الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الرياضيات

السنة الأولى من التعليم الثانوي

جذع مشترك آداب

المؤلفون :

وحسن أوديع — مفتش التربية والتكوين

رابح بناني — مفتش التربية والتكوين

عبد الله جلواح — مفتش التربية والتعليم الأساسي

صالح كايس — أستاذ التعليم الثانوي

رسومات :

زهية يونسي – شمول

خالد بلعيد

كريم حموم

تصميم وتركيب :

عائشة حمزاوي

فهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

مدخل

هذا الكتاب موجه لتلاميذ السنة الأولى من التعليم الثانوي - جذع مشترك آداب - أُعدّ وفق البرنامج الرسمي لوزارة التربية الوطنية المقرّر تطبيقه إبتداءا من الدخول المدرسي 2005 - 2006 .

إن هيكلة الكتاب ومضامينه تستجيب للمقاربة بالكفاءات المعتمدة من طرف وزارة التربية الوطنية والتي تندرج أساسا في إطار إصلاح المنظومة التربوية .

يعتبر هذا الإختيار البيداغوجي والتعليمي قرارًا له أهمية بالغة ، كونه يضع المتعلّم في مركز إهتمامات الفعل التربوي وبذلك يمنح له الفرصة للمشاركة بصفة فعلية في بناء معارفه وفي امتلاك الطرائق ، وهي العناصر التي تضمن له إكتساب الكفاءات المستهدفة في البرنامج .

إن المضامين المقرّرة للتّعلم وزعت على ثمانية أبواب ، يتضمن كل باب الأجزاء التالية :

- نبذة تاريخية تعالج وتهتم ببعض المفاهيم الرياضياتية ،
- إستبيان متعدّد الإجابات
- أنشطة تمهيدية
- معارف
- طرائق
- تمارين ومسائل

أدرجت في آخر الكتاب بعض الدساتير الأساسية ، يمكن الرجوع إليها عند الحاجة .

يستعمل التلميذ هذا الكتاب في مختلف مراحل التّعلم سواء تعلّق الأمر بمواجهة الوضعيات أثناء الدرس أو خارج القسم للمراجعة وإعداد الواجبات . أما بالنسبة إلى الأستاذ ، فيكون استعماله أثناء إعداد حصص التعليم - التّعلم .

نأمل أن نكون قد وفّرنا للمتعلّم وسيلة تعليمية تتناسب مع ملمحه وتحفّزه على العمل بنشاط .

المؤلفون

عرض البرنامج

الأعداد والحساب

المحتوى التعلمي	الكفاءات المستهدفة
الأعداد	• معرفة مختلف مجموعات الأعداد واستعمال الترميز $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{D}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$. • التعرف على أولية عدد . • تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية . • حساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين . • إنجاز حسابات على القوى . • إنجاز حسابات على الجدور التربيعية . • تعيين قيمة مقربة أو مدور أو رتبة مقدار لعدد حقيقي . • تنظيم وإجراء حساب على أعداد ناطقة أو حقيقية باليد وبالحاسبة .
الترتيب والقيمة المطلقة	• مقارنة عددين حقيقيين . • حصر عدد حقيقي . • التعبير عن مجال بحصر ، والعكس . • حساب المسافة بين عددين . • حساب القيمة المطلقة لعدد حقيقي . • استغلال مفهوم القيمة المطلقة للتعبير عن مجال .
المعادلات والمتراجحات	• حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد . • حل متراجحات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد .

الــدوال

المحتوى التعلمي	الكفاءات المستهدفة
مفهوم الدالة	• تعريف مفهوم الدالة . • تعيين مجموعة التعريف لدالة . • تعريف التمثيل البياني لدالة . • تعريف دالة بواسطة منحن . • تعريف دالة بواسطة جدول قيم . • تعريف دالة بواسطة دستور . • تعيين صورة عدد أو سابقة عدد وفق دالة معرّفة بواسطة دستور أو جدول أو منحن .
اتجاه تغير دالة على مجال	• وصف سلوك دالة معرّفة بمنحن أو دستور أو جدول قيم ، باستعمال تعبير رياضي مناسب . • استنتاج جدول تغيرات دالة انطلاقا من تمثيلها البياني ، والعكس . • إرفاق جدول تغيرات دالة معطى بتمثيل بياني .
القيم الحدية لدالة على مجال	• التعرف على القيم الحدية لدالة على مجال .
الدراسة والتمثيل البياني لدوال مرجعية	• دراسة الدوال المرجعية : $x \longmapsto ax$ ، $x \longmapsto ax+b$ ، $x \longmapsto x^2$ ، $x \longmapsto \frac{1}{x}$ وتمثيلها بيانيا .

الإحصـــاء

المحتوى التعلمي	الكفاءات المستهدفة
الميزة الإحصائية	• التمييز بين الميزتين الإحصائيتين : الكمية والنوعية . • التمييز بين المتغيرين الإحصائيين : المنقطع والمستمر .
السلاسل الإحصائية	• تحديد السلسلة الإحصائية موضع الدراسة .
التمثيلات البيانية	• إنجاز التمثيلات البيانية التالية : مخطط بالأعمدة ، مضلع تكراري ، مخطط دائري ، مدرج تكراري .
مؤشرات الموقع	• تعيين الوسط الحسابي ، المنوال والوسيط في الحالتين : المتغير المنقطع والمتغير المستمر .

الهندســة

المحتوى التعلمي	الكفاءات المستهدفة
المعلم في المستوي	• التعرف على أنواع المعالم . • التعرف على إحداثيي نقطة . • التعرف على إحداثيي شعاع . • حساب إحداثيي مجموع شعاعين . • حساب إحداثيي جداء شعاع بعدد حقيقي . • التعرف على توازي شعاعين .
معادلة مستقيم	• كتابة معادلة لمستقيم معرّف بنقطة ومنحى أو معرّف بنقطتين . • تعيين شعاع توجيه لمستقيم . • حساب معامل توجيه مستقيم . • التعرف على توازي مستقيمين . • رسم مستقيم بمعرفة معادلة له .

تقديـم الكتـاب

أُنجز هذا الكتاب وفق البرنامج الرسمي للسنة الأولى من التعليم الثانوي (الجذع المشترك آداب) المقرّر تطبيقه ابتداء من السنة الدراسية 2005 / 2006 .

إن هيكلة الكتاب تُسَهِّلُ العمل به ، وتسمح بتعلّم أحسن في مختلف ميادين المادة . حاولنا تقديم معارف رياضياتية وطرائق يمكّن اكتسابها من تجاوز الصعوبات التي تواجه المتعلّم .

حتى يكون استعمال الكتاب وجيها ، فمن الضروري فهم هيكلته .

الباب 1

يقدم في هذه الصفحة عنوان الباب والعناصر المعالجة فيه ، كما تعرض نبذة تاريخية حول تطوّر بعض المفاهيم الرياضياتية .

استبيان

يهدف الاستبيان المتعدّد الإجابات الى التقويم التّشخيصي لمكتسبات المتعلّم قبل الشروع في التعلّم الجديد ، وهذا ما يضمن له سيرورة تعلّم مناسبة .

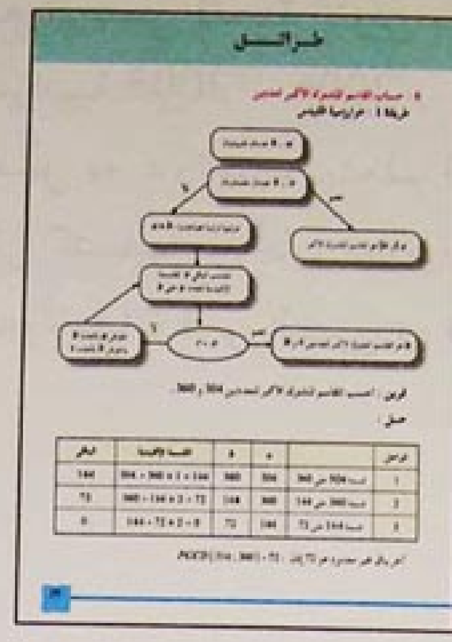
أنشطة تمهيدية

تسمح الأنشطة التمهيدية المقترحة بمعالجة بعض الوضعيات التي تهدف إلى مقاربة المفاهيم والطرائق المقرّرة للتّعلم .

معارف

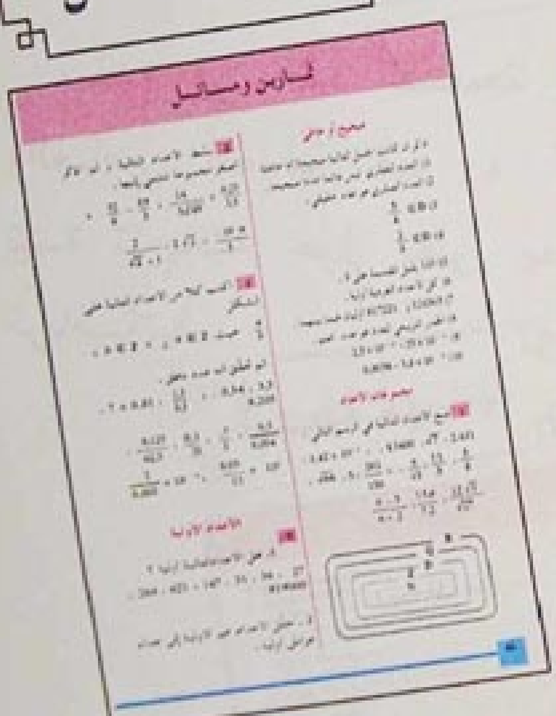
تقدم في هذا الجزء المعارف (تعاريف ، خواص ، ...) بصفة وجيزة وواضحة ، مدعّمة بأمثلة متنوّعة

طرائق



تقترح في هذا الجزء بعض الطرائق لتوظيف المعارف وتوضح بتمارين محلولة بصفة منهجية ومفصلة .

تمارين و مسائل



تمارين و مسائل

يقترح في بداية هذا الجزء نشاط « صحيح أو خطأ » يهدف إلى تقويم أكتساب التلميذ إلى المعارف الأساسية من خلال أسئلة بسيطة وقصيرة . وزعت التمارين التطبيقية حسب موقعها من الدرس ، فهي تسمح بتوظيف المكتسبات وتدعيمها .

بالنسبة إلى المسائل ، فإن الوضعيات المقترحة ثرية ومتنوعة ، فهي تسمح للتلميذ بإثبات تحكّمه في المفاهيم والطرائق وتوظيفها في وضعيات مركّبة وإدماجية .

الباب 1

الأعداد والحساب العددي

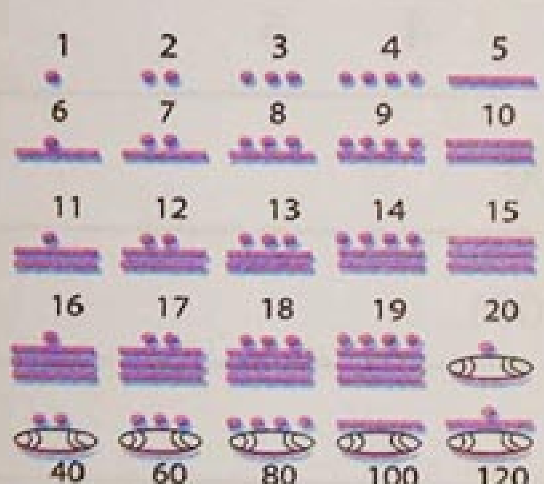
1 • مجموعات الأعداد

2 • الأعداد الأولية

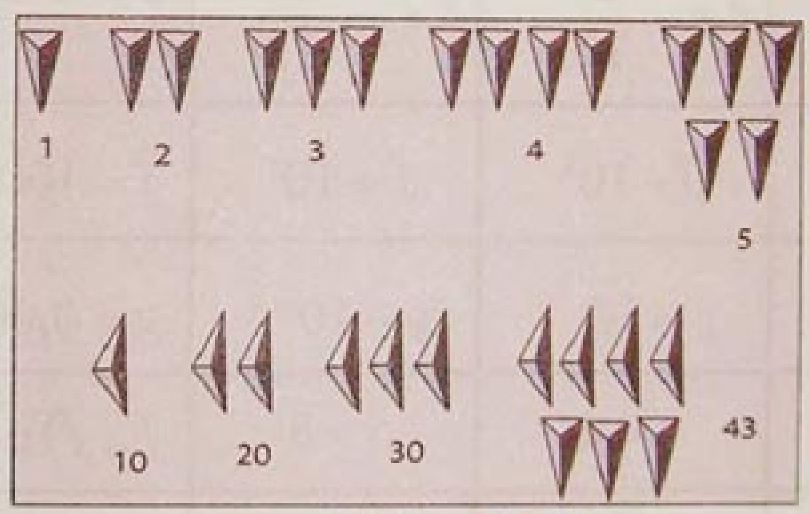
3 • القوى الصحيحة

4 • الجذور التربيعية

5 • القيم المقربة

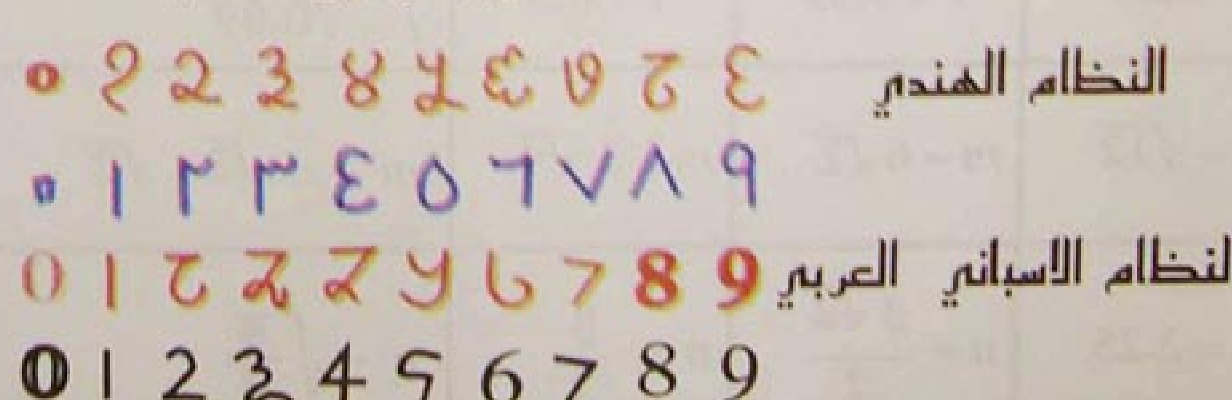


نظام التعداد للمايا



النظام البابلي

تطوير الرموز العددية



استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة

	السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1	$a=-2+(4-7)-(3-4)+5-6$	$a=-5$	$a=5$	$a=6$
2	$b=1-[\,2+3-(4-5)-6-7]+8$	$b=-10$	$b=-16$	$b=16$
3	$c=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$	$c=\frac{3}{10}$	$c=-\frac{31}{30}$	$c=\frac{31}{30}$
4	$d=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$	$d=-\frac{1}{2}$	$d=\frac{1}{2}$	$d=-1$
5	$e=-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$	$e=-\frac{23}{12}$	$e=-\frac{9}{13}$	$e=-\frac{9}{12}$
6	$f=10000$	$f=10^5$	$f=10^3$	$f=10^4$
7	$g=0{,}00001$	$g=10^{-4}$	$g=10^{-5}$	$g=10^{-6}$
8	$i=\sqrt{16}$	$i=8$	$i=4$	$i=-4$
9	$j=(\sqrt{5})^2$	$j=\sqrt{10}$	$j=5$	$j=2$
10	$k=\sqrt{2}+\sqrt{5}$	$k=\sqrt{7}$	لا أستطيع	/
11	$l=\sqrt{0{,}09}$	$l=0{,}3$	$l=0{,}03$	$l=-0{,}3$
12	$m=5\sqrt{2}+\sqrt{2}$	$m=5\sqrt{4}$	$m=6\sqrt{2}$	$m=\sqrt{12}$
13	$n=\sqrt{\frac{9}{2}}$	$n=\frac{3}{2}$	$n=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$n=2{,}25$

❖ نشاط 1 : مجموعات الأعداد

1. تعتبر المعادلة $x + 10 = 7$
- هل تقبل هذه المعادلة حلا في مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية ؟
- ما هي طبيعة العدد الذي هو حل المعادلة ؟

2. حل المعادلة $5x + 8 = -4$
- هل الحل عدد صحيح نسبي ؟
- ما هي طبيعة هذا العدد ؟
- هل يمكن كتابته على الشكل العشري (بالفاصلة) ؟

3. ABC مثلث قائم في A حيث $AB = 1$ وَ $AC = 2$.
- احسب الطول BC .
- هل العدد الناتج عدد ناطق ؟
- كيف نسمي هذا العدد ؟

❖ نشاط 2 : قواسم عدد – الأعداد الأولية

1 – إبحث عن الطرق الممكنة لكتابة العدد 36 على شكل جداء عاملين صحيحين طبيعيين يمكن تسجيل النتائج في جدول مثل :

1	36

$36 = 1 \times 36$

$36 = \ldots \times \ldots$

$36 = \ldots \times \ldots$

$36 = \ldots \times \ldots$

$36 = \ldots \times \ldots$

استنتج قائمة قواسم العدد 36 .
- عيّن ، بنفس الطريقة ، قواسم العدد 60 .

2 – عيّن بنفس الطريقة قواسم كل من الأعداد 17، 29 ، 37 .
ماذا تلاحظ ؟

❖ نشاط 3 : القاسم المشترك الأكبر

يريد بائع زجاج تقطيع صفيحة من الزجاج طولها 110 cm وعرضها 88 cm حيث تكون كل القطع مربعة الشكل ومتساوية وأكبر ما يمكن مساحة ، وبدون تضييع الزجاج .
ساعده على حساب طول ضلع كل قطعة .

1 - مجموعات الأعداد

أ - الأعداد الصحيحة الطبيعية

الأعداد 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ ... تسمى أعدادا صحيحة طبيعية .

نرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية بالحرف $\mathbb{N}$ ونكتب $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ..\}$.

أمثلة :

2 عدد صحيح طبيعي . نكتب $2 \in \mathbb{N}$ و نقرأ " 2 ينتمي إلى $\mathbb{N}$ " .

2 - ليس عددا صحيحا طبيعيا . نكتب $-2 \notin \mathbb{N}$ ونقرأ " 2 - لا ينتمي إلى $\mathbb{N}$ " .

ملاحظات :

- العدد الطبيعي نعني به العدد الصحيح الطبيعي .
- 0 هو أصغر عدد طبيعي .
- $\mathbb{N}$ هي مجموعة غير منتهية .

ب - الأعداد الصحيحة النسبية

الأعداد ... ؛ 3 - ؛ 2 - ؛ 1 - ؛ 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ ... تسمى أعدادا صحيحة نسبية .

نرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية بالحرف $\mathbb{Z}$.

ونكتب $\mathbb{Z} = \{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...\}$

أمثلة :

$-2 \in \mathbb{Z}$ ، $2 \in \mathbb{Z}$ ، $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ ، $5,3 \notin \mathbb{Z}$.

ملاحظة :

- كل عدد طبيعي هو عدد صحيح نسبي . نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

ونقرأ " $\mathbb{N}$ **محتواة في** $\mathbb{Z}$ " أو " $\mathbb{N}$ **جزء من** $\mathbb{Z}$ " .

$\mathbb{N}$ هو الحرف الأول للكلمة اللاتينية **Naturel** التي تعني "طبيعي" .

$\mathbb{Z}$ هو الحرف الأول للكلمة الألمانية **Zahl** التي تعني " عدد " .

جـ - الأعداد الناطقة

تعريف

نسمي عددا ناطقا كل عدد يكتب على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان نسبيان وَ b غير معدوم .

نرمز إلى مجموعة الأعداد الناطقة بالحرف $\mathbb{Q}$.

أمثلة :

كل من الأعداد $\frac{3}{7}$ ؛ $\frac{4}{-9}$ ؛ $\frac{-4}{-5}$ ؛ 16 ؛ 13 - ؛ 9,2 هو عدد ناطق .

$\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا .

ملاحظات :

- كل عدد صحيح نسبي هو عدد ناطق . نكتب $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- كل عدد غير ناطق هو عدد **أصم** .

د. الأعداد العشرية

تعريف

نسمي عددا عشريا كل عدد ناطق يكتب على الشكل $\frac{a}{10^n}$ حيث a عدد صحيح نسبي و n عدد طبيعي .

نرمز إلى مجموعة الأعداد العشرية بالحرف $\mathbb{D}$.

أمثلة :

- $\frac{135}{10}$ عدد عشري .
- $-\frac{3}{4}$ عدد عشري لأن $-\frac{75}{100} = -\frac{3}{4}$.

$\mathbb{Q}$ هو الحرف الأول للكلمة اللاتينية **Quotient** التي تعني حاصل قسمة .

$\mathbb{D}$ هو الحرف الأول للكلمة اللاتينية **Decimal** التي تعني "عشري" .

• 7 عدد عشري لأن $\frac{7}{10^0} = \frac{7}{1} = 7$.

• $\frac{11}{3}$ ليس عددا عشريا لأنه لا يمكن كتابته على الشكل $\frac{a}{10^n}$.

ملاحظات :

• يمكن كتابة كل عدد عشري على شكل عدد بالفاصلة يتكون من جزء صحيح وجزء عشري منته .

أمثلة :

• $13,5 = \frac{135}{10}$.

• $-0,75 = -\frac{75}{100} = -\frac{3}{4}$.

• $\frac{71}{24} = 2,9583...$ إذن العدد $\frac{71}{24}$ ليس عشريا لأن جزءه العشري غير منته ، (أنظر طريقة أخرى للتعرف على عدد عشري في الطرائق) .

• كل عدد عشري هو عدد ناطق . نكتب : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

• كل عدد صحيح نسبي هو عدد عشري ، نكتب : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

هـ- الأعداد الحقيقية

تعريف

نسمي عددا حقيقيا كل عدد ناطق أو أصم .

نرمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية بالحرف $\mathbb{R}$.

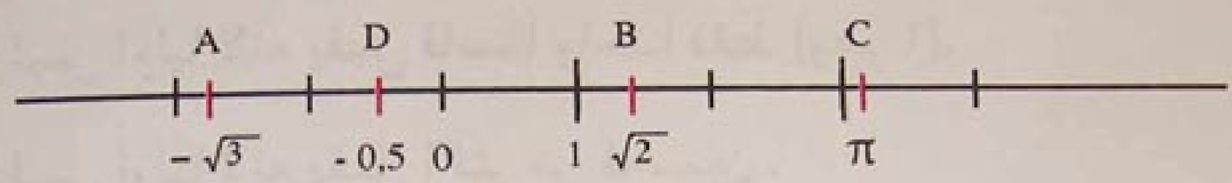
أمثلة :

• كل من الأعداد 7 ؛ 4 – ؛ 3,5 – ؛ $\frac{22}{7}$ ؛ $\sqrt{5}$ ؛ π هو عدد حقيقي.

$\mathbb{R}$ هو الحرف الأول للكلمة اللاتينية Réel التي تعني « حقيقي » .

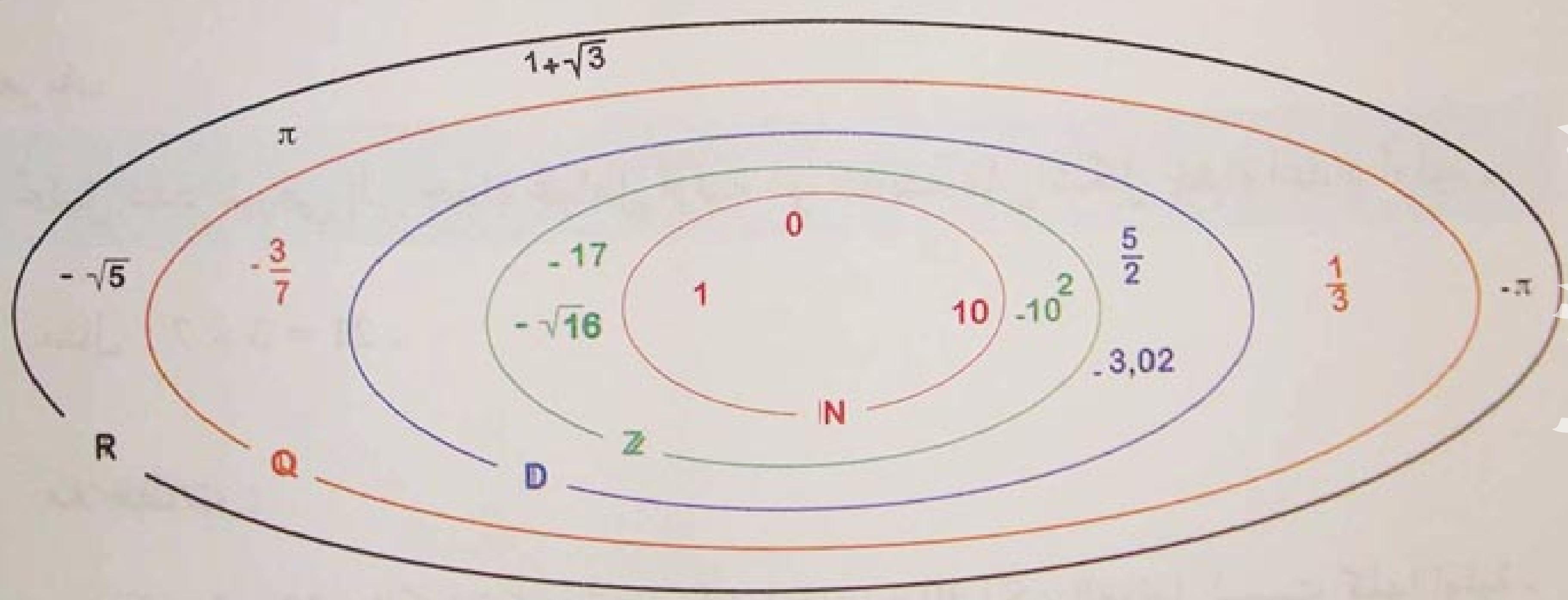
ملاحظات :

- تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية بمستقيم مدرّج (مزود بمعلم) يسمى "**المستقيم العددي** " أو " **المستقيم الحقيقي** " .



- كل نقطة من المستقيم الحقيقي تمثل عددا حقيقيا وحيدا يسمى **فاصلة** هذه النقطة .
- كل عدد ناطق هو عدد حقيقي. نكتب $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- مما سبق نستنتج أن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

تمثيل مجموعات الأعداد



2 – الأعداد الأولية

أ. تعريف

العدد الطبيعي p أولي إذا وفقط إذا قبل قاسمين مختلفين فقط ، هما 1 ونفسه .

أمثلة :

- كل من الأعداد 2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 7 هو عدد أولي .
- العدد 6 ليس أوليا لأنه يقبل أكثر من قاسمين (قواسم 6 هي 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 6) .
- العدد 1 ليس أوليا لأنه يقبل قاسما واحدا فقط (وهو 1).
- العدد 0 ليس أوليا لأنه يقبل أكثر من قاسمين .

ب. قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 100

2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 7 ؛ 11 ؛ 13 ؛ 17 ؛ 19 ؛ 23 ؛ 29 ؛ 31 ؛ 37 ؛ 41 ؛ 43 ؛ 47 ؛ 53 ؛ 59 ؛ 61 ؛ 67 ؛ 71 ؛ 73 ؛ 79 ؛ 83 ؛ 89 ؛ 97 .

جـ. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

تعريف

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية هو كتابته على شكل جداء أعداد أولية .

مثال : $21 = 3 \times 7$.

ملاحظات :

- $6 \times 5 = 30$ ؛ الكتابة 6×5 هي تحليل للعدد 30 لكن العوامل ليست كلها أولية .
- في تحليل عدد إلى جداء عوامل أولية ، يمكن أن تكون بعض هذه العوامل متساوية في هذه الحالة نبسط الكتابة باستعمال القوى .

مثال : $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ؛ نكتب $72 = 2^3 \times 3^2$.

- كل عدد طبيعي غير أولي يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية .

3 - الحساب على القوى

أ. تعريف

• a عدد حقيقي و n عدد طبيعي أكبر من 1 . القوة من المرتبة n للعدد a ,
ونرمز لها a^n , هي العدد الحقيقي المعرف كما يلي :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ عاملا}}$$

• $a^1 = a$

• إذا كان a غير معدوم فإن $a^0 = 1$ و $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

أمثلة :

• $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

• $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$

• $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$.

• $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$.

ب . خواص

إذا كان a ، b عددين حقيقين غير معدومين و m ، n عددين صحيحين نسبيين فإن :

• $a^m \times a^n = a^{m+n}$

• $(a^m)^n = a^{m \times n}$

• $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

• $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

• $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$

• $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

أمثلة :

- $3^6 \times 3^{-4} = 3^{6-4} = 3^2$ • $(10^4)^3 = 10^{3\times4} = 10^{12}$
- $\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2$ • $(7\times9)^5 = 7^5 \times 9^5$
- $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10^3}$ • $\left(\frac{11}{10}\right)^8 = \frac{11^8}{10^8}$

ج. الكتابة العلمية لعدد عشري

تعريف

الكتابة العلمية لعدد عشري غير معدوم هي الكتابة من الشكل $a \times 10^n$ (أو من الشكل $-a \times 10^n$) حيث a عدد عشري و $1 \leq a < 10$ و n عدد صحيح نسبي .

أمثلة :

الكتابة العلمية	العدد
$8{,}3 \times 10^4$	83000
$-5{,}32714 \times 10^5$	-532714
$7{,}1 \times 10^{-2}$	0,071
$-1{,}3 \times 10^{-4}$	$-0{,}00013$
10^5 (يعني 1×10^5)	100000
10^{-5}	0,00001

د. النشر والتحليل

a ، b ، c أعداد حقيقية . حسب خواص الجمع والضرب في $\mathbb{R}$ ، لدينا :

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{و} \quad ab + ac = a(b+c)$$

- عندما ننتقل من الجداء $a(b+c)$ إلى المجموع $ab+ac$ نقول إننا نشرنا الجداء $a(b+c)$.
- عندما ننتقل من المجموع $ab+ac$ إلى الجداء $a(b+c)$ نقول إننا حلّلنا المجموع $ab+ac$.

أمثلة :

- $2x(x+4)=2x^2+8x$. المجموع $2x^2+8x$ هو نشر للجداء $2x(x+4)$
- $x(x-3)=x^2-3x$. الجداء $x(x-3)$ هو تحليل للمجموع x^2-3x.

هـ. المتطابقات الشهيرة

a ، b عددان حقيقيان

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

أمثلة :

- $(2x+3)^2=(2x)^2+2(2x)(3)+3^2=4x^2+12x+9$.
- $(x-4)^2=x^2-2(x)(4)+4^2=x^2-8x+16$.
- $(3x+5)(3x-5)=(3x)^2-5^2=9x^2-25$.

4 - الحساب على الجذور التربيعية

أ - تعريف

a عدد حقيقي موجب .

الجذر التربيعي للعدد a ، ويرمز له $\sqrt{a}$ ، هو العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a .

نكتب : $(\sqrt{a})^2=a$

أمثلة :

$\sqrt{81} = 9$ لأن $9^2 = 81$.

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ لأن $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

$\sqrt{0} = 0$ لأن $0^2 = 0$.

ملاحظة :

• كل عدد حقيقي سالب تماما ليس له جذر تربيعي . فالكتابة $\sqrt{x-1}$ لها معنى عندما يكون $x-1$ موجبا أي عندما يكون x أكبر أو يساوي 1 .

حذار

$(-3)^2 = 9$ لكن $\sqrt{9} \neq -3$.

ب. خواص

a ، b عددان حقيقيان موجبان .

• $\sqrt{a^2} = a$.

• $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

• $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (حيث b غير معدوم) .

أمثلة :

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \frac{7}{4}$.

ملاحظة :

حذار

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (حيث a , b عددان حقيقيان غير معدومين)

5 - القيم المقربة

أ. مفهوم القيمة المقربة

عند إجراء عملية القسمة للعدد 13 على 7 ثم 29 على 13 نحصل على النتائج التالية :

العدد	$\frac{13}{7}$	$\frac{29}{13}$
حاصل القسمة بالحاسبة	1,857142857	2,230769231
حاصل القسمة باليد	 1,85714285714	 2,23076923076

نسمي كلا من العددين الحقيقيين 1,857142857 و 1,85714285714 قيمة مقربة للعدد الحقيقي $\frac{13}{7}$.

ونسمي كلا من العددين الحقيقيين 2,230769231 و 2,23076923076 قيمة مقربة للعدد الحقيقي $\frac{29}{13}$.

ملاحظات :

- إن قسمة العدد 13 على 7 ليست تامة (أي لا تنتهي) .
- إذا تابعنا هذه القسمة ، نحصل على قيم مقربة أخرى للعدد $\frac{13}{7}$ وكذلك بالنسبة إلى العدد $\frac{29}{13}$.
- العدد العشري 1,857 هو قيمة مقربة أخرى للعدد $\frac{13}{7}$.
- يمكن الحصول على قيم مقربة أخرى للعدد $\frac{13}{7}$ بأخذ عدد معين من الأرقام بعد الفاصلة .

أمثلة :

- العدد 3,142857143 هي قيمة مقربة للعدد $\frac{22}{7}$ المحصل عليها بالحاسبة . عند إنجاز قسمة 22 على 7 باليد نحصل على ... 3,1428571428 مع الملاحظة أن هذه القسمة ليست تامة .

- العـدد 3,141592654 هـي قيمـة مقربـة للعـدد π المحصـل عليهـا بالحاسـبة .
ونحصل على 3,14159265359 باستعمال نوع آخر من الحاسبات .

نشير إلى أن العدد 3,14 هي القيمة المقربة الأكثر تداولا للعدد π .

ب . مفهوم مدور عدد

العدد	$\frac{48}{11} = 4,363663...$	$\pi = 3,141592...$	1,7586794
المدور إلى الوحدة	4	3	2
المدور إلى 10^{-2}	4,36	3,14	1,76
المدور إلى 10^{-3}	4,364	3,142	1,759

- مدور العدد π إلى الوحدة هو 3 لأن الرقم الذي يمثل الأعشار هو 1 وهو أصغر تماما من 5.
- مـدور العـدد 1,7586794 إلـى الوحـدة هـو 2 لأن الرقـم الـذي يمثل الأعشـار هو 7 وهو أكبر من 5 .
- مـدور $\frac{48}{11}$ إلـى 10^{-2} هـو 4,36 لأن الرقـم الـذي يمثل الجزء مـن الآلاف هو 3 وهو أصغر تماما من 5 .
- مـدور 1,7586794 إلـى 10^{-2} هـو 1,76 لأن الرقـم الـذي يمثـل الجـزء مـن لآلاف هو 8 وهو أكبر تماما من 5 .
- مدور العدد π إلى 10^{-3} هو 3,142 لأن الرقم الذي يمثل الجزء من عشرة آلاف هو 5 .

جـ . رتبة مقدار عدد عشري مكتوب على الشكل العلمي

تعريف

رتبة مقدار عدد عشري مكتوب على الشكل العلمي $a \times 10^n$ (أو $-a \times 10^n$) هو العدد $k \times 10^n$ أو ($-k \times 10^n$) حيث k هو المدور إلى الوحدة للعدد a .

أمثلة :

العدد	8326710	0,03567	-27567831
الكتابة العلمية	$8,32671 \times 10^{6}$	$3,567 \times 10^{-2}$	$-2,7567831 \times 10^{7}$
رتبة مقدار	8×10^{6}	4×10^{-2}	-3×10^{7}

1 - التعرف على طبيعة عدد

طريقة :

لإيجاد طبيعة عدد ، نبسطه ثم نبحث عن أصغر مجموعة ينتمي إليها هذا العدد .

تمرين : عيّن طبيعة كل من الأعداد التالية :

$$\frac{-\sqrt{36}}{2} \quad ; \quad \frac{\pi}{314} \quad ; \quad \frac{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)}{700}$$

حــل :

- $-3 = \frac{-6}{2} = \frac{-\sqrt{36}}{2}$ إذن $\frac{-\sqrt{36}}{2}$ عدد صحيح نسبي .

- لدينا π عدد أصم . إذن $\frac{\pi}{314}$ ليس عددا ناطقا . وبالتالي $\frac{\pi}{314}$ عدد أصم .

- $\frac{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)}{700} = \frac{2-9}{700} = \frac{-7}{700} = -\frac{1}{100}$

إذن : $\frac{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)}{700}$ عدد عشري .

2 - التعرف على عدد عشري

طريقة :

لمعرفة إن كان عدد ما عشريا أو غير عشري ، نكتبه على شكل كسر غير قابل للإختزال :

- إذا أمكن كتابة مقام هذا الكسر على الشكل $5^n \times 2^m$ فإن هذا العدد عشري .

- وإن لم يمكن ذلك فإنه ليس عشريا .

تمرين :

• هل $\frac{1001}{140}$ عدد عشري ؟ • هل $\frac{48}{45}$ عدد عشري ؟

حل :

• نحلل كلا من العددين 1001 و 140 إلى جداء عوامل أولية

$1001 = 7 \times 11 \times 13$ و $140 = 2^2 \times 5 \times 7$

نستنتج الكسر غير القابل للإختزال

$$\frac{1001}{140} = \frac{7 \times 11 \times 13}{2^2 \times 5 \times 7} = \frac{143}{2^2 \times 5}$$

مقام هذا الكسر من الشكل $2^m \times 5^n$ (مع $n = 1$ و $m = 2$) إذن $\frac{1001}{140}$ عدد عشري .

• $$\frac{48}{45} = \frac{2^4 \times 3}{3^2 \times 5} = \frac{2^4}{3 \times 5}$$

ومقام هذا الكسر ليس من الشكل $2^m \times 5^n$ إذن $\frac{48}{45}$ ليس عشريا .

3 - تحويل عبارات تتضمن جذورا

الحالة الأولى : العبارة لا تتضمن نسبا

طريقة :

إذا كان $a \geq 0$ فإن $\sqrt{a^2} = a$ و إذا كان $a \leq 0$ فإن $\sqrt{a^2} = -a$

تمرين : بسّط كلا من : $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ وَ $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

حل :

• $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt{1^2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}$

• $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{1-2\sqrt{2}+2} = \sqrt{1^2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

$= -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

الحالة الثانية : تحويل نسبة يتضمن مقامها جذورا إلى نسبة مقامها عدد ناطق
طريقة : استعمال العبارة المرافقة .

إذا كان المقام من الشكل $a+\sqrt{b}$ (أو $\sqrt{b}-a$) ، نضرب كلا من البسط والمقام في $a-\sqrt{b}$ (أو $a+\sqrt{b}$) .

إذا كان المقام من الشكل $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (أو $\sqrt{b}-\sqrt{a}$) ، نضرب كلا من البسط والمقام في $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (أو $\sqrt{a}+\sqrt{b}$) .

حالة خاصة :

إذا كان المقام من الشكل $\sqrt{a}$ (أو $-\sqrt{a}$) ، نضرب كلا من البسط والمقام في $\sqrt{a}$.

تمرين : اكتب كل من النسب $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ ، $\frac{7}{3+\sqrt{5}}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

حـل :

- $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}$.

- $\frac{7}{3+\sqrt{5}} = \frac{7(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{21-7\sqrt{5}}{9-5} = \frac{21-7\sqrt{5}}{4}$

- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{3-5} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{-2}$

ملاحظة : $a-\sqrt{b}$ ، $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ هما العبارتان المرافقتان للعبارتين $a+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ على الترتيب .

4 - أولية عدد

طريقة :

للتعرف على أولية عدد يمكن أن نطبق الطريقة التالية :

- نقسم هذا العدد على الأعداد الأولية 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، ...

ونتوقف عن عمليات القسمة عند الحصول على أول باق معدوم أو عندما نجد حاصل قسمة أصغر أو يساوي القاسم .

- إذا حصلنا على باق معدوم فالعدد ليس أوليا ، وإلا فهو أولي .

تمرين : هل العدد 4527381 أولي ؟ هل العدد 307 أولي ؟

حـل :

• 4527381 لا يقبل القسمة على 2 ، لكن يقبل القسمة على 3 (لأن مجموع أرقامه 30 و هو مضاعف 3) إذن العدد 4527381 ليس أوليا .

•

هل 307 يقبل القسمة على	2	3	5	7	11	13	17	19
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

عند القسمة على 19 يكون حاصل القسمة الصحيح للعدد 307 على 19 هو 16 و نلاحظ أن 19 > 16 إذن 307 أولي .

5 - تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

طريقة 1 :

لتحليـل عـدد إلى جـداء عوامـل أولية يمكن اسـتعمال جـداول الضرب وقواعـد قابلية القسمة على 2 ، 3 ، 5، ...

تمرين : حلّل العدد 48×39 إلى جداء عوامل أولية .

حـل :

$48 = 16 \times 3 = 2^4 \times 3$ و $39 = 3 \times 13$ نستنتج أن $48 \times 39 = 2^4 \times 3 \times 3 \times 13$

أي : $48 \times 39 = 2^4 \times 3^2 \times 13$.

طريقة 2 : طريقة القسمات المتتالية

لتحليل عدد إلى جداء عوامل أولية ،
- نقسم العدد على أصغر عدد أولي ممكن
- نقسم حاصل القسمة الناتج على أصغر عدد أولي ممكن
- نواصل حتى نحصل على 1 كحاصل القسمة
ويكون جداء كل القواسم الأولية هو تحليل العدد إلى جداء عوامل أولية .

تمرين : حلّل العدد 126 إلى جداء عوامل أولية .

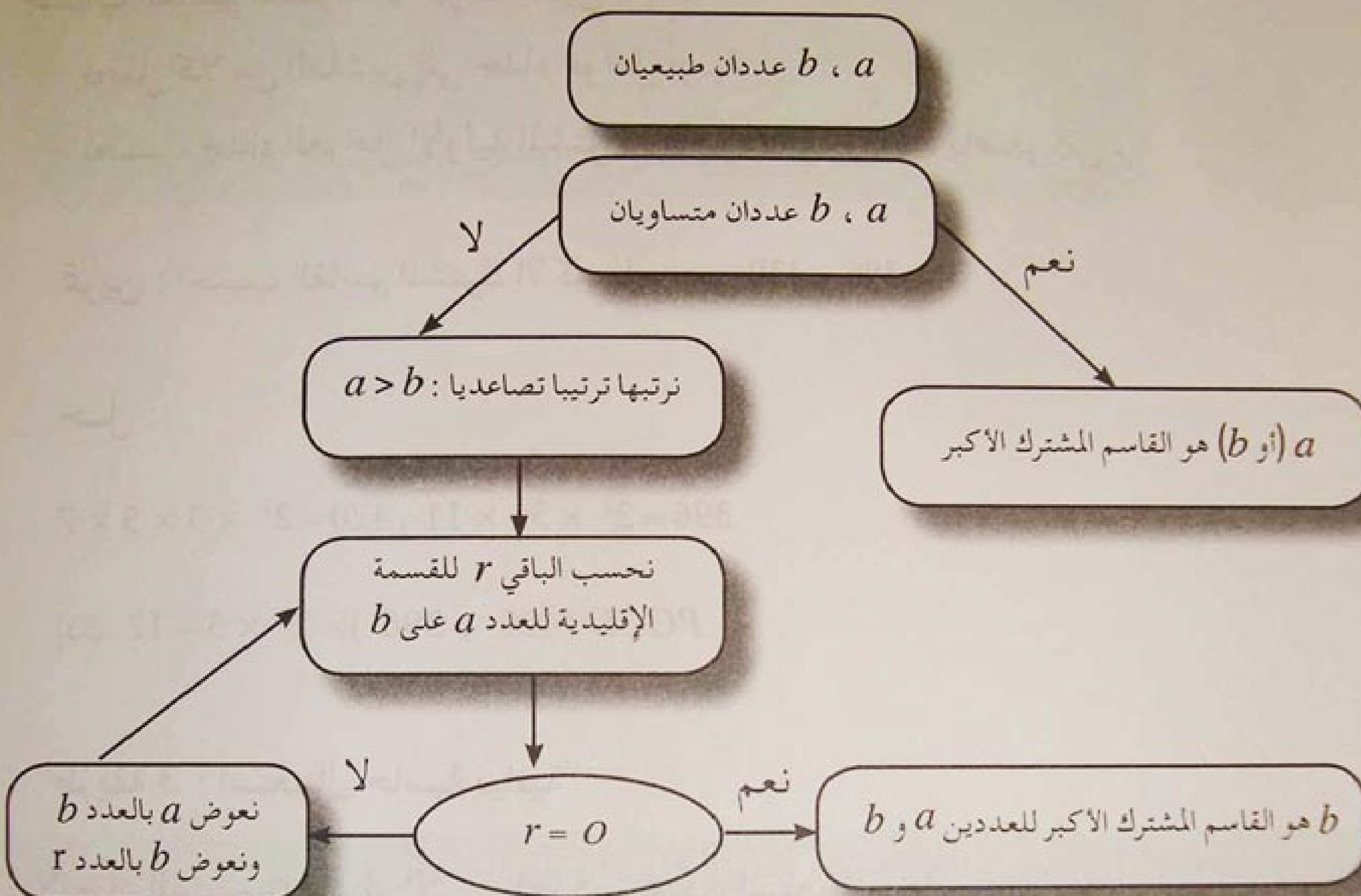
حـل :

الطريقة العملية		القسمات المتتالية
126	2	$126 = 2 \times 63$
63	3	$63 = 3 \times 21$
21	3	$21 = 3 \times 7$
7	7	$7 = 7 \times 1$
	1	

إذن : $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

6 - حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين

طريقة 1 : خوارزمية اقليدس



تمرين : أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 504 و 360 .

حـل :

المراحل		a	b	القسمة الإقليدية	الباقي
1	قسمة 504 على 360	504	360	$504 = 360 \times 1 + 144$	144
2	قسمة 360 على 144	360	144	$360 = 144 \times 2 + 72$	72
3	قسمة 144 على 72	144	72	$144 = 72 \times 2 + 0$	0

آخر باق غير معدوم هو 72 إذن : $PGCD\,(514\,;360) = 72$

طريقة 2 : استعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية

لحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

- نحلّل كلا من العددين إلى جداء عوامل أولية

- نحسب جداء العوامل الأولية المشتركة مأخوذة مرة واحدة بأصغر أس .

تمرين : احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 420 و 396 .

حــل :

$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ و $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$

إذن $PGCD(420\ ;\ 396) = 2^2 \times 3 = 12$

طريقة 3 : استعمال حاسبة بيانية

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين يمكن استعمال حاسبة بيانية .

فمثلا بالنسبة إلى الحاسبة من النوع " $TI\ 83$ " نستعمل اللمسة MATH ونختار الوظيفة gcd(في الجزء NUM

ملاحظة : يمكن إستعمال حاسبات أخرى من النوع TI أو من نوع آخر (*Sharp - Casio* ...) .

تمرين : أوجد بالحاسبة القاسم المشترك الأكبر للعددين 138 و 336 .

حـل :

المرحلة	نضغط على	الاستظهار
1	MATH	MATH NUM CPX PRB 1:►Frac 2:►Dec 3:³ 4:³√(5:ˣ√ 6:fMin(7↓fMax(
2	►	MATH NUM CPX PRB 1:abs(2:round(3:iPart(4:fPart(5:int(6:min(7↓max(
3	g	gcd(
4	138 , 336)	gcd(138,336)
5	ENTER	gcd(138,336) 6

إذن : $PGCD\,(138\,;336) = 6$

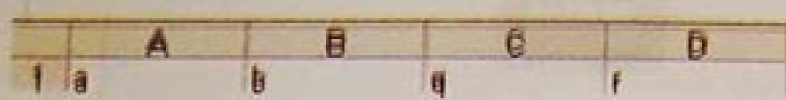
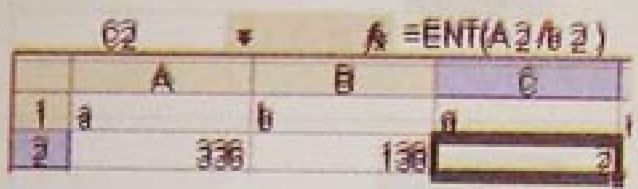
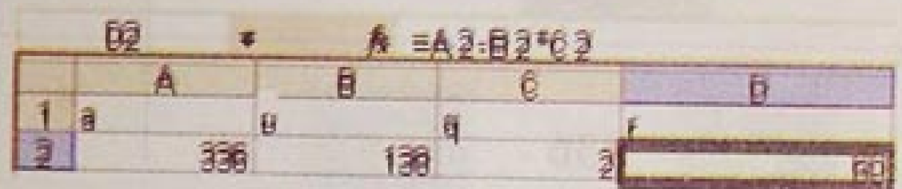
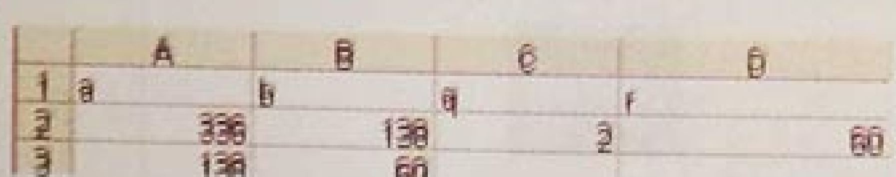
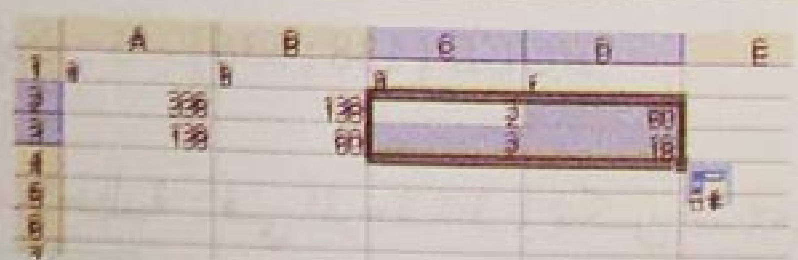
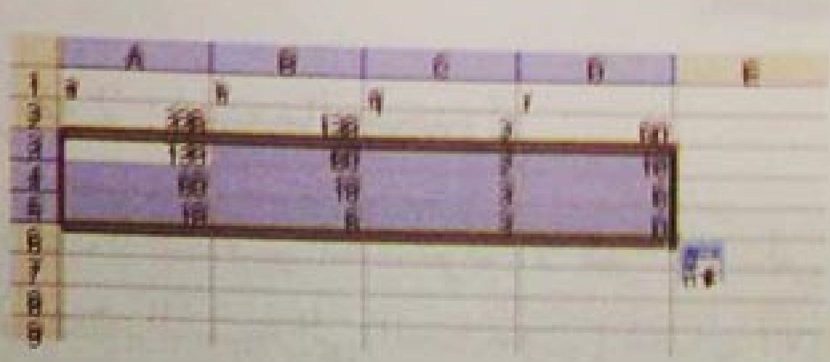
ملاحظـة : فـي المرحلـة 3 ، يمكـن اسـتعمال لمسـة الانتقـال ▼ لاختيـار الوظيفـة gcd(ثم الضغط على اللمسة ENTER

طريقة 2 : استعمال مجدول

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين يمكن استعمال مجدول .
فمثلا بالنسبة إلى المجدول إكسال *Excel* ، يكفي إنجاز خوارزمية إقليدس .

تمرين : أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 336 و 138 .

حـل :

	المرحلة	الاستظهار
1	نضع في الخلايا A1، B1 ، C1 ، D1 الأعداد a ، b ، q ، r حيث q ، r هما حاصل وباقي قسمة العدد a على b .	
2	نسجل العددين 336 وَ 138 في الخليتين A2 وB2 على الترتيب .	
3	نجد حاصل القسمة الاقليدية للعدد 336 على 138 باستعمال القانون : $= ENT\,(A2 \,/\, B2)$	
4	نجد باقي القسمة الاقليدية للعدد 336 على 138 باستعمال القانون : $= A2 - B2 \times C2$	
5	الباقي غير معدوم إذن نسجل العددين 138 و 60 في الخليتين A3 ، B3 على الترتيب باستعمال القانونين $= B2$ وَ $= D2$	
6	نختار بالفارة مجموع الخلايا (A4 ;B4) ونسحب بالفارة نحو الأسفل .	
7	نختار بالفارة مجموع الخلايا (A3 ، D3) ونسحب نحو الأسفل حتى نحصل على 0 وآخر باق غير معدوم هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 336 وَ 138 . إذن : $PGCD\,(336\,;\,138) = 6$.	

7 - حساب المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

طريقة 1 :

> **لحساب المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b :**
> **- نحلل كلا من العددين إلى جداء عوامل أولية .**
> **- نحسب جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة مأخوذة مرة واحدة بأكبر أس .**

تمرين : احسب المضاعف المشترك الأصغر للعددين 45 و 48 .

حل :

$45 = 3^2 \times 5$ و $48 = 2^4 \times 3$ إذن : $PPCM\ (45\ ;\ 48) = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$.

طريقة 2 :

> **لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين يمكن استعمال حاسبة بيانية .**

فمثلا بالنسبة إلى الحاسبة من النوع *TI 83* نستعمل اللمسة MATH ونختار الوظيفة 8:lcm(في البرنامج NUM

تمرين : أوجد بالحاسبة المضاعف المشترك الأصغر للعددين 25 و 36 .

حل : نتبع نفس خطوات حساب القاسم المشترك الأكبر وفي المرحلة 3 نضغط على اللمسة 8 للحصول على الوظيفة lcm(وننجز البرنامج التالي :

نحصل في الأخير على : lcm(25,36) 900 إذن $PPCM\ (25\ ;\ 36) = 900$.

8 - اختـزال كسـر

اختزال كسر هو كتابته في أبسط شكل .

لاختزال كسر ، نقسم كلا من بسطه ومقامه على نفس العدد .

خاصية : b و a عددان طبيعيان وَ b غير معدوم ،

$\frac{a}{b}$ غير قابل الاختزال يعني $\text{PGCD}(b\,;a) = 1$.

طريقة 1 : استعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية

لجعل كسر غيرَ قابل للإختزال ، نحلل كلا من بسطه ومقامه إلى جداء عوامل أولية ثم نختزل العوامل المشتركة .

تمرين : اجعل الكسر $\frac{24 \times 35}{15 \times 18}$ غير قابل للإختزال .

حـــل :

$$\frac{24 \times 35}{15 \times 18} = \frac{2^3 \times 3 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 2 \times 3^2} = \frac{2^{\cancel{3}\,2} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{5} \times \cancel{2} \times 3^2} = \frac{2^2 \times 7}{3^2} = \frac{28}{9}$$

طريقة 2 : استعمال القاسم المشترك الأكبر

لجعل كسر غيرَ قابل للإختزال ، نقسم كلا من بسطه ومقامه على قاسمهما المشترك الأكبر .

تمرين : اجعل الكسر $\frac{312}{456}$ غير قابل للإختزال .

حـــل :

$PGCD(312\,;456) = 24$. إذن : $\frac{312}{456} = \frac{312 : 24}{456 : 24} = \frac{13}{19}$

طريقة 3 : استعمال حاسبة

الحالة الأولى : الحاسبة العلمية

طريقة :

لجعل كسر غير قابل للإختزال بحاسبة علمية نستعمل اللمسة $a^{b/c}$

تمرين : اختزل كلا من الكسرين $\frac{148}{360}$ و $\frac{72}{45}$.

حـل :

الاستظهار	البرنامج
37 ⌟ 90	148 $a^{b/c}$ 360 =

إذن : $\frac{37}{90} = \frac{148}{360}$.

الاستظهار	البرنامج
1 ⌟ 3 ⌟ 5	72 $a^{b/c}$ 45 =

إذن : $\frac{8}{5} = \frac{3}{5} + 1 = \frac{72}{45}$

الحالة الثانية : الحاسبة البيانية

طريقة :

لجعل كسر غير قابل للإختزال بحاسبة بيانية نستعمل اللمسة MATH ونختار الوظيفة ►Frac في البرنامج MATH

تمرين : اختزل الكسر $\frac{156}{176}$.

حــل :

البرنامج	الاستظهار
156 ÷ 176 MATH ENTER	156/176▸Frac 39/44

إذن : $\frac{39}{44} = \frac{156}{176}$.

9 - الحساب على الكسور باستعمال حاسبة

طريقة :

لإنجاز حساب على الكسور بحاسبة (علمية أو بيانية) نكتب الكسور باستعمال نفس اللمسات التي استعملت لإختزال كسر ، ثم نحسب باستعمال لمسات العمليات المختلفة .

تمرين : احسب باستعمال الحاسبة : $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ ؛ $\frac{9}{7} \times \frac{5}{12}$.

حــل :

الحالة الأولى : استعمال حاسبة علمية

البرنامج	الاستظهار
5 $a^{b/c}$ 6 + 3 $a^{b/c}$ 4 =	1⌋7⌋12

إذن : $\frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12} = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$.

الاستظهار	البرنامج
15 ⌟ 28	5 $a^{b/c}$ 12 × 9 $a^{b/c}$ 7 =

إذن : $\frac{15}{28} = \frac{9}{7} \times \frac{5}{12}$.

ملاحظة : تعطي الحاسبة النتيجة على شكل كسر غير قابل للإختزال .

الحالة الثانية : استعمال حاسبة بيانية

الاستظهار	البرنامج
5/6+3/4▸Frac 19/12	5 ÷ 6 + 3 ÷ 4 MATH ENTER

إذن : $\frac{19}{12} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$.

الاستظهار	البرنامج
5/12*9/7▸Frac 15/28	5 ÷ 12 × 9 ÷ 7 MATH ENTER

إذن : $\frac{15}{28} = \frac{9}{7} \times \frac{5}{12}$.

10 - تعيين القيمة المقربة إلى " 10 باستعمال حاسبة بيانية

طريقة :

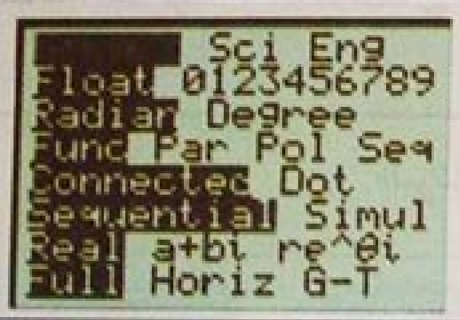
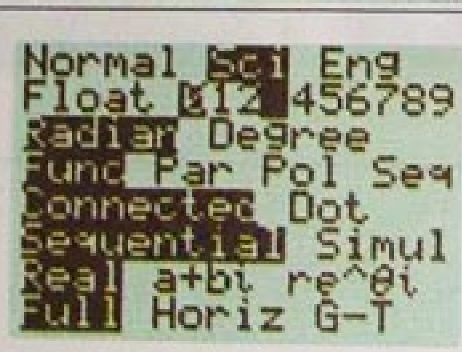
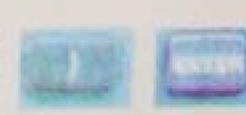
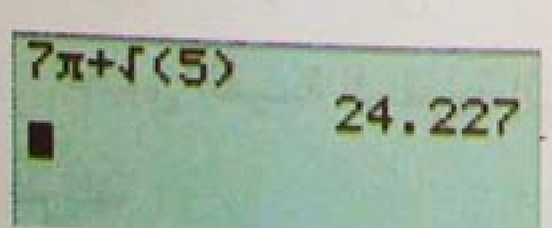
لتعيين القيمة المقربة إلى " 10 لعدد بحاسبة بيانية ، نستعمل اللمسة MODE ونختار الوظيفة Float

تمرين : عيّن ، باستعمال حاسبة بيانية

– القيمة المقربة إلى 10^{-3} للعددين $\frac{30}{13}$ ، $7\pi + \sqrt{5}$.

– القيمة المقربة إلى 10^{-5} للعدد $7\pi + \sqrt{3}$.

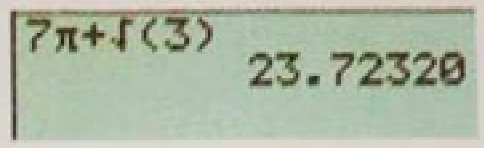
حـل :

المرحلة	نضغط على	الاستظهار
1		
2		
3		
4	30  13 	
5	7  5 	

إذن : القيمتان المقربتان إلى 10^{-3} بالزيادة للعدد $\frac{30}{13}$ و بالنقصان للعدد $7\pi + \sqrt{5}$
هما على الترتيب 2,308 و 24,227 .

• بنفس الطريقة نجد القيمة المقربة إلى 10^{-5} للعدد $7\pi + \sqrt{3}$ بتنفيذ البرنامج

نحصل على :



إذن : القيمة المقرّبة إلى 10^{-5} بالزيادة للعدد $7\pi + \sqrt{3}$ هي 23,72320.

11 - كتابة عدد في الشكل العلمي باستعمال حاسبة

الحالة الأولى : استعمال حاسبة علمية

طريقة :

لكتابة عدد في الشكل العلمي باستعمال حاسبة (علمية أو بيانية) نختار الوظيفة *SCI*.

تمرين : عيّن بالحاسبة الكتابة العلمية لكل من العددين : 17000 ؛ 0,000000568 .

حـل :

البرنامج	الاستظهار
17000 INV SCI	1,7 04

إذن : الكتابة العلمية للعدد 17000 هي $1,7 \times 10^{4}$.

البرنامج	الاستظهار
0,000000568 INV SCI	5,68 -07

إذن : الكتابة العلمية للعدد 0,000000568 هي : $5,68 \times 10^{-7}$.

الحالة الثانية : استعمال حاسبة بيانية

طريقة :

لكتابة عدد على الشكل العلمي باستعمال حاسبة بيانية نستعمل اللمسة MODE ونختار الوظيفة Sci .

تمرين : عيّن بحاسبة بيانية الكتابة العلمية لكل من الأعداد التالية :

17000 ؛ 0,000000568 ؛ 185 π

حـل :

المرحلة	نضغط على	الاستظهار
1	MODE	Normal Sci Eng Float 0123456789 Radian Degree Func Par Pol Seq Connected Dot Sequential Simul Real a+bi re^θi Full Horiz G-T
2	▶ ENTER	Normal Sci Eng Float 0123456789 Radian Degree Func Par Pol Seq Connected Dot Sequential Simul Real a+bi re^θi Full Horiz G-T
3	CLEAR	
4	17000 ENTER	17000 1.7E4
5	0,000000568 ENTER	17000 1.7E4 0.000000568 5.68E-7
6	185 2nd π ^ ENTER	17000 1.7E4 0.000000568 5.68E-7 185π 5.811946409E2

إذن : – الكتابة العلمية للعدد 17000 هي $1,7 \times 10^4$.

