الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الأغواط

الإمتحان التجريبي لشهادة البكالوريا

دورة : ماي 2014

الشعبة : علوم تجريبية

إختبار في مادة : الرياضيات

المدة : 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(3;0;1)$ ، $B(0;-1;2)$ ، $C(1;-1;0)$.

1) أحسب الجداء السلمي: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$ ، استنتج طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) تحقق أن المسافة بين النقطة $D(1;1;-2)$ والمستوي (ABC) $\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

4) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

5) ليكن (P) المستوي الذي معادلته : $2x+y+z-1=0$.

أ- تحقق من أن (P) هو المستوي (BCD).

ب- عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD).

ت- أحسب مساحة المثلث BCD .

التمرين الثاني : (04نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases}u_0=\alpha\\2u_{n+1}=3u_n^2\end{cases}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

1) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) نفرض أن : $\alpha\neq\frac{2}{3}$ و نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln u_n+\ln\frac{3}{2}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 بدلالة α.

ب-اكتب عبارة v_n بدلالة n و α .

ت-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{2^n}$.

ث-عين قيم العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متقاربة .

التمرين الثالث :(05نقاط) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-10z+34=0$.

2) أ) أكتب العدد المركب : $L=\dfrac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$. على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

ب) بين أن $L^{12}+1=0$ ثم أحسب $64(-4+i)^{12}+(5+3i)^{12}$.

3) A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$.

و نعتبر f التحويل النقطي الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' .

حيث : $z'=(-1+i)z+7-11i$.

أ) عين طبيعة التحويل f و عناصره

ب) عين z_C لاحقة النقطة C حيث $C=f(A)$.

ج) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

4) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MA}\right\|.\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

التمرين الرابع : (07نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x-1)^2-2\ln(x-1)$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها

2) أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1+\ln(x-1)}{x-1}$.

و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة : $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. فسر بيانيا النتيجة . ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2(x-1)^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول التغيرات

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) . ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

- بين أنه توجد نقطة وحيدة B يقبل فيها (C_f) مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ). ثم أكتب معادلة المماس (T).

4) بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $1,34<\alpha<1,35$

5) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

6) برر وجود دوال أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

- عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ التي تحقق $F(2)=0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(-1;2;1)$ ، $B(0;5;2)$ ، $C(3;0;-2)$.

أ- بين أن النقط C,B,A تعين مستويا .

ب- بين أن الشعاع $\vec{n}(1;-1;2)$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. ثم إستنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

-2 ليكن المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية $(P): x+3y+z-6=0$.

- بين أن المستوى (P) عمودي على المستوي (ABC) .
- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC).
- تحقق أن النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) ، إستنتج المسافة بين B و (Δ).

-3 لتكن M مجموعة النقط (γ) التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$.

- أثبت أن (γ) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
- بين (γ) تمس المستوي (ABC) في نقطة يطلب تعيينها.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.
2. نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)=z^3+\left(-2\sqrt{3}+i\right)z^2+\left(4-2i\sqrt{3}\right)z+4i$.

أ- بين أن $z_0=-i$ جذر لـ $P(z)$.

ب- عين العددين الحقيقيين b و c حيث : $P(z)=(z+i)\left(z^2+bz+c\right)$.

ج- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z)=0$ z_0 ، z_1 و z_2 . حيث z_1 العدد المركب الذي جزءه التخيلي موجب .

د- أكتب العدد المركب L على الشكل الأسي حيث $L=\frac{z_1}{z_2}$.

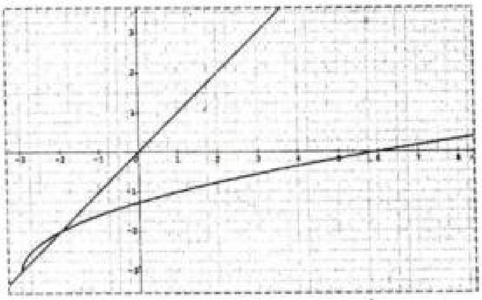
هـ- عين قيم العدد الصحيح n حيث يكون L^n عدد حقيقي موجب تماما .

II. في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$; $z_B=\sqrt{3}-i$; $z_C=-i$.

1. مثل النقط A ، B و C . مبينا كيفية الإنشاء هندسيا.
2. أحسب $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}$ ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .
3. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=5$. حيث G مرجح الجملة $\{(A;6);(B;-4);(C;3)\}$.
4. عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S حيث $S(A)=C$ و $S(B)=B$.

التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

I)- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-3;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=-3+\sqrt{x+3}$.



- التمثيل البياني (C_f) للدالة f ممثل في الشكل المقابل :

- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما .

II)- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=6$.

ومن اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_{n+1}=-3+\sqrt{u_n+3}$

1. مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 بطريقة هندسية على محور الفواصل .

- ضع تخمينا لإتجاه تغير المتتالية وتقاربها .

2. برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$.

3. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

III)- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=\alpha\ln(u_n+3)$. حيث $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

1. عين قيم العدد الحقيقي α حيث تكون (v_n) متتالية هندسية غير ثابتة .
2. بوضع $\alpha=\frac{2}{3}$ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول .
3. أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم أوجد عبارة u_n بدلالة n ، إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
4. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $w_n=u_n+3$
5. أعط عبارة w_n بدلالة v_n ثم إستنتج الجداء : $T_n=w_0\times w_1\times w_2\times\dots\dots\dots\times w_n$.

التمرين الرابع : (06.5 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{xe^x-x-2}{e^x-1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

I) **1.** أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها . مفسرا النتائج بيانيا .

2. أوجد العددين الحقيقيين a, b بحيث يكون $f(x)=ax+\frac{b}{e^x-1}$.
3. أثبت انه من اجل كل x عدد حقيقي غير معدوم: $f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^x-1)^2}$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيراتها .

II) **1.** بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') حيث $y=x+2$ و $y=x$ معادلتاهما على الترتيب .

