سلسلة استعد للبكالوريا رقم (05)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2008/2007

الشعبـــــــة :علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

المحور : الأعداد المركبة

تمرين مدخل للأعداد المركبة : مثال بومبيلي(Bombelli).

الهدف من هذا النشاط هو حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $x^3=15x+4$ ..... (1) .

1) أثبت أن $\alpha+\beta$ حل للمعادلة (1) إذاوفقط إذا: (2) .... $\alpha^3+\beta^3+3(\alpha\beta-5)(\alpha+\beta)-4=0$.

2) ما هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد $\alpha\beta$ حتى تكتب المعادلة (2) على الشكل $\alpha^3+\beta^3=4$ ؟

ما هي قيمة $\alpha^3\beta^3$ في هذه الحالة ؟

3) تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(x-\alpha^3)(x-\beta^3)=x^2-4x+125$.

4) نعتبر المعادلة $x^2-4x+125=0$ . . . (3) تأكد أن هذه المعادلة لا تقبل حلولا حقيقية .

5) نتخيل عدد نرمز له "i" **حيث** $i^2=-1$.

أكتب حلول المعادلة (3) في هذه الحالة .

أحسب $(2-i)^3$ و $(2+i)^3$ ، استنتج حلا حقيقيا للمعادلة (1). ثم عين حلول المعادلة (1).

الجزء الأول : العمليات على الشكل الجبري

التمرين (01) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$z_1=(2+i)^2$ ، $z_2=(4+2i)(4-2i)$ ، $z_3=(2-i)^2(1+2i)^2$ ، $z_4=(3-2i)^3$

$z_5=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ، $z_6=\frac{4-6i}{3+2i}$ ، $z_7=\frac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$ ، $z_8=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ ، $z_9=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$

التمرين (02) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

1/ $3z-2+i=(1+i)z-1-2i$ ، 2/ $(3-4i)z^2=iz$ ، 3/ $\frac{z+1}{z-1}=2i$

التمرين (03) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

1/ $z^2+z\overline{z}-4-6i=0$ ، 2/ $(1+i)z-(2-i)\overline{z}+3+4i=0$

3/ $\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=i$ ، 4/ $(2z+1-i)(i\overline{z}+i-2)=0$

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

التمرين (04) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نضع $L=\dfrac{z+1}{z-1}$ و M' صورة العدد المركب L .

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

أ ــ يكون L عددا حقيقيا .

ب ــ يكون L عددا تخيليا صرفا .

جــ ــ تكون النقط O ، M و M' في استقامية .

التمرين (05) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

$z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq 2i$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث . $L=\dfrac{z-2+i}{z+2i}$

1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا.

4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (06) 1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2i\overline{z}=0$ ....(1)

2/ نسمي O ، A ، B ، C صور حلول المعادلة (1) في المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. أثبت أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

التمرين (07) 1/ حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة التالية: $\begin{cases} iz_1+(1-i)z_2=-4-3i \\ (1+i)z_1+2iz_2=13+9i \end{cases}$

نسمي A و B صور الحلول z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. ونسمي C صورة العدد z حل المعادلة التالية: $(3-i)\overline{z}+5-i=6+2i$

2/ عيّن طبيعة المثلث ABC. 3/ عيّن لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين (08) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A ، M و M' نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، z و $1+z^2$.

– عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث تكون A ، M و M' على استقامة واحدة

التمرين (09) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L=(z-2i).(\overline{z}-1)$

عيّن مجموعة النقط M حتى يكون : أ) L حقيقي

ب) L تخيلي صرف

التمرين (10) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L=(1-z).(1-iz)$

عيّن مجموعة النقط M حتى يكون : أ) L حقيقي ، ب) L تخيلي صرف

التمرين (11) حل في $\mathbb{C}^2$ الجمل ذات المجهول $(z;z')$ التالية :

/1 $\begin{cases} iz_1+(2+i)z_2=4+i \\ z_1-(3-2i)z_2=-3+8i \end{cases}$ ، **/2** $\begin{cases} 2iz+z'=2i \\ 3\overline{z}+i\overline{z'}=1 \end{cases}$

الجزء الثاني: العمليات على الشكل المثلثي و الأسي

التمرين (12) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

$z_1=1+i$ ، $z_2=3-3i$ ، $z_3=-\sqrt{3}-i$ ، $z_4=1-i\sqrt{3}$ ، $z_5=-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$

$z_6=-\sqrt{5}-i\sqrt{15}$ ، $z_7=-2+2i$ ، $z_8=\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$ ، $z_9=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ ، $z_{10}=\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}$

التمرين (13) ليكن العدد المركب Z حيث : $Z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

1) احسب طويلة العدد المركب Z و عمدة له .

