

التمرين 01

-1- لتكن الأعداد المركبة $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$, $Z = \frac{z_1}{z_2}$

أ- أكتب Z على الشكل الجبري

ب- أكتب Z على الشكل الأسني

ت- أكتب Z على شكله المثلثي

ثـ- استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$

جـ- المستوى منسوب إلى معلم متواحد ومتجانس $(0, i, j)$ (نأخذ $2.5cm$ كوحدة بيلية)

حـ- لتكن C, B, A نقط المستوى والتي لواحقها على الترتيب Z, z_1, z_2

دـ- أكتب العدد المركب Z^{2010} على شكله الجيري

هـ- عين قيم n بحيث يكون Z^n حقيقيا

وـ- عين n حتى يكون Z^n تخليا صرفا

التمرين 02

المستوى منسوب إلى معلم متواحد ومتجانس $(0, i, j)$ و M نقطة من هذا المستوى إحداثياها (x, y)

P // $P(Z) = Z^2 + 4\bar{Z} - 4 + 2y^2$ والمعروف بالعبرة:

حيث: \bar{Z} هو مرافق العدد المركب Z

1- بعد وضع $Z = x + iy$, أكتب $P(Z)$ على الشكل الجيري

2- عين مجموعة النقط M حتى يكون :

أـ- $P(Z)$ تخليا صرفا بـ- $P(Z)$ حقيقيا

II- تعتبر النقط C, B, A ذات اللواحق Z_C, Z_B, Z_A على الترتيب حيث:

$$Z_C = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}, Z_B = 3 + i\sqrt{3}, Z_A = 2$$

1- أكتب Z_B على الشكل الأسني و Z_C على الشكل الجيري

2- مثل النقط B, A , في المعلم المعطى

3- عن عددة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ، ملما يمكن القول عن النقاط C, B, A

4- بين أن العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{1431}$ هو عدد حقيقي مالب.

التمرين 03

عدد مركب حيث : $Z = -3 + 3i$

i: العدد المركب الذي طولته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عددة له

1- أكتب Z على شكله المثلثي ثم الأسني

2- أوجد العدد المركب Z' بحيث يكون $Z \times Z' = [6\sqrt{2}, \frac{17\pi}{12}]$ ثم أكتب Z' على الشكل المثلثي
وامتنع $\sin \frac{17\pi}{2}$ و $\cos \frac{17\pi}{2}$

3- نضع الآن y, x عدداً حقيقياً

ما هي مجموعة النقط (x, y) في المستوى بحيث يكون $|z - 1 + i| = 3$

التمرين 04

كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$ و عدد مركب

1- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $P(Z) = 0$

2- نضع: $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i, Z_1 = 1 + i$

أ- أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسني

ب- أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الأسني

ج- امتنع القيمة المضبوطة لكل من $\sin \frac{7\pi}{12}$ و $\cos \frac{7\pi}{12}$

3- عدد طبيعي. عن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقياً

ب- أحسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$

التمرين 05

المستوي منسوب إلى معلم متعمد ومتجانس $(j, t, 0)$

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$

2- نسمي Z_1, Z_2 حلّي هذه المعادلة

أ- أكتب العددين Z_1 و Z_2 على الشكل الأسمى.

ب- C, B, A هي النقاط من المستوى التي لواحقها على الترتيب:

$$Z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}) \quad ; \quad Z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad Z_A = 1 - i\sqrt{3}$$

(i) يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $-1 - i^2 =$

أحسب الأطوال BC ; AC ; AB ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- جد الطولية وعمدة للعدد المركب Z حيث:

$$Z = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$$

د- أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

التمرين 06

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: (1)

2- ليكن العدد المركب $Z_1 = 3 - 3i$ حيث

(i) هو العدد المركب الذي طولته 1 و عمدة له $\frac{\pi}{2}$

3- أكتب Z_1 على الشكل الأسمى.

ب- أحسب طولية العدد Z_3 وعمدة له حيث

. $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$ استنتاج قيمتي

3- نعتبر في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمحاجس ($O; \vec{u}; \vec{v}$) النقط B, A, C ذات اللاحقات

$\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$; $3 - 3i$; $3 + 3i$ على الترتيب.

أ- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المعقولة $\{(A; 1)(B; -1)(C; \alpha)\}$

مرجحاً نرمز له بالرمز G_α .

ب- عين مجموعة النقط G_α لما يتغير α في \mathbb{R}^* .