2. حدد وضع المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ').
3. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 و x_2 حيث $1.05<x_1<1.10$ و $-2.30<x_2<-2.20$
4. أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $[f(-x)+f(x)]$. فسر النتيجة هندسيا .
5. أرسم المستقيمين (Δ) و (Δ') وأنشئ المنحنى (C_f) .
6. ليكن m عدد حقيقي ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

III) من أجل كل $x>0$ نعتبر الدالة F المعرفة بـ : $F(x)=ax^2+bx+c\ln(e^x-1)$

أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون F دالة أصلية للدالة f .

الموضوع الاول

التمرين الأول :

1 - الجداء السلمي $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$:

لدينا : $\vec{AC}(-2,-1,-1)$. $\vec{BC}(1,0,-2)$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (1\times(-2)) + (0\times(-1)) + (-2\times(-1))$$
$$= 0$$

ومنه نستنتج أنّ :

$\vec{AC}$ و $\vec{BC}$ متعامدان

- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

بما أنّ $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$ متعامدان فإن المثلث ABC قائم في C .

- مساحة المثلث ABC :

ABC مثلث قائم في C و AB وتره وقاعدته AC وارتفاعه BC .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB \cdot AC)$$

لدينا :

$$AC = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \quad . \quad BC = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{30}}{2} \ u.I.$$

2 - تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

- ليكن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ، $\vec{n}(a,b,c)$

نعلم أنّ :

إذا كان $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC) فإن $\vec{n}$ عمودي على الأقل على شعاعين لـ ABC

$\vec{n}$ عمودي على $\vec{AC}$ يعني أنّ : $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$.

أي : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

ومنه : $-2a - b - c = 0 \ \dots ①$

$\vec{n}$ عمودي على $\vec{BC}$ يعني أنّ ، $\vec{n} \cdot \vec{BC} = 0$

أي ، $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

ومنه . $a - 2c = 0 \dots ②$

من ② نستنتج أنّ ، $a = 2c$

نعوّض $a = 2c$ في ① نجد . $-2(2c) - b - c = 0$.

ومنه : $b = -5c$

من أجل $c = 1$: نجد : $a = 2$ ، $b = -5$ ، $c = 1$

إذن ، $\vec{n}(2,-5,1)$

* معادلة (ABC) من الشكل : $2x - 5y + z + d = 0$ (*)

لإيجاد قيمة d نعوّض A أو B أو C في المعادلة (*) :

نعوّض A مثلاً : $2(3) - 5(0) + (1) = -d$ نجد : $d = -7$

ومنه المعادلة الديكارتية لـ (ABC) هي :

$$2x - 5y + z - 7 = 0$$

3) إثبات أنّ المسافة بين D و (ABC) هي $\frac{2\sqrt{30}}{5}$

$$d(D,(ABC)) = \frac{|2x_D - 5y_D + z_D - 7|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2+(1)^2}}$$

$$= \frac{|2(1) - 5(1) + (-2) - 7|}{\sqrt{30}} = \frac{12}{\sqrt{30}}$$

$$= \frac{12\sqrt{30}}{\sqrt{30}\sqrt{30}} = \frac{12\sqrt{30}}{30}$$

الموضوع الاول

ومنه: $d(D,(ABC)) = \frac{2\sqrt{30}}{5}$

4) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

الارتفاع هو بعد D عن ABC

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$$

تطبيق عددي: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{30}}{5}$

$$V = \frac{60}{30} = 2 \cdot UI$$

5) لدينا: $(P): 2x + y + z - 1 = 0$

1- التحقق أن (P) هو المستوي (BCD).

لاثبات ذلك يكفي تعويض احداثيات B، C و D في معادلة المستوي (P).

$B(0,-1,2)$: $2(0) + (-1) + (2) - 1 = 0$. (محققة)

$C(1,-1,0)$: $2(1) + (-1) + (0) - 1 = 0$. (محققة)

$D(1,1,-2)$: $2(1) + (1) + (-2) - 1 = 0$. (محققة)

ومنه معادلة (P) هي معادلة (BCD)

ب- تعيين إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة A على (BCD)

1) بما أن $\vec{AC}$ عمودي على $\vec{BC}$.

2) $\vec{BC}$ ينتمي إلى (BCD).

3) $\vec{AC}$ ينتمي إلى (ABC).

نستنتج أن: C هي المسقط العمودي للنقطة A على BCD

أي: H هي النقطة C.

ج- مساحة المثلث BCD:

$$S_{BCD} = \frac{BC \cdot CD}{2}$$

$BC = \sqrt{5}$. حسب السؤال (1)

CD: هو بعد النقطة D عن (BCD) ومنه: $CD = \frac{2\sqrt{30}}{5}$

$$S_{BCD} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{30}}{5} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}}{5} = \sqrt{6} \cdot UI$$

التمرين الثاني:

1- تعيين قيمة α حتى تكون (U_n) ثابتة:

(U_n) ثابتة يعني: $U_{n+1} = U_n = U_0$.

* لدينا: $2U_{n+1} = 3U_n^2$ ومنه: $U_{n+1} = \frac{3}{2} U_n^2$

* (U_n) ثابتة يعني أن $\frac{3}{2} U_0^2 = U_0$ أي: $\frac{3}{2} U_0 = 1$ ...(*)

لدينا: $U_0 = \alpha$ يعني أن $\frac{3}{2}\alpha = 1$ أي: $\alpha = \frac{2}{3}$

قيمة α حتى تكون (U_n) ثابتة هي: $\alpha = \frac{2}{3}$

2) نفرض: $\alpha \neq \frac{2}{3}$ و: $V_n = \ln U_n + \ln \frac{3}{2}$

أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية:

(V_n) هندسية يعني أن: $V_{n+1} = V_n \cdot q$ ، $q \in \mathbb{R}$

لدينا: $V_n = \ln U_n + \ln \frac{3}{2}$

$$V_{n+1} = \ln U_{n+1} + \ln \frac{3}{2}$$

$$= \ln \frac{3}{2} U_n^2 + \ln \frac{3}{2}$$

الموضوع الاول

$v_{n+1} = \ln\frac{3}{2} + \ln u_n^2 + \ln\frac{3}{2}$

خواص اللوغاريتم

$= \ln\frac{3}{2} + 2\ln u_n + \ln\frac{3}{2}$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $= 2\ln\frac{3}{2} + 2\ln u_n$

$\ln a^n = n\ln a.$ $= 2\left(\ln\frac{3}{2} + \ln u_n\right)$

$= 2 \cdot v_n$

ومنه : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$

* تعيين الحد الأول لدينا : $u_0 = \alpha$ ومنه : $v_0 = \ln u_0 + \ln\frac{3}{2}$

أي : $v_0 = \ln\alpha + \ln\frac{3}{2}$ ؛ $v_0 = \ln\frac{3}{2}\alpha$

ب) عبارة v_n بدلالة n :

(v_n) : متتالية هندسية حدها الأول v_0 وأساسها q.

