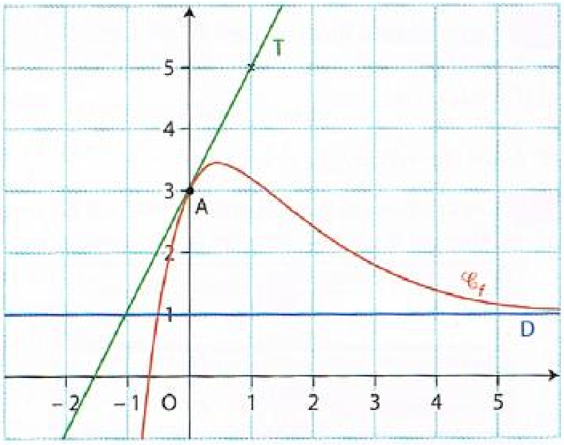
ثانوية صلاح الدين الأ يوبي- بوقادير **السنة الدراسية : 2014/2013**

المستوى : 3 علوم تجريبية **التاريخ: 2013/12/03**

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأ ول :

f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس .



(T) المماس للمنحني عند النقطة $A(0;3)$ و المار بالنقطة $B(1;5)$

1.عين بيانيا $f(0)$ و $f'(0)$

2.أكتب معادلة المماس (T) .

3.نضع : $f(x)=1+\dfrac{ax+b}{e^x}$ حيث a و b عددان حقيقيان

أ) عين عبارة $f'(x)$ بدلالة a و b

ب)بالإستعانة بنتيجة السؤال 1 ،عين العددان الحقيقيان a و b

4.تعطى $f(x)=1+\dfrac{ax+b}{e^x}$ ، أدرس إتجاه تغير الدالة f .

التمرين الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=x+2-\dfrac{4}{1+3e^{-x}}$ ثم أستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) أحسب $f'(x)$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f ثم بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$.

ب)أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) ماذا يمكن القول عن المماس (T_1) للمنحني (C_f)عند النقطة μ ذات الفاصلة $\ln(3)$ ؟ ثم استنتج وضعيته النسبية الى (C_f)

4) أ) بين أن المنحني (C_f)يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب $y=x+2$ و $y=x-2$.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من (Δ)و (Δ').

5) أثبت أن النقطة $\mu(\ln(3);\ln(3))$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

6) أ) أكتب معادلة المماس (T_2) للمنحني (C_f)عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب) أدرس وضعية (C_f)بالنسبة الى (T_2)على المجال $]-\infty;\ln(3)]$ ، يمكن الاستعانة بالمشتقة الثانية f'' للدالة f والمعرفة من أجل كل عدد حقيقي x ، بـــ: $f''(x)=\dfrac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^2}$.

7) أرسم (T_1)،(T_2)،(Δ) ، (Δ')و (C_f).

التمرين الثالث :

عين في كل حالة من الحالات التالية الإقتراح الصحيح (التبرير غير مطلوب)

1/مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E)\ y'+2y=0$ هي الدوال:

$x \to Ce^{-\frac{1}{2}x}$	$x \to Ce^{-2x}$	$x \to Ce^{\frac{1}{2}x}$	$x \to Ce^{2x}$

2/ نعتبر المعادلة التفاضلية $(E)\ 2y'-3y=6$ ، الدالة f حل المعادلة (E) هي :

$f: x \to \frac{2}{3}\left(e^{-\frac{3}{2}x+1}-3\right)$	$f: x \to \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{2}x+1}-3\right)$	$f: x \to e^{-\frac{3}{2}x}-2$	$f: x \to e^{\frac{3}{2}x}+2$

3/ العدد $e^{\ln(2)}+e-4$ يساوي :

$e+2$	$e-2$	$\ln(2)+e-4$	-2

4/ العدد $e^{-3\ln 4}$ يساوي :

-12	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{81}$

5/ من أجل كل عدد حقيقي x : $2x-\ln(e^x+3)$ يساوي :

$3x-\ln(1+3e^{-x})$	$x+\ln(1+3e^{-x})$	$x-\ln(1+3e^{-x})$	$3x+\ln(1+3e^{-x})$

6/ حل المعادلة $\ln x=\frac{1}{2}$ هو :

$\frac{1}{2}e$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\sqrt{e}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$

7/ مجموعة حلول المعادلة $\ln(x^2+4x+3)=\ln(5x+9)$ هو :

$S=\{-2;3\}$	$S=\{2;-3\}$	لا يوجد حل	$S=\{3\}$

8/مجموعة حلول المعادلة $e^{2x}-5e^x+6=0$: هي :

$S=\{2;3\}$	$S=\{e^2;e^3\}$	$S=\{0;\ln 6\}$	$S=\{\ln 2;\ln 3\}$

9/الدالة المشتقة على المجال $]0;+\infty[$ للدالة $x \to \ln\left(\sqrt{2x}\right)$ هي :

$x \to \frac{1}{2x}$	$x \to \frac{1}{x\sqrt{2}}$	$x \to \frac{1}{\sqrt{2x}}$	$x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x^2+3}\right)$ تساوي :

$-\infty$	e^3	0	$+\infty$

حل التمرين الأول :

1.تعيين بيانيا $f(0)$ و $f'(0)$

$f(0)=0$ $\qquad$ $f'(0)=\dfrac{5-3}{1-0}=2$

2.كتابة معادلة المماس (T) .