2) اكتب Z على الشكل الجبري .

3) استنتج $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

4) بيّن ان : $\left(\dfrac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}$ عدد حقيقي

التمرين (14) Z ، V و U أعداد مركبة حيث:

$z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\dfrac{z}{u}$.

1) أكتب V على الشكل الجبري .

2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة U ، V و Z .

3) استنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (15) في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z

أ ــ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. ب ــ $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

جــ ــ $z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$. د ــ $z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$.

التمرين (16) I) z_1 و z_2 عددان مركبان حيث : $|z_1| = |z_2| = 1$

– برهن ان العدد $\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1.z_2}\right)$ حقيقي

II) z_1 و z_2 عددان مركبان مختلفان لهما نفس الطويلة .

– أثبت أن العدد المركب $\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)$ تخيليا صرف

التمرين (17) A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب

$z_1 = 1$ ، $z_2 = 2i$ و $z_3 = -1 - i$.

1) أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_3 - z_1|$.

2) أحسب $Arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$. 3) استنتج طبيعة المثلث ABC.

التمرين (18) 1/ أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$$6e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ ؛ } \sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}} \text{ ؛ } \frac{1}{2}e^{i\pi} \text{ ؛ } 2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

2/أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$$z_1 = 2 - 2i \text{ ؛ } z_2 = 3\sqrt{3} - 3i \text{ ؛ } z_3 = \frac{5}{4}i \text{ ؛ } z_4 = -1 .$$

3/ أعط شكلا أسيّا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$$z_1 = \left(2\sqrt{3} + 6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ؛ } z_2 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ؛ } z_3 = \left(1 - \sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ؛ } z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

التمرين (19) المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الرسم $4cm$).

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $a = 1$ ، $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

$c = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ و $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

2) مثل النقط A ، B ، C و D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .

التمرين (20) احسب :

$$z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5 \quad ، \quad z_2=\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^3} \quad ، \quad z_3=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2(1-i)}\right)^{1990}$$

التمرين (21) عيّن الطويلة وعمدة لكل عدد مركب مما يلي :

1) $z_1=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ و $\alpha\in[0;2\pi[$ ، 2) $z_2=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ و $\alpha\in[0;2\pi[$

3) $z_3=\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ و $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، 4) $z_4=\dfrac{1}{1-i\tan\theta}$ و $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

التمرين (22) نعتبر العددين المركبين z_1 ، z_2 حيث : $z_1=-\sqrt{3}+i$ و $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

2) استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب L حيث : $L=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

3) اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

4) استنتج قيمتي : $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{13\pi}{12}$

التمرين (23) لتكن A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها على التوالي :

$a=-1+i$ ، $b=-1-i$ ، $c=2i$ ، $d=2-2i$

1) احسب الطويلة وعمدة كل من العددين المركبين : $\dfrac{c-a}{d-a}$ و $\dfrac{c-b}{d-b}$

2) استنتج طبيعة كل من المثلثين ACD و BCD

3) بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

التمرين (24) 1) برهن أنّ : $\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin\dfrac{\pi}{10}}=\dfrac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}$

2) أحسب المجموع $1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

3) عين قيمة لكل من المجموعين S و T حيث $S=\sum_{k=0}^{4}\cos\dfrac{k\pi}{5}$ و $T=\sum_{k=0}^{4}\sin\dfrac{k\pi}{5}$.

