ثانوية مبروكة بنونة – المرسى – المستوى : 3 ع ت

الموسم الدراسي : 2013 / 2014 المـــــــدة : 3 ساعات

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول : (05 نقط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مبررا اختيارك باختصار : z عدد مركب

الأسئلة	الإجابة 1	الإجابة 2	الإجابة 3
إذا كان $\arg(z) = \theta$ و $n \in N^*$ فإن $\arg(z^n)$ هي	$\theta + 2\pi n$	θ^n	$n\theta$
إذا كان $z = \sqrt{5}(sin\frac{\pi}{6} + icos\frac{\pi}{6})$ فإن $\arg(z)$ هي	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
إذا كان $z = l.e^{i\theta}$ و $z' = \frac{3}{2+\|z\|^3}$ فإن $\arg(z')$ هي	$\frac{3\theta}{2+3\theta}$	3θ	$\frac{\theta^3}{2+\theta^3}$
مجموعة حلول المعادلة $3^x + 2 \times 3^{-x} = 3$ هي	$\left\{0 ; \frac{1}{\ln 3}\right\}$	$\left\{0 ; \frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$	$\left\{0 ; \frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$

التمرين الثاني: (04 نقط)

نعتبر الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

و لتكن النقط $A(0; 2; 1)$ و $B(-1; 1; -3)$ و $C(1; 0; -1)$.

1) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها C و تشمل A .

2) ليكن المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = -1 - h \\ y = 1 + 2h \quad ; h \in \mathcal{R} \\ z = -3 + 2h \end{cases}$.

أ- أكتب معادلة للمستوي (p) الذي يشمل النقطة C و يعامد المستقيم (Δ) .

ب- أحسب المسافة بين C و المستقيم (Δ) .

ج- ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (Δ) و سطح الكرة (S) ؟

التمرين الثالث : (04 نقط)

α عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .

1) عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $1 - 4\sqrt{3}\, i$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعدلة ذات المجهول $\mathfrak{z}$ التالية :

$$\mathfrak{z}^2 - \alpha\sqrt{3}\, i\, \mathfrak{z} + \alpha^2(-1 + i\sqrt{3}) = 0 .$$

(نرمز بـ $\mathfrak{z}_1$ للحل الذي طويلته r و $\mathfrak{z}_2$ للحل الآخر .)

3) عبر بدلالة r و θ على طويلتي و عمدتي $\mathfrak{z}_1$ و $\mathfrak{z}_2$.

4) أكتب $\frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1}$ على الشكل المثلثي .

5) استنتج قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

اقلب الصفحة ...

التمرين الرابع : (07 نقط)

I- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $D_f =]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = x + ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) .$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. وحدة الطول $1cm$

1) أ- بين أن f دالة فردية .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2) أ- أثبت أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f على $]1\ ;\ +\infty[$ ، ثم استنتج جدول تغيراتها على D_f .

3) أ- تحقق أن (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس اشارة $ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ على D_f (يمكن ملاحظة أن $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$)

ج- استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) أنشيء كل من (Δ) و (C_f) .

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.

II- لتكن الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = f(|x|)$. (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- بين أن g معرفة على D_f .

ب- بين أن g دالة زوجية ثم أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

جـ- اشرح كيف يمكن انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه .

... بالتوفيق للجميع

ثانوية مبروكة لبونة المرسى -
السنة الدراسية 2013 - 2014
المستوى: 3ع ت

التصحيح النموذجي لاختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (05)

(0,1)

1) إذا كان: $\arg(z)=\theta$ و $n\in\mathbb{N}^*$ فإن $\arg(z^n)$ هي $n\theta$

2) إذا كان $z=\sqrt5\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$ فإن $\arg(z)$ هو $\frac{\pi}{3}$ (0,1)

لأن: $z=\sqrt5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ (1)

$=\sqrt5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

3) إذا كان $z=Le^{i\theta}$ و $z'=\frac{z^3}{2+|z|^3}$ فإن $\arg(z')$ هو 3θ (0,1)

لأن: $z'=\frac{z^3}{2+|z|^3}$

ومنه: $z'=\frac{L^3e^{i3\theta}}{2+L^3}$ (0,5)

اذن: $\arg(z')=3\theta$

4) حلول المعادلة: $3^x+2\times3^{-x}=3$ هي $\left\{0,\frac{\ln2}{\ln3}\right\}$ (0,1)

لأن: $3^x+2\times3^{-x}=3$ تكافئ $\frac{(3^x)^2-3\times3^x+2}{3^x}=0$ (0,1)