حدها العام من الشكل : $v_n = v_0 \cdot q^n$

لدينا $v_0 = \ln\frac{3}{2}\alpha$ و : $q = 2$ $\quad v_n = \left(\ln\frac{3}{2}\alpha\right)2^n$

ج) إثبات أنّ : $v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{2^n}$ (من أجل كل عدد طبيعي n

لدينا : $v_n = \left(\ln\alpha + \ln\frac{3}{2}\right) \cdot 2^n$ ....(1)

و : $v_n = \ln u_n + \ln\frac{3}{2}$ .....(2)

من (1) و (2) ينتج : $2^n \cdot \left(\ln\alpha + \ln\frac{3}{2}\right) = \ln u_n + \ln\frac{3}{2}$

$2^n \ln\left(\frac{3}{2}\alpha\right) = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right) \Longrightarrow \ln\left[\frac{3}{2}\alpha\right]^{2^n} = \ln\left[\frac{3}{2}u_n\right]$ ....(*)

من (*) ينتج : $\left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{2^n} = \frac{3}{2}u_n$

ومنه : $u_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{2^n}$

د- تعيين قيم العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متقاربة

المتتالية (u_n) متقاربة يعني أن $0 > \frac{3}{2}\alpha < 1$

أي : (u_n) متقاربة يعني $0 > \alpha < \frac{2}{3}$

التمرين الثالث :

1 - حل المعادلة : $z^2 - 10z + 34 = 0$

نعلم أنّ : $\Delta = b^2 - 4ac$ ومنه : $\Delta = (-10)^2 - 4(1)(34)$

$\Delta = 100 - 136$

$= -36 = i^2\, 36 \dashrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{36 i^2} = 6i$

ومنه للمعادلة حلّان :

$z_1 = \frac{+10 - 6i}{2}$ $\quad z_1 = 5 - 3i$

$z_2 = \frac{+10 + 6i}{2}$ $\quad z_2 = 5 + 3i$

2- لدينا : $L = \frac{-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{5 + 3i}$

أ- كتابة L على الشكل الجبري :

لدينا $L = \frac{\sqrt{2}(-4 + i)}{5 + 3i}$

نخرج "$\sqrt{2}$" عامل مشترك

$L = \frac{\sqrt{2}(-4 + i)(5 - 3i)}{(5 + 3i)(5 - 3i)}$

الضرب في المرافق

$L = \frac{\sqrt{2}(-20 + 12i + 5i + 3)}{25 + 9}$

الموضوع الاول

$$L = \frac{\sqrt{2}(-17+17i)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

* كتابة L على الشكل الأسي:

$|L| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| |(-1+i)|$ حسب خواص الطويلة $|L| = 1$

$\arg(L) = \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arg(-1+i)$

$\arg(L) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه: $L = e^{\left(\frac{3\pi}{4}\right)i}$

ب- اثبات أن: $L^{12} + 1 = 0$

لدينا: $L = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

$$L^{12} = \left[e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}\right]^{12} = \left[e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\times 12\right)}\right] = e^{i(9\pi)}$$

إذن: $L^{12} = 1(\cos(9\pi) + i\sin(9\pi)) = (-1 + i(0)) = -1$

ونستنتج أن: $L^{12} + 1 = -1 + 1 = 0$

* حساب: $64(-4+i)^{12} + (5+3i)^{12}$

$$L^{12} = \left(\frac{\sqrt{2}(-4+i)}{5+3i}\right)^{12} = \frac{(\sqrt{2})^{12}\cdot(-4+i)^{12}}{(5+3i)^{12}} = \frac{64\cdot(-4+i)^{12}}{(5+3i)^{12}}$$

لدينا: $L^{12} = -1$ أي: $\frac{64\cdot(-4+i)^{12}}{(5+3i)^{12}} = -1$

$64\cdot(-4+i)^{12} = -(5+3i)^{12}$

ومنه: $64\cdot(-4+i)^{12} + (5+3i)^{12} = 0$

- لدينا: $z_A = 5+3i$ ، $z_B = 5-3i$

f: تحويل نقطي حيث $z' = (-1+i)z + 7 - 11i$

- تعيين طبيعة التحويل f وعناصره:

العبارة المركبة للتشابه المباشر هي $z' = az + b$

لدينا: $a = -1+i$ و $|a| = \sqrt{2}$ و $\arg(a) = \frac{3\pi}{4}$

ومنه: f تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

* مركزه: z_Ω حيث: Ω نقطة لاحقتها z_Ω:

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{7-11i}{1-(-1+i)} = \frac{(7-11i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{14+7i-22i+11}{4+1}$$

$$= \frac{25-15i}{5} = 5 - 3i = z_B$$

مركزه: B

ب) تعيين z_C لاحقة النقطة C بالتحويل f

يعني: $f(A) = C$ ، $z_C = (-1+i)z_A + 7 - 11i$

$z_C = (-1+i)(5+3i) + 7 - 11i = -5 - 3i + 5i - 3 + 7 - 11i$

ومنه: $z_C = -1 - 9i$ ، $z_C = -1 - 9i$

الموضوع الاول

ج- تعيين z_G لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC:

G مركز ثقل المثلث ABC يعني أن النقطة G هي مرجح الجملة: $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$

$$z_G = \frac{1z_A+1z_B+1z_C}{1+1+1} = \frac{5+3i+5-3i-1-9i}{3} = \frac{9-9i}{3}$$

ومنه: $z_G = 3-3i$

4- تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\| = \|\tfrac{1}{2}\vec{MA}\|.\|\vec{MA}-\vec{MB}\| \quad \text{.....}(*)$$