التمرين (25) : 1) بيّن أن : $e^{i\frac{\pi}{11}}+e^{i\frac{3\pi}{11}}+e^{i\frac{5\pi}{11}}+e^{i\frac{7\pi}{11}}+e^{i\frac{9\pi}{11}}=\dfrac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2\sin\dfrac{\pi}{22}}$

2) استنتج أن : $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}=\dfrac{1}{2}$

الجزء الثالث: المعادلات من الدرجة الثانية

التمرين (26) عيّن الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة التالية :

$1+4\sqrt{5}i$ ، -4 ، $2i$ ، $-3-4i$ ، $-15+8i$ ، $8-6i$

التمرين (27) **حل في المجموعة $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات التالية :**

1/ $z^2+(7-4i)z+9-15i=0$ ، **2/** $z^2-2(2-i)z+6=0$

3/ $z^2+2z+10=0$ ، **4/** $z^2+\left(\sqrt{3}-7i\right)z-4\left(3+i\sqrt{3}\right)=0$

5/ $z^2+4=0$ ، **6/** $iz^2-2iz+i+2=0$

7/ $\alpha z^2+(1-i\alpha^2)z-\alpha i=0$ ، **8/** $z^2+8i=0$

9/ $2z^2+8z\sin\theta+5-3\cos(2\theta)=0$

التمرين (28) 1) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $-8+6i$

2) يعطى كثير الحدود للمتغير المركب z :

$Q(z)=z^3+(5i-6)z^2+(9-24i)z+18+13i$

أ- احسب $Q(-i)$

ب- حل عندئذ في $\mathbb{C}$ المعادلة $Q(z)=0$

3) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

لتكن A ، B و C صور حلول المعادلة $Q(z)=0$. ما نوع المثلث ABC

التمرين (29) 1) اكتب على الشكل المثلثي العدد المركّب $(-1-i)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$\frac{(1-3i)z+3+i}{z-i}=z \ .$$

3) نرمز بالرمز z_0 لحل المعادلة السابقة الذي له أصغر طويلة .

أ ــ أحسب العدد المركّب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{1984}$ و أكتبه على الشكل الجبري.

ب ــ ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركّب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا ؟

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التدريب على حل تمارين بكالوريات

التمرين (01) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

$z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq 2i$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث . $L=\dfrac{z+8+4i}{z-2i}$

1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا.

4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (02) ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z المعرّف كما يلي :

$$.P(z)=z^3-(4+i)z^2+(5+4i)z-5i$$

1) تحقق من أنّ $P(2+i)=0$ ؛ جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغيّر المركّب z حتى يكون من أجل كل عدد مركّب z : $.P(z)=(z-2-i).Q(z)$

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :. $P(z)=0$

3) لتكن A ، B و C صور حلول المعادلة $P(z)=0$ في المستوي المركّب حيث A صورة الحل $(2+i)$.

- جد إحداثيات النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD.

التمرين (03) نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية :

$$.z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i=0$$

1) أثبت أنّ المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (E) . نسمي z_1 الحل الذي جزئه التخيّلي سالب و z_2 الحل الثالث.

3) في المستوي المركب لتكن النقط A، B و C التي لواحقها على الترتيب z_0، z_1 و z_2.

ــ جد إحداثيتي النقطة G مرجّح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات: -2 ، 3 و 1 على الترتيب .

ــ عيّن المجموعة $\mathcal{E}_M$ للنقط M من المستوي حيث :

$$.-2MA^2+3MB^2+MC^2=9$$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (04) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z المعرّف كما يلي :

$.P(z)=z^3-(3+i)z^2+(4+i)z+2i-4$

1) أحسب $P(2)$ ، جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغيّر المركّب Z بحيث يكون من أجل كل عدد مركّب Z : $P(z)=(z-2).Q(z)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $P(z)=0$.

3) في المستوي المركب لتكن A ،B و C صور حلول المعادلة $P(z)=0$.

– ما هي طبيعة المثلث ABC؟

التمرين (05) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة$\mathbb{C}$، كلا من المعادلتين :

$$z^2-2z+5=0 \text{ ؛ } z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0.$$

2) في المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ ــ ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب ــ أكتب معادلة للدائرة C المحيطة بالمثلث ABC .

ج ــ أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة C.

د ــ أنشئ C والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .

التمرين (06) من اجل كل عدد مركّب $z\neq 2i$ نعتبر العدد المركّب $L(z)$ بحيث :

$$.L(z)=\frac{(5-i)z+2(1+i)}{iz+2}$$

1) جد الأعداد المركّبة z بحيث : $L(z)=z$. ثم أكتب هذه الأعداد على الشكل المثلثي .

