بكالوريات 2009 محلولة

(إعداد الأستاذ بواب نورالدين)

التمرين 1 : (5 نقاط) علوم تجريبية 2009

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$

① حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

② نضع : $z_1=1+i$ و $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أ- اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

ب- اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

جـ- استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

③ أ- n عدد طبيعي . عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا .

ب- احسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

الحل :

① حل المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ يكافئ $(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$

ومنه : $z-1-i=0$ أو $z^2-2z+4=0$

- من المساواة : $z-1-i=0$ نحصل على : $z=1+i$
- حل المعادلة $z^2-2z+4=0$:

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=-12=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$.

بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$z'=1+i\sqrt{3}$ و $z''=1-i\sqrt{3}$

إذن : المعادلة $P(z)=0$ تقبل ثلاثة حلول هي :

$z_0=1+i$ ، $z_1=1+i$ و $z_2=1-i\sqrt{3}$.

② أ- كتابة z_1 على الشكل الأسي :

$$z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

• كتابة z_2 على الشكل الأسي :

$$z_2=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب- كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$$

• كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي :

$$\left(e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}\right)\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

جـ- استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$:

لدينا : $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ولدينا : $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$

ومنه : $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$

وبالمطابقة نجد : $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

3 أ- تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا :

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقي معناه : $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=k\pi$ أي : $\frac{7n\pi}{12}=k\pi$

ومنه : $7n=12k$ وبالتالي : $n=12\times\frac{k}{7}$

وبوضع $\frac{k}{7}=k'$ نجد : $n=12k'$ (يكون العدد k' عددا طبيعيا إذا وفقط إذا كان العدد k مضاعفا للعدد 7) .

إذن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقي يكافئ $n=12k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$.

ب- حساب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$: لدينا : $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

ومنه :
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}e^{i\frac{7\times456\pi}{12}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}e^{266\pi i}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}=\left(\frac{1}{2}\right)^{228}$$

التمرين 2 : (4 نقاط) علوم تجريبية 2009

1 أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة .

ب- اكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

أ- احسب الأطوال AB ، AC و BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث : $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

جـ- احسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k

الحل :

1 أ- حل المعادلة $z^2-2z+4=0$:

- مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=-12=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$.
- بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $z_1=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=1+i\sqrt{3}$

ب- كتابة z_1 على الشكل الأسي :

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

• كتابة z_2 على الشكل الأسي : $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

② أ- حساب الأطوال AB ، AC و BC :

$$AB = |z_B - z_A| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \quad ، \quad AC = |z_C - z_A| = \left|\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}\right| = 3$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$$

• استنتاج طبيعة المثلث ABC :

نلاحظ أن : $AC^2 + AB^2 = AB^2$ وحسب مبرهنة فيثاغورث نستنتج أن المثلث ABC قائم في C .

ب- تعيين الطويلة وعمدة للعدد المركب Z :

لدينا : $Z = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{-4i\sqrt{3}} \times \dfrac{4i\sqrt{3}}{4i\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

ومنه : $|Z| = \left|\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \dfrac{1}{2}$ و $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right) = \dfrac{\pi}{3}$

وبالتالي : $Z = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

جـ- حساب Z^3 و Z^6 :

$$Z^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{3i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}e^{i\pi} = -\frac{1}{8} \quad \text{و} \quad Z^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 e^{6i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{64}e^{2i\pi} = \frac{1}{64}$$

• استنتاج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k :

$$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} e^{i\frac{\pi}{3}\times 3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} e^{i\pi k} = (-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \left(-\frac{1}{8}\right)^k$$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي k ، Z^{3k} عدد حقيقي .

التمرين 3 : (4 نقاط) رياضي 2009

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث $f(z)=\dfrac{z-i}{z-1}$

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(45+45i)f(z)=23+45i-2z$$

② لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أ- عيّن مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

ب- احسب العدد المركب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\dfrac{3\pi}{2}$

③ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : 1 ، i و z_0 .

أ- ما نوع المثلث ABC ؟

ب- عيّن النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

الحل :

① حل المعادلة $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$:

لدينا : $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

ومنه : $(45+45i)\times\dfrac{z-i}{z-1}=23+45i-2z$

ومنه : $(45+45i)(z-i)=(23+45i-2z)(z-1)$

وبعد النشر والتبسيط والترتيب نحصل على المعادلة : $2z^2+20z+68=0$

وبالقسمة على 2 نجد : $z^2+10z+34=0$ ... (E)

مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=-36=36i^2=(6i)^2$.

بما أن المميز هو عدد حقيقي سالب فإن هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما $z'=-5-3i$ و $z''=-5+3i$

إذن : المعادلة المعطاة تقبل حلين هما : $z'=-5-3i$ و $z''=-5+3i$.

② أ- تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما :

● طريقة أولى :

تذكير : التفسير الهندسي لـ $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|$ و $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)$:

إذا كانت A ، B و M صور الأعداد المركبة z_A ، z_B و z على الترتيب حيث $z\neq z_B$ فإن :

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=\dfrac{AM}{BM}\\ \arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\left(\overrightarrow{BM}\,;\,\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]\end{cases}$$

لتكن النقطتان A و B صورتي العددين المركبين $z_A=1$ و $z_B=i$ على الترتيب

لدينا : $f(z)=\dfrac{z-i}{z-1}=\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$

$f(z)$ حقيقي سالب تماما) يكافئ $\left(\arg(f(z))\equiv\pi\,[2\pi]\right.$ و $z\neq z_A$ و $\left.z\neq z_B\right)$

ومنه : $\left(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{BM}\right)=\pi+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ و $M\neq A$ و $M\neq B$.

أي : $\left(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}\right)=\pi+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ و $M\neq A$ و $M\neq B$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

- طريقة ثانية :

كتابة $f(z)$ على الشكل الجبري : نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$f(z)=\frac{z-i}{z-1}=\frac{x+iy-i}{x+iy-1}=\frac{x+i(y-1)}{(x-1)+iy}\times\frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$$=\frac{x^2+y^2-x-y+i(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}i$$

إذن : $f(z)=\dfrac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2}+\dfrac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2}i$

تذكير : ($f(z)$ حقيقي سالب تماما) يكافئ ($\mathrm{Im}(f(z))=0$ و $R\acute{e}(f(z))<0$)

ومنه : $\begin{cases} \dfrac{(1-x-y)}{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{x^2+y^2-x-y}{(x-1)^2+y^2} < 0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} -x-y+1= 0 \\ x^2+y^2-x-y<0 \\ (x-1)^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$

وأخيرا : $\begin{cases} -x-y+1= 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ (x\,;y)\neq(1;0) \end{cases}$

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $-x-y+1= 0$ هي المستقيم (AB) .

- مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ هي القرص الدائري (C) الذي مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- تقاطع (AB) و (C) هي القطعة المفتوحة $]AB[$.

إذن : مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا هي القطعة المستقيمة $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B (أي : القطعة المفتوحة $]AB[$) .

ب- حساب z_0 بحيث يكون $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$:

بما أن : $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$ فإن : $f(z_0)=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

وبحل المعادلة : $\frac{z_0-i}{z_0-1}=-i$ نجد : $\boxed{z_0=1+i}$

3 أ- طبيعة المثلث ABC :

$AB=|z_B-z_A|=|i-1|==\sqrt{2}$ ، $AC=|z_C-z_A|=|z_0-1|=|i|=1$

و $BC=|z_C-z_B|=|z_0-i|=|1|=1$.

نلاحظ أن : $AC^2+BC^2=AB^2$ و $AC=BC$ ، نستنتج أن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين .

- طريقة ثانية : يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بملاحظة أن :

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0$ و $CA=CB$.

● طريقة ثالثة : المثلث ABC متساوي الساقين وَ قائما في C لأن :

$\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$ و $\begin{cases} |i| = 1 \\ \arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} CB = CA \\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

($\left|\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = \dfrac{CA}{CB}$ وَ $\arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$)

ب- تعيين النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) :

معادلة (AB) هي : $-x - y + 1 = 0$ وبالتالي : $\overrightarrow{AB}(1;-1)$ شعاع توجيه له .

تكون النقطة D نظيرة للنقطة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان :

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ وَ منتصف القطعة $[CD]$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

وبحل الجملة : $\begin{cases} 1(x_D - 1) - 1(y_D - 1) = 0 \\ -\dfrac{x_C + x_D}{2} - \dfrac{y_C + y_D}{2} + 1 = 0 \end{cases}$ نحصل على : $\begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 0 \end{cases}$

إذن : $D(0;0)$ أي أن نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) هي النقطة O .

● استنتاج طبيعة الرباعي $ACBD$:

بما أن النقطتين C و D متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم (AB) فإن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

أي أن قطري الرباعي $ACBD$ متعامدان ، وزيادة على ذلك فهما متقايسان لأن :

$AB = CD = \sqrt{2}$. نستنتج أن الرباعي $ACBD$ هو مربع .

التمرين 4 : (4 نقاط) تقني رياضي 2009

① أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$ حيث z هو المجهول .

ب- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z :

$(\overline{z} + 3)^2 - 2(\overline{z} + 3) + 2 = 0$ حيث $\overline{z}$ مرافق z .

② في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،

نعتبر النقط A ، B و M التي لواحقها $1-i$ ، $1+i$ و z على الترتيب .

أ- عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}}$

ب- عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$

الحل :

① أ- حل المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$:

- حساب المميز : $\Delta=-4=4i^2=(2i)^2$.
- بما أن المميز عدد حقيقي سالب فإن المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$z_1=1+i$ و $z_2=1-i$

ب- استنتاج حلول المعادلة (E):

$$(\overline{z}+3)^2-2(\overline{z}+3)+2=0 \quad ... \quad (E)$$

بوضع $z=\overline{z}+3$ تصبح المعادلة (E) كما يلي : $z^2-2z+2=0$

وحسب السؤال السابق نستنتج أن : $\overline{z}+3=1+i$ أو $\overline{z}+3=1-i$

ومنه : $\overline{z}=-2+i$ أو $\overline{z}=-2-i$

إذن : (E) تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $z'=-2-i$ و $z''=-2+i$

2 أ- تعيين المجموعة (Γ) :

لدينا : $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ ومنه : $z-(1-i)=ke^{i\frac{5\pi}{4}}$

الشعاع $\overrightarrow{AM}$ هو صورة للعدد المركب $z-(1-i)$ ، وبفرض $\overrightarrow{u}$ صورة للعدد المركب $e^{i\frac{5\pi}{4}}$. نستنتج أن : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{u}$

إذن : (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{u}$ يحقق :

$(\overrightarrow{i};\overrightarrow{u})=\frac{5\pi}{4}$

ب- تعيين المجموعة (E) :

لدينا : $|z-1-i|=|z-1+i|$ ومنه : $|z-(1+i)|=|z-(1-i)|$

وبالتالي : $AM=BM$

إذن : (E) هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين 5 : (4 نقاط) تقني رياضي 2009

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0 \quad ... \quad (1)$.

2 ليكن العدد المركب z_1 حيث : $z_1=3-3i$.

أ- اكتب z_1 على الشكل الأسي .

ب- احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث : $z_1\times z_3=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

- استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

3 في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ ، نعتبر النقط :

A ، B و C التي لواحقها $3+3i$ ، $3-3i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب .

أ- عيّن العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز G_α .

ب- عيّن مجموعة النقط G_α لمّا يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$.

الحل :

1 حل المعادلة (1) :

- حساب المميز : $\Delta=-36=36i^2=(6i)^2$.
- بما أن المميز عدد حقيقي سالب فإن المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$z_1=3-3i$ و $z_2=3+3i$

2 أ- كتابة z_1 على الشكل الأسي :

$$z_1=3-3i=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=3\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ب- حساب الطويلة و عمدة للعدد z_3 :

تذكير : $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ و $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

لدينا : $z_1\times z_3=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=6\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

ومنه : $z_3=\frac{6\,e^{i\frac{\pi}{12}}}{z_1}=\frac{6\,e^{i\frac{\pi}{12}}}{3\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن : $z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

- استنتاج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$:

من المساواة : $z_1\times z_3=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ نستنتج أن :

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{6}z_1\times z_3=\frac{1}{6}\times(3-3i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

ومنه : $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

إذن : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3 أ- تعيين العدد الحقيقي α :

تذكير : لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي و α ، β و γ ثلاثة أعداد حقيقية . إذا كان $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

تسمى النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$.

تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا إذا وفقط إذا كان :

مجموع المعاملات غير معدوم أي : $1-1+\alpha\neq 0$ أي : $\alpha\neq 0$

إذن : $\boxed{\alpha\in\mathbb{R}^*}$ (أي : α عدد حقيقي غير معدوم) .

