الأعداد المركبـــــــــــة

جمعها لكم الأستاذ : سايبـــي

التمرين 01:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، (الوحدة هي $1cm$)

1 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+4z+16=0$.

2 ـ من أجل كل عدد مركب z ، نصع : $P(z)=z^3-64$.

أ ـ أحسب $P(4)$.

ب ـ عين الأعداد الحقيقية b,a و c ، بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-4)\left(az^2+bz+c\right)$.

جـ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

3 ـ نعتبر النقاط B,A و C ، ذات اللواحق : $z_A=-2+2i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=4$ ، على الترتيب .

أ ـ تحقق أن : $z_A=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، ثم عين الشكل الأسي للعدد المركب z_B .

ب ـ علم النقاط B,A و C في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

جـ ـ ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

4 ـ لتكن النقطة D صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{6}$. نسمي z_D لاحقة النقطة D .

أ ـ عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z_D .

ب ـ إستنتج الشكل الجبري للعدد المركب z_D .

جـ ـ علم النقطة D في المعلم السابق

التمرين 02:

1 ـ عين الأعداد الحقيقية b,a و c ، بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $z^3-8=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

ثم إستنتج في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $z^3-8=0$.

2 ـ في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، (الوحدة هي $2cm$) ، نعتبر النقاط $A;B$ و C ذات اللواحق $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-1-i\sqrt{3}$ ، على الترتيب .

أ ـ عين الشكل الأسي لـ : z_A , z_B و z_C .

ب ـ علم النقط $A;B$ و C في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

جـ ـ ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

3 ـ نعتبر الدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ولتكن A',B' و C' صور النقط $A;B$ و C ،على الترتيب بالدوران R .

أ ـ عين الشكل الأسي لـ : $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ و $z_{C'}$ ، لواحق A',B' و C' ، على الترتيب .

ب ـ علم النقط A',B' و C' في المعلم السابق .

جـ ـ تحقق أن $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ و $z_{C'}$ حلول المعادلة $z^3=8i$.

التمرين 03:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، (الوحدة هي $2cm$) .

1 - من أجل كل عدد مركب z ، نضع : $P(z)=z^3+\left(2\sqrt{2}-4\right)z^2+8\left(1-\sqrt{2}\right)z+16\sqrt{2}$.

أ - أحسب $P\left(-2\sqrt{2}\right)$.

ب - بين أنه من أجل كل عدد مركب z ، فإنه يمكن كتابة $P(z)$ ، على الشكل :

$P(z)=\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$ ، حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2 - نسمي A , B و C ، النقط التي لواحقها $a=2+2i$ ، $b=2-2i$ و $c=-2\sqrt{2}$ ، على الترتيب .

أ - علم النقط A , B و C في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

- بين أن النقط A , B و C تنتمي إلى دائرة Γ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب - عين عمدة لكل من العددين المركبين $a=2+2i$ ، $b=2-2i$ ، ثم إستنتج قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$.

جـ - عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)$.

د - بين أن أحد أقياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ هو $\dfrac{3\pi}{8}$.

هـ - إستنتج المساواة $tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=1+\sqrt{2}$.

التمرين 04:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، (الوحدة هي $2cm$) .

i العدد المركب الذي طويلته 1 و $\dfrac{\pi}{2}$ عمدة له .

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

2 - نسمي A , B ، النقطتان اللتان لاحقتاهما $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، على الترتيب .

أ - عين الطويلة وعمدة لكل من العددين z_A و z_B .

ب - أعط الشكل الأسي للعدد المركب z_A .

جـ - علم النقطتين A و B في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

3 - نسمي R التحويل النقطي المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M والتي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

أ - ما طبيعة التحويل R ، عين عناصره المميزة .

ب - نسمي C صورة النقطة A بالتحويل R . أعط الشكل الأسي للعدد المركب z_C لاحقة النقطة C

ثم إستنتج الشكل الجبري لـ z_C .

جـ - علم النقطة z_C في المعلم السابق .