التمرين 07

المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد ومحاجس (O, \vec{U}, \vec{V})

1/ حل في \mathbb{C} المعادلة $0 = Z^2 - 8\sqrt{3}Z + 64$

12/ لتكن النقاطين A و B من المستوى لواحتها: $Z_B = -4\sqrt{3} + 4i$ ، $Z_A = -4\sqrt{3} - 4i$ أكتب كل من اللاحقين على الشكل الأصلي

3/ عين لاحقة G مرجع الجملة $\{(A, 1), (B, -1), (o, 1)\}$

4/ عين طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M التي لاحتها Z وتحقق

$$|Z|^2 + |Z - Z_A|^2 - |Z - Z_B|^2 = 17$$

التمرين 08

1/ نعتبر في \mathbb{C} مجموعة الأعداد المركبة المعللة (E) ذات المجهول Z بحيث:

$$(E) = Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0$$

أ- تحقق أن 8 حل لهذه المعللة . عين $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ بحيث من أجل كل عدد مركب

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z - 8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \delta)$$

ب- حل المعللة (E)

2/ معلم متعمد ومتجانس نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق

$$Z_A = 2 - 2i\sqrt{3}; Z_B = 2 + 2i\sqrt{3}; Z_C = 8$$

أ- أحسب الطولية وعمنة كل من A, B, C

ب- أحسب العدد المركب $q = \frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$ عين طولية وعمنة q ، استنتج طبيعة المثلث ABC

عين احداثيات D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

ج- عين مرجع للنقط المثلثة $(A, 1), (B, 1), (C, 2)$

لتكن D مرجع هذه الجملة ، مثل

د- عين M مجموعة النقط من المستوى بحيث $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$

أرسم M

التمرين 09

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعللة: $(Z - 3 + 2i)(Z^2 + 6z + 10) = 0$

(ن فهو العدد المركب الذي طوليته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمنة له)

2/ علم في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعمد والمتجانس (O, \vec{u}, \vec{j}) النقط D, C, A ذات اللواحق: $Z_D = -3 - i$ ، $Z_C = 3 - 2i$ ، $Z_A = 3 - 2i$ على الترتيب

$$\begin{cases} \arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - 1) + \frac{\pi}{2} \\ |z - 3 + 2i| = |z - 1| \end{cases} \quad Z / 3$$

ـ عدد مركب يتحقق الجملة

ـ أـ بين أن الجملة تكافئ $\frac{z-3+2i}{z-1}$ ثم عين قيمة Z

ـ بـ النقطة التي لاحتها $Z_b = 3$ ماهي طبيعة الرباعي $ABCD$ تتحقق أن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

ـ جـ لتكن J النقطة التي لاحتها Z_J حيث: $Z_J = 1 - 2i$

ـ أكتب على الشكل الأسي العدد المركب Z حيث: $Z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_J}$

ـ تتحقق أن: $\overline{AB} = \overline{JI}$ ماهي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين 10

ـ 1ـ عدد حقيقي

ـ عين طولية وعدة الأعداد المركبة

$$z_2 = -\cos\theta + i \sin\theta \quad z_1 = -e^{i\theta} \quad z_3 = \sin\theta - i \cos\theta$$

ـ 2ـ نعتبر العدد المركب z حيث: $z = 2 \sin^2\alpha + i \sin 2\alpha$

ـ حيث: $\alpha \in [0, \pi]$

ـ 1ـ أكتب z على الشكل المثلثي والأسي

ـ 2ـ عين مجموعة النقط $m(x, y)$ لما يتغير α على $[0; \pi]$

التمرين 11

ـ 1ـ عدد حقيقي حيث $\alpha \in [0, \pi]$

ـ 2ـ عد مركب نعتبر كثير الحدود $P(z)$ حيث z

$$P(z) = z^3 - (1 - 2 \sin \alpha)z^2 + (1 - 2 \sin \alpha)z - 1$$

ـ 1ـ أحسب $P(1)$ ثم استنتج تحليلاً $P(z)$

ـ 2ـ حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$

ـ 3ـ نعتبر الأعداد المركبة: $z_1 = 1$, $z_2 = -\sin \alpha + i \cos \alpha$

$$z_3 = -\sin \alpha - i \cos \alpha$$

أ- اكتب الأعداد المركبة z_1, z_2, z_3 على الشكل المثلثي.

ب- بين أن $|z_2 - 1| = |z_3 - 1|$

التمرين 12

٢ عدد حقيقي موجب أتماماً و θ عدد حقيقي كافي.

١- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2 - 2i \left(r \cos \frac{\theta}{2} \right) z - r^2 = 0$$

أكتب الحلين على الشكل الأسني.