ب- تعيين مجموعة النقط G_α لمّا يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$:

تذكير بإحداثيات مرجح ثلاث نقط :

النقطة G_α معرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{OG_\alpha}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$

وبالتالي : $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

إذن : $G_\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\alpha\sqrt{6}+12}{2\alpha}\right)$ وبوضع : $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $y=\frac{\alpha\sqrt{6}+12}{2\alpha}$

نستنتج أنه ، عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$ ، فإن النقطة G_α تمسح المستقيم الذي معادلته $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

تمرين 6 : (Bac Nouvelle Calédonie Mars 2009 S)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها : $z_A=1$ ، $z_B=3+4i$ ، $z_C=2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ و $z_D=-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$.

1) أ- بيّن أن D هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

ب- استنتج أن النقطتين B و D تقعان على دائرة (Γ) مركزها A ويطلب تعيين نصف قطرها .

2) لتكن F صورة A بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته $\frac{3}{2}$.

أ- بيّن أن اللاحقة z_F للنقطة F هي $-2i$.

ب- بيّن أن النقطة F هي منتصف القطعة $[CD]$.

جـ- أثبت أن : $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ واستنتج الشكل الأسي للعدد $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.

- استنتج من الأسئلة السابقة أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$

3) اعتمادا على النقط A ، B و F ، أنشئ النقطتين C و D .

الحل :

1) أ- تبيان أن D هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$:

تذكير : العبارة المركبة للدوران الذي مركزه $M_0(z_0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $\boxed{z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)}$

وعليه فإن الكتابة المركبة لهذا الدوران هي : $z' - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$

إذا كانت B' صورة B بهذا الدوران فإن : $z_{B'} - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A)$

ومنه : $z_{B'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + 4i - 1) + 1$

$= -2\sqrt{3} + i\left(-2 + \sqrt{3}\right)$

إذن : $z_{B'} = z_D$ أي أن D هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

ب- استنتاج أن النقطتين B و D تقعان على دائرة (Γ) مركزها A :

بما أن D هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ فإن $AB = AD$

ولدينا : $AB = |z_B - z_A| = |3 + 4i - 1| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

نستنتج أن النقطتين B و D تقعان على الدائرة (Γ) التي مركزها النقطة A ونصف قطرها $2\sqrt{5}$.

2) أ- تبيان أن اللاحقة z_F للنقطة F هي $-2i$:

تذكير : العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $\boxed{z'-z_0=k(z-z_0)}$

وعليه فإن الكتابة المركبة لهذا التحاكي هي : $z'-z_B=\frac{3}{2}(z-z_B)$

ومنه : $z_F=\frac{3}{2}(z_A-z_B)+z_B=\frac{3}{2}(1-3-4i)+3+4i=-2i$

إذن : اللاحقة z_F للنقطة F هي $-2i$.

ب- تبيان أن النقطة F هي منتصف القطعة $[CD]$:

لاحقة منتصف القطعة $[CD]$ هو $\frac{z_C+z_D}{2}$

ولدينا : $\frac{z_C+z_D}{2}=\frac{2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)}{2}=-2i$

إذن : النقطة F هي منتصف القطعة $[CD]$.

جـ- إثبات أن $\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=-i\sqrt{3}$:

$$\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=\frac{2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)+2i}{1+2i}=\frac{2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=-i\sqrt{3}$$

- استنتاج الشكل الأسي للعدد $\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}$:

لدينا : $\left|-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$ و $\arg\left(-i\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{2}$. إذن : $\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$

- استنتاج أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$:

نعلم أن $\arg\left(\frac{z_C-z_F}{z_A-z_F}\right)=\left(\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ وبالتالي فإن المستقيمين (CF) و (AF) متعامدان .

وبما أن النقطة F هي منتصف القطعة $[CD]$ والنقط F ، C و D في استقامية فإن المستقيمين (CD) و (AF) متعامدان .

نستنتج أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$.

3) إنشاء النقطتين C و D :

نرسم الدائرة (Γ) التي مركزها النقطة A وتمرّ بالنقطة B .

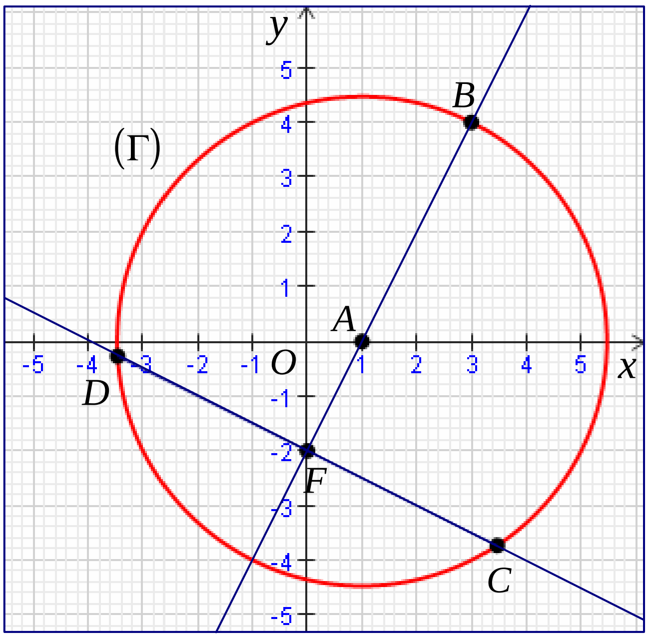
النقطتان D و C تقعان على الدائرة (Γ) التي مركزها A لأن النقطة A تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[CD]$ وبالتالي $AC = AD$.

نُعلم النقطة F ذات اللاحقة $-2i$.

نرسم المستقيم (Δ) العمودي على المستقيم (AF) والذي يمرّ بالنقطة F ، وبما أن (AF) هو محور القطعة $[CD]$ نستنتج أن النقطتين C و D تقعان على (Δ) .

النقطتان C و D هما نقطتا تقاطع الدائرة (Γ) والمستقيم (Δ) .

(C هي النقطة ذات الفاصلة الموجبة و D هي النقطة ذات الفاصلة السالبة)



تمرين 7 : (Bac Liban Juin 2009 S)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -3$.

الجزء الأول :

1) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي .

2) علم النقط A ، B و C .

3) بيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

الجزء الثاني :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{1}{3}iz^2$.

نسمي O' ، A' ، B' و C' صور النقط O ، A ، B و C على الترتيب بالتحويل f .

1) أ - عيّن الشكل الأسي لكل من لواحق النقط A' ، B' و C' .

