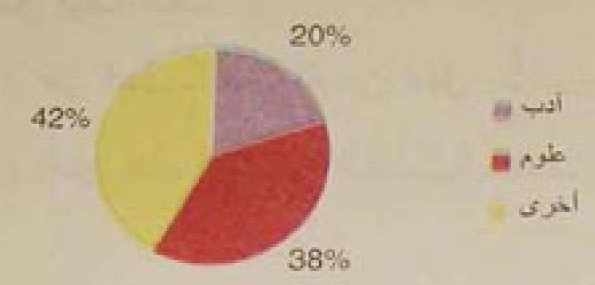
1. احسب كلا من:
أ) المرتب الشهري الأوسط للرجال.
ب) المرتب الشهري الأوسط للنساء.
ج) المرتب الشهري الأوسط لمجموعة العمال.

2. نختار أحد عمال المؤسسة بصفة عشوائية. كل الاختيارات متساوية الاحتمال.
احسب احتمال كل من الحوادث التالية:
A : " هذا العامل هو رجل ".
B : " هذا العامل يتقاضى مرتبا شهريا محصورا بين 16 000 و 20 000 دينار.
C : " هذا العامل هو رجل ويتقاضى مرتبا شهريا محصورا بين 20 000 و 24 000 دينار".

42. تحتوي علبة على 4 كرات: اثنتان حمراوان، واحدة خضراء وواحدة صفراء. نسحب كرة واحدة من العلبة بصفة عشوائية ونسجل لونها ثم نرجعها إلى العلبة ونسحب كرة أخرى ونسجل لونها.
1. أ) أرسم شجرة موافقة لهذه التجربة.
ب) نعتبر الحادثة A : " الكرتان المسحوبتان حمراوان " والحادثة B : " إحدى الكرتين المسحوبتين حمراء ".
باستعمال الشجرة احسب الاحتمالين $p(A)$ و $p(B)$.
ج) عبر بجملة عن الحادثة C حيث $C = A \cup B$.
احسب الاحتمال $p(C)$.
د) باستعمال الاحتمال $p(C)$، احسب الاحتمال $p(E)$ حيث E هي الحادثة: " لا توجد أية كرة حمراء من بين الكرتين المسحوبتين ".

2. كلّ من الكرتين الحمراوين تحمل الرقم 1 والكرة الخضراء تحمل الرقم 2 والكرة الصفراء تحمل الرقم 4.
نهتم في هذه المرة بالرقمين المحصل عليهما عند سحب كرتين و نرمز بـ x إلى مجموع هذين الرقمين.
ما هو الاحتمال أن يكون المجموع x أكبر أو يساوي 4؟

43. يمثل المخطط الدائري التالي توزيع الكتب في مكتبة.



عند إعداد بطاقة لكلّ كتاب، لاحظ المكتبي ما يلي:
- 80 % من الكتب العلمية هي كتب مدرسية.
- 70 % من الكتب الأدبية ليست مدرسية.
- 50 % من الكتب الأخرى ليست مدرسية.

يأخذ المكتبي بطاقة بصفة عشوائية من ملفه.ما هو الاحتمال أن تكون هذه البطاقة موافقة لـ:
1) كتاب علمي مدرسي؟
2) كتاب مدرسي؟
3) كتاب أدبي مدرسي؟

44. نعتبر المجموعة $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
α، β عنصران من Ω.
1. أ) أوجد حلي المعادلة:
$$(\alpha x-2)(\beta x-4)=0$$
ب) ما هي قيم العددين α، β من Ω التي من أجلها يكون حلا المعادلة السابقة عددين صحيحين طبيعيين؟
2. نرمي زهري نرد أحدهما أسود والأخر احمر. نعطي للعدد α قيمة وجه زهر النرد الأسود وللعدد β قيمة وجه زهر النرد الأحمر.
أ) ما هو الاحتمال أن تقبل المعادلة $(\alpha x-2)(\beta x-4)=0$ المرفقة بهذا الرمي حلين صحيحين طبيعيين؟
ب) استنتج الاحتمال أن يكون احد الحلين على الأقل عددا غير صحيح.

45. a، b، c أعداد من المجال $[0,1]$ حيث تمثل الحدود الثلاثة الأولى لمتتالية حسابية.
نعتبر زهر نرد مزيفا بحيث $p(1)=p(2)=a$، $p(3)=p(4)=b$، $p(5)=p(6)=c$.
($p(i)$ هو احتمال ظهور الوجه ذي الرقم i).

1. أ) بين أن: $\begin{cases} a+c=2b \\ a+b+c=\frac{1}{2} \end{cases}$

ب) استنتج قيمة العدد b.

2. احسب c من أجل $a=\frac{1}{5}$ ثم من أجل $a=\frac{1}{10}$.

3. ماذا نقول عن هذه المتتالية الحسابية عندما $a=\frac{1}{6}$؟

46. نرمي 3 أزهار نرد متوازنة ومن ألوان مختلفة (أسود، أخضر، أحمر) و أوجهها مرقمة من 1 إلى 4. نهتم بمجموع الأرقام المحصل عليها.

باستعمال مجدول، أنجز محاكاة ذات 1000 رمية ثم محاكاة ثانية ذات 5 000 رمية.

اتمم الجدولين التاليين اللذين يمثلان توزيع المجاميع المحصل عليها بعد 1000 رمية وبعد 5000 رمية:

المجموع	التكرار
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
التكرار الكلي: 5 000	

المجموع	التكرار
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
التكرار الكلي: 1 000	

2. ما هو المجموع الذي يبدو المحتمل أكبر حسب الجدولين السابقين؟

3. أ) ما هو عدد الثلاثيات الممكنة عند رمي 3 أزهار النرد؟

(نعتبر النرد الأسود ثم الأخضر ثم الأحمر).

ب) باستعمال شجرة، عين عدد الثلاثيات $(a;b;c)$ حيث $a+b+c=10$.

استنتج احتمال الحصول على المجموع 10.

ج) احسب بنفس الطريقة احتمال الحصول على كل من المجموعين 11 و 12.

د) استنتج المجموع الذي يحتمل الحصول عليه أكثر عند رمي 3 أزهار نرد.

47. تحتوي ثانوية على 80 موظفا موزعين في 3 فئات : مرسم، متربص، مستخلف، كما يلي:

- 40% من الموظفين رجال.
- 75% من الرجال مرسمون.
- يحتوي صنف المتربصين على 20% من موظفي الثانوية منهم 6 رجال.
- يحتوي صنف المستخلفين على نفس عدد الرجال والنساء.

1. اتمم الجدول التالي اعتمادا على المعطيات السابقة.

	المجموع	مستخلف	متربص	مرسم
رجال				
نساء				
المجموع	80			

2. نسحب اسم أحد الموظفين بصفة عشوائية.

نعتبر الحوادث التالية:

A : " الشخص امرأة" ؛ B : " الشخص مرسم ".

C : " الشخص امرأة مرسمة".

احسب الاحتمالات $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(C)$ ، $p(A\cup B)$.

3. نسحب اسم موظف من كل فئة من الفئات الثلاث بصفة عشوائية. يمكن كتابة نتيجة هذا السحب في شكل ثلاثية $(x;y;z)$ حيث x هو موظف مرسم ، y هو موظف متربص، z هو موظف مستخلف.

أ) ما هو عدد الثلاثيات الممكنة؟

ب) نقبل أن كل النتائج متساوية الاحتمال.

احسب احتمال كل من الحادثتين:

D : " نحصل على 3 رجال".

E : " نحصل على امرأة واحدة على الأقل".