2) في المستوي المركّب لتكن النقطة M التي إحداثياها $(x;y)$ ولاحقتها z .

ــ أكتب على الشكل الجبري العدد $L(z)$.

ــ عيّن مجموعة النقط Mالتي لاحقتها z بحيث يكون $L(z)$ عددا تخيّليا صرفا

التمرين (07) **1)** r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي .

α عدد مركب طويلته r وعمدته θ .

أ– حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^2-\alpha z+\alpha^2=0$ (نرمز لحلي هذه المعادلة بــ z_1 و z_2)

ب– عبر بدلالة r و θ على طويلتي z_1 و z_2 وعمدتيهما

/2 ليكن العدد المركب L حيث : $L=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$

أ– احسب L^2 و اكتبه على شكله المثلثي . ب– استنتج الطويلة وعمدة للعدد L

جــ– استنتج قيمتي : $\cos\frac{19\pi}{12}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}$

التمرين (08) 1- أ- احسب $\left(\sqrt{3}+3i\right)^2$ ، ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$2z^2+\left(3\sqrt{3}+i\right)z+4=0$$

نرمز بـــ z_1 و z_2 لحلي المعادلة المعطاة حيث : $|z_1|\prec|z_2|$

ب - اكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله الأسي .

2- في المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. نعتبر العدد المركب $L=-2\left(\sin\theta+i\cos\theta\right)$

حيث θ عدد حقيقي ، ولتكن النقط A ، B و M صور الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، L على الترتيب . أ- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L بدلالة θ

ب- نضع : $\theta=\frac{2\pi}{3}$ - اثبت أن المثلث ABM قائم .

التمرين (09) 1) حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة التالية :

$$\begin{cases} z_1+z_2=6-4i \\ z_1\times z_2=13-18i \\ |z_1|\prec|z_2| \end{cases}$$

2) في المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. A ، B و C صور الأعداد المركبة : $-i$ ، z_1 ، z_2 على الترتيب . ما نوع المثلث ABC

3) عيّن معادلة الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC.

4) عيّن معادلة المماس (Δ) للدائرة (Γ) في النقطة C .

التمرين (10) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-\left(1+i\sqrt{2}\right)z^2+\left(1+i\sqrt{2}\right)z-i\sqrt{2}=0$

1- أ) بيّن ان هذه المعادلة تقبل حلا تخيليا z_0 يطلب تعيينه

ب) احسب الحلين الآخرين z_1 و z_2 حيث : z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

2- في المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. لتكن A ، B و C صور الأعداد المركبة : z_0 ، z_1 ، z_2 على الترتيب .

أ) عين لاحقة النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات (-3) ، $\left(1+\sqrt{6}\right)$ و $\left(1-\sqrt{6}\right)$ على الترتيب .

ب) بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين (11) 1/ عين الطويلة وعمدة للعدد المركب : $-8+8\sqrt{3}i$

2/ عين كل الأعداد المركبة L بحيث : $L^4=-8+8\sqrt{3}i$.

3/ حل عندئذ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$\left(z+i\right)^4-8\left(-1+i\sqrt{3}\right)=0$$

التمرين (12) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^2-\left[\sqrt{3}+1+2i\right]z+\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)=0\ldots\ldots\ldots(1)$$

1) أ) احسب $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1)

نســــمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة بحيث : $|z_1|\succ|z_2|$

ب) اكتب كلا من العددين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ثم استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب $z_1\times z_2$.

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\dfrac{z_1\times z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا.

3) نضع : $a=\dfrac{z_1}{2}$ و $b=\dfrac{z_2}{\sqrt{2}}$ و $L=\dfrac{a+b}{1+ab}$

أ) تحقق ان $|a|=|b|=1$.

ب) احسب مرافق L بدلالة a و b واستنتج أن L حقيقي .

التمرين (13) نعتبر كثير الحدود للمتغيّر المركب z المعرّف بـــ :

$$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63\ .$$

1. أ ــ أحسب $P\left(i\sqrt{3}\right)$ و $P\left(-i\sqrt{3}\right)$.

ب ــ برهن أنّه توجد أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z

$P(z)=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)$.