ب- علم النقط A' ، B' و C' .

جـ- عيّن استقامية النقط O ، A و B' وكذلك النقط O ، B و A' .

2) لتكن G مركز المسافات المتساوية للنقط O ، A ، B و C . نسمي G' صورة النقطة G بالتحويل f .

أ- عيّن لاحقتي النقطتين G و G' .

ب- هل النقطة G' هي مركز المسافات المتساوية للنقط O' ، A' ، B' و C' ؟

3) بيّن أنه إذا انتمت M إلى المستقيم (AB) فإن M' تنتمي إلى القطع المكافئ الذي معادلته $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}$ (لا يطلب رسم هذا القطع المكافئ) .

الحل :

الجزء الأول :

1) كتابة z_A على الشكل الأسي :

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه : $|z_A|=\left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

وبالتالي : $z_A=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

- كتابة z_B على الشكل الأسي :

لدينا : $z_B=\overline{z_A}$ ومنه : $|z_B|=|z_A|$ وَ $\arg(z_B)=-\arg(z_A)[2\pi]$

وبالتالي : $|z_B|=\sqrt{3}$ وَ $\arg(z_B)=-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

إذن : $z_B=\sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2) تعليم النقط A ، B و C : انظر الشكل .

3) تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

$$AB = |z_B - z_A| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left| -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

ومنه : $AB = AC = BC$

إذن : المثلث ABC متقايس الأضلاع .

الجزء الثاني :

1) أ - تعيين الشكل الأسي لكل من لواحق النقط A' ، B' و C' :

لدينا : $z' = \frac{1}{3}iz^2$ ومنه :

- $z_{A'} = \frac{1}{3}i z_A^{\,2} = \frac{1}{3}i\left(\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = i\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$
$= e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

- $z_{B'} = \frac{1}{3}i z_B^{\,2} = \frac{1}{3}i\left(\sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = i\,e^{-i\frac{5\pi}{3}}$
$= e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

- $z_{C'} = \frac{1}{3}i z_C^{\,2} = \frac{1}{3}i(-3)^2 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب- تعليم النقط A' ، B' و C' : انظر الشكل .

جـ- تعيين استقامية النقط O ، A و B' :

لدينا : $z_A = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ومنه : $Z_{\overrightarrow{OA}} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

ولدينا : $z_{B'} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ومنه : $Z_{\overrightarrow{OB'}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

ومنه : $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{OB'}$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB'}$ مرتبطين خطيا .

إذن : النقط O ، A و B' في استقامية .

- تعيين استقامية النقط O ، B و A' :

لدينا : $z_B = \sqrt{3}\ e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ ومنه : $Z_{\overrightarrow{OB}} = \sqrt{3}\ e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

ولدينا : $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه : $Z_{\overrightarrow{A'O}} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

ومنه : $\overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\ \overrightarrow{A'O}$ وبالتالي فإن الشعاعين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{A'O}$ مرتبطين خطيا .

إذن : النقط O ، B و A' في استقامية .

2) أ- تعيين لاحقة النقطة G :

تذكير : إذا كانت G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma),(D;\lambda)\}$ مع $\alpha+\beta+\gamma+\lambda \neq 0$ فإن لاحقة النقطة G هي :

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C + \lambda z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}$$

ومنه : $z_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B + z_C}{1+1+1+1} = \dots = -\dfrac{3}{2}$

- تعيين لاحقة النقطة G' :

لدينا : $z' = \frac{1}{3} i z^2$ ومنه : $z_{G'} = \frac{1}{3} i z_G^2 = \frac{1}{3} i \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} i$

ب- هل النقطة G' هي مركز المسافات المتساوية للنقط O' ، A' ، B' و C' ؟

لتكن I هي مركز المسافات المتساوية للنقط O' ، A' ، B' و C'

ومنه : $z_I = \dfrac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{1+1+1+1} = \dots = i$

وبما أن $i \neq \frac{3}{4} i$ أي أن النقطة I تختلف عن النقطة G' نستنتج أن G' ليست هي مركز المسافات المتساوية للنقط O' ، A' ، B' و C' .

3) تبيان أنه إذا انتمت M إلى المستقيم (AB) فإن M' تنتمي إلى القطع المكافئ الذي معادلته : $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$:

M تنتمي إلى المستقيم (AB) . (AB) مستقيم عمودي يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{3}{2}$ ، وبالتالي فإن فاصلة M وترتيبها متغيّر .

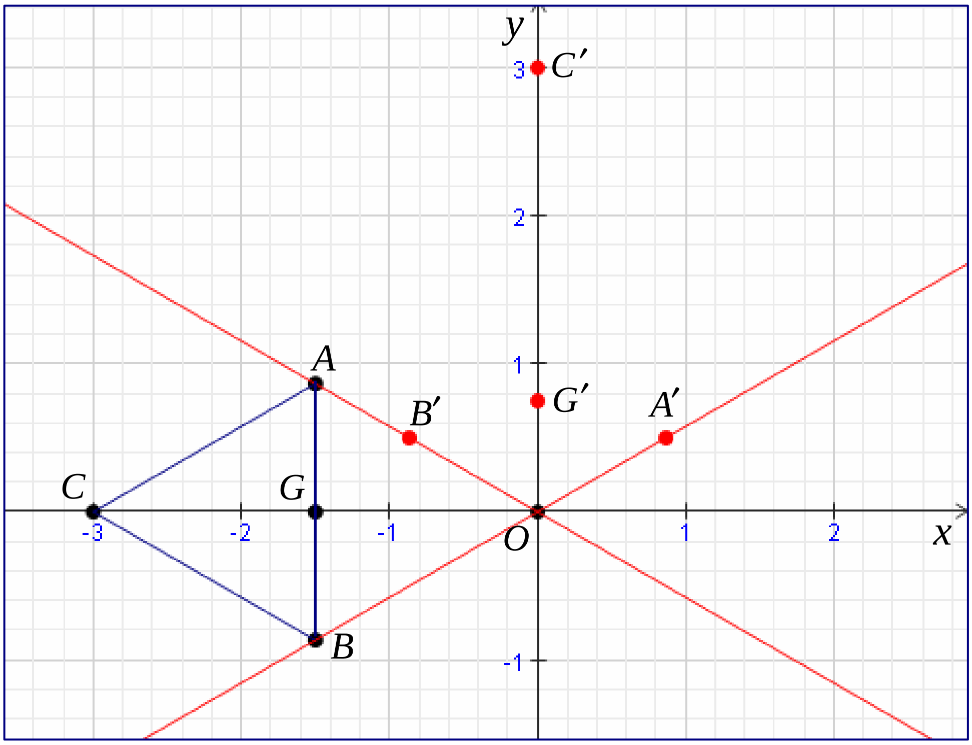
إذن : لاحقة النقطة M هو العدد المركب $z_M = -\frac{3}{2} + ix$ حيث x عدد حقيقي .

