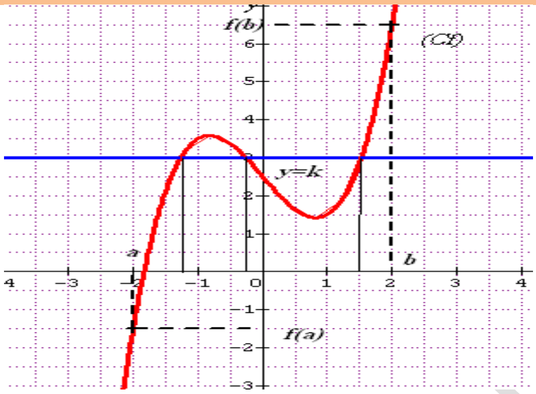
L e Théorème des Valeurs Intermédiaires مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=k$: (تقبل بدون برهان)

f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=k$.

التفسير الهندسي :



f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$.وليكن (c_f) منحناها البياني في معلم (O,i,j).
من اجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (c_f) في نقطة فاصلتها c محصور بين a و b.
بالنسبة للشكل (Δ) يقطع (c_f) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب : c_1,c_2,c_3 .

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على R : ب: $f(x)=x^3-x-1$

بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل على الأقل حل على المجال لى R : ب: $[1;2]$

الحل لدينا 1- f دالة كثير حدود معرفة ومستمرة على المجال R وبتالي مستمرة على $[1;2]$.

2- $f(1)=-1$ و $f(2)=5$ العدد 3 محصور بين $f(1)$ و $f(2)$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $f(x)=3$ على الأقل حلا c محصور بين 1 و 0 و الذي يحقق $f(c)=3$

حالة خاصة :

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ وكان $f(b)f(a)\prec 0$. (0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$)
يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=0$. أي أن f تنعدم مرة على الأقل على المجال $[a,b]$.

التفسير الهندسي المنحنى (c_f) يقطع محور الفواصل $(x'x)$ في نقط إحداثياتها $(c;0)$.

ملاحظة :

مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد وجود حلا على الأقل اما تعيين الحلول او القيم المقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثال : لتكن f الدالة المعرفة على R : ب: $f(x)=x^3+x-1$

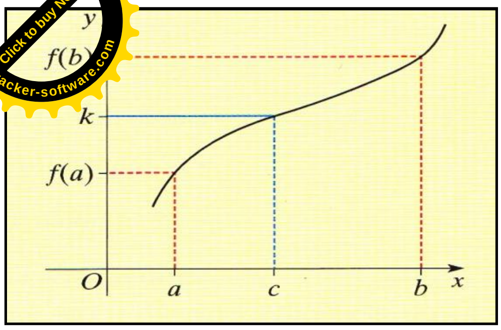
بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حل على المجال لى: $[0;1]$

الحل 1- f دالة كثير حدود معرفة ومستمرة على المجال R.

2- $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $f(x)=0$ على الأقل حلا c محصور بين 1 و 0 .

سئل الاسكندر : لِمَ تُكرم معلمك فوق كرامة أبيك فقال إن أبي سبب حياتي الفانية ومعلمي سبب حياتي الباقية

إعداد السيد حجاج براهيم



الدالة المستمرة والرتيبة تماما على المجال $[a,b]$ و وحدانية الحل

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ و $f(a)<k<f(b)$ ومنه المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا c في المجال $[a,b]$ و الذي يحقق $f(c)=k$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـ: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1. بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$.

الحل f دالة مستمرة متناقصة تماما على $[-2;1]$. و لدينا $f(-2)=21$ ، $f(1)=-6$ ومنه $-6\leq 8\leq 21$.

إذن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حل وحيد c في المجال $[-2;1]$

حالة خاصة :

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة ورتيبة على المجال $[a,b]$ وكان $f(a).f(b)<0$ (0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حل وحيد وحيدا c في المجال $[a;b]$. أي f تنعدم مرة واحدةعلى $[a,b]$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال ℝ بـ: $f(x)=-x^3-2x+5$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α. تحقق أن $1<\alpha<2$ ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-1}.
2. عين حسب قيم x إشارة الدالة f.

الحل الدالة f قابلة للاشتقاق على R و لدينا $f'(x)=-(3x^2+2)$ و بالتالي لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)<0$. إذن الدالة f متناقصة تماما على R.

لدينا كذلك $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. كما أن الدالة f مستمرة على R لأنها كثير حدود.

نستنتج مما سبق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $3.1<\alpha<3.2$ على R .

2- **بمأن** $f(1)=2$ و $f(2)=-9$ إذن فإن $1<\alpha<2$

إيجاد حصر لـ α بتقريب 10^{-1}

a	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
F(a)	1	1.46	0.86	0.20	-0.54	-1.37

ومنه **حصر** لقيمة α هو $1.3<\alpha<1.4$

إشارة $f(x)$

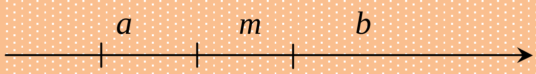
x	$-\infty$ α $+\infty$	
F(x)	+	-

إيجاد حصر لحل المعادلة بطريقة التنصيف Obtenir un Encadrement par Dichotomie

المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$

فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$.

