الإجابة النموذجية لامتحان البكالوريا التجريبية

في مادة الرياضيات – دورة ماي 2014 –

الشعبة : رياضيات + تقني رياضي

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول :

1) أ) التحقق أن: $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$

* $z_B - z_D = 1 + \frac{a-1}{a} i + \frac{1}{a} i$

$= 1 + \frac{a-1+1}{a} i = 1 + i$

* $\overline{z_D}(z_A - z_C) = \frac{1}{a} i (a - ai)$

$= i + 1 = 1 + i$

ومنه $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$

ب) استنتاج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان

من السؤال أ) لدينا :

$$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D} = \frac{1}{a} i$$

ومنه:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{a} i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$$

لأن $\frac{1}{a} > 0$.

وهكذا : $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

إذن $(AC) \perp (BD)$

2) أ) تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S :

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل:

$z' = \alpha z + \beta \; ; \alpha \in \mathbb{C} , \beta \in \mathbb{C}$

لدينا:

$z_B = \alpha z_A + \beta$ ....(1) معناه: $S(A) = B$

$z_D = \alpha z_C + \beta$ ....(2) معناه $S(C) = D$

من (1) و (2) وبالطرح نجد:

$z_B - z_D = \alpha (z_A - z_C)$

ومنه

$$\alpha = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$$

من السؤال 1) أ) نجد $\alpha = \overline{z_D}$

إذن $\boxed{\alpha = \frac{1}{a} i}$

لتعيين العدد المركب β :

لدينا $z_D = \alpha z_C + \beta$ ومنه

$\beta = z_D - \alpha z_C$

$= -\frac{1}{a} i - \frac{1}{a} i (a i)$

نجد $\boxed{\beta = 1 - \frac{1}{a} i}$

الكتابة المركبة لـ S هي :

$$\boxed{z' = \frac{1}{a} i z + 1 - \frac{1}{a} i}$$

ب) تحديد z_Ω لاحقة المركز Ω للتشابه S

نعلم أن: $z_\Omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$

ومنه $z_\Omega = \frac{1 - \frac{1}{a} i}{1 - \frac{1}{a} i} = 1$

$\boxed{z_\Omega = 1}$

* تحديد العناصر المميزة للتشابه S :

S تشابه مباشر مركزه Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته $\frac{1}{a}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

(لاحظ أن $\frac{1}{a} > 0$).

جـ) نبين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان

لدينا: $S(A) = B$ و $S(C) = D$

لنجد لاحقة صورة O بالتحويل S :

لاحقة O هي الصفر (0) ومنه:

$z' = \frac{1}{a} i (0) + 1 - \frac{1}{a} i = 1 - \frac{1}{a} i = z_H$

لأن $z_H = 1 + z_D = 1 - \frac{1}{a} i$

وهكذا $S(O) = H$

إذن صورة المثلث OAC بالتحويل S هو المثلث BHD وبما أن S تشابه مباشر فإن المثلثين متشابهان.

* إيجاد علاقة بين مساحتي المثلثين:

$\mathcal{A}(BHD) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot \mathcal{A}(OAC)$

$$\boxed{\mathcal{A}(BHD) = \frac{\mathcal{A}(OAC)}{a^2}}$$

3) أ) نبين أن (U_n) متتالية هندسية:

لدينا: $U_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_\Omega|$

$= \Omega M_{n+1}$

بما أن: $M_{n+1} = S(M_n)$ فإن:

$\Omega M_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot \Omega M_n$

ومنه: $U_{n+1} = \frac{1}{a} \Omega M_n$

$= \frac{1}{a} |Z_n - Z_\Omega| = \frac{1}{a} U_n$

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot U_n$

ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها q حيث $\boxed{q = \frac{1}{a}}$ وحدها الأول U_0 حيث:

$U_0 = |\cancel{Z_0} - Z_\Omega| = |Z_A - Z_\Omega|$

$\boxed{U_0 = |a-1|}$

ب) تعيين قيم a بحيث تكون (U_n) متقاربة

(U_n) متقاربة يعني $-1 < q \le 1$

أي $-1 < \frac{1}{a} \le 1$

بما أن $\frac{1}{a} > 0$ نستنتج أن $0 < \frac{1}{a} \le 1$

أي $a \ge 1$ وبما أن $a \ne 1$

فإن $a > 1$

أي $\boxed{a \in]1;+\infty[}$

جـ) حساب المجموع T_n بدلالة n:

$T_n = M_{n+1}\Omega + M_n\Omega + \dots + M_0\Omega$

لاحظ أن $M_n\Omega = |Z_n - Z_\Omega| = U_n$

ومنه

$T_n = U_{n+1} + U_n + \dots + U_0$

(مجموع (n+2) حدا من حدود متتالية هندسية)

إذن:

$T_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

$T_n = |a-1| \times \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}}{1-\frac{1}{a}}$

$\boxed{T_n = a \times \frac{|a-1|}{a-1}\left[1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right]}$

4) لدينا $z = a(1+e^{i\theta})$ ؛ $\theta \in \mathbb{R}$

* تحديد طبيعة مجموعة النقط (Γ):

$z = a(1+e^{i\theta})$ يكافئ $z = a + ae^{i\theta}$

يكافئ $z - a = ae^{i\theta}$

لما يمسح θ المجموعة $\mathbb{R}$ تكون لدينا:

$|z-a| = |ae^{i\theta}| = |a| = a$; (لأن $a>0$)

وهكذا: $|z-a| = a$

إذن (Γ) هي دائرة مركزها A ذات اللاحقة a ونصف قطرها $r = a$

حل التمرين الثاني:

I/ تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha = 475\beta + m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

$2014\alpha = 475\beta + m$ تكافئ $2014\alpha - 475\beta = m$

لدينا $PGCD(2014;475) = 19$

وهكذا:

$2014\alpha - 475\beta = m$ تكافئ $19(106\alpha - 25\beta) = m$

ومنه $19 / m$ أي:

$\boxed{m = 19k \text{ مع } k \in \mathbb{Z}}$

II/ لدينا المعادلة: $2014x - 475y = -19$ (1)

1) تعيين الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $y_0 - 4x_0 = 1$

المعادلة (1) تكافئ $19(106x - 25y) = -19$

تكافئ $106x - 25y = -1$ ....(*)

لدينا $y_0 = 4x_0 + 1$ بالتعويض في المعادلة (*) نجد:

$106x_0 - 25(4x_0+1) = -1$

بعد الحل نجد $x_0 = 4$ إذن $y_0 = 17$

إذن: $\boxed{(x_0;y_0) = (4;17)}$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

المعادلة (1) والمعادلة (*) متكافئتان لهما نفس مجموعة الحلول.

إذن نحل المعادلة $(*) \ldots\ 106x-25y=-1$

لدينا الثنائية $(4;17)$ حل للمعادلة (*) فإن

$(E) \ldots\ 106(4)-25(17)=-1$

من (*) و (E) ~~وبالطرح~~ نجد:

$106x-25y=106(4)-25(17)$

$106(x-4)=25(y-17)$

لدينا: $25/106(x-4)$ و [25 و 106 أوليان فيما بينهما]

حسب مبرهنة غوص: $25/(x-4)$

إذن $x-4=25k$ أي $x=25k+4$

بنفس الطريقة نجد (أو بالتعويض):

$y=106k+17$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات

$\boxed{(25k+4;106k+17) \text{ من } \mathbb{Z}^2 \text{ حيث } k\in\mathbb{Z}}$

3) نبين أن x و y أوليان فيما بينهما حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (1).

ليكن d قاسم مشترك لـ x و y.

~~$d/25x$ ومنه d/y~~

~~$d/106y$ ومنه d/x~~

d/x ومنه $d/106x$

d/y ومنه $d/25y$

إذن $d/106x-25y$ أي $d/-1$

بما أن $d\in\mathbb{N}$ فإن $d/1$

وهكذا $d=1$

إذن $PGCD(x;y)=1$

ومنه x و y أوليان فيما بينهما.