– الكتابة العلمية للعدد 0,000000568 هي $5,68 \times 10^{-7}$.

– الكتابة العلمية للعدد $185\ \pi$ هي $5,811946409 \times 10^{2}$.

12 – تعيين مدور عدد باستعمال حاسبة بيانية

طريقة :

لتعيين مدور عدد نستعمل اللمسة MATH ونختار الوظيفة 2:round(

في البرنامج NUM :

تمرين : عيّن ؛ باستعمال حاسبة بيانية ، مدور العدد 13,726583 إلى 10^{-5} ؛ ثم مدور العدد $3\sqrt{7} - 5\pi$ إلى 10^{-3}.

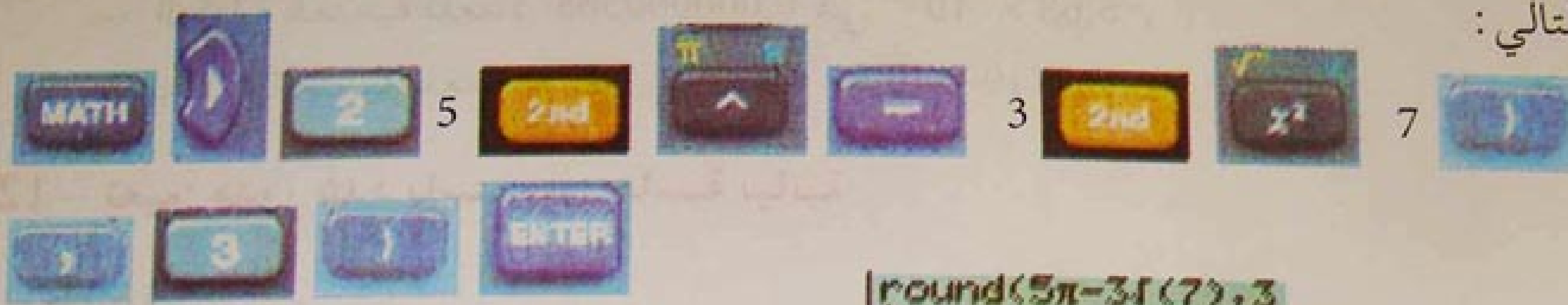
حـل :

المرحلة	نضغط على	الاستظهار
1	MATH ▶ 2	round(
2	13,726583 , 5)	round(13.726583, 5)
3	ENTER	round(13.726583, 5) 13.72658

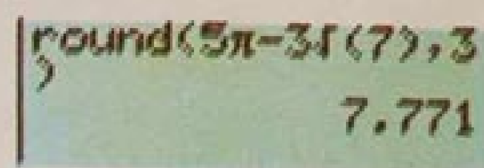
إذن فإن مدور العدد 13,726583 إلى 10^{-5} هو 13,72658

ملاحظة : الرقم 5 يمثل التقريب (أو عدد الأرقام بعد الفاصلة) .

• بنفس الطريقة للحصول على مدور العدد $5\pi - 3\sqrt{7}$ إلى 10^{-3} ننجز البرنامج التالي :



نحصل على :



إذن مدور العدد $5\pi - 3\sqrt{7}$ إلى 10^{-3} هو 7,771 .

13 - إنجاز حساب

الحالة الأولى : باليد

طريقة :

لإيجاد نتيجة حساب باليد ننجز العمليات حسب الأولويات التالية :

1 - نحسب ما بداخل الأقواس

2 - نحسب القوى والجذور التربيعية وفق الترتيب المعطي

3 - ننجز عمليات الضرب والقسمة .

4 - ننجز عمليات الجمع والطرح .

تمرين : أنجز الحساب التالي : $7 - 4 \times 3^2 + \dfrac{\sqrt{36} \times (5 - 2)}{9}$

حـل :

1 . $7 - 4 \times 3^2 + \dfrac{\sqrt{36} \times (5 - 2)}{9} = 7 - 4 \times 3^2 + \dfrac{\sqrt{36} \times 3}{9}$

2 . $= 7 - 4 \times 9 + \dfrac{6 \times 3}{9}$

3 . $= 7 - 36 + 2$

4 . $= -29 + 2$

$= -27$

طـرائـــــق

الحالة الثانية : بحاسبة

طريقة :

لإنجاز حساب يتضمن جذورا أو كسورا ، بحاسبة ، نستعمل أقواس الحاسبة لحساب العبارات الموجودة تحت الجذر أو في البسط أو المقام .

تمرين : أوجد ، بحاسبة ، الكتابة العشرية لكل من الأعداد التالية :

- $a = \dfrac{2005 + 1159,4}{453 - 13,5}$.
- $b = \dfrac{17}{72 \div 9}$.
- $c = \sqrt{40,24 + 20,6} - 11,5$.

حـــل :

- ننجز بحاسبة علمية البرنامج .

(2005 + 1159,4) ÷ (453 − 13,5) = .

نجد $a = 7,2$.

- ننجز بالحاسبة البرنامج : 17 ÷ (72 ÷ 9) = .

نجد $b = 2,125$.

- ننجز بالحاسبة البرنامج : √ (40,24 + 20,6) − 11,5 =

نجد $c = -3,7$.

14 - حساب رتبة مقدار جداء أو حاصل قسمة

طريقة :

لحساب رتبة مقدار جداء عددين أو حاصل قسمتهما ، نحسب جداء أو حاصل قسمة رتبتي مقداري العددين و نأخذ رتبة مقدار الناتج .

تمرين : احسب رتبة مقدار كل من العددين $(1,5 \times 10^{-15}) \times (3,726 \times 10^{8})$ ، $\frac{8,689 \times 10^{-5}}{2,405 \times 10^{-16}}$

حـل :

- رتبة مقدار العدد $1,5 \times 10^{-15}$ هو 2×10^{-15} .

رتبة مقدار العدد $3,726 \times 10^{8}$ هو 4×10^{8} .

رتبة مقدار الجداء هو $(2 \times 10^{-15}) \times (4 \times 10^{8})$ أي 8×10^{-7} .

- رتبة مقدار البسط هو 9×10^{-5} .

رتبة مقدار المقام هو 2×10^{-16} .

حاصل قسمة رتبتي المقدارين هو $\frac{9 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-16}}$ أي $4,5 \times 10^{11}$

إذن رتبة مقدار حاصل القسمة هو 5×10^{11} .

15 - برهان مساواة $A = B$

طريقة 1 :

نـنطلق من أحد طرفي المساواة ونحول كتابته حتى نحصل على الطرف الآخر .

طريقة 2 :

نحوّل كلا من الطرفين A و B على حدة حتى نحصل على نفس النتيجة C .

طريقة 3 :

نبرهن المساواة المكافئة $A - B = 0$ بتحويل كتابة الفرق $A - B$ حتى نحصل على 0 .

تمرين : برهن المساويات التالية :

- $\dfrac{1000 + 0{,}00003^2 - 10^3}{6 \times 10^{-9}} = 0{,}15$

- $16 - (\sqrt{3} - 5)^2 = (9 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)$

- $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

حـل :

- $\dfrac{1000 + 0{,}00003^2 - 10^3}{6 \times 10^{-9}} = \dfrac{10^3 + (3 \times 10^{-5})^2 - 10^3}{6 \times 10^{-9}} = \dfrac{9 \times 10^{-10}}{6 \times 10^{-9}} = \dfrac{3 \times 10^{-1}}{2} = 0{,}15$

- $16 - (\sqrt{3} - 5)^2 = 16 - (3 - 10\sqrt{3} + 25) = 16 - 28 + 10\sqrt{3} = -12 + 10\sqrt{3}$

$$(9 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = 9\sqrt{3} - 9 - 3 + \sqrt{3} = -12 + 10\sqrt{3}$$

إذن : $16 - (\sqrt{3} - 5)^2 = (9 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)$

- $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2 - 2(3+\sqrt{5})}{2(1+\sqrt{5})} = \dfrac{(6+2\sqrt{5}) - (6+2\sqrt{5})}{2+2\sqrt{5}} = 0$

إذن : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

تمارين ومسائل

صحيح أو خاطئ

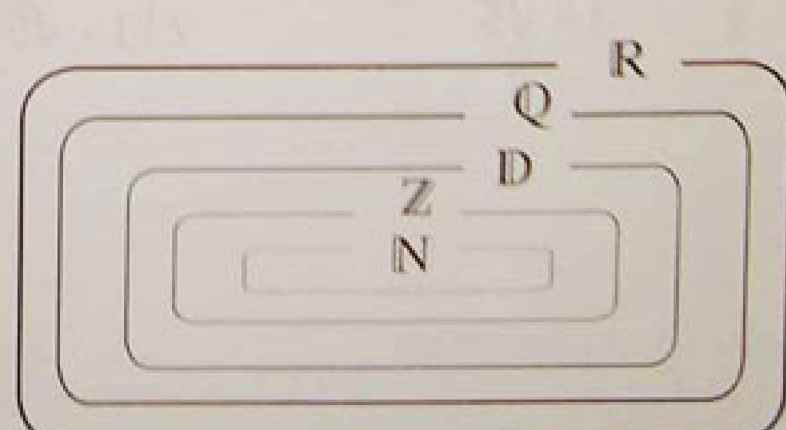
اذكر ان كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة

1) العدد العشري ليس دائما عددا صحيحا .
2) العدد العشري هو عدد حقيقي .
3) $\frac{5}{4} \in \mathbb{D}$.
4) $\frac{2}{3} \in \mathbb{D}$
5) 143 يقبل القسمة على 3 .
6) كل الأعداد الفردية أولية .
7) 124563 وَ 817221 أوليان فيما بينهما .
8) الجذر التربيعي لعدد هو عدد أصم .
9) $2,5 \times 10^{-6} = 25 \times 10^{-5}$.
10) $0,0038 = 3,8 \times 10^{-4}$.

مجموعات الأعداد

1 ضع الأعداد التالية في الرسم التالي :

$2,431$ ؛ $\sqrt{7}$ ؛ -13400 ؛ $5,42 \times 10^{12}$ ؛ $\frac{5}{8}$ ؛ $\frac{11}{3}$ ؛ $-\frac{\pi}{15}$ ؛ $\frac{261}{150}$ ؛ -5 ؛ $\sqrt{64}$ ؛ $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ ؛ $\frac{15,6}{7,2}$ ؛ $\frac{\pi - 3}{\pi + 2}$



2 بسّط الأعداد التالية ، ثم اذكر أصغر مجموعة تنتمي إليها .

$\frac{0,25}{3,5}$ ؛ $\frac{14}{5\sqrt{49}}$ ؛ $\frac{19}{3} - \frac{32}{6}$ ؛ $\frac{-10\pi}{-5}$ ؛ $\frac{2}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{2}$

3 اكتب كلا من الأعداد التالية على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}^{\times}$ ؛

ثم تحقّق أنه عدد ناطق .

$3,5$ ؛ $-0,34$ ؛ $\frac{1,5}{0,3}$ ؛ $7 \times 0,01$ ؛ $9,205$

$\frac{0,5}{0,004}$ ؛ $\frac{-7}{3}$ ؛ $\frac{0,3}{20}$ ؛ $\frac{0,125}{62,5}$ ؛ $\frac{0,03}{11} \times 10^{2}$ ؛ $\frac{2}{0,005} \times 10^{-3}$

الأعداد الأولية

4

1. هل الأعدادالتالية أولية ؟

27 ؛ 56 ؛ 31 ؛ 147 ؛ 621 ؛ 264 ؛ 819000 .

2 . حلّل الأعداد غير الأولية إلى جداء عوامل أولية .

5 1. حلّل بسط ومقام كل من الكسور التالية إلى جداء عوامل أولية واكتبه على شكل كسر غير قابل للإختزال . ثم حدّد منها الأعداد العشرية .

$\frac{126}{189}$ ؛ $\frac{585}{1500}$ ؛ $\frac{360}{2772}$.

2. بسّط كلا من الجذور التربيعية التالية .

$\sqrt{231000}$ ؛ $\sqrt{3825}$ ؛ $\sqrt{127}$.

6 1. عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 220 و 798 ثم للعددين 29260 و 55176 باستعمال خوارزمية اقليدس ثم التحليل إلى جداء عوامل أولية .

2. عيّن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 120 و 252 .

7 عيّن في كل من الحالات التالية ، قيم الأرقام a ، b ، c حيث :

1. $\overline{23a4}$ يقبل القسمة على 3 .
2. $\overline{23a4}$ يقبل القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9 .
3. $\overline{23b5c}$ يقبل القسمة على 3 وعلى 5 .

القوى الصحيحة

8 أتمم المساويات التالية :

$3^{2a} \times 3 = 3^{\cdots}$ ؛ $10^{-p} \times 10^{4} = 10^{\cdots}$ ؛

$a^{p+2} = a^{p} \times \ldots$ ؛ $2^{5} \times a^{5} = \ldots$ ؛

$[3(a+1)^2]^n = 3^n \times \ldots$ ؛ $\frac{5^{m+1}}{5^{m}} = \ldots$.

9 أتمم المساويات التالية :

$10^{4} = \ldots$ ؛ $10^{-1} = \ldots$ ؛ $10^{-5} = \ldots$ ؛

$0{,}001 = \ldots$ ؛ $5{,}2 = 52 \times \ldots$ ؛

$37000 = 37 \times \ldots$ ؛ $0{,}941 = 941 \times \ldots$ ؛

$7 \times 10^{-4} = \ldots$ ؛ $8{,}1 \times 10^{2} = \ldots$ ؛

$0{,}043 \times 10^{2} = \ldots$ ؛

$1{,}48 \times 10^{7} = \ldots \times 10^{5}$.

10 اختصر كتابة العددين التاليين :

$$\frac{(-2)^7 \times (-6)^5 \times (-3)^{10}}{(18)^4 (-12)^3}$$

$$\frac{(0{,}6)^2 \times 12^5 \times 51{,}03^3}{3^4 \times 5^3 \times (-0{,}8)^3 \times 0{,}2^8}$$

11 احسب بتمعّن :

$a = (3^3 \times 3^{-4}) \times (5^3)^2 \times 5^{-5}$ ؛

$b = 7^3 \times 7^4 \times 7^{-5}$ ؛

$c = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 5^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$ ؛

$d = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{27}{4}\right)^{-1}$

12 اكتب كلا من الأعداد التالية في الشكل العلمي :

1700 ؛ $45,7$ ؛ $12,4 \times 10^{3}$ ؛ 130×10^{-3} ؛

38×10^{-3} ؛ $0,258 \times 10^{2}$ ؛

$-13,42 \times 10^{2}$.

13 تحتوي كل من الحسابات التالية على خطأ ، صحّح الطرف الثاني من كل مساواة .

$300^{3} = 300000$ ؛ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{6}$ ؛

$3^{-5} = -3^{5}$ ؛ $-3^{2} = 9$ ؛

$0,3^{2} = 0,9$ ؛ $(2 \times 0,01)^{2} = 0,04$ ؛

$\left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{9}{15}$

14 أتمم الجدول التالي الذي يبين المسافات (بالكيلومتر) بين الشمس وبعض الكواكب .

المسافة (km)	الأرض	المريخ	الزهرة
معبر عنها بعدد صحيح	150 000 000		108 000 000
الكتابة العلمية		$2,28 \times 10^{8}$	

15 أتمم الجدول التالي الذي يعطي (بالسنتمتر) نصف قطر ذرتي الهيدروجين والأكسجين .

نصف القطر	الهيدروجين	الأكسجين
الكتابة العشرية	0,000 000 000 05	
الكتابة العلمية		$6,5 \times 10^{-13}$

الجذور التربيعية

16 بسّط العبارات التالية

$\sqrt{2} \times \sqrt{7}$ ؛ $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$ ؛ $\sqrt{18} - \sqrt{98}$ ؛

$\left(2 - \sqrt{3}\right)^{2}$ ؛ $4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$\frac{15}{\sqrt{3}}$ ، $4\sqrt{5} - \sqrt{45} + \sqrt{20}$ ، $\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{40}}$ ،

$\frac{-21}{3\sqrt{49}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 1$

17 في الجدول التالي ، أرفق كل عبارة بعبارتها المبسطة .

	العبارة		العبارة المبسطة
1	$\sqrt{2} \times \sqrt{24,5}$	أ	14
2	$\sqrt{4} + 3$	ب	$\sqrt{45}$
3	$(\sqrt{7})^2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$	جـ	9
4	$\sqrt{36+9}$	د	$\sqrt{10}$
5	$\sqrt{36} \times \sqrt{9}$	هـ	5
6	$\sqrt{36} + \sqrt{9}$	و	7
7	$\sqrt{5} + \sqrt{5}$	ز	18
8	$\sqrt{5+5}$	ي	$2\sqrt{5}$

18 اكتب الأعداد التالية على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان صحيحان و b أصغر ما يمكن .

$\sqrt{44}$ ؛ $\sqrt{75}$ ؛ $\sqrt{32}$ ؛ $\sqrt{108}$ ؛ $\sqrt{16000}$

$\sqrt{162}$ ؛ $\sqrt{7^2 \times 3}$ ؛ $\sqrt{3} \times \sqrt{18}$ ؛

$7\sqrt{24} + 10\sqrt{54} - 2\sqrt{150}$

19 انشر وبسّط الجداءات التالية :

$(5-\sqrt{11})(5+\sqrt{11})$ ؛ $(1-\sqrt{7})^2$ ؛

$(1+\sqrt{8})^2$

20 نضع : $a = 5 - 3\sqrt{2}$ و $b = \sqrt{2} - 4$.

أكتب في أبسط شكل ممكن العبارات التالية :

$a+b$ ؛ $a-b$ ؛ $2a-4b$ ؛ $a \times b$.

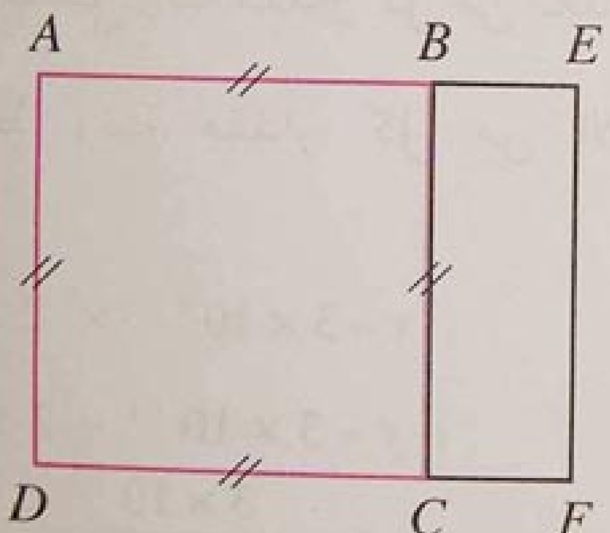
21 اكتب كلا من الأعداد التالية بمقام ناطق .

$\dfrac{5}{-\sqrt{3}}$ ؛ $\dfrac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ؛

$\dfrac{-10}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$.

22 احسب القيمة المضبوطة لمساحة كل من المربع $ABCD$ والمستطيل $AEFD$ علما أن :

$AB = \sqrt{11} - 1$ و $BE = 2$.



قيم مقربة – رتّب مقادير

23 أعط المدور إلى 10^{-2} لكل من الأعداد التالية :

$5,012$ ؛ $0,1594$ ؛ $3,1415$ ؛ $2,718$ ؛ $3,4556$.

24 أتمم الجدول التالي :

العدد	القيمة المقربة إلى 10^{-3} بالنقصان	مدور العدد إلى 10^{-4}
π		
$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$		
$125\sqrt{5}$		

25 1. اكتب العددين التاليين في الشكل العلمي :

$a = 105{,}7 \times 10^{-6}$ ؛ $b = 0{,}000359 \times 10^{13}$.

2 . استنتج رتبة مقدار كل من العددين .

26 أعط رتبة مقدار كل من الأعداد التالية :

$x = 3 \times 10^{11} \times 2 \times 10^{-5}$ ؛

$y = 3 \times 10^{11} + 2 \times 10^{-5}$ ؛

$z = \frac{3 \times 10^{11}}{2 \times 10^{-5}}$.

27 احسب رتبة مقدار كل من العددين التاليين :

$x = 312{,}4 \times 10^{8} \times 5{,}8 \times 10^{7}$ ،

$y = \frac{1{,}7 \times 10^{11}}{0{,}22 \times 10^{-5}}$.

تنظيم وإنجاز حساب

28 أنجز الحسابات التالية :

$\frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\right)$ ؛ $\frac{5}{11} \times \left(3 + \frac{5}{2}\right)$ ؛

$\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3}\right)$.

29 احسب العبارات التالية (تعطى النتيجة على شكل عدد صحيح أو كسر غير قابل للإختزال) :

$\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{4}{9}$ ؛ $\frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}}$ ؛

$\frac{5}{6} - \frac{7}{6} \times \frac{1}{14} + \frac{2}{3}$ ، $\frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{2}}{\frac{7}{11}}$

30 اكتب البرنامج الذي يسمح بإنجاز الحساب التالي باستعمال حاسبة علمية .

$\frac{5 + 4}{2 \times 3} + \sqrt{3^2 + 7} - 2^3$.

31 إليك برامج حساب بحاسبة علمية . أوجد العبارات التي يجب كتابتها لإنجاز الحسابات باليد .

1 .

15 + 3 (4 √ (2) − 1)

2 .

(√ (3) − 5) + 2 x^y 3

32 إليك برامج حساب بحاسبة بيانية.
أوجد العبارات التي يجب كتابتها لإنجاز الحساب باليد.

.1

$-(2*5)\wedge 3+50-(2\wedge 4)/\sqrt{\ }(10-6)$

.2

$10-2*(17-5)/(3*2)\wedge 2-\sqrt{\ }(25-9)$

.3

$-3\wedge 2+(1/2-1+1/4)+(-3/4+1)\wedge 2$

33 احسب بحاسبة بيانية:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} \text{ ؛ } 2+\sqrt{2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+2 \text{ ؛ }$$

$$\frac{2\sqrt{5+\frac{2}{3}}}{\frac{3}{4}+1}+\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{8}}- \text{ ،}$$

$$3^{-5}\times\sqrt{-2+4}\times 10^{3} \text{ ، } \frac{12\times\frac{7}{3}}{5^{-3}\times 3^{-2}}$$

34 أتمم الجدول التالي:

7	6	5	4	3	2	1	n
						41	n^2-n+41

– ماذا تلاحظ ؟ وماذا يمكن تخمينه ؟

– ماذا ينتج عن تعويض n بالعدد 41 ؟
– ماذا تستنتج ؟

مسائل

35 لتسييج حقل مستطيل الشكل بعداه $531\ m$ و $39\ m$ ، ثبت فلاح أعمدة حيث تكون المسافة بين كل عمودين متتاليين عددا صحيحا من الأمتار يتجاوز المترين ، على أن يثبت عمودا في كل ركن من الحقل.

1 . ما هي المسافة بين كل عمودين متتاليين ؟.

2 . ما هو عدد الأعمدة ؟.

36 a و b رقمان.

1. برهن أن العدد الذي يكتب aaa (555 مثلا) يقبل القسمة على 37.

2. برهن أن العدد الذي يكتب $abab$ (4747 مثلا) يقبل القسمة على 101.

37 علبة شكلها متوازي مستطيلات أبعادها 60 cm ؛ 36 cm ؛ 24 cm.
ملئت بمكعبات صغيرة حيث طول حرف كل مكعب منها عدد صحيح من السنتيمترات أكبر من 5.

1. ماهي القيم الممكنة لطول حرف كل مكعب ؟

2. ماهو عدد المكعبات في كل حالة ؟

38 الهدف من هذا التمرين هو البرهان على أن العدد $\sqrt{2}$ عدد أصم أي أنه ليس ناطقا.

نفرض أن $\sqrt{2}$ هو عدد ناطق أي $\sqrt{2}$ يمكن كتابته على شكل كسر غير قابل للاختزال $\frac{a}{b}$ (a ؛ b عددان صحيحان و $b \neq 0$).

1 . برهن أن $a^2 = 2b^2$ ثم استنتج أن a عدد زوجي.

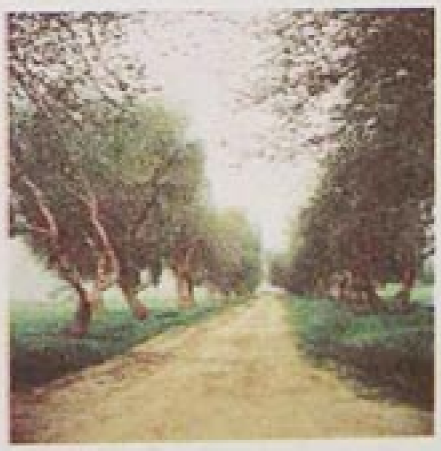
2. نضع $a = 2c$.

برهن أن $b^2 = 2c^2$ ثم استنتج أن b زوجي.

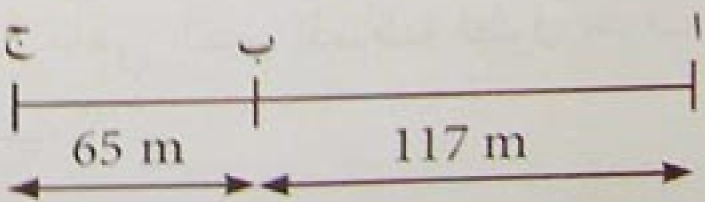
3. قارن بين نتيجتي السؤالين 1 و 2 والفرضية أن $\frac{a}{b}$ غير قابل الإختزال.

ماذا تستخلص ؟.

39 غرست أشجار على حافتي طريق ، تبعد كل شجرة عن التي تليها بنفس المسافة وهي عدد صحيح من الأمتار.



نزعت بعض الأشجار و لم تبق منها إلا 3 المثلة بـ : ا ، ب ، ج في الرسم التالي :



– ما هو عدد الأشجار المغروسة ؟

40 يملك عمر مجموعة من طوابع بريدية و يتذكر أن عددها محصور بين 500 و 550 . إذا رتبها مثنى أو ثلاثة ثلاثة او أربعة أربعة أو خمسة خمسة يبقى دائما طابع بريدي واحد .

– ماهو عدد الطوابع البريدية التي يملكها عمر ؟.

41 المربع السحري

1 . في المربع أ تحقق من تساوي جداءات الأعداد الثلاثة الواقعة في نفس السطر أو في نفس العمود أو في نفس القطر. نقول أن هذا المربع هو "مربع سحري ضربي".

2. أتمم المربع ب لكي يكون "مربعا سحريا ضربيا".

المربع أ

10^0	10^5	10^{-2}
10^{-1}	10^1	10^3
10^4	10^{-3}	10^2

المربع ب

....	....	....
–	1	10^3
10	10^2	0001

الباب

2

المقارنة والترتيب
القيمة المطلقة

1 • المقارنة والترتيب

2 • الحصر والمجالات

3 • القيمة المطلقة

$$\pi = 3,14159265358979323846\ ....$$

هذا العدد ليس صحيحا ولا ناطقًا ، فمن هو ؟

إنّه العدد اللّغز الذي بقي هاجس الكثير من الرياضياتيين عبر التاريخ ، ولمدة تفوق 24 قرنا هو نسبة محيط دائرة إلى قطرها ، تعذرت كتابته على شكل كسر فاتجهت الأبحاث إلى إيجاد قيم تقريبية له ، فكان $3+\frac{1}{8}$ عند البابليين ، $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ عند المصريين القدامى (حوالي 1650 ق . م) $\frac{22}{7}$ عند الإغريق ، ...

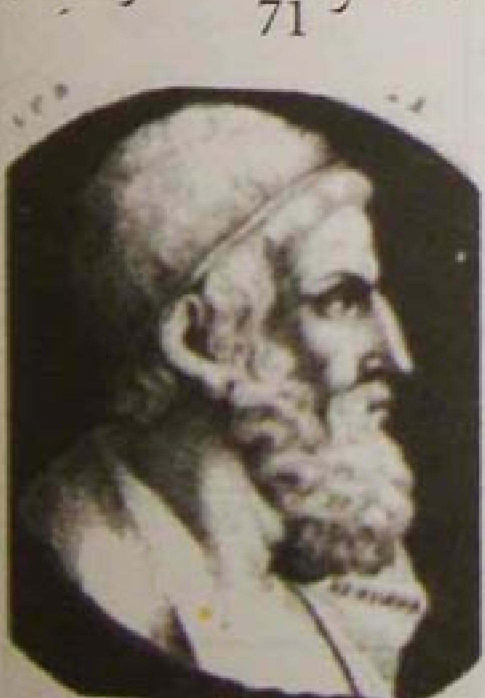
ويعتبر أرخميدس أول من حصر العدد π بين القيمتين $3+\frac{1}{7}$ و $3+\frac{10}{71}$ ، وحسب الرياضياتي العربي الكاشي (حوالي سنة 1450 م) 14 عددًا عشريًا له ، كما وجدت صيغ عديدة للعدد π نذكر منها :

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+ ...\right)$$

(جيمس غريغوري سنة 1671)

$$\pi = 2\left(\frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\ ...\right)$$ (واليس سنة 1655)

وفي سنة 1761 برهن جون إنريك لامبير أن π عدد أصم ، كما برهن ليندمان سنة 1882 أن π عدد سام .



أرخميدس (287 - 212 ق . م)

إستبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
قارن بين العددين العشريين $7,53$ و $6,87$.	$6,87 < 7,53$	$6,87 = 7,53$	$6,87 > 7,53$
قارن بين العددين العشريين $5,13$ و $5,89$.	$5,13 < 5,89$	$5,13 > 5,89$	$5,13 = 5,89$
قارن بين العددين العشريين $3,57$ و $3,58$.	$3,57 > 3,58$	$3,57 = 3,58$	$3,57 < 3,58$
قارن بين العددين الناطقين $\frac{1}{72}$ و $\frac{1}{25}$.	$\frac{1}{25} < \frac{1}{72}$	$\frac{1}{25} = \frac{1}{72}$	$\frac{1}{25} > \frac{1}{72}$
قارن بين العددين الناطقين $\frac{17}{19}$ و $\frac{42}{19}$.	$\frac{42}{19} > \frac{17}{19}$	$\frac{42}{19} = \frac{17}{19}$	$\frac{42}{19} < \frac{17}{19}$
قارن بين العددين الناطقين $\frac{11}{8}$ و $\frac{15}{11}$.	$\frac{15}{11} = \frac{11}{8}$	$\frac{15}{11} < \frac{11}{8}$	$\frac{15}{11} > \frac{11}{8}$
قارن بين العددين 12×10^2 و 40×30 .	$12 \times 10^2 > 40 \times 30$	$12 \times 10^2 < 40 \times 30$	$12 \times 10^2 = 40 \times 30$
قارن بين العددين $7,31 \times 10^2$ و $0,24 \times 10^3$	$7,31 \times 10^2 = 0,24 \times 10^3$	$7,31 \times 10^2 > 0,24 \times 10^3$	$7,31 \times 10^2 < 0,24 \times 10^3$
قارن بين العددين $\sqrt{73}$ و $\sqrt{98}$	$\sqrt{73} = \sqrt{98}$	$\sqrt{73} < \sqrt{98}$	$\sqrt{73} > \sqrt{98}$
إذا كان x عددا حقيقيا حيث $x < 2$ فإن	$3x < 6$	$3x = 6$	$3x > 6$
إذا كان x عددا حقيقيا حيث $x < -1$ فإن	$-2x > 2$	$-2x < 2$	$-2x = 2$
إذا كان x عددا حقيقيا موجبا حيث $x < \sqrt{2}$ فإن	$x^2 < 2$	$x^2 = 2$	$x^2 > 2$

أنشطة تمهيدية

❖ **نشاط 1** : a ، b عددان حقيقيان حيث $a = \frac{13}{3}$ و $b = \frac{25}{6}$.

1 – احسب الفرق $a - b$ ؛ ثم إستنتج إشارة $a - b$.

2 – قارن بين العددين a و b .

❖ **نشاط 2** : a ، b عددان حقيقيان حيث $a = 5{,}61$ و $b = \frac{562}{101}$.

قارن بين العددين a و b

❖ **نشاط 3** : a و b عددان حقيقيان حيث $a = \sqrt{3}$ و $b = \sqrt{\pi}$.

1 – احسب a^2 و b^2 .

2 – قارن بين العددين a^2 و b^2 .

3 – إستنتج ترتيب العددين a ، b .

❖ **نشاط 4** : a ، b عددان حقيقيان حيث $a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ و $b = \sqrt{2} - 1$.

1 – احسب $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$.

2 – احسب $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$.

3 – ماالذي يمكن قوله عن العددين a و b ؟

❖ **نشاط 5** : • a ، b عددان حقيقيان حيث $a = 9 \times 10^6$ و $b = 64 \times \frac{1}{10^{-4}}$.

1 – قارن بين العددين a و b .

2 – احسب $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$.

• x ، y عددان حقيقيان موجبان تماما حيث $x \leq y$.

– قارن بين العددين $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$. (يمكنك ملاحظة أن $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ ؛

ثم إستنتاج مقارنة $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$).

معـــــارف

1 – المقارنة والترتيب

يمكن تنظيم الأعداد الحقيقية في فئتين :

– فئة الأعداد الحقيقية الموجبة وَ فئة الأعداد الحقيقية السالبة .

يعتبر العدد الحقيقي 0 عددا موجبا وسالبا في آن واحد .

أ – تعريف :

a ؛ b عددان حقيقيان .

a أصغر من b إذا وفقط إذا كان الفرق $b-a$ موجبا تماما .

نكتب $a<b$ و نقرأ « a أصغر من b ».

أمثلة : $0<2$ ؛ $-5<0$ ؛ $-\frac{3}{4} < \sqrt{2}$ ؛ $1,66 < \frac{5}{3}$

ملاحظات :

- a أصغر من أو يساوي b يعني $b-a$ موجب
  نكتب $a \leq b$ ونقرأ « a أصغر من أو يساوي b » .
- $b-a$ موجب تماما يعني $b-a>0$.
- $b-a$ موجب يعني $b-a \geq 0$.
- x عدد حقيقي موجب يعني $x \geq 0$.
- x عدد حقيقي موجب تماما يعني $x > 0$.
- x عدد حقيقي سالب يعني $x \leq 0$.
- x عدد حقيقي سالب تماما يعني $x < 0$.
- مقارنة العددين الحقيقين a ، b يعني تحديد الوضعية الصحيحة من بين الوضعيات الثلاث التالية : $a<b$ ؛ $a>b$ ؛ $a=b$.

ب – قاعدة الإشارات :

- **جداء عددين حقيقيين من نفس الإشارة هو عدد موجب .**
- **جداء عددين حقيقيين مختلفين في الإشارة هو عدد سالب .**

أمثلة : $14 \times 3 > 0$ ؛ $(-5)(-18) > 0$ ؛ $4(-3) < 0$ ؛ $\sqrt{2} \times 0 = 0$

جـ - الترتيب والعمليات :

- الترتيب والجمع

إضافة نفس العدد الحقيقي إلى طرفي متباينة لا يغير الترتيب .

أي أن : $a \le b$ إذا وفقط إذا كان $a + c \le b + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

ملاحظة : طرح نفس العدد الحقيقي من طرفي متباينة لا يغير الترتيب
أي أن $a \le b$ إذا وفقط إذا كان $a - c \le b - c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

أمثلة : $3 < 7$ إذن $3 + 4 < 7 + 4$.
$5 + 2 < 9 + 2$ إذن $5 < 9$
$9 < 21$ إذن $9 - 8 < 21 - 8$
$19 - 13 < 36 - 13$ إذن $19 < 36$

- الترتيب والضرب

ضرب طرفي متباينة بنفس العدد الحقيقي الموجب تماما ، لا يغير الترتيب .

أي أنه : إذا كان $c > 0$ فإن : $a \le b$ إذا وفقط إذا كان $ac \le bc$.

ضرب طرفي متباينة بنفس العدد الحقيقي السالب تماما ، يغير الترتيب .

أي أنه : إذا كان $c < 0$ فإن : $a \le b$ إذا وفقط إذا كان $ac \ge bc$.

أمثلة : $4 \le 7$ إذن $4 \times 3 \le 7 \times 3$
$-7 \le -4$ إذن $(-7)(-1) \ge (-4)(-1)$
$-3 \le 1$ إذن $(-3)(-2) \ge (1)(-2)$

ملاحظة : إن قسمة العدد الحقيقي a على العدد الحقيقي c غير المعدوم يعني ضرب a في $\frac{1}{c}$.

ينتج عن ذلك أن :

• إذا كان $c > 0$ فإن : $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

• إذا كان $c < 0$ فإن : $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

ملاحظة : إذا كان $c = -1$ فإن : $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $-a \geq -b$.

أمثلة : $3 < 7$ إذن : $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$

$-7 < -3$ إذن : $\frac{7}{2} > \frac{3}{2}$

$-2 < 4$ إذن : $2 > -4$

جـ- ترتيب مربعي عددين حقيقيين

خاصية 1 : a ، b عددان حقيقيان موجبان .
$a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $a^2 \leq b^2$.

فعلا : نعلم أنه إذا كان a ، b عددين حقيقيين ؛ فإن : $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$.

بما أن : a ، b موجبان و $a \leq b$ فإن : $b - a \geq 0$ و $a + b \geq 0$

ينتج أن : $(b+a)(b-a) \geq 0$ أي أن : $b^2 - a^2 \geq 0$

إذن : $b^2 \geq a^2$ أو $a^2 \leq b^2$

العكس : إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $b^2 - a^2 \geq 0$

أي أن : $(b-a)(b+a) \geq 0$

إذن : $b - a \geq 0$ (لأن $b + a \geq 0$ لكون a ، b موجبين) .

ينتج أن : $b \geq a$ أو $a \leq b$

إذن : إذا كان a ، b عددين حقيقيين موجبين فإن : $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $a^2 \leq b^2$.

أمثلة: $2 \leq 8$ إذن $2^2 \leq 8^2$ ، وفعلا $4 \leq 64$

$\sqrt{2} \leq \sqrt{17}$ إذن $(\sqrt{2})^2 \leq (\sqrt{17})^2$ وفعلا $2 \leq 17$

معـــــارف

حذار

لا توجد قاعدة تخص ترتيب مربعي عددين مختلفين في الإشارة .

$-3 < 1$ و $(-3)^2 > (1)^2$

$-2 < 5$ و $(-2)^2 < 5^2$

خاصية 2 : a ، b عددان حقيقيان سالبان .
$a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $a^2 \geq b^2$.

فعلا : إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ و $a \leq b$ فهذا يعني $-a \geq 0$ و $-b \geq 0$ و $-b \leq -a$
وهذا يعني أيضا $b^2 \leq a^2$ أو $a^2 \geq b^2$

مثال : $-7 < -3$ إذن $(-7)^2 > (-3)^2$ أي أن : $49 > 3$.

د - ترتيب مقلوبي عددين

ترتيب عددين غير معدومين ومن نفس الإشارة هو عكس ترتيب مقلوبيهما .

يعني : إذا كان a ، b عددين حقيقيين غير معدومين ومن نفس الإشارة

فإن : $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

فعلا : إذا كان a ، b عددين حقيقيين غير معدومين ومن نفس الإشارة فإن $ab > 0$ ،

وبالتالي $\frac{1}{ab} > 0$.

حسب الخاصية المتعلقة بالترتيب والضرب ينتج أن :

$a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $a\left(\frac{1}{ab}\right) \leq b\left(\frac{1}{ab}\right)$

وبعد تبسيط طرفي المتباينة الثانية

نكتب : $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

أمثلة : $2 \leq 7$ إذن : $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{7}$

$-5 \leq -2$ إذن : $-\frac{1}{5} \geq -\frac{1}{2}$

ملاحظة : القاعدة السابقة ليست صحيحة إذا كان العددان الحقيقيان a ، b مختلفين في الإشارة .

فعلا : إذا كان $a.b<0$ وَ $a \le b$ (أي $b>0$ و $a<0$)

فإن : $a\left(\frac{1}{ab}\right) \ge b\left(\frac{1}{ab}\right)$ (ضرب طرفي متباينة بعدد حقيقي سالب تماما)

أي أن : $\frac{1}{b} \ge \frac{1}{a}$.

إذن : $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$.

ينتج أن : إذا كان a ، b عددين حقيقيين مختلفين في الإشارة وغير معدومين

فإن : $a \le b$ إذا وفقط إذا كان $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$.

أمثلة : $-3 \le 4$ إذن : $-\frac{1}{3} \le \frac{1}{4}$

$-5 \le \sqrt{5}$ إذن : $-\frac{1}{5} \le \frac{1}{\sqrt{5}}$

هـ- ترتيب جذرين تربيعين لعددين حقيقيين موجبين

ترتيب عددين حقيقيين موجبين هو ترتيب جذريهما التربيعيين .

أي أن : إذا كان $a \ge 0$ وَ $b \ge 0$ ، فإن : $a \le b$ إذا وفقط إذا كان $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

ملاحظة : لإثبات صحة هذه الخاصية نبيّن أن : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

ثم نثبت أن إشارة $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ هي إشارة $a-b$.

العكس ، نربع طرفي المتباينة $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$ ونطبّق الخاصية المتعلقة بترتيب مربعي عددين حقيقيين موجبين .

أمثلة : $5 > 4$ إذن : $\sqrt{5} > 2$

$\frac{1}{25} > \frac{1}{36}$ إذن : $\sqrt{\frac{1}{25}} > \sqrt{\frac{1}{36}}$ أي $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$

x عدد حقيقي موجب : $x > 9$ إذن $\sqrt{x} > 3$.

2 - الحصر والمجالات

أ - حصر عدد حقيقي .

تعريف :

حصر عدد حقيقي a بعددين يعني إيجاد عددين حقيقيين c ، b
حيث $b \leq a \leq c$ أو $(c \leq a \leq b)$

نقول إن a محصور بين b و c .

تعريف :

المتباينة المضاعفة $b \leq a \leq c$ تسمى حصرا للعدد a .
العدد الحقيقي $c-b$ يسمى طول هذا الحصر .

أمثلة : • المتباينة المضاعفة $3 \leq \pi \leq 4$ هي حصر للعدد π طوله 1 .
• المتباينة المضاعفة $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$ هي حصر للعدد π طوله $\frac{1}{10^2}$.
• المتباينة المضاعفة $-5 \leq 3 \leq 8$ هي حصر للعدد 3 طوله 13 .
• المتباينة المضاعفة $1{,}414 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}415$ هي حصر للعدد $\sqrt{2}$ طوله $\frac{1}{10^3}$.

ب - المجالات

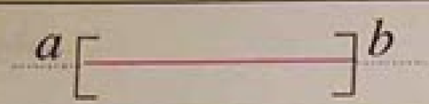
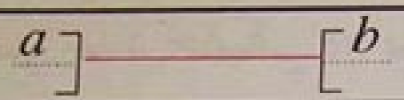
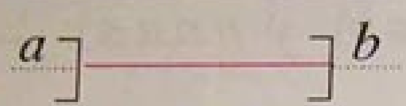
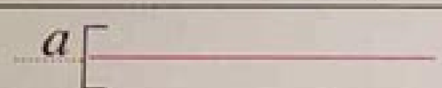
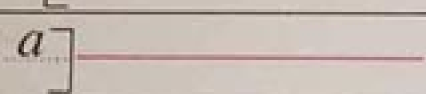
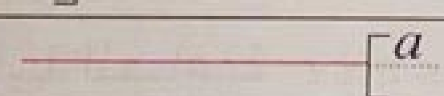
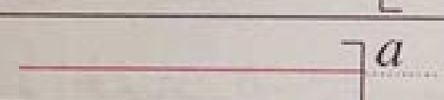
في الجدول الموالي :

a ، b عددان حقيقيان حيث $a < b$.

الرمز $+\infty$ يقرأ زائد مالا نهاية .

الرمز $-\infty$ يقرأ ناقص مالا نهاية .

تعاريف :

المجال الذي يرمز له بالرمز	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث	تمثيل هذا المجال على مستقيم عددي
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;a[$	$x < a$	
$]-\infty;a]$	$x \leq a$	

في كل الحالات السابقة ، تمثيل المجال على المستقيم العددي هو جزء هذا المستقيم الملون بالأحمر.

ملاحظات :

- العددان الحقيقيان a ، b يسميان حدي المجال .
- المجال $[a;b]$ يسمى مجالا مغلقا حداه a ، b .
- المجال $]a;b[$ يسمى مجالا مفتوحا حداه a ، b .
- العدد الحقيقي $\frac{a+b}{2}$ يسمى مركز كل من المجالين $[a;b]$ ؛ $]a;b[$.
- العدد الحقيقي $b-a$ يسمى طول كل من المجالين $[a;b]$ ؛ $]a;b[$.
- المجال $]a;b]$ هو مجال نصف مفتوح (أو نصف مغلق) حداه a ، b .

هذا المجال ليس له مركز .

أمثلة :

- مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $-1 \leq x \leq 1$ هي المجال $[-1;1]$ مركزه العدد 0 وطوله 2 .

- مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x < 5$ هي المجال $]-\infty ; 5[$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x > -2$ هي المجال $]-2 ; +\infty[$.

ملاحظات : – مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل بالمجال $]-\infty ; +\infty[$.

– مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة (أي $x \leq 0$) تمثل بالمجال $]-\infty ; 0]$.

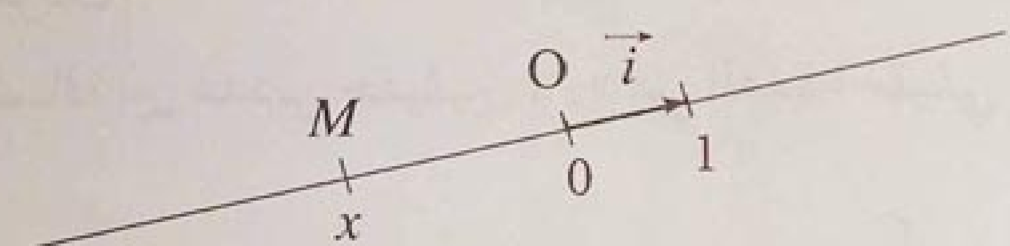
– مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (أي $x \geq 0$) تمثل بالمجال $[0 ; +\infty[$.

3 – القيمة المطلقة

أ – المسافة إلى العدد 0

تعريف :

المسافة إلى العدد 0 للعدد الحقيقي x هي المسافة بين النقطتين O و M حيث M هي النقطة التي فاصلتها x في المعلم الخطي $(O ; \vec{i})$.



ب – القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف :

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x هي المسافة إلى العدد 0 للعدد الحقيقي x

يرمز للقيمة المطلقة للعدد x بالرمز $|x|$ والمسافة بين النقطتين O و M بالرمز OM .

أمثلة :

$|+3| = OA = 3$ ؛ $|-2| = OB = 2$

حيث A فاصلتها $3+$ و B فاصلتها $2-$ في معلم خطي $(O ; \vec{i})$.

نتيجة :

- $|x|$ هو عدد حقيقي موجب .
- إذا كان $x \geq 0$ فإن : $|x| = x$.
- إذا كان $x \leq 0$ فإن : $|x| = -x$.

ملاحظات : • إذا كان x عددا حقيقيا فإن : $|x| = |-x|$.

فعلا ، نعلم أن المسافتين إلى 0 للعددين x و $-x$ متساويتان .

والعدد الحقيقي الموجب $|-x|$ هو المسافة إلى 0 للعدد x .

• إذا كان x عددا حقيقيا ، فإن : $x^2 \geq 0$ ؛

ينتج أن : $|x^2| = x^2$.

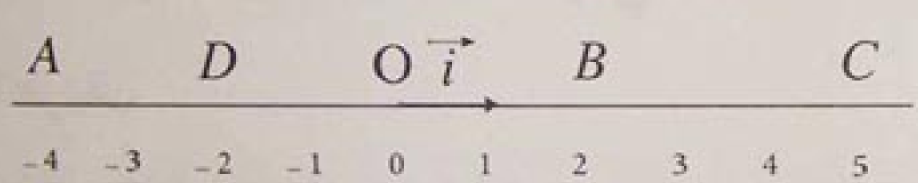
جـ - المسافة بين عددين حقيقيين

تعريف :

المسافة بين العددين الحقيقيين x و y هي المسافة AB بين النقطتين A ، B حيث A ، B هما النقطتان ذات الفاصلتين x ، y على الترتيب من المستقيم العددي المزود بالمعلم الخطي $(O ; \vec{i})$.

تعريف :

المسافة بين عددين حقيقيين x ، y هي العدد الحقيقي الموجب $|x-y|$.



أمثلـة : في الشكل المقابل :

• المسافة بين العددين -4 و 5 هي $|5-(-4)|$ وهي المسافة AC حيث $AC = 5-(-4) = 9$

• المسافة بين العددين 2 و -2 هي $|2-(-2)|$ وهي المسافة BD حيث $BD = 2-(-2) = 4$

• المسافة بين العددين 2 و 5 هي $|5-2|$ وهي المسافة BC حيث $BC = 5-2 = 3$

ملاحظة : x ؛ y عددان حقيقيان .

لدينا : $|y-x| = |x-y|$

فعلا $AB = BA$ حيث A ؛ B هما النقطتان ذات الفاصلتين x ; y على الترتيب من المستقيم العددي المزود بالمعلم الخطي $(O ; \vec{i})$.

أمثلة : المسافة بين -4 و 2 هي $|2-(-4)|$ حيث $|2-(-4)| = |2+4| = |6| = 6$

إذن المسافة بين -4 و 2 هي العدد الحقيقي الموجب 6.

– المسافة بين -8 و -2 هي $|-2-(-8)|$ حيث

$$|-2-(-8)| = |-2+8| = |+6| = 6$$

إذن المسافة بين -8 و -2 هي 6.

د – القيمة المطلقة والمجالات

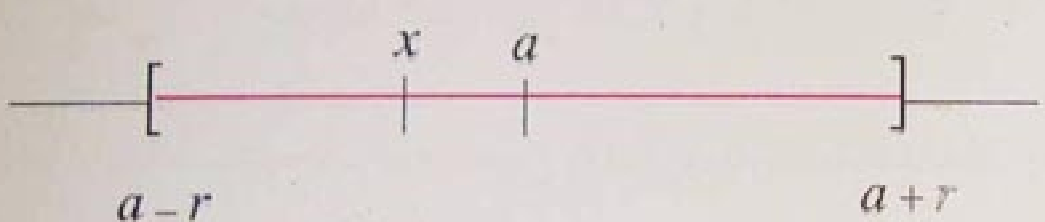
a عدد حقيقي و r عدد حقيقي موجب تماما.

نعلم أن $|x-a|$ هي المسافة بين x و a.

$|x-a| \le r$ يعني $-r \le x-a \le r$

أي أن : $a-r \le x \le a+r$ أي أن : x ينتمي إلى المجال $[a-r;a+r]$

(لاحظ الشكل)



مبرهنة :

a عدد حقيقي و r عدد حقيقي موجب تماما.

$|x-a| \le r$ يعني أن : $x \in [a-r;a+r]$

ملاحظة : $|x-a| < r$ يعني أن $x \in]a-r;a+r[$

تعريف :

a عدد حقيقي و r عدد حقيقي موجب تماما.
مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $|x-a| < r$ هي المجال الذي مركزه a وطوله $2r$.

بمعنى آخر، مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $|x-a| < r$ هي المجال المفتوح $]a-r;a+r[$ الذي مركزه a وطوله $2r$.

أمثلة :

– مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $|x-1| \le 2$ هي المجال $[-1;3]$.

– مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $|x-4| < 1$ هي المجال $]3;5[$.

1 - مقارنة عددين عشريين مكتوبين كتابة عشرية

طريقة :

لمقارنة عددين عشريين مكتوبين كتابة عشرية نعتمد على القاعدة التالية :
- إذا اختلف جزءاهما الصحيحان فإنهما يرتبان ترتيب هذين الجزئين الصحيحين .
- إذا تساوى جزءاهما الصحيحان ، نكتب جزئيهما العشريين بنفس عدد الأرقام ثم نقارن الأرقام ذات نفس المراتب لهذين الجزئين العشريين .

تمرين : قارن العددين 7,18 و 71,8 ثم العددين 4,31 و 4,382 .

حل : - مقارنة العددين 7,18 و 71,8 .

الجزءان الصحيحان للعددين 7,18 و 71,8 مختلفان (هما 7 و 71) .

بما أن $71 > 7$ فإن : $71,8 > 7,18$.

- مقارنة العددين 4,31 و 4,382 .

الجزءان الصحيحان للعددين 4,31 و 4,382 متساويان .

نقارن جزئيهما العشريين .

لدينا : $4,31 = 4,310$.

نقارن 310 و 382 .

لدينا $382 > 310$. إذن : $4,382 > 4,310$ أي $4,382 > 4,31$.

2 - مقارنة عددين حقيقيين موجبين

طريقة :

لمقارنة عددين حقيقيين موجبين نعتمد على إحدى القواعد التالية :
- نقارن قيمتين مقربتين لهما
- نحسب الفرق بينهما وندرس إشارته
- نقارن العددين بعدد ثالث .

تمرين : قارن $\sqrt{2}$ و $\frac{577}{408}$ ؛ $\frac{13}{8}$ و $\frac{21}{13}$ ؛ $\frac{3}{7}$ و $\frac{11}{9}$.

حـل : – لمقارنة العددين $\sqrt{2}$ و $\frac{577}{408}$ نقارن قيمتين مقربتين لهما .

لدينا ... $\sqrt{2} \approx 1,414213$ و ... $\frac{577}{408} \approx 1,414215$

نعلم أن : $5 > 3$ إذن $\sqrt{2} < \frac{577}{408}$.

– لمقارنة العددين $\frac{13}{8}$ و $\frac{21}{13}$ نحسب الفرق بينهما .

لدينا $\frac{13}{8} - \frac{21}{13} = -\frac{1}{104}$ و $0 > -\frac{1}{104}$ إذن $0 > \frac{13}{8} - \frac{21}{13}$

ينتج أن : $\frac{13}{8} < \frac{21}{13}$

– لمقارنة العددين $\frac{3}{7}$ و $\frac{11}{9}$ نقارنهما بعدد ثالث .

لدينا $3 < 7$ إذن : $1 > \frac{3}{7}$ و $11 > 9$ إذن : $1 < \frac{11}{9}$

ينتج أن: $\frac{11}{9} > \frac{3}{7}$.

3 – حساب قيمة مطلقة

طريقة : a ، b عددان حقيقيان

- **لحساب العدد الحقيقي $|a|$ ندرس إشارة a .**
- **لحساب العدد الحقيقي $|a-b|$ ندرس إشارة $a-b$.**

تمرين : أحسب $|(-7)^2|$ ؛ $|3^3 - 3^2|$ ؛ $|\pi - 3|$ ؛ $|\sqrt{2} - \frac{577}{408}|$

حـل : • لدينا : $|(-7)^2| = (-7)^2 = 49$ لأن : $(-7)^2 > 0$.

• نعلم أن $3^2 - 3^3 < 0$ لأن $3^2 < 3^3$.

إذن : $|3^2 - 3^3| = -(3^2 - 3^3) = -(-18) = 18$

• نعلم أن $\pi > 3$ إذن $\pi - 3 > 0$

ينتج أن : $|\pi - 3| = \pi - 3$

• لدينا ... $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ و ... $\frac{577}{408} \approx 1,414215686$

القيمتان المقربتان للعدد $\sqrt{2}$ و $\frac{577}{408}$ لهما نفس الجزء الصحيح .

نقارن إذن الجزءين العشريين لهما .

لدينا $3 < 5$ إذن : $\frac{577}{408} > \sqrt{2}$

ينتج أن : $\sqrt{2} - \frac{577}{408} < 0$

إذن : $\left| \sqrt{2} - \frac{577}{408} \right| = \frac{577}{408} - \sqrt{2}$

4 - حساب مسافة على مستقيم عددي

طريقة : لحساب المسافة بين النقطتين A ، B ذات الفاصلتين a ، b على الترتيب من مستقيم عددي نحسب $|b-a|$.

تمرين : A ، B ، M نقط من المستقيم العددي المزود بالمعلم الخطي $(O ; \vec{i})$ ، فواصلها -17 ؛ $453,7$ ؛ x على الترتيب .

• أحسب المسافة AB .

• أحسب المسافتين AM ، BM وعبّر عن النتيجتين بدون استعمال رمز القيمة المطلقة .

حل : حساب AB :

$$AB = |453,7 - (-17)|$$
$$= |453,7 + 17| = 470,7$$

إذن : $AB = 470,7$

• حساب AM : $AM = |x - (-17)| = |x + 17|$

إذا كان $x \geq -17$ فإن : $AM = x + 17$

إذا كان $x \leq -17$ فإن : $AM = -(x + 17)$

• حساب BM : $BM = |x - 453,7|$

إذا كان $x \geq 453,7$ فإن : $BM = x - 453,7$

إذا كان $x \leq 453,7$ فإن : $BM = -(x - 453,7)$

5 - البحث عن الأعداد الحقيقية x حيث $|x-a| = b$ ، a عدد حقيقي و b عدد حقيقي موجب

طريقة : **الأعداد الحقيقية x حيث $|x-a| = b$ هي الأعداد الحقيقية x**
حيث $x-a=b$ أو $x-a=-b$
أي $x=a+b$ أو $x=a-b$

تمرين : عيّن الأعداد الحقيقية x حيث $|x-1| = 3$.

حـل : الأعداد الحقيقية x حيث $|x-1| = 3$ هي الأعداد الحقيقية x

حيث $x-1=3$ أو $x-1=-3$

أي أن : $x=4$ أو $x=-2$

إذن يوجد عددان حقيقيان x حيث $|x-1| = 3$ هما 4 و -2 .

6 - البحث عن الأعداد الحقيقية x حيث $|x-a| \leq b$ ، a عدد حقيقي و b عدد حقيقي موجب

طريقة : **الأعداد الحقيقية x حيث $|x-a| \leq b$ هي الأعداد الحقيقية x**
حيث $a-b \leq x \leq a+b$
أي أن : $x \in [a-b \; ; \; a+b]$

تمرين : 1) عيّن الأعداد الحقيقية x حيث $|x-2| \leq 1$.

2) عيّن الأعداد الحقيقية x حيث $|x-5| < 2$.

حـل : 1) الأعداد الحقيقية x حيث $|x-2| \leq 1$ هي الأعداد الحقيقية x
حيث $-1 \leq x-2 \leq 1$

أي أن : $1 \leq x \leq 3$

إذن : $x \in [1 \, ; 3]$.

2) الأعداد الحقيقية x حيث $|x-5| < 2$ هي الأعداد الحقيقية x حيث $-2 < x-5 < 2$

أي أن : $3 < x < 7$ ، إذن : $x \in]3 \, ; 7[$.

7 - تعيين القيمة المطلقة بحاسبة بيانية

طريقة : لتعيين القيمة المطلقة لعدد نستعمل اللمسة MATH ونختار الوظيفة 1:abs(في البرنامج NUM .

تمرين : عيّن ، باستعمال حاسبة بيانية ، القيمة المطلقة للعدد $9\sqrt{7} - 8\sqrt{11}$

حـل :

المرحلة	نضغط على	الاستظهار
1	MATH	MATH NUM CPX PRB 1:▶Frac 2:▶Dec 3:³ 4:∛(5:ˣ√ 6:fMin(7↓fMax(
2	▶	MATH NUM CPX PRB 1:abs(2:round(3:iPart(4:fPart(5:int(6:min(7↓max(
3	1	abs(
4	9 2nd x² 7) − 8 2nd x² 11)	abs(9√(7)-8√(11)) 2.721236523

إذن : $|9\sqrt{7} - 8\sqrt{11}| \approx 2,7$

8 - مقارنة عددين بحاسبة بيانية

طريقة : لمقارنة عددين بحاسبة بيانية نستعمل اللمسة TEST MATH ونختار الوظيفة = ، > ، < في البرنامج TEST .

تمرين : قارن ، باستعمال حاسبة بيانية ودون حساب قيم تقريبية ، العددين $5\pi\sqrt{13}$ و $6\pi\sqrt{10}$.

حـل :

المرحلة	نضغط على	الاستظهار
1	6 [2nd] [^] [2nd] [x^2] 10 [)]	6π√(10)
2	[2nd] [MATH]	TEST LOGIC 1:= 2:≠ 3:> 4:≥ 5:< 6:≤
3	[1] 5 [2nd] [^] [2nd] [x^2] 13 [)]	6π√(10)=5π√(13)
4	[ENTER]	6π√(10)=5π√(13) 0
5	[2nd] [ENTER]	6π√(10)=5π√(13)
6	[◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄]	6π√(10)▮5π√(13)
7	[2nd] [MATH]	TEST LOGIC 1:= 2:≠ 3:> 4:≥ 5:< 6:≤
8	[3]	6π√(10)>5π√(13)
9	[ENTER]	6π√(10)>5π√(13) 1

النتيجة 0 في المرحلة 4 تدل على أن المساواة $5\pi\sqrt{13} = 6\pi\sqrt{10}$ خاطئة

والنتيجة 1 في المرحلة 9 تدل أن المتباينة $6\pi\sqrt{10} > 5\pi\sqrt{13}$ صحيحة .

ملاحظة : يمكن استعمال علاقات أخرى (2:≠ ، 4:≥ ، 5:< ، 6:≤) للمقارنة .

صحيح - خاطىء

• اذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة .

1) إذا كان $x > 0$ فإن $\frac{1}{x} < 0$

2) إذا كان $-2 \leq x \leq 1$ فإن
$-3 \leq -3x \leq 6$

3) إذا كان $x > -2$ فإن $-2x > -4$

4) إذا كان $x > -5$ فإن $x > 0$

5) a ، b عددان حقيقيان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$

6) من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $x \leq x^2$

7) من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-x$ سالب .

8) باستعمال حاسبة نجد $\pi = 3,141593$ و $\frac{355}{113} = 3,141593$
ونستنتج أن $\pi = \frac{355}{113}$

9) إذا كان $-1 \leq x \leq 2$ فإن $x \in [-1 ; 2]$.

10) إذا كان $x > -7$ فإن $x \in]-\infty ; -7[$.

11) إذا كان $x \in]3 ; +\infty[$ فإن $x \geq 3$.