نعلم أن $m=\frac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a;b]$.



1. إذا كان $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ فإن $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$.
2. إذا كان $f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ فإن $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$.

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

إعداد السيد حجاج براهيم

من زاد في حبه لنفسه .. زاد كره الناس له

تمرين 4

لتكن f الدالة المعرفة على R: ب $f(x)=x^3-3x^2-1$

أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ثم تحقق أن $3 < \alpha < 3.5$

اعطي حصرا α بتقريب 10^{-1}

بأستعمال طريقة التنصيف اعطي حصرا α بتقريب 10^{-2}

الحل

f الدالة المعرفة على R: حيث

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

دالتها المشتقة هي $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x)=0$ يعني $3x^2 - 6x = 0$ ومنه

x=0 أو x=2

جدول تغيرات الدالة

X	$-\infty$		0		2		$+\infty$
F'(x)		+	0	-	0	+	
F(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α

لدينا على المجال $]-\infty;2]$ لدينا $f(x)<0$ و منه المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلول في هذا المجال.......(1)

لدينا على المجال $[2;+\infty[$ لدالة f مستمرة ورتيبة تماماو $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $f(2)=-5$ و $0\in]-5;+\infty[$ ومنه فإن

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]2;+\infty[$.....(2)

من (1)و (2)ينتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على R

التحقق أن $3 < \alpha < 3.5$

لدينا $f(3.5) = 5.13$ $f(3) = -1$ ومن جهة $f(3) \times f(3.5) < 0$

وبمأن α وحيد فان $\alpha\in]3,3.5[$

حصر للقيمة α

a	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
F(a)	-1	-0.04	1.07	2.27	3.62	5.13

ومنه **حصر** لقيمة α هو $\mathbf{3.1 < \alpha < 3.2}$

باستعمال طريقة التنصيف نتبع الخطوات التالية

a	b	$\frac{a+b}{2}$	F(a)	F(b)	$f(\frac{a+b}{2})$	الخطوة
3	3.5	3.25	-1	5.13	1.64	0.5
3	3.25	3.13	-1	1.64	0.27	0.25
3	3.13	3.07	-1	0.27	-0.34	0.13
3.07	3.13	3.10	-0.34	0.27	-0.04	0.06
3.10	3.13	3.12	-0.04	0.27	0.17	0.03
3.10	3.12	3.11	-0.04	0.17	0.06	0.01

ومنه **حصر** لقيمة α هو $\mathbf{3.10 < \alpha < 3.11}$

كلما ازددت علماً ، كلما ازدادت مساحة معرفتي بجهلي

تمرين تطبيقي لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ و جدول تغيراتها هو الآتي:

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

-بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما.

الحل لدينا على المجال $]-3,0]$ لدالة f مستمرة ورتيبة تماما و $\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$ و $f(0)=-2$ و $0\in]-2;+\infty[$ ومنه فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد x_2 في المجال $]-3,0]$ حيث $-3<x_2<0$ ......(1)

على المجال $[0,2]$ لدالة f مستمرة ورتيبة تماما و $f(2)=4$ و $f(0)=-2$ و $0\in]-2;4[$ ومنه فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد x_2 في المجال $]0,2[$ حيث $0<x_2<2$ .....(1)

على المجال $[2,+\infty[$ لدالة f مستمرة ومتناقصة تماما و $f(2)=4$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $0\notin]2;4[$ ومنه فإن المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حل المجال $[2,+\infty[$ .....(1)

تمارين على مبرهنة القيم المتوسطة

تمرين01

لتكن f الدالة المعرفة على : R ب: $f(x)=2x^3-3x+4$

● بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل على الأقل حلا C على المجال $[0,1]$

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا C على المجال $[-2;1]$ ثم عين حصرا لـ C بتقريب 10^{-1}

تمرين10 bac liban 2004

أجب ب نعم أو لا على الأفتراحات الأتية

❶ اذا كان a عدد حقيقي كيفي ودالة f معرفة و مستمرة تماما على المجال $]a,+\infty[$ اذن فان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

❷ لتكن f و g دالتين معرفتين على $[0,+\infty[$ و لاتنعدمان اداكان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-1$

❸ اذا كانت دالة f معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بحيث $0\le f(x)\le\sqrt{x}$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

❹ نعتبر المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

إذا كانت دالة f معرفة على R^* فان المستقيم الدي معادلته $x=0$ هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى الممثل للدالة f

تمرين03

لتكن g الدالة المعرفة على : R ب: $f(x)=2x^3+3x^2-2$

أدرس تغيرات الدالة g

بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\propto$ على المجال $[0,1]$

أعطي حصرا لـ $\propto$ بتقريب 10^{-1}

حدد اشارة $g(x)$

لتكن f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$: ب: $f(x)=\frac{x^3+2}{x+1}$

بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f

استنتج تغيرات الدالة f

بين أن $f(\propto)=\frac{3\propto^2-4}{2(\propto+1)}$

تمرين 04

لتكن f الدالة المعرفة على : R ب: $f(x)=x^3+3x+4$

● بين أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيد C على المجال $[-1,0]$

عين حصرا لـ C بتقريب 10^{-2}

يسخر من الجروح كل من لا يعرف الألم ..

إعداد السيد حجاج براهيم