نلاحظ أن الجملة: $\vec{MA}-\vec{MB}$ لا تقبل مرجح لأن مجموع المعاملات يساوي الصفر: $(1-1=0)$ ومنه:
$\vec{MA}-\vec{MB} = -\vec{MB}+\vec{MA} = \vec{BM}+\vec{MA} = \vec{BA}$

G: مرجح الجملة المرفقة بالمعاملات $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$
ومنه من أجل كل M من المستوي لدينا:
$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = 3\vec{MG}$

$$\|3\vec{MG}\| = \frac{1}{2}\|\vec{MA}\| \cdot \|\vec{BA}\|$$

$$3MG = \frac{1}{2}MA \cdot BA$$

$$BA = |z_A - z_B| = |5+3i-5+3i| = |6i| = 6$$

إذن: $MG = MA$

ومنه مجموعة النقط M هي: محور القطعة $[GA]$

التمرين الرابع:

I- لدينا: $g(x) = (x-1)^2 - 2\ln(x-1)$ ، $x \in]1,+\infty[$

1) حساب نهايات الدالة g عند أطراف المجال:

الدالة g معرفة على المجال: $]1,+\infty[$

* $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} (x-1)^2 - 2\ln(x-1) = 0 - 2(-\infty) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 - 2\ln(x-1) = +\infty - \infty$: ح.ع.ت

إزالة ح.ع.ت:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-1)^2\left(1 - 2\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$$

2) دراسة تغيرات الدالة g:

الدالة المشتقة:
$$g'(x) = 2.1.(x-1) - 2.\frac{1}{x-1} = \frac{2x-2-2}{x-1}$$

$$g'(x) = \frac{2x-4}{x-1}$$

* دراسة إشارة g':
* المقام: $(x-1)$ موجب على مجال التعريف.
* البسط: $2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ، $-$ قبل 2 و $+$ بعد 2

* جدول التغيرات:

x	1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$g(2)$	↗	$+\infty$

$$g(2) = (2-1)^2 - 2\ln(2-1) = 1 - 2\ln 1 = 1$$

3) إستنتاج إشارة $g(x)$: من جدول التغيرات نلاحظ أن أقل قيمة بلغتها الدالة g هي: $g(2)=1$
ومنه نستنتج أن الدالة g موجبة على المجال $]1,+\infty[$

II لدينا: $f(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}$

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x-1}{2} + \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} = \frac{0}{2} + \frac{1-\infty}{0} = 0 + (1-\infty)\frac{1}{0^+} = (-\infty)+\infty = -\infty$$

الموضوع الاول

نستنتج أن: $x=1$: مستقيم مقارب.

* حساب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2}+\frac{1}{x-1}+\frac{\ln(x-1)}{x-1}=+\infty+0+0=+\infty$$

2) إثبات أن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2(x-1)^2}$ ، $\forall x\in]1,+\infty[$

لدينا: $f(x)=\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1+\ln(x-1)}{x-1}$

$$*\left(\frac{x-1}{2}\right)'=\frac{1(2)-0(x-1)}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$*\left(\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\right)'=\frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)(x-1)-1(1+\ln(x-1))}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{1-1+\ln(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-2\ln(x-1)}{2(x-1)^2}=\frac{g(x)}{2(x-1)^2}$$

- استنتاج تغير الدالة f: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2(x-1)^2}>0$

لأن: $g(x)>0$ و $2(x-1)^2>0$ موجبة حسب السؤال I.3

* جدول تغيرات f:

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) إثبات أن: $(\Delta): y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$: م م م للمنحنى $(\mathcal{C})$.

$$f(x)-y=\cancel{\frac{x-1}{2}}+\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}-\left(\cancel{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}$$

ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$ أي إشارة $\dfrac{1+\ln(x-1)}{x-1}$

$$\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}=0 \iff 1+\ln(x-1)=0$$

$1+\ln(x-1)>0$

$\ln(x-1)>-1$

$x-1>e^{-1}$

$x>e^{-1}+1$

x		$e^{-1}+1$	
$f(x)-y$	$(-)$ $(\mathcal{C})$ تحت (Δ)	$(\mathcal{C})$ يقطع (Δ)	$(+)$ $(\mathcal{C})$ فوق (Δ)

- إثبات أنه توجد نقطة B يقبل فيها $(\mathcal{C})$ مماسا موازي للمستقيم (Δ):

يكون المماس موازي للمستقيم (Δ)

يعني أن (T) و (Δ) لهما نفس معامل التوجيه $\frac{1}{2}$

إذن: $f'(x)=\frac{1}{2}$ ونبحث عن قيم x التي تحقق $f'(x)=\frac{1}{2}$

لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2} \iff \dfrac{(x-1)^2-2\ln(x-1)}{2(x-1)^2}=\frac{1}{2}$

$$\iff 2\cdot(x-1)^2-2\cdot2\ln(x-1)=2(x-1)^2$$
$$\iff \cancel{2(x-1)^2}-4\ln(x-1)=\cancel{2(x-1)^2}$$
$$\iff -4\ln(x-1)=0$$

ومنه: $\ln(x-1)=0 \iff \ln(x-1)=\ln(1)$

$x-1=1$ $\quad x=2$

إذن النقطة الوحيدة B هي النقطة ذات الفاصلة $x_0=2$

معادلة المماس عند النقطة B:

لدينا معادلة المماس هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة B هي:

$f(2)=1$

$f'(2)=\frac{1}{2}$

$(T): y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

الموضوع الاول

4) إثبات أن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α حيث: $1,34 < \alpha < 1,35$.

من جدول التغيرات نلاحظ أن f مستمرة و رتيبة على المجال $]1,+\infty[$ وبالتالي على المجال $]1,34 ; 1,35[$

ولدينا: $f(1,34) = -0,062$

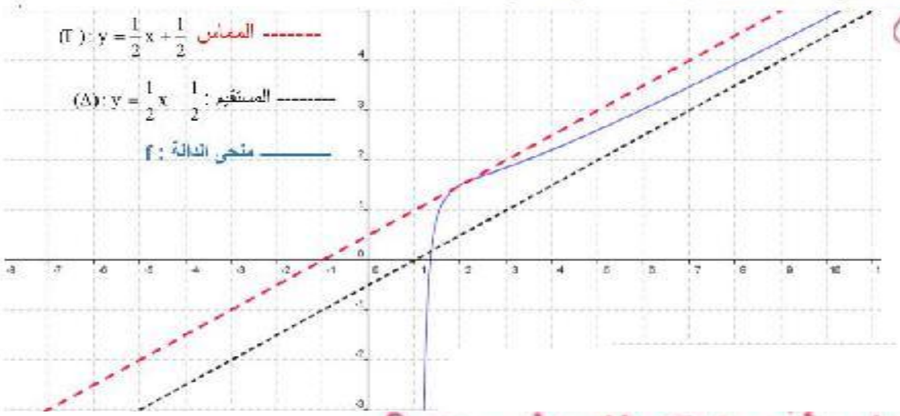
و: $f(1,35) = 0,01$

إذن، حسب نظرية القيم المتوسطة فإن $(f(x)=0)$

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α .

