المواضيع

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 1)$$

❶ عين الحد الأول u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

❷ نضع : $u_0 = 4$ و $v_n = 2u_n + 1$

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0.

أ/ استنتج v_n بدلالة n، ثم u_n بدلالة n.

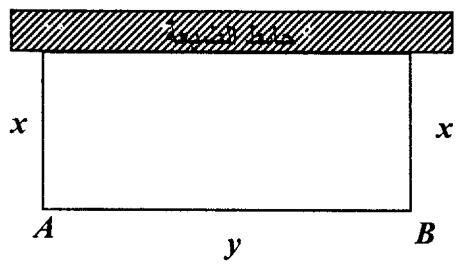
ب/ عين نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثـــاني: أراد فلاح إنشاء مدجنة مستطيلة مساحتها 392m^2

أحد جدرانها حائط ضيعته كما مبين في الشكل.

نرمز لبعد كل من الوتدين A وB عن الحائط بالرمز x ونرمز للبعد بين الوتدين A وB بالرمز y.

– أين يمكن وضع الوتدين A وB حتى يكون سياج المدجنة أصغر ما يمكن.



التمرين الثالث:

I – g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

❶ أحسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$

❷ شكل جدول تغيرات الدالة g.

❸ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدًا α محصور بين 0,94 و 0,96.

❹ أدرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II– f دالة معرفة على R بــ: $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$

(C) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$. حيث: $\|\vec{i}\| = 2$ وحدة الطول السنتيمتر.

❶ أدرس إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.

❷ أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

❸ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

❹ شكل جدول تغيرات الدالة f.

❺ بيّن أن : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

❻ أدرس إتجاه تغير الدالة h المعرفة بـــ:

$h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ على المجال $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$

❼ عين حصرًا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-3}.

❽ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 5$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

❾ أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة لـــ (Δ).

❿ أرسم (C).

11- أحسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C)، ومحور الفواصل، ومحور التراتيب، والمستقيم الذي معادلته : $x = \frac{5}{2}$.

(استعمل التكامل بالتجزئة)

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول:

تقترح وكالة للنقل الحضري على الطلبة بطاقة شخصية لإستعمال حافلاتها و ذلك لمدة 10 أشهر.

إذا كان واجب التنقل للشهر الأول 900 DA وأن العقد المقترح ينص على تخفيض 5% من واجب التنقل للشهر الذي بعده.

وتقترح وكالة ثانية عقدًا بقيمة 800 DA لكل شهر.

برأيك أي الوكالتين تظفر بالعقد ؟

التمرين الثـــاني:

ليكن β_n العدد الطبيعي المعرف من أجل كل عدد طبيعي n بـــ :

$$\beta_n = 5^{2n+1} + 2 \times 3^n + 1$$

❶ بيّن أن: $\beta_{n+1} = \beta_n + 4\alpha_n$ حيث α_n عدد طبيعي يطلب تعيينه.

❷ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n : β_n مضاعف للعدد 4.

التمرين الثـــالث:

▪ الجزء الأول:

* لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ لـــ:

$$g(x)=2x^3+x^2-1$$

❶ أدرس تغيرات g على $\mathbb{R}$.

أ/ برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α.

ب/ أحسب $g(\frac{1}{2})$، $g(1)$ ثم أعط حصرًا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

جـ/ عين حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

▪ الجزء الثاني:

❶ لتكن f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي حيث:

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$$

أ/ برهن أنه من أجل كل حقيقي x غير معدوم إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ أدرس تغيرات الدالة f.

جـ/ برهن أن: $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ واستنتج حصرًا لـــ $f(\alpha)$

❷ نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول 3cm)

ولتكن I نقطة من (C) فاصلتها -1 و J نقطة من (C) فاصلتها 1.

أ/ تحقق أن المستقيم (IJ) مماس لـــ (C) عند J.

ب/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند I ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة لهذا المماس.

جـ/ أرسم (C) (نأخذ $\frac{2}{3}$ كقيمة تقريبية للعدد α).

❸ أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معدلتها: $x=1$ ، $x=3$ ، $y=0$.

الموضوع الثالث

التمرين الأول:

الجدول أدناه نشر في مجلة اقتصادية شهر أوت 1999 وهو يُبين الوقت الجزئي للطبقة العاملة (أو العمال)

(القيم الخاصة بـــ 2000 و 2004 هي نتائج تقديرية)

السنة x_i	1980	1985	1990	1995	1997	2000	2004
الوقت الجزئي بـ: %: y_i	8,3	11	12	15,2	16,8	18	20

ندرس السلسلة الإحصائية $(x_i;y_i)$ من أجل $1980\le x_i\le 1997$

الحسابات تنجز بالآلة الحاسبة.

❶ مثل في معلم متعامد سحابة النقط ذات الإحداثيات $(x_i;y_i)$ من أجل $1980\le x_i\le 1997$ نأخذ 2cm على حامل محور الفواصل يقابل 5 سنوات و 1cm على حامل التراتيب يقابل 2% كما نأخذ المبدء النقطة $O(1980;0)$.

❷ عين إحداثيات G النقطة المتوسطة للسلسلة الإحصائية $(x_i;y_i)$، علّمها في الشكل.

❸ أ/ أوجد قيمة معامل الإرتباط الخطي للسلسلة $(x_i;y_i)$ مدور إلى 10^{-3}. هل التعديل الخطي مبرر ؟

ب/ أوجد معادلة مستقيم التعديل لـــ y بدلالة x باستعمال طريقة المربعات الدنيا (a و b مقربتان إلى 10^{-2})

– أنشئ هذا المستقيم في المعلم.

جـ/ هل يمكن اعتبار أن تقديرات المجلة لـــ 2000 و 2004 محقق وهذا باستعمال المعادلة المتحصل عليها في السؤال ❸ ب؟

التمرين الثـــاني:

في 1998 باع معمل لصناعة السيارات ذات الصنف الصغير.

283049 سيارة موزعة حسب النماذج التالية:

- 86214 نموذج A.
- 166937 نموذج B.
- والباقي نموذج C.

مسؤول المعمل يقدرون احتمال اختيار نموذج من طرف زبون الذي يَنوي شراء سيارة من هذا الصنف يساوي تكرار مبيعات هذا النموذج.

* **النتائج تعطي مدورة إلى 10^{-3}.**

❶ عين احتمال أن الزبون يشتري سيارة نموذج B.

– ما هو احتمال أنه لا يشتري نموذج B.

❷ ثلاثة زبائن أراد كل واحد منهم شراء سيارة، الاختيار يكون مستقل.

نسمي X المتغير العشوائي الذي يعطي عدد الزبائن من بين الثلاثة الذين يشتروا النموذج B.

أ/ أنشئ شجرة الاحتمالات ثم عرّف قانون الاحتمالات لـــ X

ب/ أحسب الأمل الرياضياتي

❸ مثل دالة توزيع لـــ X.

❹ ما هو احتمال أن يكون أكثر من زبونين من بين ثلاثة زبائن أن يشتري كل منهما سيارة من نموذج B ؟

التمرين الثالث:

■ **الجزء الأول:**

❶ لتكن C_m الدالة المعرفة على المجال $[0;6]$ بحيث $C_m(q)=0,8+4(1-2q)e^{-2q}$ هذه الدالة تمثل الكلفة الهامشية اليومية لمصنع ينتج مادة كيميائية على شكل سائل، و q هو كمية المنتوج مقدر آلاف اللترات و $C_m(q)$ يعبر عنه بآلاف الدنانير.

– أنشئ جدول تغيرات C_m وعين قيمة $C_m(1)$ يطلب وضعها في هذا الدول، استنتج إشارة $C_m(q)$ على المجال $[0;6]$

❷ أ/ يبين أن الدالة g المعرفة على $[0;6]$ بـــ:

$g(q)=4qe^{-2q}$ تقبل كدالة مشتقة للدالة المعرفة بالشكل:

$$g'(q)=4(1-2q)e^{-2q}$$

ب/ الكلفة الهامشية هي الدالة المشتقة للكلفة الإجمالية.

نعلم أن المصاريف ثابتة $C_T(0)$ ترتفع بألف دينار.

عين الدالة C_T التي تمثل الكلفة الإجمالية بدلالة q

❸ أ/ أدرس تغيرات الدالة C_T على المجال $[0;6]$ باستعمال السؤال ❶.

ب/ مثل دالة الكلفة الإجمالي في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الوحدة 2cm)

■ **الجزء الثاني:**

سعر بيع هذا السائل هو 1,8 DA دج للتر الواحد والإنتاج اليومي يباع كلهُ.

❶ أ/ مثل في المعلم السابق الدالة المعبرة عن الدخل اليومي.

ب/ بين أن الفائدة التي نرمز لها بـــ $B(q)$ معطاة بـــ:

$$B(q)=q-1-4e^{-2q}$$

❷ لتكن الدالة h المعرفة على $[0;6]$ بـــ:

$$h(q)=1,8-C_m(q)$$

أ/ أدرس تغيرات h مستعملا تغيرات C_m.

ب/ بين أن المعادلة $h(q)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في $[0;1]$

(لا يطلب حساب α)

جـ/ أدرس شارة $h(q)$ من أجل $q\in[0;6]$

❸ أ/ أوجد تغيرات الدالة $\beta(\alpha)$ مستعملا السؤال السابق.

ب/ أوجد قيمة تقريبية لـــ $\beta(\alpha)$ بعددين عشريين وذلك بأخذ 0,28 كقيمة لـــ α.

– ماذا تمثل هذه القيمة للمصنع ؟

الموضوع الرابع

التمرين الأول:

نقبل في عائلة أن احتمال ولادة ولد هو نفسه احتمال ولادة بنت وأنه عند ولادتين مختلفتين جنسًا الأطفال يكونا مستقلان.

❶ في عائلة ذات طفلين، عين احتمال الحوادث التالية:

A : " المولودان ولدان "

B : " المولودان بنتان "

C : " المولودان من نفس الجنس"

D : " المولودان من جنسان مختلفان "

❷ في عائلة ذات 3 أطفال (الولادات دائمًا متفرقة أي مختلفة) نرمز بـــ X للمتغير العشوائي الذي يرفق بكل عائلة عدد البنات.

أ/ عين قانون احتمال X.

ب/ أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري لـــ X.

التمرين الثاني:

(u_n) المتتالية المعـرفة بـــ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=u_n+2$$

(v_n) المتتالية المعـرفة بـــ: $v_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=v_n+u_n$$

❶ عبر عن u_n بدلالة n.

❷ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n=1+n^2$$

التمرين الثالث:

▪ الجـــزء الأول:

h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$h(x)=2x-2e^{2x}$

(يرمز : " e " إلى الأساس اللوغاريتم النيبري ؟

❶ أدرس تغيرات الدالة h .

❷ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $h(x)<0$.

▪ الجـــزء الثـــاني:

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$f(x)=x^2-e^{2x}$

(C) التمثيل البياني للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(0\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

يؤخذ $2=\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|$ (وحدة القياس هي السنتيمتر)

❶ أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$

(f' يرمز لمشتقة الدالة f)

ب/ استنتج دراسة تغيرات الدالة f .

جـ/ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

د/ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا β حيث:

$-\frac{1}{2}<\beta<-1$

هـ/ أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

❷ أ/ بيّن أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تحـديد احداثياتها.

ب/ أرسم (Δ) ، (C).

جـ/ ناقش بيانيًا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات الحقيقي x : $x^2+m-e^{2x}=0$

❸ $A(\beta)$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C) وحاملي المحورين والمستقيم المعرف بالمعادلة : $x=\beta$.

* بيّن أن: $A(\beta)=\frac{2}{3}\left(2\beta^3-3e^{2\beta}+3\right)cm^2$

يعطى: $Ln2\approx 0,69$

الموضوع الخامس

التمرين الأول:

في سنة 2004 صـندوق التقاعد يقترح على منخـرطية جـدول دفع الاشتراك السنـوات السابقة في كل ثلاثي (ثلاثة أشهر)

سن المنخرط بالسنوات	54	55	56	57	58
رتبة x_i	0	1	2	3	4
المبلغ y_i للاشتراك في كل ثلاثي بالدينار	2229	2285	2340	2394	2449

❶ أحسب ارتفاع النسبة المئوية للدفع في كل ثلاثي لأجير عمره يقارب 54 سنة و أجير عمره يقارب 58 سنة تعطى النتيجة مدوره إلى الوحدة.