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $P(z)=0$.

. المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

أ ــ مثّل النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$

، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

ب ــ أثبت أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

4. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O .

بيّن أن $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثمّ عيّن طبيعة المثلث BEC.

التمرين (14) α عدد مركب غير معدوم . **1.** أنشر العبارة $\left[1-i\left(1+\alpha\right)\right]^2$.

2. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z :

$$z^2+\left[-1+i\left(1-\alpha\right)\right]z+i\alpha+\alpha=0$$

نرمز بـــ z_1 و z_2 إلى حلي هذه المعادلة حيث z_2 هو الحل المستقل عن α

إعداد الأستاذ

حليلات عمار

3. نفرض في هذا السؤال أنّ $\alpha = iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم .
أكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله المثلثي .

4. المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

A و M نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_2 و z على الترتيب ، ولتكن $\mathcal{E}_p$ مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $(z-z_2)\left(\overline{z-z_2}\right)=2$.

تحقّق أنّ مبدأ المعلم O ينتمي إلى $\mathcal{E}_p$ ثمّ عيّن $\mathcal{E}_p$

التمرين (15) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^3+2\left(-\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1-i\sqrt{3}\right)z+8i=0........(1)$$

1. بيّن أن المعادلة (1) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.
2. حل عندئذ المعادلة (1) .نسمي z_1 و z_2 الحلين الآخرين حيث الجزء التخيلي للعدد z_1 سالب

1. نضع : $\omega = \dfrac{z_1}{z_2}$.أ) عيّن الشكل المثلثي للعدد ω .

ب) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.بكل عدد مركب z غير معدوم نرفق النقط M ، M_1 ، M_2 التي لواحقها على الترتيب : z ، ωz ، $\omega^2.z$.
– برهن أن الرباعي OMM_1M_2 معيّن.

التمرين (16) 1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :
$z^2-(1+i)z-4i=0$ وليكن z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة

2/ نعتبر المعادلة : $z^4-(1+i)z^3+(9-4i)z^2-9(1+i)z-36i=0$

أ) بيّن ان لهذه المعادلة حلين تخيليين صرفيين متعاكسين z_3 ، z_4 يطلب تعيينهما.

ب) استنتج مجموعة حلول هذه المعادلة .

3/ المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. M نقطة من المستوي لاحقتها z

– اوجد مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون : $\arg\left(\dfrac{z-z_3-z_4}{z-z_1-z_2}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$

التمرين (17) α عدد مركب حيث : $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1) احسب α^2 و α^4 ثم اكتب α^4 على شكله المثلثي .

2) استنتج الطويلة وعمدة للعدد α .ثم احسب كلا من العددين : $\cos\dfrac{13\pi}{8}$ و $\sin\dfrac{13\pi}{8}$

3) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. M نقطة لاحقتها z عين مجموعة النقط M بحيث : $|\alpha.z|=8$

التمرين (18) 1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(iz-1)\left[z^2-(1+4i)z-(5+i)\right]=0$...........(1)

نرمز بـــ z_0 ، z_1 و z_2 إلى حلول المعادلة (1) حيث : $|z_0|\prec|z_1|\prec|z_2|$

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب .

2/ أ) أوجد احداثيي النقطة G مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;2),(C;1)\}$

ب) عيّن مجموعة النقط M ذات اللواحق z بحيث :

$$|z-z_0|^2+2|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=34$$

التمرين (19) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث أن :

$$f(z)=z^3+(14-i\sqrt{2})z^2+(74-14i\sqrt{2})z-74i\sqrt{2} \text{ .}$$

1) أثبت أن $f(z)$ يقبل جذرين مترافقين يطلب تعيينهما.

2)حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$.

نسمي A ، B ، C صور الأعداد : $-7+5i$ ، $-7-5i$ و $i\sqrt{2}$ على الترتيب .

3) لتكن D النقطة التي لاحقتها $1+i$.عين لاحقة النقطة E حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع .

4) لتكن F النقطة التي لاحقتها $1+11i$. نضع $\omega=\dfrac{(z_A-z_D)}{(z_F-z_B)}$.

أ) أكتب ω على الشكل الجبري .

ب) أكتب ω على الشكل الأسي .