حيث: $1,34 < \alpha < 1,35$.

5) إنشاء (C_f) و (Δ) و (T)



6) تبرير وجود دوال أصلية للدالة f:

بما أن f مستمرة على المجال $]1,+\infty[$

فإن f تقبل دوالا أصلية على المجال $]1,+\infty[$

تعيين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

$$f(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x}_{ax} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{a} + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\frac{u'}{u}} + \underbrace{\frac{\ln(x-1)}{x-1}}_{u'.u}$$

$a = \frac{1}{2}$ ، $a = \frac{1}{2}$ ، $u = x-1$ ، $u' = 1$ ، $u = \ln(x-1)$ ، $u' = \frac{1}{x-1}$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: أ- اثبات أن النقط A، B و C تعين مستوي:

لدينا: $A(-1,2,1)$ ، $B(0,5,2)$ ، $C(3,0,-2)$

$$* \ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0+1\\5-2\\2-1\end{pmatrix} ، \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \quad * \ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3+1\\0-2\\-2-1\end{pmatrix} ، \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

نلاحظ $\frac{1}{4}\neq\frac{3}{-2}\neq\frac{1}{-3}$ ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

غير مرتبطان خطيا أي أن A، B و C تعين مستو

ب- إثبات أن $\vec{n}(1,-1,2)$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

$\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ يعني ذلك أن $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

* لدينا: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=1-3+2=0$

ومنه: $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\-3\end{pmatrix}=4+2-6=0$$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AC}$

* إستنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

بما أن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فإن $\vec{n}$ عمودي على المستوي (ABC)

ومعادلة المستوي (ABC) من الشكل: $x-y+2z+d=0$ ... (*)

لايجاد d يمكن تعويض A أو B أو C في المعادلة (*)

نعوض النقطة A: $-d=(-1)-(2)+2(1)$ ، اذن $d=1$

اذن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC): $x-y+2z+1=0$

2) - 1 - إثبات أن المستوي (P) عمودي على المستوي (ABC).

لدينا: $(P): x+3y+z-6=0$ ، ليكن $\vec{n'}$ شعاع ناظمي لـ (P)

$\vec{n'}(1,3,1)$

لدينا: $(ABC): x-y+2z+1=0$ ، $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

$\vec{n}(1,-1,2)$

(P) يعامد (ABC) يعني أن: $\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$

$\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$ يعني أن: $\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$

$$\vec{n}\cdot\vec{n'}=(1\times1)+(-1\times3)+(2\times1)=1-3+2=0$$

ومنه (P) و (ABC) متعامدان.

- كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و(ABC)

بما أن (P) و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ولإيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

نقوم بحل الجملة:
$$\begin{cases}x-y+2z+1=0 \ \dots(1)\\ x+3y+z-6=0 \ \dots(2)\end{cases}$$

* بجمع المعادلة (1) مع المعادلة (2) طرف لطرف:

نجد: $x=-7y+13$ ، $z=4y-7$ نضع: $y=t$

نجد:
$$(\Delta): \begin{cases}x=-7t+13\\ y=t\\ z=4t-7\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$
وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

* التحقق أن النقطة B لا تنتمي إلى (Δ):

نعوض إحداثيات النقطة B في التمثيل الوسيطي لـ (Δ).

$$\begin{cases}0=-7t+13 \ \dots\to \ t=\frac{13}{7}\\ 5=t \ \dots\dots\to \ t=5\\ 2=4t-7 \ \dots\to \ t=9/4\end{cases}$$

ومنه نلاحظ أن t ليس وحيد ومنه B لا تنتمي إلى (Δ)

الموضوع الثاني

* إستنتاج المسافة بين (B) و (Δ):

علماً أنّ (P) و (ABC) متعامدان

وعلماً أنّ (P) و (ABC) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ولدينا: B نقطة من (ABC) ولا تنتمي إلى (Δ)

فإنّ بُعد النقطة B عن المستقيم (Δ) هو بُعد النقطة عن (P)

$$d(B,(P)) = \frac{|x_B+3y_B+z_B-6|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = \frac{|0+3(5)+2-6|}{\sqrt{11}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$$

ومنه بُعد النقطة B عن (Δ) هو: $d(B,(\Delta)) = \sqrt{11}$

3) إثبات أنّ (γ) هي سطح كرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها: لدينا، M مجموعة النقط (γ) التي تحقق:

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0.$$

$$x^2-2(x)+y^2-2(2y)+z^2-2(3z)+8=0.$$

$$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z-3)^2-9+8=0$$

ومنه: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$

(γ) هي سطح كرة مركزها $\Omega(1,2,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$

* إثبات أنّ (γ) تمس (ABC) في نقطة يُطلب تعيينها:

لإثبات ذلك يكفي إثبات أنّ $d(\Omega,(ABC)) = \sqrt{6}$

أي نثبت أنّ المسافة Ω (مركز (γ)) و المستوي (ABC) هي نفسها نصف قطر (γ) أي $\sqrt{6}$.

لدينا: $\Omega(1,2,3)$ $\quad d(\Omega,(ABC)) = \frac{|1-2+2(3)+1|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

ومنه، المستوي (ABC) هو مماس لـ (γ)

إثبات أنّ (γ) تمس المستوي (ABC) في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها، لاثبات ذلك نتبع ما يلي:

1- تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم المار من مركز (γ) و العمودي على المستوي (ABC).

2- نقوم بتعيين نقطة تقاطع بين هذا المستقيم و (ABC).