من المساواة : $z'=\frac{1}{3}iz^2$ نحصل على :

$$z_{M'}=\frac{1}{3}\,i\,{z_M}^2=\frac{1}{3}i\left(-\frac{3}{2}+i\,x\right)^2=\dots=x+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}x^2\right)i$$

ومنه : $x_{M'}=x$ وَ $y_{M'}=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}x^2$.

إذن : إذا انتمت M إلى المستقيم (AB) فإن M' تنتمي إلى القطع المكافئ الذي معادلته $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}$.



تمرين 8 : (Bac Polynésie juin 2009 STI)

1) ليكن p كثير الحدود المعرف من أجل كل عدد مركب z كما يلي :

$$p(z)=z^3-7z^2+20z-24$$

أ- تحقق أن $p(3)=0$.

ب- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z :

$$p(z)=(z-3)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$$

جـ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B وَ C التي لواحقها $a=3$ ، $b=2+2i$ وَ $c=2-2i$ على الترتيب .

أ- علم النقط A ، B وَ C .

ب- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين b و c .

جـ- أثبت أن المثلث OBC قائم ومتساوي الساقين .

3) نعتبر المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z-3|=\sqrt{5}$

أ- بيّن أن النقطتين B وَ C تنتميان إلى المجموعة (E) .

ب- عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (E) وأنشئها في نفس المعلم السابق .

تمرين 9 (بكالوريا 2008 . الشعبة : رياضيات)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب .

1 اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه O ويحوّل A إلى B ثم عيّن زاويته ونسبته .

2 نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0=A$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $A_{n+1}=S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

أ- أنشئ في المستوي المركب النقط A_0، A_1 و A_2 .

ب- برهن أن : $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

جـ- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى (OA_1)

3 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدّها الأول u_0 أساسها q .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل :

1 كتابة العبارة المركبة للتشابه S :

عبارة التشابه المباشر S من الشكل $z'=az+b$.

لدينا : $\begin{cases} S(O)=O \\ S(A)=B \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} z_O=az_O+b \\ z_B=az_A+b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a=i\sqrt{3} \\ b=0 \end{cases}$

إذن : العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'=\sqrt{3}\,iz$

• عناصر التشابه المباشر S : مركزه O، نسبته $k=\sqrt{3}$ وزاويته $\theta\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

ملاحظة : يمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة باستعمال التعريف التالي :

العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$، نسبته k $(k>0)$ وزاويته

θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

وبالتالي نحصل على : $z'=i\sqrt{3}\,z=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z$

2 أ- إنشاء النقط A_0 ، A_1 و A_2 : انظر الشكل

من العلاقة $A_{n+1}=S(A_n)$ نستنتج أن :

$A_1=S(A_0)$ ومنه : $z_1=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z_0=\sqrt{3}+3i$. إذن : $A_1(\sqrt{3};3)$

$A_2=S(A_1)$ ومنه : $z_2=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z_1=-3\sqrt{3}+3i$. إذن : $A_2(-3\sqrt{3};3)$

ب- البرهان أن $z_n=2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$:

من العلاقة $A_{n+1}=S(A_n)$ نستنتج أن :

$$z_1=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z_0$$

$$z_2=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z_1=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\times\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z_0=(\sqrt{3})^2 e^{i\frac{2\pi}{2}}z_0$$

$$z_3=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z_2=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\times(\sqrt{3})^2 e^{i\frac{2\pi}{2}}z_0=(\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{2}}z_0$$

....

ومنه التعميم التالي : $z_n=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z_{n-1}=(\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{2}}z_0$

ومن الخاصية : $e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ وعلما أن : $z_0=\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

نستنتج أن : $z_n=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}z_{n-1}=(\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{2}}z_0=(\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{2}}\times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

إذن : $z_n=(\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{2}}\times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

طريقة 2 : يمكن استعمال طريقة أخرى وذلك باستخدام النتيجة التالية :
من تعريف مركب التشابهات نستنتج أنه إذا كان S تشابها مباشرا مركزه النقطة O نسبته k وزاويته θ فإن مركب n مرة التشابه S هو تشابه مباشر له نفس المركز O ، نسبته k^n وزاويته $n\theta$.

طريقة 3 : يمكن استعمال البرهان بالتراجع للبرهان أن $z_n=2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

جـ- تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n :

لاحقة A_1 هي $z_1=\sqrt{3}+3i$ وبالتالي فإن معادلة المستقيم (OA_1) هي $y=\sqrt{3}x$

[$A_n \in (OA_1)$] يكافئ [$\arg(z_n)=\frac{\pi}{3}+k\pi$]

ومنه : $\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k\pi$ نستنتج أن : $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$

إذن : تنتمي النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1) إذا كان n عددا طبيعيا فرديا

3 أ- إثبات أن (u_n) متتالية هندسية :