5) أثبت أن المستقيمين (AD) و (BF) متعامدان.

- استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$.

التمرين (20) 1/ احسب الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $-2-2\sqrt{3}i$

2/ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$z^2-2z+3+2\sqrt{3}i=0$$

(نسمي حلي هذه المعادلة z_0 و z_1 حيث : $|z_0|\prec|z_1|$)

3/ φ عدد حقيقي ، z عدد مركب حيث : $z=1+2\cos\varphi+2i\sin\varphi$

M_0 ، M_1 ، M نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 ، z .

أ) ما هي قيم φ حتى تكون M عنصرا من $\{M_0,M_1\}$

ب)إذا كانت M تختلف عن M_0 و M_1 برهن أن المثلث M_0MM_1 قائم في M

جـــ) عين قيم φ حتى يكون $M_0M=\dfrac{1}{2}M_0M_1$. أنشئ M عندئذ .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (21) : نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+2z+1+i=0$

نرمز بــ z_1 و z_2 للحلين بحيث : $\Im m(z_1)\succ 0$

1/ حدد z_1 و z_2

2/ المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و M_1 و M_2 التي لواحقها على التوالي : -1 و $\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و z_1 و z_2 .

أ) اكتب العدد المركب $\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ على الشكل المثلثي .

ب)تحقق من أن : $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OB}$ وان A منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثم انشئ النقط : A و B و M_1 و M_2.

جـ) استنتج أن $AOBM_1$ معين ثم أن $\arg(z_1)\equiv\frac{7\pi}{8}[2\pi]$.

التمرين (22) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$z=x+iy$ عدد مركب و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث . $f(z)=\frac{2z-i}{z+1-i}$

1) أكتب العدد المركب $f(z)$ على الشكل الجبري .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $f(z)$ حقيقيا .

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $f(z)$ تخيليا صرفا.

4) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $|f(z)|=\sqrt{3}$

5) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=z$

الهدية

يقول الشاعر أبو القاسم الشابي:

إذا ما طمحت إلى غاية لبست المنى وخلعت الحذر
ولم أتخوف وعور الشعاب ولا كبة اللهب المستعر
ومن لا يحب صعود الجبال يعش ابد الدهر بين الحفر

الصبر هو زاد العظماء والجد والكفاح شعارهم وأترككم لبيت يوجهه الشافعي لمن يعيش يحلم دون أن يعمل لما يحلم به شيئا:

و أبيت سهران الدجى وتبيته نوما وتبغي بعد ذاك لحاقي

وقد قالوا: إن العلم عزيز؛ إذا أعطيته كلك أعطاك بعضه. أقول فكيف إذا أعطيته بعضك، بل توافه وقتك، فما عساك أن تنال منه .

POINT DE VUE HISTORIQUE

***Il n'existe pas de réel dont le carré soit strictement négatif**. Pourtant dès le 16ème siècle les algébristes italiens dont le plus célèbre d'entre-eux Jérôme Cardan n'hésitent pas à utiliser le symbole $\sqrt{-a}$ lorsque a est un nombre réel strictement positif pour représenter le résultat de l'extraction impossible de la racine carrée du nombre négatif -a. Ils décrivent en détail les règles de cacul permettant de manipuler ces nouveaux nombres appelés par eux **"NOMBRES IMPOSSIBLES".En 1572 Bombelli montre à l'aide de la formule de Cardan que la racine x=4 de l'équation** $x^3-15x-4=0$ **peut s'écrire** $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=4$. A l'origine il s'agissait seulement de donner des racines à toutes les équations du second degré. Les résultats obtenus dans l'étude des équations du 3ème degré allaient familiariser les mathématiciens avec ces symboles et mettre en évidence leur rôle comme intermédiaire commode de calcul dans de nombreux cas. Pour ces raisons sommes toutes empiriques, les mathématiciens utilisaient avec une confiance croissante les nombres IMAGINAIRES depuis le début du 17ème siècle. Dès 1629 A.Girard soupçonnait que toute équation de degré n à n racines réelles ou complexes. Ce sont les mathématiciens du 19ème siècle qui ont construit les nombres complexes à partir des quantités connues et qui leur ont donné une "réalité mathématique".

***Extrait de l'encyclopédie Universalis**.