❷ مثل سحابة لنقط المرفقة للسلسلة الإحصائية $(x_i\,;y_i)$ في معلم متعامد:

- على محور الفواصل نأخذ O المبدأ و $2cm$ كوحدة.
- على محـور التراتيب نأخـذ 2200 المبدأ و 1cm لكل 20 دينار.

❸ سحابة النقـط تسمح لنا التفـكير في التعديل التآلفي، هل هو مـبرر.

- أوجـد معادلة المستقيم الانحدار (Δ) (y بدلالة x) باستعمال طريقة المربعات الدنيا مثل المستقيم (Δ) في المعلم السابق.

❹ بهذا التعديل التآلفي كم يصبح المبلغ المدفوع كل ثلاثي لأجير عمرهُ 60 سنة ؟

❺ في الواقـع المبلغ المدفوع في كل ثلاثي لأجـير عـمرهُ 60 سنة هو 2555 دينار والمبلغ المدفـوع في كل ثلاثي بعد 60 سنة يحسب بالطريقة التالية:

بعد 60 سنة المبلغ المدفوع على أساس 3% في كل سنة.

- أحـسب المبلـغ المدفـوع لكـل ثلاثي لأجـير عـمرهُ 65 سنة.

التمرين الثـــاني:

يهتم علماء البيئة بنمو مستعمرة يعسوبية (نوع من الحشرات شفافة الأجنحة) في بحيرة، نرمز بـــ p_0 للمستعمرة الأولية وبـــ: p_n للمستعمرة خلال n سنة

دراسة على عينة ثم إيجاد صيغة تطور p_n : حسب العلاقة : من أجل كل طبيعي n لدينا :

$$(R)\ldots.p_{n+2}-p_{n+1}=\frac{1}{2}\left(p_{n+1}-p_n\right)$$

* **نفرض أن:** $p_0=40000$ و $p_1=60000$

نعرف تزايد المستعمرة خلال n سنة بالفرق p_n-p_{n+1}

❶ أحسب التزايد هذه المستعمرة خلال: السنة الأولى، السنة الثانية، السنة الثالثة ثم استنتج: p_2 ، p_3 .

❷ نعـــتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعـــرفتين من أجـــل كل طبيعي n بـــ:

$$u_n=p_{n+1}-p_n \qquad \text{و} \qquad v_n=p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n$$

أ/ بين أن (u_n) متتالية هندسية، يطلب تحـــديد أساسها وحدها الأول.

- عبر عن v_n بدلالة n .

ب/ باستعمال العلاقة (R) أحسب $v_{n+1}-v_n$

- استنتج أنه من أجل كل n لدينا: $v_n=p_1-\frac{1}{2}p_0$. أحسب v_n

جـــ/ أثبت أنه من أجل كل طبيعي n لدينا $p_n=2\left(v_n-u_n\right)$

استنتج عبارة لـــ p_n بدلالة n .

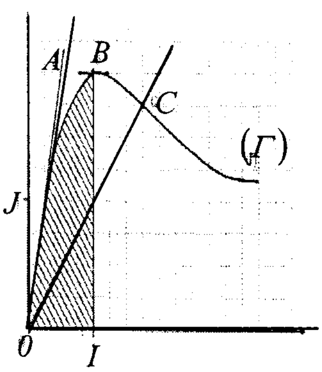
د/ بين أن المتتالية (p_n) متقاربة. أحسب نهايتها.

- ماذا يمكن استنتاجه في ما يخص تطور هذه المستعمرة خلال عدة سنوات بالقدر الكبير.

التمرين الثـــالث:

المعلم المتعامد والمتجانس.

في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس الوحدة 2cm، المنحنى (Γ) المرسوم أدناه ممثل للدالة g المعرفة والقابلة للاشتقاق في المجال $[0;3,5]$.



I و J نقطتين في المستوي بحيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.

C نقطة من (Γ) تنتمي لمنصف الزاوية $I\hat{O}J$.

(OA) مماس في O لـــ (Γ) .

S هي المساحة المظللة في الشكل.

❶ باستعمال القراءة البيانية أجب عن الأسئلة التالية :

أ/ ما هو جدول تغيرات g في المجال $[0;3,5]$ ؟

ب/ ما هي قيم $g'(0)$ و $g'(1)$ ؟

جـــ/ ما هي احداثيات النقطة (C) ؟

د/ حل المتراجحة $g(x)\geq x$ في $[0;3,5]$.

❷ عرف المساحة S بجملة متراجحتين ثم عين بيانيا حصر للحيز S بسعة 2cm2.

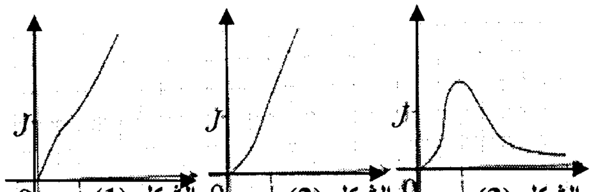
■ **تذكـــير:** مساحة شبه المنحرف تعرف بالعلاقة:

$$A=\frac{(B+b)\times h}{2}$$

حيث B و b هما القاعدتي شبه المنحرف و h ارتفاعهُ.

❸ نفرض أحد المنحنيات الثلاثة أدناه التمثيل البياني للدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0.

برر إلغاء المنحنيين منهما، من بين المنحنى الممثل لهذه الدالة الأصلية.



الشكل (3) الشكل (2) الشكل (1)

الموضوع السادس

التمرين الأول:

في سنة 2005 بلغ سكان مدينة 000 100 نسمة.

قدم مكتب دراسات دراسة توقيعية ابتداء من 1 جانفي 2005:

- عدد سكان هذه المدينة يتزايد كل سنة بـــ: 5% أخذ بعين الاعتبار المواليد الجديدة والموتى.
- هناك 4000 مهاجر يمكنهم الإقامة كل سنة في هذه المدينة.

■ **الجـــزء الأول:**

من أجل كل طبيعي n يرمز بـــ u_n لعدد سكان هذه المدينة في 1 جانفي سنة $2005+n$ ونعلم أن $u_0=100\,000$.

❶ أحـــسب u_1 و u_2 .

❷ برر أنه من أجل كل طبيعي n $u_{n+1}=1{,}05u_n+4000$

❸ من أجل كل طبيعي n نضع $v_n=u_n+80\,000$

أ/ أحسب v_0 بدلالة n .

ب/ بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

جـ/ عـبر عن v_n بدلالة n.

- استنتج أن $u_n = 180\,000 \times (1,05)^n - 80\,000$.

د/ أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in N}$.

■ **الجـزء الثـاني:**

الهدف من هذا الجزء معرفة تطور السكان لهذه المدينة إلى سنة 2020 وهذا باستعمال الطريقة النظرية المدروسة في الجزء الأول.

❶ كم يصبح عدد سكان هذه المدينة في 1 جانفي 2020 ؟

❷ في أي سنة سيصبح عدد سكان هذه المدينة يفوق 200 000 نسمة ؟

التمرين الثـــاني

* في امتحان « آيــة » عليها الإجابة عن أسئلة متعددة الإخــتبارات (QCM).

* في كل سؤال هــناك ثلاثة أجــوبة اختيارية وجــواب صحــيح واحــد.

* في كل سؤال إما أنها تعرف الإجابة و تجيب بطريقة صحيحة وإما أنها لا تعــرف الإجــابة.

وفي هذه الحالة إما أنها لا تجيب أو تختار الإجابة العشوائية وفي هذه الحالة هناك حظ من ثلاثة أن تكون إجابتها صحيحة.

نفرض احتمال أن « آيــة » تعــرف الإجــابة على السؤال المعطى يساوي $\frac{1}{2}$.

نرمز بـــ : C للحادث " آية تعــرف الجواب "

E للحادثة " الجواب صحيح"

❶ أ/ « آيــة » تجيب عن سؤال من الأسئلة المتعددة الاختيارات.

- أنشئ شجرة الاحتمالات المناسبة.

ب/ بين أن: $p(E) = \frac{2}{3}$.

جـ/ أحسب احتمال أن « آيــة » تجيب عن السؤال علمًا أن إجابتها صحيحة.

❷ نفرض، الأسئلة المتعددة الأجوبة مكونة من ثلاثة أسئلة مستقلة عن بعضها البعض وتنقط بـــ 3 نقط.

الجواب الصحيح يمنح له نقطة (1) الجواب الخاطئ يحذف له $\frac{1}{2}$ نقطة.

إذا كان مجموع النقط سالبًا، النقطة الإجمالية التي تعطى للتمرين هو 0.

ليكن X النقطة التي تحصلت عيها « آيــة » في الأسئلة المتعددة الاختيارات.

أ/ عرف قانون الاحتمال على X يمكنك الاستعانة بالشجرة. النتائج يعطى على شكل كسور.

ب/ ما هو احتمال أن « آيــة » تتحصل على الأقل على 1,5 نقطة في هذا التمرين ؟

جـ/ لنفرض أنه كل الطلبة يتصرفون كما تصرفت« آيــة ».

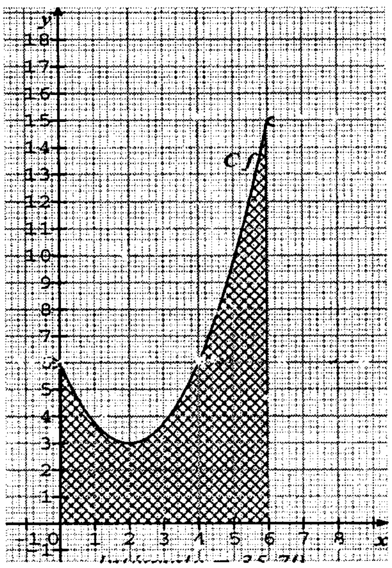
ما هو المعدل (المدور إلى 10^{-2}) الذي يمكن أن نتوقعهُ.

التمرين الثـــالث:

* نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,6]$ بـــ:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$$

نرمز بـــ C_f للمنحنى أدناه الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.



الجزء المظلل محدد بالمنحنى C_f ومحور الفواصل ومحور التراتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 6$.

❶ أحسب بـــ: cm^2 المساحة المظللة S.

❷ نفرض أن M نقطة من C_f فاصلتها x حيث $x \in [0;6]$. الموازي لمحور التراتيب يمر بالنقطة M ويقطع محور الفواصل في نقطة H. الموازي لمحــور الفواصل يمــر بالنقطة M ويقطع محور التراتيب في النقطة K.

- نسمي $R(x)$ المساحة بـــ cm^2 للمستطيل $OHMK$.

بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;6]$.

$$R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$$

❸ نقترح البحث عن كل القيم الممكنة لــ x في المجال $[0;6]$ بحيث المساحة $R(x)$ للمستطيل OHMK تساوي المساحة المظللة S.

أ/ بين أن المسألة السابقة تؤول إلى حل المعادلة $g(x)=0$ حيث g هي دالة معرفة في المجال $[0;6]$ بــ:

$$g(x)=0,75x^3-3x^2+6x-36$$

ب/ أدرس تغيرات g على المجال $[0;6]$ ثم أنشئ جدول تغيرات g.

- استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في المجال $[0;6]$
- اعطى قيمة مقربة إلى 10^{-2} لــ α.

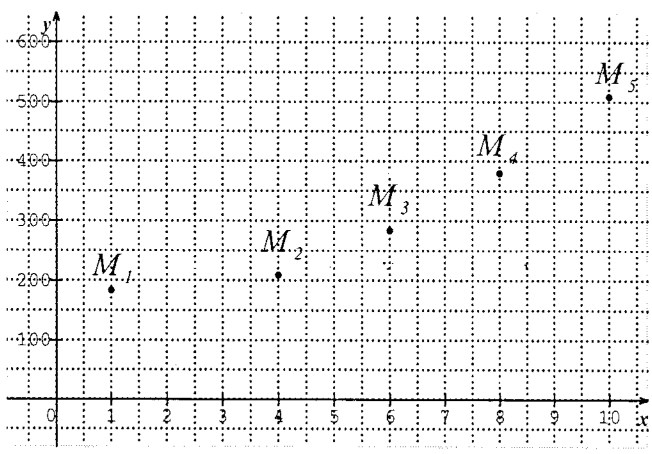
الموضوع السابع

التمرين الأول:

الجدول أدناه يمثل تطور رقم أعمال (C_A) بالملايين الدينارات في المدة من سنة 1994 إلى سنة 2003.