د - بين أن النقطة B هي صورة النقطة C بالتحويل R ، ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

التمرين 05:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. i العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له

نعتبر النقط A , B , C و D ، التي لواحقها $z_A=8$ ، $z_B=8i$ ، $z_C=z_A\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_D=z_B\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، على الترتيب .

1 - أ - أكتب z_A و z_B ، على الشكل المثلثي .

ب - أعط الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_C و z_D ، ثم أكتب كل منهما على الشكل الجبري .

2 - بين أن النقط A , B , C و D ، تنتمي إلى دائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

3 - أرسم الدائرة (Γ) ثم علم النقط A , B , C و D .

4 - أ - نسمي z_1 ، z_2 لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BD}$ ، على الترتيب . بين أن : $z_2=\sqrt{3}\,z_1$.

ب - نسمي z_3 ، z_4 لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، على الترتيب . أحسب $|z_3|$ ، $|z_4|$.

جـ - بين أن الرباعي $ABCD$ ، شبه منحرف متقايس الساقين .

التمرين 06:

المستوي (P) المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. i العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له

z_1 العدد المركب : $z_1=-1-i\sqrt{3}$

1 - نضـــع : $z_2=i\,z_1$. تحقق أن : $z_2=\sqrt{3}-i$

2 - أ - أحسب الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_1 ، z_2 .

ب - علم النقطتين $M_1\,;M_2$ ، اللتان لاحقتاهما z_1 ، z_2 ، على الترتيب .

3 - نعتبر في المستوي المركب النقط A , B و C التي لواحقها z_A , z_B و z_C ، على الترتيب حيث :

$z_A=-2+2i\sqrt{3}$ ، $z_B=2-2i\sqrt{3}$ و $z_C=8$.

أ - بين أن : $z_A=2\,\overline{z_1}$ و $z_B=-z_A$.

ب - علم النقط A , B و C في المستوي (P) .

جـ - بين أن المثلث ABC قائم .

د - عين لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABCD$ مستطيل .

التمرين 07:

في المستوي (P) المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، نعتبر النقط A, B و C ذات اللواحق $z_A=\sqrt{3}+3i$, $z_B=2\sqrt{3}$ ، و $z_C=2i$ ، على الترتيب .

1 ـ علم النقط A, B, C في المستوي (P) .

2 ـ عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z_A .

3 ـ أ ـ أحسب الطويلة لكل من الأعداد المركبة التالية : z_A-z_C , z_B-z_A , z_B-z_C .

ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

ـ ب ـ عين لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ، عين نصف قطرها .

ـ جـ ـ تحقق أن المبدأ O ينتمي إلى الدائرة (Γ) .

4 ـ لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ـ أ ـ تحقق أن : $z_D=\sqrt{3}-i$.

ـ ب ـ أحسب لاحقة النقطة M منتصف قطعة المستقيم $[AD]$.

ـ جـ ـ برهن أن الرباعي $ABCD$ مستطيل .

التمرين 08:

1 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$.

2 ـ أ ـ عين العددين الحقيقيين a, b بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $z^3-9z^2+31z-39=(z-3)\left(z^2+bz+c\right)$.

ب ـ إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $z^3-9z^2+31z-39=0$.

3 ـ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ (الوحدة $2cm$) .

نعتبر النقاط A, B, E و F التي لواحقها : $z_A=3+2i$ ، $z_B=3-2i$ ، $z_E=\frac{5}{4}+i\frac{\sqrt{15}}{4}$ ، $z_F=3$ ، على الترتيب .

أ ـ علم النقاط A, B, E و F في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

ب ـ أحسب المسافات : FA, FB و FE ، ثم إستنتج أن النقاط A, B و E تنتمي إلى دائرة (Γ) مركزها F .

جـ ـ ماهي طبيعة المثلث ABE ؟

التمرين 09:

نضـــع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-8z^2+24z-32$

1 - أ - تحقق أن : $P(4)=0$.