12) إذا كان $x \in]-\infty ; 1[$ فإن $x < 0$.

13) الأعداد الحقيقية x حيث $|x - 1| = 0$ هي 1 و -1 .

14) الأعداد الحقيقية x حيث $|x - 3| < 1$ هي الأعداد x حيث $x \in]2 ; 4[$

المقارنة والترتيب

1 قارن بين العددين في كل حالة من الحالات التالية :

1) $14,83$ و $1,34$.

2) $0,48$ و $0,324$.

3) $\frac{22}{7}$ و $\frac{355}{113}$.

4) $\sqrt{3} + 2$ و $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ (يمكن حساب مربعي العددين ثم تحديد نتيجة المقارنة) .

2 قارن بين العددين $\frac{0,124124124}{7}$ و $\frac{0,124124125}{7}$.

3 قارن بين العددين $\frac{5}{1,254}$ و $\frac{5}{1,253}$.

4 رتّب تصاعديا الأعداد العشرية التالية :
$0,765$ ؛ $0,675$ ؛ $0,668$ ؛ $0,76$ ؛ $0,75$.

5 نفس السؤال بالنسبة إلى الأعداد الحقيقية المقترحة في كل حالة ممّا يلي :

1) $-5,011$ ؛ $-5,101$ ؛ $-5,110$ ؛ $-5,01$ ؛ $-5,001$.

2) $0,5$ ، $-0,5$ ، $-0,4213$ ، $0,123$ ، $-0,4015$

3) 4×10^{-3} ؛ -4×10^{3} ؛ -5×10^{2} ؛ 5×10^{-2} ؛ 5×10^{2}.

4) $\frac{3}{2}$ ؛ $\frac{7}{5}$ ؛ $\frac{17}{12}$ ؛ $\frac{41}{29}$ ؛ $\frac{99}{70}$ ؛ $\frac{239}{169}$.

5) $\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{2}{3}$ ؛ $\frac{3}{4}$ ؛ $\frac{4}{5}$ ؛ $\frac{5}{6}$ ؛ $\frac{6}{7}$.

6) $1+\sqrt{11}$ ؛ $3+\sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{2}+\sqrt{10}$ ، $2+\sqrt{8}$ ، $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ؛ $2\sqrt{6}$.

6 أكمل كتابة الجمل التالية في كل حالة من الحالات التالية :

– إذا كان $x \leq -\sqrt{2}$ فإن .... $x+2$

– إذا كان $x \leq -\sqrt{2}$ فإن .... $3x$

– إذا كان $x \leq -\sqrt{2}$ فإن .... $-8x$

– إذا كان $x < -\sqrt{2}$ فإن .... $\frac{1}{x}$

– إذا كان $x > 4$ فإن .... $\sqrt{x}$

7 قارن بين العددين a ؛ b في كل حالة من الحالات التالية :

1) $a = \frac{9,01}{10^{14}}$ ؛ $b = \frac{90,1}{10^{15}}$

2) $a = 135 \times 10^{-7}$ ؛ $b = 13,5 \times 10^{-6}$

3) $a = \frac{7,4 \times 10^{12}}{7,5}$ ؛ $b = \frac{75}{74 \times 10^{-12}}$

4) $a = \frac{10^{24}}{10,01}$ ؛ $b = 10^{23}$.

الحصر والمجالات

8 x عدد حقيقي ينتمي إلى المجال

$$I =]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$$

عيّن حصرا لكل عبارة من العبارات التالية :

$f(x) = 3x - 7$ ؛ $g(x) = -9x + 2$

9 مثّل على مستقيم عددي ، كل مجال من المجالات التالية :

$[1 ; 4]$ ؛ $[-2 ; +\infty[$ ؛ $[-7 ; 7,5]$ ؛ $]-\infty ; -3[$

10 عبّر عن المتباينات التالية باستعمال مجالات .

$-2 \leq x \leq 5$ ؛ $x < 0$ ؛ $-3 < x$ ، $x \geq \sqrt{2}$

القيمة المطلقة

11 من بين العددين $\frac{28}{25}$ و $\frac{29}{28}$ ؛ من هو الأقرب إلى 1 ؟

12 بسّط العدد A حيث :

$$A = ||6| - |-2|| - |-6 \times 2| - |-2|$$

13 احسب المسافة بين العددين a ، b في كل حالة من الحالات التالية :

1) $a = 3$ و $b = -1,5$

2) $a = -5,1$ و $b = -6,3$

3) $a=\frac{3}{4}$ و $b=\frac{8}{3}$

4) $a=10^6$ و $b=10^{-2}$

14 عيّن الأعداد الحقيقية x في كل حالة من الحالات التالية :

1) $|x-3|=2$ ؛ 4) $|x+\frac{5}{2}|\leq 1$ ؛

2) $|x|=4$ ؛ 5) $|2x-1|=4$ ؛

3) $|x+\frac{3}{5}|=\frac{2}{5}$ ؛ 6) $|x-1|<3$.

مسائل

15 a ، b عددان حقيقيان حيث $3<a<7$ و $1<b<6$.

– عيّن حصر الكل من $a+b$ ؛ $a.b$ ؛ $-b$ ؛ $a-b$.

$\frac{1}{b}$ ؛ $\frac{a}{b}$ ؛ $\sqrt{a}$ ؛ $2a+3b$ ؛ $\frac{a-2}{b+2}$

16 I . J مجالان معرفان كما يلي :

$I=[0;5]$ ؛ $J=[2;7]$

1 – على مستقيم عددي ، لون بالأحمر والأخضر المجالين I ، J على الترتيب .

2 – باستعمال لون آخر ، لون المجال $I\cap J$ ، حدّد هذا المجال .

17 عيّن المجال $I\cap J$ في الحالات التالية :

$I=]1;3]$ و $J=]-1;2[$ ؛

$I=]0;3]$ و $J=]-2;5]$ ؛

$I=[-1;3]$ و $J=]2;4]$

18 1) عيّن الأعداد الطبيعية من المجال $]-3;\frac{7}{2}]$.

2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية من المجال $]\frac{18}{3};-\frac{8}{5}[$.

19 طول ضلع مربع محصور بين 3 و 3,1 .

– عيّن حصرا لمحيط هذا المربع .

– عيّن حصرا لمساحة هذا المربع .

20 مستطيل طوله محصور بين 3 و 3,14 وعرضه محصور بين 1 و 1,31.

– عيّن حصرا لمحيط هذا المستطيل .

– عيّن حصرا لمساحة هذا المستطيل .

21 إشترت ليلى 20 برتقالة لتصنع معجونا . كتلة كل برتقالة محصورة بين 130 غراما وَ 150 غراما .

– أعط حصرا لكتلة البرتقال .

– بعد نزع القشرة ، فقدت كل برتقالة % 20 من كتلتها .

– ما هي كتلة البرتقال غير الصالحة ؟

– ما هي كتلة البرتقال المستعملة لصنع المعجون ؟

الباب
3

المعادلات والمتراجحات

1 • عموميات

2 • المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

3 • المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

مَثَلُ المعادلات كَمَثَلِ الأعداد ، فهي من النتائج الرياضياتية الأولى التي أبدعتها الإنسانية ، ظهرت عبر الحضارات العتيقة مسائل عملية يمكن تأويل معالجتها بأنها حالات لحل معادلات من الدرجتين الأولى والثانية، وجدت في أقدم الوثائق المكتوبة بالحروف المسارية في نصوص القدماء البابليين ، والتي تمتد إلى الألفية الثالثة قبل الميلاد. كانت مسائل الميراث عند البابليين من أهم المسائل التي تؤول معالجتها إلى حل معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد ، كما وجدت المعادلات في أقدم أوراق البردي عند المصريين منذ حوالي 1800 سنة قبل الميلاد ، وكذلك عند الإغريق.

الخوارزمي (788 – 850)

ويعتبر الرياضياتي العربي محمد بن موسى الخوارزمي أول من صنّف المعادلات (من الدرجة الأولى والثانية) إلى ستة أنواع ثم حلّها في كتابه الشهير "الجبر والمقابلة". يقول في النوع الثالث، وهو ما نسميه الآن المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد : " وأما الجذور التي تعدل عددًا فكقولك جذر يعدل ثلاثة من العدد " .

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة

	السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1	إذا كان $x = 2$ فإن	$3x - 6 = -12$	$3x - 6 = 0$	$3x - 6 = -3$
2	إذا كان $x = 3$ فإن	$-4x = 12$	$-4x = -12$	$-4x = 3$
3	حل المعادلة $2x - 3 = 0$ في $\mathbb{R}$ هو	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
4	حل المعادلة $5x + 1 = 0$ في $\mathbb{R}$ هو......	-6	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
5	إذا كان $x > 2$ فإن	$-3x > 6$	$-3x > -6$	$-3x < -6$
6	إذا كان $x < -1$ فإن	$2x > -2$	$2x > 2$	$2x < -2$
7	إذا كان $2x - 5 > 0$ فإن	$x > 0$	$x < \frac{5}{2}$	$x < -\frac{5}{2}$
8	إذا كان $-3x + 1 > 0$ فإن	$x > 0$	$x < \frac{1}{3}$	$x > \frac{1}{3}$
9	إذا كان $(x - 1)(2x + 3) = 0$ فإن	$x = 1$	$x = 1$ و $x = -\frac{3}{2}$	$x = 1$ أو $x = -\frac{3}{2}$
10	إذا كان $\frac{2x + 3}{x - 1} = 0$ فإن ...	$x = -\frac{3}{2}$ أو $x = 1$	$x = -\frac{3}{2}$ و $x = 1$	$x = -\frac{3}{2}$
11	للمعادلة $x^2 = 4$	حل واحد وهو 2	حلان هما -2 و 2	حل واحد وهو -2
12	إذا كان $x = 4$ فإن $(2x - 1)(4 - x)$ يساوي	0	$\frac{1}{2}$	4

أنشطة تمهيدية

❖ **نشاط 1** : $P(x)$ ؛ $T(x)$ ؛ $L(x)$ عبارات جبرية تتعلق بالمتغير الحقيقي x حيث :

$$L(x) = \frac{-3x+1}{x+1} \ ; \ T(x) = (2x+1)(x-4) \ ; \ P(x) = 3x-5$$

• احسب قيم كل من $P(x)$ ؛ $T(x)$ ؛ $L(x)$ من أجل قيم العدد الحقيقي x المقترحة في كل جدول من الجداول التالية :

x	-2	-1	0	$\frac{3}{5}$	1	2
$P(x)$						

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	4
$T(x)$						

x	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
$L(x)$						

• من الجداول السابقة، استخرج الأعداد الحقيقية x التي تعدم كلا من العبارات $P(x)$ ؛ $T(x)$ ؛ $L(x)$.

❖ **نشاط 2** : أنشر العبارات التالية :

$$A(x) = (x-4)(3x+2) \ ; \ B(x) = (3x+1)^2 \ ;$$

$$C(x) = (2x-3)^2 \ ; \ D(x) = (4x-3)(4x+3)$$

❖ **نشاط 3** : حلّل إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى كل عبارة من العبارات التالية :

$$A(x) = 4x^2 + 4x + 1 \ ; \ B(x) = 25x^2 - 10x + 1$$

$$C(x) = 49x^2 - 16 \ ; \ D(x) = (x+1)(-2x+3) - (x+1)(2x+8)$$

❖ **نشاط 4** : مجموع ثلاثة أعداد حقيقية هو 2520 .

– احسب هذه الأعداد إذا علمت أنها متناسبة مع الأعداد 3 ؛ 4 ؛ 5 على الترتيب .

1 - عموميات

أ - تعريف : $E(x)$ و $F(x)$ عبارتان جبريتان للمتغير الحقيقي x .

الكتابة $E(x) = F(x)$ تسمى معادلة ذات المجهول x .

أمثلة : • x عدد حقيقي ؛ $3x^2 - 2x + 1 = 0$ هي معادلة ذات المجهول x .

• y عدد حقيقي ؛ $3y - 1 = 0$ هي معادلة ذات المجهول y .

• z عدد حقيقي ؛ $\frac{z+3}{2z+1} = 0$ هي معادلة ذات المجهول z .

ملاحظات : - يرمز للمجهول في معادلة بالرمز x ؛ y ؛ z ؛ t ؛ ....

- حل المعادلة $E(x) = 0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية يعود إلى تعيين مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المساواة $E(x) = 0$ ؛

عادة يرمز لمجموعة الحلول بالرمز S .

ب - تعريف : نسمي متراجحة ذات المجهول x كل متباينة من الشكل $E(x) \leq 0$ حيث x عدد حقيقي .

ملاحظات : 1) x عدد حقيقي ؛ كل من الكتابات $E(x) < 0$ ؛ $E(x) \geq 0$ ؛ $E(x) > 0$ هي متراجحة ذات المجهول x .

2) حل متراجحة من الشكل $E(x) \leq 0$ يعود إلى تعيين مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة $E(x) \leq 0$.

أمثلة : • x عدد حقيقي ؛ $3x^2 - 2x + 1 \geq 0$ هي متراجحة ذات المجهول x .

• y عدد حقيقي ؛ $3y - 1 < 0$ هي متراجحة ذات المجهول y .

• z عدد حقيقي ؛ $\frac{z+3}{2z-1} \geq 0$ هي متراجحة ذات المجهول z .

2 - معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

أ - تعريف : نسمي معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد ، كل معادلة تكتب على الشكل $ax + b = 0$ حيث a ، b عددان حقيقيان و $a \neq 0$ و x هو المجهول .

أمثلة : كل من المعادلات $3x-1=0$ ؛ $x\sqrt{2}=5$ ؛ $-\frac{1}{2}x+7=0$ هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول x .

ملاحظة : حل معادلة من الشكل $ax+b=0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية يعود إلى تعيين مجموعة قيم العدد x التي تحقق هذه المعادلة .

ب – حل المعادلة $ax+b=0$ ؛ $a\neq 0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية

x عدد حقيقي .

لدينا $ax+b=0$ يعني $ax=-b$

بما أن $a\neq 0$ و $ax=-b$ فإن : $x=-\frac{b}{a}$

ينتج أن للمعادلة $ax+b=0$ ؛ $a\neq 0$ حل واحد في المجموعة $\mathbb{R}$ وهو $-\frac{b}{a}$.

نتيجة : المعادلة $ax+b=0$ ؛ $a\neq 0$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة $\mathbb{R}$ وهو $-\frac{b}{a}$.

أمثلة :
- المعادلة $3x-1=0$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة $\mathbb{R}$ وهو $\frac{1}{3}$.
- المعادلة $x\sqrt{2}=5$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة $\mathbb{R}$ وهو $\frac{5}{\sqrt{2}}$.
- المعادلة $-\frac{1}{2}x+7=0$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة $\mathbb{R}$ وهو 14.

3 – متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

أ – تعريف : نسمي متراجحة من الدرجة الأولى وبمجهول واحد ، كل متباينة من الشكل $ax+b\leq 0$ حيث a ، b عددان حقيقيان و $a\neq 0$.

ملاحظة : المتراجحات من الشكل $ax+b<0$ أو $ax+b\geq 0$ أو $ax+b>0$ حيث a ، b عددان حقيقيان و $a\neq 0$ هي أيضا متراجحات من الدرجة الأولى ذات المجهول x .

أمثلة : كل من المتراجحات $2x-5\leq 0$ ، $3x+1<0$ ، $\sqrt{2}x-1\geq 0$ ، $0,2x+1,5>0$ ، $-4x<\sqrt{2}$ هي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهول x.

ملاحظة : حل متراجحة من الشكل $ax+b\leq 0$ ؛ $a\neq 0$ في المجموعة $\mathbb{R}$ يعني إيجاد مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق هذه المتراجحة .

ب – حل المتراجحة $ax+b \le 0$ ؛ $a \ne 0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية

x عدد حقيقي ؛ S هي مجموعة حلول المتراجحة $ax+b \le 0$.

لدينا : $ax+b \le 0$ يعني $ax \le -b$ نعلم أن $a \ne 0$ إذن : $a > 0$ أو $a < 0$

لذلك ندرس حالتين .

الحالة الأولى : $a > 0$

لدينا : $ax \le -b$ و $a > 0$

وبقسمة طرفي المتراجحة $ax \le -b$ على العدد a الموجب تماما (أو بضرب طرفي المتراجحة $ax \le -b$ في العدد الموجب تماما $\frac{1}{a}$) نجد : $x \le -\frac{b}{a}$.

$x \le -\frac{b}{a}$ يعني $x \in]-\infty ; -\frac{b}{a}]$.

نستنتج أن : إذا كان $a > 0$ فإن $S =]-\infty ; -\frac{b}{a}]$

الحالة الثانية : $a < 0$

لدينا : $ax \le -b$ و $a < 0$ وبقسمة طرفي المتراجحة $ax \le -b$ على العدد السالب تماما a (أو بضرب طرفي المتراجحة $ax \le -b$ في العدد السالب تماما $\frac{1}{a}$) نجد : $x \ge -\frac{b}{a}$

$x \ge -\frac{b}{a}$ يعني $x \in [-\frac{b}{a} ; +\infty[$

نستنتج أن : إذا كان $a < 0$ فإن $S = [-\frac{b}{a} ; +\infty[$

أمثلة : • مجموعة حلول المتراجحة $3x - 4 \le 0$ هي $]-\infty ; \frac{4}{3}]$.

• مجموعة حلول المتراجحة $-5x + 1 \le 0$ هي $[\frac{1}{5} ; +\infty[$.

جـ – إشارة العبارة $ax+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان و $a \ne 0$

دراسة إشارة العبارة $ax+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان و $a \ne 0$

يعني إيجاد مجموعات قيم العدد الحقيقي x التي يكون من أجلها

$ax+b < 0$ أو $ax+b = 0$ أو $ax+b > 0$.

لتحديد هذه المجموعات ؛ نستعين بالنتائج المتعلقة بالترتيب وعمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{R}$

لدينا : $ax+b=0$ إذا وفقط إذا كان $x=-\frac{b}{a}$ (لأن $a\neq 0$)

لتحديد إشارة $ax+b$ ندرس حالتين .

الحالة الأولى : $a>0$

$ax+b>0$ يعني $ax>-b$ أي $x>-\frac{b}{a}$

نستنتج أن : $x\in\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$

$ax+b<0$ يعني $x<-\frac{b}{a}$

نستنتج أن : $x\in\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$

نلخص هذه النتائج في الجدول المقابل :

$a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

الحالة الثانية : $a<0$

$ax+b>0$ يعني $ax>-b$ أي $x<-\frac{b}{a}$

نستنتج أن : $x\in\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$

لدينا : $ax+b<0$ يعني $ax<-b$

أي $x>-\frac{b}{a}$

نستنتج أن : $x\in\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$

نلخّص هذه النتائج في الجدول المقابل :

$a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

مثال : إشارة كل من العبارتين $3x-4$ و $-2x+5$ ملخصة في الجدولين التاليين :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	0	$-$	

1 - حل معادلة من الشكل $A(x)B(x)=0$ حيث $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان من الدرجة الأولى

طريقة : $A(x)\ B(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $A(x)=0$ أو $B(x)=0$

تمرين : حل المعادلة $(3x-1)(-2x+5)=0$ في المجموعة $\mathbb{R}$.

حل : لدينا $(3x-1)(-2x+5)=0$ يعني $3x-1=0$ أو $-2x+5=0$

• $3x-1=0$ أي $3x=1$ إذن $x=\frac{1}{3}$

• $-2x+5=0$ أي $-2x=-5$ إذن $x=\frac{5}{2}$

ينتج أن مجموعة حلول المعادلة $(3x-1)(-2x+5)=0$ هي $\left\{\frac{1}{3}\ ;\ \frac{5}{2}\right\}$.

2 - حل معادلة من الشكل $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ حيث $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان من الدرجة الأولى

طريقة : $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ إذا وفقط إذا كان $A(x)=0$ و $B(x)\neq 0$

تمرين : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{2x+3}{x-1}=0$.

حل : لدينا $\frac{2x+3}{x-1}=0$ يعني $2x+3=0$ و $x-1\neq 0$ أي $x\neq 1$ و $x=-\frac{3}{2}$

بما أن $-\frac{3}{2}\neq 1$ إذن $x=-\frac{3}{2}$

ينتج أن : مجموعة حلول المعادلة $\frac{2x+3}{x-1}=0$ هي $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

3 - حل معادلة من الشكل $A(x)=0$ حيث $A(x)$ عبارة بدلالة x

طريقة : لحل معادلة من الشكل $A(x)=0$ نحلّل $A(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى وذلك باستخراج عامل مشترك أو باستعمال المتطابقات الشهيرة .

تمرين : حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات التالية :

$4x^2+4x+1=0$ ؛ $x^2-2x+1=0$

$9x^2-16=0$ ؛ $(2x-1)(x+3)-(2x-1)(4x+2)=0$

حل : • لدينا $4x^2+4x+1=0$ يعني $(2x+1)^2=0$ إذن $x=-\frac{1}{2}$

ينتج أن المعادلة $4x^2+4x+1=0$ تقبل حلا واحدا وهو $-\frac{1}{2}$.

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

• لدينا $x^2-2x+1=0$ يعني $(x-1)^2=0$ إذن $x=1$

ينتج أن المعادلة $x^2-2x+1=0$ تقبل حلا واحدا وهو 1 .

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{1\}$.

• لدينا $9x^2-16=0$ يعني $(3x)^2-4^2=0$ أو $(3x-4)(3x+4)=0$

أي $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

إذن $x=-\frac{4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ينتج أن المعادلة $9x^2-16=0$ تقبل حلين مختلفين وهما $-\frac{4}{3}$ و $\frac{4}{3}$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\left\{-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right\}$.

• لدينا $(2x-1)(x+3)-(2x-1)(4x+2)=0$

يعني $(2x-1)[(x+3)-(4x+2)]=0$

أي $(2x-1)(x+3-4x-2)=0$

أي $(2x-1)(-3x+1)=0$

أي $2x-1=0$ أو $-3x+1=0$

إذن $x=\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{1}{3}$

ينتج أن المعادلة $(2x-1)(x+3)-(2x-1)(4x+2)=0$ تقبل حلين مختلفين هما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$. إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$.

4 - حل متراجحة من الشكل $A(x)\,B(x)\leq 0$ حيث $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان من الدرجة الأولى

طريقة : • لحل متراجحة من الشكل $A(x)\,B(x)\leq 0$ نعتمد على إشارة الجداء $A(x)\,B(x)$

• لدراسة إشارة الجداء $A(x)\,B(x)$ نعتمد على قواعد الإشارة ونستعين بجدول الإشارات .

تمرين : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $(3x-1)(x+2) \leq 0$ ؛ $(2-5x)(1-x) > 0$

حل : – إنجاز جدول إشارة الجداء $(3x-1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x-1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول ينتج أن $(3x-1)(x+2) \leq 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in \left[-2 ; \frac{1}{3}\right]$
إذن مجموعة حلول المتراجحة $(3x-1)(x+2) \leq 0$ هي المجال $\left[-2 ; \frac{1}{3}\right]$.

– إنجاز جدول إشارة الجداء $(2-5x)(1-x)$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
$2-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2-5x)(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول ينتج أن $(2-5x)(1-x) > 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in \left]-\infty ; \frac{2}{5}\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$
إذن مجموعة حلول المتراجحة $(2-5x)(1-x) > 0$ هي $\left]-\infty ; \frac{2}{5}\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$

5 – حل متراجحة من الشكل $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ حيث $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان من الدرجة الأولى

طريقة : – لحل متراجحة من الشكل $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ نعتمد على إشارة $\frac{A(x)}{B(x)}$ حيث $B(x) \neq 0$
– إشارة $\frac{A(x)}{B(x)}$ هي إشارة الجداء $B(x)\ A(x)$ حيث $B(x) \neq 0$.

تمرين : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين : $\frac{3x+2}{x-1} \leq 0$ ؛ $\frac{x+4}{x+2} > 0$.

حل : • من جدول إشارة $\frac{3x+2}{x-1}$ التالي :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x+2}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

العبارة $\frac{3x+2}{x-1}$ غير معرفة عند العدد 1 . (الشريط المبين في الجدول يعبر عن ذلك) .

ينتج أن $\frac{3x+2}{x-1} \leq 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in [-\frac{2}{3} ; 1[$.

إذن مجموعة حلول المتراجحة $\frac{3x+2}{x-1} \leq 0$ هي المجال $[-\frac{2}{3} ; 1[$.

• من جدول إشارة $\frac{x+4}{x+2}$ التالي :

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+4}{x+2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

ينتج أن $\frac{x+4}{x+2} > 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in]-\infty ; -4[\cup]-2 ; +\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة $\frac{x+4}{x+2} > 0$ هي $]-\infty ; -4[\cup]-2 ; +\infty[$.

صحيح - خاطىء

اذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة .

1) نشر العبارة $(-x+3)^2$ هو x^2-6x+9.

2) نشر العبارة $(x+1)\ (x-1)$ هو x^2+1.

3) تحليل العبارة $(x-2)\ (3-x)\ +x\ (x-2)$ هو $3\ (x-2)$.

4) تحليل العبارة $16\ x^2+16\ x+1$ هو $(x+4)^2$.

5) العدد 2 هو حل المعادلة $-2\ x=0$.

6) العدد 1 هو حل المعادلة $5\ x-5=0$.

7) مجموعة حلول المتراجحة $-3\ x>0$ هي المجال $]0\ ;+\infty[$.

8) مجموعة حلول المتراجحة $\sqrt{2}\ x<0$ هي المجال $]-\infty\ ;0[$.

9) مجموعة حلول المعادلة $3\ x\ (x-1)=0$ هي $\{1\}$.

10) مجموعة حلول المتراجحة $x^2-1>0$ هي $]1\ ;+\infty[$.

11) مجموعة حلول المعادلة $\frac{x-2}{x+2}=0$ هي $\{2\}$.

12) إذا كان $x=2$ فإن $x^2=4$.

13) إذا كان $x^2=4$ فإن $x=2$.

14) إذا كان $x>3$ فإن $x^2>9$.

15) إذا كان $x^2>9$ فإن $x>3$.

16) إذا كان $x>-3$ فإن $x^2>9$.

التحليل والنشر

1 انشر العبارات التالية :

$(x-3)^2$ ؛ $(\frac{1}{3}x+6)^2$ ؛

$(2x-1)(2x+1)$ ؛ $(-5x+3)(2x-1)$ ؛

$(3x+2)(x-2)+(2x-1)\ (x+2)$

$(3x+2)^2+(2x-3)^2$.

2 حلّل العبارات التالية :

x^2+4x+4 ؛ $4x^2+4x+1$ ؛

$16\ x^2-24\ x+9$ ؛ $25\ x^2-1$ ؛

$(2x-1)^2-(3x+4)^2$ ؛ $9\ (x+2)^2-4$ ؛

$(x-2)\ (4x-1)-(4x-1)\ (x+2)$ ؛

$(2x+3)^2+(x+6)\ (4x+6)$.

المعادلات

3 حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$5x-3=0$ ؛ $-2x+4=0$ ؛

$\frac{1}{2}\ x=0$ ؛ $-\sqrt{2}\ x=0$ ؛

$4x-3=7$ ؛ $x+3=2x+6+x$

تمـــارين ومسائـــل

4 x عدد حقيقي و $P(x)$ عبارة معرّفة كما يلي :

$$P(x)=(3x-5)(5-2x)-(3x-5)^2$$

- حلّل $P(x)$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

5 x عدد حقيقي و $A(x)$ ؛ $B(x)$ عبارتان معرفتان كما يلي :

$$A(x)=9x^2-5 \text{ ؛ } B(x)=x^2+2\sqrt{2}\,x+2$$

- حلّل $A(x)$ ؛ $B(x)$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى .
- حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين $A(x)=0$ ؛ $B(x)=0$.

6 حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $3x^2-7x=0$.

7 حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{4}=0$.

8 حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{4x+7}{5}-\frac{x-5}{3}=\frac{2x-3}{6}$.

9 حلّل إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى العبارة $P(x)$ حيث :

$$P(x)=(2x-3)^2+(4x^2-9)-(2x-3)(x+5)$$

- حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

10 حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$x^2-2x=0$ ؛ $\frac{x^2}{16}-\frac{49}{25}=0$ ؛ $x^2-2x=-1$ ؛

$(x-2)(2x+3)+5(x-2)=0$

$(3x+2)^2-x^2=0$ ؛ $(x+1)^2=(2x-3)^2$

$9x^2-1=6x+2$.

11 حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$\frac{x+1}{x+2}=0$ ؛ $\frac{3x-1}{4-x}=0$ ؛ $\frac{2x+5}{3x-3}=0$

$\frac{x-3}{4x}=\frac{2x+1}{x}$ ؛ $\frac{x+4}{x-1}=\frac{3x+5}{x-1}$

المتراجحات

12 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$2x-5\geq 0$ ؛ $x+1<-3$ ؛ $3x>4$ ؛

$-5x\leq 1$ ؛ $4x+5\leq 3$ ؛ $7-x>10$ ؛

$2x-3<3x-2$ ؛ $3x+1>1-x$ ؛

$\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}<\frac{4}{3}x+\frac{3}{4}$

13 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$\frac{x+1}{3}\leq\frac{2x+3}{4}$ ؛ $\frac{x+2}{3}+\frac{2x-5}{2}\leq 0$

$4-\frac{x+2}{3}\geq 0$ ؛ $3x<0$ ؛ $\frac{x}{7}<1$ ؛ $\frac{x}{2}<0$

14 حلّل إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى العبارة $P(x)$ حيث :

$$P(x)=(x+3)^2-4(x+3).$$

- أدرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x.
- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)\leq 0$.

15 حلّل إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى العبارة $T(x)$ حيث

$$T(x) = (x-1)(x+2) - (x-1)(3x-2)$$

– حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $T(x) > 0$.

16 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$(x+2)(x-3) \geq 0$ ؛ $(x-2)(2x-1) < 0$

$(x+4)^2 - 9(x+4) \geq 0$ ؛ $3x^2 - 5x < 0$

$(x-7)^2 - 25 < 0$ ؛ $(2x+3)^2 - 64 > 0$ ؛

$(5x+3)^2 \leq 9$ ؛

$(4x^2 - 9) + 5(2x-3) > 0$ ؛

$(x-1)^2 + 16 > 0$ ؛ $x^2 + 2x + 1 < 0$.

17 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$\dfrac{x-5}{x+5} > 0$ ؛ $\dfrac{x+5}{x-5} \leq 0$ ؛

$\dfrac{-x}{x-1} < 0$ ؛ $\dfrac{2x}{3x+1} < 0$.

مسائل

18 قالت نوال لأختها سارة : " عمري الآن 21 سنة وعمر أبي 57 سنة ". بعد كم سنة يكون عمر أبي ضعف عمري ؟

19 قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها 230 m. ينقص عرضها عن طولها بـ 15 m. أحسب طول وعرض هذه القطعة .

20 ثمن 7 أكياس من السكر و3 علب من القهوة هو 585 دينارا. علما أن ثمن علبة القهوة هو ضعف ثمن كيس السكر، احسب ثمن علبة القهوة وثمن كيس السكر.

21 مجموع ثلاثة أعداد هو6385. يزيد ثانيها عن الأصغر بـ 580 وينقص عن الأكبر بـ 950. أحسب هذه الأعداد .

22 ما هو العدد الطبيعي الذي لو ربعته وأنقصت ضعفه ثم أضفت 1 لوجدت 121 ؟

23 أوجد العدد الصحيح النسبي الذي لوأضفته إلى كل من بسط و مقام الكسر $\dfrac{4}{3}$ لوجدت $\dfrac{3}{4}$.

24 مجموع ثلاثة أعداد هو 5220. عين هذه الأعداد في الحالتين التاليتين :

. الأعداد الثلاثة هي أعداد طبيعية متتابعة .

. الأعداد الثلاثة متناسبة مع الأعداد 3 ؛ 4 ؛ 5 على الترتيب.

25 كلف المكتبي في ثانوية بشراء نسخ من مجلة ثقافية في الرياضيات ، طلبها بعض التلاميذ من الجذع المشترك آداب . يبلغ سعر هذه المجلة 150 دينارا في معرض للكتاب و 175 دينارا في مكتبة المدينة .

إن نقل المجلة من المعرض يكلف 800 دينارا ومن المكتبة يكلف 200 دينارا.

1. هل تنصح المكتبي بشراء هذه النسخ من المعرض أومن المكتبة إذا علمت أن عدد التلاميذ الراغبين في اقتناء المجلة هو : 15 ؟ 20 ؟ 25 ؟ 30 ؟.

2. ما هو عدد التلاميذ الذي تكون من أجله كلفة الكتب واحدة ؟ احسب هذه الكلفة .

الباب

4

عموميات على الدوال

1 • مفهوم دالة

2 • التمثيل البياني لدالة

3 • اتجاه تغير دالة

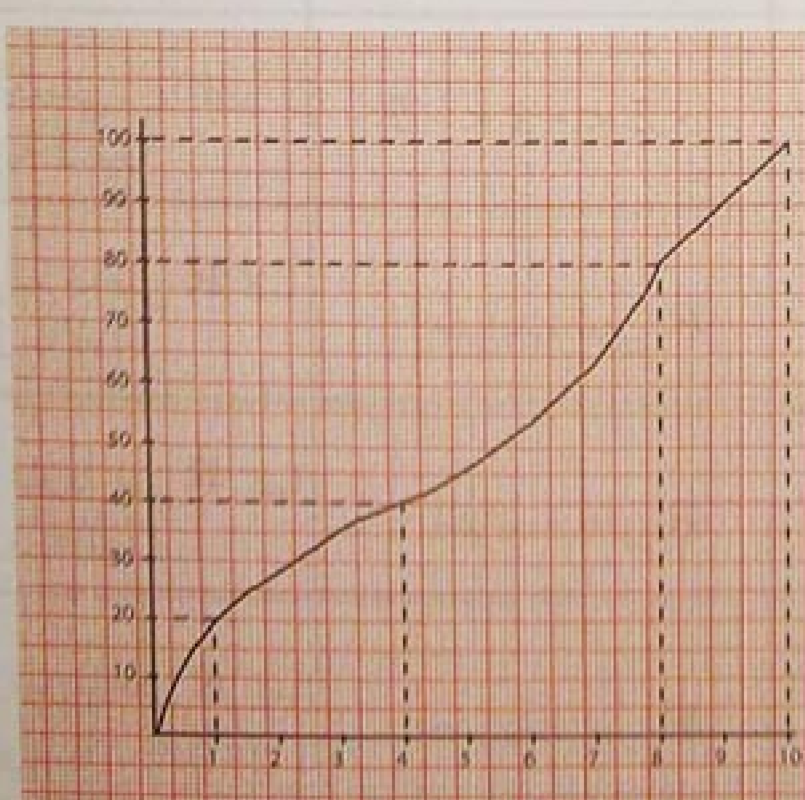
4 • القيم الحدية لدالة على مجال

قال هيرمان وايل (رياضياتي ألماني عاش في القرن العشرين) :

« لم يتوصل أي واحد إلى شرح معنى الدالة ، والحال أن الدالة تعرّف كلما استطعنا ، وبوسيلة ما ، أن نرفق بعدد عدداً » .

• سعة الجرّة 100 لتر وارتفاعها 100 سنتيمتر . تملأ من حنفية تدفقها 10 لترات من الماء في الدقيقة .

• المنحنى يمثل ارتفاع الماء في الجرة خلال 10 دقائق .



استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة

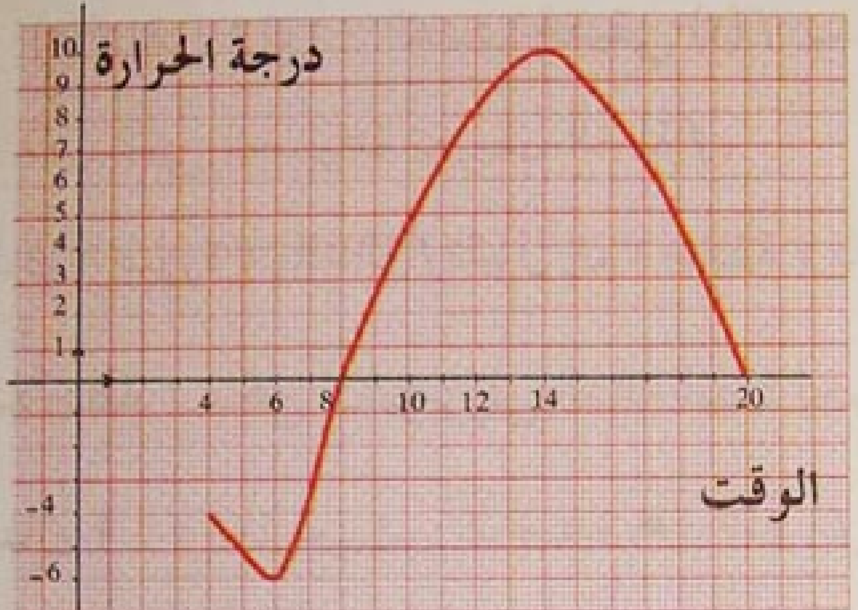
السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
x عدد حقيقي . إذا كان $f(x) = 2x + 3$ فإن صورة العدد 1 بالدالة f هي	3	- 2	5
x عدد حقيقي . إذا كان $f(x) = -x + 3$ فإن سابقة العدد 1 بالدالة f هي	0	2	4
x عدد حقيقي . إذا كان $2 < x < 5$ فإن	$2 < x^2 < 5$	$4 < x^2 < 25$	$4 < x^2 < 10$
x عدد حقيقي . إذا كان $1 < x < 3$ فإن	$1 < \frac{1}{x} < 3$	$1 < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < \frac{1}{x} < 1$
x عدد حقيقي . إذا كان $4 < x < 9$ فإن	$2 < \sqrt{x} < 3$	$4 < \sqrt{x} < 9$	$16 < \sqrt{x} < 81$
x عدد حقيقي . إذا كان $-2 < x < 6$ فإن	$-1 < x + 3 < 6$	$+2 < x + 3 < 9$	$1 < x + 3 < 9$
x عدد حقيقي . إذا كان $2 < x < 5$ فإن	$-2 < -x < -5$	$2 < -x < 5$	$-5 < -x < -2$
الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2$	متزايدة على $\mathbb{R}$	متناقصة على $\mathbb{R}$	ثابتة على $\mathbb{R}$
الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x$	متزايدة على $\mathbb{R}$	متناقصة على $\mathbb{R}$	ثابتة على $\mathbb{R}$
الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما كما يلي : $f(x) = -x$	متزايدة على $\mathbb{R}$	متناقصة على $\mathbb{R}$	ثابتة على $\mathbb{R}$

أنشطة تمهيدية

❖**نشاط 1** : يعمل رجل في دكان لأحد أقاربه . عند نهاية كل يوم يتقاضى أجرة قدرها 800 دينارا ونصف ما بقي من الدخل اليومي للدكان .

1) أوجد علاقة جبرية تعبّر عن الحصة اليومية لهذا الرجل بدلالة الدخل اليومي .
2) كم يتقاضى هذا الرجل إذا كان الدخل اليومي 6000 دينارا؟
3) ما هو الدخل اليومي إذا كانت حصة الرجل 1400 دينارا ؟

❖**نشاط 2** : تمّ تسجيل تغيرات درجة الحرارة في مدينة سطيف في احد ايام فصل الشتاء بين الساعة الرابعة صباحا والساعة الثامنة مساءا (الشكل المرفق بالنص يوضح ذلك) .



1) ما هي درجة الحرارة المسجلة على الساعة الرابعة ثم على الساعة الثانية عشر ؟
2) متى سجلت درجات الحرارة التالية : 8^0 ؛ 3^0 ؛ -4^0 ؛ 0^0 ؟
3) متى بلغت درجة الحرارة أقصى حدّ لها ؟
4) متى بلغت درجة الحرارة أدنى حدّ لها ؟

❖**نشاط 3** : سُجّل عدد السيارات التي تنتظر للتزود بالوقود في محطة بنزين ما بين الساعة السابعة صباحا والساعة التاسعة مساءا . والجدول المرفق يوضح ذلك .

1) ما هي الأوقات التي تكتظ فيها المحطة بالسيارات ؟
2) متى يكون أصغر عدد من السيارات في المحطة ؟
3) متى يكون أكبر عدد من السيارات في المحطة ؟

الساعة	7	12	16	18	21
عدد السيارات	1	12	4	15	6

1 - مفهوم دالة

$\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية ، D جزء منها .

تعريف : إن عملية إرفاق كل عدد حقيقي x من D بعدد حقيقي وحيد $f(x)$ من $\mathbb{R}$ تعرف دالة على D . نرمز لها عموما بالرمز f .

نكتب : $f : x \longmapsto f(x)$

الرمز $f(x)$ يقرأ f لـ x . العدد الحقيقي $f(x)$ يسمى صورة العدد الحقيقي x بالدالة f.

الجزء D يسمى مجموعة تعريف الدالة f.

إذا كان y صورة x بالدالة f نقول إن x سابقة y بالدالة f ونكتب : $y = f(x)$

ملاحظة : يمكن أن نرمز إلى الدالة أيضا بحرف من الحروف g ؛ h ؛ k ؛ ...

مثال 1 : f دالة حيث : $f : x \longmapsto 3x + 2$

مجموعة تعريف الدالة f هي $D =]-\infty \,;\, +\infty[$.

صورة العدد 4 - هي $f(-4)$ حيث $f(-4) = -10$

صورة العدد 4 هي $f(4)$ حيث $f(4) = 14$

صورة العدد 0 هي $f(0)$ حيث $f(0) = 2$

مثال 2 : $D =]-\infty \,;\, 0[\cup]0 \,;\, +\infty[$ هي مجموعة تعريف الدالة $g : x \longmapsto \frac{3}{x}$

صورة العدد 4 - هي $g(-4)$ حيث $g(-4) = -\frac{3}{4}$

صورة العدد 4 هي $g(4)$ حيث $g(4) = \frac{3}{4}$

صورة العدد 1 هي $g(1)$ حيث $g(1) = 3$

مثال 3 : $D = [0 \,;\, +\infty[$ هي مجموعة تعريف الدالة $h : x \longmapsto \sqrt{x}$

صورة العدد 4 هي $h(4)$ حيث $h(4) = 2$

صورة العدد 1 هي $h(1)$ حيث $h(1) = 1$

ملاحظة : يمكن تعريف دالة f على D بإحدى الطرق التالية :

– بدستور – بجدول قيم – بتمثيل بياني .

2 – التمثيل البياني لدالة

المستوي مزود بمعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ f دالة معرفة على الجزء D من $\mathbb{R}$.

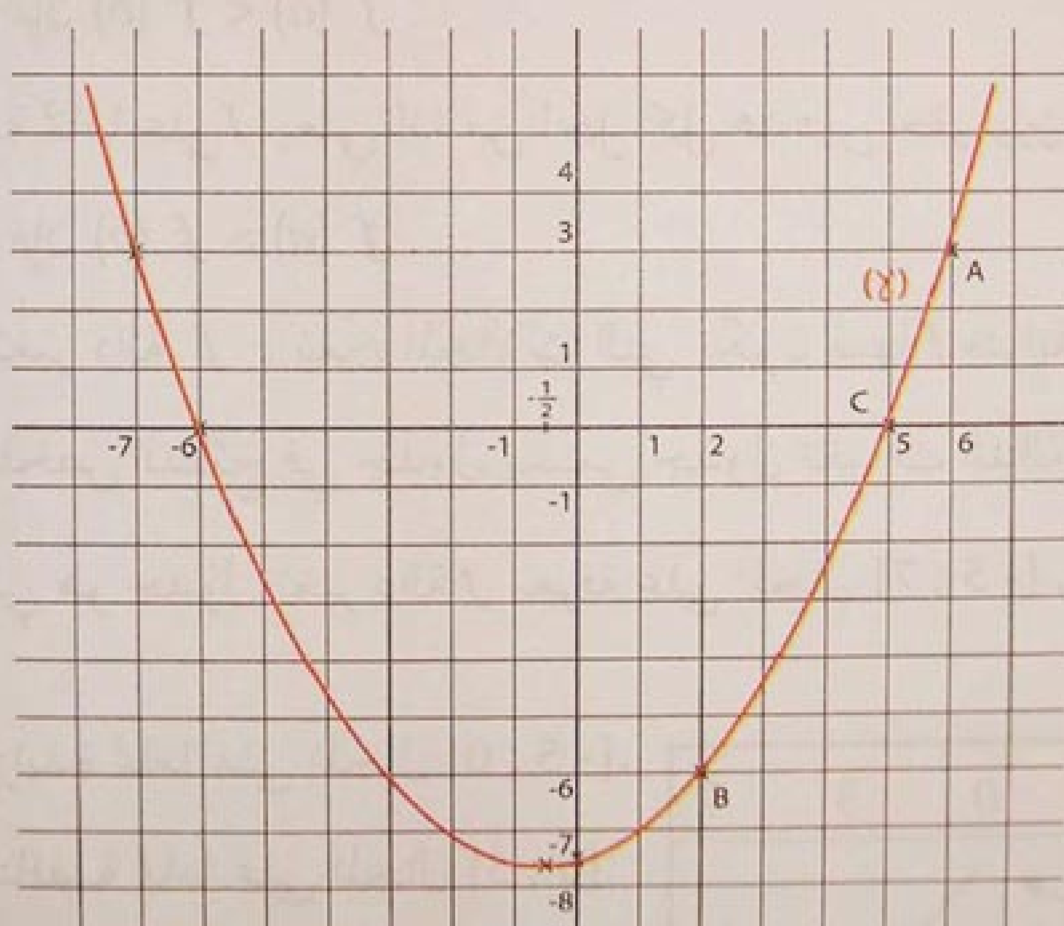
التمثيل البياني للدالة f ، نرمز له بالرمز (γ) ، هو مجموعة النقط M من المستوي التي إحداثياتها $(x ; y)$ حيث x عنصر من D و $y = f(x)$.

المعادلة $y = f(x)$ هي معادلة للمنحني (γ) .

مثال : f دالة معرفة على المجال $[-2 ; 6]$ بالمنحنى (γ). (الشكل التالي)

مجموعة تعريف الدالة f هي المجال $[-2 ; 6]$.

النقط التالية $A\,(6 ; 3)$ ، $B\,(2 ; -6)$ ، $C\,(5 ; 0)$ هي نقط من المنحنى (γ) .



لدينـا : $f(6) = 3$ ؛ $f(2) = -6$ ؛ $f(-1) = -\frac{15}{2}$ ؛ $f(5) = 0$.

نلاحظ أن للعدد 0 سابقتان هما 5 و 6– وللعدد 3 سابقتان هما 6 و 7– .

3 - اتجاه تغير دالة

مبرهنة : f دالة معرفة على المجال I .

- **الدالة f متزايدة على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين a ، b من I :**
إذا كان $a \leq b$ فإن $f(a) \leq f(b)$.
- **الدالة f متناقصة على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين a ، b من I :**
إذا كان $a \leq b$ فإن $f(a) \geq f(b)$.
- **الدالة f ثابتة على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين a ، b من I:**
$f(a) = f(b)$.

ملاحظات :

1) الدالة f متزايدة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين a ، b من I :
إذا كان $a < b$ فإن $f(a) < f(b)$.

2) الدالة f متناقصة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين a ، b من I :
إذا كان $a < b$ فإن $f(a) > f(b)$.

3) في دراسة اتجاه تغير دالة f ، نعيّن المجالات التي تكون فيها f متزايدة تماما أو متناقصة تماما أوثابتة ، ونلخّص النتائج في جدول يسمى جدول تغيرات الدالة f.

مثال : الجدول التالي هو جدول تغير دالة f معرفة على المجال $[-5 ; 7]$.

x	-5	0	3	7
$f(x)$	↗	↘	→	

- الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-5 ; 0]$.
- الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0 ; 3]$.
- الدالة f ثابتة على المجال $[3 ; 7]$.

ملاحظة : الدالة f متناقصة على المجال $[0 ; 7]$ لكنها ليست متناقصة تماما على هذا المجال .

أمثلة :

1) f ، g ، h دوال معرفة كما يلي :

$$f(x) = 3x + 4 \quad ; \quad g(x) = 2 - \frac{1}{x} \quad ; \quad h(x) = \sqrt{x}$$

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty ; +\infty[$ ؛ الدالة g متزايدة على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$ ؛ الدالة h متزايدة على المجال $[0 ; +\infty[$.

2) f ، g ، h دوال معرفة كما يلي :

$$f(x) = -2x + 1 \quad ; \quad g(x) = 3 + \frac{1}{x} \quad ; \quad h(x) = -\sqrt{x} .$$

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty ; +\infty[$ ؛ الدالة g متناقصة على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$ ؛ الدالة h متناقصة على المجال $[0 ; +\infty[$.

3) f ، g ، h دوال معرفة كما يلي :

$$f(x) = -5 \quad ; \quad g(x) = 3 \quad ; \quad h(x) = \sqrt{3} .$$

الدوال f . g . h ثابتة على المجال $]-\infty ; +\infty[$.

4) f دالة معرفة على المجال $[0 ; 8]$ كما يلي :

$f(x) = 2x + 1$ إذا كان $x \in [0 ; 2,5]$

و $f(x) = 6$ إذا كان $x \in [2,5 ; 5]$

و $f(x) = -x + 11$ إذا كان $x \in [5 ; 8]$

الدالة f متزايدة تماما على $[0 ; 2,5]$؛ ثابتة على $[2,5 ; 5]$ ومتناقصة تماما على $[5 ; 8]$.

جدول تغيرات f هو :

x	0	2,5	5	8
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\rightarrow$ 6	$\searrow$

4 - القيم الحدية لدالة على مجال

تعاريف : f دالة معرفة على مجال I . a عدد حقيقي من المجال I .

1) الدالة f تقبل قيمة كبرى على I عند a يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $f(x) \leq f(a)$.

2) الدالة f تقبل قيمة صغرى على I عند a يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $f(x) \geq f(a)$.

ملاحظات :

1) القيمة الكبرى للدالة f عند a هي أكبر قيمة للعدد $f(x)$ على I .

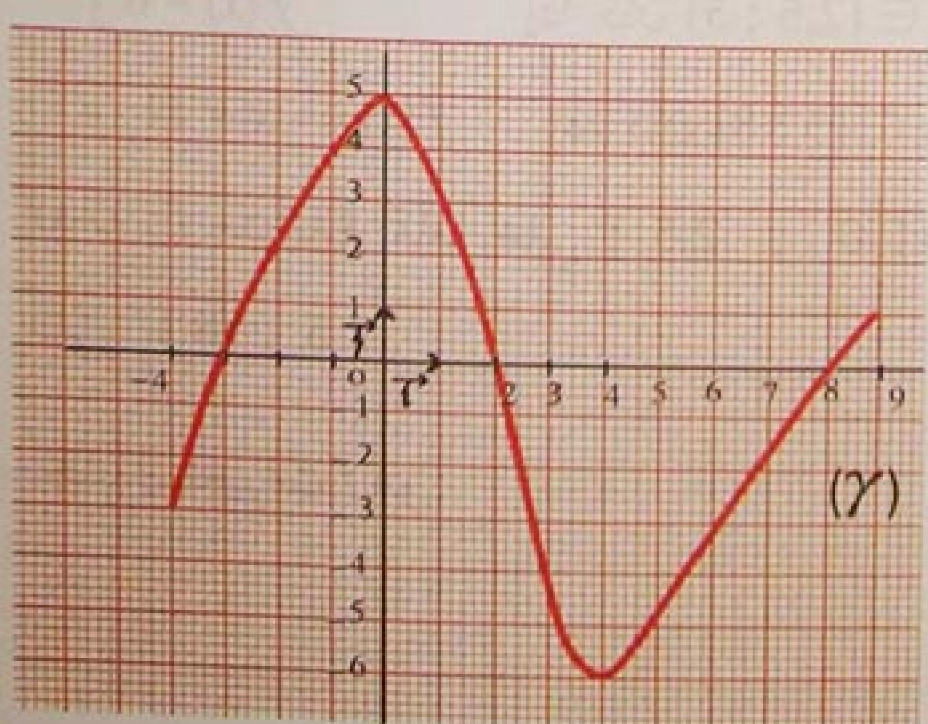
2) القيمة الصغرى للدالة f عند a هي أصغر قيمة للعدد $f(x)$ على I .

3) الدالة f تقبل قيمة حدية على المجال I إذا قبلت قيمة كبرى أو قيمة صغرى على I .

4) إذا قبلت الدالة f قيمة حدية $f(a)$ عند a من I فإن النقطة $M(a\,;f(a))$ هي نقطة حدية للمنحنى (γ) الممثل للدالة f.

مثال : (γ) منحنى دالة f على المجال $[-4\,;9]$. (الشكل) .

الدالة f معرفة على $I = [-4\,;9]$



من أجل كل عدد x من I ، $f(x) \leq 5$.

وبما أن $f(0) = 5$ إذن f تقبل قيمة كبرى وهي 5 عند العدد 0 .

من أجل كل عدد x من I ؛ $f(x) \geq -6$

وبما أن $f(4) = -6$ فإن f تقبل قيمة صغرى 6 - عند العدد 4 .

1 - تعريف دالة بواسطة دستور

طريقة : D **جزء من** $\mathbb{R}$ **.**

لتعريف دالة f **بواسطة دستور نعبر عن** $f(x)$ **بدلالة** x **حيث** x **عنصر من** D **.**

تمرين : نرفق بكل عدد حقيقي x من المجال $[1 ; 20]$ العدد الحقيقي $f(x)$

حيث : $f(x) = 2x + 3$.

1) هل عرّفنا بهذه الكيفية دالة f ؟

2) في حالة الإيجاب هل العدد 5 ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة f ؟

إذا كانت الإجابة "نعم"، احسب صورة العدد 5 بالدالة f .

حل : 1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1 ; 20]$ يمكن حساب العدد $2x + 3$

وذلك بتعويض x في الدستور $2x + 3$ ويكون هذا العدد وحيدا .

إذن كل عدد حقيقي x من $[1 ; 20]$ يرفق بعدد حقيقي واحد بالدالة f .

نكتب : $f(x) = 2x + 3$ بحيث $x \in [1 ; 20]$.

ونكون بذلك قد عرفنا دالة بواسطة دستور .

2) العدد 5 عنصر من $[1 ; 20]$ و f معرفة على المجال $[1 ; 20]$

إذن 5 ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة f .

وصورة العدد 5 هي $f(5)$ حيث $f(5) = 2 \times 5 + 3$ أي أن $f(5) = 13$.

2 - تعريف دالة بواسطة جدول قيم

طريقة : **تعريف دالة بجدول قيم هو إعطاء قيم من جدول للمتغير** x **وصورها** y **.**

تمرين : قطع دراج مسافة y (بالأمتار) خلال مدة زمنية t .

بعض النتائج مسجلة في الجدول المقابل .

هل عرّفنا بهذه الكيفية دالة ؟

t (min)	1	2	3	4	5	6
y (m)	34	64	94	124	154	184

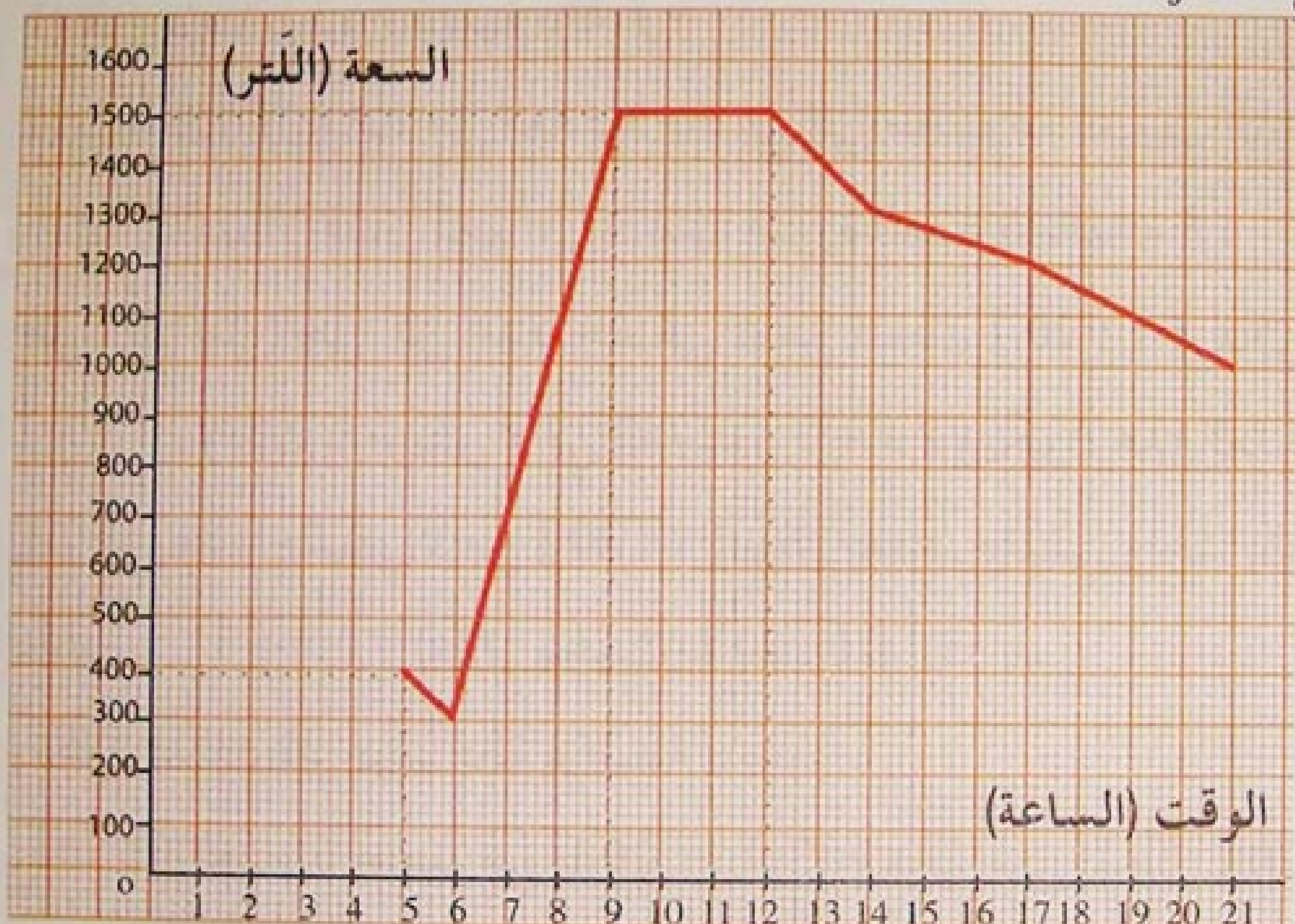
حل : هذا الجدول يعرّف دالة f ترفق بلحظة t من الفترة الزمنية $[1 ; 6]$ المسافة المقطوعة y .

3 - تعريف دالة بواسطة منحن

طريقة : تعريف دالة بمنحن هو إعطاء منحن في مستو منسوب إلى معلم يسمح بقراءة فاصلة وترتيب كل نقطة منه .

تمرين : المنحنى التالي يوضح تغيرات سعة خزان ماء مقدرة باللّتر من الساعة الخامسة صباحا إلى الساعة التاسعة مساءا .

1) هل يعرف هذا المنحنى دالة f ؟



2) إذا كانت الإجابة "نعم" ، عيّن سعة هذا الخزّان في الأوقات التالية :
الساعة 5 ؛
الساعة 9 ؛
الساعة 12 ؛
الساعة 14 ؛
الساعة 21 .

حل : 1) بكل لحظة من الفترة الزمنية [21 ; 5] أرفقت كمية الماء الموجودة بهذا الخزان .
إذن هذا المنحنى يعرف دالة f على المجال [21 ; 5] حيث يرفق بكل عنصر x من [21 ; 5] عدد حقيقي وحيد y من [1500 ; 300] .

2) من المنحنى نقرأ : $f(5) = 400$ أي سعة الخزان على الساعة 5 هي 400 لترا .
وبالمثل $f(21) = 1000$ ، $f(14) = 1300$ ، $f(12) = 1500$ ، $f(9) = 1500$.

4 - تعين مجموعة تعريف دالة معرّفة بدستور

طريقة : لتعيين مجموعة تعريف دالة f معرّفة بدستور ، نستثني من مجموعة الأعداد الحقيقية ، تلك التي لا يمكن حساب صورها بالدالة f.

تمرين : عيّن مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g حيث:
$f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

حل : • لكل عدد حقيقي x صورة واحدة $x^2 - 3$ بواسطة f.

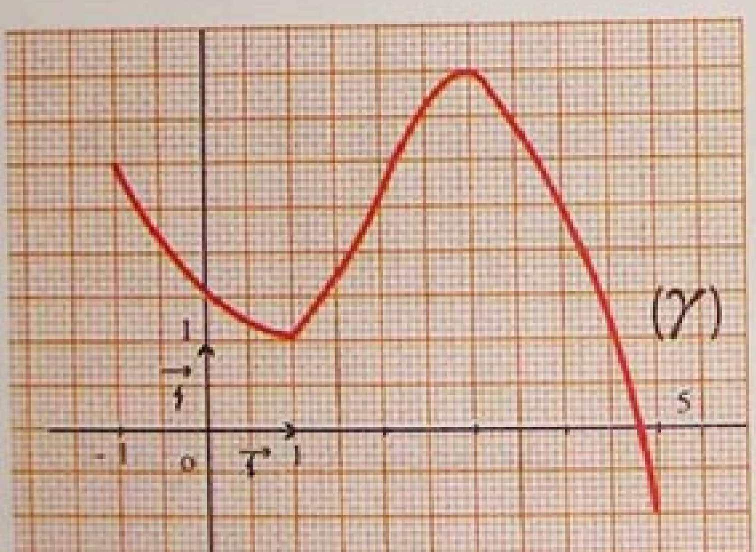
إذن مجموعة تعريف f هي $\mathbb{R}$. أي أن f معرّفة على المجال $]-\infty ; +\infty[$.