السنة	1994	1997	1999	2001	2003
الرتبة x_i	1	4	6	8	10
$C_A y_i$	176	209	284	380	508

❶ في سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ الممثلة أدناه في معلم متعامد، هل التعديل لتآلفي مقبول؟



❷ نضع $z_i=\ln y_i$

أ/ أحسب مدور إلى 10^{-2} من أجل i تتغير بين 1 و 5 لقيم z_i المرفقة بالرتب x_i في الجدول.

ب/ أنشئ سحابة النقطة $N_i(x_i;z_i)$ في المعلم المتعامد التالي:

- على محور الفواصل: نأخذ 0 كمبدأ و كل 1cm يقابل سنة.
- على محور التراتيب: نأخذ 5 كمبدأ وكل 1cm يقابل العدد 0,1.

❸ أ/ عين باستعمال الآلة الحاسبة معادلة مستقيم التعديل لــ z بدلالة x بطريقة المربعات الدنيا (المعامل مدور إلى 10^{-2}) ثم أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق.

ب/ استنتج علاقة بين y و x على الشكل $y=A\times k^x$ (مدورًا A إلى الوحدة و k إلى 10^{-2}).

❹ أ/ أرسم المستقيم d في نفس المعلم الذي به سحابة النقط (N_i).

ب/ أعطي تقديرًا مدورًا إلى آلاف دينارات لرقم أعمال في سنة 2005

جـ/ ابتداء من أي سنة يتعدى رقم أعمال 1 مليار دينار.

التمرين الثاني:

هذا التمرين يحتوي على أسئلة متعددة من أجل خمسة أسئلة التالية واحدة وواحدة فقط صحيحة.

❶ هذا الجدول غير كامل يعطى سبر الأراء لعينة مكونة من 60 شخص.

	عامل	إطار
رجال	25	
نساء	15	8

تم مسائلة شخص بشكل عشوائي الاحتمال أن يكون الشخص من النساء وإطار هو:

$\frac{2}{15}$ ☐ ، $\frac{2}{5}$ ☐ ، $\frac{8}{23}$ ☐

❷ قانون الاحتمالات للأمل الرياضياتي μ للتباين V والانحراف المعياري σ المعرفة في الجدول أدناه:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

لدينا: $V=\frac{5}{4}$ ☐ ، $\mu=2$ ☐ ، $\sigma=\frac{\sqrt{5}}{4}$ ☐

❸ ليكن C وD حدثين مستقلين، يعطي $P(C)=\frac{1}{3}$ و $P(D)=\frac{1}{12}$

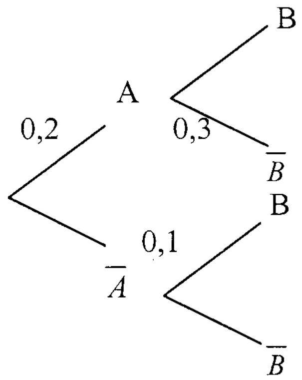
* لدينا: ☐ $P(D\cap C)=\frac{2}{15}$ ، ☐ $P(C\cup D)=\frac{7}{18}$

☐ $P_D(C)=\frac{1}{36}$

❹ نرمي قطعة نقدية متوازنة أربعة مرات متتالية، احتمال أن يظهر الوجه مرة على الأقل هو:

☐ $\frac{1}{4}$ ، ☐ $\frac{15}{16}$ ، ☐ $\frac{1}{16}$

❹ تجربة عشوائية المُثلة بشجرة الاحتمال أدناه حيث A و B حدثين و $\overline{A}$ و $\overline{B}$ حدثيهما العكسيين على الترتيب:



* إذن لدينا:

☐ $p(B) = 0,22$ ، ☐ $P(\overline{A}\cap B) = 0,8$ ،

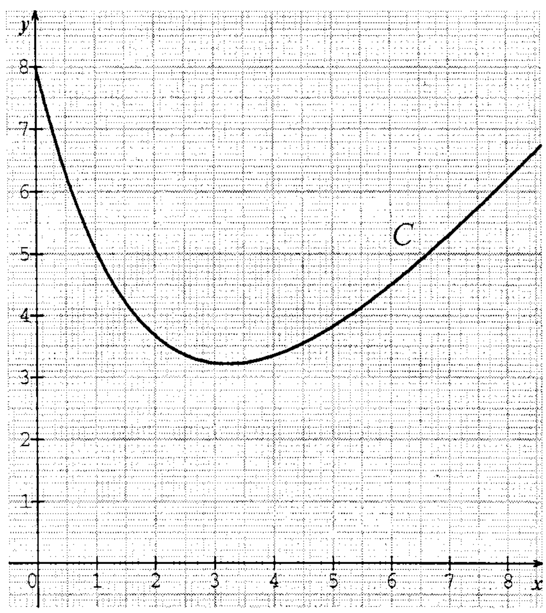
☐ $P_B(A) = 0,7$

التمرين الثـــالث:

* ليكن f دالة معرفة في المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=x-2+10e^{-0.5x}$

نرمز بـ (C) المنحنى الممثل لـ f في متعامد و (D) المستقيم الذي معادلته $y=x-2$، C المنحنى الممثل لـ (C) أدناه.



❶ عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

❷ نضع $\alpha = 2\ln 2$.

أ/ بين أن $f(\alpha)=\alpha$.

ب/ أعطي قيمة تقريبية إلى 10^{-1} لـ α.

❸ نقبل بأن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ونرمز بـ f' للدالتها المشتقة على هذا المجال.

أ/ أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.

ب/ أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f على هذا المجال.

❹ برر أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$ وأنه من أجل كل x حقيقي من $]0;+\infty[$ $f(x)-(x-2)>0$.

أعطي التفسير الهندسي لهذه النتيجة.

❺ على البيان أعلاه.

أ/ علم النقطة C من المنحنى ذات الفاصلة α.

ب/ أنشئ مماس للمنحنى C في النقطة α.

جـ/ أرسم المستقيم (D).

❻ نرمز بـ A لمساحة (بالوحدة المربعة) الحيز E المحصور بالمنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين ذي معادلتهما $x=2$ و $x=6$.

أ/ ظلل في الشكل السابق الحيز E ثم عبر عن المساحة A باستعمال عبارةالتكامل المحدود بمجال.

ب/ عين القيمة المضبوطة للمساحة A، ثم أعطى القيمة المدورة إلى السنتيمتر.

الحلول

حـــل الموضـــوع الأول

✍ التمرين الأول:

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(u_n-1\right)$$

❶ نعين u_0 حتى تكون (u_n) ثابتة.

u_n ثابتة معناه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$u_{n+1}=u_n=u_0$

* أي: $u_0=\frac{1}{3}\left(u_0-1\right)$ نحل المعادلة فنجد:

$3u_0=u_0-1$ ومنه : $2u_0=-1$ وبالتالي : $\boxed{u_0=-\frac{1}{2}}$

❷ نضع : $u_0=4$ و $v_n=2u_n+1$

أ/ نبرهن أن المتتالية (v_n) هندسية أي:

$v_{n+1}=\alpha\cdot v_n$ ، $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=2u_{n+1}+1\\&=2\left[\frac{1}{3}\left(u_n-1\right)\right]+1\\&=\frac{2}{3}\left(u_n-1\right)+1\\&=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}+1\\&=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}\left(2u_n+1\right)=\frac{1}{3}v_n\end{aligned}$$

* ومنه: $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\boxed{\alpha=\frac{1}{3}}$

* نحدد حدها الأول v_0:

$v_0=2u_0+1=2\times4+1=9$

* ومنه: $v_0=9$

ب/ استنتاج v_n بدلالة n: أي التعبير عن الحد العام للمتتالية الهندسية:

$$v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n v_0$$

$$v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times9$$

ومنه: $v_n=3^{-n}\times3^2$

$$\boxed{v_n=3^{2-n}}$$

* نعبر عن u_n بدلالة n:

$v_n=2u_n+1$

ومنه: $2u_n=v_n-1$

$$u_n=\frac{v_n-1}{2}$$

$$\boxed{u_n=\frac{3^{2-n}-1}{2}}$$

جـ/ نعين نهاية المتتالية (u_n).

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^{2-n}-1}{2}\right)$$

* لدينا: $\lim_{n\to+\infty}\left(3^{2-n}\right)=0$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^{2-n}-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(u_n\right)=-\frac{1}{2}}$$

✍ التمرين الثـــاني:

* مساحة المدجنة هي: $392\,m^2$

* معناه: $x\times y=392$

* ومنه: $\boxed{y=\frac{392}{x}}$

ولدينا: $2x+y=2x+\frac{392}{x}$

* نضع: $f(x)=2x+\frac{392}{x}$

x ، y عددان حقيقيان موجبان تمامًا.

$D_f=\mathbb{R}_+^*$

f دالة قابلة للاشتقاق على D_f:

$$f'(x)=2\left(\frac{x^2-196}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{2(x-14)(x+14)}{x^2}$$

x	0		14		x
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(14)=56$	↗	

* $f(14)=2\times14+\frac{392}{14}$

$=28+28=56$

ومنه: $\boxed{f(14)=56}$

* إذن حتى يكون سياج المدجنة أصغر ما يمكن:

يكون بعد الوتدين A و B عن الحائط هو 56.

المســألة:

I- ❶ حساب نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x}+2x-7\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}+2x-7\right)=-\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-7\right)=-\infty$

❷ نشكل جدول تغيرات g: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$g'(x)=2e^{x}+2$

* نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)>0$ ومنه الدالة g متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.

* **جـدول تغيرات g:**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

❸ نبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α محصور بين 0,94 و 0,96.

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$. و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ومتزايدة على $\mathbb{R}$.

حسب نظرية القيم المتوسطة ، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا على $\mathbb{R}$. وكون : $g(0,94)=-3,7\times10^{-5}$

$g(0,96)=7\times10^{-3}$

* **ومنه:** $g(0,94)<g(\alpha)<g(0,96)$ و $0,94<\alpha<0,96$

❹ **ندرس إشارة** $g(x)$: g دالة متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$:

$g(\alpha)=0$

* ومنه g سالبة على $]-\infty,\alpha[$ وموجبة على المجال $]\alpha,+\infty[$

II- **دراسة الدالة** f : $f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$

❶ **دراسة إشارة** f **على** $\mathbb{R}$.

* **لدينا:** $1-e^{-x}=0$ معناه $x=0$

* **ومنه:** $1-e^{-x}>0$ لما $e^{-x}>1$

وبالتالي: $x>0$

يمكن أن نلخص ذلك في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
إشارة $(2x-5)$		−		−	0	+	
إشارة $(1-e^{-x})$		−	0	+		+	
إشارة $f(x)$		+	0	−	0	+	

$f(x)>0$ لما $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$f(x)<0$ لما $x\in\left]0;\frac{5}{2}\right[$

❷ حساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-5)(1-e^{-x})$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-5)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^{-x})=-\infty\end{cases}$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)(1-e^{-x})$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x})=1\end{cases}$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

❸ **الدالة** f **قابلة للاشتقاق على** $\mathbb{R}$:

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=2(1-e^{-x})+e^{-x}(2x-5)$

$=2+2xe^{-x}-7e^{-x}=e^{-x}(2e^{x}+2x-7)$

$\boxed{f'(x)=e^{-x}\times g(x)}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $e^{-x}>0$ ومنه: $f'(x)$ لها نفس إشارة $g(x)$. نستنتج أن: $f'(x)<0$ على المجال $]-\infty;\alpha[$ ومنه الدالة f متناقصة على $]-\infty;\alpha[$. $f'(x)>0$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

* **جـدول تغيرات** f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

❺ **لدينا:** $f(\alpha)=(2\alpha-5)(1-e^{-\alpha})......(1)$

لكن لدينا: $g(\alpha)=0$ أي: $2e^{\alpha}+2\alpha-7=0$

* **ومنه:** $e^{\alpha}=\dfrac{7-2\alpha}{2}$

* وبالتالي: $\boxed{e^{-\alpha}=\dfrac{2}{7-2\alpha}}$

ينتج بالتعويض في (1) نجد:

$$f(\alpha)=(2\alpha-5)\left(1-\frac{2}{7-2\alpha}\right)=(2\alpha-5)\left(\frac{5-2\alpha}{7-2\alpha}\right)$$

* ومنه نجد: $f(\alpha)=\dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

❻ **دراسة اتجــاه تغـير الدالة** h:

$h(x)=\dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ ، على المجال $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$

$$h'(x)=\frac{4(2x-5)(2x-7)-2(2x-5)^2}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x)=\frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$$

$2x-5<0$ على المجال $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$

و $(2x-7)^2>0$ على المجال $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$

و $2x-9<0$ على المجال $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$

* ومنه نستنتج أن: $h'(x)>0$ على المجال $x\in\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$

* ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$

❼ وكون: $f(\alpha)=h(\alpha)$ و $0,94<\alpha<0,941$

حيث $h(0,94)<f(\alpha)<h(0,941)$

* ومنه نستنتج أن: $-1,902<f(\alpha)<1,982$

❽ **نبين أن (D):** $y=2x-5$ مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ لــ (C).