٢- في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجلانس (\vec{v}, \vec{u}) نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين.

عين θ حتى يكون المثلث OAB متقلbis الأضلاع.

التمرين 13

فرق بكل عدد مركب Z يختلف عن $2i$ العدد المركب $f(Z)$ حيث

١- نضع $Z_1 = f(1 - i)$

أ- اكتب Z_1 على الشكل الجيري ثم الشكل الأسني.

ب- أحسب $\left(\frac{Z_1}{2}\right)^{2008}$

٢- نضع $Z = x + iy$ و M نقطة من المستوى المركب لاحقها العدد المركب Z حيث

$$Z = x + iy$$

أ- بين أنه يمكن كتابة (Z) على الشكل $a + bi$ حيث يتطلب تعين a و b بدلالة x و y .

ب- عين المجموعة (E) للنقط بحيث يكون $f(Z)$ تخلياً صرفا.

٣- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة:

التمرين 14

- حل في \mathbb{C} المعادلة $Z^2 + 4Z + 5 = 0$ نفرض Z_1, Z_2 حل المعادلة بحيث Z_2 هو الحل الذي جزءه التخيلي سالب.

- أحسب $(Z_1 - Z_2)^{2008}$

$$-3 \text{ - استنتج حول المعادلة: } \left(\frac{z}{2z-1}\right)^2 + 4\left(\frac{z}{2z-1}\right) + 5 = 0$$

-4 في المستوى المنسوب إلى معلم متعدد متجلسان تعتبر النقط A, B, C ، A التي لواحقها على الترتيب ، B ، C عين العناصر المميزة للثوابي المستوى المباشر S بحيث $.S(A) = B$ و $S(B) = C$

التمرين 15

-1 حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} كلا من المعادلتين

$$z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0 \quad z^2 - 2z + 5 = 0$$

-2 نعتبر في المستوى المزود بمعلم متعدد ومتجلسان $(j; i)$ النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب $z_D = 1 + \sqrt{3} - i$ و $z_C = 1 - 2i$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$ ، $z_A = 1 + 2i$

أ- عين طولية وعدة العدد المركب $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ ثم استنتاج طبيعة المثلث ABC (باستعمال الأعداد المركبة)

ب- ما هو التحويل النقطي T المعرف بـ $T(A) = C$ و $T(B) = B$

ج- أكتب معادلة الدائرة المجاورة بالمثلث ABC ثم أثبت أن النقطة D تتبع إلى هذه الدائرة

د- استنتاج طبيعة المثلث ADC

التمرين 16

نرق بـ كل عدد مركب Z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث:

حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$

لتكن M صورة العدد المركب Z في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعدد والمتجلسان $(0, ii, vi)$.

أ- عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

ب- أحسب العدد المركب Z_0 بحيث: $\arg(f(Z_0)) = \frac{3\pi}{2}$ و $|f(Z_0)| = 1$

في المستوى المركب تعتبر النقط A , B و C صور الأعداد المركبة 1 , i و z_0 على الترتيب.

أ- ما نوع المثلث ABC ؟

ب- عين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (A) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

التمرين 17

1- حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$

2- تعتبر النقطتين A و B التي لواحقها على الترتيب $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_A = 1 + \sqrt{3}i$

أ- عين طولية وعدة z_B و z_A .

ب- عين الشكل الأسوي لـ z_A .

3- R هو التحويل النقطي في المستوى المركب الذي يرافق كل نقطة (z) النقطة (z') حيث :

$$z' = e^{\frac{i2\pi}{3}} z$$

أ- عين طبيعة التحويل R . عين عناصر الهندسة.

ب- النقطة C هي صورة النقطة A بواسطة التحويل R .

عين الشكل الأسوي لـ z_c و استنتاج الشكل الجيري لـ z_c .

التمرين 18

عدد مركب $P(Z) = |z|^2 + 4iz - 5 - 4i$

1- عين مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث $P(Z)$ حقيقي.

2- عين مجموعة النقط $P(Z)$ حتى يكون $P(Z)$ تخيلي صرفا.

3- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(Z) = 1$

نرمز بـ Z_1 الى الحل الذي جزءه التخيلي سالب والى Z_2 الحل الآخر.

4- تعتبر النقطتين A و B صورتي Z_1 و Z_2 على الترتيب. C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ

عين لاحقة النقطة C ثم لاحقة المثلث ABC .

5- عين مركز الشبه الذي نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ والذي تحول B الى C .