• العدد 2 هو العدد الوحيد الذي يعدم المقام $x - 2$ يعني أن 2 ليس له صورة بالدالة g. إذن مجموعة تعريف g هي المجموعة $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

5 - تعيين جدول تغيرات دالة إنطلاقا من تمثيلها البياني

طريقة : **يتم تعيين جدول تغيرات دالة إنطلاقا من تمثيلها البياني بقراءة المجالات المتعلقة بسلوك الدالة – على محور الفواصل – ثم تنظيمها في جدول التغيرات.**

تمرين : لاحظ المنحنى (γ) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .



حل : من الشكل المقابل ، نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $[-1 ; 1]$ ؛ متزايدة على المجال $[1 ; 3]$ ومتناقصة على المجال $[3 ; 5]$.
ويكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1	1	3	5
$f(x)$	$3 \searrow$	$1 \nearrow$	$4 \searrow$	-1

6 - رسم تمثيل بياني لدالة إنطلاقا من جدول تغيراتها

طريقة : **يتم رسم تمثيل بياني لدالة إنطلاقا من جدول تغيراتها بقراءة سلوك هذه الدالة على مختلف المجالات المكونة لمجموعة تعريفها وتمثيلها في معلم مناسب.**

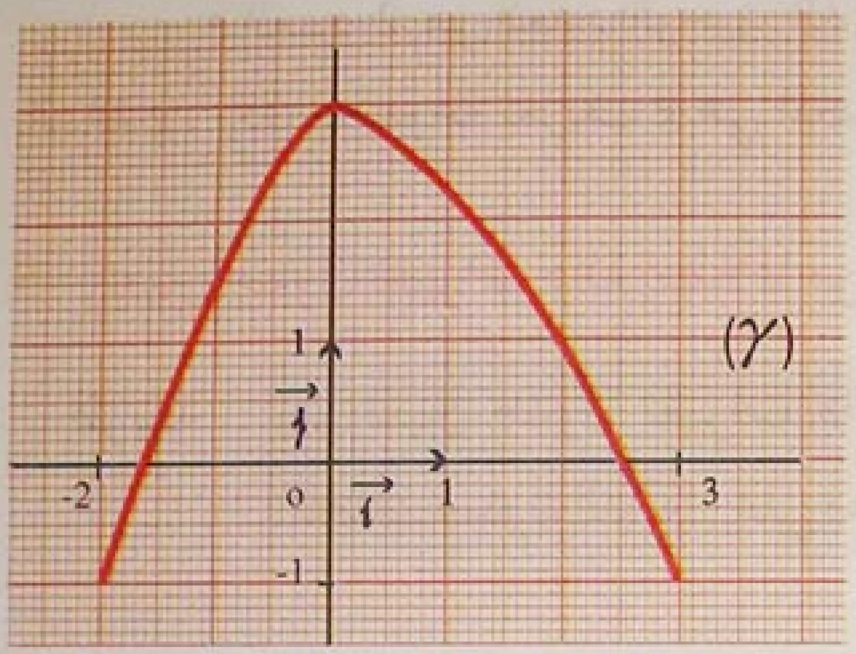
تمرين : لاحظ جدول تغيرات الدالة f المقابل ، ثم ارسم تمثيلا بيانيا في معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ للمستوي .

x	-2 0 3
$f(x)$	-1 ↗ 3 ↘ -1

حل : – الدالة f معرّفة على المجال $[-2 ; 3]$.

– الدالة f متزايدة على المجال $[-2 ; 0]$

ومتناقصة على المجال $[0 ; 3]$.



$A\ (0;3)$ هي النقطة الحدية الكبرى للمنحنى (γ) .

ومنه يتم رسم تمثيل بياني « تقريبي » للدالة f انطلاقا من جدول تغيراتها .

7 – تعيين صورة عدد بدالة

طريقة : **لتعيين صورة عدد حقيقي a بدالة f نحسب العدد $f(a)$ وذلك بتعويض x بالعدد a في عبارة $f(x)$.**

تمرين : f دالة معرّفة على $[-2 ; 5]$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$.

عيّن صورة كل من الأعداد -1 ؛ 0 ؛ 4 بالدالة f .

حل :

$f(-1) = \dfrac{2(-1)+3}{-1+4} = \dfrac{1}{3}$ ، إذن صورة العدد -1 بالدالة f هي $\dfrac{1}{3}$.

$f(0) = \dfrac{2(0)+3}{0+4} = \dfrac{3}{4}$ ، إذن صورة العدد 0 بالدالة f هي $\dfrac{3}{4}$.

$f(4) = \dfrac{2(4)+3}{4+4} = \dfrac{11}{8}$ ، إذن صورة العدد 4 بالدالة f هي $\dfrac{11}{8}$.

8 - تعيين سابقة لعدد بدالة

طريقة : لتعيين سابقة لعدد حقيقي b بدالة f معرّفة على D نحل المعادلة $f(x) = b$ في المجموعة D .

- إذا كان لهذه المعادلة حل في D فهذا الحل هو سابقة للعدد b بالدالة f .

- إذا كانت هذه المعادلة لا تقبل حلا في D ، نقول إن العدد b ليس له سابقة بالدالة f .

تمرين : f دالة معرفة على $[-2 ; 5]$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$.

عيّن سوابق لكل من العددين 1 ؛ 2 بالدالة f .

حل : $f(x) = 1$ معناه $\frac{2x+3}{x+4} = 1$ إذن $x = 1$ وبالتالي فإن سابقة العدد 1 هي 1 بالدالة f.

$f(x) = 2$ معناه $\frac{2x+3}{x+4} = 2$ أي $2x + 3 = 2x + 8$. لا يوجد عدد حقيقي x يحقق المعادلة $2x + 3 = 2x + 8$. إذن المعادلة $f(x) = 2$ لا تقبل حلولا في المجال $[-2 ; 5]$.

نستنتج أن العدد 2 ليس له سوابق بالدالة f .

9 - قراءة صورة أو سابقة باستعمال منحن

طريقة : • لتعيين صورة a بدالة f معرّفة على D نقرأ ترتيب النقطة M من المنحنى (γ) التي فاصلتها a .

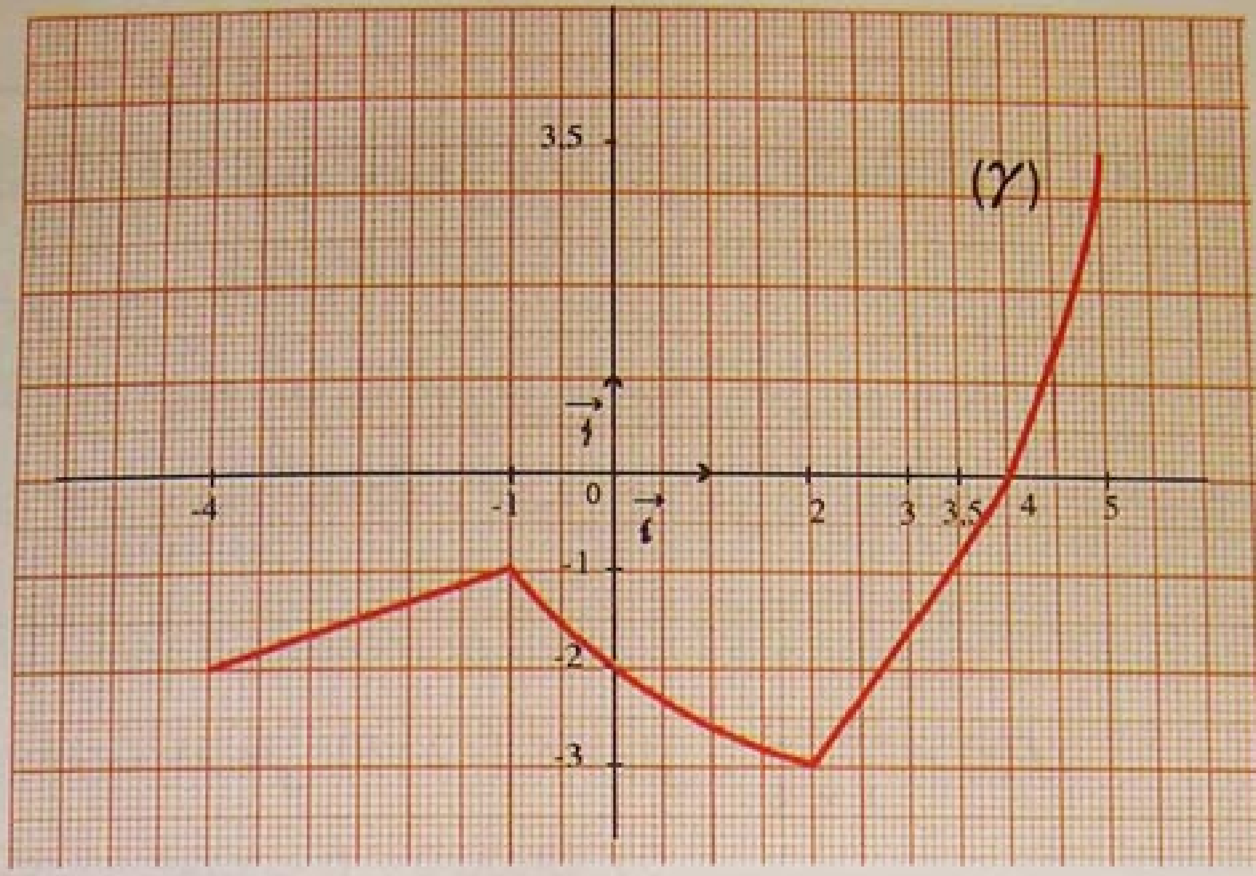
• لتعيين سابقة (أو سوابق) للعدد b بدالة f نقرأ فاصلة النقطة (أو فواصل النقط) M التي ترتيبها b .

تمرين :

f دالة معرّفة بتمثيلها البياني (γ) على المجال $[-4 ; 5]$ في المستوى المزود بمعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) ما هي صور الأعداد -4 ؛ 0 ؛ 5 ؛ 4 بالدالة f ؟

2) ما هي سوابق كل من العددين 0 ؛ -2 ؟



حل : حسب التمثيل البياني للدالة f المعرّفة على [5 ; 4 -] لدينا :

1) صور الأعداد 4 - ؛ 0 ؛ 5 ؛ 4 هي على التوالي : 2 - ؛ 2 - ؛ 3,5 ؛ 0.

2) سابقة 0 هي 4 .

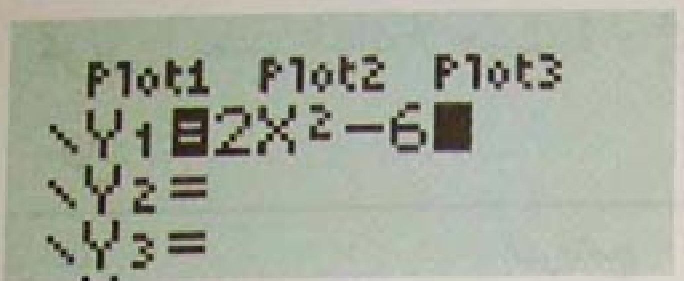
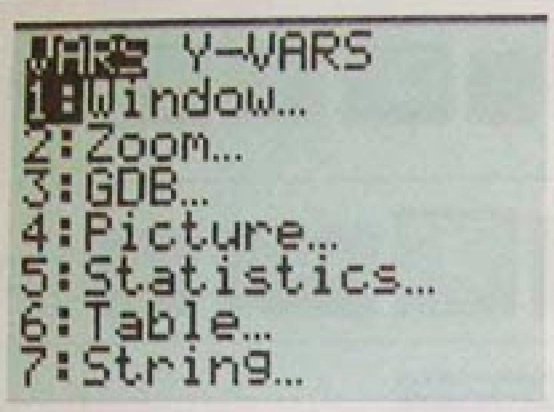
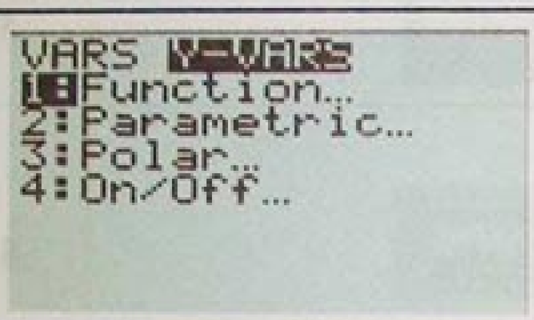
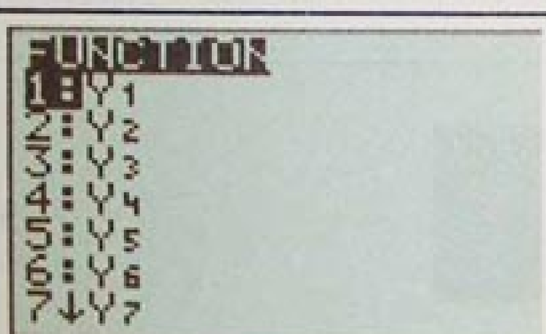
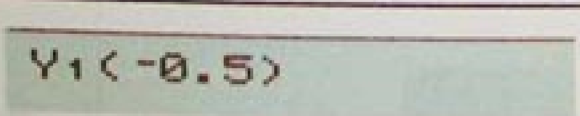
سوابق 2 - هي 4 - ؛ 0 ؛ 2,75 .

10 - تعيين صورة عدد وفق دالة باستعمال حاسبة بيانية

طريقة 1 : لتعيين صورة عدد وفق دالة بحاسبة بيانية نستعمل اللمسة VARS .

تمرين : نعتبر الدالة f حيث $f(x) = 2x^2 - 6$. احسب $f(-0{,}5)$ باستعمال حاسبة بيانية .

حل:

<table>
<tr><th>المرحلة</th><th>البرنامج</th><th>الشاشة</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td></tr>
</table>

إذن $Y_1\,(-0{,}5) = -5{,}5$ أي $f\,(-0{,}5) = -5{,}5$

طريقة 2 : لتعيين صورة عدد وفق دالة بحاسبة بيانية نستعمل الذاكرة باللمسة [STO→] لتخزين العدد ، واللمسة [VARS] لحساب هذه الصورة .

تمرين : نعتبر الدالة f حيث $f(x) = -x^3 + 1$. أحسب $f(-2)$ باستعمال حاسبة بيانية .

حل:

المرحلة	البرنامج	الشاشة
1	[Y=] [(-)] [X,T,θ,n] [^] [3] [+] [1]	Plot1 Plot2 Plot3 \Y1■-X^3+1■ \Y2=
2	[2nd] [MODE] [(-)] [2] [STO→] [X,T,θ,n]	-2→X■
3	[ENTER]	-2→X -2 ■
4	[VARS]	VARS Y-VARS 1:Window... 2:Zoom... 3:GDB... 4:Picture... 5:Statistics... 6:Table... 7:String...
5	[▶]	VARS Y-VARS 1:Function... 2:Parametric... 3:Polar... 4:On/Off...
6	[ENTER]	FUNCTION 1:Y1 2:Y2 3:Y3 4:Y4 5:Y5 6:Y6 7↓Y7
7	[ENTER]	-2→X -2 Y1
8	[ENTER]	-2→X -2 Y1 9

إذن $Y_1(-2) = 9$ أي $f(-2) = 9$.

تمـــارين ومســائـــل

صحيح - خاطىء

اذكر ان كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة

1) العلاقة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب x مربعه x^2 هي دالة .

2) إذا كان x عنصرًا من مجموعة تعريف دالة f فإن $f(x)$ موجود .

3) $M(3\,;\,-5)$ نقطة من التمثيل البياني لدالة f يعني $f(-5) = 3$.

4) سوابق أعداد حقيقية بدالة f هي فواصل نقط من تمثيلها البياني .

5) القيمة الصغرى لدالة هي ترتيب النقطة الحدية الصغرى لمنحني هذه الدالة .

6) إذا وجد عدد a من مجموعة التعريف D لدالة f ، حيث من أجل كل عنصر x من D ، $f(x) \geq f(a)$ ،

فإن $f(a)$ هي القيمة الكبرى للدالة f على D .

7) إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f(x) \geq 0$ ، فإن الدالة f متزايدة على D .

8) إذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[-1\,;\,2]$ حيث $f(-1) < f(2)$

فإن f متزايدة على $[-1\,;\,2]$.

9) الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{2}-1}$ غير معرّفة عند العدد 1 .

10) للعدد 4 سابقتان بالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2$.

11) للعدد 4 صورتان هما 2 - ؛ 2 بالدالة f المعرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x}$.

الصور والسوابق

1 f الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = 2x^2$.

1) عيّن صور الأعداد الحقيقية التالية : 0 ؛ $\sqrt{2}$ ؛ 4 - ؛ 6 بالدالة f .

2) عيّن ، إن وجدت ، سوابق الأعداد الحقيقية التالية : 0 ؛ 4 ؛ 4 - ؛ 5 بالدالة f .

2 f الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = -2x^2 + 1$$

1) عين مجموعة تعريف f .

2) ما هي صور الأعداد 1 - ؛ 2 ؛ 0 ؛ $\sqrt{2}$ ؟

3) ما هي سوابق العدد 7 - ؟

3 g الدالة المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \frac{3x}{x-1}$$

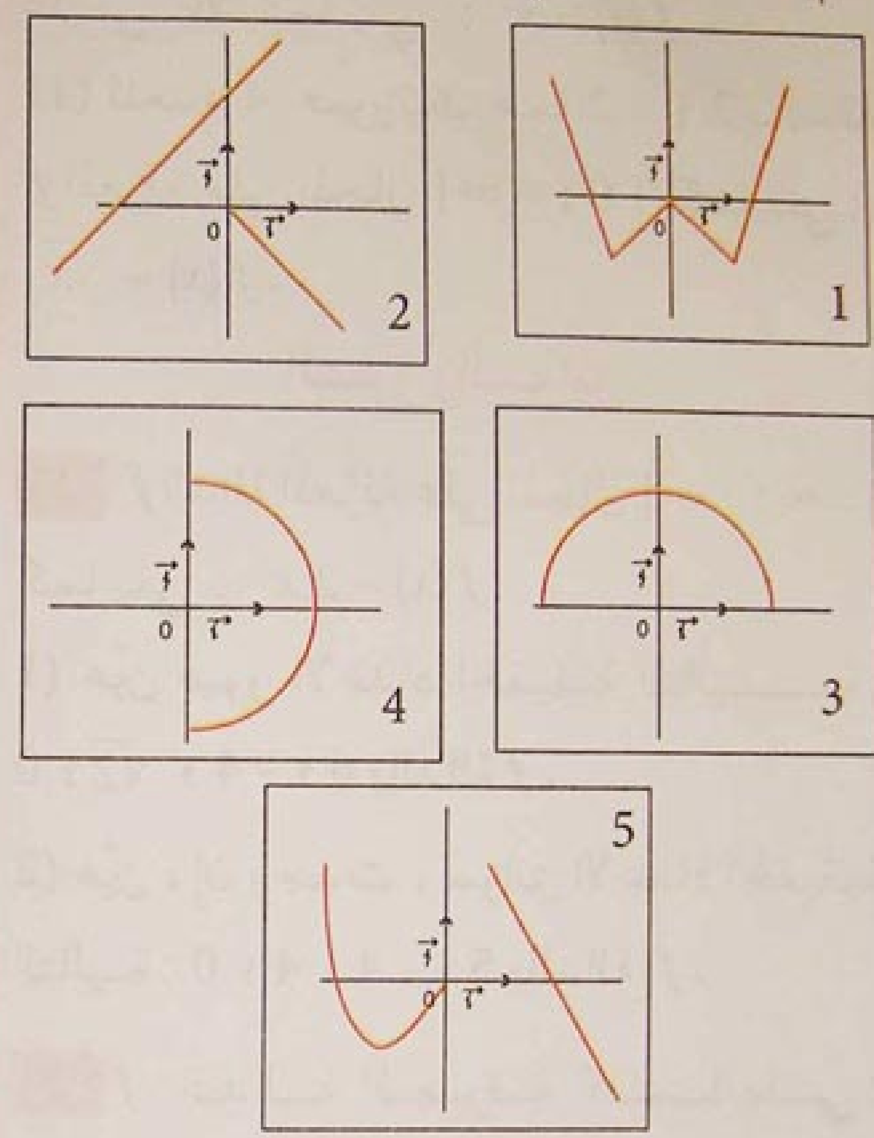
1) عين مجموعة تعريف الدالة g .

2) عين صور الأعداد 2 - ؛ 0 ؛ $\dfrac{4}{3}$ بالدالة g.

3) عين، إن وجدت ، سوابق كل من العددين 2 و 3 - بالدالة g .

التمثيلات البيانية

4 لاحظ التمثيلات البيانية التالية ثم حدّد منها التي تعرف دالة .



5 f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = -3x + 1$. (γ) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

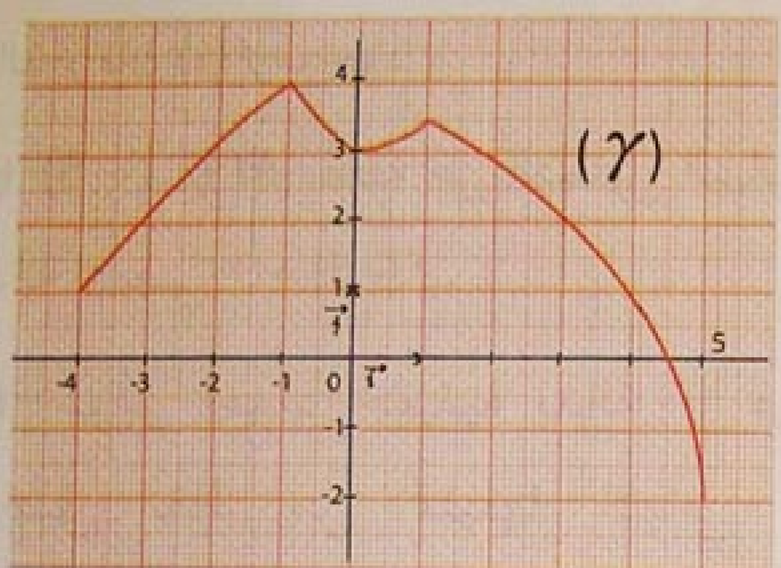
هل النقط $A(0 ; 1)$ ؛ $B(1 ; 2)$ ؛ $C(-1 ; 4)$ ؛ $D(\frac{1}{3} ; 0)$ تنتمي إلى المنحني (γ)؟

6 f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 2x - 5$. (γ) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم $(O , \vec{i}, \vec{j})$.

1) عين العدد الحقيقي a حتى تنتمي النقطة $M(a ; -1)$ إلى (γ) .

2) عين العدد الحقيقي b حتى تنتمي النقطة $P(1 ; b)$ إلى (γ) .

7 f دالة معرفة بتمثيلها البياني (γ)

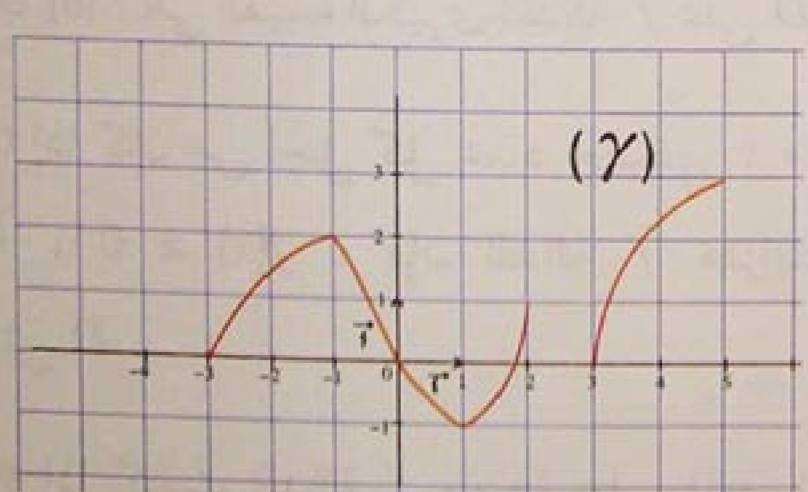


1) عين مجموعة تعريف f .

2) عيّن $f(0)$ ، $f(-4)$ ، $f(-1)$.

3) أنجز جدول تغيرات f .

8 g دالة عددية معرّفة بالمنحنى (γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل) .



1) ما هي مجموعة تعريف الدالة g ؟

2) عيّن $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g(3)$ ، $g(-1)$.

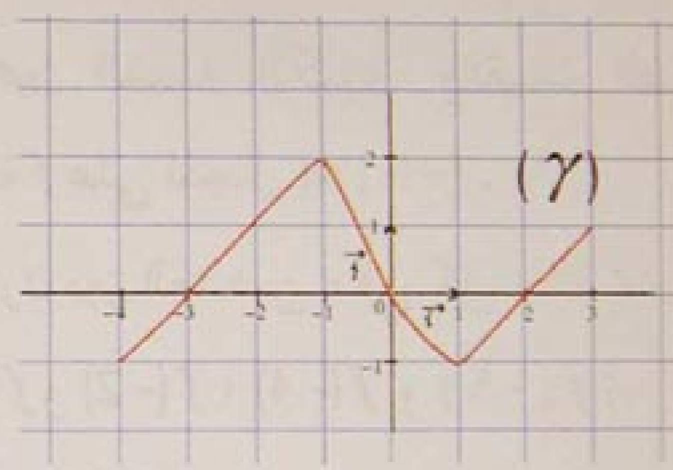
تمــــارين ومســائــــل

3) هل توجد سوابق لكل من العددين 1 - ، 3 بالدالة g ؟

4) أنجز جدول تغيرات الدالة g .

5) هل تقبل الدالة g قيما حدية ؟ عيّن هذه القيم إن وجدت .

9 المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (γ) التمثيل البياني للدالة g .



1) ما هي مجموعة تعريف الدالة g ؟

2) عيّن $g(-4)$ ، $g(0)$ ، $g(-1)$ ، $g(1)$

3) ما هي سوابق العدد 0؟

4) هل تقبل g قيما حدّية ؟ عيّنها إن وجدت .

مجموعة التعريف

10 عيّن مجموعة تعريف الدالة f المعرفة بعبارة $f(x)$ في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = 2x + 5$ 2) $f(x) = -\sqrt{2}x$

3) $f(x) = 3x^2 + 2$ 4) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

5) $f(x) = \sqrt{x-2}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$

تغيرات دالة - القيم الحدية

11 f دالة معرفة على المجال $[-6 ; 4]$ حيث جدول تغيراتها هو :

x	-6		-1		0		4
$f(x)$	0	↘	-5	↗	4	↘	2

1) على أي مجال تكون f متزايدة ؟

2) على أي مجال تكون f متناقصة ؟

12 إليك جدول تغيرات دالة g .

x	-10		-1		6		15
$g(x)$	0	↗	5	↘	0	↘	-2

1) عين مجموعة تعريف g .

2) عيّن سوابق العدد 0 بالدالة g .

3) كيف يسمى العدد 5 بالنسبة إلى الدالة g ؟

4) عين اتجاه تغيرالدالة g .

13 f دالة معرفة على المجال $[-5 ; 5]$ حيث جدول تغيراتها هو :

x	-5		-1		2		5
$f(x)$	-3	↗	6	↘	1	↗	4

1) حدّد اتجاه تغير الدالة f .

2) عيّن القيم الحدية للدالة f .

14 المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. f ، g ، h دوال معرفة على المجالات $]-\infty;4]$ ، $[-5;+\infty[$ ، $[-5;+7]$ بهذا الترتيب ، وجداول تغيراتها هي :

x	$-\infty$		-1		2		4
$f(x)$		↗	0	↗	5	↘	1

x	-5		-3		-2		2		$+\infty$
$g(x)$	5	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	

x	-5		-4		-3		0		2		4		7
$h(x)$	-2	↗	0	↗	5	↘	0	↘	-6	↗	0	↗	4

ارسم تمثيلا بيانيا لكل من الدوال f ، g ، h في المعلم السابق .

15 إليك جدول تغيرات دالة f.

x	-5		-2		$\frac{1}{2}$		4
$f(x)$	1	↘	0	↗	3	↘	0

1) عين مجموعة تعريف f.

2) عين اتجاه تغير f.

3) عين القيمة الكبرى والقيمة الصغرى للدالة f على المجال $[-5;4]$.

4) قارن بين العددين ، في كل حالة مما يلي :
$f(-1)$ و $f(-2)$ ؛ $f(-4)$ و $f(-5)$ ؛
$f(2)$ و $f(4)$

5) ما هي إشارة $f(x)$ على المجال $[-5;4]$؟

16 إليك جدول تغيرات دالة f معرّفة على المجال $[-5;3]$.

x	-5		-2		0		3
$f(x)$	-1	↗	4	↘	0	↗	3

1) عين القيمة الكبرى والقيمة الصغرى للدالة f على المجال $[-5;3]$.

2) قارن بين العددين ، في كل حالة مما يلي :
$f(-2)$ و $f(-4)$ ؛ 0 و $f(-1)$ ؛ -2 و $f(1)$
$f(2)$ و $f(-5)$ ؛ $f(2)$ و $f(1)$ ؛ -1 و $f(-3)$.

تمـــارين ومســـائـــل

17 إليك جدول تغيرات دالة f.

x	-5		-4		2		3		7
$f(x)$	-2	↗	0	↗	3	↘	0	↘	-1

1) عين مجموعة تعريف f.

2) عين اتجاه تغير f على المجال $[-5\,;7]$.

3) ارسم تمثيلا بيانيا (γ) للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

4) عين ، حسب قيم x ، إشارة العدد $f(x)$.

5) ماذا تمثل النقطة $M(2\,;3)$ في المنحنى (γ) ؟

حل معادلات ومتراجحات بيانيا

18 إليك جدول تغيرات دالة f معرفة على المجال $[-5\,;8]$.

x	-5		-1		4		5		8
$h(x)$	3	↘	0	↗	5	↘	0	↘	-2

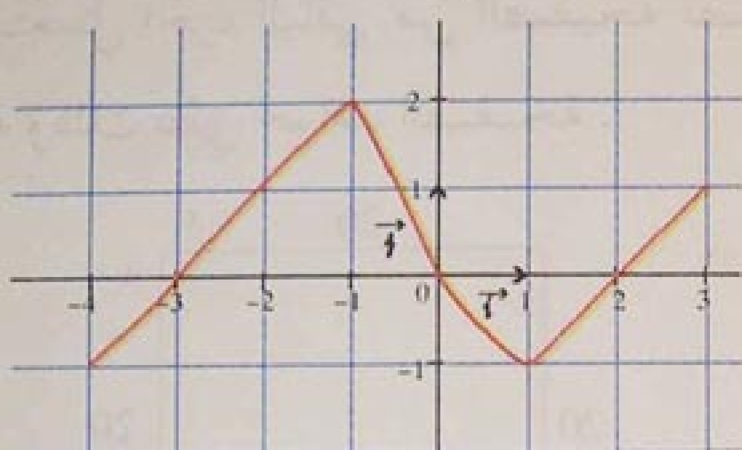
1) ارسم تمثيلا بيانيا للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

2) عيّن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ في المجال $[-5\,;8]$.

3) عين مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ ؛ ثم استنتج مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$ في المجال $[-5\,;8]$.

ما هي إشارة كل من $f(-4)$ ، $f(0)$ ، $f(6)$؟

19 (γ) التمثيل البياني للدالة f ، في مستو منسوب إلى معلم متعامدومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$



1) ما هي مجموعة تعريف f ؟

2) صف سلوك الدالة f في جدول تغيرات.

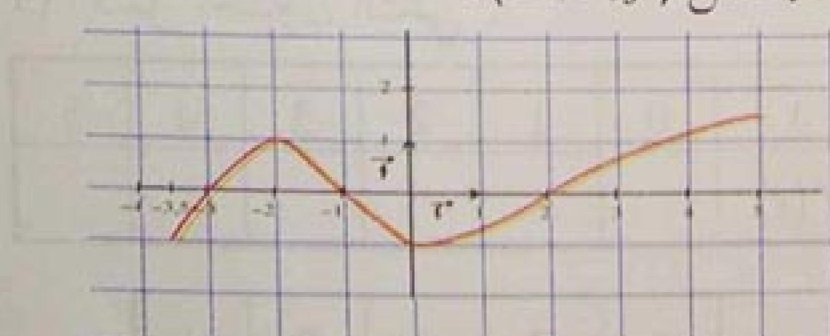
3) ما هي القيمة الكبرى للدالة f ؟

ما هي القيمة الصغرى للدالة f ؟

4) عين مجموعة حلول المعادلـة $f(x)=0$.

5) عين مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$.

20 إليـك التمثيـل البيانـي (γ) للدالـة f ، في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

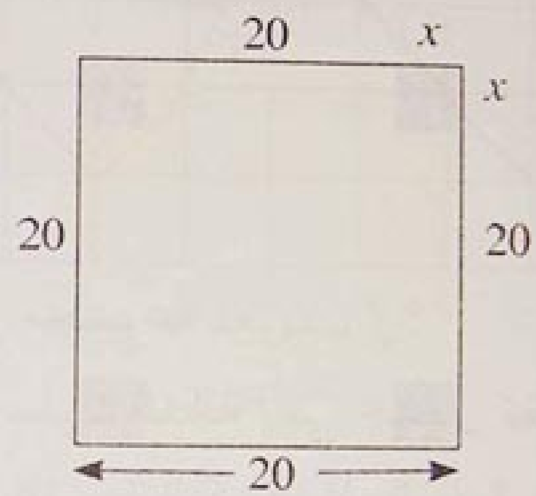


1) ما هي حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

2) حدّد إشارة $f(x)$ على المجال $[-3{,}5\,;5]$

مسائل

21 لصنع علبة بدون غطاء، نستعمل صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها 20 سنتمترا . يقطع عند كل ركن من هذه الصفيحة مربع طول ضلعه x سنتمترا ، ويستعمل الجزء الباقي من الصفيحة لصنع علبة وذلك بطي حواف الصفيحة .



1) احسب حجم الصفيحة من أجل $x = 2$.

2) احسب بدلالة x حجم العلبة .

3) f هي الدالة التي ترفق بكل عدد x حجم العلبة $f(x)$.

ما هي مجموعة تعريف f؟

4) أكمل الجدول التالي :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

6	7	8	9	10

22 f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

1) عين مجموعة تعريف f.

2) ما هي صورة $\dfrac{1}{2}$ بالدالة f ؟

3) هل للعدد 2 سوابق بالدالة f ؟

4) أكمل الجدول التالي :

x	-6	-5	-4	-3	$-\dfrac{5}{2}$	$-\dfrac{3}{2}$
$f(x)$						

-1	0	1	2	3	4

الباب

5

الدوال المرجعية

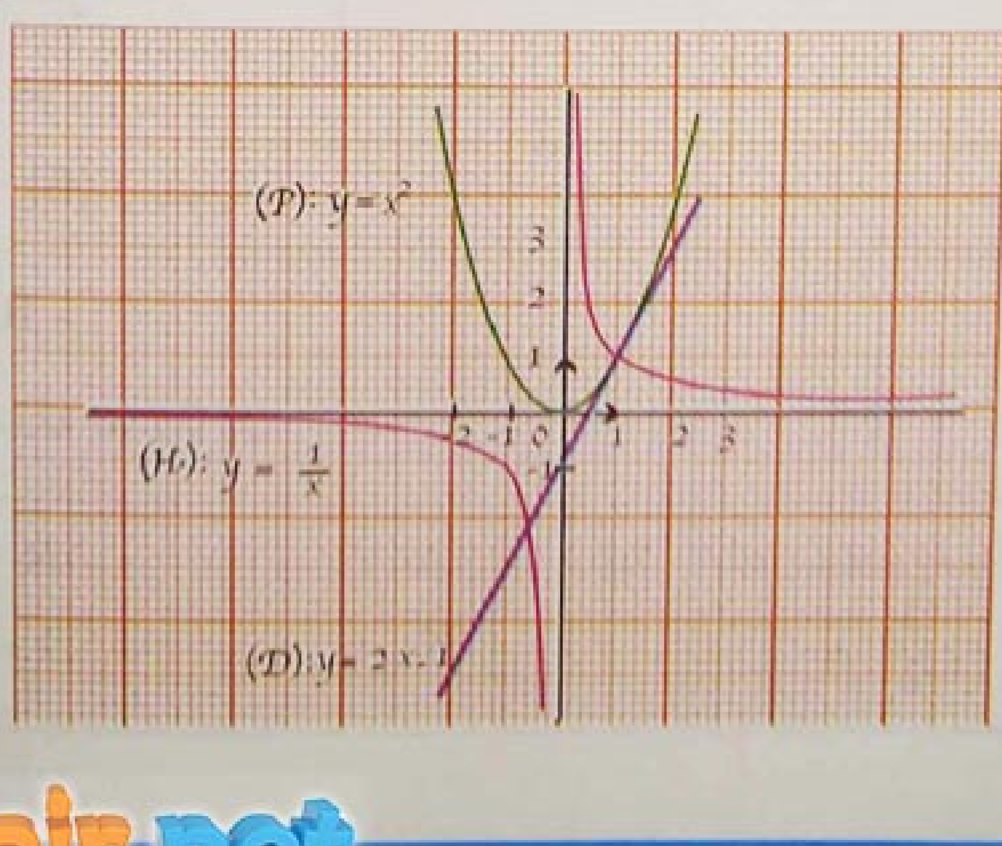
1• الدوال التآلفية

2• الدالة "مربّع"

3• الدالة "مقلوب"

القطع المكافىء والقطع الزائد من المنحنيات التي تنتج عن تقاطع مستو ومخروط دائري .
يعود اكتشاف مقاطع مستوية لمخروط دائري إلى الرياضياتي الفلكي اليوناني مِنيشم (حوالي 375 – 325 قبل الميلاد) . ويبقى الرياضياتي المتضلع في الهندسة أبولونيوس (200 – 260 قبل الميلاد) أكثر شهرة في هذا المجال من خلال مؤلفه حول القطوع المخروطية والذي يضم ما لا يقل عن 400 قضية . ويعتبر هذا المؤلف إنتاجا نظريا ثريا وكاملا .

وفي القرن السابع عشر ، عمّم ديكارت (1550 – 1596) استعمال المعادلات الجبرية لتمثيل منحنيات وتوصل إلى أن القطوع المخروطية تمثيلات بيانية معادلاتها من الدرجة الثانية .



استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1) مجموعة تعريف الدالة f المعرّفة بـ : $f(x) = -2x$ هي :	$]-\infty ; 0[$	$]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; +\infty[$
2) مجموعة تعريف الدالة f المعرّفة بـ : $f(x) = \sqrt{2}\,x + 3$ هي :	$]-\infty ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0[$
3) مجموعة تعريف الدالة f المعرّفة بـ : $f(x) = x^2 - 2$ هي :	$]-\infty ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0[$
4) مجموعة تعريف الدالة f المعرّفة بـ : $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ هي :	$]-\infty ; 1[$	$]1 ; +\infty[$	$]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$
5) إذا كانت f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -10x$ فإن $f(0)$ يساوي	-10	0	10
6) إذا كانت f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 3\sqrt{2}$ فإن $f(-1)$ يساوي	3	0	$-2+3\sqrt{2}$
7) إذا كانت f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x^2 + 2$ فإن $f(1)$ يساوي	1	2	3
8) إذا كانت f دالة معرّفة على $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{3}{x-3}$ فإن $f(0)$ يساوي	-1	1	3
9) f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3x - 1$. سابقة العدد 0 هي	2	$\dfrac{1}{3}$	0
10) f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 4x^2$. العدد 1	لا يقبل أية سابقة في $\mathbb{R}$	يقبل سابقتين وهما $\dfrac{1}{2}$ و $-\dfrac{1}{2}$	يقبل سابقة واحدة وهي $\dfrac{1}{2}$

أنشطة تمهيدية

❖ **نشاط 1** : المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 1 cm) .

(D) ، (D') ، (Δ) ، (Δ') ، (T) ، (T') مستقيمات من المستوي حيث :

$(D): y=3x+3$ ؛ $(D'): y=-x+3$ ؛ $(\Delta): y=\frac{5}{2}x$

$(\Delta'): y=-2x$ ؛ $(T): y=2$ ؛ $(T'): y=-3$

– أرسم المستقيمات (D) ، (D') ، (Δ) ، (Δ') ، (T) ، (T') في المعلم السابق .

❖ **نشاط 2** : f ، g دالتان معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=\frac{2}{3}x$ ؛ $g(x)=5x+2$.

1 – احسب $f(10)$ ؛ $f(100)$ و $f(110)$

– جد علاقة بين $f(10)$ ؛ $f(100)$ و $f(110)$.

– أثبت أنه إذا كان a ، b ، k أعدادًا حقيقية

فإن $f(a+b)=f(a)+f(b)$ و $f(ka)=k.f(a)$

2 – احسب $g(10)$ ؛ $g(100)$ ؛ $g(110)$.

– تحقّق أن $g(110)\neq g(100)+g(10)$.

– احسب $g(400)$ ثم تحقّق أن $g(400)\neq 4.g(100)$.

❖ **نشاط 3** :

1) f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2$.

– احسب النسبة $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ حيث x_1 ؛ x_2 عددان حقيقيان و $x_1\neq x_2$.

– أثبت أنه إذا كان للعددين x_1 و x_2 نفس الإشارة فإن لهذه النسبة إشارة ثابتة .

2) g دالة معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\frac{1}{x}$

x_1 ؛ x_2 عددان حقيقيان غير معدومين حيث $x_1\neq x_2$.

– احسب النسبة $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$

– أثبت أنه إذا كان للعددين x_1 ؛ x_2 نفس الإشارة فإن لهذه النسبة إشارة ثابتة .

1 - الدوال التآلفية

تعريف : a ، b عددان حقيقيان .

نسمي دالة تآلفية كل دالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ax+b$.

ملاحظات :

- إذا كان $b=0$ فإن الدالة f حيث $f(x)=ax$ تسمى دالة خطيّة .
- إذا كان $a=0$ فإن الدالة f حيث $f(x)=b$ تسمى دالة ثابتة .
- إذا كانت f دالة خطيّة فإن الصور تكون متناسبة مع السوابق ومعامل التناسب هو a .
- إذا كانت f دالة تآلفية فإن تزايدات الصور تكون متناسبة مع تزايدات السوابق ومعامل التناسب هو a .

أمثلة :

- الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-3x+1$ هي دالة تآلفية .
- الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=5x$ هي دالة خطيّة .
- الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\sqrt{2}$ هي دالة ثابتة .

• اتجاه التغيّر

مبرهنة :

f دالة تآلفية معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=ax+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان .

- **إذا كان $a<0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.**
- **إذا كان $a>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.**
- **إذا كان $a=0$ فإن الدالة f ثابتة على $\mathbb{R}$.**

فعلا : من أجل كل عددين حقيقيين x_1 ، x_2 ، $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)$.

نفرض أن $x_2 > x_1$.

– إذا كان $a < 0$ فإن $a(x_2 - x_1) < 0$

وبالتالي $f(x_2) - f(x_1) < 0$

إذن $f(x_2) < f(x_1)$

أو أيضا $f(x_1) > f(x_2)$

ينتج أنه : إذا كان $a < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

– إذا كان $a > 0$ فإن $a(x_2 - x_1) > 0$

وبالتالي $f(x_2) > f(x_1)$

أو أيضا $f(x_1) < f(x_2)$

ينتج أنه : إذا كان $a > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

– إذا كان $a = 0$ فإن $f(x_1) = f(x_2)$ ، أي أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = b$

إذن الدالة f ثابتة على $\mathbb{R}$.

• **جدول التغيرات**

$a < 0$

x	$-\infty$	$-$	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

$a > 0$

x	$-\infty$	$-$	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

$a = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	→	

$f(x) = b$

أمثلة :

– الدالة f حيث $f(x) = -3x + 1$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

– الدالة g حيث $g(x) = 5x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

– الدالة h حيث $h(x) = \sqrt{2}$ ثابتة على $\mathbb{R}$.

• **الخاصة المميزة لدالة تآلفية**

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$.

تكون الدالة f دالة تآلفية إذا وفقط إذا كان من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1 ، x_2 ؛ النسبة $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ثابتة .

– الفرق $x_2 - x_1$ يسمى تزايد المتغير والفرق $f(x_2)-f(x_1)$ يسمى تزايد الصورة .

• **التمثيل البياني**

مبرهنة : في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للمستوي ، التمثيل البياني للدالة التآلفية $f: x \longmapsto ax+b$ هو مستقيم .

• $y=ax+b$ هي معادلة لهذا المستقيم .
• العدد a هو معامل توجيه هذا المستقيم .
• العدد b يسمى الترتيب عند المبدأ لهذا المستقيم باعتبار $f(0) = b$.

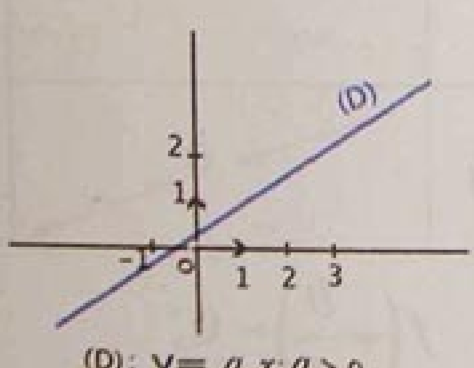
ملاحظات :

– إذا كان $b=0$ و $a \neq 0$ فإن الدالة f دالة خطيّة وتمثيلها البياني هو مستقيم معرّف بمعادلة $y=ax$ وهذا المستقيم يشمل المبدأ $O\ (0\ ;\ 0)$.

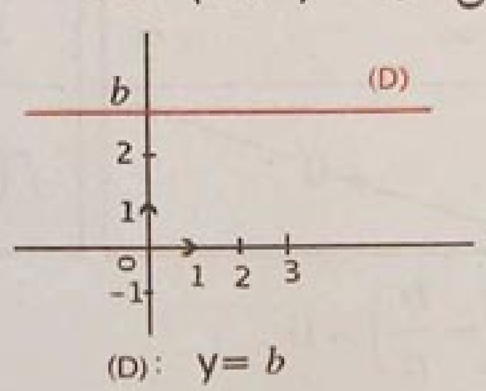
– إذا كانَ $a=0$ فإن الدالة f ثابتة وتمثيلها البياني هو مستقيم معرّف بمعادلة $y=b$.

وهذا المستقيم يشمل النقطة ذات الإحداثيين $(0;b)$ ويوازي محور الفواصل .

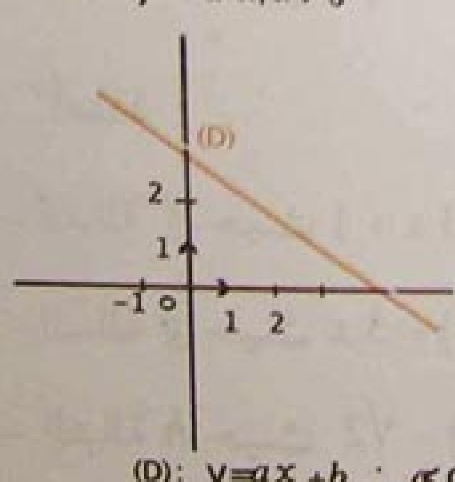
التمثيلات البيانية المقابلة تفسر النتائج السابقة .



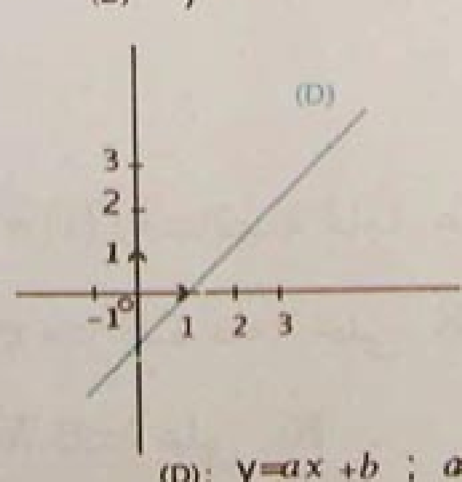
(D): $y = ax ; a>0$



(D): $y = b$



(D): $y=ax+b\ ;\ a<0$



(D): $y=ax+b\ ;\ a>0$

2 - الدالة "مربع"

تعريف : الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2$ تسمى الدالة "مربع" .

ملاحظة : $x^2 \geq 0$ أي مربع كل عدد حقيقي هو عدد موجب .

أمثلة : • $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ ، $f(\sqrt{5})=5$ ، $f\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{9}{49}$

• $f(-2)=4$ ، $f(2)=4$

نلاحظ أن للعددين 2 – و 2 نفس الصورة وهي 4 بالدالة "مربع" .

• $f(0)=0$ أي صورة العدد 0 بالدالة "مربع" هي 0 .

خاصية : f هي الدالة "مربع" .

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(-x)=f(x)$

فعلا : إذا كان x عددا حقيقيا فإن $f(-x)=(-x)^2=x^2$

أي أن $f(-x)=f(x)$.

نقول إن الدالة "مربع" دالة زوجية على $\mathbb{R}$.

في معلم متعامد ، المنحنى (P) الممثل للدالة "مربع" يقبل محور تناظر وهو محور التراتيب .

• اتجاه التغير

مبرهنة : f هي الدالة "مربع" .

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

فعلا : - إذا كان العددان الحقيقيان x_1 ؛ x_2 موجبين حيث $x_1 < x_2$ فإن $x_1{}^2 < x_2{}^2$

(لعددين حقيقيين موجبين ومربعيهما نفس الترتيب) .

- إذا كان العددان الحقيقيان x_1 ؛ x_2 سالبين حيث $x_1 < x_2$ فإن $x_1{}^2 > x_2{}^2$

(لعددين حقيقيين سالبين ومربعيهما ترتيبان متعاكسان) .

جدول التغيرات

مما سبق ، يكون جدول تغيرات الدالة "مربع" كالتالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

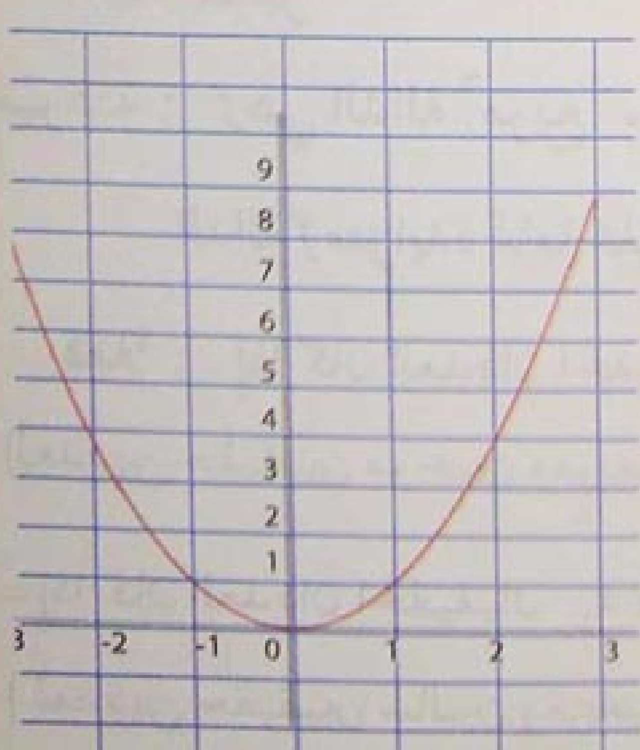
$f(0)=0$

صورة العدد 0 بالدالة "مربع" هي 0 . إنها القيمة الصغرى للدالة "مربع" على $\mathbb{R}$.

• **التمثيل البياني**

جدول بعض القيم للدالة "مربع"

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9



في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، التمثيل البياني (P) للدالة "مربع" يسمى قطعا مكافئا ذروته النقطة O مبدأ المعلم ومحور تناظره هو محور التراتيب .

3 - الدالة "مقلوب"

تعريف :

الدالة f المعرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x}$ تسمى الدالة "مقلوب" .

أمثلة : f هي الدالة "مقلوب" .

$$f(2)=\frac{1}{2} \quad ; \quad f(-2)=-\frac{1}{2} \quad ; \quad f\left(\frac{1}{3}\right)=3$$

خاصية : **f هي الدالة "مقلوب" .**

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ؛ $f(-x)=-f(x)$.

فعلا : إذا كان x عددا حقيقيا غير معدوم فإن $f(-x)=\frac{1}{-x}$

$$=-\frac{1}{x}=-f(x)$$

إذن $f(-x)=-f(x)$.

نقول إن الدالة "مقلوب" دالة فردية على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

في معلم متعامد ، المنحنى (H) الممثل للدالة "مقلوب" يقبل مركز تناظر وهو مبدأ المعلم .

إتجاه التغيّر

مبرهنة : **f هي الدالة "مقلوب" .**

الدالة $f: x \longmapsto \frac{1}{x}$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

فعلا : - إذا كان x_1 وَ x_2 عددين حقيقيين موجبين تماما حيث $x_1<x_2$ فإن $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$

(لعددين حقيقيين موجبين تماما ومقلوبيهما ترتيبان متعاكسان) .

- وإذا كان x_1 ؛ x_2 عددين حقيقيين سالبين تماما حيث $x_1<x_2$ فإن $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$

(لعددين حقيقيين سالبين تماما ومقلوبيهما ترتيبان متعاكسان) .

• جدول التغيرات

مما سبق ، يكون جدول تغيرات الدالة "مقلوب" كالتالي :

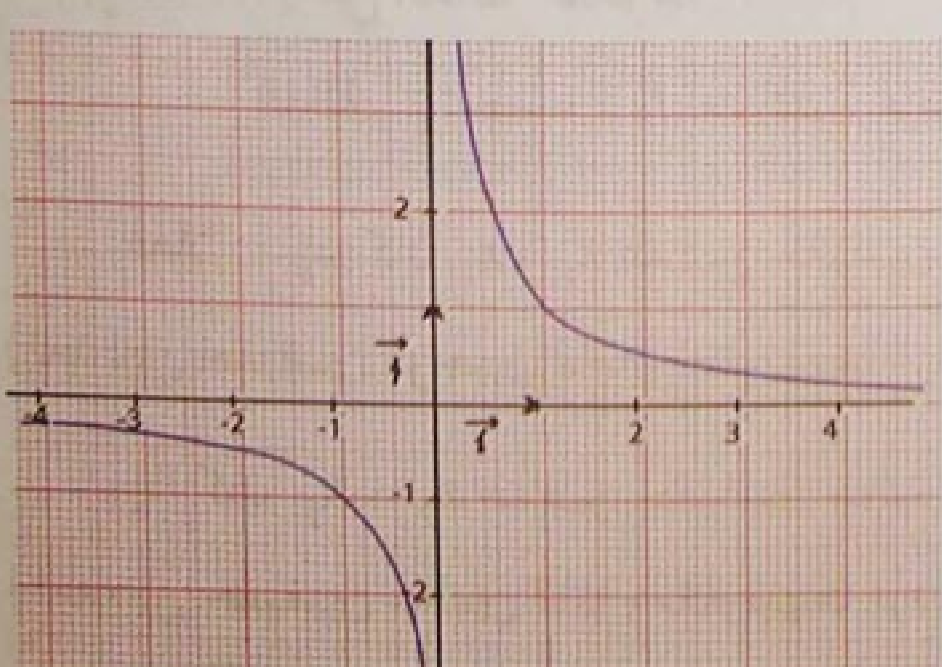
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

ـ الدالة "مقلوب" غير معرّفة عند العدد 0 . (الشريط المبين في الجدول يعبر عن ذلك)

• التمثيل البياني

جدول بعض القيم للدالة "مقلوب"

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، التمثيل البياني (H) للدالة "مقلوب" يسمى قطعا زائدا .

النقطة O مبدأ المعلم هي مركز تناظر هذا القطع الزائد .

1 - التّعرف على دالة تآلفية

طريقة : للتّعرف على دالة تآلفية f يكفي التّحقق من أنها معرّفة بدستور من الشكل : $f(x)=ax+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان .

تمرين : من بين الدوال f ، g ، h المعرّفة كما يلي :

$$f(x)=\frac{x\sqrt{2}-1}{100} \quad , \quad g(x)=x^2+3 \quad , \quad h(x)=2+\frac{1}{x}$$

حدّد الدوال التآلفية .

حـل : • لدينا $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{100}x-\frac{1}{100}$. إذن $f(x)$ من الشكل $ax+b$ حيث

$$a=\frac{\sqrt{2}}{100} \text{ و } b=-\frac{1}{100}$$

ينتج أن الدالة f تآلفية .

• $g(x)$ ليست من الشكل $ax+b$. إذن الدالة g ليست تآلفية .

• $h(x)$ ليست من الشكل $ax+b$. إذن الدالة h ليست تآلفية .

2 - تعيين اتجاه تغير دالة تآلفية

طريقة : لتعيين اتجاه تغير دالة تآلفية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=ax+b$ ، نحدّد إشارة a .

- إذا كان $a>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- إذا كان $a<0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

- إذا كان $a=0$ فإن الدالة f ثابتة على $\mathbb{R}$.

تمرين : عيّن اتجاه تغير كل من الدوال f ، g ، h المعرّفة كما يلي :

$$f(x)=3x-1 \quad , \quad g(x)=-4x \quad , \quad h(x)=\frac{1}{2}$$

حـل : الدوال f ، g ، h دوال تآلفية .

- $f(x)=3x-1$ ؛ $a=3$ و $3>0$ إذن الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.
- $g(x)=-4x$ ؛ $a=-4$ و $-4<0$ إذن الدالة g متناقصة على $\mathbb{R}$.
- $h(x)=\frac{1}{2}$ ؛ $a=0$ إذن الدالة h ثابتة على $\mathbb{R}$.

3 - تعيين دالة تآلفية علم عددان حقيقيان وصورتاهما بها

طريقة : **لتعيين دالة تآلفية f حيث $f(x)=ax+b$ علم عددان حقيقيان مختلفان x_1 و x_2 وصورتاهما $f(x_1)$ ، $f(x_2)$ على الترتيب ، نحسب العددين a و b حيث** $a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ و $b=f(x_1)-ax_1$

أو $\left(b=f(x_2)-ax_2\right)$.

تمرين : عيّن الدالة التآلفية f حيث $f(-1)=5$ و $f(2)=3$.

حـل : حساب a : لدينا $x_1=-1$ و $f(x_1)=5$ ، $x_2=2$ و $f(x_2)=3$

إذن $a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{3-5}{3}=-\frac{2}{3}$

حساب b : $b=f(x_2)-ax_2=f(2)-\left(-\frac{2}{3}\right)2=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$

إذن الدالة التآلفية f معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$.

4 - رسم التمثيل البياني لدالة تآلفية

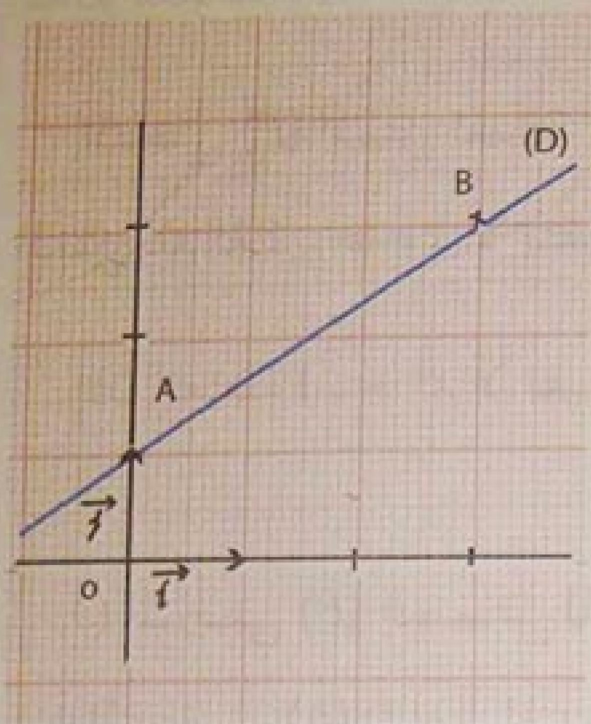
طريقة : **لرسم التمثيل البياني لدالة تآلفية معرّفة على $\mathbb{R}$ بواسطة دستور يكفي تعيين نقطتين من هذا التمثيل البياني .**

تمرين : في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ارسم التمثيل البياني للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+1$

حل : • نسمي (D) التمثيل البياني للدالة f في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

(D) مستقيم لأن f دالة تآلفية .



• الجدول التالي يعطي إحداثيات نقطتين من (D) .

x	0	3
$f(x)$	1	3

النقطتان $A\ (0\ ;1)$ و $B\ (3\ ;3)$ تنتميان إلى (D) .

5 - الحل البياني لمعادلات من الشكل : $x^2 = k$ حيث k عدد حقيقي

طريقة : **k عدد حقيقي . لحل معادلة من الشكل $x^2 = k$ بيانيا**

نرسم التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto x^2$ والتمثيل البياني للدالة $x \longmapsto k$

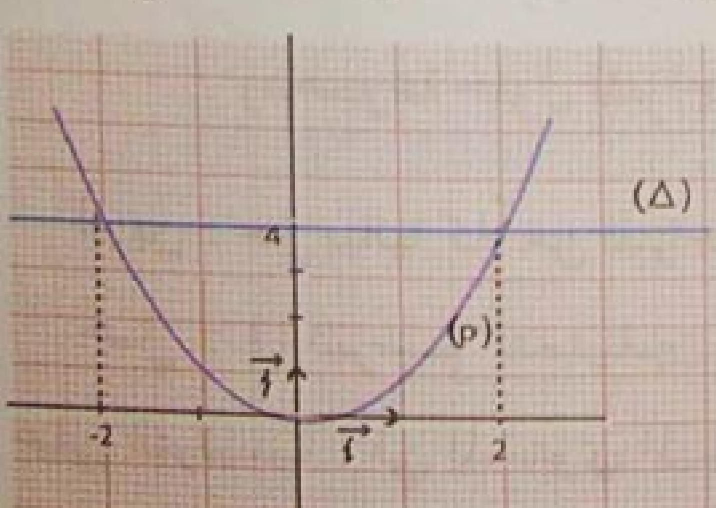
ثم ندرس الأوضاع النسبية لهما .

- حلول المعادلة $x^2 = k$ ؛ إن وجدت ؛ هي فواصل نقط تقاطع هذين المنحنيين .

تمرين : حل بيانيا كلاً من المعادلات التالية :

$x^2 = 4$ ؛ $x^2 = -1$ ؛ $x^2 = 0$

حل : 1) نرسم التمثيلين البيانيين لكل من الدالتين $x \longmapsto x^2$ و $x \longmapsto 4$ في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.