* **ندرس:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-5)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}-(2x-5)e^{-x}=0$

* **ومنه:** $\lim\limits_{x+\infty}\left(f(x)-(2x-5)\right)=0$

وبالتالي: $y=2x-5$ مستقـيم مقـارب مائل لـ(C) في جوار $+\infty$.

❾ دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة لــ $y=2x-5$

$f(x)-(2x-5)=-e^{-x}(2x-5)$

* **لدينا:** $e^{-x}>0$ من أجل كل x من $I\!R$.

ومنه إشارة: $f(x)-(2x-5)$

من إشارة : $5-2x$

* **ومنه:** $f(x)-(2x-5)<0$ لما : $5-2x<0$

ومنه: $5<2x$ أي : $x>\dfrac{5}{2}$

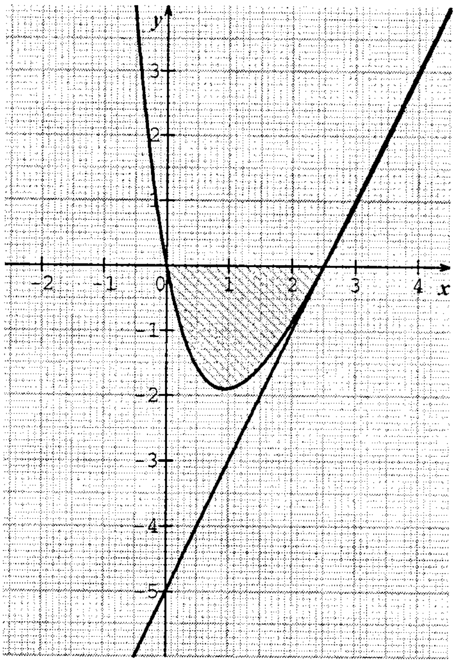
* المنحنى تحت (D) لما $x>\dfrac{5}{2}$

$f(x)-(2x-5)>0$ لما $5-2x>0$

ومنه: $5>2x$ أي: $x<\dfrac{5}{2}$

* المنحنى فوق (D) لما $x<\dfrac{5}{2}$.

❿ رسم المنحنى (C) على الورقة المليمترية.



11- الدالة f سالبة على المجال $\left[0;\frac{5}{2}\right]$

* ومنه المساحة هي: $A=-\int_0^{\frac{5}{2}}f(x)dx\,u.a$

الوحدة البيانية هي $2\,cm$. ومنه وحدة المساحة $4\,cm^2$.

* **ومنه:** $A=-4\int_0^{\frac{5}{2}}f(x)\,dx$

* **ليكن:** $I=\int_0^{\frac{5}{2}}(2x-5)(1-e^{-x})dx$

نضع: $v'(x)=1-e^{-x}$ ، $\mu(x)=2x-5$

$v(x)=x+e^{-x}$ ، $\mu'(x)=2$

μ ، v دالتان قابلتان للاشتقاق على $\left[0;\frac{5}{2}\right]$

و v' ، μ' مستمرتان على $\left[0;\frac{5}{2}\right]$

حـسب نظرية التكامل بالتجـزئة.

$$I=\left[(2x-5)(x+e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}}-\int_0^{\frac{5}{2}}2(x+e^{-x})dx$$

$$=5-2\left[\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$=5-2\left[\frac{25}{8}-e^{-\frac{5}{2}}+1\right]=-\frac{13}{4}+2e^{-\frac{5}{2}}$$

* ومنه: $\boxed{A=\left(13-8e^{-\frac{5}{2}}\right)cm^2}$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول:

* **دراسة عقد الوكالة الأولى:**

- **ثمن الشهر الأول:** $x_1=900DA$
- **ثمن الشهر الثاني:** $x_2=x_1-\frac{5}{100}x_1$

$\boxed{x_2=0{,}95x_1}$

- **ثمن الشهر الثالث:** $x_3=x_2-\frac{5}{100}x_2$

نلاحظ أن ثمن كل شهر عبارة عن متتالية هندسية أساسها 0,95 و حدها الأول $x_1=900DA$.

الثمن الكلي الذي يدفعه الطلبة حتى يستفيدوا من خدمة النقل للوكالة الأولى هو S.

حيث S: $S=(x_1+x_2+....+x_{10})DA$

$$=x_1\left(\frac{(0{,}95)^{10}-1}{0{,}95-1}\right)=900\left(\frac{0{,}6-1}{-0{,}05}\right)DA$$

$$=900\frac{40}{8}DA=900\times5=4500DA$$

* إذن الثمن اللازم دفعه هو $4500DA$.

* **الوكالة الثانية:**

الثمن اللازم دفعه لهذه الوكالة للاستفادة من خدمتها في النقل المدرسي مدة 10 أشهر هو: $S'=800\times10DA=8000DA$

* **نلاحظ أن:** $S'>S$

* إذن الوكالة الأولى التي ستظفر بالعقد لأن تكاليفها أقل من تكاليف الوكالة الثانية.

التمرين الثاني:

β_n عدد طبيعي حيث: $\beta_n=5^{2n+1}+2\times3^n+1$

❶ نبين أن: $\beta_{n+1}=\beta_n+4\alpha_n$

* **لدينا:** $\beta_{n+1}=5^{2(n+1)+1}+2\times3^{n+1}+1$

$$=5^{2n+1}\times5^2+2\times3^n\times3+1$$
$$=(24+1)\cdot5^{2n+1}+(2+1)\cdot2\times3^n+1$$
$$=24\cdot5^{2n+1}+5^{2n+1}+2\times3^n+4\times3^n+1$$
$$=\left(5^{2n+1}+2\times3^n+1\right)+24\cdot5^{2n+1}+4\times3^n$$
$$=\beta_n+4\left(6\times5^{2n+1}+3^n\right)$$

* **ومنه:** $\boxed{\alpha_n=6\times5^{2n+1}+3^n}$

❷ نثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: β_n من مضاعف العدد 4.

$\beta_n=5^{2n+1}+2\times3^n+1$

$n=0$: $\beta_0=5^{2(0)+1}+2\times3^0+1$

$$=5+2+1=8$$

* ومنه 8 مضاعف للعدد 4.

نفرض أن β_n من مضاعفات العدد 4 ونبرهن أن العدد β_{n+1} مضاعف للعدد 4.

* لدينا فرضًا أن: $\beta_n=5^{2n+1}+2\times3^n+1$ مضاعف لـ 4

ونبرهن أن: $\beta_{n+1}=5^{2(n+1)+1}+2\times3^{n+1}+1$

وحسب السؤال ❶ لدينا: $\beta_{n+1}=B_n+4\alpha_n$

* **لدينا:** β_n مضاعف لـ 4 فرض التراجع و $4\alpha_n$ مضاعف للعدد 4 ومنه ينتج أن:

$\beta_n+4\alpha_n$ مضاعف لـ 4 لأنه مجموع عددين مضاعفين للعدد 4 والناتج يكون كذلك.

* **وبالتالي:** β_{n+1} مضاعف للعدد 4 لأن:

$\beta_{n+1}=\beta_n+4\alpha_n$

* ومنه β_n مضاعف للعدد 4.

التمرين الثالث:

■ **الجزء الأول:**

❶ $g(x)=2x^3+x^2-1$

* ندرس تغيرات الدالة g على $I\!R$.

$$D_f=I\!R$$

* **النهايات:** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $I\!R$ لأنها دالة كثير الحدود ومنه:

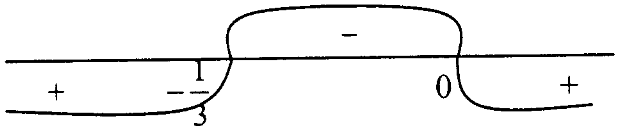
$$g'(x)=6x^2+2x$$

* ندرس إشارة $g'(x)$:

$$g'(x)=0$$
$$=6x2+2x=0$$
$$=2x(3x+1)=0$$

$x=0$ أو $x=-\frac{1}{3}$

* لاحظ جدول الإشارة:



لما $g'(x)\geq 0$ $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[0;+\infty[$

الدالة g متزايدة على كل من المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ و $[0;+\infty[$

لما $g'(x)\leq 0$ $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right]$ الدالة g متناقصة على المجـال $\left[-\frac{1}{3};0\right]$.

* جـدول تغـيرات g:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-26}{27}$	$\searrow$	$f(0)=-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-2}{27}+\frac{1}{9}-1=\frac{-2+3-27}{27}=\frac{26}{27}$$

❷ أ/ نبرهن أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α

من جدول التغيرات نلاحظ أنه على المجال $]-\infty;0]$، $g(x)<0$.

وعلى المجال $[0;+\infty[$، g دالة مستمرة ورتيبة تماما، حيث:

$$g(-1)\times\lim_{x\to+\infty}g(x)<0$$

* إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا على $\mathbb{R}$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$$
$$g(1)=2+1-1=2$$
$$g\left(\frac{1}{2}\right)\times g(1)<0$$

* إذن: $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

وباستعمال الآلة الحاسبة نجـد: $0,6<\alpha<0,7$

* ومنه نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

ب/ دراسة تغيرات f:

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^3+x+\frac{1}{x}\right)$$

$$D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(2x+1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2x^3+x^2-1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{g'(x)}{3x^2}}$$

* من أجل كل x من D_f. $\frac{1}{3x^2}>0$

* إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$.

* جـدول تغـيرات f:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

جـ/ نبرهن أن:

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3+\alpha^2+1}{3\alpha}$$

* ولدينا: $g(\alpha)=0$

* أي: $2\alpha^3+\alpha^2-1=0$

* ومنه: $\boxed{\alpha^3=\frac{1-\alpha^2}{2}}$

$$f(\alpha)=\frac{\frac{1-\alpha^2}{2}+\alpha^2+1}{3\alpha}$$

$$=\frac{1+\alpha^2+2}{6\alpha}=\frac{3+\alpha^2}{6\alpha}=\frac{\alpha^2}{6}+\frac{1}{2\alpha}$$

* ومنه: $\boxed{f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}}$

نستنتج حصرًا لـــ $f(\alpha)$

* لدينا: $0,6<\alpha<0,7$

$$\frac{1}{0,6}>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{0,7}$$

$$\frac{1}{1,2}<\frac{1}{2\alpha}<\frac{1}{1,4}\text{..........}(1)$$

$$0,1<\frac{\alpha}{6}<\frac{0,7}{6}\text{.......}(2)$$

* بجمع (1) + (2) نجد:

$$\frac{1}{1,2}+0,1<\frac{1}{2\alpha}+\frac{\alpha}{6}<\frac{1}{1,4}+\frac{0,7}{6}$$

$$\boxed{0,8<f(\alpha)<0,95}$$

* ومنه حصر $f(\alpha)$ هو: $f(\alpha)\in\left]0,8\,;0,95\right[$

❷ I نقطة من (C) حيث: $I\left(-1\ ;\ -\frac{1}{3}\right)$

J نقطة من (C) حيث: $J(1\,;1)$

■ **معـــادلة (IJ):**

نحسب معامل توجيه (IJ):

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}$$

* ومنه: $\boxed{a=\frac{2}{3}}$

نكتب معادلة المستقيم: $y=\frac{2}{3}x+b$

* ومنه: $1=\frac{2}{3}\times 1+b$

$$b=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{b=\frac{1}{3}}$$

* ومنه: $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

■ **معـــادلة (IJ):** $\boxed{y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}$

* كتابة معادلة المماس لـــ (C) عند J هي:

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$f'(1)=\frac{2}{3}\quad ،\quad f(1)=1$$

$$y=\frac{2}{3}(x-1)+1$$

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+1$$

* ومنه: $\boxed{y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}$

* إذن: (IJ) مماس لـــ (C) عند J.