التمرين 19

القضاء منسوب إلى المعلم المعتمد والمتجلجين (\vec{v}, \vec{u}) العدد المركب المعرف كمليالي:

$$L = \frac{-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{5+3i}$$

أ-/ اكتب L على الشكل الجيري ثم على الشكل الأسني

ب-/ بين أن: $0 = 1 - L^{12}$, ثم احسب: $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12}$

ج-/ عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي أثبت أن: $0 = L^{4n} + L^{4p}$

د-/ النقطتان A و B لاحقهما على الترتيب: $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$ عين اللاحقة

للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي يتركز النقطة B ونسبة $\sqrt{2}$ وزاوية $\frac{3\pi}{4}$

ب-/ عين z_G لاحقة النقطة G مركز نقل المثلث ABA'

التمرين 20

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعللة: $(E) \dots \dots z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

أ-/ حل في \mathbb{C} المعللة (E) , ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي

ب-/ المستوى منسوب إلى المعلم المعتمد والمتجلجين (\vec{v}, \vec{u}) نعتبر النقطة A ، B ، C التي لاحقها

على الترتيب: $L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_C = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ ، $z_A = 2i$, نضع:

أ-/ اكتب L على الشكل الأسني

ب-/ أثبت أن: $(z_B - z_A) = L(z_C - z_B)$, ثم استنتج أن A صورة C بتحول نقطي بطلب تعينه وتحديد عناصره المميزة

ج-/ استنتاج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته S

التمرين 21

المستوى منسوب إلى معلم معتمد ومتجلجين (\vec{v}, \vec{u}) ،

A ، B ، C ثلاثة نقاط من المستوي لاحقها على الترتيب: $z_B = -1 + i$ ، $z_A = 1 - i$

$$z_C = \sqrt{3}(1+i)$$

أ-/ اكتب على الشكل الأسني الأعداد المركبة: z_C ، z_B ، z_A

ب-/ أ-/ أحسب الطولية وعده للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها

بـ- حدد طبيعة المثلث ABC

3/ عن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ معينا.

4/ التحويل النقطي الذي يرافق بكل نقطة M من المستوى لاحتها z النقطة M' ذات الاحقة z' حيث:
$$z' = (-1 + i)z + 1 - 3i$$

أـ- عين طبيعة التحول T وعنصره المميزة

بـ- استنتج طبيعة التحول $T^m T$ وعنصره المميزة

التمرين 22

أجب بتصحح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية

1/ أـ- الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو

بـ- مرفاق $\bar{a} = a^{2011}$ حيث:

2/ في المستوى المنسوب إلى المعلم المعتمد والمحاجنس (O, \vec{u}, \vec{v})

أـ- التحويل T الذي كتبته المركبة: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم

بـ- مجموعة النقط M ذات الاحقة z حيث: $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات الاحقة i وشعاع توجيه \vec{u} لاحتها $i + 1$

3/ المتالية العددية المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}n$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$$

أـ- (u_n) متقصصة تماما على \mathbb{N}

جـ- (u_n) متبااعدة

التمرين 23

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المعتمد والمحاجنس (O, u, \vec{v}) ، النقط A ، B ، C التي لاحتها على الترتيب: $z_C = 4i$ و $z_B = 3 + 2i$ ، $z_A = 3 - 2i$

1/ أـ- علم النقط A ، B و C

بـ- ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ على أجليتك

جـ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2/ عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق: $\|\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 12$

3/ أـ حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 13 = 0$

نرمي z_0, z_1 حل المعادلة

بـ لتكن M نقطة من المستوى لاحقتها العدد المركب z

عين مجموعة النقط M من المستوى التي تتحقق: $|z - z_0| = |z - z_1|$

التمرين 24

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعدد والمتغيرات (\vec{v}, \vec{u}) ، النقط A, B و C التي لاحقاتها على الترتيب: i ، $z_A = -4 + i$ ، $z_B = 2 + 3i$ و $z_C = -$

1/ أـ أكتب على الشكل الجيري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

بـ عين طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2/ نعتبر التحويل النقطي T في المستوى الذي يرافق بكل نقطة M ذات الاحقة z ، النقطة M' ذات الاحقة z' حيث: $z' = iz - 1 - i$

أـ عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة

بـ ماهي صورة النقطة B بالتحويل T

3/ لتكن D النقطة ذات الاحقة $-6 + 2i$

أـ بين أن النقاط A, C و D في امتانمية

بـ عين نسبة التحاكي h الذي يرتكزه A ويتحول النقطة C إلى النقطة D

جـ عين عناصر التشابه S الذي يرتكزه A ويتحول B إلى D