ب - عين العددين الحقيقيين a , b بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-4)(z^2+bz+c)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$

2 - المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقاط A, B و C التي لواحقها : $z_A=2+2i$ ، $z_B=4$ ، $z_C=2-2i$ ، على الترتيب .

أ - علم النقط A, B و C في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

ب - تحقق أن : $OA=OC=AB=CB$ ، ثم إستنتج طبيعة الرباعي $OABC$.

3 - أ - عين مركز وزاوية الدوران R الذي يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى C .

ب - تحقق أن O هي صورة C بالدوران R .

جـ - لتكن H مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$ ، عين $z_{H'}$ لاحقة النقطة H' صورة H بالدوران R .

التمرين 10:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، (الوحدة هي $2cm$) .

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

- نضع : $a=\sqrt{3}+i$ ، $b=\sqrt{3}-i$.

أكتب a , b على الشكل الأسي ، ثم علم النقطتين A و B ذات اللاحقتين a و b ، على الترتيب .

2 - ليكن r الدوران الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ - أحسب a' لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران r .

- أكتب a' على الشكل الجبري ثم علم النقطة A' في المعلم السابق .

ب - ليكن h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

أحسب b' لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتحاكي h ثم علم النقطة B' في المعلم السابق .

3 - لتكن Γ الدائرة المحيطة بالمثلث $OA'B'$ وليكـــن q نصف قطرها .

نرمز بـ c إلى لاحقة النقطة C .

أ - أثبت صحة المساويات التالية : $\boxed{1}$ $c\bar{c}=q^2$

$$\boxed{2}\quad (c-2i)(\bar{c}+2i)=q^2$$

$$\boxed{3}\quad \left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=q^2$$

ب - إستنتج أن : $c-\bar{c}=2i$ و $c+\bar{c}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$.

جـ - إستنتج لاحقة النقطة C وقيمة q .

التمرين 11:

1 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z، التالية :

$$z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+\sqrt{2}=0$$

2 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين ذات المجهول المركب z، التاليتين :

$$z+\frac{1}{z}=1 \quad ، \quad z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$$

3 ـ نعتبـــر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود للمتغير المركب z التالي :

$$P(z)=z^4-\left(1-\sqrt{2}\right)z^3+\left(2+\sqrt{2}\right)z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+1$$

ـ تحقق أنه من أجل كل عدد مركب غير معدوم z ، فإن :

$$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}$$

ـ أستنتج حلول المعادلة $P(z)=0$.

التمرين 12:

1 ـ من أجل كل عدد مركب z نضع : $P(z)=z^4-1$

ـ حلل $P(z)$ ثم إستنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z)=0$

ـ إستنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $\left[\frac{2z+1}{z-1}\right]^4=1$.

2 ـ ـ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$، (الوحدة $5\,cm$) .

أ ـ علم النقط A ، B ، C ذات اللواحق $\alpha=-2$ ، $\beta=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$ ، $\gamma=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ على الترتيب .

ب ـ أثبت أن النقط O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيينها .

3 ـ أ ـ علم النقطة D ذات اللاحقة λ ، حيث : $\lambda=-\frac{1}{2}$.

ب ـ أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z' المعرف كما يلي : $z'=\frac{\alpha-\gamma}{\lambda-\gamma}$

جـ ـ إستنتج قيمة $\frac{CA}{CD}$ وقيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)$.

التمرين 13:

في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، (الوحدة هي $2cm$) ، نعتبر النقاط A , B و C ذات اللواحق $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$ ، على الترتيب .

الجزء الأول :

1 ـ أ ـ أعط الشكل الأسي للعدد z_B ثم للعدد z_C .

ب ـ علم النقط A , B و C .

2 ـ ماهي طبيعة الرباعي $OBAC$ ؟

3 ـ عين ثم أنشئ (D) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z|=|z-2|$

الجزء الثاني :

نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z ، بحيث $z\neq z_A$ ، النقطة M' ذات اللاحقة z' ، حيث : $z'=\dfrac{-4}{z-2}$.