هذه الأخيرة - النقطة - هي نقطة تماس (γ) مع (ABC)

ليكن (Δ') المستقيم الذي يشمل $\Omega(1,2,3)$ والعمودي على (ABC)

أي أنّ الشعاع الناظمي لـ (ABC) هو شعاع توجيه هذا المستقيم.

$$(\Delta'): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

نعوّض التمثيل الوسيطي لـ (Δ') في معادلة (ABC).

$$(1+t)-(2-t)+2(3+2t)+1=0 \iff 6t+6=0 \iff t=-1$$

نعوّض $t=-1$ في التمثيل الوسيطي لـ (Δ') نجد:

$$\begin{cases} x = 1-1 \\ y = 2+1 \\ z = 3+2(-1) \end{cases} \text{ نجد } (ABC)\cap(\Delta') = \{(0,3,1)\}$$

الموضوع الثاني

التمرين الثاني:

1) حل المعادلة: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

$\Delta = 12 - 4(1)(4) = 12 - 16 = -4 = i^2 4$

ومنه للمعادلة حلان هما z_1 و z_2: $\sqrt{\Delta} = 2i$

$z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$ ، $z_2 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$

2) لدينا: $P(z) = z^3 + (-2\sqrt{3} + i)z^2 + (4 - 2i\sqrt{3})z + 4i$

أ- اثبات أن $z_0 = -i$ جذر لـ $P(z)$:

$P(-i) = (-i)^3 + (-2\sqrt{3} + i)(-i)^2 + (4 - 2i\sqrt{3})(-i) + 4i$

$= \cancel{i} + 2\sqrt{3} - \cancel{i} - \cancel{4i} - 2\sqrt{3} + \cancel{4i} = 0$

نستنتج أن $z_0 = -i$ جذر لـ $P(z)$.

ب- تعيين العددين b و c حيث: $P(z) = (z+i)(z^2 + bz + c)$

بالنشر نجد: $P(z) = z^3 + bz^2 + cz + iz^2 + ibz + ic$

$= z^3 + (b+i)z^2 + (c + ib)z + ic$

بالمقارنة $\begin{cases} b + i = -2\sqrt{3} + i \\ c + ib = 4 - 2\sqrt{3}i \\ ic = 4i \end{cases}$ إذن $\boxed{b = -2\sqrt{3}}$ $\boxed{c = 4}$

$P(z) = (z + i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

جـ) استنتاج حلول المعادلة $P(z) = 0$

لدينا: $P(z) = 0$ يعني أن: $(z+i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

ومنه، إما $(\bullet): z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ أو $z + i = 0$

حسب ماسبق (من 1) حلول المعادلة $(\bullet)$ هي: | يعني أن $z = -i$

$z_1 = \sqrt{3} + i$: لأن جزؤه التخيلي موجب. | أي:

$z_2 = \sqrt{3} - i$ | $z_0 = -i$

د) كتابة العدد المركب L على الشكل الأسي:

$L = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = \frac{3 + \sqrt{3}i + \sqrt{3}i - 1}{3 + 1}$

$L = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}$ $\boxed{L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

* الشكل الأسي للعدد L:

1) الطويلة: $|L| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

2) العمدة: θ_L $\arg(L): \begin{cases} \cos\theta_L = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_L = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boxed{L = e^{i(\frac{\pi}{3})}}$

هـ) - تعيين قيم العدد الصحيح n حتى يكون L^n عدد موجب تماما.

نعلم أنه يمكن كتابة L على الشكل المثلثي كمايلي:

$L = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$L^n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

L^n: عدد حقيقي موجب يعني $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$ ، $\cos n\frac{\pi}{3} = \cos 2k\pi$

أي: $\frac{n\pi}{3} = 2k\pi$ ، ومنه $n = 6k$

III 1) تمثيل النقط A، B، C:

الموضوع الثاني

2) حساب $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$ لدينا: $z_C = -i$ / $z_B = \sqrt{3} - i$ / $z_A = \sqrt{3} + i$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{(\sqrt{3} - i) - (-i)}{(\sqrt{3} - i) - (\sqrt{3} + i)} = \frac{\sqrt{3} - \cancel{i} + \cancel{i}}{\cancel{\sqrt{3}} - i - \sqrt{3} - i}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\ (2i)}{-2i\ (2i)} = \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

* إستنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-(z_C - z_B)}{-(z_A - z_B)} = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{\sqrt{3}}{2} i$

يعني أنّ $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه، المثلث ABC قائم في B

3) تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MC} \| = 5 \ \ldots\ (*)$$

لدينا: G مرجح الجملة: $\{(A,6),(B,-4),(C,3)\}$

إذن من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$$6\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (6 - 4 + 3)\overrightarrow{MG}$$

أي: $2\left(3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MC}\right) = 5\overrightarrow{MG}$

إذن: $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{MG}$

وهذا يكافئ $\| \frac{5}{2}\overrightarrow{MG} \| = 5$ ومنه $\| \overrightarrow{MG} \| = 2$

$$\boxed{MG = 2}$$

ومنه مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق العلاقة $(*)$ هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 2

عناصر المميزة للتشابه المباشر S حيث:

$S(A) = C \ \ldots\ (1)$ يعني S يحوّل A إلى C.

$S(B) = B \ \ldots\ (2)$ يعني B: نقطة صامدة.