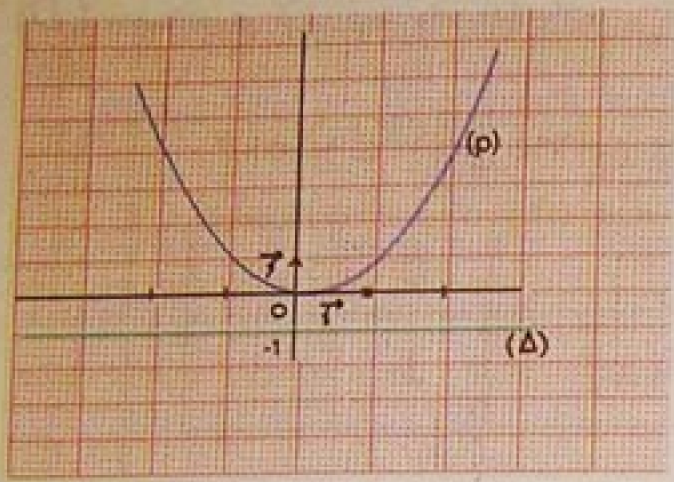
المنحنى (P) هو التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto x^2$

والمستقيم (Δ) هو التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto 4$.

(Δ) يقطع (P) في نقطتين فاصلتاهما $2-$ و 2 .

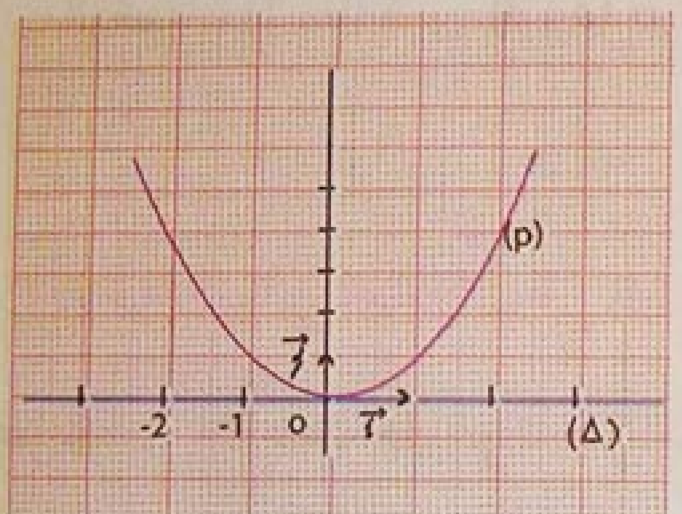
إذن المعادلة $x^2 = 4$ تقبل حلّين هما $2-$ و 2 .

2) نرسم التمثيلين البيانيين لكل من الدالتين $x \longmapsto x^2$ و $x \longmapsto -1$ في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



المنحنى (P) الممثل للدالة $x \longmapsto x^2$ والمستقيم (Δ) الممثل للدالة $x \longmapsto -1$ لا يتقاطعان .

إذن المعادلة $x^2 = -1$ لا تقبل حلولا .



3) المنحنى (P) الممثل للدالة $x \longmapsto x^2$ والمستقيم (Δ) الممثل للدالة $x \longmapsto 0$ لهما نقطة مشتركة واحدة فاصلتها 0 ؛

إذن العدد 0 هو حل المعادلة $x^2 = 0$.

6 - الحل البياني لمتراجحة من الشكل : $x^2 \geq k$ أو $x^2 \leq k$ ؛ $(k > 0)$

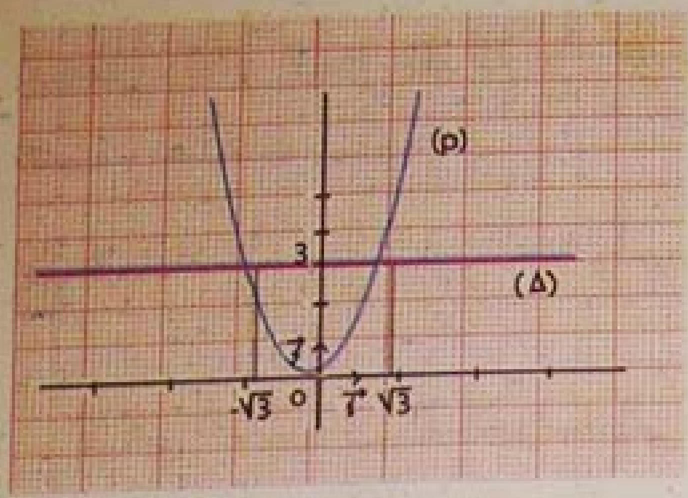
طريقة : k عدد حقيقي موجب تماما .

لحل متراجحة من الشكل $x^2 \geq k$ أو $x^2 \leq k$ ، بيانيا ،

- نرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين $x \longmapsto x^2$ و $x \longmapsto k$ ثم ندرس الأوضاع النسبية لهما .
- مجموعة حلول المتراجحة $x^2 \geq k$ هي المجموعة $]-\infty ; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k} ; +\infty[$
  ومجموعة حلول المتراجحة $x^2 \leq k$ هي المجال $[-\sqrt{k} ; \sqrt{k}]$.

تمرين : حل بيانيا كلاً من المتراجحتين : $x^2 \leq 3$ ، $x^2 \geq 1$.

حل : 1) نرسم التمثيلين البيانيين (P) و (Δ) للدالتين $x \longmapsto x^2$ و $x \longmapsto 3$ على الترتيب ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

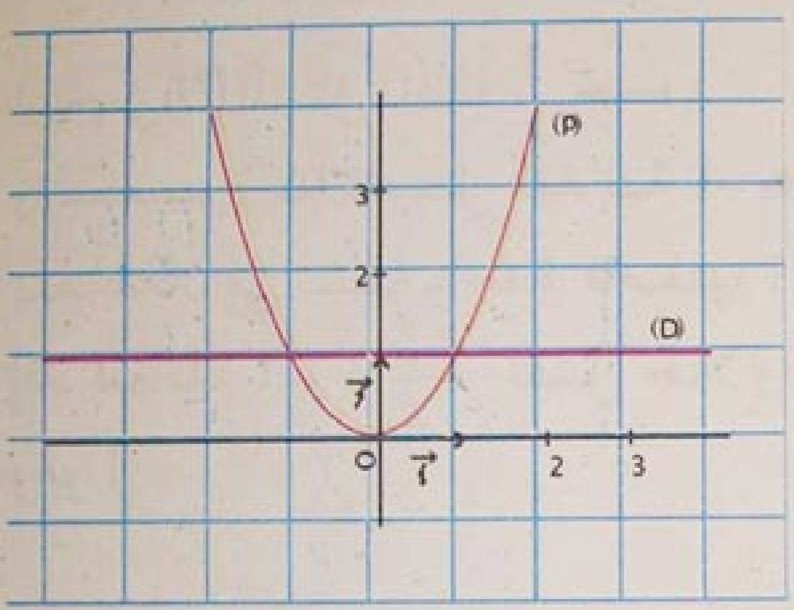


• حلول المتراجحة $x^2 \leq 3$ هي فواصل نقط المنحنى (P) الواقعة تحت (Δ).

هذه النقط فواصلها تنتمي إلى المجال $[-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}]$.

وهو مجموعة حلول المتراجحة $x^2 \leq 3$.

2) نرسم التمثيلين البيانيين (P) و (D) للدالتين $x \longmapsto x^2$ و $x \longmapsto 1$ على الترتيب، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O\,;\vec{i},\vec{j})$



• حلول المتراجحة $x^2 \geq 1$ هي فواصل نقط المنحنى (P) الواقعة فوق (D) .

هذه النقط فواصلها تنتمي إلى المجموعة $]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$ وهي مجموعة حلول المتراجحة $x^2 \geq 1$.

7 - الحل البياني لمعادلات من الشكل : $\frac{1}{x} = k$ ؛ $k \neq 0$

طريقة : k **عدد حقيقي غير معدوم .**

لحل معادلة من الشكل $\frac{1}{x} = k$ ، بيانيا

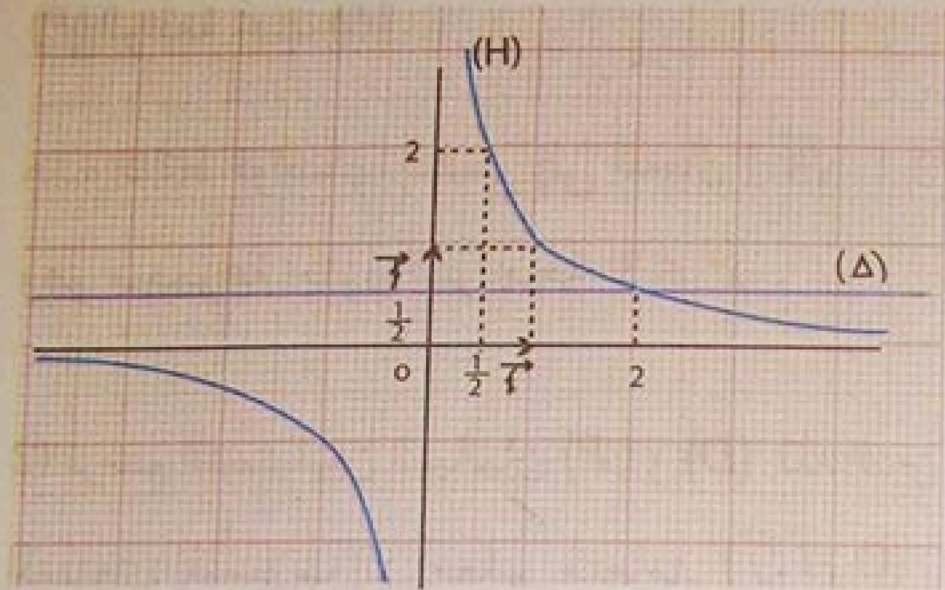
– نرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين $x \longmapsto \frac{1}{x}$ و $x \longmapsto k$ ثم ندرس الأوضاع النسبية لهما .

– حلول المعادلة $\frac{1}{x} = k$ هي فواصل نقط تقاطع منحنيي الدالتين .

تمرين : حل بيانيا كلاً من المعادلتين $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ ؛ $\frac{1}{x} = -1$.

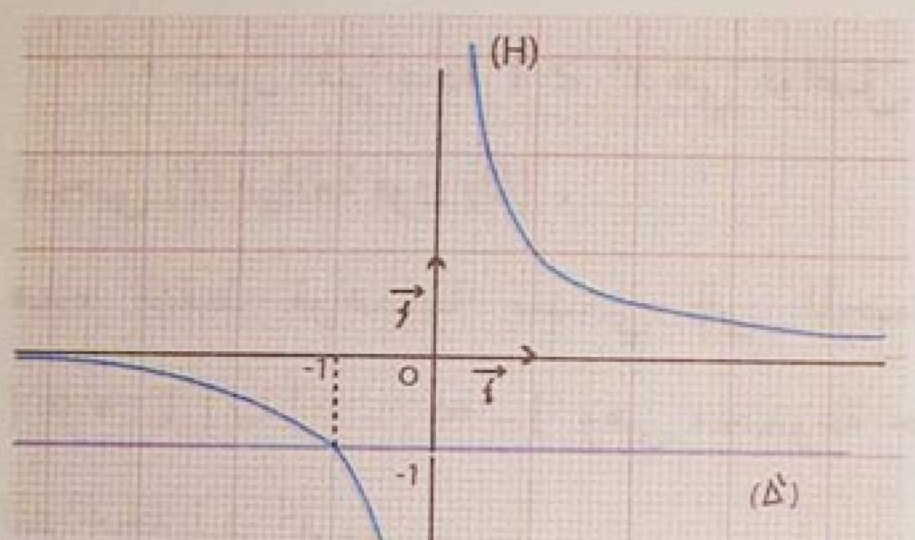
حـل : 1) نرسم ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ؛ التمثيلين البيانيين (H) و (Δ) للدالتين $x \longmapsto \frac{1}{x}$ و $x \longmapsto \frac{1}{2}$.

المنحنى (H) الممثل للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ والمستقيم (Δ) الممثل للدالة $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ يتقاطعان في نقطة واحدة فاصلتها 2 .



إذن المعادلة $\frac{1}{2} = \frac{1}{x}$ تقبل حلا واحدا وهو 2

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ نرسم التمثيلين البيانيين للدالتين $x \longmapsto \frac{1}{x}$ و $x \longmapsto -1$.



المنحنى(H) الممثل للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ والمستقيم (Δ') الممثل للدالـة $x \longmapsto -1$ يتقاطعان في نقطة واحدة فاصلتها -1 .

إذن المعادلة $\frac{1}{x} = -1$ تقبل حلا واحدا وهو -1 .

8 - الحل البياني لمتراجحة من الشكل : $\frac{1}{x} \geq k$ أو $\frac{1}{x} \leq k$ حيث $k > 0$

طريقة : k عدد حقيقي موجب تماما . لحل متراجحة من الشكل $\frac{1}{x} \geq k$ أو $\frac{1}{x} \leq k$ بيانيا ،

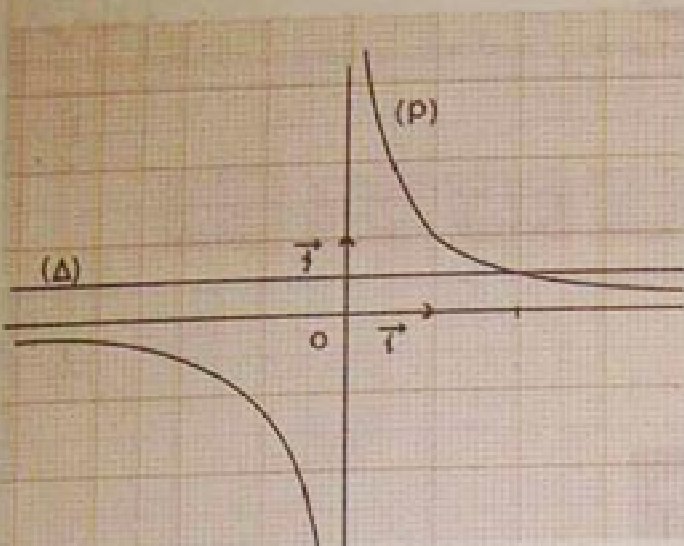
- نرسم التمثيلين البيانيين للدالتين $x \longmapsto \frac{1}{x}$ و $x \longmapsto k$ ثم ندرس الأوضاع النسبية لهما .
- فواصل نقط تقاطع المنحنيين هي حلول المتراجحة .

مجموعة حلول المتراجحة $\frac{1}{x} \geq k$ هي المجال $]0 ; \frac{1}{k}]$ ومجموعة حلول المتراجحة $\frac{1}{x} \leq k$ هي المجموعة $]-\infty ; 0[\cup [\frac{1}{k} ; +\infty[$.

تمرين : حل بيانيا ، كلاً من المتراجحتين $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{x} \leq 3$.

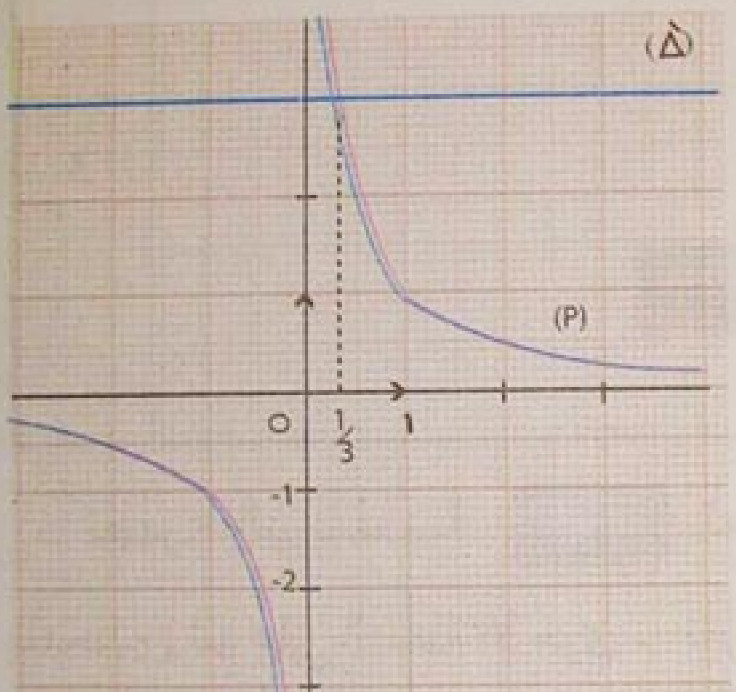
حل 1) نرسم ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$، التمثيلين البيانيين (H) و (Δ) للدالتين $x \longmapsto \frac{1}{x}$ و $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ على الترتيب .

مجموعة نقط المنحنى (H) التي تراتيبها أكبر أو يساوي $\frac{1}{2}$ هي مجموعة نقط المنحنى (H) التي تقع على المستقيم (Δ) أو فوقه .



فواصل هذه النقط هي الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى المجال $]0 ; 2]$ وهي مجموعة حلول المتراجحة $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$.

2) نرسم ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، التمثيلين البيانيين (H) و (Δ) للدالتين $x \longmapsto \frac{1}{x}$ و $x \longmapsto 3$ على الترتيب .



مجموعة نقط المنحنى (H) التي تراتيبها أصغر أو يساوي 3 هي مجموعة نقط المنحنى (H) التي تقع على المستقيم (Δ') أو تحته . فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة $\frac{1}{x} \leq 3$.

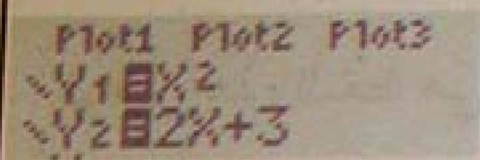
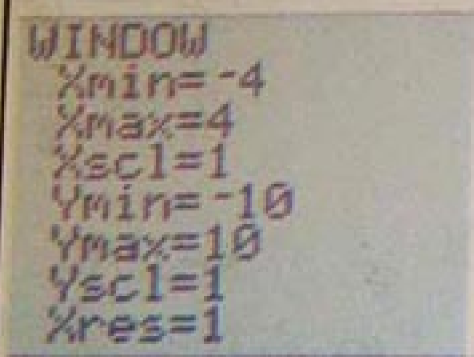
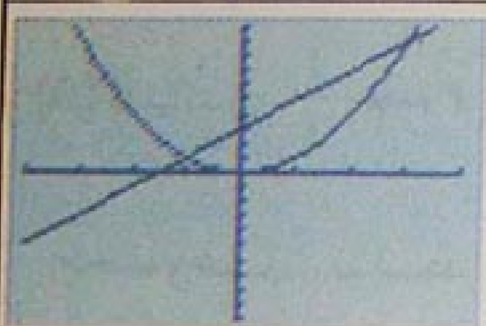
إذن مجموعة حلول المتراجحة $\frac{1}{x} \leq 3$ هي $]-\infty ; 0[\cup [\frac{1}{3} ; +\infty[$.

9 - حل معادلة بيانيا باستعمال حاسبة بيانية

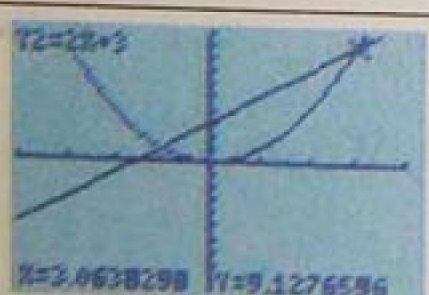
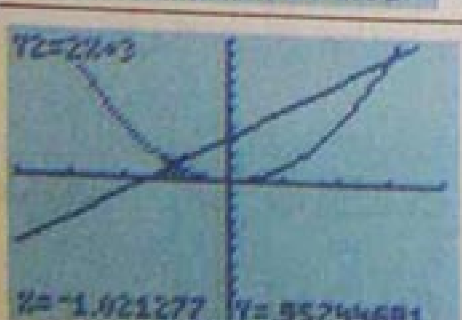
طريقة : لحل معادلة من الشكل $f(x) = g(x)$ بيانيا باستعمال حاسبة بيانية نمثل الدالتين f و g بحاسبة ونقرأ فواصل نقط تقاطع المنحنيين .

تمرين : حل بيانيا المعادلة $x^2 = 2x + 3$ باستعمال حاسبة بيانية .

حل : نرسم بالحاسبة منحنيي الدالتين $x \longmapsto x^2$ ، $x \longmapsto 2x+3$.

المرحلة	البرنامج	الشاشة
1	Y= X,T,θ,n x^2 ▼ 2 X,T,θ,n + 3	
2	WINDOW	
3	GRAPH	

نظهر الزالق باللمسة TRACE ثم باستعمال لمسات التنقل نضعه على إحدى نقط تقاطع المنحنيين ثم على النقطة الأخرى . نقرأ على الشاشة قيما تقريبية لإحداثيي كل من النقطتين .

المرحلة	البرنامج	الشاشة
1	TRACE	
2	TRACE	

بعد التدوير إلى الوحدة تكون إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنيين هي $(3\,;\,9)$ و $(-1\,;\,1)$

إذن المعادلة $x^2 = 2x+3$ تقبل حلّين هما 3 و -1 .

صحيح - خاطىء

اذكر ، إن كانت الجمل التالية ، صحيحة أو خاطئة .

1) إذا كان $x = \frac{3}{2}$ فإن $2x - 3 = 0$.

2) إذا كان $x > \frac{3}{2}$ فإن $2x - 3 < 0$.

3) إذا كان $x < \frac{3}{2}$ فإن $2x - 3 < 0$.

4) إذا كان $x > 1$ فإن $-5x > -5$.

5) إذا كان $x < 1$ فإن $-5x > -5$.

6) إذا كان $x \geq 1$ فإن $x^2 \geq 1$.

7) إذا كان $x^2 \geq 1$ فإن $x \geq 1$.

8) إذا كان $x > 2$ فإن $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$.

9) إذا كان $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ فإن $x > 2$.

10) الدالة f حيث $f(x) = 3\sqrt{x} + 1$ تآلفية .

11) الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{2}\,x$ خطيّة .

12) الدالة التآلفية f حيث $f(x) = -5x + 3$ متناقصة على $\mathbb{R}$.

13) الدالة الخطيّة f حيث : $f(x) = \sqrt{2}\,x$ متناقصة على $\mathbb{R}$.

14) الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty ; +\infty[$ بـ : $f(x) = x^2$ متزايدة على كل من المجالين $]-\infty ; 0]$ و $[0 ; +\infty[$.

15) الدالة f المعرّفة على : $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x}$ متزايدة على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$.

16) التمثيل البياني للدالة f المعرّفة بـ : $f(x) = -5x + 3$ هو مستقيم يشمل النقطة ذات الإحداثيين $(0 ; 3)$.

17) التمثيل البياني للدالة f المعرّفة بـ : $f(x) = x^2$ يشمل النقطة ذات الإحداثيين $(-1 ; -1)$.

18) التمثيل البياني للدالة f المعرّفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x}$ يشمل مبدأ المعلم .

الدوال التآلفية

1 عيّن مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x) = 5x + \sqrt{2}$ ؛ $f(x) = -3x + 4$ ؛

$f(x) = \frac{x}{2}$ ، $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ ؛

$f(x) = 100$ ؛ $f(x) = -10^3$ ،

2 f ، g ، h ، k ، t دوال معرّفة كما يلي :

$f(x) = x(3 - x) + x^2$ ؛

$g(x) = 2x - 1 - 2(x + 3)$ ؛

$h(x) = (x + 1)(x - 1)$ ؛

$k(x) = 2x(x + 2) + 2x^2 + 1$ ؛

$t(x) = \dfrac{x}{2} + 3x$

عيّن الدوال التآلفية ، والدوال الخطية والدوال الثابتة .

3 نفس السؤال بالنسبة إلى الدوال ، h ، g ، f المعرّفة بـ :

$f(x) = (5x - 2)^2 - (5x + 2)^2$ ؛

$g(x) = 2x . x - 1$ ؛

$h(x) = \quad (x + 1) - x + 2$

4 عيّن دستور كل دالة من الدوال التآلفية f ، g ، h ، k المعرّفة بالجدول .

الدالة	معامل توجيه المنحنى الممثل	صور بعض الأعداد
f	-1	$f(0) = 2$
g	3	$g(1) = 1$
h	$\frac{1}{2}$	سابقة 2 هي 4
k	$\sqrt{3}$	سابقة $\sqrt{3} - 1$ هي 1

5 عيّن الدالة التآلفية f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(0) = 3$ و $f(-1) = 1$

2) $f(2) = 6$ و $f(1) = 1$

3) $f(2) = 3$ و $f(1) = -1$

4) $f(\sqrt{2}) = 2$ و $f(2) = \sqrt{2}$

6 نفس السؤال بالنسبة إلى الدالة التآلفية f ، في الحالات التالية :

1) $f(2) = -1$ و $f(-2) = 7$

2) $f(-20) = 415$ و $f(-12) = 215$

3) $f(4) = \dfrac{4}{3}$ و $f(\dfrac{4}{3}) = \dfrac{2}{3}$

7 f دالة تآلفية معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = ax + b$

1) احسب بدلالة a العددين :

$f(2) - f(1)$ و $f(x + 1) - f(x)$

2) احسب بدلالة a العددين :

$f(x + 5) - f(x)$ و $f(10) - f(0)$

3) عيّن الدالة التآلفية f علما أن :

$\dfrac{f(2\sqrt{3}) - f(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = 2$ و $f(\dfrac{1}{2}) = -1$.

8 إليك جدول قيم لدالة تآلفية f حيث
$f(x) = ax + b$

x	0	2	3	4	
$f(x)$			1,5	1	0,5

1 – عيّن العدد الحقيقي a وحدّد إشارته .

2 – عيّن قيمة العدد الحقيقي b .

3 – عيّن الدالة التآلفية f ثم أكمل الجدول .

4 – حدّد اتجاه تغير الدالة f.

5 – أنجز جدول تغيرات الدالة f.

9 f ، g ، h دوال معرّفة على المجال $]-\infty\ ;+\infty[$.

– ارسم التمثيل البياني لكل من الدوال f ، g ، h في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x) = x+3$ ؛ $g(x) = 3-x$ ؛ $h(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

2) $f(x) = 4x$ ؛ $g(x) = -2x$ ، $h(x) = x-2$.

3) $f(x) = -2+\frac{1}{2}x$ ؛ $g(x) = \frac{1}{2}x$
$h(x) = -\frac{1}{2}x$

10 f ، g ، h دوال تآلفية .

1) عيّن الدوال f ، g ، h علما أن :

• $f(0) = -2$ و معامل توجيه f هو 1 .

• $g(0) = -2$ و معامل توجيه g هو -2 .

• $h(0) = -2$ و معامل توجيه h هو $\frac{1}{2}$.

2) ارسم التمثيلات البيانية للدوال f ، g ، h في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

11 عيّن الدالتين التآلفيتين f ، g في كل من الحالتين التاليتين :

1) f دالة خطية و $f(2) = 6$ و $g(0) = 3$ و $f(1) \cdot g(1) = 0$.

2) $f(1) = 2$ و $g(-1) = 4$ و g دالة ثابتة و $f(0) = g(0)$.

3) ارسم ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ التمثيلين البيانيين للدالتين f ، g في كل من الحالتين السابقتين .

12 عيّن الدالة التآلفية f إذا علمت أن تمثيلها البياني (Δ) يشمل النقطتين A ، B في كل حالة من الحالات التالية :

1) $A\,(0\,;4)$ ؛ $B\,(2\,;0)$ ،

2) $A\,(-2\,;1)$ ؛ $B\,(4\,;-2)$ ،

3) $A\,(1\,;3)$ ؛ $B\,(-7\,;3)$ ،

4) $A\,(2\sqrt{2}\,;\sqrt{2}+1)$ ؛ $B\,(-2\,;0)$

13 f دالة تآلفية حيث $f(x)=ax+b$

1) عيّن a ؛ b إذا علمت أن :

$f(1)=2$ و $f(3)-f(-1)=-2$

2) ارسم التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

3) حل المتراجحة $f(x)\geq 0$ بيانيا .

الدالة "مربع"

14 f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=x^2$

احسب ، في كل حالة من الحالات التالية ، صورة العدد الحقيقي x بالدالة f.

1) $x=11$ ؛ 5) $x=-2\sqrt{3}$

2) $x=-12$ ؛ 6) $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

3) $x=-\dfrac{3}{2}$ ؛ 7) $x=10^{-3}$

4) $x=1{,}3$ ، ؛ 8) $x=-10^{3}$

15 إليك جدول قيم لدالة f.

x	-2	-1	$-\dfrac{1}{3}$	$\sqrt{2}-1$	10^{-4}	2	3
$f(x)$	4	1	$\dfrac{1}{9}$	$1-2\sqrt{2}$	10^{16}	4	9

بدون استعمال حاسبة ، أُذكر إن كان هذا الجدول متعلقًا بالدالة $x\longmapsto x^2$ علّل .

16 إليك جدول قيم لدالة g .

$g(x)$	-10	-4	$-\sqrt{5}$	$-3{,}5$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	10^{-2}	10^{2}
x	100	16	5	$12{,}25$	$\dfrac{1}{3}$	10^{-4}	10000

بدون استعمال حاسبة ، اذكر إن كان هذا الجدول متعلقًا بالدالة $x\longmapsto x^2$ علّل .

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 2 cm) .

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2$.

و (P) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق .

1 – ارسم المنحنى (P) .

2 – باستعمال المنحنى (P) ، حل بيانيا كل معادلة من المعادلات التالية :

$x^2=4$ ؛ $x^2=0$ ؛ $x^2=\frac{9}{4}$ ؛ $x^2=0,25$

18 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 1 cm) .

– حل بيانيا كل متراجحة فيما يلي :

$x^2>25$ ؛ $x^2\leq 4$ ؛ $x^2\geq -3$ ؛ $x^2<-1$

الدالة "مقلوب"

19 f دالة معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}$. احسب في كل حالة من الحالات التالية صورة العدد x بالدالة f .

1) $x=10$ ؛ 5) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $x=-100$ ؛ 6) $x=10^{-4}$

3) $x=\frac{1}{2}$ ؛ 7) $x=\frac{5}{4}$

4) $x=0,25$ ؛ 8) $x=-\frac{15}{11}$

20 إليك جدول قيم لدالة f .

x	-3	-1	$\frac{1}{2}$	10^{-4}	10^{4}	8	$2\sqrt{6}$	$2+\sqrt{3}$
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	-1	2	$10\,000$	10^{-4}	$0,125$	$2\sqrt{6}$	$2-\sqrt{3}$

بدون إستعمال حاسبة ، أُذكر إن كان هذا الجدول متعلقًا بالدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$. علّل.

21 إليك جدول قيم لدالة g .

x	-3	$-\frac{1}{3}$	$0,1$	10	2×10^{-2}	$\sqrt{2}+1$	8×10^{-3}
$g(x)$	$-\frac{1}{3}$	-3	10	$0,1$	50	$\sqrt{2}-1$	125

بدون إستعمال حاسبة ، اذكر إن كان هذا الجدول متعلقًا بالدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ علّل .

22 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 2 cm) .

1 – ارسم المنحنى الممثل للدالة f المعرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x}$.

2 – حل بيانيا كل معادلة مما يلي :

$\frac{1}{x}=2$ ، $\frac{1}{x}=-3$ ، $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

23 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 2 cm).

1 – ارسم التمثيل البياني للدالة f حيث : $f(x)=\frac{1}{x}$.

2 – حل بيانيا كل متراجحة من المتراجحات التالية : $\frac{1}{x} < 3$ ؛ $\frac{1}{x} \geq 2$ ؛ $\frac{9}{4} \leq \frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x} \geq -4$.

24 من بين الدوال التالية ، عين الدوال الفردية والدوال الزوجية .

$f : x \longmapsto 3x$ ؛ $t : x \longmapsto x^2 + x$

$g : x \longmapsto -3x + 1$ ؛ $l : x \longmapsto \frac{x^2+1}{x}$

$h : x \longmapsto 5x^2$ ؛ $p : x \longmapsto -\frac{1}{x}$

$k : x \longmapsto -2x^2 + 7$ ؛ $r : x \longmapsto 4 - x^2$

مسائل

25 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 1 cm) .

– ارسم المنحنى (P) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2$.

– ارسم ، في نفس المعلم ، المنحنى (D) الممثل للدالة g حيث : $g(x) = 4x - 4$.

– أوجد إحداثيات نقط تقاطع (P) و (D) .

26 المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2 cm) .

– ارسم المنحنى (H) الممثل للدالة f المعرّفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x}$.

– ارسم ، في نفس المعلم ، المنحنى (Δ) الممثل للدالة g المعرّفة بـ : $g(x) = -\frac{1}{4}x + 1$.

– أوجد إحداثيات نقط تقاطع (H) و (Δ) .

27 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 1 cm) .

f هي الدالة المعرّفة كما يلي $f(x) = \frac{1}{x}$.

1 – ارسم المنحنى (H) الممثل للدالة f .

2 – ارسم في المعلم السابق المستقيمين (D) و (Δ) المعرفين بالمعادلتين $y = 2x$ ؛ $y = \frac{1}{2}x$ على الترتيب .

3 – القطع الزائد (H) يقطع المستقيم (D) في نقطة A فاصلتها موجبة ونقطة أخرى B .

– أوجد إحداثيي كل من النقطتين A ، B .

4 – المستقيم (Δ) يقطع القطع الزائد (H) في نقطة C فاصلتها موجبة ونقطة أخرى D .

– احسب إحداثيي كل من النقطتين C ، D .

5 – بيّن أن للقطعتين $[AB]$ و $[CD]$ نفس المنتصف ونفس الطول .

6 – ما هي طبيعة الرباعي $ACBD$ ؟

الباب

6

التعليم في المستوي

- 1 • معالم للمستوي
- 2 • إحداثيا نقطة
- 3 • إحداثيا شعاع
- 4 • توازي شعاعين

لكون الأرض مجسما كرويا ، فقد اهتم الإنسان بالبحث عن إمكانية تمثيلها على سطح مستو لتسهيل تعليم مواقع على هذا السطح .

بعد أبحاث عديدة ، توصل طالس إلى اقتراح رسم أول خريطة في سنة 650 قبل الميلاد . جاء بعده دور إيراتوستان لينشغل بالبحث في هذا الميدان وتوصل بدوره إلى رسم خريطة ، ظلت ولمدة طويلة الأساس الوحيد للجغرافيا .

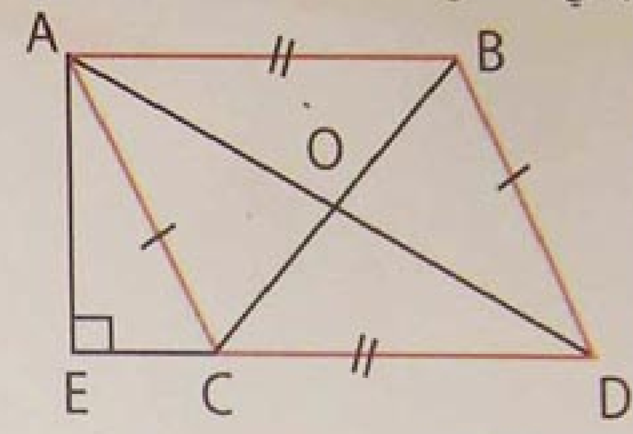
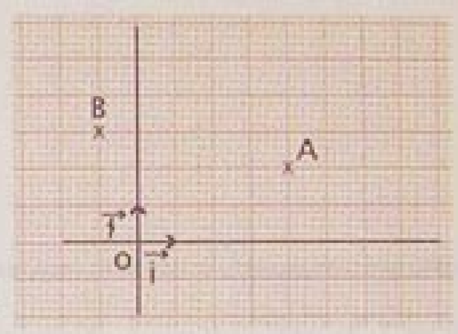
إيراتوستان عالم يوناني عاش في الفترة 275 – 195 قبل الميلاد .

(*Encyclopédie universalis*)

خريطة إيراتوستان

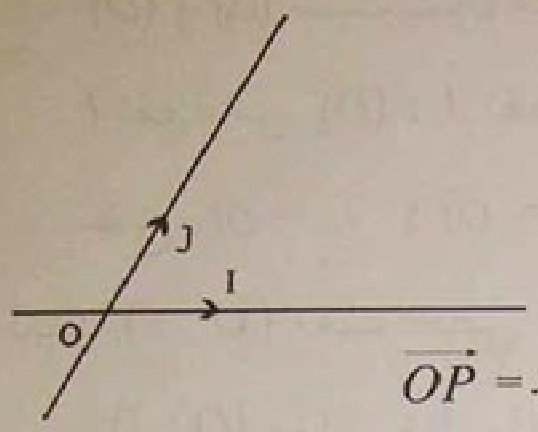
استبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	الإجابة 3
1) في الشكل $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ يساوي ...... 	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BC}$ يساوي	$2\ \overrightarrow{OC}$	$2\ \overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{AD}$
2) في المعلم التالي إحداثيا A هما .... 	$(4\ ;2)$	$(2\ ;4)$	$(2\ ;2)$
إحداثيا B هما ...	$(3\ ;-1)$	$(1\ ;3)$	$(-1\ ;3)$
إحداثيا $\overrightarrow{AB}$ هما ...	$(-5\ ;1)$	$(5\ ;-1)$	$(5\ ;1)$
3) $\vec{u}\,(-2\ ;3)$ ، $\vec{u'}\,(1\ ;-5)$ ، $\vec{v}\,(2\ ;-3)$ ، $\vec{v'}\,(5\ ;-1)$ أشعة للمستوي المنسوب إلى معلم $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$	$\vec{u}$ و $\vec{u'}$ متوازيان ؟	$\vec{v}$ و $\vec{v'}$ متوازيان ؟	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان ؟
4) $\vec{u}$ شعاع للمستوي المنسوب إلى معلم $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\vec{u}=\sqrt{2}\,.\,\vec{i}+2\,.\,\vec{j}$. إحداثيا الشعاع $\vec{u}$ هما	$(2\ ;\sqrt{2})$	$(\sqrt{2}\ ;2)$	$(2\ ;2)$
5) في مستو منسوب إلى معلم $\vec{u}\,(1\ ;-3)$ ، $\vec{v}\,(-2\ ;5)$ شعاعان للمستوي . إحداثيا الشعاع $\vec{u}+\vec{v}$ هما	$(-3\ ;8)$	$(-1\ ;2)$	$(2\ ;-1)$
6) في مستو منسوب إلى معلم $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ ، $A\,(2\ ;-3)$. $B\,(-2\ ;5)$ نقطتان من المستوي . إحداثيا النقطة O هما	$(0\ ;1)$	$(0\ ;0)$	$(1\ ;0)$
إحداثيا منتصف القطعة $[AB]$ هما	$(-1\ ;2)$	$(0\ ;1)$	$(-\frac{3}{2}\ ;4)$

أنشطة تمهيدية

❖ **نشاط 1** : O ؛ I ؛ J ثلاث نقط من المستوي ليست على إستقامة واحدة.



1 – أنشىء بعناية النقط A ، B ، M ، N ، P حيث :

$\overrightarrow{OA} = 3 . \overrightarrow{OI}$ ؛ $\overrightarrow{OB} = -2\ \overrightarrow{OJ}$ ؛ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$ ؛ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

2 – عيّن العددين الحقيقيين x ، y حيث : $\overrightarrow{OP} = x . \overrightarrow{OI} + y . \overrightarrow{OJ}$

❖ **نشاط 2** : O ، A ، B ثلاث نقط من المستوي ليست على إستقامة واحدة .

$\vec{i}$ ، $\vec{j}$ شعاعان حيث $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

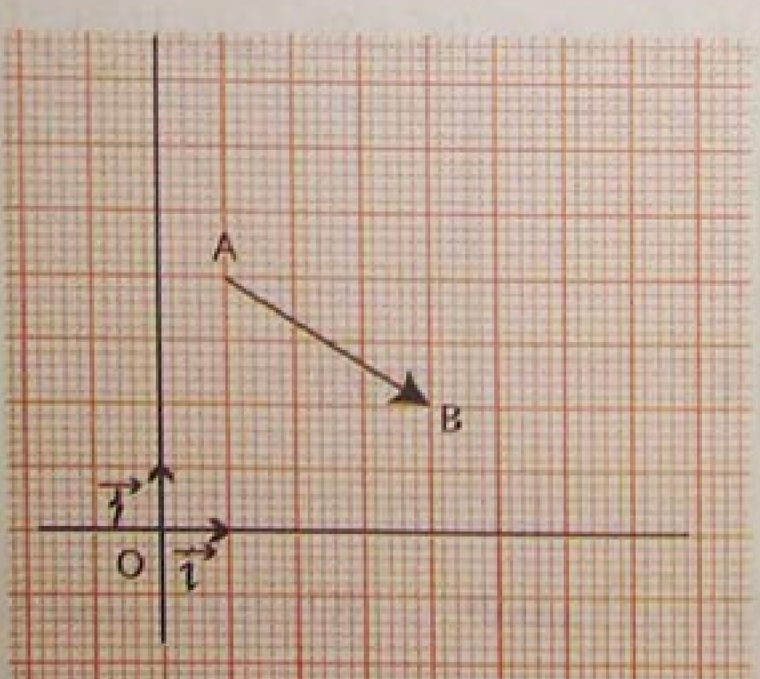
1 – أنشىء بعناية النقط C ، D ، M ، N حيث

$\overrightarrow{OC} = 2\ \vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OD} = -3\ \vec{j}$ ؛ $\overrightarrow{OM} = 2\ \vec{i} + 3\ \vec{j}$ ؛ $\overrightarrow{ON} = -3\ \vec{i} + 2\ \vec{j}$

2 – عيّن الثنائية $(x ; y)$ حيث $\overrightarrow{DC} = x.\ \vec{i} + y.\ \vec{j}$

3 – عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ بدلالة الشعاعين $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$.

❖ **نشاط 3** : $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ معلم للمستوي .



1 – علّم النقطتين $C\ (1\ ;\ 2)$ ؛ $D\ (4\ ;\ 0)$.

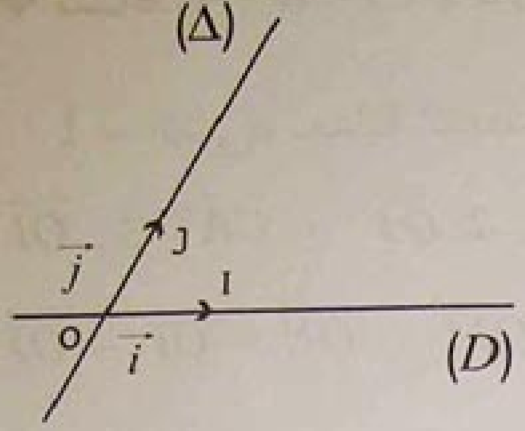
2 – عيّن إحداثيي كل من النقطتين A و B .

3 – احسب إحداثيي كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.

4 – هل الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متوازيان ؟

5 – ما هي طبيعة الرباعي $ABDC$ ؟

1 – معالم للمستوي



(D) و (Δ) مستقيمان متقاطعان في النقطة O . (الشكل)

I نقطة من (D) ؛ J نقطة من (Δ) .

نضع $\vec{i} = \vec{OI}$ ؛ $\vec{j} = \vec{OJ}$.

لدينا $(O ; \vec{i})$ معلم خطي للمستقيم (D)

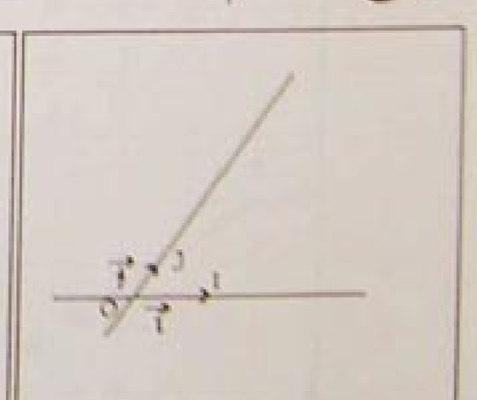
و $(O ; \vec{j})$ معلم خطي للمستقيم (Δ) .

الشعاعان $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$ غير معدومين وغير متوازيين .

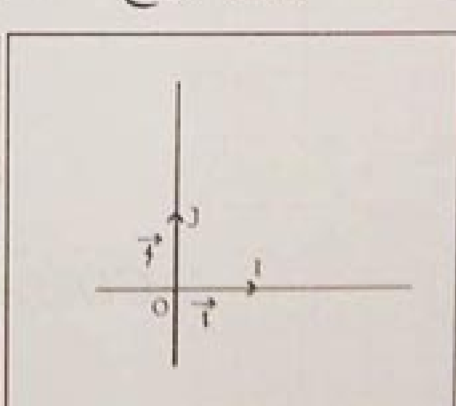
تعريف : الثلاثية $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ تسمى معلما للمستوي .

- النقطة O تسمى مبدأ المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
- يسمى كل من الشعاعين $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$ شعاع الوحدة .
- المستقيم (D) الموجه بالشعاع $\vec{i}$ يسمى محور الفواصل والمستقيم (Δ) الموجه بالشعاع $\vec{j}$ يسمى محور التراتيب .
- إذا كان المستوي مزودا بمعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، نقول إنه منسوب إلى المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، الثنائية $(\vec{i} ; \vec{j})$ تسمى أساسا للمستوي .

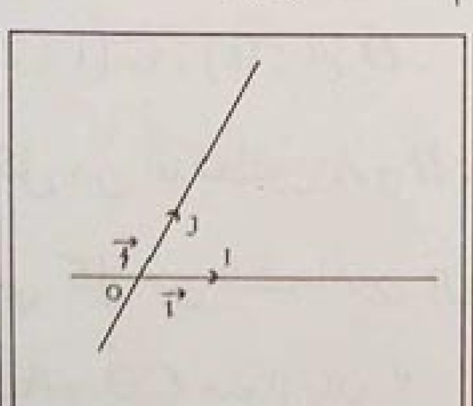
أنواع المعالم : الأشكال أدناه تبيّن أنواع المعالم للمستوي .



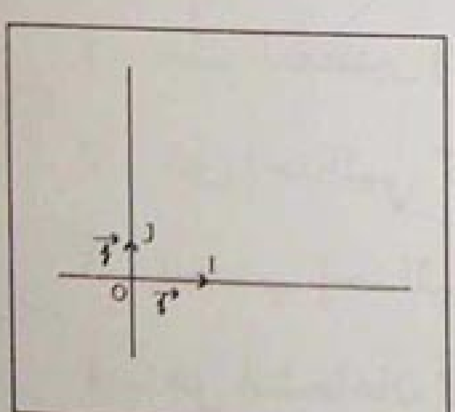
- المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ كيفي.



- المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ متعامد ومتجانس $(OI) \perp (OJ)$ ، $OI = OJ$



- المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ متجانس $OJ = OI$



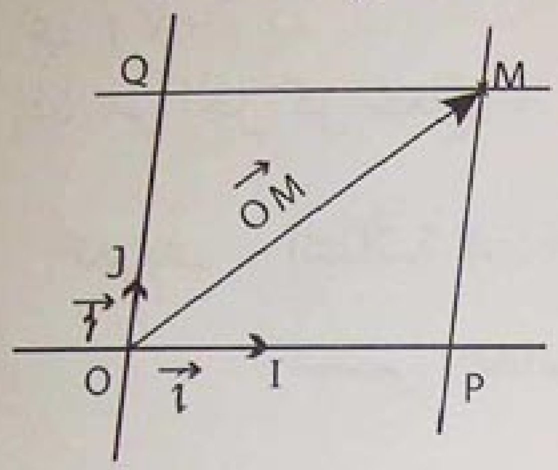
- المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ متعامد. $(OI) \perp (OJ)$

2 – إحداثيا نقطة

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ معلم للمستوي ، M نقطة من المستوي (كما في الشكل).

المستقيم الذي يشمل M ويوازي محور التراتيب ، يقطع محور الفواصل في النقطة P .

والمستقيم الذي يشمل M ويوازي محور الفواصل يقطع محور التراتيب في النقطة Q .



الرباعي $OPMQ$ متوازي أضلاع

إذن $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

• لدينا $\overrightarrow{OP} = x\ \vec{i}$ حيث x عدد حقيقي

و $\overrightarrow{OQ} = y\ \vec{j}$ حيث y عدد حقيقي.

x يسمى فاصلة P في المعلم الخطي $(O ; \vec{i})$ و y يسمى فاصلة Q في المعلم الخطي $(O ; \vec{j})$.

ينتج أنه من أجل كل نقطة M من المستوي المزود بمعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

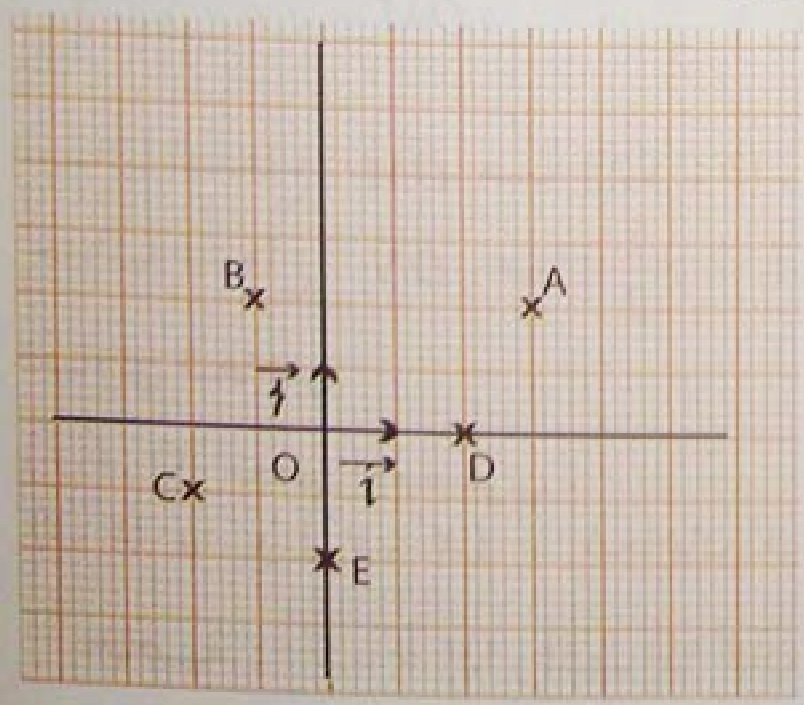
يوجد عددان حقيقيان x ؛ y وحيدان حيث $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$

تعريف : الثنائية $(x ; y)$ حيث $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$

تسمى إحداثيي النقطة M في المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

• العدد الحقيقي x يسمى فاصلة M والعدد الحقيقي y يسمى ترتيب M .

• إذا كان $(x ; y)$ إحداثيي M نكتب $M(x ; y)$.



أمثلة : في المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ المقابل

• إحداثيا A هما $(3 ; 2)$

• إحداثيا B هما $(-1 ; 2)$

• إحداثيا C هما $(-2 ; -1)$

• إحداثيا D هما $(2 ; 0)$

• إحداثيا E هما $(0 ; -2)$.

3 - إحداثيا شعاع

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي .

كل نقطة M من المستوي ترفق بشعاع وحيد $\vec{v}$ حيث $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$.

إذا كان $(x ; y)$ هما إحداثيي M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ فإن $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

أي $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

إذن من أجل كل شعاع $\vec{v}$ توجد ثنائية وحيدة $(x ; y)$ حيث $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

تعريف : الثنائية $(x ; y)$ حيث $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

تسمى إحداثيي الشعاع $\vec{v}$ في الأساس $(\vec{i} ; \vec{j})$

نكتب $\vec{v}\ (x ; y)$ ونقرأ : إحداثيا $\vec{v}$ هما x ؛ y في الأساس $(\vec{i} ; \vec{j})$

x هو الإحداثي الأول و y الإحداثي الثاني للشعاع $\vec{v}$.

ملاحظة : • إذا كان $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

فإن النقطة M والشعاع $\overrightarrow{OM}$ لهما نفس الإحداثيين $(x ; y)$

• إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{MM}$ في الأساس $(\vec{i} ; \vec{j})$ هما $(0 ; 0)$.

الشعاع $\overrightarrow{MM}$ هو الشعاع المعدوم ؛ يرمز له $\vec{O}$.

أمثلة : في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للمستوي ، M و N نقطتان حيث :

$$\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} \quad ; \quad \overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما $(3 ; \sqrt{2})$.

إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{ON}$ هما $\left(-2 ; \frac{1}{2}\right)$.

تساوي شعاعين

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي .

$\vec{u}\ (x ; y)$ و $\vec{v}\ (x' ; y')$ شعاعان للمستوي .

خاصية : $\vec{u} = \vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $x = x'$ و $y = y'$.

مجموع شعاعين

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي .

خاصية : إذا كان $\vec{u}\,(x\,;y)$ و $\vec{v}\,(x'\,;y')$ شعاعين للمستوي فإن إحداثيي الشعاع $\vec{u}+\vec{v}$ هما $(x+x'\,;y+y')$.

• الشعاع $\vec{u}+\vec{v}$ يسمى مجموع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

مثال : $\vec{u}\,(-2\,;3)$ و $\vec{v}\,(1\,;-5)$ شعاعان للمستوي المزود بمعلم .

إحداثيا الشعاع $\vec{u}+\vec{v}$ هما $(-1\,;-2)$.

جداء شعاع بعدد حقيقي

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي .

خاصية : إذا كان $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ شعاعا للمستوي و k عددا حقيقيا فإن إحداثيي الشعاع $k\,\vec{u}$ هما $(kx\,;ky)$.

• الشعاع $k\vec{u}$ يسمى جداء الشعاع $\vec{u}$ بالعدد الحقيقي k .

مثال : $\vec{u}\,(-2\,;3)$ شعاع للمستوي المزود بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

– إحداثيا الشعاع $2\,\vec{u}$ هما $(-4\,;6)$.

– إحداثيا الشعاع $-3\,\vec{u}$ هما $(6\,;-9)$.

ملاحظة : – إذا كان إحداثيا $\vec{u}$ هما $(x\,;y)$ فإن إحداثيي $-\vec{u}$ هما $(-x\,;-y)$.

نقول عن الشعاعين $\vec{u}$ و $-\vec{u}$ إنهما متعاكسان أو أن الشعاع $-\vec{u}$ هو معاكس الشعاع $\vec{u}$.

إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعاكسين أي $\vec{v}=-\vec{u}$ فإن $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$.

إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي .

خاصية : إذا كان A ، B نقطتين من المستوي ، إحداثياتهما $(x;y)$ ، $(x';y')$ على الترتيب فإن إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(x'-x;y'-y)$.

فعلا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ (علاقة شال) أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

إحداثيا $\overrightarrow{OB}$ هما $(x';y')$ وإحداثيا $\overrightarrow{OA}$ هما $(x;y)$ ، وكذا إحداثيا $-\overrightarrow{OA}$ هما $(-x;-y)$.

حسب الخاصية المتعلقة بمجموع شعاعين ؛ ينتج أن إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ هما $(x'-x;y'-y)$ أي أن إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(x'-x;y'-y)$.

مثال : $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي ، $A(2;-3)$ ، $B(-1;4)$ نقطتان من المستوي .

- إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(-3;7)$
- إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{BA}$ هما $(3;-7)$

4 - توازي شعاعين

المستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{u}\ (a;b)$ ، $\vec{v}\ (a';b')$ شعاعان للمستوي .

خاصية : الشعاعان $\vec{u}\ (a;b)$ و $\vec{v}\ (a';b')$ متوازيان إذا وفقط إذا كان $ab'-ba'=0$

- نفرض أن الشعاعين $\vec{u}\ (a;b)$ ، $\vec{v}\ (a';b')$ متوازيان ولنبرهن أن $ab'-ba'=0$.

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان إذن يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v}=k\vec{u}$.

نعلم أن إحداثيي الشعاع $k\vec{u}$ هما $(ka;kb)$.

ومن المساواة $\vec{v}=k\vec{u}$ ؛ ينتج أن $a'=ka$ و $b'=kb$.

إذن $a'b=kab$ و $ab'=kab$ أي أن $ab'=a'b$ إذن $ab'-ba'=0$

• نفرض أن $ab' - ba' = 0$

ولنبرهن أن الشعاعين $\vec{u}\ (a\,;b)$ و $\vec{v}\ (a'\,;b')$ متوازيان .

– إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان .

– إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ فإن أحد إحداثييه a أو b ، على الأقل ، غير معدوم ، وليكن مثلا $a \neq 0$

المساواة $ab' - ba' = 0$ تكتب $b' = \dfrac{a'}{a}b$

إذن يمكن أن نكتب :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= a'\,\vec{i} + b'\,\vec{j}\\ &= a'\vec{i} + \frac{a'}{a}b\,\vec{j}\\ &= \frac{a'}{a}(a\,\vec{i} + b\,\vec{j})\\ &= \frac{a'}{a}\,\vec{u}\end{aligned}$$

ينتج أن : $\vec{v} = \dfrac{a'}{a}\vec{u}$ أي أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان .

وبالمثل ، إذا فرضنا أن $b \neq 0$ فنحصل على المساواة $\vec{v} = \dfrac{b'}{b}\,\vec{u}$

ونستنتج كذلك أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان .

مثال : $\vec{u}(-1\,;\,5)$ ، $\vec{v}(2\,;\,-10)$ ، $\vec{w}(3\,;\,1)$ ثلاثة أشعة للمستوي المنسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

• الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان لأن $2 \times 5 - (-10)(-1) = 0$

• الشعاعان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير متوازيين لأن $2 \times 1 - (-10)(3) \neq 0$

1 – قراءة إحداثيي نقطة معينة بعلاقة شعاعية

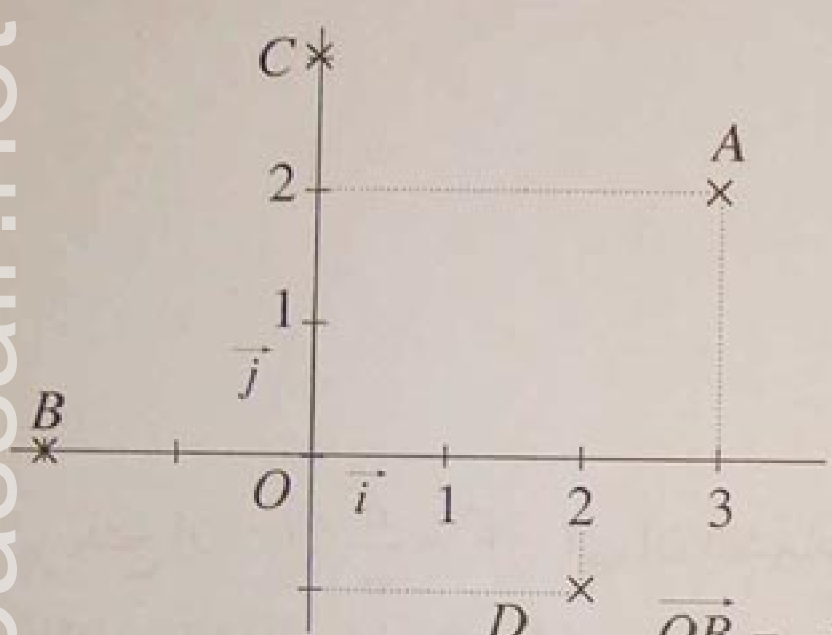
طريقة : إحداثيا نقطة M في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ هما إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{OM}$.

تمرين : المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A ، B ، C ، D نقط من المستوي معرفة كما يلي :

$\overrightarrow{OD}=2\vec{i}-\vec{j}$ ؛ $\overrightarrow{OC}=3\vec{j}$ ؛ $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+2\vec{j}$

– عيّن إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ثم علّمها في المعلم السابق .



حل : نعلم أن إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{OM}$

حيث $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ هما إحداثيا

النقطة M أي $(x\,;y)$.

$\overrightarrow{OA}\,(3\,;2)$ يعني أن $A\,(3\,;2)$

$\overrightarrow{OB}\,(-2\,;0)$ يعني أن $B\,(-2\,;0)$ لأن $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+0\vec{j}$

$\overrightarrow{OC}\,(0\,;3)$ يعني أن $C\,(0\,;3)$ لأن $\overrightarrow{OC}=0\vec{i}+3\vec{j}$

$\overrightarrow{OD}\,(2\,;-1)$ يعني أن $D\,(2\,;-1)$ لأن $\overrightarrow{OD}=2\vec{i}+(-1)\vec{j}$

2 – تعيين إحداثيات أشعة

طريقة : لتعيين إحداثيات الأشعة $\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $-\vec{u}$ ؛ $\vec{u}-\vec{v}$ ؛ $k\vec{u}$
نعتمد على عمليتي الجمع والضرب في مجموعة الأعداد الحقيقية .

تمرين : المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ شعاعان للمستوي حيث :

$\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$ و $\vec{v}=-\vec{i}+5\vec{j}$.

– عيّن إحداثيات كل من الأشعة :

$\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $-\vec{v}$ ؛ $\vec{u}-\vec{v}$ ؛ $3\vec{u}$ ؛ $-4\vec{v}$ ؛ $2\vec{u}-3\vec{v}$

حل : • $\vec{u}+\vec{v}=(3\vec{i}-2\vec{j})+(-\vec{i}+5\vec{j})$

$=(3-1)\vec{i}+(-2+5)\vec{j}$

$=2\vec{i}+3\vec{j}$

إذن : $(2;3)$ هما إحداثيا $\vec{u}+\vec{v}$.

• $-\vec{v}=(-1)(-\vec{i}+5\vec{j})$

$=\vec{i}-5\vec{j}$

إذن : $(1;-5)$ هما إحداثيا $-\vec{v}$.

• $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(3\vec{i}-2\vec{j})+(\vec{i}-5\vec{j})$

$=(3+1)\vec{i}+(-2-5)\vec{j}$

$=4\vec{i}-7\vec{j}$

إذن : $(4;-7)$ هما إحداثيا $\vec{u}-\vec{v}$.

• $3\vec{u}=3(3\vec{i}-2\vec{j})$

$=9\vec{i}-6\vec{j}$

إذن : $(9;-6)$ هما إحداثيا $3\vec{u}$.

• $-4\vec{v}=-4(-\vec{i}+5\vec{j})$

$=4\vec{i}-20\vec{j}$

إذن : $(4;-20)$ هما إحداثيا $-4\vec{v}$.