تكافئ $(3^x)^2-3\times3^x+2=0$ (0,2)

نضع $3^x=y$ مع $y>0$ (0,5)

تكافئ $y^2-3y+2=0$ (1)

نحل المعادلة نجد: $y_2=1$ ، $y_1=2$

ومنه: $x=\frac{\ln2}{\ln3}$ أو $x=0$ (0,1)

ومنه: $S=\left\{0,\frac{\ln2}{\ln3}\right\}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) لدينا سطح الكرة (S) مركزها C وتشمل A، اذن نصف قطرها هو
$r=CA$

ومنه: $r=\sqrt{1+4+4}=3$

ومنه: $(S):(x-1)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=9$

أي: $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z-7=0$

2) أ- لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (Δ) وهو شعاع ناظمي لـ (P).

لتكن M نقطة من المستوى (P).

$M\in(P)$ يحقق $\vec{CM}\perp\vec{u}$

أي: $\vec{CM}\cdot\vec{u}=0$

لدينا $\vec{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z+1\end{pmatrix}$

ومنه: $(P): -x+2y+2z+3=0$

ب- حساب المسافة بين C والمستقيم (Δ)

- تعيين إحداثيات النقطة H تقاطع (P) و(Δ)

نعوض التمثيل الوسيطي لـ(Δ) في معادلة المستوي (P)

لدينا:
$$\begin{cases}x=-1-h\\y=1+2h\\z=-3+2h\end{cases}$$

ومنه: $1+h+2+4h-6+4h+3=0$

اذن: $9h=0$

أي: $h=0$

بالتعويض نجد: $H(-1,1,-3)$

المسافة بين C و (Δ) هي طول القطعة $[CH]$

أي: $d(C,(\Delta))=CH$

ومنه $d(C,(\Delta))=\sqrt{(-1-1)^2+1^2+(-3+1)^2}=\sqrt{9}=3$

جـ- لتحديد الوضع النسبي لكل من (Δ) و(S) يكفي مقارنة $d(C,(\Delta))$ مع r

لدينا: $d(C,(\Delta))=r$

ومنه: (Δ) مماس لـ (S)

اذن: $(S)\cap(\Delta)=\{C\}$.

التمرين الثالث:

1) ليكن $\beta=x+iy$ جذر لـ $1-4\sqrt3 i$

ومنه:
$$\begin{cases}x^2+y^2=7 \quad \dots (1)\\x^2-y^2=1 \quad \dots (2)\\2xy=-4\sqrt3 \quad \dots (3)\end{cases}$$

بجمع ① و ② نجد: $x=-2$ أو $x=2$

بجمع ② من ① نجد: $y=-\sqrt{3}$ أو $y=\sqrt{3}$

إذن الجذرين هما:

$\beta_1 = -2+\sqrt{3}i$

$\beta_2 = 2-\sqrt{3}i$ — 0,1

② حل المعادلة:

مميز المعادلة هو

$\Delta = (-\alpha\sqrt{3}i)^2 - 4\alpha^2(1+i\sqrt{3})$

$= \alpha^2(-3+4-4\sqrt{3}i)$

$= \alpha^2(1-4\sqrt{3}i)$

ومنه المعادلة تقبل حلين هما:

$$z_1 = \frac{\alpha\sqrt{3}i+\alpha(2-\sqrt{3}i)}{2}$$

$\boxed{z_1 = \alpha}$ 0,1

$$z_2 = \frac{\alpha\sqrt{3}i-\alpha(2-\sqrt{3}i)}{2}$$

$\boxed{z_2 = -\alpha+\alpha\sqrt{3}i}$ 0,1

③ التعبير بدلالة r و θ عن طويلة وعمدة z_1 و z_2

$|z_1| = |\alpha| = r$ 0,25

$\arg(z_1) = \arg(\alpha)$ 0,25

$= \theta$

$|z_2| = |\alpha(-1+\sqrt{3}i)|$

$= |\alpha||-1+\sqrt{3}i|$ 0,25

$|z_2| = 2r$

$\arg(z_2) = \arg(\alpha)+\arg(-1+\sqrt{3}i)$

لتكن θ' عمدة $(-1+\sqrt{3}i)$

لدينا:

$$\begin{cases} \cos\theta' = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ومنه: $\theta' = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 0,25

إذن: $\arg(z_2) = \theta + \frac{2\pi}{3}$

4- كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل المثلثي

لدينا:

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$$

$= 2$

$$\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg(z_2)-\arg(z_1)$$

$$= \theta+\frac{2\pi}{3}-\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$ 0,1