$\begin{cases} z_C = a z_A + b \\ z_B = a z_B + b \end{cases}$ ومنه، $(z_C - z_B) = a(z_A - z_B)$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

إذن، S تشابه مباشر

نسبته: $|a| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاويته: $\arg(a) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ldots\ (k \in \mathbb{Z})$

التمرين الثالث:

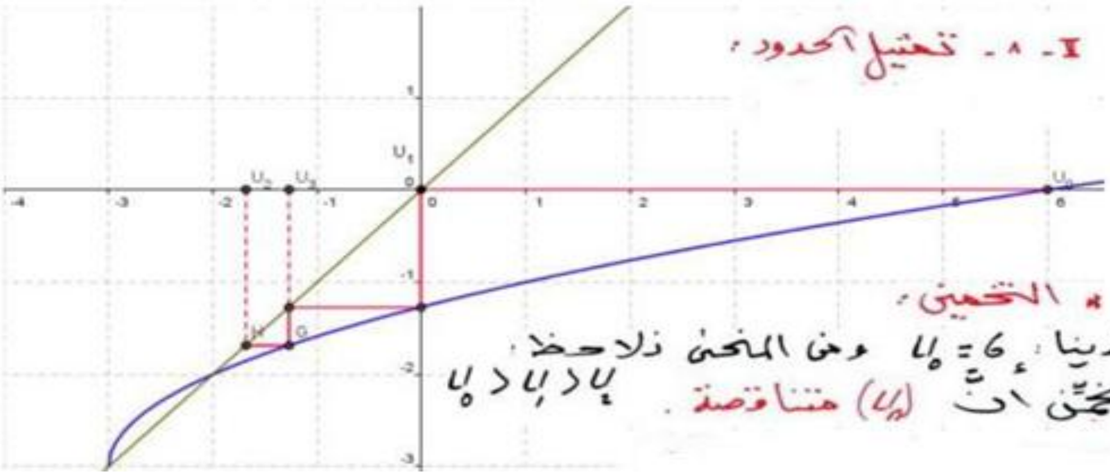
1- اثبات أنّ الدالة f متزايدة:

لدينا: $f(x) = -3 + \sqrt{x+3}$

تكون الدالة f متزايدة إذا كان $f' > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0$$

نستنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما.



I- 1- تمثيل الحدود:

* التخمين:

لدينا: $U_0 = 6$ ومن المنحنى نلاحظ: $U_0 > U_1 > U_2$

نخمن أن (U_n) متناقصة.

الموضوع الثاني

2 . البرهان أنّ $U_n > -2$

نستعمل البرهان بالتراجع : * التحقق من أجل $n=0$ ، $U_0 > -2$ (محققة)

* الفرضية ، نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n : أي : $U_n > -2$

ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي : $U_{n+1} > -2$

* لدينا ، $U_n > -2$ ... حسب الفرضية .

$U_n + 3 > 1$ .... بإضافة العدد 3 إلى الطرفين .

$\sqrt{U_n+3} > \sqrt{1}$ .... لأن الدالة "$\sqrt{\ }$" متزايدة .

$-3 + \sqrt{U_n+3} > -3+1$ ... نضيف العدد -3 إلى الطرفين

ومنه : $U_{n+1} > -2$ ، $U_n > -2$

3 - إثبات أنّ المتتالية (U_n) متناقصة .

لدينا : (U_n) متناقصة يعني : $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

$$U_{n+1} - U_n = -3 + \sqrt{U_n+3} - U_n = \sqrt{U_n+3} - (3+U_n)$$

$$= \frac{\left[\sqrt{U_n+3} - (3+U_n)\right]\left[\sqrt{U_n+3} + (3+U_n)\right]}{\sqrt{U_n+3} + (3+U_n)} = \frac{(U_n+3) - (3+U_n)^2}{\sqrt{U_n+3} + (3+U_n)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 - 5U_n - 6}{\sqrt{U_n+3} + (3+U_n)}$$

* ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

أي ندرس إشارة البسط والمقام .

* المقام : بما أنّ $(U_n > -2)$ فإنّ : $U_n + 3 > 1$ أي $U_n + 3 > 0$

ومنه نستنتج أنّ المقام $\left(\sqrt{U_n+3} + (3+U_n)\right)$ موجب

* البسط : $-U_n^2 - 5U_n - 6$ نستعمل المميز $\Delta = 25 - 24 = 1$

إذن للمعادلة حلان :

$U_n' = \frac{5-1}{2(-1)} = \frac{4}{-2} = \boxed{-2}$

$U_n'' = \frac{5+1}{2(-1)} = \frac{6}{-2} = \boxed{-3}$

$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$	

* بما أنّ : $U_n > -2$ نستنتج أنّ : $-U_n^2 - 5U_n - 6 < 0$

أي : (المقام موجب والبسط سالب) ... $U_{n+1} - U_n < 0$

نستنتج من ذلك أنّ (U_n) متناقصة

بما أنّ (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

III $V_n = \alpha \ln(U_n + 3)$ ، $\alpha \in \mathbb{R}^*$

1 - تعيين قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية غير ثابتة .

(V_n) هندسية يعني : $V_{n+1} = V_n \cdot q$. (q : أساسها) .

$$V_{n+1} = \alpha \ln(U_{n+1} + 3) = \alpha \ln(-3 + \sqrt{U_n+3} + 3) = \alpha \ln\left(\sqrt{U_n+3}\right)$$

$$= \alpha \ln(U_n+3)^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\alpha \ln(U_n+3)} = \frac{1}{2}\cdot V_n \quad *$$

تكون (V_n) متتالية هندسية غير ثابتة إذا كان : $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

2 - نضع $\alpha = \frac{2}{3}$:

* اثبات أنّ (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

من (*) : نستنتج أنّ (V_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{2}}$

* تعيين حدها الأول .

$V_0 = \frac{2}{3}\ln(U_0+3) = \frac{2}{3}\ln 9 = \boxed{\frac{4}{3}\ln 3}$

الموضوع الثاني

3) كتابة V_n بدلالة n:

$V_n = V_0 \cdot q^n$ ، ومنه: $\boxed{V_n = \frac{4}{3}\ln 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

إيجاد عبارة U_n بدلالة n. لدينا: $V_n = \frac{2}{3}\ln(U_n+3)$

$$\frac{3}{2}V_n = \ln(U_n+3) \quad e^{\frac{3}{2}V_n} = e^{\ln(U_n+3)} = U_n+3$$

$$U_n = e^{\frac{3}{2}V_n} - 3 = \left[e^{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ln 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right] - 3 = \left[e^{2\ln 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right] - 3$$

$$\boxed{U_n = \left[e^{\ln 9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right] - 3 = 9^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - 3}$$

* تعيين حدها الأول:

$V_0 = \frac{2}{3}\ln(U_0+3) = \frac{2}{3}\ln 9 = \boxed{\frac{4}{3}\ln 3}$

* استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

بما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln 9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln 9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n} - 3 = 1 - 3 = -2$$

4- من أجل كل عدد طبيعي n: لدينا: $W_n = U_n + 3$

$$W_n = e^{\ln 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \cancel{3} \ \cancel{-3}$$