• $2\vec{u}-3\vec{v}=2(3\vec{i}-2\vec{j})-3(-\vec{i}+5\vec{j})$

$=(6\vec{i}-4\vec{j})+(3\vec{i}-15\vec{j})$

$=(6+3)\vec{i}+(-4-15)\vec{j}$

$=9\vec{i}-19\vec{j}$

إذن : $(9;-19)$ هما إحداثيا $2\vec{u}-3\vec{v}$.

3 - إثبات توازي شعاعين

طريقة : لإثبات توازي الشعاعين $\vec{u}\ (a\ ;\ b)$ و $\vec{v}\ (a'\ ;\ b')$ يكفي أن يتحقق أحد الشرطين : – العدد الحقيقي $ab' - ba'$ معدوم
– يوجد عدد حقيقي t حيث $a' = t\,a$ و $b' = t\,b$.

تمرين : $\vec{u}\ (2\ ;-3)$ ، $\vec{v}\ (-6\ ;9)$ شعاعان للمستوي المنسوب إلى معلم $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.
أثبت أن الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متوازيان .

حل: لدينا : $2\,(9) - (-6)\,(-3) = 18 - 18 = 0$
إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان
• نلاحظ أن $(-3)\,(2) = -6$ و $(-3)\,(-3) = 9$
إذن يوجد عدد حقيقي t ، $t = -3$ حيث $t\,(2) = -6$ و $(-3)\,t = 9$
ينتج أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان .

4 - إثبات أن ثلاث نقط على استقامة واحدة

طريقة : لإثبات أن ثلاث نقط A ، B ، C على استقامة واحدة يكفي أن نبرهن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متوازيان .

تمرين : المستوي منسوب إلى معلم $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.
$A\,(-3\ ;1)$ ، $B\,(1\ ;-1)$ ؛ $C\,(3\ ;-2)$ ثلاث نقط من المستوي .
أثبت أن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة .

حل : لدينا $\overrightarrow{AB}\,(4\ ;-2)$ و $\overrightarrow{AC}\,(6\ ;-3)$.
و $4\,(-3) - 6\,(-2) = -12 + 12 = 0$.
إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متوازيان .
ينتج أن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة .

5 - تعيين إحداثيي منتصف قطعة مستقيم

طريقة : $A(x_0\ ;y_0)$ ؛ $B(x_1\ ;y_1)$ نقطتان من المستوي المزود بمعلم $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ و I منتصف القطعة $[AB]$.
إحداثيا النقطة I هما $\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}\ ;\dfrac{y_0 + y_1}{2}\right)$.

تمرين : $A(2\,;-1)$ ؛ $B(4\,;2)$ نقطتان من المستوي المنسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
عيّن إحداثيي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

حل : إحداثيا النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هما $\left(\dfrac{x_0+x_1}{2}\,;\,\dfrac{y_0+y_1}{2}\right)$.

لدينا : $\dfrac{x_0+x_1}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3$ و $\dfrac{y_0+y_1}{2}=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$

إذن إحداثيا النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هما $\left(3\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

6 - إثبات أن رباعيا هو متوازي أضلاع

طريقة : لإثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع نبرهن أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

(يمكن أيضا إثبات أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$) .

تمرين : $A(1\,;1)$ ؛ $B(5\,;3)$ ؛ $C(2\,;9)$ ؛ $D(-2\,;7)$ نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

أثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

حل : لدينا $\overrightarrow{AB}\,(4\,;2)$ و $\overrightarrow{DC}\,(4\,;2)$. إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
ينتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

7 - حساب المسافة بين نقطتين

طريقة : المسافة بين النقطتين $A\,(x_0\,;\,y_0)$ و $B\,(x_1\,;\,y_1)$ في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ هي العدد الحقيقي الموجب AB
حيث : $AB=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$.

تمرين : احسب المسافة بين النقطتين $A(-1\,;2)$ ؛ $B(4\,;-3)$ في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي 1 cm) .

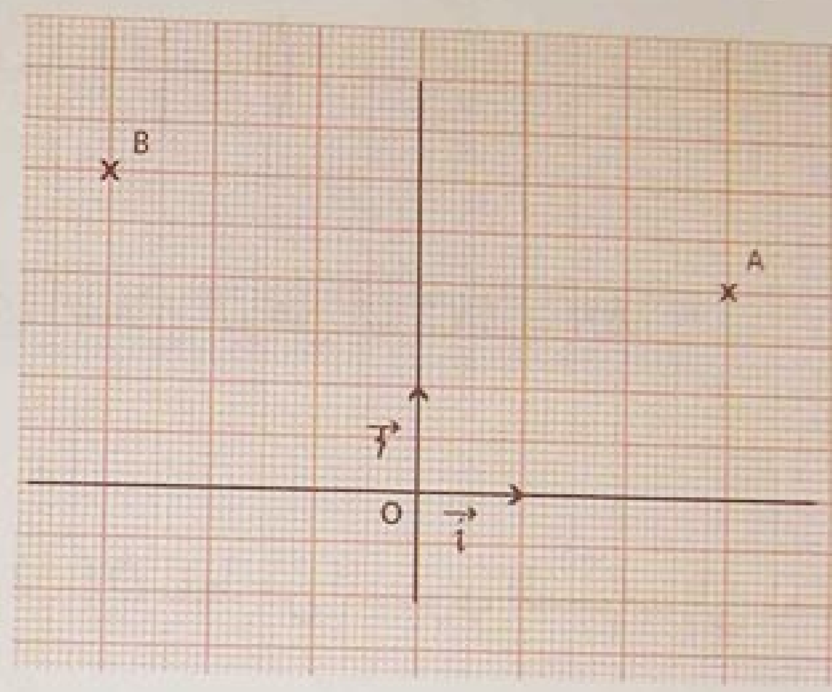
حل : لدينا $AB=\sqrt{(4-(-1))^2+(-3-2)^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$

إذن المسافة بين النقطتين A و B هي $5\sqrt{2}$ cm .

صحيح – خاطئ

أذكر، إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة.

1) في الشكل ؛ إحداثيا النقطة A هما $(3\,;2)$.



2) في الشكل السابق ، إحداثيا النقطة B هما $(-3\,;-3)$.

3) $\vec{u}$ شعاع للمستوي المنسوب إلى معلم حيث $\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}$.
إحداثيا الشعاع $\vec{u}$ هما $\left(\frac{1}{2}\,;\sqrt{2}\right)$.

4) $A(1\,;-2)$ ؛ $B(5\,;1)$ نقطتان من المستوي المنسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(4\,;3)$.

5) $\vec{u}(-2\,;3)$ ، $\vec{v}(4\,;-6)$ شعاعان للمستوي المنسوب إلى معلم .
إحداثيا الشعاع $\vec{u}+\vec{v}$ هما $(6\,;-9)$.

6) $A(2\,;3)$ ؛ $B(-1\,;2)$ نقطتان من المستوي المنسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
إحداثيا منتصف القطعة $[AB]$ هما $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$.

7) $\vec{u}(3\,;-1)$ ؛ $\vec{v}(-6\,;3)$ شعاعان للمستوي المنسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متوازيان .

8) $A(-1\,;1)$ ؛ $B(2\,;-1)$ ؛ $C(1\,;0)$ نقط من المستوي المنسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
النقط A ؛ B ؛ C تقع على استقامة واحدة .

9) $A(2\,;3)$ ؛ $B(-1\,;2)$ ؛ $C(-5\,;2)$ ؛ $D(1\,;0)$ نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع .

التعليم على مستقيم

في التمارين 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ، نعتبر معلما خطيا $(O\,;\vec{i})$ للمستقيم (Δ) .

1 عيّن فواصل النقط A ؛ B ؛ C ؛ D

2 علّم النقط M ؛ N ؛ P ؛ Q التي فواصلها $-\frac{3}{2}$ ؛ 2 ؛ $\frac{3}{2}$ ؛ 5 على الترتيب .

تمارين ومسائل

3 A' ؛ B' ؛ C' ؛ D' نقط من المستقيم (Δ) حيث :

$\overrightarrow{OA'} = 3\,\vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OB'} = -5\,\vec{i}$ ؛

$\overrightarrow{OC'} = \sqrt{2}\,\vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OD'} = \frac{5}{2}\,\vec{i}$

عيّن فواصل النقط A' ؛ B' ؛ C' ؛ D'

4 M' ، N' ، P' ، Q' نقط من المستقيم (Δ) فواصلها على الترتيب :

$5 \;;\; -3 \;;\; \frac{5}{3} \;;\; \sqrt{2}+1$.

عبّر عن الأشعة $\overrightarrow{OM'}$ ؛ $\overrightarrow{ON'}$ ؛ $\overrightarrow{OP'}$ ؛ $\overrightarrow{OQ'}$ بدلالة الشعاع $\vec{i}$.

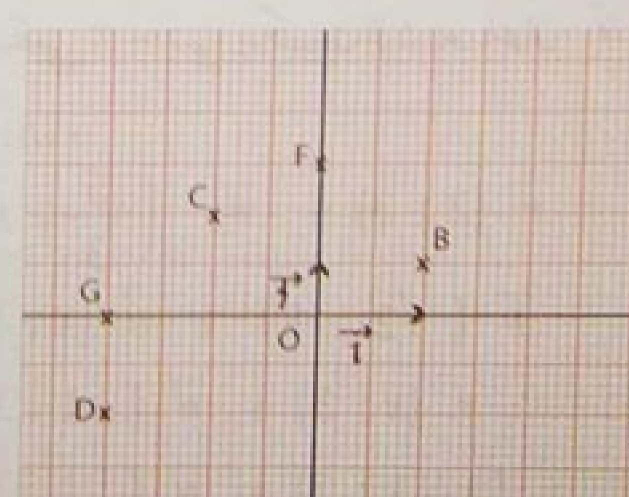
التعليم في المستوي

5 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

علّم النقط $A(2\,;1)$ ؛ $B(-3\,;0)$ ؛ $C(0\,;4)$ ؛ $D(-1\,;2)$ ؛ $E(\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2})$.

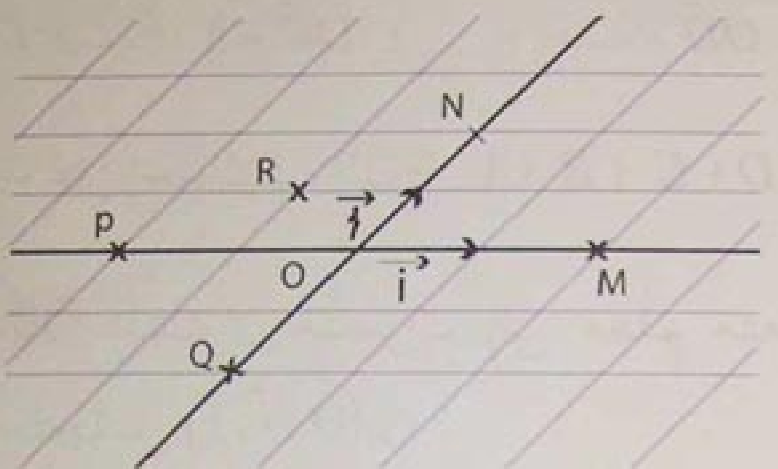
6 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عيّن إحداثيات النقط A ؛ B ؛ C ؛ D ؛ E ؛ F ؛ G الممثلة في الشكل .



7 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عيّن إحداثيات النقط M ؛ N ؛ P ؛ Q ؛ R الممثلة في الشكل .



8 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متجانس للمستوي .

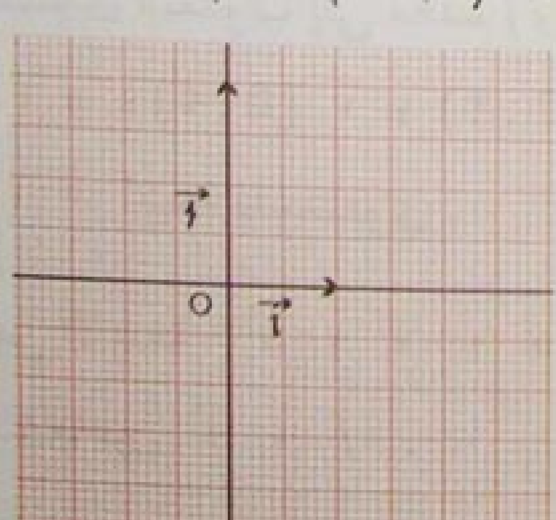
علّم النقط $A(2\,;0)$ ؛ $B(0\,;-2)$ ؛ $C(1\,;-1)$ ؛ $D(-2\,;-2)$ ؛ $E(3\,;1)$.

9 أرسم معلما متعامدا في المستوي حيث $OI = 2\ cm$ ؛ $OJ = 3\ cm$.

– علّم النقط $A(-2\,;2)$ ؛ $B(-3\,;0)$ ؛ $C(0\,;-2)$ ؛ $D(4\,;-3)$ في المعلم السابق .

10 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي (الشكل).

حدّد نوع هذا المعلم ثم علّم النقط $A(1\,;0)$ ؛ $B(0\,;1)$ ؛ $C(-1\,;0)$ ؛ $D(0\,;-1)$.



11 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.
A ؛ B ؛ C ؛ D نقط من المستوي حيث
$\overrightarrow{OA}=5\vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OB}=-2\vec{j}$ ؛
$\overrightarrow{OC}=3\vec{i}-2\vec{j}$ ؛ $\overrightarrow{OD}=-\vec{i}+\vec{j}$
– عين إحداثيات النقط A ؛ B ؛ C ؛ D.

12 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$\vec{u}\,(2;3)$ ؛ $\vec{v}\,(-4;1)$ شعاعان للمستوي.
عبّر عن الشعاعين $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ بدلالة الشعاعين $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$.

13 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي. M ؛ N ؛ P ؛ Q ؛ R نقط من المستوي إحداثياتها $(-1;-1)$ ؛ $(2;0)$ ؛ $(0;-4)$ ؛ $(2;\sqrt{2})$ ؛ $(5;-5)$ على الترتيب.
– عبّر عن الأشعة $\overrightarrow{OM}$ ؛ $\overrightarrow{ON}$ ؛ $\overrightarrow{OP}$ ؛ $\overrightarrow{OQ}$ ؛ $\overrightarrow{OR}$ بدلالة الشعاعين $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$.

14 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$\vec{u}\,(-3;0)$ ؛ $\vec{v}\,(0;4)$ ؛ $\vec{u'}\,(2;1)$ ؛ $\vec{v'}\,(-1;3)$ أشعة للمستوي.
– عبّر عن الأشعة $\vec{u'}$ ؛ $\vec{v}$ ؛ $\vec{u}$ ؛ $\vec{v'}$ بدلالة الشعاعين $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$.

15 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي ؛ t عدد حقيقي. أوجد علاقة من الشكل $\vec{v}=t\,\vec{u}$ بين الشعاعين $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ في الحالات التالية :
1. $\vec{u}\,(3;-1)$ ؛ $\vec{v}\,(9;-3)$
2. $\vec{u}\,(-2;4)$ ؛ $\vec{v}\,(2;-4)$
3. $\vec{u}\,(\sqrt{2};0)$ ؛ $\vec{v}\,(\sqrt{8};0)$.

16 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$\vec{u}\,(2;1)$ ؛ $\vec{v}\,(-8;-4)$ شعاعان للمستوي.
– أثبت أن الشعاعين $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ متوازيان.

17 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.
$\vec{u}\,(2;-3)$ ؛ $\vec{v}\,(-2;3\sqrt{2})$ شعاعان للمستوي.
– هل الشعاعان $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ متوازيان ؟

18 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.
$\vec{u}\,(2;-3)$ ؛ $\vec{v}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$ شعاعان للمستوي.
– هل الشعاعان $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ متوازيان ؟

19 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.
عيّن، في كل حالة من الحالات التالية، العدد الحقيقي x حتى يكون الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متوازيين.
1. $\vec{u}\left(\frac{5}{3};x\right)$ ؛ $\vec{v}\,(2;3)$
2. $\vec{u}\,(x;2)$ ؛ $\vec{v}\,(\sqrt{2};4)$
3. $\vec{u}\,(-1;2)$ ؛ $\vec{v}\,(x;3)$
4. $\vec{u}\,(-1;2)$ ؛ $\vec{v}\,(x-1;3)$

3 A' ؛ B' ؛ C' ؛ D' نقط من المستقيم (Δ) حيث :

$\overrightarrow{OA'} = 3\,\vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OB'} = -5\,\vec{i}$ ؛

$\overrightarrow{OC'} = \sqrt{2}\,\vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OD'} = \dfrac{5}{2}\,\vec{i}$

عيّن فواصل النقط A' ؛ B' ؛ C' ؛ D'

4 M' ، N' ، P' ، Q' نقط من المستقيم (Δ) فواصلها على الترتيب :

$5\ ;\ -3\ ;\ \dfrac{5}{3}\ ;\ \sqrt{2}+1$.

عبّر عن الأشعة $\overrightarrow{OM'}$ ؛ $\overrightarrow{ON'}$ ؛ $\overrightarrow{OP'}$ ؛ $\overrightarrow{OQ'}$ بدلالة الشعاع $\vec{i}$.

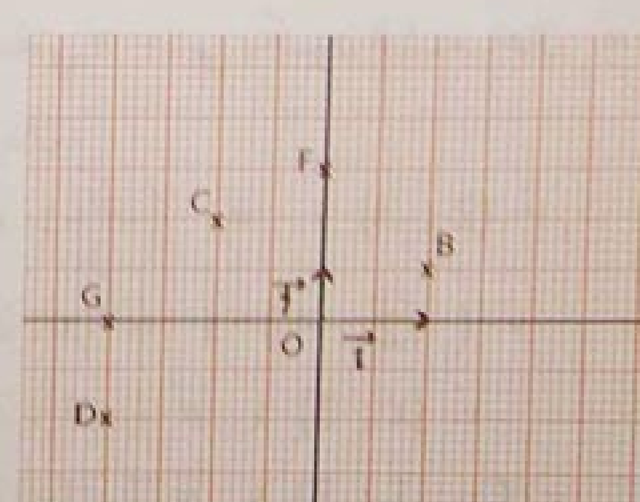
التعليم في المستوي

5 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

علّم النقط $A(2;1)$ ؛ $B(-3;0)$ ؛ $C(0;4)$ ؛ $D(-1;2)$ ؛ $E\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

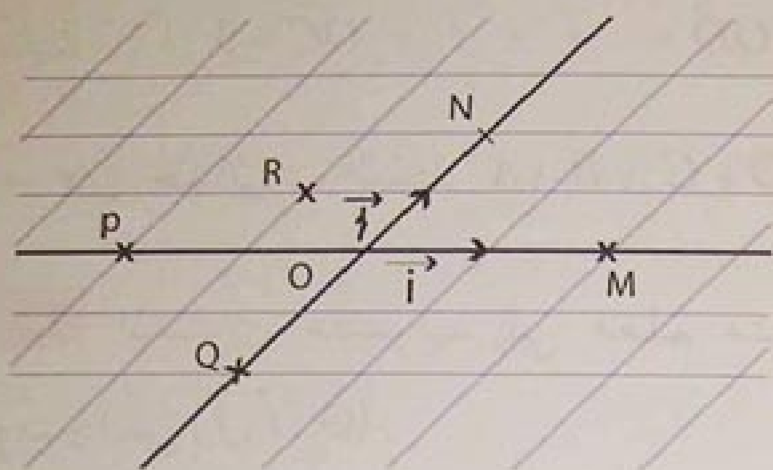
6 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عيّن إحداثيات النقط A ؛ B ؛ C ؛ D ؛ E ؛ F ؛ G الممثلة في الشكل .



7 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عيّن إحداثيات النقط M ؛ N ؛ P ؛ Q ؛ R الممثلة في الشكل .



8 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متجانس للمستوي .

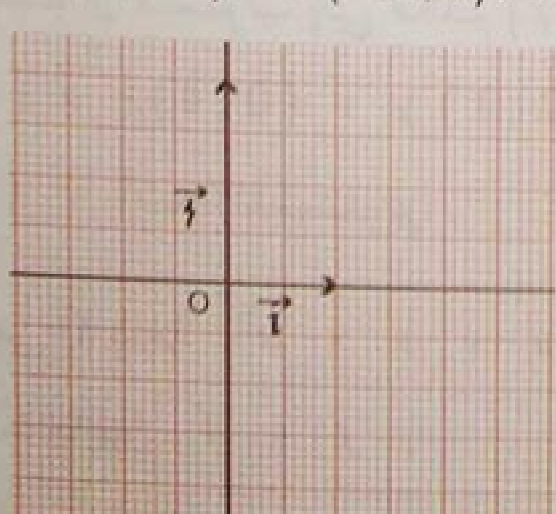
علّم النقط $A(2;0)$ ؛ $B(0;-2)$ ؛ $C(1;-1)$ ؛ $D(-2;-2)$ ؛ $E(3;1)$.

9 أرسم معلما متعامدا في المستوي حيث $OI = 2\ cm$ ؛ $OJ = 3\ cm$.

– علّم النقط $A(-2;2)$ ؛ $B(-3;0)$ ؛ $C(0;-2)$ ؛ $D(4;-3)$ في المعلم السابق .

10 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي (الشكل).

حدّد نوع هذا المعلم ثم علّم النقط $A(1;0)$ ؛ $B(0;1)$ ؛ $C(-1;0)$ ؛ $D(0;-1)$.



11 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.

A ؛ B ؛ C ؛ D نقط من المستوي حيث

$\overrightarrow{OA} = 5\vec{i}$ ؛ $\overrightarrow{OB} = -2\vec{j}$ ؛

$\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ؛ $\overrightarrow{OD} = -\vec{i} + \vec{j}$

– عين إحداثيات النقط A؛ B ؛ C ؛ D.

12 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{u}\,(2;3)$ ؛ $\vec{v}\,(-4;1)$ شعاعان للمستوي.

عبّر عن الشعاعين $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ بدلالة الشعاعين $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$.

13 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي. M ؛ N ؛ P ؛ Q ؛ R نقط من المستوي إحداثياتها $(-1;-1)$ ؛ $(2;0)$ ؛ $(0;-4)$ ؛ $(2;\sqrt{2})$ ؛ $(5;-5)$ على الترتيب.

– عبّر عن الأشعة $\overrightarrow{OM}$ ؛ $\overrightarrow{ON}$ ؛ $\overrightarrow{OP}$ ؛ $\overrightarrow{OQ}$ ؛ $\overrightarrow{OR}$ بدلالة الشعاعين $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$.

14 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{u}\,(-3;0)$ ؛ $\vec{v}\,(0;4)$ ؛ $\vec{u'}\,(2;1)$ ؛ $\vec{v'}\,(-1;3)$ أشعة للمستوي.

– عبّر عن الأشعة $\vec{u'}$ ؛ $\vec{v}$ ؛ $\vec{u}$ ؛ $\vec{v'}$ بدلالة الشعاعين $\vec{i}$ ؛ $\vec{j}$.

15 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي ؛ t عدد حقيقي. أوجد علاقة من الشكل $\vec{v} = t\,\vec{u}$ بين الشعاعين $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ في الحالات التالية :

1. $\vec{u}\,(3;-1)$ ؛ $\vec{v}\,(9;-3)$
2. $\vec{u}\,(-2;4)$ ؛ $\vec{v}\,(2;-4)$
3. $\vec{u}\,(\sqrt{2};0)$ ؛ $\vec{v}\,(\sqrt{8};0)$.

16 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{u}\,(2;1)$ ؛ $\vec{v}\,(-8;-4)$ شعاعان للمستوي.

– أثبت أن الشعاعين $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ متوازيان.

17 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.

$\vec{u}\,(2;-3)$ ؛ $\vec{v}\,(-2;3\sqrt{2})$ شعاعان للمستوي.

– هل الشعاعان $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ متوازيان ؟

18 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.

$\vec{u}\,(2;-3)$ ؛ $\vec{v}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$ شعاعان للمستوي.

– هل الشعاعان $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ متوازيان ؟

19 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.

عيّن ، في كل حالة من الحالات التالية ، العدد الحقيقي x حتى يكون الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متوازيين.

1. $\vec{u}\left(\frac{5}{3};x\right)$ ؛ $\vec{v}\,(2;3)$
2. $\vec{u}\,(x;2)$ ؛ $\vec{v}\,(\sqrt{2};4)$
3. $\vec{u}\,(-1;2)$ ؛ $\vec{v}\,(x;3)$
4. $\vec{u}\,(-1;2)$ ؛ $\vec{v}\,(x-1;3)$

20 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1 cm).

– علّم النقط $A(0;-6)$ ؛ $B(7;-1)$ ؛ $C(-10;-13)$

– احسب إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{AC}$.

– هل الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{AC}$ متوازيان ؟

21 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي .

ادرس توازي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1. $A(1;2)$ ؛ $B\left(3;\frac{1}{3}\right)$ ؛ $C\left(6;\frac{23}{6}\right)$
2. $A(-1;-2)$ ؛ $B(3;0)$ ؛ $C\left(\sqrt{2};1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
3. $A(-3;-2)$ ؛ $B(3;1)$ ؛ $C(-3;1)$
4. $A(-72;40)$ ؛ $B(105;130)$ ؛ $C(33;-204)$

22 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي .

$A(1;-2)$ ؛ $B(5;-4)$ ؛ $C\left(2;-\frac{5}{2}\right)$ ؛ $D(x;-3)$ نقط من المستوي.

– برهن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ متوازيان.

– عيّن العدد الحقيقي x حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{CD}$ متوازيين .

23 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{u}(2;-1)$ ؛ $\vec{v}(-3;2)$ شعاعان للمستوي.

– عيّن إحداثيات الأشعة $\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $-\vec{v}$ ؛ $\vec{u}-\vec{v}$ ؛ $3\vec{u}$ ؛ $-5\vec{v}$ ؛ $2\vec{u}-4\vec{v}$.

24 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$A(-1;3)$ ؛ $B(4;-2)$ نقطتان من المستوي.

احسب إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

احسب إحداثيي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

25 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{u}(2;1)$ شعاع للمستوي و $A(2;-4)$ نقطة من المستوي.

– احسب إحداثيي النقطة B حيث $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}.\vec{u}$.

26 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

m ؛ t عددان حقيقيان.

$\vec{u}(t-3;2+m)$ ؛ $\vec{v}(1-t;2m)$ شعاعان للمستوي.

– عيّن العددين الحقيقيين t ؛ m حيث $\vec{u}=\vec{0}$.

– عيّن العددين الحقيقيين t ؛ m حيث $\vec{u}=\vec{v}$.

27 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$A(1;-5)$ ؛ $B(3;-9)$ ؛ $C(2;-7)$.

أثبت أن النقط A ؛ B ؛ C على استقامة واحدة.

28 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الحالات التالية ، هل النقط M ؛ N ؛ P تقع على استقامة واحدة ؟

1. $M(4;-1)$ ؛ $N(7;-3)$ ؛ $P(-5;5)$
2. $M(-2;3)$ ؛ $N(-3;7)$ ؛ $P(-5;14)$
3. $M\left(2;-\frac{1}{3}\right)$ ؛ $N(3;-1)$ ؛ $P(0;1)$

29 المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$A(-1;3)$ ؛ $B(-2;-4)$ ؛ $C(5;-2)$
نقط من المستوي.
– عيّن إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

مسائل

30 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 1 cm).
نعتبر النقط $A(-2;1)$ ؛ $B(7;8)$ ؛ $C(0;-1)$ ؛ $D(9;6)$.

1. علّم النقط A ؛ B ؛ C ؛ D .
2. احسب إحداثيي كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.
ماذا تستنتج ؟
3. مالذي يمكن قوله عن طبيعة الرباعي $ABDC$ ؟
4. بالإعتماد على الشكل المنجز، عيّن شعاعين آخرين متساويين .

31 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . (الوحدة 1 cm) .
A ؛ B ؛ C نقط من المستوي إحداثياتها على الترتيب هي $(3;5)$ ؛ $(-2;4)$ ؛ $(8;6)$.

1. علّم النقط A ؛ B ؛ C .
2. احسب إحداثيات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{BC}$.
3. هل الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متوازيان ؟
4. ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة إلى النقط A ؛ B ؛ C ؟
5. عيّن الإحداثيين $(x ; y)$ للنقطة D حتى يكون $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

32 المستوي منسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. علّم النقط $A(2;4)$ ؛ $B(2;-6)$ ؛ $C(-4;-1)$.
2. احسب إحداثيي النقطة K حيث $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{O}$.
3. عيّن إحداثيي النقطة L حيث $3\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{LB}=\vec{O}$.
4. عيّن إحداثيي النقطة M منتصف القطعة $[KL]$.

33 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
لتكن النقط $A(-1;2)$ ؛ $B(2;-1)$ ؛ $C(x;2x)$ حيث x عدد حقيقي .

1. عيّن العدد x حتى تكون النقط A ؛ B ؛ C على استقامة واحدة .
2. عيّن العدد x حتى يكون المثلث ABC متساوي الساقين فيه $CA=CB$.
3. هل توجد قيم للعدد x يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع ؟

الباب
7

معادلات مستقيم

1 • معادلات مستقيم معين بنقطة وشعاع توجيه

2 • معادلات مستقيم معين بنقطتين مختلفتين

3 • شرط توازي مستقيمين

الهندسة التحليلية أوحت بها فكرة أساسية ، وهي أنه يمكن تحقيق دراسات هندسية بواسطة الحساب الجبري ، وقد تمخضت عن هذه الفكرة طريقة جد متميّزة تعمل على تحويل مشكل هندسي إلى مشكل عددي بتوظيف معادلات جبرية ، وقد ساهمت هذه الطريقة في تطوير طرائق الحساب التفاضلي والتكاملي وكان لها دور فعال في تنمية التفكير العلمي .

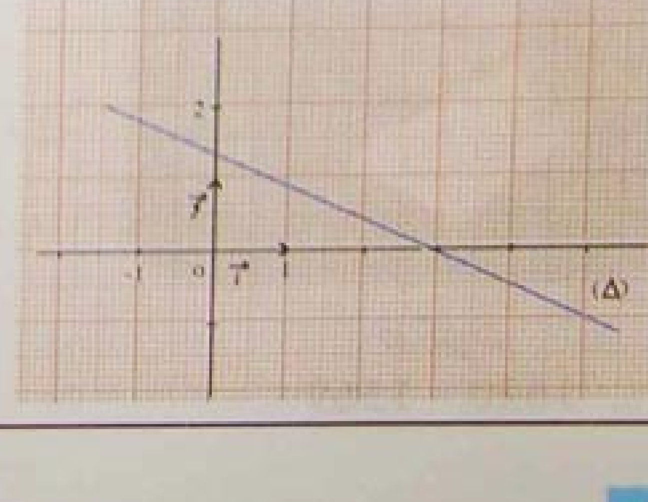
تعتبر سنة 1637 تاريخ ميلاد الهندسة التحليلية حين نشر **ديكارت** عملا في تاريخ الفلسفة ، عرض بمنهجية ، في جزء منه والمعنون "الهندسة" ، المبادىء الأساسية للهندسة التحليلية وقبله بفترة قصيرة عالج كذلك **فيرما** (1601 – 1665) موضوع الهندسة التحليلية إلا أن عمله لم ينشر إلا في سنة 1679 .

ديكارت
1650 - 1569

ينسب تطوير الهندسة التحليلية عادة إلى ديكارت ، إلا أن تطويرها إلى الشكل الحالي لها ،كان بعد فترة طويلة منه ، من طرف **أولر** (1707 – 1783) خصوصًا .

استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة

السؤال	إجابة 1	إجابة 2	إجابة 3
1) إذا كان لكل نقط مستقيم نفس الترتيب 1 فإن لهذا المستقيم معادلة هي	$x = -1$	$y = 1$	$y = -x$
2) إذا كان لكل نقط مستقيم نفس الفاصلة 1 فإن لهذا المستقيم معادلة هي	$y = 1$	$x = 1$	$x - y = 0$
3) $y = 3x - 2$ هي معادلة للمستقيم (Δ) إذن	(Δ) يشمل النقطة $A(1\,;-2)$	معامل توجيه (Δ) هو 3	(Δ) يوازي المستقيم المعرف بالمعادلة $x - 3y = 0$
4) (Δ) مستقيم يوازي محور التراتيب . إذن	لكل نقط (Δ) نفس الفاصلة	لكل نقط (Δ) نفس الترتيب	معامل توجيه (Δ) معدوم
5) $2x - 3y + 1 = 0$ هي معادلة للمستقيم (Δ) . إذن	(Δ) يشمل النقطة $A(1\,;1)$	معامل توجيه (Δ) هو $\frac{3}{2}$	إحداثيا شعاع توجيه (Δ) هما $(2\,;3)$
6) $3x - 2y - 5 = 0$ هي معادلة للمستقيم (Δ) . إذن	معامل توجيه (Δ) هو $\frac{2}{3}$	(Δ) يوازي المستقيم ذا المعادلة $6x - 4y + 1 = 0$	شعاع توجيه (Δ) هو $\vec{v}(-2\,;3)$
7) $A(1\,;-2)$ ، $B(-1\,;3)$ نقطتان من المستوي المزود بمعلم . معامل توجيه المستقيم (AB) هو	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
8) في الشكل ، (Δ) مستقيم يشمل .... 	النقطة التي إحداثياها $(1\,;1)$	النقطة التي إحداثياها $(5\,;-1)$	النقطة التي إحداثياها $(0\,;1)$

أنشطة تمهيدية

❖**نشاط 1** : لتكن المعادلتان للمجهولين الحقيقيين x ، y .

(1) $2x - y + 5 = 0$ (2) $y = 3x + 2$

1 – أوجد 5 حلول على الأقل لكل معادلة ، قدّمها في الجدولين التاليين :

(1)

x							
y							

(2)

x						
y						

2 – $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

• علّم النقط المعيّنة إحداثياتها في الجدول (1) الخاص بالمعادلة (1) .

• أبحث عن خاصية تحقّقها مجموعة النقط التي إحداثياتها هي حلول للمعادلة (1) .

3 – نفس الأسئلة بالنسبة إلى الجدول (2) الخاص بالمعادلة (2) .

4 – حدّد مجموعة النقط التي تحقّق إحداثياتها المعادلة (1) .

5 – حدّد مجموعة النقط التي تحقّق إحداثياتها المعادلة (2) .

❖**نشاط 2** : لتكن المعادلات للمجهولين الحقيقيين x ، y :

(1) ..... $-5x + 10y + 1 = 0$ ؛ (2) ...... $3x + y - 4 = 0$ ؛ (3) ...... $2x - 2y = 0$.

1 – أكتب المعادلات الثلاث السابقة على الشكل :

$y = mx + p$ حيث m ، p عددان حقيقيان .

2 – أوجد ثنائية $(a;b)$ من عددين حقيقيين يحققان كلا من المعادلتين (2) و (3) .

3 – هل يحقّق هذا الحل المعادلة (1) ؟

1 - معادلة مستقيم معيّن بنقطة وشعاع توجيه

شعاع توجيه لمستقيم

A ، B نقطتان مختلفتان من المستوي ، هاتان النقطتان تعينان مستقيما يرمز له (Δ) أو (D) أو (AB) .....

تعريف : من أجل كل نقطة M من (Δ) ، يكون منحى الشعاع $\overrightarrow{AM}$ هو نفس منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$. الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

- كل شعاع غير معدوم له نفس منحى $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) .

في الشكل ؛ كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

ملاحظة : شعاع توجيه مستقيم يعين منحى هذا المستقيم .

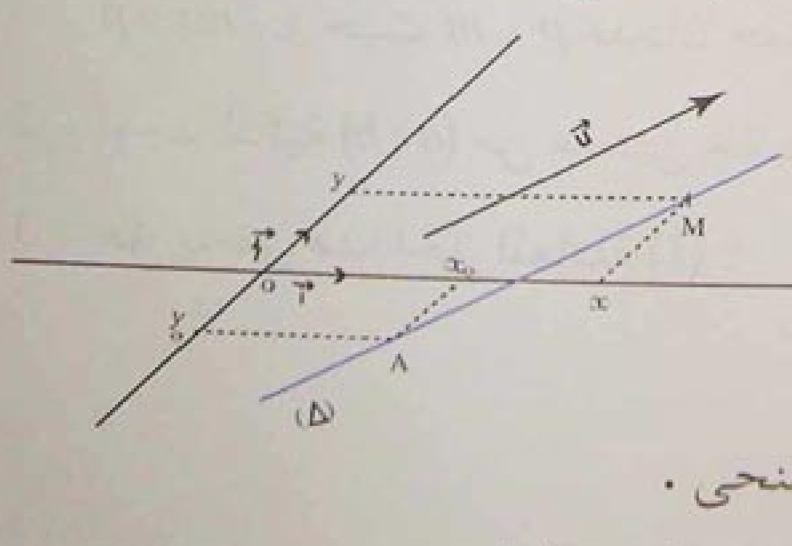
انتبه : • لمستقيم (Δ) وشعاع $\vec{u}$ نفس المنحى ، يعني أن $\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

• لشعاعين نفس المنحى يعني أنهما متوازيان .

معادلات مستقيم معين بنقطة وشعاع توجيه

المستوى منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A(x_0 ; y_0)$.

$\vec{u}(\alpha ; \beta)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .



إذا كانت M نقطة من المستوي فإن إحداثيي $\overrightarrow{AM}$ هما $(x - x_0 ; y - y_0)$.

M نقطة من (Δ) يعني ، للشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AM}$ نفس المنحى .

وحسب شرط توازي شعاعين نكتب : $\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$

إذن : $\beta x - \alpha y - (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0$.

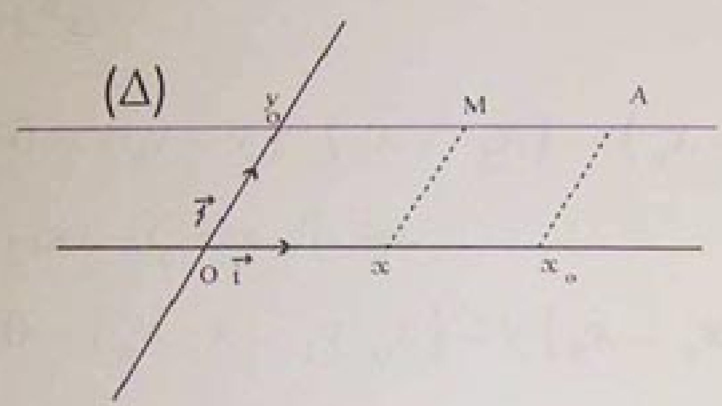
معـــــارف

تعريف : α ؛ β **عددان حقيقيان غير معدومين في آن واحد .**

المعادلة $\beta x - \alpha y - (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0$ **هي معادلة للمستقيم** (Δ) **المعين بالنقطة** A **ذات الإحداثيين** $(x_0 ; y_0)$ **وشعاع توجيه ذي الإحداثيين** $(\alpha ; \beta)$ ..

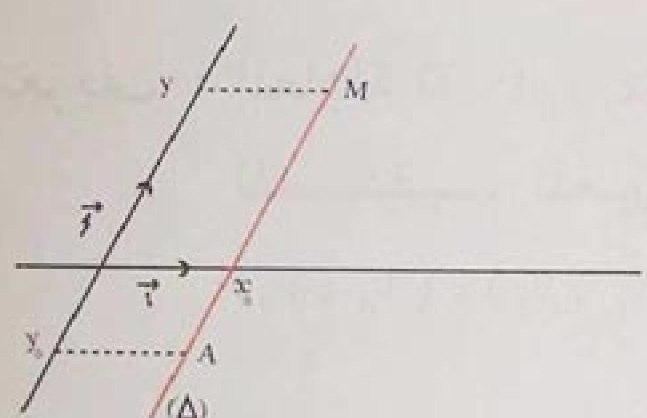
عندما $\alpha \neq 0$ ، العدد الحقيقي $\dfrac{\beta}{\alpha}$ يسمى معامل توجيه المستقيم .

ملاحظة : يمكن كتابة المعادلة السابقة في شكل أبسط كما يلي :



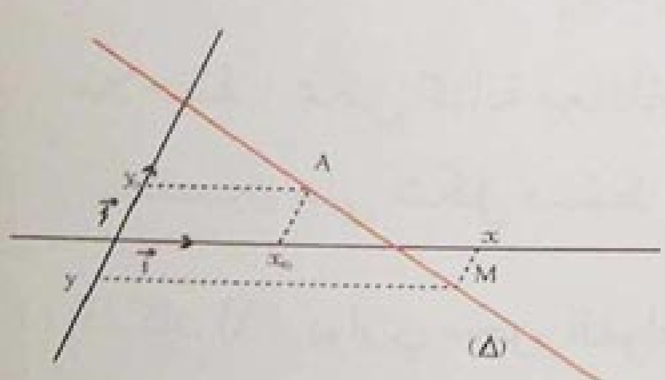
1) إذا كان المستقيم (Δ) يوازي محور الفواصل فإن ترتيب كل نقطة M من (Δ) هو y_0 ترتيب النقطة A.

إذن : $y = y_0$ هي معادلة للمستقيم (Δ) .



2) إذا كان المستقيم (Δ) يوازي محور التراتيب فإن فاصلة كل نقطة M من (Δ) هو x_0 فاصلة النقطة A .

إذن : $x = x_0$ هي معادلة للمستقيم (Δ) .



3) إذا كان (Δ) لا يوازي كلا من المحورين الإحداثيين ، في هذه الحالة يكون α ، β غير معدومين معًا ، إذن يمكن كتابة المعادلة $\beta x - \alpha y - (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0$

على الشكل المبسط : $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$

مثال : المعادلة $\dfrac{x-1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{y-2}{1}$ هي معادلة مبسطة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1 ; 2)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}\left(\frac{3}{4} ; 1\right)$.

يمكن أيضا أن نكتب المعادلة السابقة على الشكل $4x - 3y + 2 = 0$.

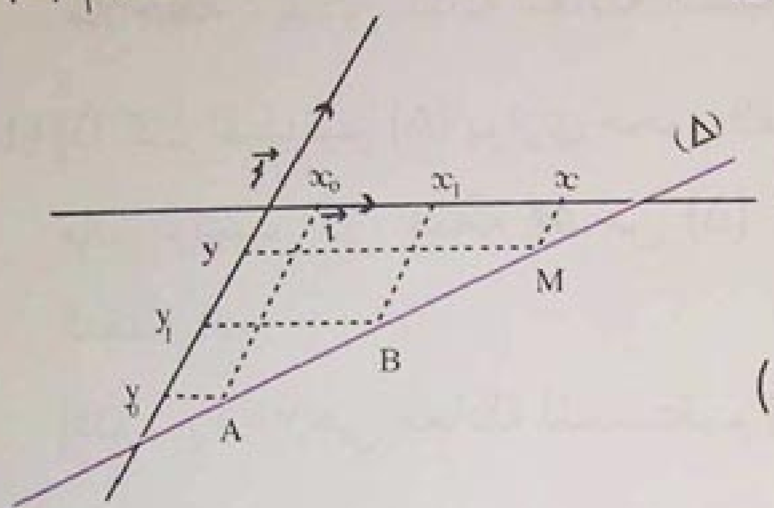
ملاحظة : باستعمال المعادلة $\beta x - \alpha y - (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0$ نجد :

$x - \dfrac{3}{4} y + \dfrac{1}{2} = 0$ وهو شكل آخر للمعادلة السابقة .

2 - معادلة مستقيم معين بنقطتين مختلفتين

المستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين المختلفتين $A(x_0;y_0)$ ، $B(x_1;y_1)$. الشعاع ذو الإحداثيين $(x_1-x_0;y_1-y_0)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ). إذن (Δ) معيّن بالنقطة A (أو B) وشعاع توجيه له هو $\overrightarrow{AB}$.

بالرجوع إلى معادلة مستقيم معرّف بنقطة وشعاع توجيه نكتب معادلة للمستقيم (Δ) وهي :



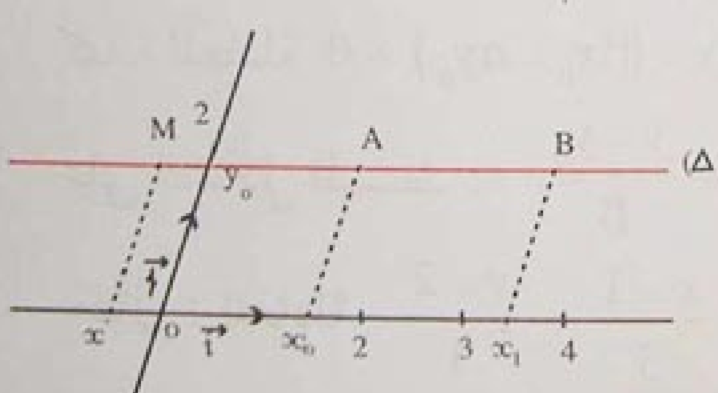
$$(y_1-y_0)(x-x_0)-(x_1-x_0)(y-y_0)=0$$

وبعد الإختصار نجد :

$$(y_1-y_0)x-(x_1-x_0)y-(x_0y_1-x_1y_0)=0$$

تعريف : المعادلة $(y_1-y_0)x-(x_1-x_0)y-(x_0y_1-x_1y_0)=0$ هي معادلة للمستقيم المعيّن بالنقطتين المختلفتين اللتين إحداثياتهما $(x_0;y_0)$ ، $(x_1;y_1)$.

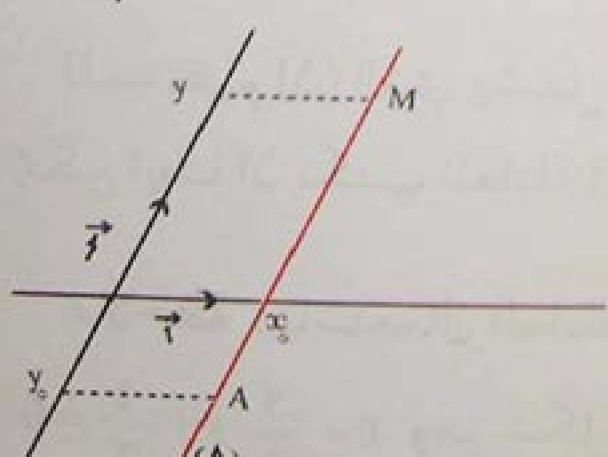
عندما $x_0 \neq x_1$ ؛ العدد $\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ هو معامل توجيه المستقيم (AB) .



ملاحظة : يمكن كتابة معادلة للمستقيم المعرّف بالنقطتين على شكل مبسّط كما يلي :

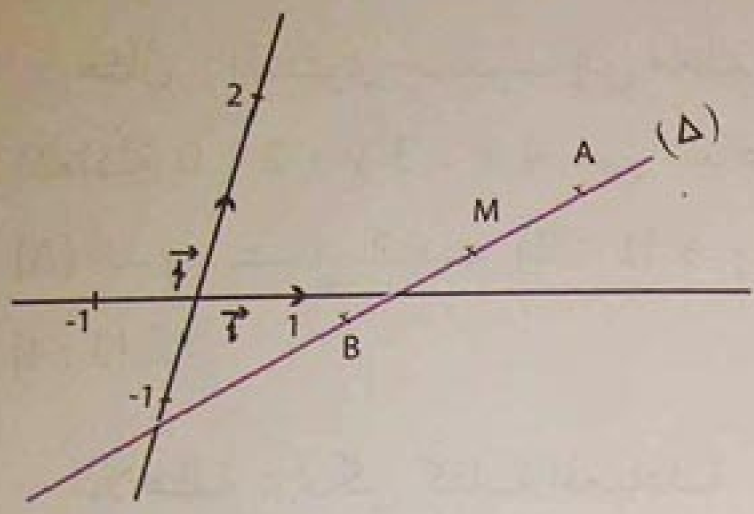
1) إذا كان (Δ) يوازي محور الفواصل فإن : لكل نقط (Δ) نفس الترتيب .

إذن : $y=y_0$ هي معادلة للمستقيم (Δ) .



2) إذا كان (Δ) يوازي محور التراتيب فإن لكل نقط (Δ) نفس الفاصلة .

إذن : $x=x_0$ معادلة للمستقيم (Δ) .



3) إذا كان (Δ) لا يوازي كلاً من المحورين الإحداثيين فإن $x_1 \neq x_0$ و $y_1 \neq y_0$ إذن يمكن كتابة معادلة (Δ) على الشكل : $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$

4) إذا كان $A(a\,;0)$ ؛ $B(0\,;b)$ نقطتين مختلفتين من المستوي حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن معادلة (AB) هي $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

مثال : معادلة المستقيم المعيّن بالنقطتين $A(-2\,;3)$ ؛ $B(3\,;-5)$ يمكن تعيينها كما يلي :

نلاحظ أن فاصلتي A ، B مختلفتان ، وكذا ترتيبيهما .

إذن : المستقيم (AB) لا يوازي المحورين ، وباستعمال المعادلة السابقة

نجد $\frac{y-3}{-5-3}=\frac{x-(-2)}{3-(-2)}$ بعد التبسيط نحصل على المعادلة : $8x+5y+1=0$

الشكل العام لمعادلة مستقيم

معادلة مستقيم (Δ) معرّف بنقطة $A(x_0\,;y_0)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$

هي $\beta x-\alpha y-(\beta x_0-\alpha y_0)=0$.

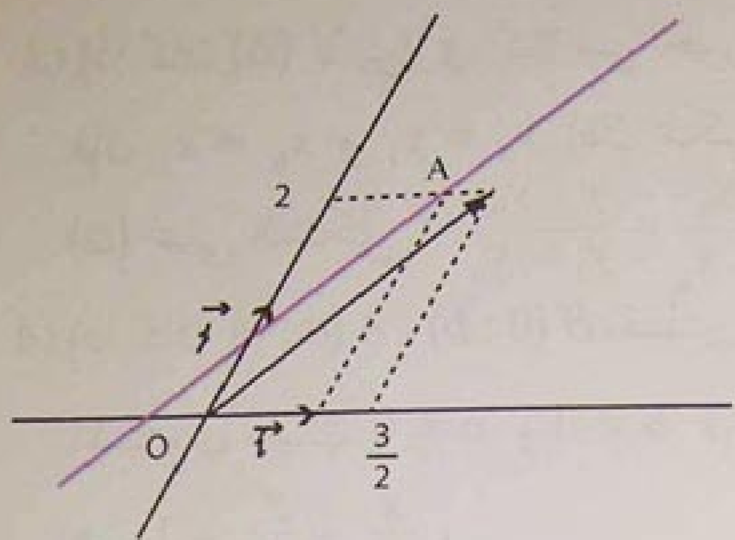
إذا وضعنا $a=\beta$ ، $b=-\alpha$ ، $c=-(\beta x_0-\alpha y_0)$ فإن المعادلة السابقة تكتب على الشكل :

$ax+by+c=0$ حيث a ، b عددان حقيقيان غير معدومين في آن واحد .

العكس : يمكن البرهان أن مجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوى التي تحقق المعادلة $ax+by+c=0$ حيث a ، b عددان حقيقيان غير معدومين في آن واحد ، هي مستقيم حيث $\vec{u}(-b\,;a)$ شعاع توجيه له .

نظرية : كل مستقيم للمستوي له معادلة من الشكل $ax+by+c=0$ حيث a ، b عددان حقيقيان غير معدومين في آن واحد .

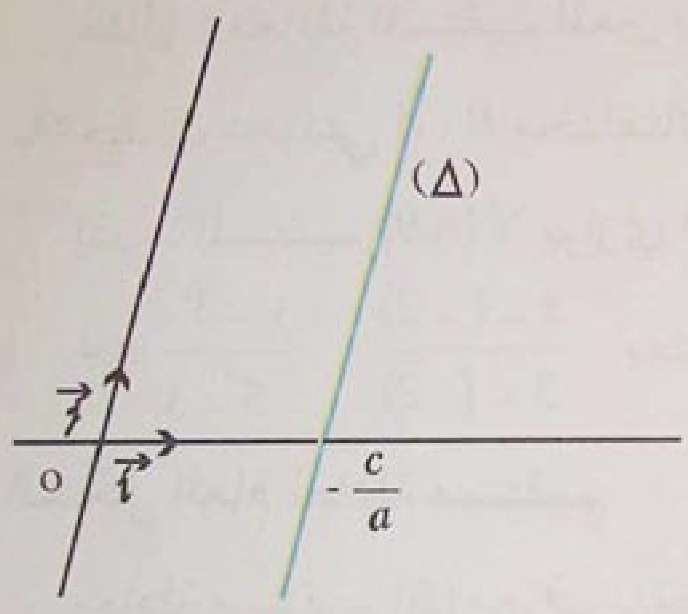
عندما $a \neq 0$ ، العدد الحقيقي $-\frac{b}{a}$ هو معامل توجيه (Δ) (أو ميل (Δ) إذا كان المعلم متعامدًا ومتجانسًا) .



مثال : المستوي منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

المعادلة $4x - 3y + 2 = 0$ هي معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1;2)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(3;4)$.

ملاحظة : يمكن كتابة المعادلة $ax + by + c = 0$ كما يلي :



1) إذا كان $b = 0$ فإن $a \neq 0$. في هذه الحالة نكتب $x = k$ حيث $k = -\dfrac{c}{a}$

وهي معادلة للمستقيم (Δ) الموازي لمحور التراتيب ، شعاع توجيه (Δ) هو كل شعاع يوازي $\vec{j}$.

2) إذا كان $b \neq 0$ نكتب المعادلة $ax + by + c = 0$ على الشكل $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

بوضع $m = -\dfrac{a}{b}$ ، $p = -\dfrac{c}{b}$ نكتب $y = mx + p$

مبرهنة : **كل مستقيم للمستوي له معادلة من الشكل :**
$x = k$ إذا كان المستقيم يوازي محور التراتيب
و $y = mx + p$ إذا كان المستقيم لا يوازي محور التراتيب .

m هو معامل توجيه المستقيم الذي معادلته $y = mx + p$ و $\vec{u}(1;m)$ هو شعاع توجيه له .

3 - توازي مستقيمين

(Δ) و (Δ') مستقيمان للمستوي معرفين بالمعادلتين :

$ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ على الترتيب .

$\vec{u}(-b;a)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ) و $\vec{u}'(-b';a')$ شعاع توجيه لـ (Δ').

معـــــارف

المستقيمان (Δ) و (Δ') متوازيان إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ متوازيين .

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ متوازيان إذا وفقط إذا كان $ab' - a'b = 0$

مبرهنة : (Δ) و (Δ') **مستقيمان للمستوي معادلتاهما** $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ **على الترتيب .**

المستقيمان (Δ) **و** (Δ') **متوازيان إذا وفقط إذا كان** $ab' - a'b = 0$.

ملاحظة : (Δ) مستقيم معادلته $y = mx + p$ و (Δ') مستقيم معادلته $y = m'x + p'$.

كل من المعادلتين تكتب $mx - y + p = 0$ و $m'x - y + p' = 0$

حيث : الشعاعان $\vec{u}\,(1\,;m)$ و $\vec{u}'\,(1\,;m')$ هما شعاعا توجيه للمستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب .

(Δ) و (Δ') متوازيان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ متوازيين

أي أن $1 \times m' - 1 \times m = 0$ وبالتالي : $m = m'$

ينتج أن : (Δ) و (Δ') متوازيان إذا وفقط إذا كان $m = m'$.

مبرهنة : (Δ) و (Δ') **مستقيمان للمستوي معادلتاهما** $y = mx + p$ و $y = m'x + p'$ **على الترتيب .**

(Δ) و (Δ') **متوازيان إذا وفقط إذا كان** $m = m'$.

أي أن : (Δ) و (Δ') متوازيان إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه .

ملاحظة : إذا كان المستقيمان (Δ) و (Δ') غير متوازيين فهما متقاطعان .

1 - إثبات إنتماء نقطة إلى مستقيم

طريقة : المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
تنتمي نقطة $A(x_1\ ;y_1)$ إلى المستقيم (Δ') المعرّف بالمعادلة $ax+by+c=0$ (أو $y=mx+p$) إذا وفقط إذا كانت الثنائية $(x_1\ ;y_1)$ حلا للمعادلة $ax+by+c=0$ (أو للمعادلة $y=mx+p$).

تمرين : المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Δ) مستقيم معادلته $y=-2x+5$
لتكن النقط $A(0\,;5)$ ؛ $B(-1\,;3)$ ؛ $C(2\,;\,1)$.
- من بين هذه النقط A ؛ B ؛ C حدّد النقط التي تنتمي إلى (Δ) .

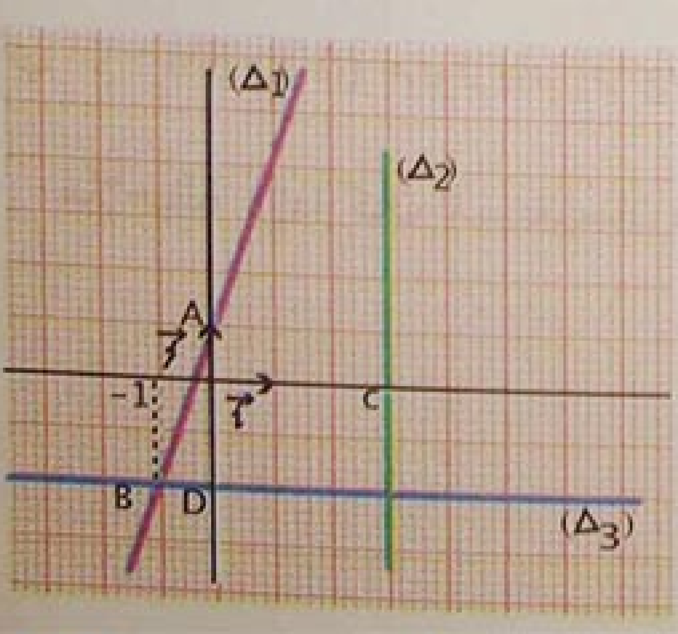
حل : لدينا : $5=(-2)\times 0+5$ إذن $A\in(\Delta)$
و $3\neq(-2)(-1)+5$ إذن $B\notin(\Delta)$
و $1=(-2)(2)+5$ إذن $C\in(\Delta)$

2 - رسم مستقيم علمت معادلة له

طريقة : لرسم مستقيم ، علمت معادلة له في معلم للمستوي ، نعيّن نقطتين منه أو نعيّن نقطة منه إذا كان يوازي أحد محوري المعلم .

تمرين : المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أرسم المستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ذات المعادلات
$y=3x+1$ ؛ $x=3$ ؛ $y=-2$ على الترتيب .



حل : • لدينا $(\Delta_1)\ :\ y=3x+1$.

x	0	-1
y	1	-2

إذن النقطتان $A(0\,;1)$ و $B(-1\,;-2)$ تنتميان إلى (Δ_1) ، وبالتالي تعيّنان (Δ_1) .

• لدينا $(\Delta_2): x=3$. نلاحظ أن (Δ_2) يوازي محور التراتيب و $C(3\,;0)$ هي نقطة منه .

• لدينا $(\Delta_3): y=-2$. نلاحظ أن (Δ_3) يوازي محور الفواصل و $D(0\,;-2)$ هي نقطة منه .

3 - إيجاد معادلة لمستقيم يشمل نقطتين مختلفتين

طريقة : لإيجاد معادلة للمستقيم (AB) الذي يشمل النقطتين $A(x_0\,;\,y_0)$ و $B(x_1\,;y_1)$ نلاحظ ما يلي :

1) **إذا كان $x_0=x_1$ فإن المستقيم (AB) يوازي محور التراتيب ومعادلته هي $x=x_0$.**

2) **إذا كان $x_0\neq x_1$ فإن معادلة المستقيم (AB) من الشكل $y=mx+p$ حيث : $m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ و $p=y_0-mx_0$.**

3) **إذا كان $x_0\neq x_1$ وَ $y_0\neq y_1$ فإن معادلة المستقيم (AB) من الشكل $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.**

تمرين : $A(2\,;-1)$ و $B(3\,;5)$ نقطتان من المستوي منسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

أوجد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

حل : نلاحظ أن $x_0\neq x_1$ إذن المستقيم (AB) لا يوازي محور التراتيب .

ينتج أن معادلة المستقيم (AB) من الشكل $y=mx+p$.

لدينا : $m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{5-(-1)}{3-2}=6$ إذن $y=6x+p$

ولدينا أيضا $p=y_0-mx_0$ إذن $p=-1-6(2)=-13$ أي $p=-13$

ينتج أن معادلة المستقيم (AB) هي $y=6x-13$

ملاحظة : في هذه الحالة ، يمكن الحصول على معادلة للمستقيم (AB) باستعمال المعادلة $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

4 - التعرّف على توازي مستقيمين

طريقة : لدراسة توازي مستقيمين ، نقارن معاملي توجيههما أو شعاعي توجيههما أو نبحث عن مستقيم يوازيهما .

تمرين : المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر المستقيمات التالية :

$(D_1): y=5x+1$ ؛ $(D_2): y=-5x$ ؛ $(D_3): y=-8$ ؛ $(D_4): x=2$ ؛ $(D_5): y=4$

$(D_6): \frac{5}{2}x+\frac{1}{2}y-4=0$ ؛ $(D_7): y=5x-3$ ؛ $(D_8): x=-7$

من بين المستقيمات السابقة ، حدّد المستقيمات المتوازية .

حل : • نلاحظ أن (D_1) و (D_7) لهما نفس معامل التوجيه (وهو 5) فهما متوازيان .

• (D_4) و (D_8) يوازيان محور التراتيب ، فهما متوازيان .

• (D_3) و (D_5) يوازيان محور الفواصل ، فهما متوازيان .

ملاحظة : يمكن أيضا ملاحظة أن معادلة (D_3) تكتب $y=0.x-8$ ومعادلة (D_5) تكتب $y=0.x+4$.

ينتج أن معاملي توجيههما متساويان .

• معادلة (D_2) تكتب $5x+y=0$ وشعاع توجيه (D_2) هو $\vec{u}(-1;5)$

شعاع توجيه (D_6) هو $\vec{v}\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

لدينا : $-1\left(\frac{5}{2}\right)-5\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان .

وبالتالي (D_2) و (D_6) متوازيان .

صحيح - خاطىء

أذكر ، إن كانت الجمل التالية ، صحيحة أو خاطئة .

في الجمل التالية المستوي منسوب إلى معلم

1) المستقيم (d) ذو المعادلة $3x - y + 5 = 0$ يشمل النقطة $A(-1 ; 2)$

2) الشعاع $\vec{v}(-3 ; 4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $4x - 3y + 1 = 0$

3) (D) و (Δ) مستقيمان معادلتاهما $y = -x + 1$ ، $y = 3x + 1$ على الترتيب .
(D) و (Δ) متوازيان .