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث:

$n\equiv4[25]$ وباقي قسمة n على 106 هو 17

أي نحل الجملة $\begin{cases} n\equiv4[25]\\ n\equiv17[106]\end{cases}$

إذن $\begin{cases}n=25\alpha+4\\ n=106\beta+17\end{cases}$ ومنه

$106\beta+17=25\alpha+4$

$106\beta-25\alpha=-13$

لدينا الثنائية $(4;17)$ حل خاص للمعادلة

$106\beta-25\alpha=-1$

ومنه الثنائية $(13\times4;13\times17)$ حل خاص للمعادلة

$106\beta-25\alpha=-13$

بعد حل المعادلة $106\beta-25\alpha=-13$

بإتباع نفس الطريقة في الفرع 2) من التمرين

نجد: $\begin{cases}\beta=25p+52\\ \alpha=106p+221\end{cases}$ مع $p\in\mathbb{N}$

لكن $n=106\beta+17$ بالتعويض نجد:

$n=106(25p+52)+17$

ومنه

$\boxed{n=2650p+5529 \text{ مع } p\in\mathbb{N}}$

5) تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث تكون $(x+y)$ مضاعف للعدد 10

$x+y=(25k+4)+(106k+17)$

$=131k+21$

$(x+y)$ مضاعف للعدد 10 معناه:

$x+y\equiv0[10]$

أي $131k+21\equiv0[10]$

لكن $131\equiv1[10]$ أي $131k\equiv k[10]$

و $21\equiv1[10]$

إذن: $k+1\equiv0[10]$ ومنه $k\equiv-1[10]$

أي $k\equiv-1+10[10]$ ومنه $k\equiv9[10]$

إذن: $K = 10t + 9$

ومنه

$\boxed{(x;y) \in \{(250t+229\,;\,1060t+971)\ /\ t\in\mathbb{Z}\}}$

حل التمرين الثالث:

1) نبين أن المثلث ABC قائم:

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 3\times3+0\times3+3(-3)=0$

ومنه الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متعامدان

إذن المثلث ABC قائم في A.

2) نبين أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويشمل النقطة A.

من التمثيل الوسيطي للمستوي (P) نجد أن:

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ شعاعي توجيه للمستوي (P)

و $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

$$\begin{cases}\vec{AB}\cdot\vec{u} = (-3)(3)+(2)(3)+(1)(3)=0\\ \vec{AB}\cdot\vec{v} = 3(1)+(3)(-1)+0\times3=0\end{cases}$$

ومنه $\vec{AB}$ عمودي على الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

إذن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P)

نبين أن $A\in(P)$: نحل الجملة:

$$\begin{cases}-3\alpha+\beta=3\\2\alpha-\beta=-2\\\alpha+3=2\end{cases}$$

نجد أن هذه الجملة تقبل حلا وحيدا هو:

$(\alpha;\beta)=(-1;0)$

إذن $A\in(P)$

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A والعمودي على المستقيم (AC)

لدينا $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (AC) فهو شعاع ناظم لـ (Q) ومنه

$(Q): 3x-3z+d=0$

بما أن $A\in(Q)$ فإن $3(3)-3(2)+d=0$

ومنه $d=-3$

إذن $(Q): 3x-3z-3=0$

أو باختصار: $\boxed{(Q): x-z-1=0}$

4) تعيين تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q).

أولا: نجد معادلة ديكارتية للمستوي (P)

ومنه $\begin{cases}x=-3\alpha+\beta\\y=2\alpha-\beta\\z=\alpha+3\end{cases}$ (1) $x+y=-\alpha$

لدينا $z=\alpha+3$ ومنه (2) $z-3=\alpha$

من (1) و (2) نجد: $x+y=3-z$

إذن $\boxed{(P): x+y+z-3=0}$

لدينا: $\begin{cases}(P): x+y+z-3=0\\(Q): x-z-1=0\end{cases}$

بوضع $z=t$ نجد: $x=t+1$

و $y=-2t+2$

إذن: $\boxed{(\Delta): \begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}}$

5) نبين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC). حيث $D(0;4;-1)$

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\vec{AD}\cdot\vec{AB} = (3)(-3)+(3)(6)+(3)(-3)=0\\ \vec{AD}\cdot\vec{AC} = (3)(3)+(0)(6)+(-3)(-3)=0\end{cases}$$

بما أن $\vec{AD}$ عمودي على الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير المرتبطين خطيا فإن (AD) عمودي على المستوي (ABC)

6) حساب حجم رباعي الوجوه $ABDC$

رباعي الوجوه $ABDC$ هو قائم قاعدته المثلث ABC لأن $(AD)\perp(ABC)$

نرمز ب V إلى حجمه فيكون لدينا :

$$V = \mathcal{A}(ABC) \times AD \times \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB\times AC}{2}$$

وهكذا :

$$V = \frac{AB\times AC\times AD}{6}$$

بعد حساب الأطوال AB ، AC و AD نجد :

$$V = \frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{6}}{2\times 3} = 27\,(u.v)$$

$$\boxed{V = 27\,(u.v)}$$

$u.v$ (وحدة الحجوم).