تذكير : (u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=q\times u_n$

لدينا : $u_n=A_nA_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}$

حسب الخاصة المميزة للتشابه المباشر S فإن صورة الثنائية النقطية $(A_n\,,A_{n+1})$

هي ثنائية نقطية $(A_{n+1}\,,A_{n+2})$ بحيث : $A_{n+1}A_{n+2}=\sqrt{3}A_nA_{n+1}$

وبالتالي : $u_{n+1}=\sqrt{3}\,u_n$

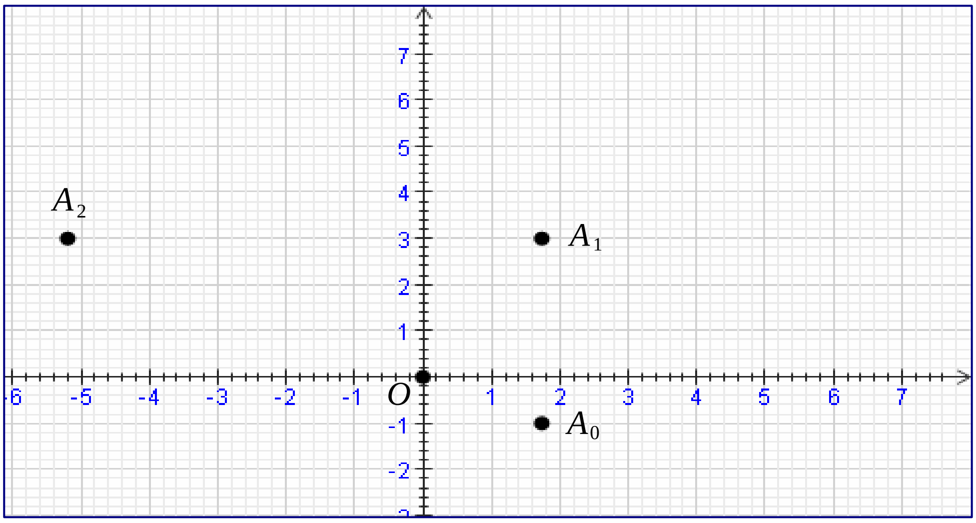
إذن : (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول $u_0=A_0A_1=4$ وأساسها $q=\sqrt{3}$

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $u_n=u_0\times q^n=4\left(\sqrt{3}\right)^n$

جـ- حساب المجموع S_n :

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-2\left(1+\sqrt{3}\right)\left[1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right]$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$: نعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}=+\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$



تمرين 10 (بكالوريا 2008 . الشعبة : تقني رياضي)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي .

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$

- اكتب الحلين على الشكل الأسي .

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،
نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين .
- عيّن θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع .

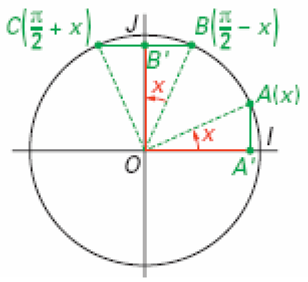
الحل :

1 حل المعادلة :

مميز المعادلة هو : $\Delta=4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}=\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$

حلا المعادلة هما : $z_1=r\sin\frac{\theta}{2}+ir\cos\frac{\theta}{2}$ و $z_2=-r\sin\frac{\theta}{2}+ir\cos\frac{\theta}{2}$

- الشكل الأسي لكل من z_1 و z_2 :



تذكير : $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases}$

- الشكل الأسي لـ z_1 :

$$z_1=r\sin\frac{\theta}{2}+ir\cos\frac{\theta}{2}=r\left(\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)=r\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

- الشكل الأسي لـ z_2 :

$$z_2=-r\sin\frac{\theta}{2}+ir\cos\frac{\theta}{2}=r\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right)=r\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

2 تعيين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع :

تذكير : يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع إذا وفقط إذا كان :

$$\left|\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right| = 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} \arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{أو} \\ \arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$$

لدينا : $\left|\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right| = \left|\dfrac{z_B}{z_A}\right| = \dfrac{r}{r} = 1$

ولدينا : $\arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}\right) - \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \theta\,[2\pi]$

إذن : المثلث OAB متقايس الأضلاع من أجل $\theta \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ أو $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

تمرين 11 (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

1) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 6z + 34 = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،
نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :
$a = 3 + 5i$ ، $b = 3 - 5i$ و $c = 7 + 3i$
ليكن z لاحقة النقطة M من المستوي و z' لاحقة النقطة M' صورة M بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $4 - 2i$.

أ- بيّن أن : $z' = z + 4 - 2i$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T .

ب- بيّن أن : $\dfrac{b-c}{a-c} = 2i$.

جـ- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC = 2AC$

الحل :

1) حلا $z^2 - 6z + 34 = 0$ هما : $z_1 = 3 - 5i$ و $z_2 = 3 + 5i$

2) أ- من تعريف الانسحاب : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ وبالانتقال إلى تساوي اللاحقتين نجد :
$z' - z = 4 - 2i$ ومنه : $z' = z + 4 - 2i$

ب- $\dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)} = \dfrac{-4-8i}{-4+2i} \times \dfrac{-4-2i}{-4-2i} = \dfrac{40i}{20} = 2i$

النقطة C هي صورة للنقطة A بالانسحاب T معناه : $z_C = z_A + 4 - 2i$

جـ- استنتاج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC = 2AC$:

من المساواة $\frac{b-c}{a-c}=2i$ نستنتج أن : $(\overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{BC})=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

من المساواة $\frac{b-c}{a-c}=2i$ نستنتج أن : $\frac{|b-c|}{|a-c|}=|2i|$ أي : $\frac{BC}{AC}=2$

إذن : المثلث ABC قائم في النقطة C و $BC=2AC$.

تمرين 12 (Bac Amérique du Nord juin 2008)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
(وحدة الطول $4\,cm$)

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $z_A=2+i$ والدائرة (Γ) التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

1 ارسم شكلا على أن يتم إكماله خلال مراحل الإجابة .

2 أ- عيّن لواحق نقط تقاطع (Γ) و المحور $(O;\vec{u})$.

ب- لتكن B و C النقطتين اللتين لاحقتاهما $z_B=1$ و $z_C=3$.

- عيّن z_D لاحقة النقطة D ، نظيرة النقطة B قطريا على الدائرة (Γ) .

3 لتكن M النقطة ذات اللاحقة $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$.

أ- احسب العدد المركب $\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$.

ب- فسّر هندسيا عمدة للعدد المركب $\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4 نرمز بـ (Γ') للدائرة ذات القطر $[AB]$. المستقيم (BM) يقطع ثانية الدائرة (Γ') في نقطة N .

أ- أثبت أن المستقيمين (DM) و (AN) متوازيان .

ب- عيّن لاحقة النقطة N .

5 نسمي M' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

أ- عيّن لاحقة النقطة M' .

ب- أثبت أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ') .

الحل :

1 الرسم : انظر الشكل

2 أ- تعيين لواحق نقط تقاطع (Γ) و المحور $(O;\vec{u})$:

معادلة الدائرة (Γ) : $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ ، معادلة $(O;\vec{u})$ هي : $y=0$

وبحل الجملة $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=2\\ y=0\end{cases}$ نحصل على $x=1$ أو $x=3$

إذن : محور الفواصل يقطع الدائرة (Γ) في نقطتين لاحقتاهما 1 و 3 .

طريقة أخرى :

لتكن M نقطة من المحور $(O;\vec{u})$. لاحقة M هي $z=x$ حيث $x\in\mathbb{R}$.