$y=2x+3$

3.نضع : $f(x)=1+\dfrac{ax+b}{e^x}$ حيث a و b عددان حقيقيان

أ) $f'(x)=\left(1+\dfrac{ax+b}{e^x}\right)'=\dfrac{ae^x-e^x(ax+b)}{(e^x)^2}=\dfrac{(-ax+a-b)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{(-ax+a-b)}{e^x}$

ب) تعيين العددان الحقيقيان

لدينا : $f(0)=1+\dfrac{a\times 0+b}{e^0}=1+b=3$ ومنه $b=2$

$f'(0)=\dfrac{-a\times 0+a-b}{e^0}=a-b=2$ ومنه $a=2+b=4$ إذن : $a=4$ و $b=2$

1) دراسة إتجاه تغير الدالة f

حسب السؤال 3 .أ) لدينا : $f'(x)=\dfrac{-4x+4-2}{e^x}=\dfrac{-4x+2}{e^x}$ ونعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x\succ 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-4x+2$.الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

التمرين الثاني :

2) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right)=-\infty+2-\frac{4\times 0}{0+3}=-\infty$$

ب)بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=x+2-\dfrac{4}{1+3e^{-x}}$ ثم أستنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$x+2-\frac{4}{1+3e^{-x}}=x+2-\frac{e^x}{e^x}\times\frac{4}{1+3e^{-x}}=x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}=f(x)$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\dfrac{4}{1+3e^{-x}}\right)=+\infty+2-\dfrac{4}{1+3\times 0}=+\infty$

3) أ) حساب $f'(x)$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f ثم بيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$.

$$f'(x)=1-4\frac{e^x(e^x+3)-e^x(e^x)}{(e^x+3)^2}=1-\frac{12e^x}{(e^x+3)^2}=\frac{(e^x+3)^2-12e^x}{(e^x+3)^2}=\frac{e^{2x}+6e^x+9-12e^x}{(e^x+3)^2}=\frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

ومنه أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

بما أن $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2\geq 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) بماأن $f'(\ln 3)=\left(\dfrac{e^{\ln 3}-3}{e^{\ln 3}+3}\right)^2=0$ فإن المماس (T_1) للمنحني (C_f) عند النقطة μ ذات الفاصلة $\ln(3)$ يكون موا زيا لمحور الفواصل و كون الدالة متزايدة على $\mathbb{R}$ فإن (C_f) يقع تحت (T_1) من أجل $x<\ln 3$ و يقع فوقه من أجل $x>\ln 3$.

4) أ) بيان أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب $y=x+2$ و $y=x-2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)=0$ و منه نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12}{e^x+3}\right)=0$ و منه نستنتج أن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من (Δ) و (Δ') .

نحسب الفرق $f(x)-y$ و ندرس إشارته

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f(x)-y=\left(f(x)-(x+2)\right)=-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\prec 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ) عند $-\infty$

و $f(x)-y=\left(f(x)-(x-2)\right)=\dfrac{12}{e^x+3}\succ 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ_2) عند $+\infty$

5) إثبات أن النقطة $\mu\left(\ln(3);\ln(3)\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

يكفي أن نثبت أن : $f(2\ln 3-x)+f(x)=2\ln 3$ أي : $f(\ln 9-x)+f(x)=\ln 9$

لدينا :

$$f(\ln 9-x)+f(x)=\left(\ln 9-\cancel{x}\right)+2-\frac{4e^{(\ln 9-x)}}{e^{(\ln 9-x)}+3}+\cancel{x}+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$$

$$=\ln 9+4-\frac{e^x}{e^x}\times\frac{4e^{(\ln 9-x)}}{e^{(\ln 9-x)}+3}-\frac{4e^x}{e^x+3}=\ln 9+4-\frac{36}{9+3e^x}-\frac{4e^x}{e^x+3}$$

$$=\ln 9+4-\frac{12}{3+e^x}-\frac{4e^x}{e^x+3}=\ln 9+4-\left(\frac{12}{3+e^x}+\frac{4e^x}{e^x+3}\right)=\ln 9+4-4\left(\frac{\cancel{3+e^x}}{\cancel{3+e^x}}\right)=\ln 9$$

6) أ) كتابة معادلة المماس (T_2) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة **0**

$f'(0)=\left(\dfrac{e^0-3}{e^0+3}\right)^2=\left(\dfrac{-2}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ $\qquad f(0)=2-\dfrac{4}{1+3}=1$ $\qquad y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{1}{4}x+1$

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (T_2) على المجال $\left]-\infty;\ln(3)\right]$