ب/ معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند I.

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

$$f(-1)=-\frac{1}{3}\quad ،\quad f'(-1)=-\frac{2}{3}$$

$$y=-\frac{2}{3}(x+1)-\frac{1}{3}$$

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$$

$$\boxed{y=-\frac{2}{3}x-1}$$

* **ندرس وضعية (C) بالنسبة لهذا المماس:**

$$f(x)-\left(-\frac{2}{3}x-1\right)=f(x)+\left(\frac{2}{3}x+1\right)$$

$$=\frac{x^2}{3}+\frac{x}{3}+\frac{1}{3x}+\frac{2x}{3}+1$$

$$=\frac{x^2}{3}+x+\frac{1+2x}{3x}=\frac{3x^2(x+1)+x^3+1}{3x}$$

$$=\frac{3x(x+1)+(x+1)(x^2-x+1)}{3x}$$

$$=\frac{(x+1)(3x+x^2-x+1)}{3x}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2+2x+1)}{3x}=\frac{(x+1)^3}{3x}$$

* ندرس إشارة : $\frac{x+1}{x}$ من إشارة: $x(x+1)$

* **نلاحظ الجـدول التالي:**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	

$f(x)-y>0$ لما $x\in\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]\,0\ ;\ +\infty\right[$

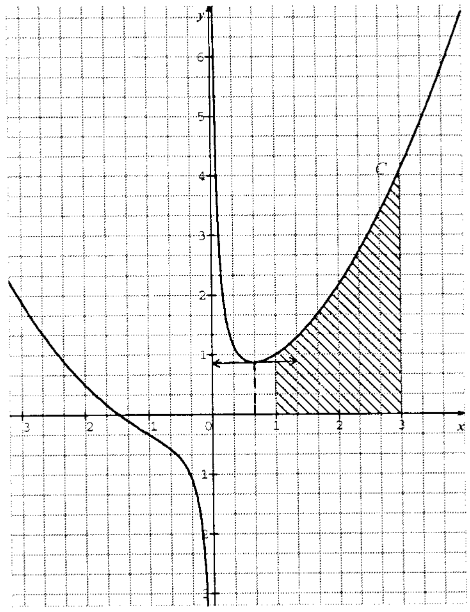
المنحنى (C) فوق المماس.

$f(x)-y<0$ لما $x\in\left]-1\ ;0\right[$

المنحنى (C) تحت المماس.

جـ/ رسم (C) على الورقة المليمترية.

(نأخذ $\frac{2}{3}$ كقيمة تقريبية للعدد α)



❸ حساب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) وبالمستقيمات التي معادلتها: $x=1$ ، $x=3$ ، $y=0$

$$A=\left(\int_1^3 f(x)dx\right)\times 9cm^2=\frac{1}{3}\int_1^3\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)dx\cdot 9cm^2$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+Lnx\right]_1^3\times 9cm^2$$

$$=3\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+Lnx\right]_1^3 .cm^2$$

$$=3\left[\left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+Ln3\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+Ln2\right)\right]cm^2$$

$$=3\left[\left(9+\frac{9}{2}+Ln3\right)-\left(\frac{5}{6}+Ln2\right)\right]cm^2$$

$$=3\left[\left(\frac{27}{2}+Ln3\right)-\frac{5}{6}-Ln2\right]cm^2$$

$$=3\left[\frac{273-5}{6}+Ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]cm^2$$

$$\boxed{A=3\left[\frac{38}{3}+Ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]cm^2}$$

حــل الموضــوع الثالث

التمرين الأول:

❶ سحابة نقط السلسلة $(x_i\,;\,y_i)$

$x_G=\bar{x}=1989{,}4$ و $y_G=\bar{y}=12{,}74$ إذن النقطة G احــداثياها $(1989{,}4\ ;\ 12{,}74)$.

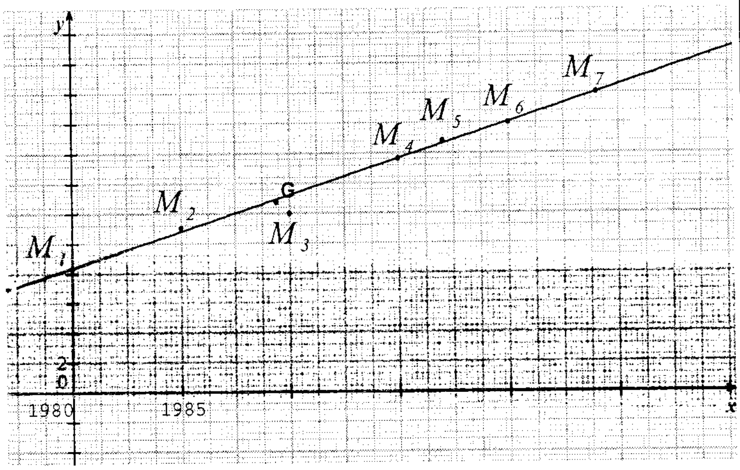
أ/ ليكن r معامل الارتباط الخطي للسلسلة $(x_i;y_i)$ الآلة الحاسبة أعطت لنا $r=0{,}985$.

بما أن : $0{,}87<|r|<1$ إذن التعديل الخطي مبرر.

ب/ ليكن $y=ax+b$ معادلة مستقيم التعديل التآلفي لـــ y بدلالة x باستعمال طريقة المربعات الدنيا. الآلة الحاسبة أعطت لنا $a=0{,}486$ و $b=-953{,}915$

* ومنه مستقيم التعديل التآلفي معادلته:

$$y=0{,}486x-953{,}915$$



جـ/ تقديرات سنة 2000 باستعمال المعادلة السابقة هي:

$$y=0{,}486\times 2000-953{,}915$$
$$=18{,}085$$

*** تقديرات 2004:**

$$y=0{,}486\times 2004-953{,}915$$
$$=20{,}029$$

عند مقارنة النتيجتين السابقتين مع التقديرات الموجودة في الجدول يمكننا القول أن تقديرات المجلة مقبولة.

التمرين الثـــاني:

❶ احــتمال شــراء سيارة نموذج B هو:

$$\frac{166937}{283048}\approx 0{,}590$$

* ليكن B الحادثة "الزبون يختار النموذج B"

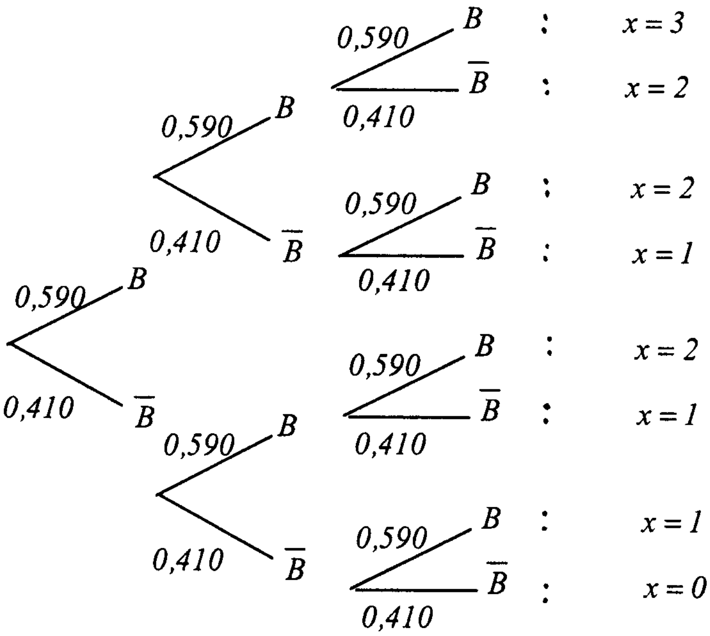
احتمال B هي تكرارات بيع هذا النموذج هو $p(B)=0{,}590$

الحادثة "الزبون لا يختار النموذج B" هو عكس الحدث B.

$p(\overline{B})=1-p(B)$.

* إذن: $p(\overline{B})=1-0{,}590$

❷ أ/



X المتغير العشوائي الذي يعطي لنا عدد الزبائن من بين ثلاثة الذين يشترون النموذج B قيم المتغير X هي 0، 1 ن 2 أو 3

$p(X=0)=p(\overline{B})\times p(\overline{B})\times p(\overline{B})=0{,}410^3\approx 0{,}069$

• الحادثة $(X=1)$ يظهر ثلاثة مرات في الشجرة كما يلي:

$\overline{B}\overline{B}B \quad \overline{B}B\overline{B} \quad B\overline{B}\overline{B}$

* إذن: $p(X=1)=3\times P(B)\times P(\overline{B})\times P(\overline{B})$

$=3\times 0{,}590\times 0{,}410^2\approx 0{,}298$

• الحادثة $(X=2)$ يظهر ثلاث مرات في الشجرة كمايلي:

$B\overline{B}B$ ، $\overline{B}BB$ و $BB\overline{B}$

إذن: $p(X=2)=3\times p(B)\times p(B)\times p(\overline{B})$

$=3\times 0{,}590^2\times 0{,}410\approx 0{,}428$

• الحادثة $(X=3)$ يظهر مرة واحدة $\overline{BBB}$

$P(X=3)=P(B)^3=0{,}590^2=0{,}205$

x_i	0	1	2	3
$p(x=x_i)$	0,069	0,298	0,428	0,205

* ليكن $E(X)$ الأمل الرياضياتي لــ X.

$E(X)=0\times 0{,}069+1\times 0{,}298+2\times 0{,}428+3\times 0{,}205\approx 1{,}769$

❸ لتكن F دالة التوزيع لــ 0X

F معرفة على $I\!R$ بــ $F(X)=p(X\le x)$

أ/ إذا كان $x<0$ $F(X)=0$

ب/ إذا كان $0\le x<1$ $F(x)=p(X=0)$

$=0{,}069$

جــ/ إذا كان $1\le x<2$:

$F(X)=p(X=0)+p(X=1)$

$=0{,}069+0{,}298=0{,}367$

د/ إذا كان $2\le x\langle 3$:

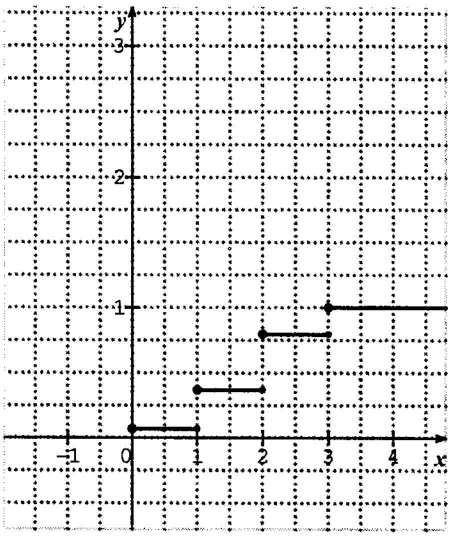
$F(X)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$

$=0{,}795$

هــ/ إذا كان $x\ge 3$:

$F(X)=p(X=3)$

$F(X)=1$



❹ ليكن E الحادثة " أكثر من زبونين من بين الثلاثة يشترون كل منهما سيارة من نموذج B"

$P(E)=P(X\ge 2)=F(2)=0{,}795$

* إذن احتمال أن أكثر من زبونين من بين الثلاثة يشتري كل مهما سيارة من نوع B هو 0,795.

التمرين الثـــالث:

■ الجــزء الأول:

من أجل $q\in[0;6]$ $C_m(q)=0{,}8+4(1-2q)e^{-2q}$

❶ **دراسة تغــيرات وإشارة C_m في $[0;6]$:**

الدالة $u:q\mapsto -2q$ قابلة للاشتقاق $[0;6]$ والدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $I\!R$.

* إذن الدالة المركبة e^u قابلة للاشتقاق على $[0;6]$.

الدالة $v: q\mapsto -4(1-2q)$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ ومنه الدالة $q\mapsto 4(1-2q)e^{-2q}$ هي جداء دالتين قابلتين للاشتقاق ومنه هي قابلة للاشتقاق على $[0;6]$.

الدالة C_m هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0;6]$ ومنه C_m قابلة للاشتقاق في $[0;6]$

من أجل كل حقيقي q في $[0;6]$لدينا:

$$C'_m(q)=4\left[-2e^{-2q}+(1-2q)(-2e^{-2q})\right]$$
$$=-8e^{-2q}-8(1-2q)e^{-2q}$$
$$=-8e^{-2q}(2-2q)=16e^{-2q}(q-1)$$

من أجل كل حقيقي q، e^{-2q} موجب تماما إذن إشارة $C'_m(q)$ هي إشارة $q-1$.