تكون M نقطة من (Γ) إذا كان : $AM=\sqrt{2}$ ومنه : $|z-z_A|=\sqrt{2}$

وبالتالي : $\sqrt{(x-2)^2+(-1)^2}=2$. إذن : $x=1$ أو $x=3$

ب- تعيين z_D لاحقة النقطة D :

النقطة D هي نظيرة النقطة B قطريا على الدائرة (Γ) ، وبالتالي فإن النقطة A هي منتصف القطعة $[BD]$.

لدينا : $z_A=\dfrac{z_B+z_D}{2}$ ومنه : $z_D=2z_A-z_B=3+2i$

3 أ- حساب $\dfrac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$: $\dfrac{z_D-z_M}{z_B-z_M}=\dfrac{3+2i-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i}{1-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i}=\dots=2i$

ب- التفسير الهندسي لعمدة $\dfrac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$: $\arg\dfrac{z_D-z_M}{z_B-z_M}=(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MD})$

الاستنتاج : لدينا $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MD})=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ وبالتالي فإن المثلث MBD قائم في M . نستنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[BD]$

وبما أن D هي نظيرة B قطريا على الدائرة (Γ) فإن النقطة M تنتمي إلى (Γ)

4 أ- إثبات أن المستقيمين (DM) و (AN) متوازيان :

لدينا N نقطة من (Γ') وبالتالي فإن المثلث ABN قائم في N ، نستنتج أن المستقيمين (AN) و (BN) متعامدان .

بما أن N نقطة من المستقيم (BN) فإن المستقيمين (AN) و (BM) متعامدان بالإضافة إلى ذلك المستقيمان (BM) و (DM) متعامدان لأن المثلث MBD قائم في M . المستقيم (BM) عمودي على كل من المستقيمين (DM) و (AN)

إذن : المستقيمان (DM) و (AN) متوازيان .

ب- تعيين لاحقة النقطة N :
في المثلث BDM : A هي منتصف القطعة $[BD]$ ، N نقطة من القطعة $[BM]$، (DM) و (AN) متوازيان . نستنتج أن النقطة N منتصف القطعة $[BM]$.

ومنه : $z_N = \frac{z_B + z_M}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

5 أ- تعيين لاحقة النقطة M' :

النقطة M' هي صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $z_{M'} - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_B)$. إذن : $z_{M'} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$

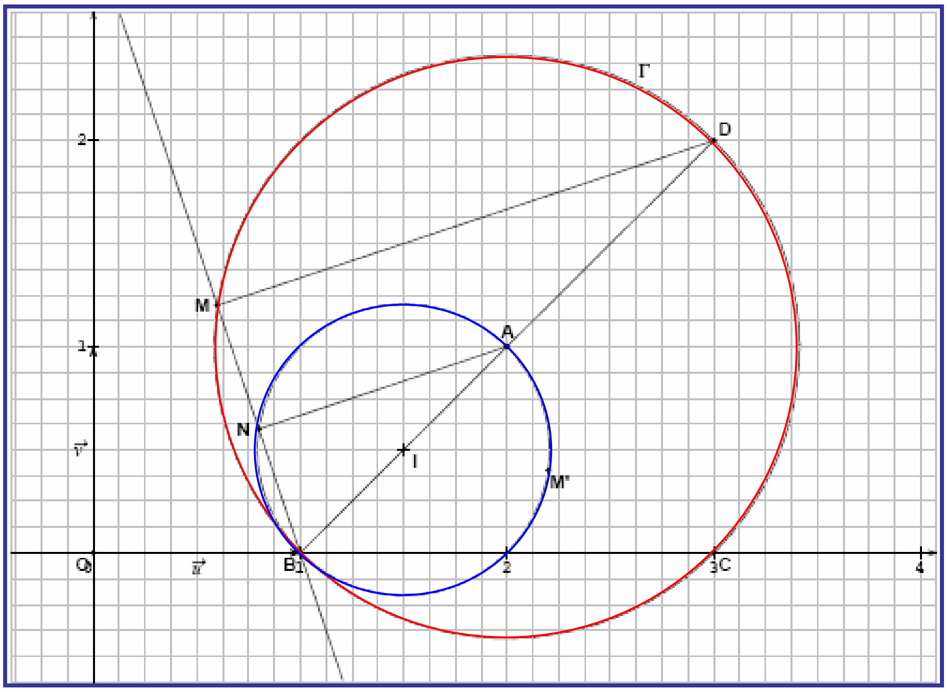
ب- إثبات أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ') :

لدينا : $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{2}$. نستنتج أن نصف قطر الدائرة (Γ') هو $\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذا كانت I منتصف القطعة $[AB]$ فإن لاحقتها $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

لنحسب IM' : $IM' = |z_{M'} - z_I| = \left|\frac{7}{10} - \frac{1}{10}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة I ونصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ أي (Γ')



تمرين 13 (Bac Pondichéry Avril 2008)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=-\sqrt{3}-i \text{ ، } z_B=1-i\sqrt{3} \text{ ، } z_C=\sqrt{3}+i \text{ و } z_D=-1+i\sqrt{3}$$

① أ- عيّن الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة z_A ، z_B ، z_C و z_D .

ب- أنشئ ، باستعمال المسطرة والمدور ، النقط : A ، B ، C و D .

جـ- عيّن منتصف القطعة $[AC]$ ، ومنتصف القطعة $[BD]$.

د- احسب $\dfrac{z_B}{z_A}$. استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

② نعتبر التحويل النقطي g المعرف بالكتابة المركبة : $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+2$

أ- عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل g .

ب- أنشئ ، باستعمال المسطرة والمدور ، النقط E ، F و J صور النقط A ، C و O على الترتيب بالتشابه g .

جـ- ما ذا تستنتج بالنسبة للنقط E ، F و J ؟

الحل :

① أ- تعيين الطويلة وعمدة لكل من z_A ، z_B ، z_C و z_D :

- $z_A=-\sqrt{3}-i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

- $z_B=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

- $z_C=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

- $z_D=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ب- إنشاء النقط A ، B ، C و D : انظر الشكل

لدينا : $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=2$ وبالتالي فإن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة (c) التي مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 .

ترتيب النقطة A هو -1 وبالتالي فإن A تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y=-1$
فاصلة النقطة B هو 1 وبالتالي فإن B تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $x=1$
ترتيب النقطة C هو 1 وبالتالي فإن C تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y=1$
فاصلة النقطة D هو -1 وبالتالي فإن D تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $x=-1$
لإنشاء النقط A ، B ، C و D ، نرسم الدائرة (c) باستعمال المدور ونرسم المستقيمات الأربعة باستعمال المسطرة .
مثلا : A (ذات الفاصلة السالبة) هي نقطة تقاطع الدائرة (c) مع المستقيم الذي معادلته $y=-1$.