4) معامل توجيه المستقيم (D) ذي المعادلة $y = \sqrt{5} + 3x$ هو $\sqrt{5}$.

5) $A(-1 ; 3)$ ، $B(5 ; 2)$ نقطتان من المستوي .
معامل توجيه المستقيم (AB) هو $-\frac{1}{6}$.

6) (Δ) مستقيم معادلته $x + y - 2 = 0$
$\vec{u}_1(1 ; -1)$ ؛ $\vec{u}_2(-2 ; 2)$ ؛ $\vec{u}_3(\sqrt{2} ; -\sqrt{2})$
$\vec{u}_4\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$
هي أشعة توجيه للمستقيم (Δ) .

7) المعادلات $y = \frac{8}{3}x - \frac{17}{3}$ ؛
$\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{8}$ ؛ $8x - 3y - 17 = 0$
هي معادلات لنفس المستقيم (Δ) .

1 المستوي منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
(D) مستقيم معادلته $-3x + y + 6 = 0$
هل النقطة $A(0 ; 2)$ تنتمي إلى المستقيم (D) ؟

2 المستوي منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
(Δ) ، (D) ، (T) مستقيمات معادلاتها هي :
$2x - 3y + 1 = 0$ ؛ $x + 5y = 0$ ؛ $y = 3x$ على الترتيب .
حدّد المستقيمات التي تشمل المبدأ $O(0 ; 0)$.

معادلات مستقيم معيّن بنقطة وشعاع توجيه

في التمارين التالية ، المستوي منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 1 cm) .

3 عيّن معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $A(-3 ; 2)$ و $\vec{v}(3 ; -2)$

2) $A(0 ; -2)$ و $\vec{v}(-1 ; 0)$

3) $A(3 ; 0)$ و $\vec{v}(-3 ; -5)$

4) $A(1 ; 5)$ و $\vec{v}(0 ; 4)$

4 (D) مستقيم معادلته $4x + 2y - 5 = 0$
- عيّن شعاع توجيه $\vec{u}$ للمستقيم (D) .
- احسب ترتيب النقطة التي فاصلتها معدومة .
- ارسم المستقيم (D) في المعلم السابق .

5 (D) مستقيم يشمل النقطة $P(-2 ; 3)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(-1 ; 2)$.
- عيّن معادلة للمستقيم (D) .
- احسب معامل توجيه المستقيم (D) .

6 (Δ) ، (D) ، (T) مستقيمات معادلاتها
$y = 3x + 2$ ؛ $x - 2y + 3 = 0$ ؛
$2y + 3 = 0$ على الترتيب .
– احسب معامل توجيه كل من المستقيمات (Δ) ، (D) ، (T) .

معادلات مستقيم معين بنقطتين مختلفتين

7 عيّن معادلة للمستقيم (AB) في كل حالة من الحالات التالية :
1) $A(-1\,;2)$ و $B(1\,;3)$
2) $A(-1\,;-1)$ و $B(3\,;3)$
3) $A(0\,;-4)$ و $B(2\,;0)$
4) $A(4\,;2)$ و $B(0\,;0)$

8 $A(-1\,;3)$ ، $B(2\,;1)$ نقطتان من المستوي .
– احسب معامل توجيه المستقيم (AB) .

9 (D) ؛ (Δ) ؛ (T) ؛ (L) مستقيمات معادلاتها :
$y = 3x + 2$ ؛ $2x - y + 5 = 0$ ؛ $x = -3$ ؛
$y = -2$ على الترتيب .
ارسم المستقيمات (D) ؛ (Δ) ؛ (T) ؛ (L) .

10 عيّن معادلة للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $P(-1\,;3)$ ومعامل توجيهه -2 .

11 عيّن معادلة للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة A ومعامل توجيهه m في كل حالة من الحالات التالية :
1) $A(2\,;-4)$ و $m = -\frac{3}{4}$
2) $A(-1\,;5)$ و $m = 0$
3) $A(3\,;3)$ و $m = 1$
4) $A(2\,;0)$ و $m = \sqrt{2}$

12 احسب معامل توجيه المستقيم (D) المعرّف بمعادلة له في الحالات التالية :
1) $(D) : y = \frac{3}{2}x - 1$
2) $(D) : y = 3 - 5x$
3) $(D) : y = -\frac{1}{4}x + 7$
4) $(D) : y = \frac{2}{3}(2x - 1)$
5) $(D) : y = -5$
6) $(D) : y = \frac{1}{2}(2 - x)$

13 (D) مستقيم معادلته : $3x + 2y = 0$
(D') مستقيم معادلته : $x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$
– احسب إحداثيي شعاع توجيه لكل من المستقيمين (D) و (D') .
– هل المستقيمان (D) و (D') متوازيان ؟

14 (D) و (Δ) مستقيمان معرّفان بالمعادلتين :
$(D) : x - 2y - 5 = 0$ ؛
$(\Delta) : -\frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2} = 0$
بيّن أن المستقيمين (D) و (Δ) متوازيان .

15 من بين المستقيمات التالية المعرّفة بمعادلات ، حدّد المستقيمات المتوازية :

1) $(D): -3x+y-5=0$

2) $(D'): y=4x+4$

3) $(\Delta): y=-\sqrt{5}$

4) $(\Delta'): x=-8$

5) $(T): 6x-2y+1=0$

6) $(T'): x=16$

7) $(L): y=3$

8) $(L'): -4x+y-4=0$

16 $A(1\,;\,2)$ ؛ $B(-3\,;\,4)$ ؛ $C(-3\,;\,-2)$

ثلاث نقط من المستوي .

1 – احسب إحداثيي كل من الأشعة : $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{BC}$.

2 – ماذا تستنتج بالنسبة إلى المستقيمين (AB) و (AC) ؟

3 – اكتب معادلة لكل من المستقيمات (AB) و (AC) و (BC) .

4 – ارسم هذه المستقيمات .

مسائل

في كل ما يلي ، المستوي منسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

17 m عدد حقيقي و (D) ، (D') مستقيمان كل منهما معرف بمعادلة :

$y=2x-3$ و $y=mx+\frac{16}{3}$ على الترتيب.

– عيّن قيمة العدد الحقيقي m حتى يكون (D) و (D') متوازيين .

18 (D) و (Δ) مستقيمان معادلة كل منهما هي : $y=4x-3$ و $y=-3x+1$ على الترتيب .

1 – أوجد إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل ثم مع محور التراتيب .

2 – نفس السؤال بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3 – ارسم المستقيمين (D) و (Δ) في المعلم السابق .

19 أكتب معادلة للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ويوازي المستقيم (AB) في كل حالة من الحالات التالية :

1) $A(1\,;\,3)$ ؛ $B(2\,;\,-3)$ ؛ $C(3\,;\,2)$

2) $A(-1\,;\,-3)$ ؛ $B(2\,;\,3)$ ؛ $C(-1\,;\,-2)$

3) $A(2\,;\,1)$ ؛ $B(3\,;\,2)$ ؛ $C(-3\,;\,-1)$

4) $A(2\,;\,\sqrt{2})$ ؛ $B(0\,;\,3)$ ؛ $C(4\,;\,0)$

20 في كل حالة من الحالات التالية ؛ احسب معامل توجيه المستقيم (AB) ثم اكتب معادلة له .

1) $A(2\,;\,5)$ ؛ $B(1\,;\,3)$

2) $A(-1\,;\,-2)$ ؛ $B\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$

3) $A(2\,;\,-1)$ ؛ $B(\sqrt{2}\,;\,-1)$

4) $A(3\,;\,0)$ ؛ $B(0\,;\,3)$

21 في كل حالة من الحالات التالية ؛ أوجد معادلة للمستقيم (AB) ثم عيّن إن أمكن ؛ العدد الحقيقي t حتى تنتمي النقطة C إلى المستقيم (AB).

1) $A(-4;3)$ ؛ $B(5;-2)$ ؛ $C\left(\frac{2}{3};t\right)$
2) $A(0;-2)$ ؛ $B(-1;0)$ ؛ $C\left(t;-\frac{3}{5}\right)$
3) $A(5;2)$ ؛ $B(4;6)$ ؛ $C\left(t;-\frac{2}{3}\right)$
4) $A(2;2)$ ؛ $B(4;4)$ ؛ $C\left(t;\frac{3}{5}\right)$

22 المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 1 cm).
$A(-1;-1)$ ؛ $B(3;4)$ ؛ $C(-3;-1)$ نقط من المستوي .

1 – تحقّق أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{BC}$ غير متوازيين .

2 – ماذا تستنتج بالنسبة إلى A ، B ، C ؟

3 – عيّن إحداثيات النقط I ، J ، K منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ ، $[AC]$ ، $[BC]$ على الترتيب .

4 – عيّن معادلة لكل من المستقيمين (BC) و (IJ) .

5 – بيّن أن المستقيمين (BC) و (IJ) متوازيان .

23 نرفق بكل عدد حقيقي t ، المستقيم (D_t) الذي معادلته :

$$(2t-1)x-2y-t-1=0$$

في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 – عيّن معادلات المستقيمات (D_{-1}) ، (D_1) ، (D_0) .

2 – ارسم هذه المستقيمات في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 1 cm)

3 – هل يوجد مستقيم (D_t) يوازي محور الفواصل $(x'x)$ ؟

4 – هل يوجد مستقيم (D_t) يوازي محور التراتيب $(y'y)$ ؟

5 – عيّن العدد الحقيقي t حتى يكون المستقيم (D_t) يوازي المستقيم (Δ) ذا المعادلة $2x+y-4=0$

24 نفس أسئلة التمرين 23 بالنسبة إلى المستقيمات (D_t) في الحالات التالية :

1) $(D_t):(t+2)x+(t-1)y+3=0$
2) $(D_t):4x+(3-t)y-7t+6=0$
3) $(D_t):(1-t)x+ty+t+1=0$

25 m عدد حقيقي و (D_m) مستقيم ذو المعادلة $y=3x-2m$.

1 – عيّن معادلة للمستقيم (D_0) .

2 – ارسم المستقيم (D_0) في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3 – من أجل كل عدد حقيقي m ، المستقيم (D_m) يوازي المستقيم (D_0). لماذا ؟ علّل .

4 – عيّن ، بدلالة m ، إحداثيات النقطتين A_m و B_m ، نقطتي تقاطع المستقيم (D_m) مع محوري الإحداثيات.

الباب
8

الإحصـــاء

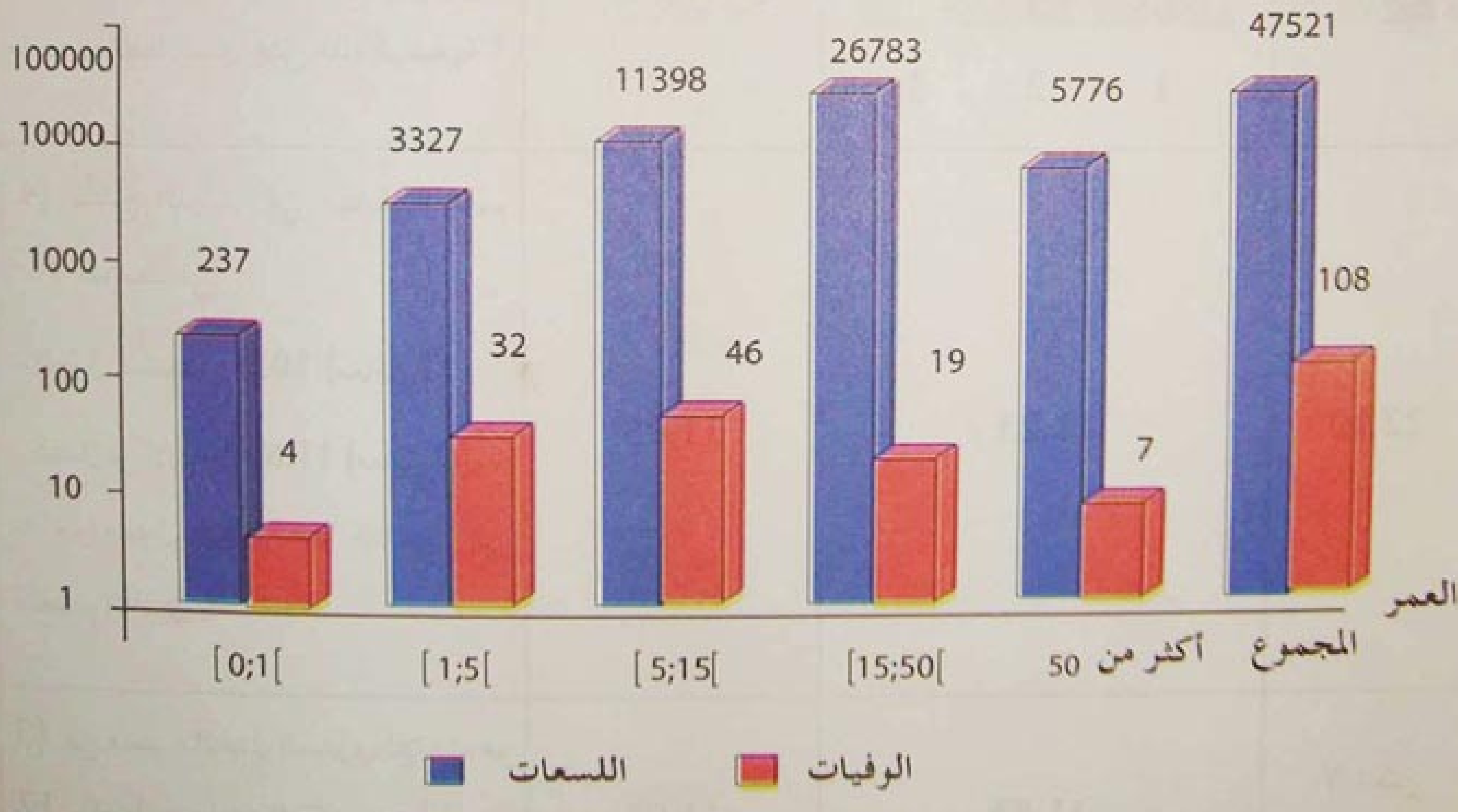
1 • المفردات الإحصائية

2 • تقديم سلسلة إحصائية

3 • تمثيل سلسلة إحصائية

4 • المؤشرات الإحصائية

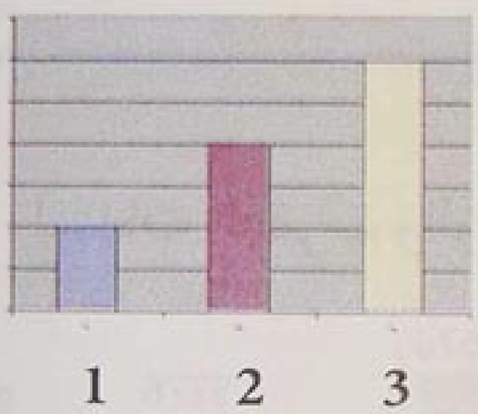
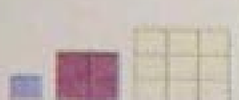
لسعات العقرب والوفيات في الجزائر سنة 2000



المصدر : موقع انترنت : http : // www. ands. dz / insp / scorpion. htm

استبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة .

<table>
<tr><th>السؤال</th><th>إجابة 1</th><th>إجابة 2</th><th>إجابة 3</th></tr>
<tr><td>1) ما هو معدل سلسلة الأعداد التالية :
5 ؛ 7 ؛ 10 ؛ 12 ؛ 14؟</td><td>10</td><td>48</td><td>9,6</td></tr>
<tr><td>2) في امتحان البكالوريا تحصلت ثانوية على النتائج التالية :
<table>
<tr><th>الشعبة</th><th>علوم</th><th>آداب</th></tr>
<tr><td>عدد المترشحين</td><td>70</td><td>80</td></tr>
<tr><td>نسبة النجاح</td><td>50 %</td><td>40 %</td></tr>
</table>
ماهي نسبة النجاح الإجمالية للثانوية ؟</td><td>45%</td><td>44,66 %</td><td>لا يمكن حسابها</td></tr>
<tr><td>3)
<table>
<tr><th>القسم</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>الإناث</td><td>5</td><td>10</td><td>25</td></tr>
</table>
ما هو المخطط الذي يمثل هذه الوضعية ؟</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4) نتائج تلميذ في نهاية التعليم المتوسط هي :
– المعدل السنوي : 10,5 (معامل 1) .
– المعدل في الامتحان : 11,6 (معامل 2).
ما هو معدل انتقال هذا التلميذ إلى التعليم الثانوي ؟</td><td>11,05</td><td>11,23</td><td>22,10</td></tr>
<tr><td>5) في قسم ، المعدل السنوي للإناث هو 12 والمعدل السنوي للذكور هو 11 .
ما هو المعدل السنوي للقسم ؟</td><td>11,05</td><td>11,33</td><td>لا يمكن حسابه</td></tr>
</table>

❖ نشاط 1 : قراءة جداول وتمثيلات بيانية

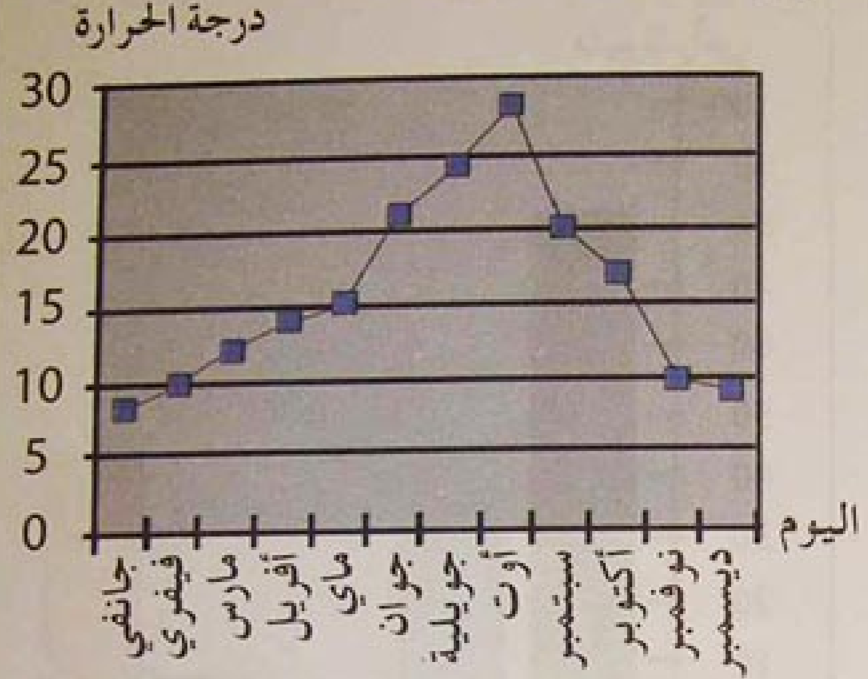
يمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ ثانوية حسب المستوى والجنس والصفة (خارجي، نصف داخلي) .

		1 ثا	2 ثا	3 ثا	المجموع
ذكور	خارجي	81	38	47	166
	نصف داخلي	46	73	35	154
إناث	خارجي	42	35	62	139
	نصف داخلي	31	36	61	128
المجموع		200	182	225	607

أجب عن الأسئلة التالية :

– ما هو عدد الإناث نصف الداخليات في السنة الثانية ثانوي ؟
– ما هو العدد الكلي للذكور في الثانوية ؟
– ما هو العدد الكلي للتلاميذ في النظام الخارجي ؟

يمثل المنحنى التالي تغير متوسط درجات الحرارة المسجلة خلال سنة .



أجب عن الأسئلة التالية :

– ما هو متوسط درجة الحرارة في شهر ماي ؟
– ما هما الشهران اللذان سجلت فيهما نفس درجة الحرارة ؟
– ما هي درجة الحرارة هذه ؟

❖ نشاط 2 : المفردات الإحصائية

ضع مكان النقط في النص التالي إحدى الكلمات : تكرار – مجتمع – كمية – فئات – تحقيق :

يريد المسؤول التجاري لمؤسسة اقتصادية تحليل نتائج البيع لأحد منتوجات مؤسسته بعد سنة من النشاط .

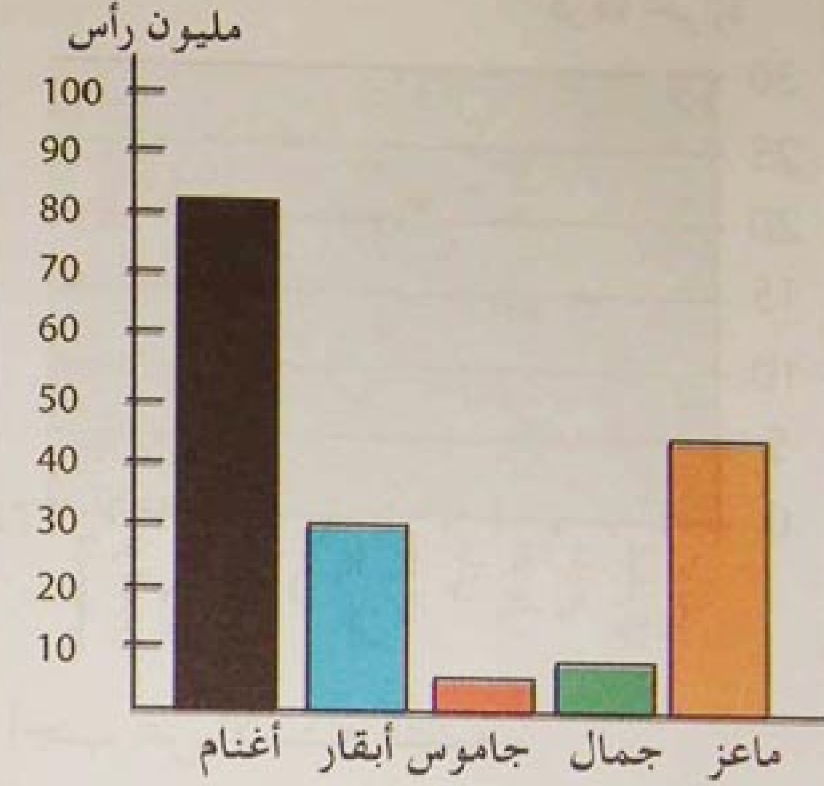
عليه بالقيام بـ ....

المعطيات الموضوعة تحت تصرفه هي 1000 فاتورة بيع لهذا المنتوج خلال السنة . تشكل هذه الفواتير .... الذي تتم عليه الدراسة . يدرس مبلغ هذه الفواتير ويعتبر مبلغ كل فاتورة ميزة ....

لتسهيل المهمة، يرتب هذه الفواتير ترتيبا تصاعديا ويصنفها بين 0 و 400 دينار ثم بين 400 دينار و 800 دينار وهكذا... يشكل بهذا .... ثم يحسب عدد الفواتير الموجودة في كل فئة . يسمى هذا العدد ....

❖ نشاط 3 : التمثيلات البيانية لسلاسل إحصائية

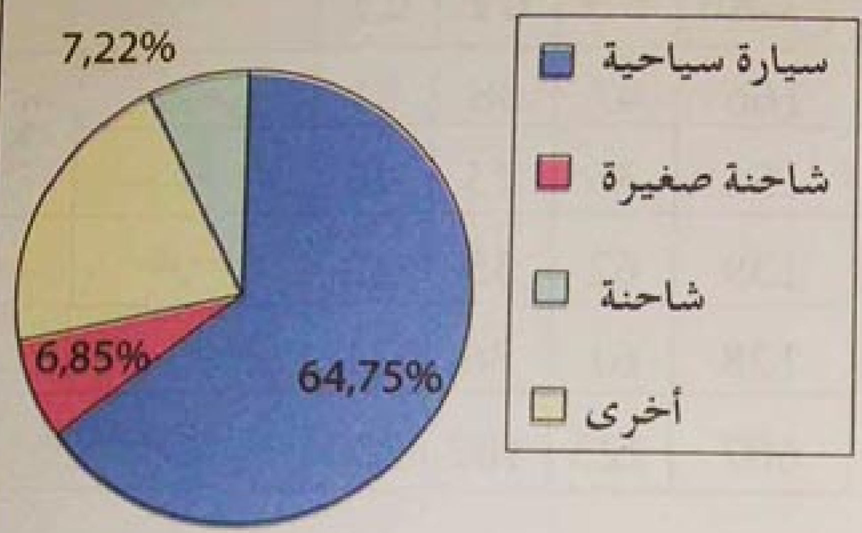
الثروة الحيوانية العربية (1985)



تمثيل 1

المصدر: كتاب "الجغرافيا" الاقتصادية للعالم المعاصر"

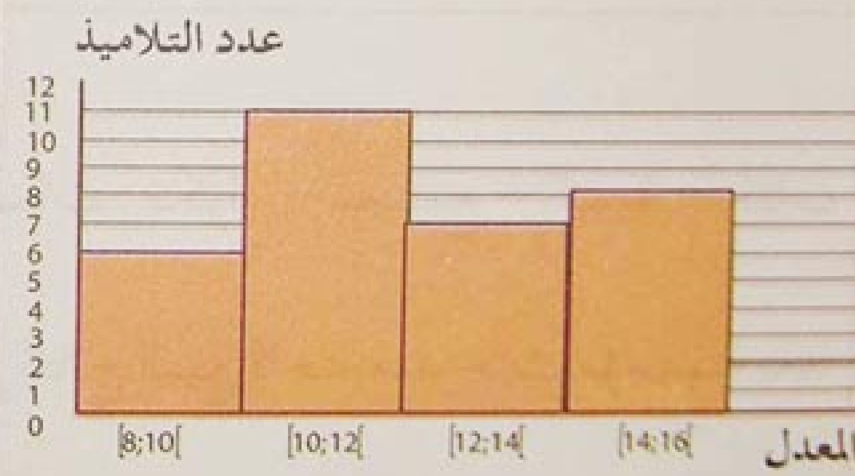
حظيرة السيارات في الجزائر (ديسمبر 2003)



تمثيل 2

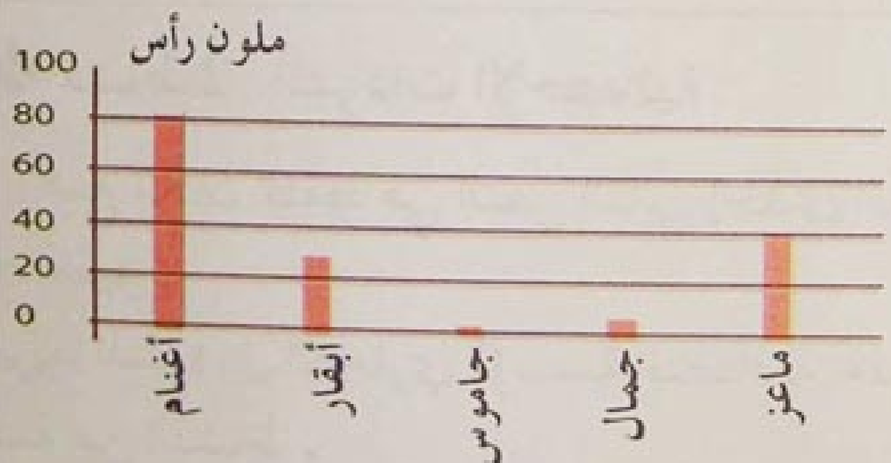
المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

توزيع المعدلات السنوية لتلاميذ قسم



تمثيل 3

الثروة الحيوانية العربية (1985)



تمثيل 4

المصدر: كتاب "الجغرافيا الاقتصادية للعالم المعاصر"

لاحظ التمثيلات السابقة وأجب عن الأسئلة التالية :

1. هل توجد تمثيلات تستغل نفس المعطيات ؟
2. كم تلميذا تحصل على معدل بين 12 و 14 ؟
3. كم تلميذا تحصل على 10 أو أكثر ؟

❖ نشاط 1 : قراءة جداول وتمثيلات بيانية

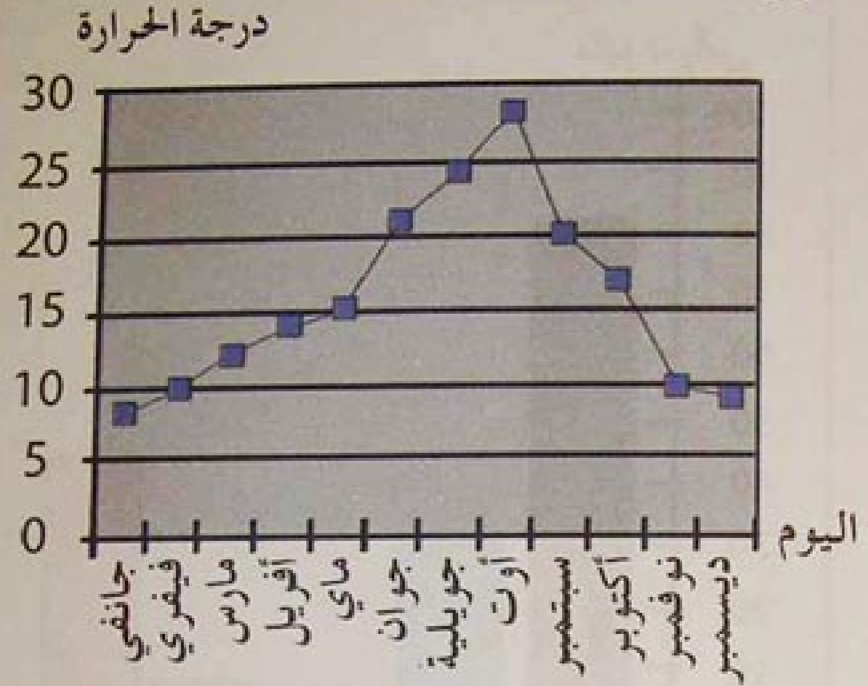
يمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ ثانوية حسب المستوى والجنس والصفة (خارجي، نصف داخلي) .

		1 ثا	2 ثا	3 ثا	المجموع
ذكور	خارجي	81	38	47	166
	نصف داخلي	46	73	35	154
إناث	خارجي	42	35	62	139
	نصف داخلي	31	36	61	128
المجموع		200	182	225	607

أجب عن الأسئلة التالية :

- ما هو عدد الإناث نصف الداخليات في السنة الثانية ثانوي ؟
- ما هو العدد الكلي للذكور في الثانوية ؟
- ما هو العدد الكلي للتلاميذ في النظام الخارجي ؟

يمثل المنحنى التالي تغير متوسط درجات الحرارة المسجلة خلال سنة .



أجب عن الأسئلة التالية :

- ما هو متوسط درجة الحرارة في شهر ماي ؟
- ما هما الشهران اللذان سجلت فيهما نفس درجة الحرارة ؟
- ما هي درجة الحرارة هذه ؟

❖ نشاط 2 : المفردات الإحصائية

ضع مكان النقط في النص التالي إحدى الكلمات : تكرار – مجتمع – كمية – فئات – تحقيق :

يريد المسؤول التجاري لمؤسسة اقتصادية تحليل نتائج البيع لأحد منتوجات مؤسسته بعد سنة من النشاط .

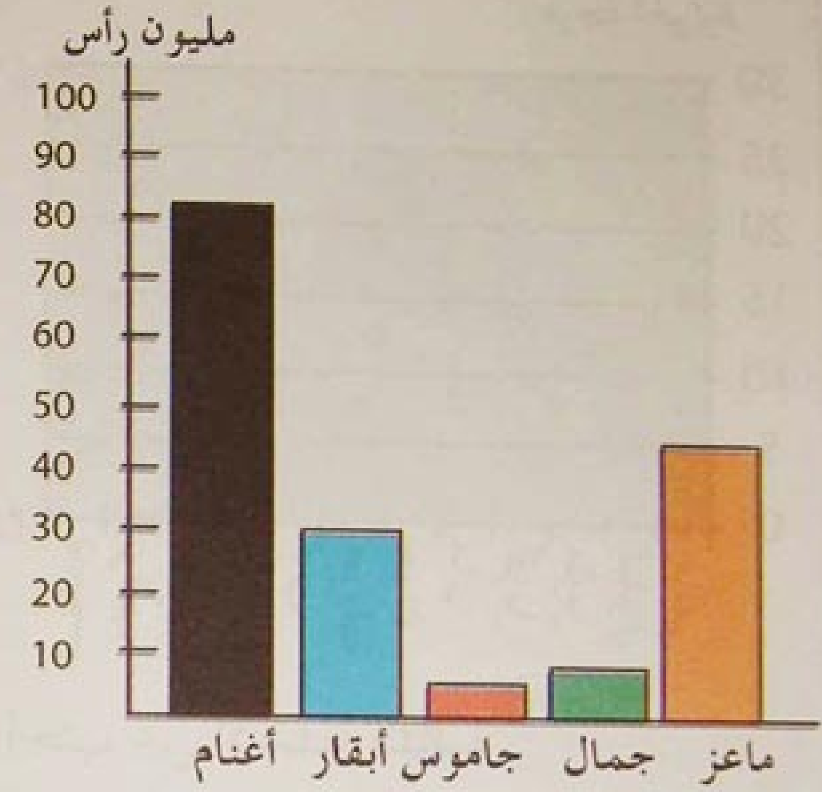
عليه بالقيام بـ ....

المعطيات الموضوعة تحت تصرفه هي 1000 فاتورة بيع لهذا المنتوج خلال السنة . تشكل هذه الفواتير .... الذي تتم عليه الدراسة . يدرس مبلغ هذه الفواتير ويعتبر مبلغ كل فاتورة ميزة ....

لتسهيل المهمة، يرتب هذه الفواتير ترتيبا تصاعديا ويصنفها بين 0 و 400 دينار ثم بين 400 دينار و 800 دينار وهكذا... يشكل بهذا .... ثم يحسب عدد الفواتير الموجودة في كل فئة . يسمى هذا العدد ....

❖ نشاط 3 : التمثيلات البيانية لسلاسل إحصائية

الثروة الحيوانية العربية (1985)



تمثيل 1

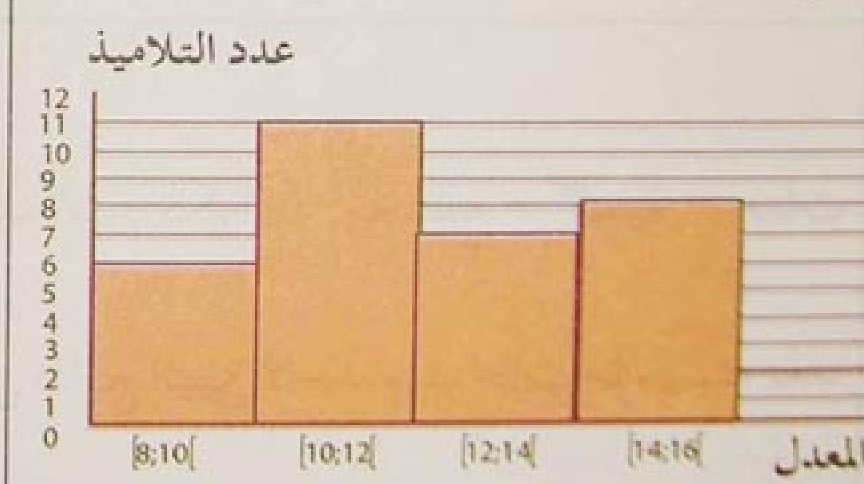
المصدر: كتاب "الجغرافيا" الاقتصادية للعالم المعاصر"

حظيرة السيارات في الجزائر (ديسمبر 2003)

تمثيل 2

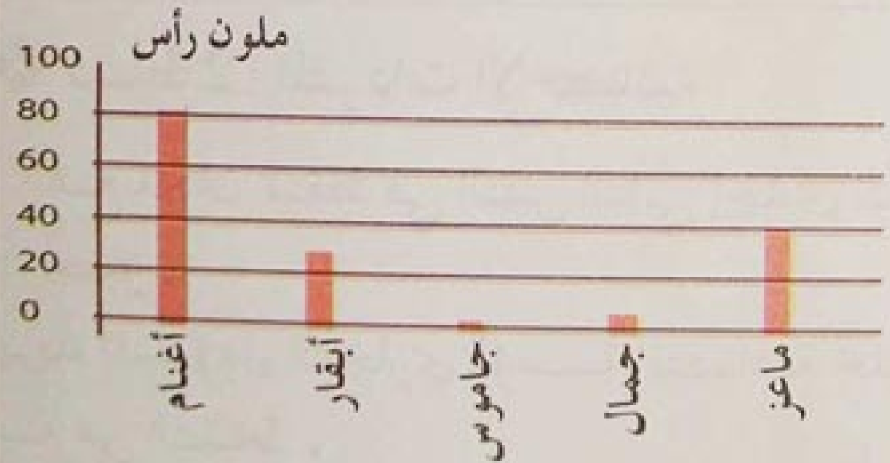
المصدر : الديوان الوطني للإحصائيات

توزيع المعدلات السنوية لتلاميذ قسم



تمثيل 3

الثروة الحيوانية العربية (1985)



تمثيل 4

المصدر : كتاب "الجغرافيا الاقتصادية للعالم المعاصر"

لاحظ التمثيلات السابقة وأجب عن الأسئلة التالية :

1. هل توجد تمثيلات تستغل نفس المعطيات ؟
2. كم تلميذا تحصل على معدل بين 12 و 14 ؟
3. كم تلميذا تحصل على 10 أو أكثر ؟

❖ نشاط 4 : التكرارات والتواترات

لمعرفة عدد الغرف في سكنات حي ، تم التحقيق في ذلك وأسفر عن السلسلة التالية :
2 – 4 – 5 – 3 – 3 – 4 – 3 – 2 – 4 – 3 – 3 – 3 – 4 – 5 – 3 – 4 – 5 – 3 – 3 – 4 .

1. أتمم الجدول التالي :

عدد الغرف	2	3	4	5
التكرارات (عدد السكنات)	......	......	......	......

2. أوجد النسبة المئوية لعدد السكنات ذات 3 غرف .
3. نفس السؤال بالنسبة إلى عدد السكنات ذات 2 ، 4 ، 5 غرف .

❖ نشاط 5 : التكرارات المجمعة والتواترات المجمعة

يمثل المدرج التالي توزيع أوزان تلاميذ قسم في ثانوية .

1. أتمم الجدول التالي :

الوزن (kg)	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65[
التكرارات	......	......	......	......
التواترات (%)	......	......	......	......

2. كم تلميذا يزن أقل من 55 kg ؟
3. أتمم الجدول التالي للتكرارات المجمعة ثم احسب تواتراتها المجمعة .

الوزن P (kg)	$P < 50$	$P < 55$	$P < 60$	$P < 65$
التكرارات المجمعة	....	....	....	....
التواترات المجمعة (%)	....	....	....	....

4. اعط طريقتين لحساب التواتر المجمع .

❖ نشاط 6 : الوسط الحسابي والوسيط

إليك العلامات المحصل عليها من طرف تلاميذ قسم السنة الأولى ثانوي في اختبار الرياضيات .

5 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 10 ؛ 11 ؛ 11 ؛ 14 ؛ 14 ؛ 15 ؛ 15 ؛ 15 ؛ 15 ؛ 18 ؛ 18 ؛ 18 ؛ 18 .

1 . ما هي العلامة السائدة أكثر في هذا القسم ؟

2 . ما هو معدل القسم في هذا الاختبار؟

3 . كم تلميذا تحصل على العلامة 10 أو أكثر ؟

4 . أوجد علامة تجزئ القسم إلى فوجين متساويين (بنفس التكرار) .

هل هي معدل القسم ؟

❖ نشاط 7 : المدى

يشمل الجدول المقابل علامات مادة الرياضيات المحصل عليها من طرف التلميذين سليم وصونية في الفصل الأول .

مثلت هذه النتائج بيانيا . لاحظ أن سلسلتي العلامات موزعتان بطريقتين مختلفتين .

– ماذا نقول عن أكبر علامة وأصغر علامة لكل من التلميذين ؟

– أحسب فرق هاتين العلامتين في كل حالة .

المعدل					
12,6	11	10	13	14	15	سليم
12,6	17	5	16	7	18	صونية

1 - المفردات الإحصائية

أ . المجتمع

تعريف : المجتمع هو مجموعة الأفراد التي تقام عليها دراسة إحصائية .

عدد أفراد المجتمع هو التكرار الكلي لهذا المجتمع . كل جزء من المجتمع يسمى عينة .

أمثلة :

- مجموعة تلاميذ ثانوية ، مجموعة سيارات حظيرة .

ملاحظة :

- عندما نتحدث عن مجتمع لا نعني بالضرورة الأشخاص .

ب . الميزة

تعريف : نسمي ميزة إحصائية كل خاصية مدروسة على أفراد مجتمع .

- **تكون الميزة الإحصائية نوعية عندما لا تأخذ قيما عددية .**
- **تكون الميزة الإحصائية كمية عندما تأخذ قيما عددية .**

– عندما تأخذ الميزة الكمية قيما معزولة ، نقول إنها متقطعة .

– عندما تأخذ الميزة مالا نهاية من القيم ، نقول إنها مستمرة .

ملاحظة :

عندما تكون الميزة كمية تسمى أيضا "متغيرا إحصائيا" .

أمثلة :

– اللون ، الشهادة ، وسيلة نقل هي ميزات نوعية .

– العمر ، القامة ، علامة فرض ، المدة الزمنية ، المسافة هي ميزات كمية .

– العمر ، علامات فرض ، سنة الازدياد هي ميزات كمية متقطعة .

– القامة ، الوزن ، المسافة هي ميزة كمية مستمرة .

2 - تقديم سلسلة إحصائية

تعريف :

نسمي سلسلة إحصائية مجموعة قيم ميزة إحصائية .

ملاحظة :

يمكن تقديم سلسلة إحصائية بثلاث كيفيات :

- **تقديم قائمة كل قيم الميزة الإحصائية**

مثال :

– سلسلة علامات تلميذ في مادة الرياضيات :

8 ؛ 15 ؛ 11؛ 9 ؛ 8 ؛ 12؛ 12 ؛ 6 ؛ 10؛ 14؛ 12؛ 9 (السلسلة 1) .

- **تقديم قائمة قيم الميزة الإحصائية مرفقة بعدد مرات ظهور كل من هذه القيم**

غالبا ما يتم ذلك عن طريق جدول مع ترتيب قيم الميزة ترتيبا تصاعديا .

مثال : الجدول التالي يمثل السلسلة 1 المذكورة أعلاه :

العلامة	6	8	9	10	11	12	14	15
عدد المرات (التكرار)	1	2	2	1	1	3	1	1

- **تقديم قيم الميزة الإحصائية على شكل مجالات مرفقة بعدد القيم التي تنتمي إلى كل مجال**

مثال :

سلسلة قامات بالسنتيمتر لتلاميذ السنة الأولى ثانوي (السلسلة 2) :

القامة (cm)	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[
عدد التلاميذ	23	72	40	39	19	3

ملاحظات :

– يستعمل هذا النوع من التقديم لسلسلة إحصائية خاصة في حالة ميزة كمية مستمرة .

– نسمي كل مجال فئة .

– نسمي طول الفئة الفرق بين طرفي المجال وغالبا ما تؤخذ الفئات متساوية الطول .

في المثال السابق ، كل الفئات متساوية الطول وهذا الطول يساوي 150 – 155 أي 5 .

– نسمي مركز الفئة نصف مجموع طرفيها .

في المثال السابق مركز الفئة]155 ; 150] هو $\frac{150 + 155}{2}$ أي 152,5 .

– عدد مرات ظهور قيمة ميزة يسمى تكرار هذه القيمة .

3 – التمثيل البياني لسلسلة إحصائية

أ. مخطط بأشرطة

يستعمل هذا المخطط لتمثيل سلسلة إحصائية ذات ميزة نوعية أو ميزة كمية متقطعة .

• قواعد الإنشاء

– نعلّم قيم الميزة على محور الفواصل و التكرارات على محور التراتيب .

– أطوال (إرتفاعات) الأشرطة متناسبة مع التكرارات .

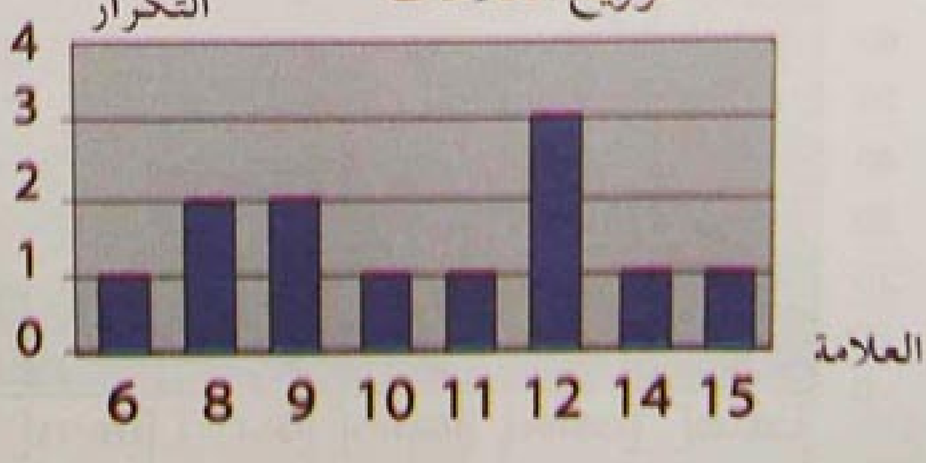
– كل الأشرطة لها نفس العرض .

– كل شريطين متتاليين منفصلان عن بعضهما .

– يرفق المخطط بعنوان و مفتاح . هذا الأخير يحتوي على معلومات حول السلسلة المثلة (إسم الميزة ، التكرار ، ...)

مثال :

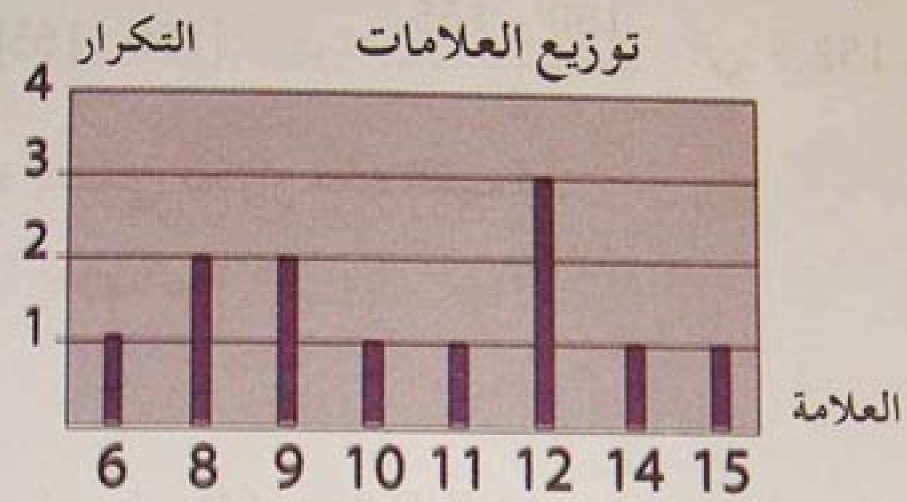
• الرسم التالي هو التمثيل بأشرطة للسلسلة الإحصائية 1 المذكورة أعلاه :



ملاحظة :

عندما يكون عرض الأشرطة معدوما يسمى هذا المخطط مخططا بالأعمدة .

مثال : الرسم التالي هو التمثيل بأعمدة للسلسلة الإحصائية 1 .



ب – المدرج التكراري

هذا النوع من التمثيل يناسب متغيرات كمية مستمرة مجمعة في فئات ، حيث يمثل كل مستطيل في المدرج قيم الفئة .

• قواعد الإنشاء

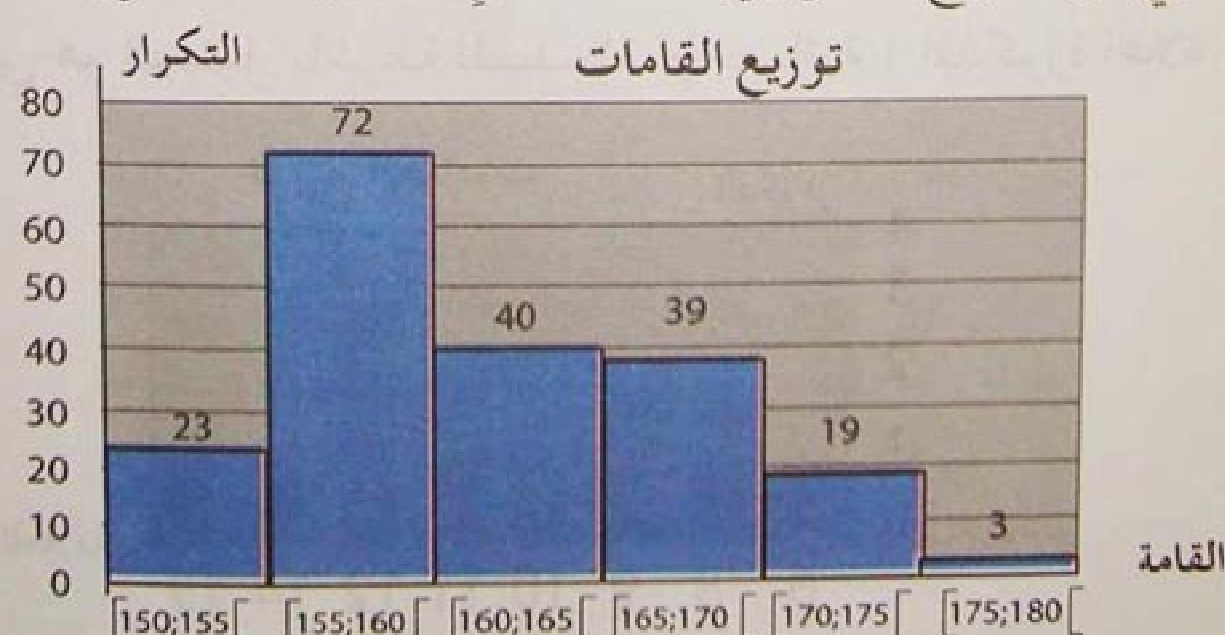
– عرض كل مستطيل متناسب مع طول الفئة .

– مساحة كل مستطيل متناسب مع تكرار الفئة .

– يرفق المخطط بعنوان ومفتاح .

مثال :

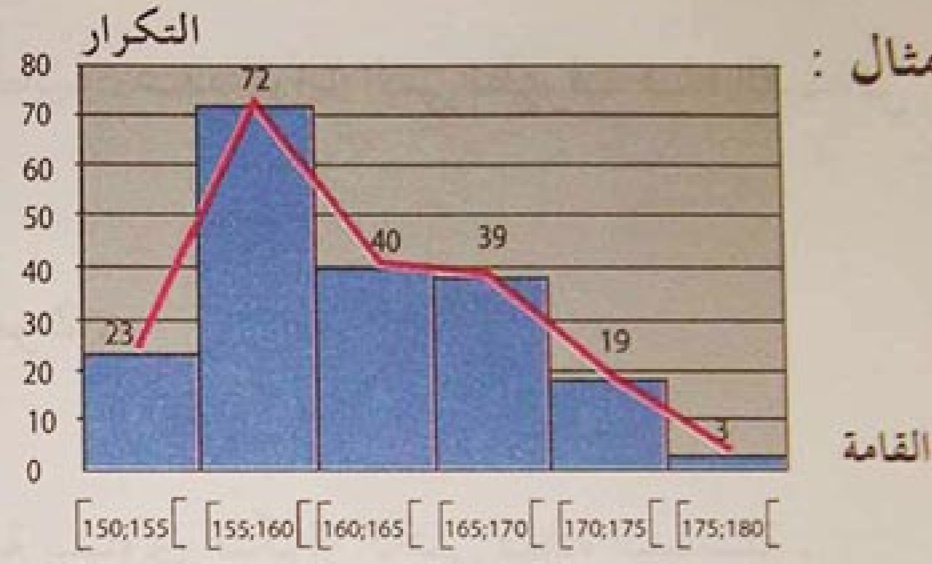
الرسم التالي هو المدرج التكراري للسلسلة الإحصائية 2 المذكورة أعلاه :

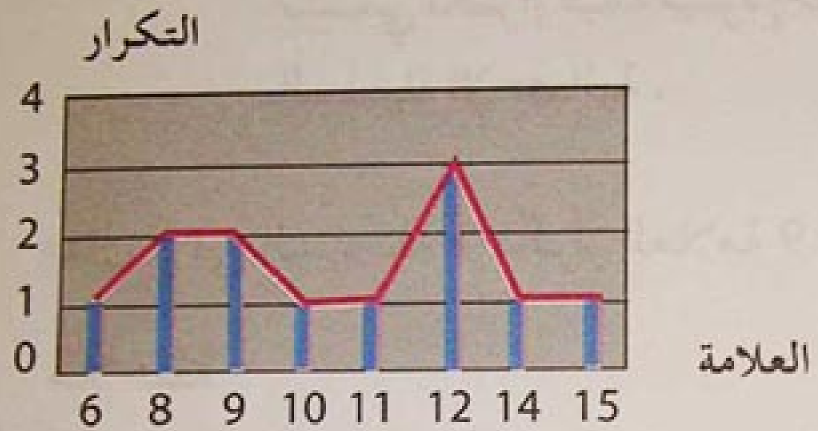


جـ - المضلع التكراري

بعد تمثيل سلسلة إحصائية بأحد المخططين السابقين ، يمكن الحصول على المضلع التكراري برسم الخط المنكسر الذي يصل بين رؤوس الأعمدة أو منتصفات الأضلاع العلوية للمستطيلات المكونة للمخطط بالأشرطة أو للمدرج التكراري .

مثال :





الخط الأحمر هو المضلع التكراري في كل من الحالتين .

د - المخطط الدائري

هذا النوع يستعمل خاصة لتمثيل ميزات نوعية أو كمية مستمرة مجمعة في فئات .

- **قواعد الإنشاء**

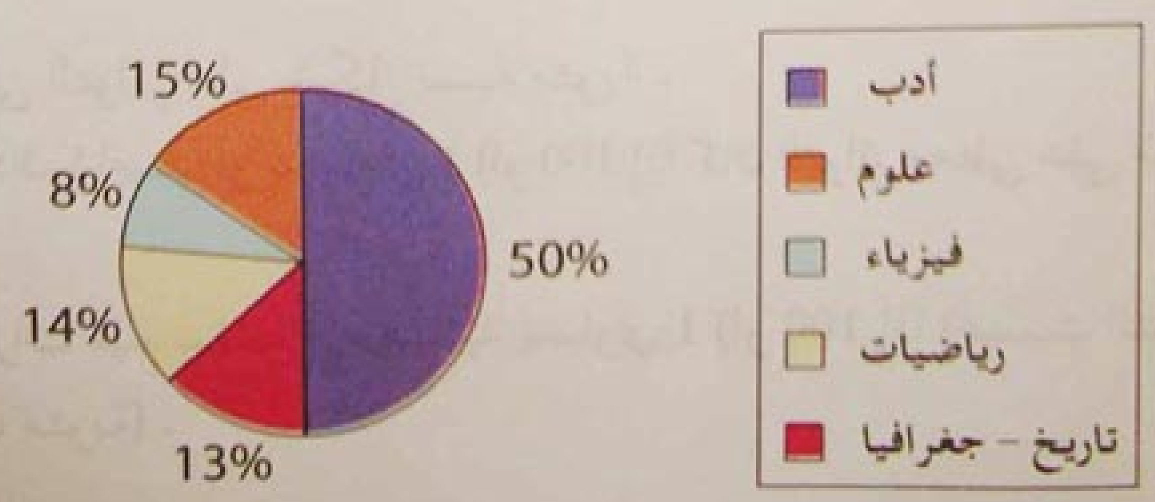
– مساحة (زاوية) كل قطاع دائري للقرص متناسبة مع تكرار القيمة .

– يرفق المخطط بعنوان ومفتاح .

مثال :

- المخطط الدائري التالي يمثل توزيع كتب في مكتبة حسب نوعها .

توزيع الكتب



ملاحظة :

يمكن تعويض مخطط دائري بمخطط نصف دائري ونحتفظ بنفس قواعد الإنشاء .

4 - المؤشرات الإحصائية

أ - التكرار

تعريف :

نسمي تكرار قيمة ميزة إحصائية ، عدد المرات التي تظهر فيه هذه القيمة في السلسلة الإحصائية .

مثال : في السلسلة 1 تكرار العلامة 9 هو 2 .

ملاحظة :

- مجموع تكرارات قيم سلسلة إحصائية يساوي التكرار الكلي لهذه السلسلة .

ب - التواتر

تعريف :

نسمي تواتر قيمة ميزة إحصائية ، حاصل قسمة تكرار هذه القيمة على التكرار الكلي .

إذا رمزنا للتكرار بـ n و للتكرار الكلي بـN وللتواتر بـ f ، نحصل على العلاقة : $f = \frac{n}{N}$

مثال :

في السلسلة 1 ، تواتر العلامة 9 هو $\frac{2}{12}$ أي $\frac{1}{6}$ أو بالتقريب 0,17 أو % 17 .

ملاحظات :

- غالبا ما يعطى التواتر على شكل نسبة مئوية .
- التواتر هو دائما أصغر أو يساوي 1 (أو 100 إذا كان التواتر معطى على شكل نسبة مئوية) .
- مجموع تورات قيم سلسلة إحصائية يساوي 1 (أو 100 إذا أعطيت التواترات على شكل نسب مئوية) .

جـ - التكرار المجمع

تعريف :

- التكـرار المجمع الصاعد لقيمة (أو لفئــة) هو مجموع تكرار هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) الأصغر منها .

- التكرار المجمع النازل لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم (أو الفئات) الأكبر منها .

مثال : في السلسلة

العلامة	6	8	9	10	11	12	14	15	المجموع
التكرار	1	2	2	1	1	3	1	1	12

- التكرار المجمع الصاعد للقيمة 12 هو مجموع تكراره وتكرارات القيم 6 ؛ 8 ؛ 9 ؛ 10 ؛ 11 إذن هو : (1 + 1 + 2 + 2 + 1) + 3 أي 10 .
- التكرار المجمع النازل للقيمة 12 هو مجموع تكراره وتكراري القيمتين 14 ؛ 15 إذن هو : (1 + 1) + 3 أي 5 .

ملاحظات :

- التكرار المجمع الصاعد لقيمة هو مجموع تكرارها و التكرار المجمع الصاعد للقيمة التي تسبقها .
- التكـرار المجمع النازل لقيمة هو مجموع تكرارها و التكرار المجمع النازل للقيمة التي تليها .

د - التواتر المجمع

تعريف :

- التواتر المجمع الصاعد لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تواتر هذه القيمة (أو الفئة) وتواترات القيم (أو الفئات) الأصغر منها .

- التواتـر المجمـع النازل لقيمـة (أو لفئة) هو مجموع تواتـر هذه القيمة وتواترات القيم (أو الفئات) الأكبر منها .

مثال : في السلسلة 1

العلامة	6	8	9	10	11	12	14	15	المجموع
التكرار	1	2	2	1	1	3	1	1	12
التواتر	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

– التواتر المجمع الصاعد للقيمة 9 هو مجموع تواترها وتواتري القيمتين 6 ؛ 8

إذن هو : $\left(\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)+\frac{2}{12}$ أي $\frac{5}{12}$.

– التواتر المجمع النازل للقيمة 9 هو مجموع تواتره وتواترات القيم 10 ؛ 11 ؛ 12 ؛ 13 ؛ 14

إذن هو : $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)+\frac{2}{12}$ أي $\frac{9}{12}$.

ملاحظات :

– التواتـر المجمـع الصاعد لقيمـة هو مجموع تواترهـا والتواتر المجمع الصاعـد للقيمة التي تسبقها .

– التواتر المجمع النازل لقيمة هو مجموع تواترها والتواتر المجمع النازل للقيمة التي تليها .

هـ – مؤشرات الموقع

• **المنوال**

تعريف :

– **نسمي منوالا لسلسلة إحصائية، القيمة التي لها أكبر تكرار .**

– **نسمي فئة منوالية لسلسلة إحصائية ، الفئة التي لها أكبر تكرار .**

مثال :

– منوال السلسلة الإحصائية 1 هو 12 .

– الفئة المنوالية للسلسلة الإحصائية 2 هي الفئة] 160 ; 155] .

ملاحظة : يمكن لسلسلة إحصائية أن تقبل أكثر من منوال (أو فئة منوالية) .

• الوسط الحسابي

تعريف : – **الوسط الحسابي $\bar{x}$ لسلسلة إحصائية ، هو حاصل قسمة مجموع قيم المتغير الإحصائي x_1 ؛ x_2 ؛ ... ؛ x_N على التكرار الكلي N للسلسلة ، أي**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} .$$

– إذا كانت قيم السلسلة x_1 ؛ x_2 ؛ ... ؛ x_k مرفقة بتكراراتها n_1 ؛ n_2 ؛ ... ؛ n_k على الترتيب ، نحصل على

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + ... + n_k \times x_k}{N}$$

حيث $N = n_1 + n_2 + ... + n_k$

– إذا كانت السلسلة مستمرة ، أي معطاة على شكل فئات ، فتؤخذ مراكز الفئات كقيم المتغير الإحصائي .

أمثلة :

– الوسط الحسابي للسلسلة 1 المذكورة في الفقرة 2 هو :

$$\bar{x} = \frac{1 \times 6 + 2 \times 8 + 2 \times 9 + 1 \times 10 + 1 \times 11 + 3 \times 12 + 1 \times 14 + 1 \times 15}{12} = 10.5$$

يعني أن 10.5 هي العلامة المتوسطة للتلميذ .

– الوسط الحسابي للسلسلة 2 المذكورة في الفقرة 2 يحسب كما يلي :

مراكز الفئات هي 152,5 ؛ 157,5 ؛ 162,5 ؛ 167,5 ؛ 172,5 ؛ 177,5 إذن :

$$\bar{x} = \frac{23 \times 152,5 + 72 \times 157,5 + 40 \times 162,5 + 39 \times 167,5 + 19 \times 172,5 + 3 \times 177,5}{196} \approx 162$$

يعني أن 162 cm هي القامة المتوسطة لتلاميذ السنة الأولى ثانوي .