• إذا كان $q\in[0;1[$ $C'_m(q)<0$ أي C_m متناقصة تماما في $[0;1[$

• إذا كان q=1 $C'_m(q)=0$

إذا كان $q\in]1;6]$ $C'_m(q)>0$ C_m متزايدة تماما في $]1;6]$

* **جدول تغيرات C_m هو:**

q	0	1	6
إشارة $C'_m(q)$	−	0	+
C_m	4,8 ↘	$0,8-4e^{-2}$	↗ $C_m(6)$

عند $x=1$ C_m تقبل نهاية حدية صغرى تساوي:

$0,8-4e^{-2}\approx 0,26$

* **من الجدول نستنتج أن:**

من أجل كل حقيقي x في $[0;6]$ $C_m(q)>0$

❷ أ/ $g(q)=4qe^{-2q}$

g هي جداء دالتين قابلتين للاشتقاق في $[0;6]$ إذن g قابلة للاشتقاق على $[0;6]$

$$g'(q)=4e^{-2q}+4q(-2e^{-2q})=4(1-2q)e^{-2q}$$

ب/ الدالة C_m تقبل الدالة C_mكدالة مشتقة.

إذن: C_T هي دالة أصلية لــ C_m على $[0;6]$

C_m قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ إذن تقبل دالة أصلية على $[0;6]$ وهي:

$$C_m(q)=0,8+4(1-2q)e^{-2q}$$
$$=0,8q+g'(q)$$
$$=0,8+g(q)+k \qquad k\in\mathbb{R}$$

* **نعلم أن:** $C_T(0)=1$ إذن $1=g(0)+k$ وبما أن $g(0)=0$ إذن $k=1$

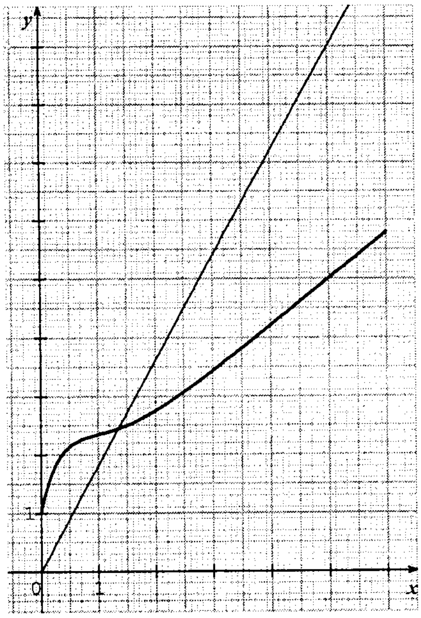
* **إذن:** $C_T(q)=0,8q+4qe^{-2q}+1$

❸ أ/ **دراسة تغيــرات** C_T:

* نعلم أن $C'_T=C_m$ من أجل كل $q\in[0;6]$

$C_m(q)$ موجبة تماما إذن الدالة C_T متزايدة تماما على $[0;6]$

ب/ **التمثيل البياني لــ** C_T: (أنظر الشكل)



■ الجـزء الثــاني:

أ/ المصنع ينتج q لتر من هذا السائل ثمن بيع اللتر الواحد هو 1,80 دج المنتوج اليومي يباع بالجملة المداخيل اليومية هي R(q) و 1,8q (تعطى بآلاف الدنانير) تمثل بالقطعة المستقيمة المحمولة على المستقيم الذي معادلته $y=1,8q$

ب/ $B(q)=R(q)-C_T(q)$

$$B(q)=1,8q-0,8q-4qe^{-2q}-1$$
$$B(q)=q-1-4qe^{-2q}$$

❷ أ/ من أجل كل $q\in[0;6]$ لدينا $h(q)=1,8-C_m(q)$

* **إذن:** $h'(q)=-C'_m(q)$

* **من نتائج السؤال 1 لدينا:**

• $q\in[0;1[$ $C'_m(q)<0$ إذن: $h'(q)>0$ أي h متزايدة تماما في $[0;1[$

• $q=1$ $C'_m(q)=0$ إذن: $h'(q)=0$

• $q\in]1;6]$ $C'_m(q)>0$ إذن: $h'(q)<0$ أي h متناقصة تماما على $]1;6]$

q	0		1		6
إشارة h'		$+$	0	$-$	
h	-3	$\nearrow$	$h(1)$	$\searrow$	$h(6)$

حيث $h(1)\approx 1,54$ و $h(6)\approx 1$

ب/ في $[0,1]$. h قابلة للاشتقاق ومتزايدة تماما إذن هناك تقابل بين $[0,1]$ و $[h(0),h(1)]$ لكن $h(1)\approx 1,51$ و $h(0)=-3$ و 0 ينتمي إلى $[h(0),h(1)]$

والمعادلة $h(q)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في $[0,1]$.

جـ/ في $[0,\alpha]$ h متزايدة وإذا كان $0\le q<\alpha$ فإن $h(q)<h(\alpha)$ أي $h(q)<0$.

في $[\alpha,1]$ h متزايدة وإذا كان $\alpha<q\le 1$ فإن $h(q)>h(\alpha)$ أي $h(q)>0$.

في $[1;6]$ h متناقصة إذن $h(q)\ge h(6)$ و $h(6)>0$ إذن $h(q)>0$.

❸ **أ/** نعلم $B(q)=1,8q-C_T(q)$ من أجل $q\in[1;6]$ و $B'(q)=1,8-C_m(q)$

* **إذن:** $B'(q)=h(q)$

وحسب السؤال السابق:

- إذا $q\in]0;\alpha[$ $h(q)<0$ إذن $B'(q)<0$ والدالة $B(q)$ متناقصة تماما في $]0;\alpha[$.
- إذا $q\in]\alpha;6[$ $h(q)>0$ إذن $B'(q)>0$ والدالة $B(q)$ متزايدة تماما في $]\alpha;6[$.

ب/ $\alpha\approx 0,28$

$$B(0,28)=0,28-1-4\times 0,28\times e^{-0,56}$$

* **إذن:** $B(0,28)=-1,36$ و $B(\alpha)=-1,36$

$B(\alpha)$ سالبة.

حل الموضوع الرابع

التمرين الأول:

❶ نعين احتمال الحادثة التالية:

A : " المولودان ولدان كون هناك استقلالية في الولادة فإن الاحتمال مستقل وعليه:

$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

B : " المولودان بنتان بنفس الطريقة : $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

C : " المولودان من نفس الجنس :

C : تمثل هنا اتحاد الحادثتان السابقتين.

إما نحصل على ولدان أو بنتان أي: $P(C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

D : " المولودان من جنسان مختلفان "

* أي: $D=\overline{C}$ ومنه ينتج أن:

$$P(D)=1-P(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

* **وبالتالي:** $\boxed{P(D)=\frac{1}{2}}$

❷ أ/ X هو المتغير العشوائي الذي ترفق بكل عائلة عدد البنات هنا نطبق تجربة برنولي حيث: الوسيط $P=\frac{1}{2}$ والتكرار 3.

وحسب قانون ثنائي الحد الوسيطين هما $\left(3;\frac{1}{2}\right)$

ومنه قيم المتغير العشوائي هي: 3, 2, 1, 0

من أجل k يأخذ القيم بين 0 و 3 نجد:

$$P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-k}=\frac{1}{2^3}\binom{3}{k}=\frac{1}{8}\binom{3}{k}$$

* أي أن: $P(X=0)=P(X=3)=\frac{1}{8}$

$$P(X=1)=P(X=2)=\frac{3}{8}$$

ب/ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=x\times P=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

* **حساب الانحراف المعياري:**

$$\delta(X)=\sqrt{3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

التمرين الثاني:

❶

$u_{n+1} = u_n + 2$

$u_1 = u_0 + 2$

$u_2 = u_1 + 2$

$u_2 = u_0 + 2 + 2$

$\vdots$

$u_n = u_0 + 2n$

طبيعة المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول: $u_0 = 1$

عبارة الحد العام لـــ (u_n) نكتب:

$$u_x = u_o + 2n$$

$$\boxed{u_n = 1 + 2n}$$

❷ نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل n من الأعداد الطبيعية:

$$v_n = 1 + n^2$$

* من أجل $n = 0$: $v_0 = 1 + 0 = 1$ ولدينا: $v_0 = 1$ محققة من أجل $n = 0$.

* **نفرض أن:** v_n صحيحة أي: $v_n = 1 + n^2$

ونبرهن صحة v_{n+1} أي: $v_{n+1} = 1 + (n+1)^2$

* **لدينا:** $v_{n+1} = v_n + u_n = (1 + n^2) + 1 + 2n$

$$= (n^2 + 2x + 1) + 1 = 1 + (n+1)^2$$

* **ومنه:** $v_{n+1} = 1 + (n+1)^2$

* **وبالتالي:** $v_n = 1 + n^2$

التمرين الثالث:

■ **الجزء الأول:**

❶ $h(x) = 2x - 2e^{2x}$

* **دراسة تغيرات الدالة** h: $D_h = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

h دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$h'(x) = 2 - 4e^{2x}$

* **نحل المعادلة:** $h'(x) = 0$

$4e^{2x} = 2$ ومنه: $e^{2x} = \frac{1}{2}$

* **ومنه:** $2x = -\ln 2$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}\ln 2}$$

$h'(x) > 0$ من أجل: $x < -\frac{1}{2}\ln 2$ الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\ln 2\right[$

$h'(x) < 0$ من أجل: $x > -\frac{1}{2}\ln 2$ الدالة h متناقصة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2}\ln 2 ; +\infty\right[$

* **جدول تغيرات** h:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln 2$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$ ↗	$-1{,}2$	↘ $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - 2e^{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2x\left(1 - 2\frac{e^{2x}}{2x}\right) = -\infty$$

$$h\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) - 2e^{-2\ln 2}$$

$$= -\ln 2 - \frac{1}{2} \approx -1{,}2$$

❷ من جـــدول تغـــيرات، نستنتـــج أن: $h(x) < 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^2 - e^{2x}$

$D_f = \mathbb{R}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 2x - 2e^{2x} = h(x)$

وجدنا أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x) < 0$ إذن: $f'(x) < 0$ ومنه نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + e^x\right)\left(x - e^x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x + e^x\right)x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$$

$$= -\infty$$

جـ/ دراسة الفروع اللانهائية لـ (C):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=-\infty$$

* إذن (C) يقبل فرعًا مكافئًا اتجاهه (yy').

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-e^{x})(x+e^{x})}{x}=-\infty$$

* المنحنى (C) يقبل فرعًا مكافئًا اتجاهه (yy')

د/ f دالة مستمرة ومتناقصة تمامًا على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\times\lim_{x\to+\infty} f(x)<0$$

* إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا β على $\mathbb{R}$.

$f(-1)=1-e^{-2}$ ، $f(-1)\approx 0,86$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-e^{-1}$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)\approx -0,12$

* **إذن:** $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$

* **ومنه نستنتج أن:** $-1<\beta<-\frac{1}{2}$

هـ/ معادلة المماس عند 0:

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$f(0)=-1$ ، $f'(0)=-2$

$(T):\ \boxed{y=-2x-1}$

❷ أ/ نبين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تحديد احداثياتها.

f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=2-4e^{2x}$

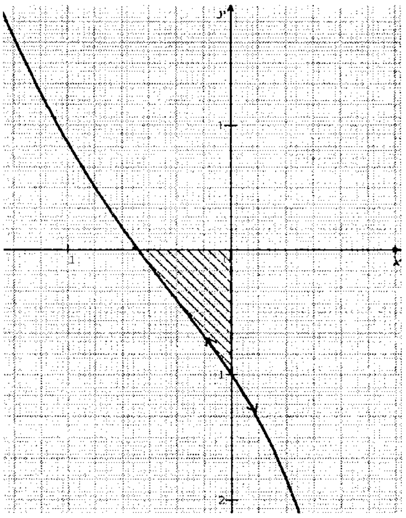
$f''(x)=0$ وبالتالي: $e^{2x}=\frac{1}{2}$

ومنه: $\boxed{x=-\frac{1}{2}\ln 2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{1}{4}(\ln 2)^2-e^{-\ln 2}=\frac{1}{4}(\ln 2)^2-\frac{1}{2}$$

$$A\left(-\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{4}(\ln 2)^2-\frac{1}{2}\right)$$

ب/ رسم (Δ) و (C) على الورقة الملميترية.