جـ- تعيين منتصف القطعة $[AC]$:

لاحقة منتصف $[AC]$ هي $\frac{z_A+z_C}{2}=0$ أي أن منتصف $[AC]$ هي النقطة O

• تعيين منتصف القطعة $[BD]$:

لاحقة منتصف $[BD]$ هي $\frac{z_B+z_D}{2}=0$ أي أن منتصف $[AC]$ هي النقطة O

د- حساب $\frac{z_B}{z_A}$: $\frac{z_B}{z_A}=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}\times e^{+i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

• استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:
من السؤال 1 الفرع ب نستنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (القطران لهما نفس المنتصف)

ولدينا : $\begin{cases}\frac{|z_B|}{|z_A|}=|i| \\ \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\arg(i)\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}OB=OA \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

إذن : قطرا الرباعي $ABCD$ متعامدان ومتناصفان ، نستنتج أن $ABCD$ مربع .

2 أ- تعيين العناصر المميزة للتحويل g : عبارة g من الشكل $z'=az+b$

لدينا : $|a|=\left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ ومنه : التحويل g هو دوران .

• تعيين الزاوية θ : $\theta = \arg\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}$

• تعيين المركز Ω : لاحقة النقطة Ω هي العدد المركب $\omega = \frac{b}{1-a} = 1 - i\sqrt{3}$

ب- إنشاء E ، F و J : انظر الشكل

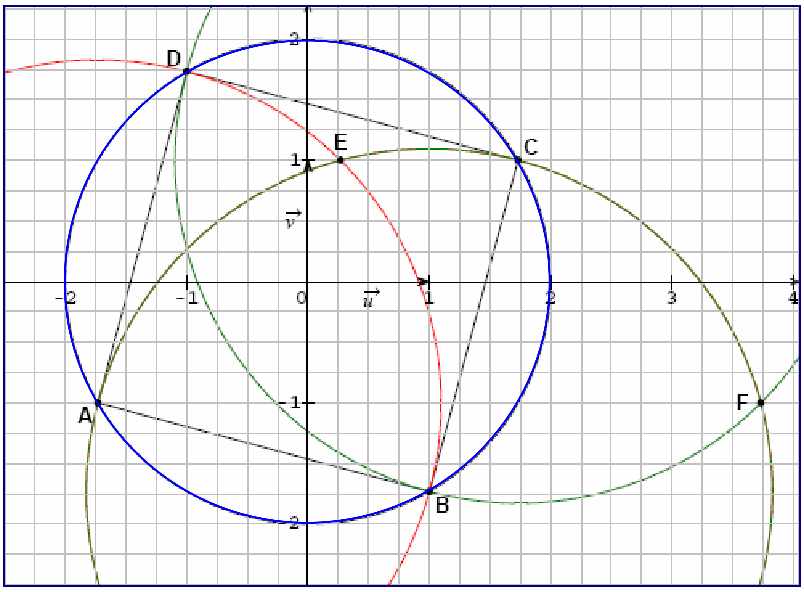
لدينا : $E = r(A)$ ومنه : $BA = BE$. نستنتج أن النقطة E تنتمي إلى الدائرة (c_1) التي مركزها B وتمرّ بالنقطة A .

ولدينا : $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE}) = -\frac{\pi}{3}$ و $BA = BE$ وبالتالي فإن المثلث BAE متقايس الأضلاع ومنه : $AE = AB$. نستنتج أن النقطة E تنتمي إلى الدائرة (c_2) التي مركزها A وتمرّ بالنقطة B.

لإنشاء النقطة E ، نقوم برسم الدائرتين (c_1) و (c_2) وذلك باستعمال المدور .
هاتان الدائرتان تتقاطعان في نقطتين ، النقطة E هي النقطة التي تحقق :
$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE}) = -\frac{\pi}{3}$

• بطريقة مماثلة نقوم بإنشاء النقطتين F و J .

جـ الاستنتاج : النقط E ، F و J على استقامة واحدة .



تمرين 14 (Bac Polynésie juin 2008)

① حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2-6z+13=0$.

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $a=3-2i$ ، $b=3+2i$ و $c=4i$.

أ- علم النقط A ، B و C .

ب- أثبت أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

جـ- عيّن لاحقة النقطة Ω ، مركز متوازي الأضلاع $OABC$.

③ عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$$

④ لتكن M نقطة من المستقيم (AB) . يرمز β إلى الجزء التخيلي للاحقة M .

نسمي N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- بيّن أن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.

ب- كيف نختار β بحيث تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) .

الحل :

① حل المعادلة $z^2-6z+13=0$:

لدينا : $[\ z^2-6z+13=0\ ]$ تكافئ $[\ (z^2-6z+9)+4=0\ ]$

ومنه : $(z-3)^2=-4=4i^2=(2i)^2$ نستنتج أن $z-3=-2i$ أو $z-3=2i$

إذن : حلا المعادلة المعطاة هما : $z=3-2i$ و $z=3+2i$

② أ- تعليم النقط A ، B و C : انظر الشكل

ب- إثبات أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

لدينا : $Z_{\overrightarrow{OC}}=Z_C=4i$ و $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_B-Z_A=(3+2i)-(3-2i)=4i$

ومنه : $Z_{\overrightarrow{OC}}=Z_{\overrightarrow{AB}}$ وبالتالي : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

إذن : الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع

جـ- تعيين لاحقة النقطة Ω : $z_\Omega=\frac{z_O+z_B}{2}=\frac{1}{2}z_B=\frac{3}{2}+i$

③ تعيين المجموعة (E) :

لدينا : $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{M\Omega}$ وبالتالي :

$M\in(E)$ يكافئ $\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$ ومنه : $4\Omega M=12$

إذن : (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة Ω ونصف قطرها 3 .

④ أ- إثبات أن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$:

معادلة (AB) هي $x=3$ وبالتالي فإن لاحقة النقطة M هي $z_M=3+i\beta$

الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ معرف بالعبارة المركبة :

$z'-z_\Omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_\Omega)$ ومنه : $z_N-z_\Omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M-z_\Omega)$

وبالتالي فإن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.

ب- تعيين β :

معادلة (BC) هي $2x+3y-12=0$

$[N\in(BC)]$ يكافئ $[\ 2x_N+3y_N-12=0\ ]$ ومنه : $\beta=\frac{1}{4}$