وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية بجاية — ثانوية طاوس عمروش سيدي عيش

لشعبة : العلوم التجريبية — **امتحان البكالوريا التجريبي** — دورة : ماي 2014

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 03 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين.

الموضوع الأول :

التمرين الأول :(05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$

1/- برهن أنه إذا كان z حل للمعادلة $P(z) = 0$ فإن مرافقه $\bar{z}$ أيضا حلا لها .

2/- بين أنه من أجل كل z من $\mathbb{C}$: $P(z) = (z+4)(2z^2 + 6z + 17)$.

3/- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0 \ldots\ldots (E)$.

4/- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط A ، B و C صور الأعداد المركبة z_A ، z_B ، و z_C حلول المعادلة (E) حيث z_A هو الحل الحقيقي و $Im(z_B) > 0$.

أ)- أكتب العدد المركب : $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسي .

ب)- استنتج طبيعة التحويل f المعرف بالعبارة المركبة : $z' = \alpha z + \beta$ حيث α و β عددان مركبان و الذي يحقق الشرطين : $f(A) = A$ و $f(C) = B$.

ج)- عين لاحقتي النقطتين D و F حتى يكون الرباعي $BCDF$ مربعا مركزه A .

التمرين الثاني :(05 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n}$

1/- أ)- أحسب الحدود U_1 ، U_2 ، U_3 .

ب)- قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n) و الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (W_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $W_n = \dfrac{n}{n+1}$

ج)- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن : $U_n = W_n$.

2/- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، نسمي V_n الحل الوحيد في $\mathbb{R}$ للمعادلة $(n+1)e^x = n$.

أ)- برهن أن : $e^{V_1 + V_2 + V_3} = \dfrac{1}{4}$ ، ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-3} للمجموع : $V_1 + V_2 + V_3$

ب)- من أجل كل $n \geq 4$ نضع : $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$. برهن أن المتتالية (S_n) متناقصة .

ج)- عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق : $S_n \leq -3$

التمرين الثالث :(04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيمين (Δ) و(D) المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين

$$(D):\begin{cases} x &= \alpha + 6 \\ y &= -2\alpha + 1 \\ z &= \alpha + 5 \end{cases} \text{ و } (\Delta):\begin{cases} x &= t + 3 \\ y &= \frac{1}{2}t + 2 \\ z &= -2t - 2 \end{cases}$$

حيث t و α وسيطان حقيقيان

1) بين أن المستقيمين (Δ) و (D) ليسا من نفس المستوي

2) لتكن M و N نقطتين من المستقيمين (Δ) و(D)على الترتيب

أ) عين إحداثيات M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D)

ب) احسب الطول MN

3) عين معادلة المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (D)

4) احسب المسافة بين نقطة كيفية من (D) والمستوي (P) . ماذا تلاحظ ؟

التمرين الرابع :(06 نقاط)

الجزء(أ) : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$.

1/- أحسب نهايتي g عند 0 و $+\infty$.

2/- بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = \frac{2x^2+3x+4}{x}$.

3/- أحسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء (ب) : لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $3\ cm$).

1/- أحسب نهايتي f عند 0 و $+\infty$.

2/- أ)- بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب)- استنتج إتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3/- ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) .

4/- أنشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f) .

الجزء (ج) : لتكن الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$

1/- أثبت أن F هي دالة أصلية للدالة على $]0;+\infty[$.

2/- أحسب ، بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيز للمستوي حيث : $1 \le x \le e$ و $0 \le y \le f(x)$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :(5.5 نقاط)

I) من أجل كل عدد مركب z نضع : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1/- أحسب $P(-1)$.

2/- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

3/- عين Z_0 ، Z_1 و Z_2 حلول المعادلة $P(z) = 0$ حيث Z_0 حقيقي و $Im(Z_1) > 0$.

4/- عين قيم العدد الطبيعي بحيث يكون : $\left(\frac{Z_1 - 1}{Z_2 - 1}\right)^n$ حقيقيا موجبا .

II) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm) . نعتبر النقط A ، B ، C ، G لواحقها $Z_A = -1$ ، $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ ، $Z_G = 3$

1/- مثل النقط A ، B ، C ، G .

2/- أحسب الأطوال AB ، AC ، BC و استنتج طبيعة المثلث ABC .

3/- عين عمدة للعدد المركب $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

III) 1/- أثبت أن النقطة G مرجح الجملة :$\{(A; -1), (B; 2), (C; 2)\}$.

2/- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) . \overrightarrow{CG} = 12$

$3\overrightarrow{MG} . \overrightarrow{CG} = 12$

التمرين الثاني : (4.5 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول U_0 الموجب تماما و العلاقة : $U_{n+1} = \frac{5U_n + 2}{U_n + 4}$

1/- أ)- عين العددين الحقيقيين a ، b بحيث يكون : $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n + 4}$.

ب)- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$.

2/- عين U_0 حتى تكون (U_n) ثابتة .

3/- نفرض أن $U_0 = 3$ و نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + \alpha}$ حيث α عدد حقيقي .

أ)- عين قيمة α حتى تكون (V_n) متتالية هندسية .

ب)- عين الأساس q و الحد الأول V_0

ج)- أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .

د)- أحسب بدلالة المجموع : $S = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A(-3;-1;-3)$ و يوازي الشعاع $\vec{u}$ حيث $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$. (D) مستقيم يشمل النقطة $B(3;2;3)$ و يوازي الشعاع $\vec{v}$ حيث $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$.

1/- أ)- أحسب $\vec{u}.\vec{v}$.

ب)- بين أن المستقيمين(Δ) و (D) متعامدين و ليسا من نفس المستوي .

ج)- عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي (Δ) و يوازي (D) .

2/- (S) سطح الكرة التي مركزها $C(-1;0;-1)$ و نصف قطرها 6 .

(P) المستوي المعرف بالمعادلة : $2x+y+2z+13=0$

أ)- بين أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

ب)- بين أن المستقيم (D) مماس لـ (S) في النقطة B .

التمرين الرابع : (06 نقاط)

الجزء (أ) : g دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$

1/- شكل جدول تغيرات الدالة g .

2/- بين أنه من أجل $x>-1$ يكون : $0<g(x)<e$

الجزء (ب) f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1-e^{\frac{x}{x+1}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (الوحدة 5 cm)

1/- برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y-x+e-1=0$ مقارب للمنحنى (C_f) .

2/- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

3/- أ)- من أجل $x>-1$ ، أحسب $f'(x)$ ثم بين أن : $f''(x)=\frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}$:

ب)- أحسب نهاية $f'(x)$ عند $+\infty$

ج)- بين أن : $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 e^{\frac{x}{x+1}}$ ، ثم أحسب نهاية $f'(x)$ عند -1 .

د)- شكل جدول تغيرات الدالة f'.

هـ)- برهن أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 0 و الآخر نرمز له α .

4/- شكل جدول تغيرات الدالة f .

5/- أثبت أن : $f(\alpha)=-\alpha(\alpha+1)$

6/- عين معادلتي المماسين (T_1) و (T_2) عند النقطتين ذات الفاصلتين 0 و α على الترتيب من أجل $\alpha=-0.72$.

7/- أنشئ المماسين (T_1) و (T_2) ثم المنحنى (C_f)