ومنه:

$$\frac{z_2}{z_1} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

⑤ إستنتاج قيم العدد الطبيعي n

لدينا:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 2^n\left(\cos n\frac{2\pi}{3}+i\sin n\frac{2\pi}{3}\right)$$

$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n$ عدد حقيقي موجب تماما يكافئ $2i\sin\frac{n2\pi}{3}=0$

أي: $\sin n\frac{2\pi}{3} = 0$

أي $n\frac{2\pi}{3} = 2k\pi$

أي: $\boxed{(k\in\mathbb{N})\ n = 3k}$

1

التمرين الثاني:

1) أ- نبين أن f دالة فردية:

لدينا من أجل كل $x\in D_f$ ؛ $(-x)\in D_f$

ولدينا:

$$f(-x) = -x+\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$$

$$= -x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= -x+\ln(x-1)-\ln(x+1)$$

$$= -x-(\ln(x+1)-\ln(x-1))$$

$$= -x-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$f(-x) = -f(x)$

ومنه f فردية.

ب)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

$= +\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \ln x + \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$\ln x \to 1$ ، $\frac{x+1}{x-1} \to 0^+$ ، $+\infty$

$$= +\infty$$

② f قابلة للإشتقاق على D_f ودالتها المشتقة f' معرفة كما يلي:

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= 1 + \frac{-2}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2-3}{x^2-1}$$

إشارة $f'(x)$ تعتمد على إشارة $(x^2-3)(x^2-1)$

جدول إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	////	‖	$-$	0	$+$	

<u>جدول تغيرات الدالة f على $]1,+\infty[$</u>

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

<u>إستنتاج جدول تغيرات الدالة f على D_f</u>

بما أن f دالة فردية فإن:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = -\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	////	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\sqrt{3})$	↘	$-\infty$	////	$+\infty$	↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

③ ب- $\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$$= 0$$

ومنه: $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

<u>ب- إشارة $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ على D_f.</u>

$\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 0$ يكافئ $\ln\left|1 + \frac{2}{x-1}\right| = 0$

أي: $\frac{2}{x-1} = 0$ (غير ممكن)

ومنه: مهما يكن $x \in D_f$: $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \neq 0$

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$ يكافئ $\frac{2}{x-1} > 0$

أي $x - 1 > 0$

أي: $x \in]1, +\infty[$

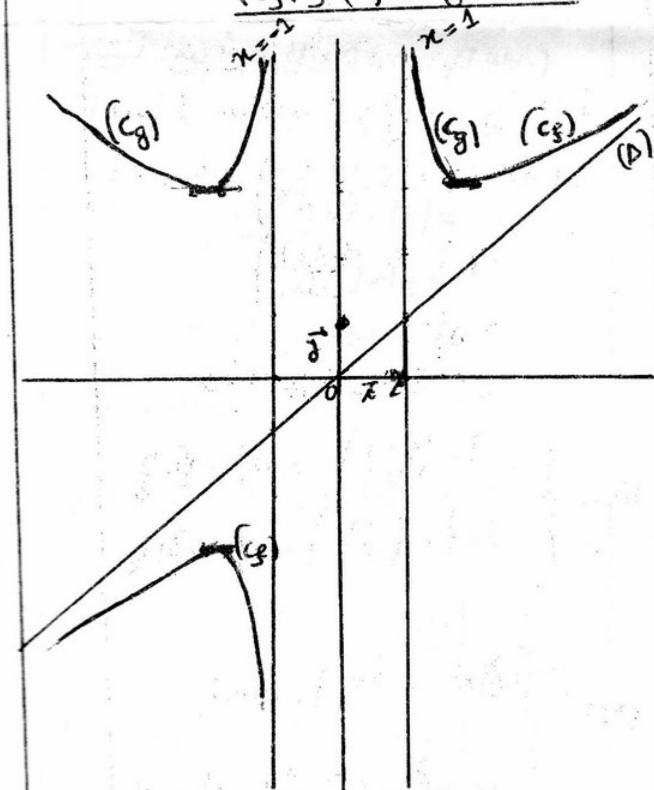
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$ يكافئ $x - 1 < 0$

أي $x \in]-\infty, -1[$

<u>ج- إستنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ).</u>

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	(C_f) يقع أسفل (Δ)	‖	////	‖	(C_f) يقع فوق (Δ)

<u>4- إنشاء كل من (Δ) و (C_f)</u>



$f(\sqrt{3}) \simeq 3{,}05$ ، $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$