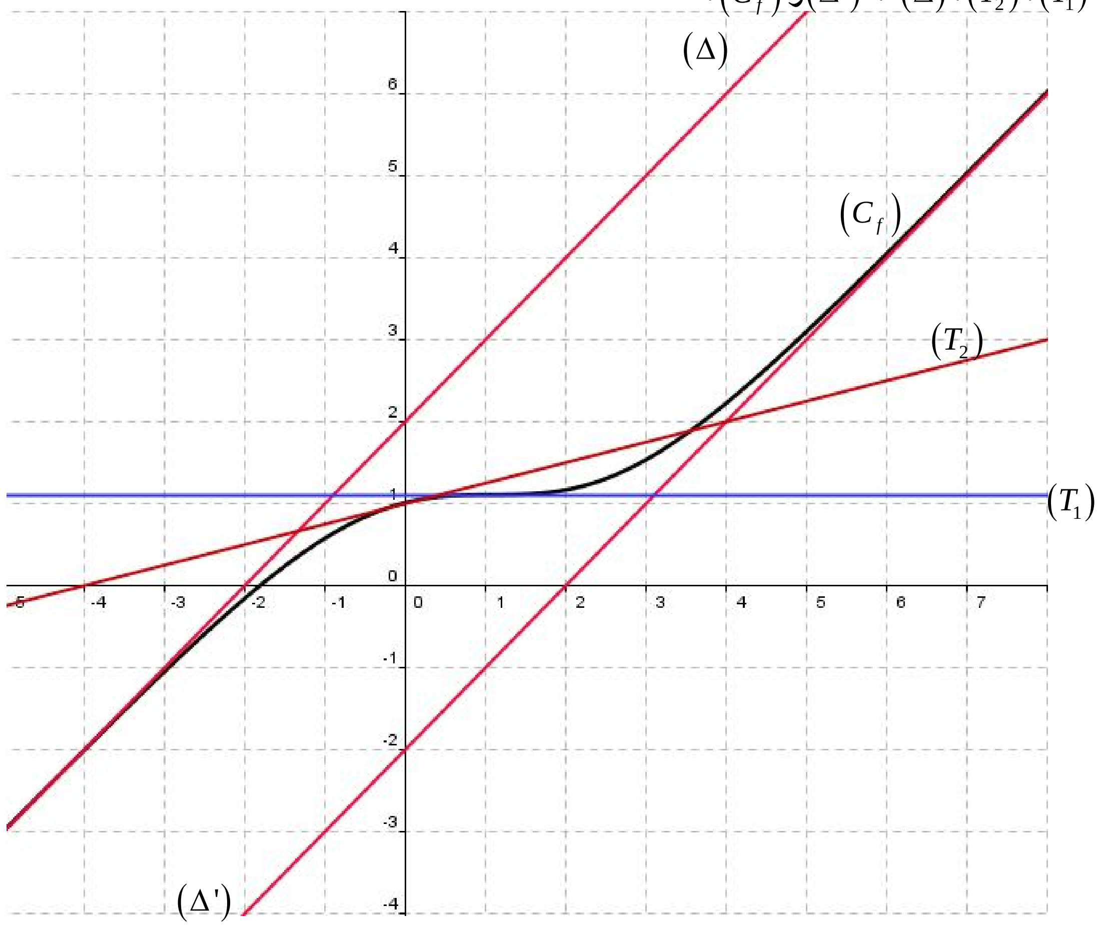
أجل كل عدد حقيقي x ، نضع : $g(x)=f(x)-\left(\dfrac{1}{4}x+1\right)\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{4}\Rightarrow g''(x)=f''(x)$

على المجال $\left]-\infty;\ln(3)\right]$ ، $f''(x)=\dfrac{12e^x\left(e^x-3\right)}{\left(e^x+3\right)^3}\leq 0$ أي : $g''(x)\leq 0$ ومنه الدالة g' متناقصة و $g'(0)=0$ إذن : g' موجبة قبل **0** و سالبة بعد **0**

وعليه فأن الدالة g متزايدة على المجال $\left]-\infty;0\right]$ و متناقصة على المجال $\left[0;\ln(3)\right]$ و لدينا : $g(0)=0$ أي : g سالبة دوما ومنه (C_f) يقع تحت (T_2) على المجال $\left]-\infty;\ln(3)\right]$.

x	$-\infty$		0		$\ln 3$
g''		$-$		$-$	
g'		$\searrow$	0	$\searrow$	
إشارة g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	
إشارة g		$-$	0	$-$	

7) رسم (T_1)، (T_2)، (Δ) ، (Δ') و (C_f).



التمرين الثالث :

(1 $x \to Ce^{-2x}$

(2 $f : x \to \dfrac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{2}x+1} - 3\right)$

3) $e-2$

4) $\frac{1}{64}$

5) $x-\ln(1+3e^{-x})$

6) $\sqrt{e}$

7) $S=\{3\}$

8) $S=\{\ln 2;\ln 3\}$

9) $x \rightarrow \frac{1}{2x}$

10) 0