1 ـ أ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z=\dfrac{-4}{z-2}$.

ب ـ إستنتج النقطتين المرفقتين بالنقطتين B و C .

جـ ـ عين ثم أنشئ النقطة G' المرفقة بالنقطة G مركز ثقل المثلث OAB .

2 ـ أ ـ أسئلـــة حول الدرس :

تذكيـــر : طويلة عدد مركب z هي العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز إليه بالرمز $|z|$ والمعرف كما يلي :

$|z|^2=z\bar{z}$ ، $\bar{z}$ يرمز إلى مرافق العدد z .

برهن أن : ـ من أجل كل عددين مركبين z_1 , z_2 يكون : $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$.

ـ من أجل كل عدد مركب z غير معدوم يكون : $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$.

ب ـ برهن أنه من أجل كل عدد مركب z ، بحيث $z\neq 2$ ، فإن : $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

جـ ـ نفرض في هذا السؤال أن النقطة M تنتمي إلى المجموعة (D) المعرفة في السؤال ـ 3 ـ " الجزء الأول "

برهن أن النقطة M' المرفقة بالنقطة M تنتمي إلى دائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها ، ثم إرسم (Γ) .

التمرين 14:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ ، (الوحدة هي $1cm$) .

i العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له .

1 - من أجل كل عدد مركب z ، نضع : $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$.

أ - تحقق أنه من أجل كل عدد مركب z ، فإنه يمكن كتابة $P(z)$ ، على الشكل :

$P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$.

ب - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2 - نسمي A , B و C ذات اللواحق $a=2$ ، $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=1-i\sqrt{3}$ ، على الترتيب .

أ - عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة a , b , c .

ب - عين المركز ونصف القطر للدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

جـ - علم النقط A , B و C في المعلم $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

د - برهن أن الرباعي $OBAC$ معيـــن .

3 - نضـــع : $d=a+b$ ونسمي D النقطة ذات اللاحقة d .

أ - أنشـــئ النقطة D في المعلم السابق .

ب - بين أن النقطة A هي منتصف قطعة المستقيم $[CD]$.

جـ - أكتب d على الشكل الأسي .

هـ - بين أن المثلث OCD قائم .

التمرين 15:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ ، (الوحدة هي $2cm$) .

نعتبر العددين المركبين : $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2=1+i\sqrt{3}$.

1 - أ - عين الطويلة وعمدة للعددين المركبين z_1 , z_2 .

ب - علم النقطتين A و B اللتان لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب .

2 - نضع : $Z=\frac{z_2}{z_1}$

أكتب العدد المركب Z على شكله الأسي ثم إستنتج قيسا بالراديان للزاوية θ زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول A إلى B .

3 - أ - أكتب Z على شكله المثلثي .

ب - بإستعمال الشكل الجبري لكل من العددين z_1 و z_2 ، عين الشكل الجبري للعدد Z .

جـ - إستنتج القيمتين : $Cos\frac{\pi}{12}$ ، $Sin\frac{\pi}{12}$.

التمرين 16:

i العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له .

1 ـ بين أن : $(1+i)^6 = -8i$.

2 ـ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = -8\,i \,.....(E)$.

بإستعمال نتيجة السؤال حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم أكتب الحلين على الشكل الجبري .

3 ـ إستنتج من نتيجة السؤال ـ 1 ـ حلا للمعادلة $z^3 = -8\,i \,......(E')$.

4 ـ نعتبر النقطة A التي لاحقتها $2i$ وليكن R الدوران الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ ـ عين z_B لاحقة النقطة B صورة النقطة A بالدوران R ، ثم z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R .

ب ـ أثبت أن z_B و z_C حلين للمعادلة (E') .

5 ـ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، (الوحدة هي $2cm$)

أ ـ علم النقط A, B و C في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

ب ـ ما نوع المثلث ABC ؟

جـ ـ عين مركز ثقل المثلث ABC .