ملاحظات :

– ينتج من المساواة $\bar{x} = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots\ldots + n_k \times x_k}{N}$

أن $\bar{x} = \dfrac{n_1}{N} \times x_1 + \dfrac{n_2}{N} \times x_2 + \ldots + \dfrac{n_k}{N} \times x_k$

أي $\bar{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \ldots\ldots + f_k \times x_k$ حيث f_1 ؛ f_1 ؛ ...... ؛ f_k هي تواترات

القيم x_1 ؛ x_2 ؛ ..... ؛ x_k على الترتيب.

– عندما تعرّف السلسلة بتوزيع التكرارات (أو التواترات) يسمى وسطها الحسابي الوسط المتّزن.

خواص : **– إذا أضفنا نفس القيمة a إلى كل قيم سلسلة إحصائية ، فوسطها الحسابي يزداد بنفس القيمة a.**

– إذا ضربنا كل قيم سلسلة إحصائية في نفس القيمة b ، فوسطها الحسابي يضرب في نفس القيمة b.

– إذا جزئت السلسلة إلى جزئين تكراراهما N_1 ، N_2 ووسطاهما الحسابيان $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ على الترتيب ، فوسطها الحسابي هو : $\bar{x} = \dfrac{N_1 \times \bar{x}_1 + N_2 \times \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$

أمثلة :

– في السلسلة 1 المذكورة سابقا ، إذا أضفنا نقطة واحدة إلى كل علامات التلميذ، تصبح علامته المتوسطة 1 + 10,5 أي 11,5 .

– إذا كان القسم متكونا من 18 بنتا و 14 ولدا وكان معدل البنات 13,5 في اختبار الرياضيات ومعدل الأولاد 11,5 في نفس الإختبار ، فمعدل القسم في هذا الإختبار هو :

$$\bar{x} = \frac{18 \times 13,5 + 14 \times 11,5}{18 + 14} \approx 12,63$$

12,63 هي قيمة تقريبية للوسط الحسابي لسلسلة معدّلات تلاميذ القسم أي هو معدّل القسم .

• الوسيط

تعريف :

السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا . وسيط سلسلة إحصائية ، ويرمز له *Med* ، هو قيمة المتغير التي تجزئ السلسلة إلى جزئين لهما نفس التكرار .

– إذا كان التكرار الكلي للسلسلة فرديا ، فوسيطها هو القيمة المركزية .

– إذا كان التكرار الكلي للسلسلة زوجيا ، فوسيطها هو وسط القيمتين المركزيتين .

أمثلة :

– نعتبر السلسلة : 3 ؛ 5 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 6 ؛ 8 ؛ 11 .

عدد قيم هذه السلسلة هو 7 ،أي عدد فردي . وسيطها هو القيمة المركزية ، أي 6 .

– نعتبر السلسلة : 6 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 11 ؛ 12 ؛ 13 ؛ 14 ؛ 14؛ 16 .

عدد قيمها هو 10 أي عدد زوجي ، وسيطها هو وسط القيمتين المركزيتين 11 و 12 إذن هو11,5 .

ملاحظة :

على شاشة حاسبة بيانية يظهر الوسيط بالرمز *Med*

• د. مؤشر التشتت : المدى

تعريف :

نسمي مدى سلسلة إحصائية الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للميزة .

مثال : نعتبر السلسلة: 6 ؛ 7 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 11 ؛ 12 ؛ 13 ؛ 14 ؛ 14؛ 16 .

مدى هذه السلسلة هو 6 – 16 أي 10 .

1 - حساب تكرارات وتواترات، انطلاقا من تكرارات مجمعة وتواترات مجمعة

طريقة :

لحساب تكرارات (أو تواترات)، انطلاقا من تكرارات مجمعة (أو تواترات مجمعة)
- **نسترجع توزيع قيم المتغير الإحصائي**
- **نحسب التكرارات (أو التواترات) بواسطة عملية الطرح.**

تمرين : نعتبر الجدول التالي لتوزيع علامات تلاميذ في فرض والتكرارات المجمعة المرافقة لها

$n<20$	$n<15$	$n<10$	$n<5$	العلامة n
150	72	42	9	التكرارات المجمعة

احسب تكرار كل فئة.

حل :

المرحلة الأولى : استرجاع توزيع قيم n

$15 \le n < 20$	$10 \le n < 15$	$5 \le n < 10$	$n<5$	العلامة n

المرحلة الثانية : حساب التكرارات بعملية الطرح.

$15 \le n < 20$	$10 \le n < 15$	$5 \le n < 10$	$n<5$	العلامة n
78 (150 - 72)	30 (72 - 42)	33 (42 - 9)	9	التكرارات

2 - إنشاء مخطط دائري

طريقة 1 :

لتمثيل سلسلة إحصائية بمخطط دائري :
- **نحسب التكرار الكلي للسلسلة،**
- **نحسب الزوايا الموافقة للتكرارات،**
- **ننشئ المخطط مع وضع مفتاح.**

تمرين : للتحكم في مخزون أحذية، سجّل تاجر عدد الأحذية المبيعة خلال شهر جانفي في الجدول التالي :

المقاسات	37	38	39	40
التكرارات	28	20	14	10

مثل هذه السلسلة بمخطط دائري .

حل :

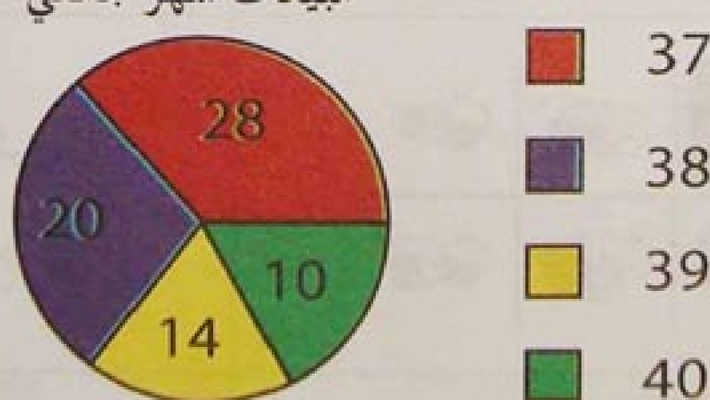
المرحلة الأولى : حساب التكرار الكلي : $72 = 10 + 14 + 20 + 28$

المرحلة الثانية : حساب الزوايا : نحصل على جدول التناسبية التالي حيث التكرار الكلي ممثل بالزاوية $360°$.

					المجموع
التكرارات	28	20	14	10	**72**
الزوايا (°)	140	100	70	50	**360**

المرحلة الثالثة : إنشاء المخطط برسم الزوايا المركزية $140°$ ، $100°$ ، $70°$، $50°$ ووضع المفتاح .

مبيعات شهر جانفي



ملاحظة :

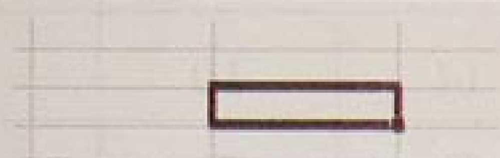
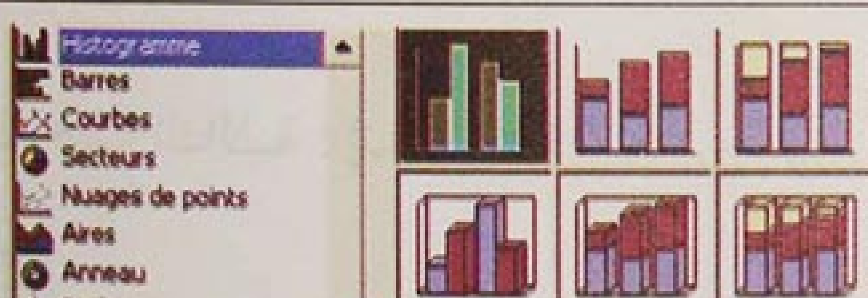
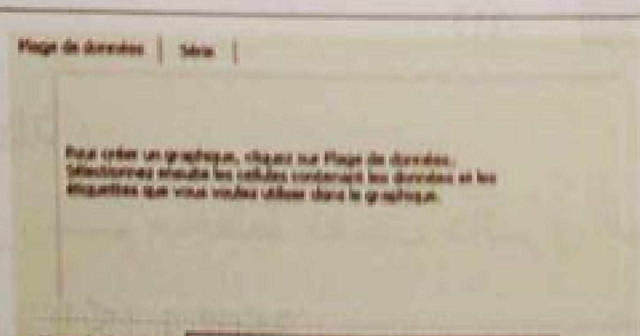
يمكن رسم مخطط نصف دائري عوض المخطط الدائري . في هذه الحالة نأخذ $180°$ بدل الزاوية الكلية $360°$.

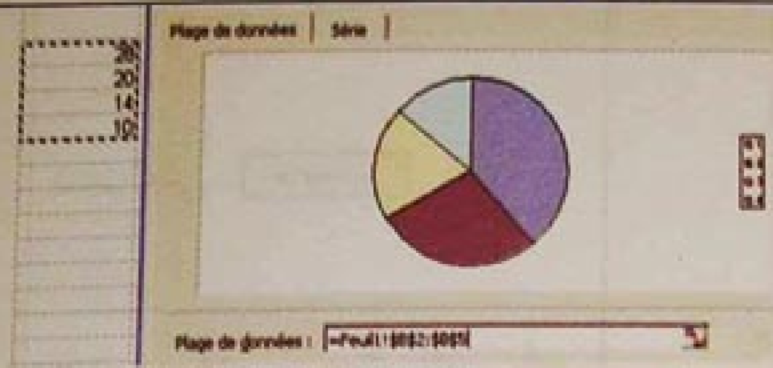
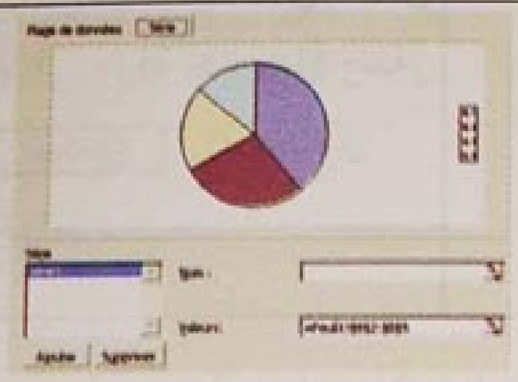
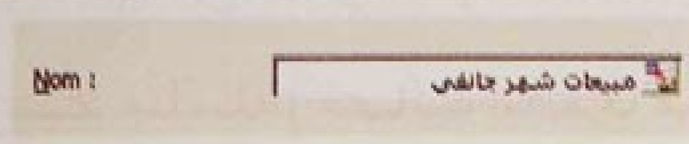
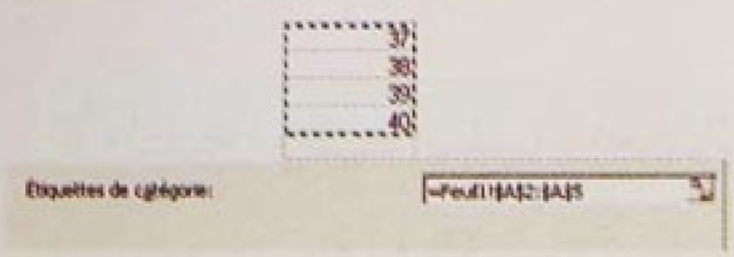
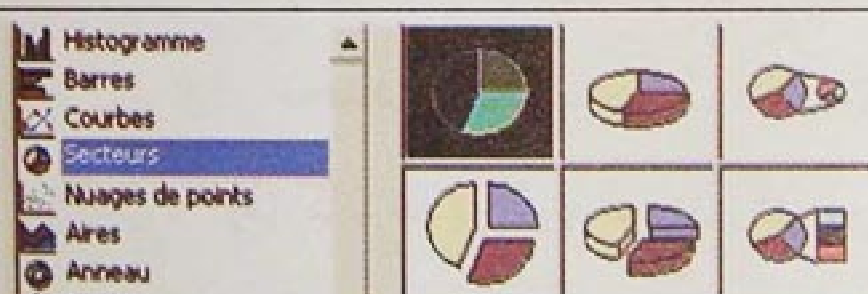
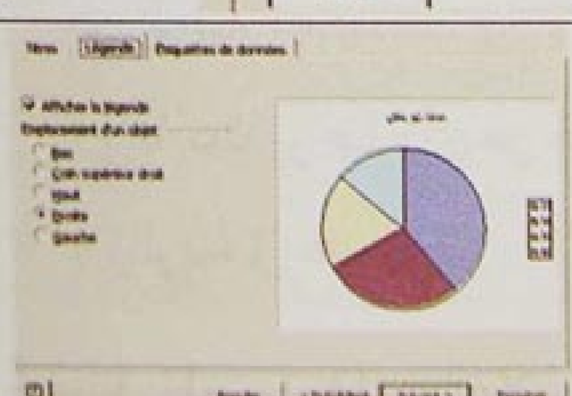
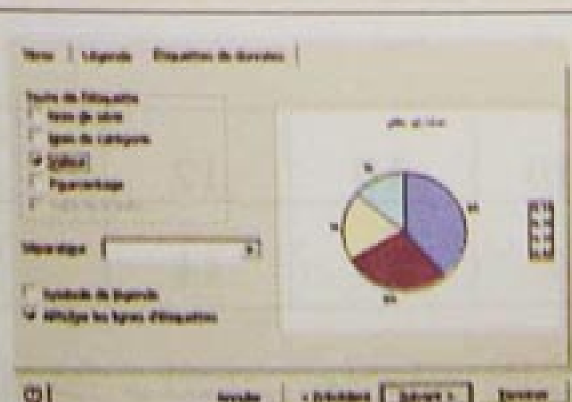
طريقة 2 : استعمال مجدول

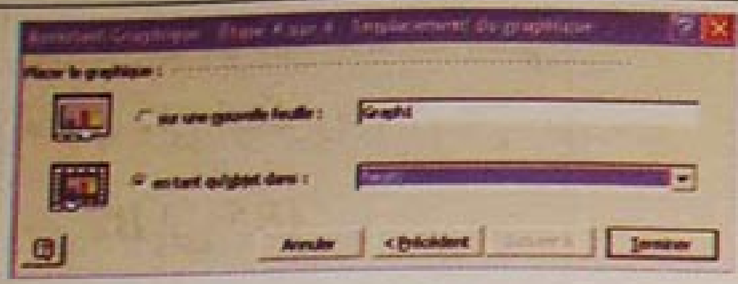
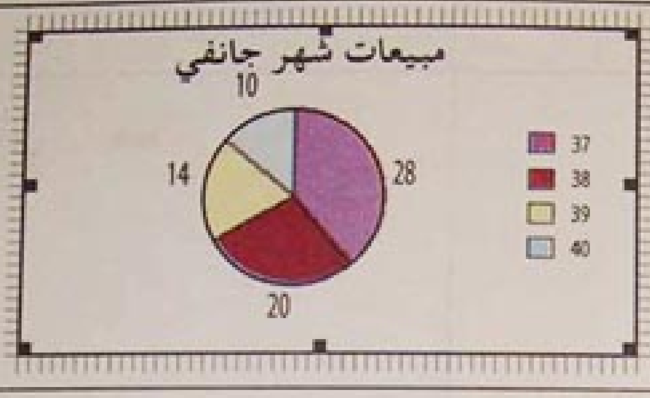
لإنشاء مخطط دائري بمجدول ، نستعمل "المساعد البياني" الذي نحصل عليه في إكسال (*Excel*) مثلا بالنقر على الموجود في شريط الأدوات أو باختياره في البرنامج Insertion

تمرين : أعد المخطط الدائري السابق باستعمال مجدول .

حل :

المرحلة	العملية	الاستظهار
1	نفتح ورقة إكسال ونحجز المقاسات في عمود (أو سطر) والتكرارات الموافقة في عمود (أو سطر) .			A	B
1	المقاسات	التكرارات
2	37	28
3	38	20
4	39	14
5	40	10	
2	نختار خلية فارغة وننقر عليها	
3	ننقر على	
4	نختار المخطط الدائري (*Secteurs*) والنوع المراد رسمه .	
5	ننقر على Suivant >	

6	نختار مجموعة الخلايا التي تحتوي على التكرارات (من $B2$ إلى $B5$)	
7	ننقر على Série	
8	نعطي عنوانا للمخطط	
9	نسجل قيم المتغير (المقاسات في هذا المثال) باختيار مجموعة الخلايا التي تحتوي على هذه القيم (من $A2$ إلى $A5$) .	
10	ننقر على Suivant >	
11	ننقر على Suivant > ونختار موقع للمفتاح (مثلا عن اليمين) .	
12	ننقر على Étiquettes de données ونختار Valeur لإظهار التكرارات في المخطط .	

13	ننقر على Suivant >	
14	نختار موقع المخطط (في نفس الورقة أو في ورقة جديدة) وننقر على Terminer للحصول على المخطط .	

ملاحظة : نتّبع نفس الخطوات لإنشاء مخطط بالأعمدة أو مدرّج أو منحن .

3 - تعيين وسيط سلسلة إحصائية انطلاقا من جدول قيم المتغير

طريقة :

لتعيين وسيط سلسلة إحصائية انطلاقا من جدول قيم المتغير :

- **نرتب هذه القيم ترتيبا تصاعديا ،**
- **نحدد موقع الوسيط بتطبيق القاعدة التالية :**

• **إذا كان عدد القيم فرديا ، أي من الشكل $2n+1$ ، فالوسيط هو القيمة من الرتبة $n+1$.**

• **وإذا كان زوجيا ، أي من الشكل $2n$ ، فالوسيط هو وسط القيمتين من الرتبة n والرتبة $n+1$.**

تمرين : تحصل تلميذ على العلامات التالية خلال السنة في فروض مادتي الرياضيات والتاريخ :

التاريخ	12	10	10	8	14	17	15	
الرياضيات	11	12	7	15	12	13	8	6

عين وسيط كل من سلسلتي علامات المادتين .

حل :

المرحلة الأولى : ترتيب العلامات ترتيبا تصاعديا .

التاريخ	8	10	10	12	14	15	17	
الرياضيات	6	7	8	11	12	12	13	15

• عدد العلامات في التاريخ 7 وهوعدد فردي و $7 = 2 \times 3 + 1$.

إذن وسيط السلسلة هي العلامة ذات المرتبة 4 إذن هي 12 .

• عدد العلامات في الرياضيات 8 وهوعدد زوجي و $8 = 2 \times 4$.

إذن وسيط السلسلة هو وسط العلامتين 11 ، 12 ذوي الرتبتين 4 ، 5 أي $11{,}5 = \frac{11 + 12}{2}$.

4 - تعين وسيط سلسلة إحصائية انطلاقا من منحنى التواترات المجمعة

طريقة :

لتعين وسيط سلسلة إحصائية انطلاقا من منحنيها للتواترات المجمعة، نقرأ فاصلة النقطة من المنحني التي ترتيبها $\frac{1}{2}$ (أو 0,5 أو % 50) أي نعين (وفي غالب الأحيان بالتقريب) ، قيمة المتغير الذي تواتره المجمع يساوي % 50 .

تمرين : نعتبر سلسلة قامات تلاميذ سنة أولى ثانوي المعطاة في الجدول التالي :

القامة (cm)	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[
التكرار	23	72	40	39	19	13

1. أتمم هذا الجدول بالتكرارات المجمعة و التواترات المجمعة. (تعطى النتائج بالتدوير إلى 0,01) .

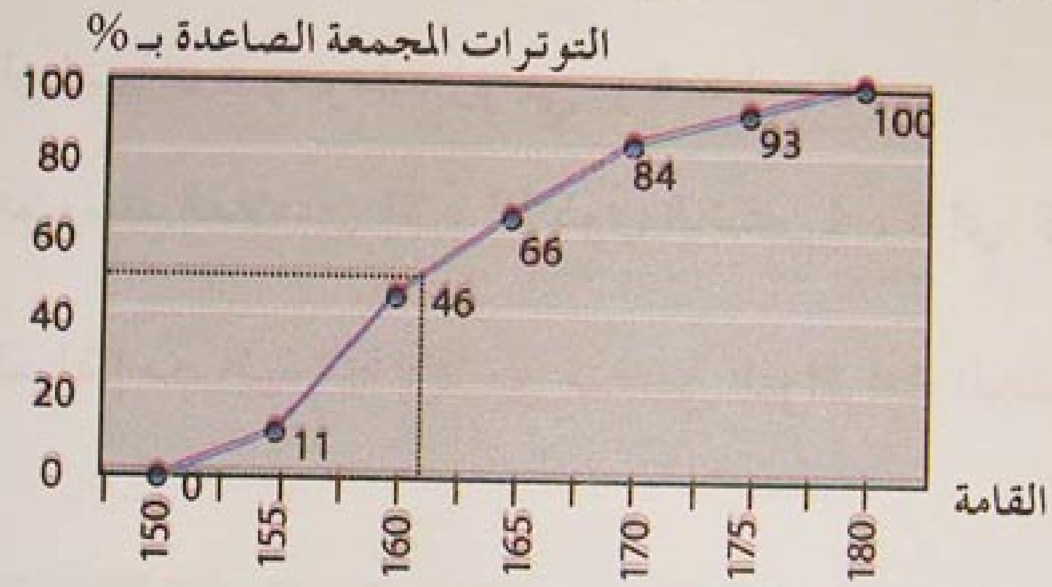
2. أنشئ منحني التواترات المجمعة ثم أستنتج بيانيا قيمة تقريبية لوسيط هذه السلسلة .

حل :

.1

القامة (cm)	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[
التكرار	23	72	40	39	19	13
التكرارات المجمعة الصاعدة	23	95	135	174	193	206
التواترات المجمعة الصاعدة (%)	11	46	66	84	94	100

2. نرسم منحني التواترات المجمعة على إعتبار أن التلاميذ موزعون بصفة منتظمة في كل فئة .



• وسيط هذه السلسلة يوافق التواتر المجمع % 50 . نقرأ فاصلة النقطة من المحني التي ترتيبها 50 وهو تقريبا 161 . فنقول أن القامة الوسيطية لتلاميذ القسم هو $161\ cm$.

5 - تعين مؤشرات إحصائية باستعمال حاسبة بيانية

طريقة :

لتعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة بحاسبة بيانية ، نستعمل اللمسة STAT ونختار البرنامج 1:Edit...

تمرين : نعتبر السلسلة التالية :

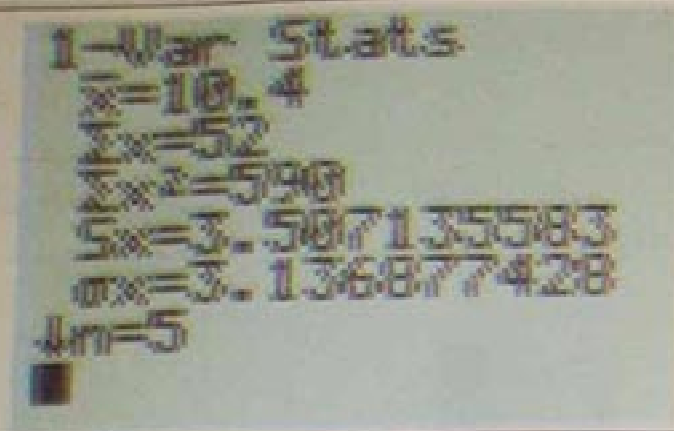
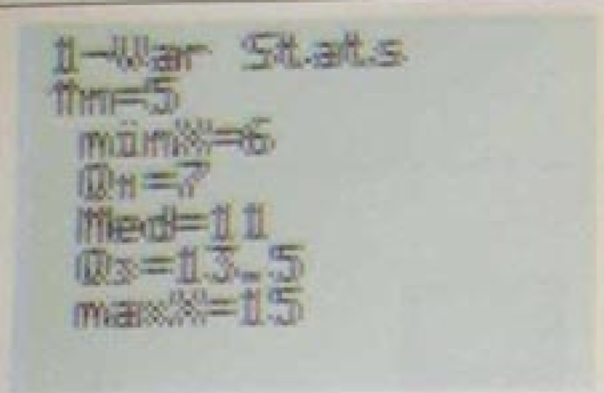
القيم	6	8	11	12	15
التكرارات	2	3	7	9	5

احسب الوسط ، الوسيط ، المدى لهذه السلسلة باستعمال حاسبة بيانية .

طـــرائـــــــق

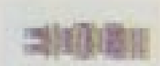
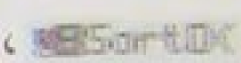
حل :

المرحلة	نضغط على...	الاستظهار
1	STAT	EDIT CALC TESTS 1:Edit… 2:SortA(3:SortD(4:ClrList 5:SetUpEditor
2	1	L1 | L2 | L3 1 ------- ------ L1(1)=
3	نحجز قيم السلسلة في العمود L1 والتكرارات في العمود L2 مع الضغط على اللمسة ENTER بعد كل قيمة لتصديقها .	L1 | L2 | L3 2 6 2 8 3 11 7 12 9 15 5 ------ L2(6) =
4	STAT	EDIT CALC TESTS 1:1-Var Stats 2:2-Var Stats 3:Med-Med 4:LinReg(ax+b) 5:QuadReg 6:CubicReg 7↓QuartReg
5	►	EDIT CALC TESTS 1:1-Var Stats 2:2-Var Stats 3:Med-Med 4:LinReg(ax+b) 5:QuadReg 6:CubicReg 7↓QuartReg
6	1	1-Var Stats

7		
8		

إذن الوسط هو $\bar{x} = 10{,}4$ والوسيط هو $Med = 11$ والمدى هو 9 $(\max X - \min X = 15 - 6 = 9)$.

ملاحظة :

إذا كانت القيم والتكرارات غير مرتبة من قبل ، فيمكن ترتيبها باستعمال اللمسة  واختيار في البرنامج  الوظيفة  ، لترتيبها تصاعديا أو الوظيفة  ، لترتيبها تنازليا .

5 - حساب تواترات باستعمال مجدول

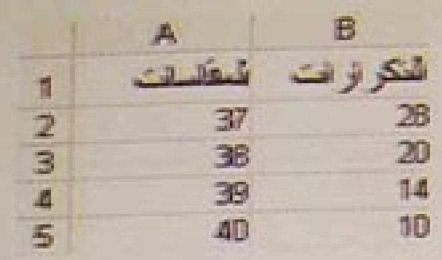
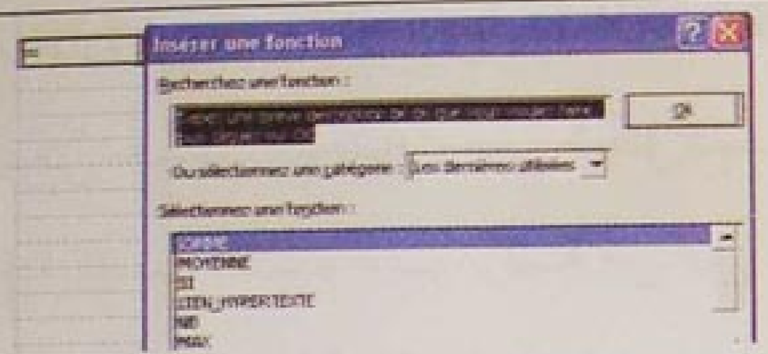
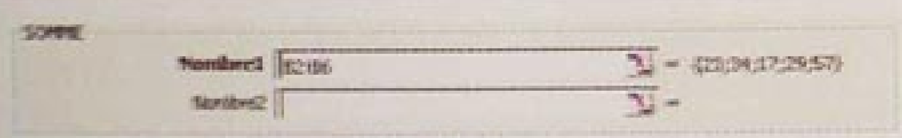
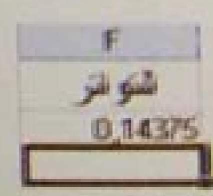
طريقة :

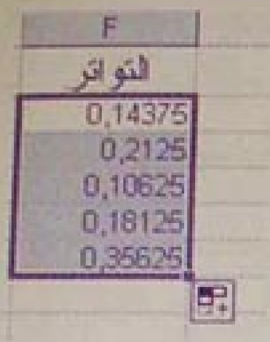
لحساب تواترات قيم سلسلة إحصائية باستعمال مجدول ، نحسب حاصل قسمة تكرار كل قيمة على التكرار الكلي .

تمرين : احسب تواتر كل من قيم السلسلة التالية باستعمال مجدول :

القيم	12	17	11	13	15
التكرارات	23	34	17	29	57

حل :

المرحلة	العملية	الاستظهار
1	نفتح ورقة اكسال ونسجل القيم في عمود (أو سطر) والتكرارات الموافقة في عمود (أو سطر).	
2	نختار إحدى الخلايا (مثلا D1) ونسجل التكرار الكلي.	
3	نختار إحدى الخلايا (مثلا D2) لحساب التكرار الكلي فيها ونضغط على f_x في شريط الأدوات للحصول على قائمة الوظائف.	
4	نختار الوظيفة SOMME	
5	نضغط على OK	
6	نختار مجموعة الخلايا التي تحتوي على التكرارت (من B2 إلى B6)	
7	نضغط على OK	
8	نختار إحدى الخلايا (مثلا F1) ونسجل التواتر	
9	نختار إحدى الخلايا (مثلا F2) لحساب تواتر القيمة الاولى فيها ونسجل الدستور " = B2/D2 "	
10	نصادق على هذا الدستور بالضغط على اللمسة Entrée (أو Enter) للحاسوب.	

11	ننقر على الخلية F2 و نسحب نحو الأسفل بالفـارة للحصـول علـى تواتـرات القيـم الأخرى .	

ملاحظات

- يمكـن تقليـص عدد الأرقام بعـد الفاصلة للنتائج المحصل عليهـا بتقليص عرض العمود E بالفأرة أو باستعمال الوظيفة ARRONDI لتدوير عدد .
- يمكن حساب التواترات على شكل نسب مئوية باستعمال الدستور "$=100*B2/\$D\$2$" .
- إذا كانـت القيـم غيـر مرتبـة من قبل ، فيمكـن ترتيبها باسـتعمال الوظيفـة لترتيبها تصاعديا أو الوظيفة لترتيبها تنازليا .

صحيح – خاطىء

أذكر ، إن كانت الجمل التالية صحيحة أو خاطئة .

1) أشهر إزدياد تلاميذ قسم هو ميزة كمية .

2) مجموع تكرارات سلسلة إحصائية يساوي 1 .

3) كل سلسلة إحصائية تقبل منوالا وحيدا فقط .

4) وسط السلسلة 4 ؛ 6 ؛ 8 ؛ 15 ؛ 17 هو 8 .

5) وسط سلسلة إحصائية دائما أكبر من وسيطها .

6) إذا أضفنا نفس العدد إلى كل قيم سلسلة إحصائية فوسط هذه السلسلة لا يتغير .

7) توجد سلاسل إحصائية تقبل وسطا ووسيطا متساويين .

8) إذا طرحنا نفس العدد من كل قيم سلسلة إحصائية فمدى هذه السلسلة لا يتغير .

المفردات الإحصائية

1 للإلتحاق بالثانوية، ينتقل 65 تلميذا من السنة الأولى آداب ، مشيا على الأقدام، و 30 منهم يستعملون الحافلة وَ 20 يأتون بسيارات أوليائهم .

1) ما هو المجتمع المدروس ؟

2) ما هو التكرار الكلي ؟

3) ما هي الميزة الإحصائية المدروسة ؟
هل هي نوعية أم كمية ؟

2 أتمم الجدول التالي بوضع العلامة × في الخانة المناسبة :

الميزة	كمية		نوعية
	متقطعة	مستمرة	
لون عيون أطفال قسم .			
جنسية مشاركين في الألعاب الأولمبية .			
مقاس أحذية في دكان .			
وظائف أولياء تلاميذ قسم .			
معدل مترشحين لإمتحان البكالوريا .			

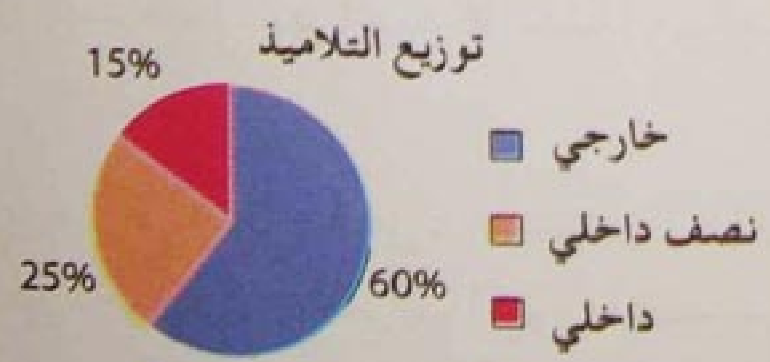
التمثيلات البيانية

3 إليك نتائج توجيه التلاميذ إلى التعليم الثانوي معطاة بنسب مئوية .

- جذع مشترك علوم : 67 %
- جذع مشترك أدب : 9 %
- جذع مشترك تكنولوجيا : 24 %

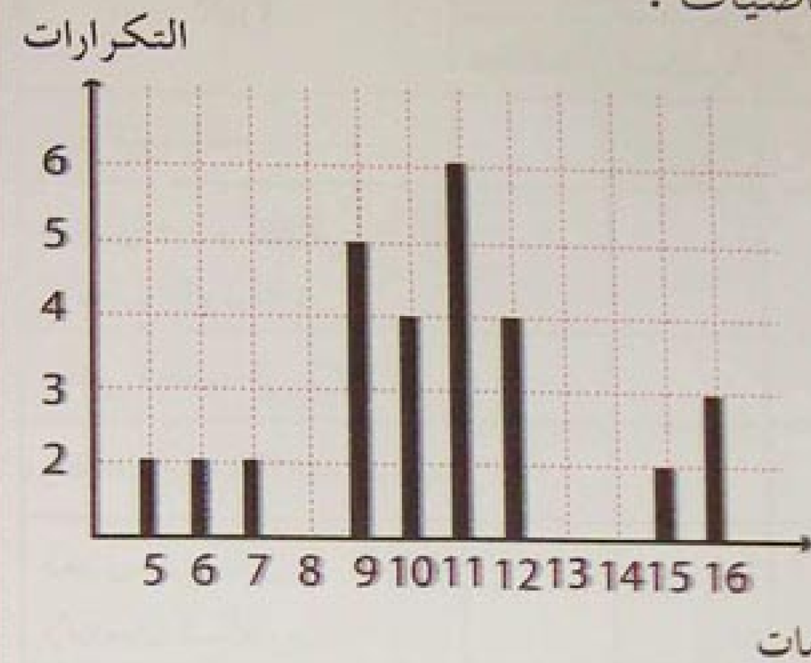
مثّل هذه المعطيات بمخطط بالأعمدة .

4 يمثل المخطط الدائري التالي توزيع 920 تلميذا من ثانوية حسب الصفة (خارجي، نصف داخلي، داخلي) .



مثّل هذا التوزيع بمخطط بالأعمدة ، محددا فيه عدد التلاميذ الموافق لكل عمود .

5 يمثل المخطط بالأعمدة التالي توزيع علامات تلاميذ قسم في فرض مادة الرياضيات .



1) ما هو عدد تلاميذ هذا القسم ؟

2) كم تلميذا تحصل على المعدل 10 أو أكثر ؟

6 يمثل الجدول التالي أوزان تلاميذ قسم موزعة في فئات .

الوزن (kg)	[40 ; 43[	[43 ; 46[	[46 ; 49[	[49 ; 52[
التكرارات	5	7	12	8

مثّل هذا التوزيع بمدرج تكراري ثم أُرسم المضلّع التكراري الموافق .

7 إليك قائمة أشهر ازدياد 36 تلميذا من السنة الأولى ثانوي .

مارس، أفريل، جانفي، سبتمبر، ماي، جانفي، جوان، أوت، فبراير، أكتوبر، ديسمبر، نوفمبر، أكتوبر، ديسمبر، جويلية، ماي، جوان، مارس، ديسمبر ، أوت، أفريل، نوفمبر، نوفمبر، ماي، جوان، جويلية، ماي، جويلية، نوفمبر، سبتمبر، أفريل، نوفمبر ، سبتمبر، أفريل، ماي، جوان .

1) قدّم هذه السلسلة في جدول .

2) مثّل هذه السلسلة بمخطط بالأعمدة .

3) مثّل هذه السلسلة بمخطط دائري .

8 يمثل الجدول التالي توزيع عدد السيارات في الجزائر حسب أعمارها إلى غاية 31 - 12 - 2003

(المصدر : الديوان الوطني للإحصائيات) .

العمر	التكرار	النسبة المئوية
أكثر من 20 سنة	984 732	55,47
من 15 إلى 20 سنة	328 959	18,53
من 10 إلى 14 سنة	209 357	11,79
من 5 إلى 9 سنة	123 353	6,95
أقل من 5 سنوات	128 862	7,26

مثّل هذا التوزيع بمدرج تكراري ثم بمخطط دائري .

التكرارات - التوترات

9 رمى عمر حجر النّرد 20 مرة وسجّل الأرقام التي ظهرت وتحصّل على القائمة التالية :

1 ؛ 2 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 3 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 4 ؛ 3 ؛ 2 ؛ 6 ؛ 5 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 1 ؛ 3 ؛ 6 ؛ 1 ؛ 1 .

أتمم الجدول التالي :

رقم الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرارات						
التكرارات المجمعة						

10 إليك قيمة تقريبية للعدد π :

$\pi \approx 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510$

نهتم فقط بالأرقام بعد الفاصلة .

1) أحسب عدد مرات ظهور كل رقم و أتمم الجدول التالي :

الرقم	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
التكرارات										
التواترات %										

2) أنشىء مخططا بالأعمدة يمثل التكرارات ، ثم أرسم المضلع التكراري الموافق له .

3) أنشىء مخططا بالأعمدة يمثل التواترات .

11 رمت مليكة قطعة نقدية 24 مرة وتحصلت على الوجه 15 مرة وعلى الظهر 9 مرات .

احسب تواتر ظهور كل من الوجه والظهر .

12 تمّ تنقيط تمارين مادة الرياضيات على 4 . يمثل المخطط التالي توزيع التواترات بنسب مئوية للعلامات المحصل عليها .

1) ما هو تواتر العلامة 3 ؟ ما هو تواتر العلامة 4 ؟

2) نفرض أن عدد التمارين هو 40 . ما هو عدد التمارين التي تمّ الحصول فيها على العلامة 1 ؟

التكرارات المجمعة – التواترات المجمعة

13 طُلب من 40 تلميذا من قسم تحديد عدد أفراد عائلتهم وسجلت النتائج في الجدول التالي :

عدد الأفراد	3	4	5	6	7	8	9	10
التكرارات	4	2	10	13	3	3	2	3
التواترات المجمعة								

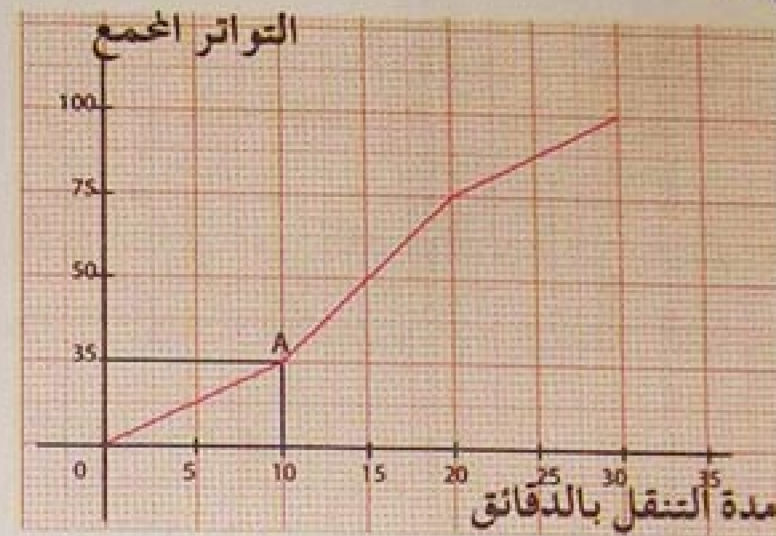
أتمم هذا الجدول .

14 جمع صاحب خم دجاج عيّنة من 150 بيضة ، بعد وزن كل منها ، دوّن النتائج في جدول كالتالي :

الوزن (g)	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75[
التكرارات	33	78	39
التكرارات المجمعة			
التواترات %			
التواترات المجمعة %			

أتمم هذا الجدول .

15 تم تحقيق حول مدد تنقل تلاميذ ثانوية من المنزل إلى الثانوية وقدمت النتائج بمنحني التكرارات المجمعة ، المعبّر عنها بنسب مئوية .



1) كيف تفسر إحداثيي النقطة A بالنسبة إلى سلسلة مدد التنقل مرفقة بتواتراتها ؟

2) أوجد ، باستعمال التمثيل البياني ، مدة التنقل التي توافق التواتر المجمع 50 % ؟

المنوال – الوسط – الوسيط

16 أحسب وسط كل سلسلة إحصائية فيما يلي :

1) 4 ؛ 5 ؛ 8 ؛ 12 ؛ 13 .

2) 2,4 ؛ 6,3 ؛ 12,1 ؛ 9,6 ؛ 10 ؛ 5 .

3) −3 ؛ 5 ؛ −8 .

17 1) احسب وسط السلسلة الإحصائية المعطاة بالجدول التالي :

القيم	5	7	8	10	13
التكرارات	2	4	6	2	6

2) كم منوالا لهذه السلسلة ؟ عيّنها .

18 تعتبر السلسلة الإحصائية المعطاة في التمرين رقم 6 .

احسب بالتقريب الوزن المتوسط في القسم .

19 إليك العلامات المحصل عليها من طرف تلميذ في مادة الرياضيات خلال سنة دراسية .

الفصل الأول : 14 ؛ 11 ؛ 10 ؛ 15 ؛ 13 .

الفصل الثاني : 14 ؛ 9 ؛ 16 ؛ 12 .

الفصل الثالث : 18 ؛ 15 ؛ 12 .

1) احسب معدل كل فصل .

2) احسب معدل المعدلات الفصلية .

3) احسب معدل مجموعة علامات السنة .

4) هل هذا المعدل يساوي معدل الفصول الثلاثة ؟

20 إليك قائمة علامات معطاة من طرف أستاذ بعد تصحيح 36 ورقة .

9,5 ؛ 12 ؛ 10,5 ؛ 8 ؛ 8,5 ؛ 11 ؛ 13 ؛ 6,5 ؛ 7 ؛ 9 ؛
12 ؛ 7 ؛ 12 ؛ 9 ؛ 9 ؛ 6 ؛ 10,5 ؛ 9,5 ؛ 16 ؛ 15 ؛
11 ؛ 13 ؛ 14 ؛ 17,5 ؛ 5 ؛ 6 ؛ 8 ؛ 12,5 ؛ 13,5
؛ 18 ؛ 16 ؛ 14 ؛ 10 ؛ 11 ؛ 7 ؛ 8 .

1) مثّل توزيع العلامات بمخطط بالأعمدة .

2) ما هي العلامة الأكثر تواترا ؟

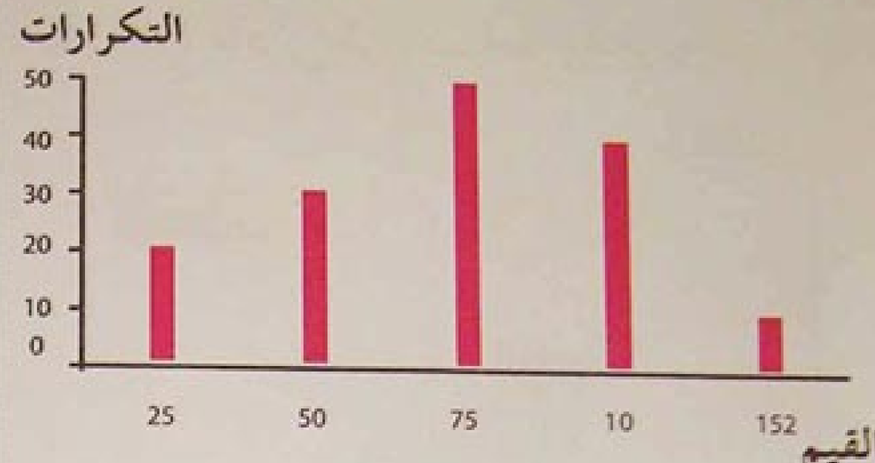
كيف يظهر ذلك في المخطط ؟

3) احسب معدل القسم .

4) كم تلميذا تحصل على 10 على الأقل ؟

كم تلميذا تحصل على أقل من 10 ؟

21 نعتبر المخطط بالأعمدة التالي :

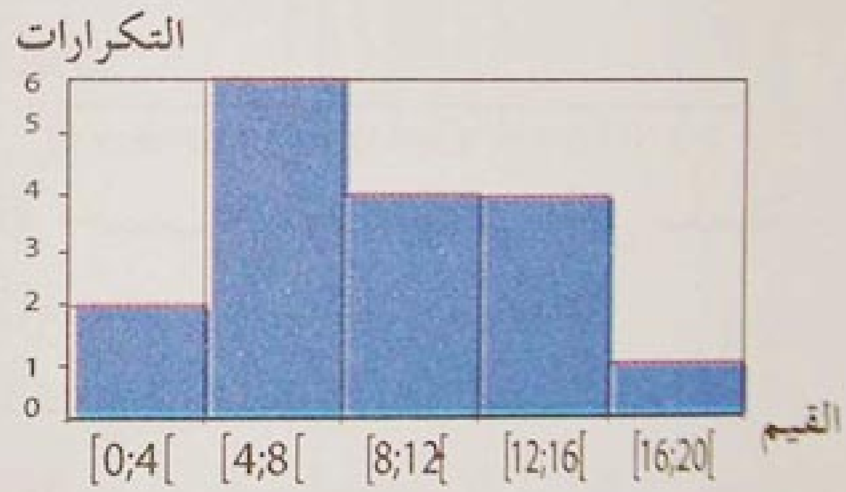


1) دوّن هذه المعطيات في جدول .

2) احسب وسط هذه السلسلة الإحصائية (تعطى النتيجة بالتدوير إلى الوحدة) .

3) كم قيمة أكبر من وسط هذه السلسلة ؟

22 يمثل المدرج التكراري التالي توزيع علامات تلاميذ فوج في العلوم الطبيعية .



احسب وسط هذه السلسلة .

(تعطى النتيجة بالتدوير إلى 10^{-2}) .

23 1) احسب وسط السلسلة الإحصائية التالية :

5 ؛ 2 - ؛ 3 ؛ 4 ؛ 6 - .

2) إستنتج وسط كل من السلسلتين التاليتين :

15 ؛ 8 ؛ 13 ؛ 14 ؛ 4 .

7,5 ؛ 3 - ؛ 4,5 ؛ 6 ؛ 9 - .

24 تحصل ياسين على المعدل 12 في الفروض الثلاثة الأولى في مادة التاريخ ، ثم تحصل على العلامة 14 في الفرض الرابع .

ما هو معدله الجديد ؟

25 يتشكل قسم من 20 بنتا وَ 15 ولدا. معدل قامات هؤلاء التلاميذ هو 1,6 m ومعدل قامات الأولاد هو 1,7 m .

ما هو معدل قامات البنات لهذا القسم ؟

26 ليكن m وسط سلسلة الأعداد x_1 ، x_2 ، .... x_k .

1) نحوّل كلا من الأعداد x_1 ، x_2 ، ...... ، x_k بالطريقة التالية : نضيف له 1 ونضرب النتيجة في 2 .

عبّر ، بدلالة m، عن وسط السلسلة المحصل عليها .

2) نحوّل كلا من الأعداد x_1 ، x_2 ، ...... ، x_k بالطريقة التالية : نضربه في 2 ونضيف 1 إلى النتيجة . عبّر ، بدلالة m، عن وسط السلسلة المحصل عليها .

27 يمثل الجدول التالي تركيب مؤسسة اقتصادية صغيرة ومرتبات مختلف أصناف المستخدمين .

الصنف	عامل	إطار	مدير عام
التكرار	12	2	1
المرتب بالدينار	10000	18000	60000

1) احسب كلا من الوسط الحسابي ، الوسيط المنوال لسلسلة المرتبات .

2) احسب الوسط الحسابي ووسيط السلسلة المحصل عليها بعد نزع مرتبات المدير العام .

28 نعتبر سلسلة العلامات المقدمة في الجدول التالي :

العلامات	7	8	9	10	14
التكرارات	2	1	2	2	3

باستعمال مجدول فقط ودون تغيير التكرار الكلي للسلسلة يطلب :

1) حساب الوسط الحسابي وتعيين وسيط السلسلة .

2) تغيير سطر التكرارات للحصول على وسيط يساوي 9,5 .

استنتاج الوسط الحسابي الجديد بالقراءة .

3) تغيير سطر التكرارات للحصول على وسط حسابي يساوي 13 .

المدى

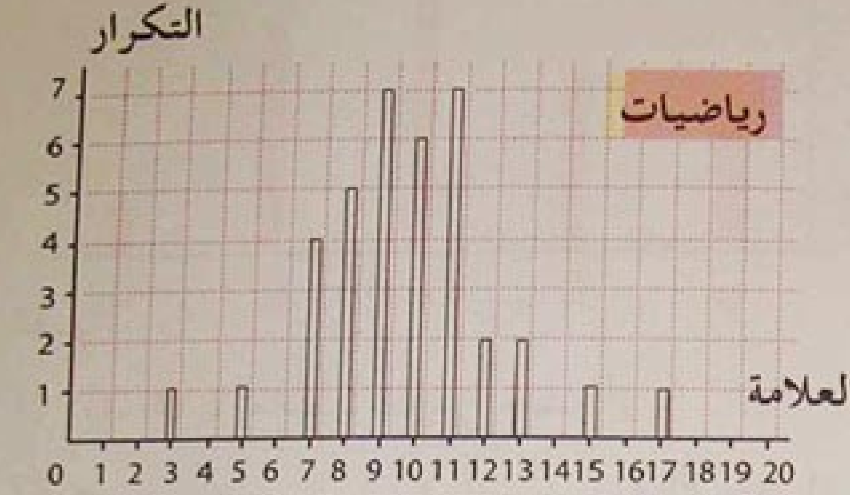
29 احسب مدى كل من السلاسل التالية :

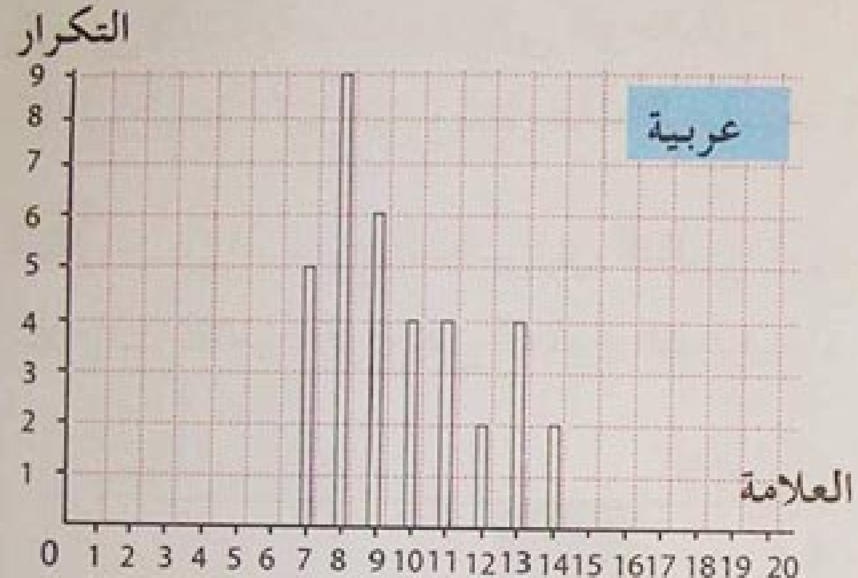
1) 14 ؛ 16 ؛ 21 ؛ 32 ؛ 33 ؛ 36 .

2) 7,2 ؛ 10 ؛ 3,6 ؛ 2,7 ؛ 13 ؛ 4,9 .

3) 5 ؛ 8 ؛ 13 ؛ 9 ؛ 16 ؛ 7 ؛ 14 .

30 يمثل المخططان التاليان علامات تلاميذ قسم في مادتي الرياضيات والعربية .





1) احسب الوسط الحسابي لكل سلسلة .

2) احسب مدى كل سلسلة .

استنتج السلسلة الأكثر تشتتا .

31 برمجنا حسابات باستعمال مجدول .

	A	B	C
1			
2	12	= A 2	
3	6	= B 2 + A 3	
4	21	= B 3 + A 4	
5	5	= B 4 + A 5	
6	= SOMME = (A2 ; A5)		

1) ما هي النتيجة التي ستظهر في الخلية $A6$ ؟ ماذا يمثل هذا العدد ؟

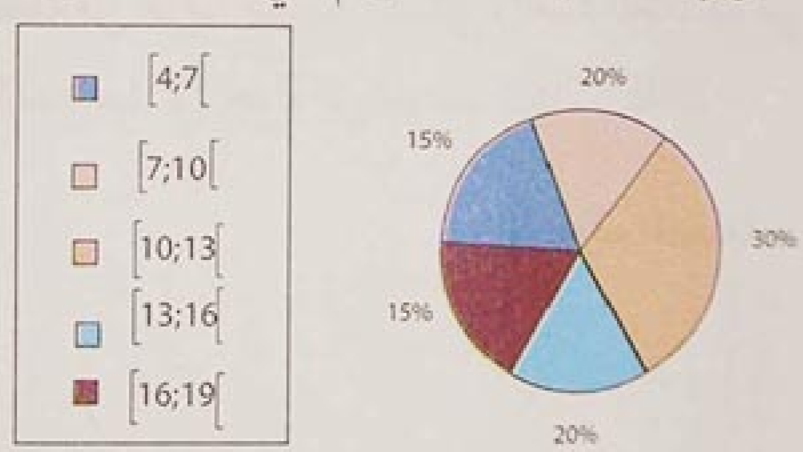
2) ما هي النتائج التي ستظهر في خلايا العمود B ؟ ماذا حسبنا في هذا العمود ؟ أتمم العمود B .

3) في العمود C ، نريد حساب التواترات على شكل نسب مئوية . ما هو القانون الذي يجب كتابته في الخلية $C2$ ؟

أنجز ورقة الحساب هذه على الحاسوب ثم تحقق من صحة النتائج . أتمم العمود C .

مسائل

32 وزّع 40 تلميذا من قسم سنة أولى ثانوي حسب علاماتهم في اللغة العربية .



توزيع العلامات بنسب مئوية

1) احسب التكرار الموافق لكل فئة .

2) احسب قيمة تقريبية لوسط هذه السلسلة .

3) أنجز جدول التكرارات المجمعة الصاعدة والتواترات المجمعة الصاعدة .

4) أنشىء منحنى التواترات المجمعة معتبرا أن العلامات موزعة بصفة منتظمة في كل فئة .

5) إستنتج من هذا التمثيل البياني قيمة تقريبية لوسيط هذه السلسلة .

33 قام أستاذ مادة التربية البدنية بتحقيق حول عدد مقابلات كرة القدم التي شاهدها تلاميذه خلال الأشهر الثلاثة الأخيرة وسجل النتائج في الجدول التالي :

عدد المقابلات n	$n \leq 3$	$n \leq 6$	$n \leq 9$	$n \leq 12$
التواترات المجمعة بـ %	15	62,5	97,5	100

1) أتمم الجدول التالي :

n	$0 \leq n \leq 3$	$4 \leq n \leq 6$	$7 \leq n \leq 9$	$10 \leq n \leq 12$
التواترات				

2) شاهد 57 تلميذا ما بين 4 و 6 مقابلات .

ما هو عدد التلاميذ الذين شملهم هذا التحقيق ؟

3) احسب بطريقتين مختلفتين عدد التلاميذ الذين شاهدوا 9 مقابلات على الأكثر .

34 أنجزت دراسة لمعرفة مبلغ المصاريف الشهرية لعدد من العائلات وسجلت النتائج في الجدول التالي :

المصاريف	[4000 ; 8000[	[8000 ; 15000[	[15000 ; 20000[	[20000 ; 30000[
التكرارات	23	83	10	9

1) أتمم هذا الجدول بتحديد التواترات

والتواتـرات المجمعـة الصاعـدة والتواتـرات المجمعة النازلة .

2) ارسـم فـي نفـس المعلـم منحنـى كل من التواتـرات المجمعـة الصاعـدة والتواتـرات المجمعة النازلة .

3) في أي نقطة يتقاطع المنحنيان ؟ ماذا تمثل فاصلـة هـذه النقطة بالنسـبة إلى السلسـلة الإحصائية ؟

35 سجلت مدد تنقل بعض عمال مصنع (بالدقائق) وهي :

5 – 15 – 15 – 25 – 5 – 45 – 45 – 20 – 3
– 5 – 15 – 7 – 2 – 30 – 10 – 45 – 2 – 5 – 5
– 20 – 25 – 25 – 30 – 30 – 45 – 30 – 35
– 60 – 30 – 25 – 65 – 5 – 5 – 18 – 35 – 35
– 60 – 70 – 5 – 45 – 45 – 20 – 25 – 30 – 28
– 2 – 30 – 25 – 50 – 10 .

1. أتمم الجدول التالي :

المدة						
التكرارات						
التكرارات المجمعة الصاعدة						

2. احسـب كلا مـن وسـط ووسـيط هـذه السلسلة .

3. ارسم منحنى التكرارات المجمعة الصاعدة ثم تحقق من صحة قيمة وسيط هذه السلسلة .

4. أتمم الجدول التالي :

الفئة	[0 ; 25[	[25 ; 50[	[50 ; 75[
التكرارات			
التواترات %			
التواترات المجمعة الصاعدة %			

5. احسب وسط هذه السلسلة .

6. ارسم مدرّج التواترات .

36 التمثيـل التالـي ، يعبّـر عـن الأهـداف المجمّعة المسجّلة من طرف شـبيبة القبائل واتحـاد العاصمة في كرة القدم بعد 12 جولة من الموسم 2004 – 2005 .

تمارين ومسائل

1. حدّد في جدول عدد المقابلات التي سجّل فيها كل فريق هدفا واحدا، هدفين، ثلاثة أهداف، .....

2. ما هو معدّل الأهداف المسجّلة من طرف كل فريق ؟

3. ارسم مخططا بالأعمدة معتمدا على معطيات الجدول المحصّل عليه في السؤال الأول .

4. استنتج مخطّط التكرارات المجمّعة الصاعدة لكل فريق .

5. أوجد ، بيانيا ، قيمة وسيط كل فريق .

الحساب الجبري

a ؛ b ؛ c أعداد حقيقية .

$a-(b+c)=a-b-c$

$a-(b-c)=a-b+c$

$a.(b+c)=ab+ac$

$a.(b-c)=ab-ac$

المتطابقات الشهيرة

a ؛ b عددان حقيقيان .

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

الكسور

a ؛ b ؛ c ؛ d ؛ k أعداد حقيقية غير معدومة .

$$\frac{a}{b}=\frac{k.a}{k.b}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a\div k}{b\div k}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

$$\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{d}{c}$$

القوى الصحيحة

a ؛ b عددان حقيقيان غير معدومين .

m ؛ n عددان صحيحان .

$a^m\times a^n=a^{m+n}$ $\qquad (a^m)^n=a^{mn}$

$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $\qquad (ab)^n=a^nb^n$

$\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

الكتابة العلمية لعدد عشري

لكل عدد عشري غير معدوم كتابة علمية من الشكل : $a\times10^n$

(أو $-a\times10^n$) حيث a عدد عشري ؛

$1\le a<10$ و n عدد صحيح .

رتبة مقدار عدد عشري مكتوب على الشكل العلمي

رتبة مقدار عدد مكتوب على الشكل العلمي $a\times10^n$ (أو $-a\times10^n$) هو العدد $k\times10^n$ (أو $-k\times10^n$)

حيث k هو المدور إلى الوحدة للعدد a :

الجذور التربيعية

• a ؛ b عددان حقيقيان موجبان .

$\sqrt{a}\ge0$ ؛ $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$

$\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ حيث $b\ne0$

بعض الدساتير الأساسية

• a عدد حقيقي

$\sqrt{a^2} = a$ إذا كان $a \geq 0$

$\sqrt{a^2} = -a$ إذا كان $a \leq 0$

القيمة المطلقة

• x ؛ y عددان حقيقيان .

$|y| = |x|$ إذا وفقط إذا كان $x = y$ أو $x = -y$

$|xy| = |x| \times |y|$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ حيث $y \neq 0$

• α عدد حقيقي موجب تماما .

$|x| \leq \alpha$ إذا وفقط إذا كان $-\alpha \leq x \leq \alpha$

$|x - a| \leq \alpha$ إذا وفقط إذا كان

$a - \alpha \leq x \leq a + \alpha$ حيث a عدد حقيقي .

إحداثيا الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$A(x_0 ; y_0)$: $B(x_1 ; y_1)$ نقطتان من المستوي المنسوب إلى معلم .

إحداثيا $\overrightarrow{AB}$ هما $(x_1 - x_0 ; y_1 - y_0)$

إحداثيا منتصف القطعة [AB]

إحداثيا النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هما

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2} ; \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$$

المسافة بين النقطتين A و B

في معلم متعامد ومتجانس ، المسافة بين النقطتين A و B هي :

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

توازي شعاعين

$\vec{u}(a ; b)$ ؛ $\vec{u'}(a' ; b')$ شعاعان

$\vec{u}$ و $\vec{u'}$ متوازيان يعني $ab' - ba' = 0$

معادلات مستقيم

• (D) مستقيم له معادلة من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث a ؛ b غير معدومين في آن واحد .

$\vec{u}(-b ; a)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) .

• (D) مستقيم له معادلة من الشكل $y = mx + p$.

m هو معامل توجيه المستقيم (D) .

• معامل توجيه المستقيم (AB) حيث :

$A(x_0 ; y_0)$ ؛ $B(x_1 ; y_1)$ هو $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

مع $x_1 \neq x_0$

توازي مستقيمين

$(D) : y = mx + p$

$(D') : y = m'x + p'$

(D) و (D') متوازيان يعني $m' = m$

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية
Onps
Office National des Publications Scolaires

2011 - 2012

MS : 01114/05

ISBN : 9947-20-436-7 ردمك

Dépot légal 1288- 2005 : رقم الإيداع القانوني

مصادق عليه من طرف لجنة الإعتماد والمصادقة للمعهد الوطني للبحث في التربية
(وزارة التربية الوطنية) طبقا للقرار رقم : 1851 / م ع / 2008 المؤرخ في 22 أكتوبر 2008