* عبارة W_n بدلالة U_n:

$$W_n = e^{\ln 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$W_n = e^{\ln 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$W_n = e^{V_n}$$

استنتاج الجداء:

$$T_n = W_0 \times W_1 \times W_2 \ldots W_n$$

$$T_n = e^{V_0}\cdot e^{V_1}\cdot e^{V_2}\ldots e^{V_n} = e^{V_0+V_1+V_2+\cdots+V_n}$$

$$= e^{V_0\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}} = e^{\frac{4}{3}\cdot\ln 3\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}}$$

$$= e^{2\cdot\frac{4}{3}\cdot\ln 3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} = e^{\frac{8}{3}\cdot\ln 3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$$

التمرين الرابع:

$$f(x) = \frac{xe^x - x - 2}{e^x - 1}$$

1. نهايات الدالة f عند أطراف مجال التعريف:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x - x - 2}{e^x - 1} = \dfrac{+\infty - 2}{-1} = -\infty.$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x - x - 2}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}\left[x - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right]}{\cancel{e^x}\left[1 - \frac{1}{e^x}\right]} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{xe^x - x - 2}{e^x - 1} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{xe^x - x - 2}{e^x - 1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

الموضوع الثاني

2. إيجاد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون: $f(x)=ax+\frac{b}{e^x-1}$

$$f(x)=\frac{axe^x-ax+b}{e^x-1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

3. اثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^x-1)^2}$

لدينا: $f(x)=x-\frac{2}{e^x-1}$ ومنه

$$f'(x)=1+\frac{+2e^x}{e^{2x}-2e^x+1}$$

$$=\frac{e^{2x}-2e^x+1+2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x-1)^2}\Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^x-1)^2}}$$

4. دراسة إتجاه تغير الدالة f: جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

لدينا: $f'(x)>0$ لأن $e^{2x}+1>0$ و $(e^x-1)^2>0$

أي الدالة f متزايدة تماما

I اثبات أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') حيث:

ثبات أن $(\Delta): y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) يكفي

اثبات أن: $\lim_{x\to\infty} f(x)-(x+2)=0$

$$f(x)-(x+2)=\cancel{x}-\frac{2}{e^x-1}-\cancel{x}-2=\frac{-\cancel{2}-2e^x+\cancel{2}}{e^x-1}=-\frac{2}{e^x-1}$$

ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2e^x}{e^x-1}=0$

ومنه: $y=x+2$: مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

*لاثبات أن $\boxed{y=x}$ (Δ') م م لـ (C) يكفي اثبات أن:

$\lim_{x\to\infty} f(x)-x=0$

لدينا: $f(x)-x=\cancel{x}-\frac{2}{e^x-1}-\cancel{x}=-\frac{2}{e^x-1}$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2}{e^x-1}=0$

ومنه: $y=x$: مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

الموضوع الثاني

3) إثبات أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين

* النقطة الأولى فاصلتها : $1{,}05 < \alpha_1 < 1{,}10$

من جدول التغيّرات نلاحظ أنّ الدّالة f

- مستمرة
- رتيبة (متزايدة تماما) } على المجال $]0, +\infty[$

وبالتالي فهي مستمرة ورتيبة على المجال $]1{,}05 ; 1{,}10[$

ولدينا أيضا : $f(1{,}10) = 0{,}1$ و $f(1{,}05) = -0{,}02$

أي : $f(1{,}05) \cdot f(1{,}10) < 0$

فـ : حسب نظرية القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α_1 في المجال $]1{,}05 ; 1{,}10[$ يحقق $f(\alpha_1) = 0$

* النقطة الثانية : فاصلتها : $-2.30 < \alpha_2 < -2.20$:

من جدول التغيّرات نلاحظ أنّ f مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما) على المجال $]-\infty, 0[$ وبالتالي على المجال $]-2.30 ; -2.20[$ ولدينا ، $f(-2{,}20) = 0{,}05$ و $f(-2{,}30) = -0{,}07$

أي $f(-2{,}30) \cdot f(-2{,}20) < 0$

فـ ، حسب نظرية القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α_2 في المجال $]-2{,}30 ; -2{,}20[$ يحقق $f(\alpha_2) = 0$

ملاحظة : * المعادلة $f(\alpha_1) = 0$ تعني أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في الفاصلة α_1

* المعادلة $f(\alpha_2) = 0$: تعني أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في الفاصلة α_2

4. حساب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $[f(x) + f(-x)]$

* لدينا : $f(-x) + f(x) = \cancel{-x} - \dfrac{2}{e^{-x}-1} + \cancel{x} - \dfrac{2}{e^{x}-1}$

التفسير الهندسي :

نستنتج أنّ النقطة $(1 ; 0)$ هي مركز تناظر لـ (C_f).

* القاعدة :

f دالة معرّفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم

لإثبات أنّ $A(a ; b)$ هي مركز تناظر لـ (C) :

* 1- نثبت أنّ من أجل كل x من I يكون $2a - x$ من I :

و : $f(2a - x) + f(x) = 2b$

* أو : نثبت أنّ لكل x من I يكون $a - x$ و $a + x$ من I :

و : $f(a - x) + f(a + x) = 2b$

* أو نقوم بتغيير المعلم.

6) المناقشة البيانية لـ : عدد وإشارة المعادلة : $f(x) = x + m$

* المناقشة البيانية : (m : وسيط حقيقي).

$y = x + 2$: مستقيم مقارب مائل. (Δ)

$y = x$: مستقيم مقارب مائل. (Δ')

$y = x + m$: هو مستقيم موازي لـ (Δ) و (Δ')

وذلك لأن لهم نفس معامل التوجيه.

الموضوع الثاني

إذن :

* إذا كان : $m \in]-\infty, 0[$ فإنّ، $f(x)=x+m$ ، لها حلاّن موجبان تماماً.
* إذا كان : $m \in [0, 2[$ فإنّ، $f(x)=x+m$ ، لاتقبل حلول .
* إذا كان : $m \in]2, +\infty[$ فإنّ، $f(x)=x+m$ ، لها حلاّن سالبين تماماً

٥) رسم المستقيمين : (Δ) وَ (Δ') و إنشاء (C_f)