جـ/ $x^2+m-e^{2x}=0$، نناقش حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2-e^{2x}=-m$

■ **المناقشة:**

* **عدد الحلول:** $f(x)=-m$

هي نقاط تقاطع المستقيم ذو العادلة $y=-m$ مع المنحنى (C).

• $m=0$ الحل وحيد وهو 0 .

• $m\in]-\infty;1[$ عدد الحلول هو حل وحيد سالب.

• $m\in]1;+\infty[$ حلاً وحيدًا موجبًا.

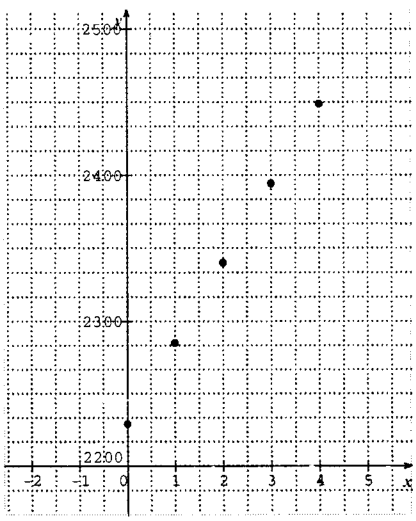
حل الموضوع الخامس

التمرين الأول:

❶ ارتفاع النسبة المئوية لمشارك عمره يقارب 54 سنة ولمشارك عمره يقارب 58 هي: $\frac{2449-2229}{2229}\times 100\approx 10$

إذن الارتفاع 10%

❷ **نتحصل على البيان التالي:**



❸ باستعمال الآلة الحاسبة العلمية نتحصل معادلة المستقيم (Δ):

$$y = 54,9x + 2229,6$$

* لرسم هذا المستقيم نحسب احداثيات نقطتين.

* من أجل $x = 0$ لدينا $y = 54,9 \times 0 + 2229,6 = 2229,6$

إذن النقطة احداثياتها $(0;2229,6)$

* من أجل $x = 4$ لدينا $y = 54,9 \times 4 + 2229,6 = 1449,2$

إذن النقطة احداثياتها $(4;2449,2)$

* إذن المستقيم (D) الممثل للمعلم السابق.

❹ العمر 60 يوافق $x = 6$

* من أجل $x = 6$ لدينا $y = 54,9 \times 6 + 2229,6 = 2559$

المبلغ المدفوع خلال الثلاثي لمنخرط عمره60 سنة هو 2559 دينار.

❺ انخفاض 3% من مداخيل هي مضعافات لـــ 0,97 كذلك نعلم أن المبلغ الذي يدفعه في كل ثلاثي منخرط عمره 61 هو:

$$2555 \times 0,97$$

والمبلغ الذي يدفعه كل ثلاثي منخرط عمره 62 سنة يحسب:

$$2555 \times 0,97 \times 0,95 = 2555 \times 0,972$$

فوق 6 سنة المبلغ يدفعه خلال كل ثلاثي فوق متتالية هندسية أساسها $0,97$ إذن المبلغ الذي يدفعه خلال كل ثلاثي لمنخرط عمره 65 سنة.

$$2555 \times 0,97^5 = 2194$$

التمرين الثاني:

❶ التزايد خلال السنة الأولى هو:

$$p_1 - p_0 = 60000 - 40000 = 20000$$

العــلاقة (R) تطــبق $n = 0$ لدينا $p_2 - p_1 = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)$

وبكون نزيد خلال السنة الثانية هو:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \times 20000 = 10000$$

ويكون $p_3 - p_2 = \frac{1}{2} \times 10000 = 5000$

المستعمرة الأولية $p_0 = 40000$

- **في السنة الأولى:** التزايد هو 20000 حيث $p_1 = 60000$
- **في السنة الثانية:** التزايد هو 10000 حيث

$$p_2 = 60000 + 10000 = 70000$$

في السنة الثالثة التزايد هو 5000 حيث

$$p_3 = 70000 + 5000 = 75000$$

❷ أ/ لدينا: $u_{n+1} = p_{n+2} - p_{n+1}$ وحسب العلاقة (R).

$$p_{n+2} - p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$$

* إذن: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$

معناه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول:

$$u_0 = p_1 - p_0 = 60000 - 40000 = 20000$$

* ومنه الحد العام هو: $u_n = 20000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب/

$$v_{n+1} - v_n = p_{n+2} - \frac{1}{2}p_{n+1} - \left(p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n\right)$$

$$= p_{n+2} - p_{n+1} - \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

$$= p_{n+2} - p_{n+1} - \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n) = 0$$

* لأن: $p_{n+2} - p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$

* إذن من أجل كل طبيعي n $v_{n+1} - v_n = 0$ أي: $v_{n+1} = v_n$

معناه (v_n) متتالية ثابتة و $v_n = v_0 = p_1 - \frac{1}{2}p_0$

$$v_n = p_1 - \frac{1}{2}p_0 = 60000 - \frac{1}{2} \times 40000 = 40000$$

جـــ/

$$\begin{cases} u_n = p_{n+1} - p_n \\ v_n = p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n \end{cases}$$

بطرح المعادلتين نجد: $v_n - u_n = -\frac{1}{2}p_n + p_n = \frac{1}{2}p_n$

* **ومنه:** $p_n = 2(v_n - u_n)$

وحسب السؤال السابق:

* **لدينا:** $v_n = 40000$ و $u_n = 20000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

* **إذن:**

$$p_n = 2\left[40000 - 20000\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$p_n = 80000 - 40000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

د/ $\lim\limits_{x \to +\infty} p_n = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[80000 - 40000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 80000$

لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

* **ومنه:** $\lim\limits_{x \to +\infty} p_n = 80000$

خلال عدة سنوات و بالقدر الكبير المستعمرة تقترب من 80000 بعسوبية.

حل الموضوع السادس

التمرين الأول:

الجزء الأول:

❶ حساب u_1 النسبة المئوية لتزايد السكان هي 5% (إذن $100\,000 \times 1,05$) و4000 شخص مهاجر يقيم كل سنة إذن:

$u_1 = 100000 \times 1,05 + 4000$

أي: $\boxed{u_1 = 109000}$

بنفس الطريقة نجد: $u_2 = 109000 \times 1,05 + 4000$

أي: $\boxed{u_2 = 118450}$

❷ إيجاد u_{n+1}: عدد السكان يزداد كل سنة بنسبة 5% معناه $u_n \times 1,05$ يضف 4000 شخص مهاجر يقيم كل سنة إذن:

$\boxed{u_{n+1} = 1,05u_n + 4000}$

❸ أ/ $v_0 = u_0 + 80000 = 100000 + 80000 = 180000$

بالتعريف: $v_{n+1} = u_{n+1} + 80000$

وبما أن: $u_{n+1} = 1,05u_n + 4000$ إذن:

$v_{n+1} = 1,05u_n + 4000 + 80000$

$v_{n+1} = 1,05u_n + 84000$

$v_{n+1} = 1,05\left(u_n + \dfrac{84000}{1,05}\right) = 1,05(u_n + 80000)$

$\boxed{v_{n+1} = 1,05v_n}$

معناه (v_n) هندسية أساسها 1,05 وحدها بالأول:

$v_0 = 180000$

جـ/- $v_n = (1,05)^n \times 180000$

وبما أن: $v_n = u_n + 80000$ إذن:

$u_n = (1,05)^n \times 180000 - 80000$

ومنه: $\boxed{u_n = 180000 \times (1,05)^n - 80000}$

د/ 1,05 أكبر من 1 إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1,05)^n = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[180000 \times (1,05)^n\right] = +\infty$

* ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[180000 \times (1,05)^n - 80000\right] = +\infty$

* إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty}$

التمرين الثالث:

❶ أ/ من القراءة البيانية للمنحنى يمكننا أن نتحصل على جدول التغيرات التالي:

x	0	$\frac{1}{2}$	$3,5$
$g(x)$	0 ↗		↘ $1,2$

ب/ $g'(0)$ هو معامل توجيه المماس عند $x=0$ وهو أيضًا معامل توجيه المستقيم (OA) الذي يساوي $\dfrac{2}{0,5}$ ومنه

$g'(0) = 4$

$g(1) = 0$ لأن مماس المنحنى أفقي عند $x = 1$

جـ/ النقطة C احداثياتها $(1,75; 1,75)$ لأنها تنتمي إلى منصف الذي معادلته $y = x$

د/ حلول $g(x) \ge x$ هي فواصل نقط من المنحنى التي تقع تحت المنصف الزاوية $I\hat{O}J$ حيث $x \in [0;1,75]$

❶ S معرفة بالجملة: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le g(x) \end{cases}$

S تقع على داخل شبه المنحرف OIBA، مساحتها أقل من مساحة شبه المنحرف.

مساحة OIBA $= \dfrac{(2+1)\times 4}{2} = 6cm$

S يحتوي على 16 مربع صغير "داخلة" كل مربع مساحته $0,25cm^2$ إذن مساحة S أكبر من $16 \times 0,25 = 4cm^2$ إذن

$2 \le S \le 6$

❸ الدالة g هي دائما موجبة إذن دالتها الأصلية هي أيضًا موجبة

إذن المنحنى (3) لا يحقق ذلك.

ولدينا $G'(0) = g(0) = 0$ هذا معناه أن المماس عند 0 أفقي معناه أن المنحنى (1) لا يحقق هذا الشرط إذن المنحنى الممثل للدالة الأصلية لــ g هو المنحنى (2).

■ **الجزء الثاني:**

❶ عدد سكان المدينة في 1 جانفي 2020 يوافق الحد u_{15}

$u_{15}=180000\times(1,05)^{15}-80000$

$u_{15}\approx 294207$

* إذن عدد سكان المدينة في عام 2020 هو 294207 نسمة

❷ لكي يفوق عدد سكان المدينة 200000 علينا حل المتراجحة $u_n>200000$

$180000\times(1,05)^n-80000>20\ 0000$

$180000\times(1,05)^n>280000$

* **ومنه:** $(1,05)^n>\dfrac{280000}{180000}$

$(1,05)^n>\dfrac{14}{9}$

الدالة ln معرفة و متزايدة تماما في المجال $]0;+\infty[$.

* **إذن:** $ln(1,05)^n>ln\dfrac{14}{9}$

$n\,ln(1,05)>ln\dfrac{14}{9}$

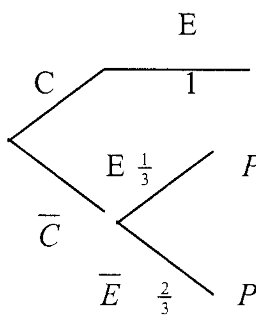
* **ومنه:** $n>\dfrac{ln\frac{14}{9}}{ln(1,05)}$ لأن: $0<ln\,1,05$

* **لدينا:** $\dfrac{ln\left(\frac{14}{9}\right)}{ln(1,05)}\approx 9,055$ أي: $n\geq 10$

• **إذن ابتداء من 1 جانفي 2015 عدد سكان هذه المدينة يفوق 200 000 نسمة.**

التمرين الثاني:

❶ أ/



$P(E\cap C)=\dfrac{1}{2}$

$P(\overline{C}\cap E)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}$

$P(\overline{C}\cap \overline{E})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}$

ب/ بتطبيق دستور الاحتمالات الكلية نتحصل:

$P(E)=P(E\cap C)+P(E\cap\overline{C})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

جـ/ احتمال أن آية تجيب عن السؤال علما أن إجابتها صحيحة معناه حساب $P_E(C)$

بالتعريف : $P_E(C)=\dfrac{P(E\cap C)}{P(E)}$

• إذن:

$P_E(C)=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$

❷ أ/ حساب قانون الاحتمال: قيم المتغير العشوائي هي: 0 نقطة و1,5 نقطة و 3 نقاط.

الطريقة المتبعة للحصول على احتمالاتها الثلاث تحسب كمايلي:

• احتمال الحصول على 0 نقطة: $p_0=\dfrac{7}{27}$.

• احتمال الحصول على 1,5 نقطة: $p_{1,5}=\dfrac{12}{27}$.

• احتمال الحصول على 3 نقاط: $p_3=\dfrac{8}{27}$.

وعليه نشكل جدول يربط بعلاقة بين قيم المتغير العشوائي واحتمالاتها وهذا ما نلاحظه من جدول التغيرات التالي:

قانون الاحتمال على X هو:

X	0	1,5	3
p_i	$\dfrac{7}{27}$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{8}{27}$

ب/ احتمال أن نتحصل على الأقل على 1,5 نقطة في هذا التمرين.

$P(X=1,5)+P(X=3)=\dfrac{12}{27}+\dfrac{8}{27}=\dfrac{20}{27}$

جـ/ المعدل موافق للأمل الرياضياتي لـــ X :

$E(X)=0\times\dfrac{7}{27}+1,5\times\dfrac{12}{27}+3\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{42}{27}\approx 1,56$

المعدل الذي يمكن أن نتوقعه يقارب 1,56.

التمرين الثـــالث:

❶ دالة f موجبة في المجال $[0;6]$ المساحة S بالوحدة المساحات توافق تكامل الدالة f من 0 إلى 6 أي:

$S=\displaystyle\int_0^6\left(\frac{3}{4}x^2-3x+6\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x+6x\right]_0^6=36u.s$

② المستطيل $OHMK$ طوله x و عرضه $f(x)$ إذن:

$$R(x)=\left(\frac{3}{4}x^2-3x+6\right)\times x$$

* إذن: $R(x)=0,75x^3-3x^2+6x$

③ أ/ $R(x)=S$

* إذن: $0,75x^3-3x^2+6x=36$

أو: $0,75x^3-3x^2+6x-36=0$ ويمكن كتابتها: $g(x)=0$

* حيث: $g(x)=0,75x^3-3x^2+6x-36$

ب/ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ ومشتقتها

$$g'(x)=2,25x^2-6x+6$$

كثير الحدود $2,25x^2-6x+6$ موجبًا دومًا لأن مميزهُ سالب وإشارة معامل x^2 موجبة)

* إذن: $g'(x)$ موجب تماما.

ونتحصل على جدول التغيرات التالي:

x	0 ... 6
g'	+
g	-36 ↗ 54

g مستمرة و موجبة تماما على $[0;6]$

و $f(0)\times f(6)<0$ إذن توجد قيمة وحيدة α بحيث $f(x)=0$

باستعمال الآلة الحاسبة يمكن إيجاد الحصر التالي:

$$g(4,55)<0<g(4,56)$$

ويمكن القول أن : $\alpha\approx 4,56$

حل الموضوع السابع

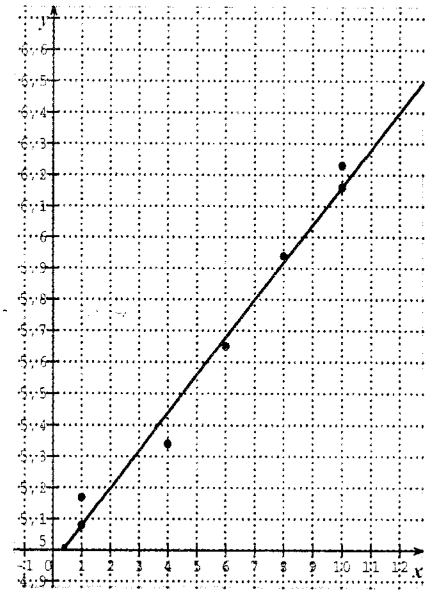
التمرين الأول:

① التعديل التآلفي يظهر مقبولاً لأن نقط السحابة تقريبًا على استقامة واحدة.

② أ/

الرتبة	1	4	6	8	10
$z_i=\ln y_i$	5,17	5,34	5,65	5,94	6,23

ب/ حذاري من القياس المعطى المبدأ على محور التراتيب



③ أ/ باستعمال الآلة الحاسبة نحصل على $z=0,12x+4,96$

لرسم هذا المستقيم علينا إيجاد نقطتين.

- من أجل $x=1$ نجد $z=5,08$
- من أجل $x=10$ نجد $z=6,16$

ب/ لدينا $z=0,12x+4,96$ إذن: $\ln y=0,12x+4,96$

* إذن: $y=e^{0,12x+4,9}\Leftrightarrow y=e^{4,96}\times e^{0,12x}$

$$\Leftrightarrow y=e^{4,96}\times\left(e^{0,12}\right)^x$$

* إذن: $y=A\times k^x$ حيث $A=e^{4,96}\approx 143$

و $k=e^{0,12}\approx 1,13$

* ومنه: $y=143\times 1,13^x$

④ أ/ أنظر الشكل أعلاه.

ب/ سنة 2005 توافق الرتبة 12

$$y=143\times 1,13^{12}\approx 619,837$$

في سنة 2005 تكون التقديرات هي 619,837 مليون

جـ/ لإيجاد السنة التي يتعدى رقم أعمال 1 مليار دينار علينا إيجاد الرتبة عند حل $y>1000$ معناه: $143\times 1,13^x>1000$

يكافئ $1,13^x>\frac{1000}{143}$ أي: $\ln(1,13^x)>\ln\frac{1000}{143}$

يكافئ $x\ln(1,13)>\ln\frac{1000}{143}$

$x>\frac{\ln\left(\frac{1000}{143}\right)}{\ln(1,13)}$ ومنه: $x>\frac{\ln 1000-\ln 143}{\ln 1,13}$

$$\frac{\ln 1000-\ln 143}{\ln 1,13}\approx 15,91$$

* إذن حسب الرتبة الموافقة هي 16 معناه في سنة 2009 رقم أعمال يفوق مليار دينار.

التمرين الثـــاني:

❶ الإجابة الصحيحة هي $\frac{2}{5}$ لأن:

نحسب أولاً العدد الناقص في الجدول الذي هو:

$$60-25-15-8=12$$

أي 12 رجل في منصب إطار عدد النساء اللواتي يشغلن منصب إطار 8 العدد الإجمالي للإطارات هو 20 إذن الاحتمال أن الشخص المسائل من النساء وإطار هو $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

❷ الإجابة الصحيحة هي $\frac{5}{4}$.

• **الأمل الرياضياتي هو:**

$$\mu=1\times0{,}2+2\times0{,}4+3\times0{,}1+4\times0{,}3=2{,}5$$

• **التباين هو:**

$$V=1^2\times0{,}2+2^2\times0{,}4+3^2\times0{,}1+4^2\times0{,}3-2{,}5^2=1{,}25=\frac{5}{4}$$

• **الانحراف المعياري هو:** $\sigma=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

❸ الإجابة الصحيحة $P(C\cup D)=\frac{7}{18}$

بالتعريف C و D مستقلان إذن:

$$P(C\cap D)=P(C)\times P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{36}$$

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{7}{18}$$

❹ الإجابة الصحيحة هي : $\frac{15}{16}$

الحادثة A " نتحصل على وجه على الأقل "

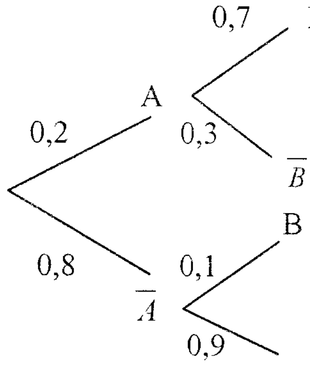
الحادثة $\overline{A}$ " لا نتحصل على أي وجه " معناه نتحصل على 4 ظهور انتجربة عشوائية.

* **إذن:** $B(\overline{A})=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

❺ الإجابة الصحيحة هي $P(B)=0{,}22$

عند اتمام شجرة الاحتمالات كما يلي:



$P(A\cap B)=0{,}2\times0{,}7=0{,}14$

$P(A\cap\overline{B})=0{,}2\times0{,}3=0{,}6$

$P(\overline{A}\cap B)=0{,}8\times0{,}1=0{,}08$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}8\times0{,}9=0{,}72$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=0{,}14+0{,}08=0{,}22$$

التمرين الثـــالث:

* **لدينا:** $f(x)=x-2+10e^{-0{,}5x}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}-0{,}5x=-\infty$ إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-0{,}5x}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$

❷ أ/ $f(\alpha)=\alpha-2+10e^{-0{,}5\alpha}=2\ln5-2+10e^{-0{,}5\times2\ln5}$

$$f(\alpha)=2\ln5-2+10e^{\ln\frac{1}{5}}=2\ln5-2+10\times\frac{1}{5}$$

$$=2\ln5=\alpha$$

* **ومنه:** $f(\alpha)=\alpha$

ب/ $\alpha=2\ln5\approx3{,}2$

❸ أ/ اشتقاق الدالة $x\mapsto e^{-5x}$ هي الدالة $x\mapsto-0{,}5e^{-0{,}5x}$

* **إذن:**

$$f'(x)=1+10\times(-0{,}5e^{-0{,}5x})=1-5e^{-0{,}5x}$$

ب/ لنحل المتراجحة: $f'(x)\geq0$

$$1-5e^{-0{,}5x}\geq0$$

$1\geq5e^{-0{,}5x}$ يكافئ $\frac{1}{5}\geq e^{-0{,}5x}$

يكافئ $\ln\frac{1}{5}\geq\ln e^{-0{,}5x}$

$$-\ln5\geq-0{,}5x$$

$$\frac{\ln5}{0{,}5}\leq x$$

أي : $2\ln5\leq x$

* **معناه:** $\alpha\leq x$

في المجال $]0;+\infty[$ يمكن إنشاء الجدول التالي:

x	0		$2\ln 5$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	8	$\searrow$	$2\ln 5$	$\nearrow$	$+\infty$

❹ $f(x)-(x-2)=10e^{-0,5x}$

* ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{c\to+\infty}(10e^{-0,5x})=0$

* إذن المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ هو مستقيم مقارب مائل لـــ f في جوار $+\infty$

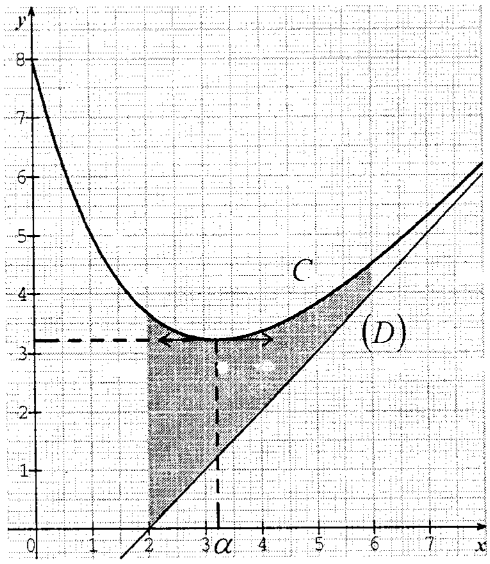
* من أجل كل حقيقي x $e^x>0$ إذن $10e^{-0.5x}>0$ إذن:

$$f(x)-(x-2)>0$$

أي المنحنى الممثل لـــ f يقع فوق المستقيم الذي معادلته:

$$y=x-2$$

❺ الرسم أنظر الشكل التالي:



أ/ نذكر أن: $\alpha=2\ln\approx 3,2$

ب/ $f'(\alpha)=0$ إذن المماس عند النقطة ذات الفاصلة α هو أفقي.

جـ/ نرسم المستقيم (D) علينا إيجاد نقطتين

من أجل $x=2$ ، $y=2-2=0$ إذن المستقيم D يمر بالنقطة ذات الاحداثيات $(2\,;0)$

من أجل $x=4$ ، $y=4-2=2$ إذن المستقيم D يمر بالنقطة ذات الاحداثيات $(4\,;2)$

❻ أ/ أنظر في الشكل احيز المظلل أعلاه.

بالتعريف: $A=\int_2^6[f(x)-(x-2)]\ dx=\int_2^6 10e^{-0,5x}dx$

ب/ الدالة الأصلية للدالة: $x\mapsto e^{-0,5x}$ هي الدالة:

$$x\mapsto\frac{1}{-0,5}e^{-0,5x}$$

* أي: $x\mapsto -2e^{-0,5x}$

* ومنه: $A=\int_2^6 10e^{-0,5x}dx=\left[-20e^{-0,5x}\right]_2^6$

$$A=-20e^{-0,5\times 6}+20e^{-0,5\times 2}=-20e^{-3}+20e^{-1}$$

$$=20(e^{-1}-e^{-3})us$$

$$\boxed{A\approx 6,36\ us}$$