7) أ) نبين أن $\frac{\pi}{4}$ هو قيس بالراديان للزاوية الهندسية $B\hat{D}C$.

نعلم أن :

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC} = BD\times DC\times\cos(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{DC})$$

ومنه

$$\cos(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{DC}) = \frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}}{BD\times DC}$$

لدينا

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix} ; \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC} = -54$$

$$BD = \sqrt{(-6)^2+3^2+(-6)^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$DC = 6\sqrt{2}$$

ومنه

$$\cos(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{DC}) = \frac{-54}{9\times 6\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

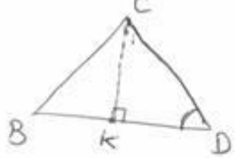
إذن

$$\cos(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{DC}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه $\frac{\pi}{4}$ قيس للزاوية الهندسية $B\hat{D}C$.

ب) حساب مساحة المثلث BDC :

لتكن K المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (BD)



$$\sin\hat{D} = \frac{CK}{CD}$$

ومنه

$$CK = CD\times\sin\hat{D}$$

لكن $\sin\hat{D} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ لأن $\hat{D} = \frac{\pi}{4}$

$$CK = \frac{\sqrt{2}}{2}\times CD = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 6\sqrt{2}$$

$$CK = 6$$

ومنه

$$\mathcal{A}(BDC) = \frac{BD\times CK}{2}$$

$$= \frac{6\times 9}{2} = 27\,(ua)$$

(ua) وحدة المساحات

* استنتاج المسافة بين A والمستوي BDC :

نرمز ب d إلى هذه المسافة .

لنحسب حجم رباعي الوجوه $ABDC$ بطريقة ثانية باعتبار قاعدته المثلث BDC فيكون ارتفاعه هو d .

وهكذا :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{A}(BDC)\times d$$

ومنه :

$$d = \frac{3V}{\mathcal{A}(BDC)} = \frac{3\times 27}{27}$$

$\boxed{\cancel{d=6}}$ $\boxed{d=3}$

حل التمرين الرابع :

لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1$ من أجل $x>0$ و $f(0)=1$

I) 1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1 = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2) دراسة قابلية اشتقاق f عند 0 :

من الواضح أن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0

لندرس قابلية اشتقاق f عند "0" من اليمين:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x(3-2\ln x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{2}x - x\ln x = 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند "0" من اليمين والمنحني (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $A(0;1)$ من المنحني (C_f).

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f:

حساب المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$$f'(x) = x(3-2\ln x) + \frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2}{x}\right)$$

$$= x(3-2\ln x) - x$$

$$\boxed{f'(x) = 2x(1-\ln x)}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-\ln x)$ لأن $x>0$

$f'(x) \geq 0$ تكافئ $1-\ln x \geq 0$

تكافئ $\ln x \leq 1$

تكافئ $x \leq e$

تكافئ $x \in]0;e]$

$x \in]e;+\infty[$ يكافئ $f'(x)>0$

جدول تغيرات الدالة f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘	$-\infty$

$f(e) = \frac{1}{2}e^2+1$

4) نبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث: $f(\alpha)=0$ و $\alpha \geq 0$:

من جدول التغيرات نجد:

الدالة f متناقصة تماما على $]e;+\infty[$ وهي مستمرة على هذا المجال

$$\begin{cases} f(e) = \frac{1}{2}e^2+1 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]e;+\infty[$

من جدول التغيرات:

* من أجل $x \in [0;e]$: $f(x) \geq 1$

وهكذا يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha)=0$

التحقق أن $4,6 < \alpha < 4,7$

نحسب $f(4,7)$ و $f(4,6)$ نجد $f(4,6) \times f(4,7) < 0$.

5) كتابة معادلة للمماس (D) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(D): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

بعد الحساب نجد:

$$\boxed{(D): y = 2x + \frac{1}{2}}$$

III) لدينا: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1) حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x) = f'(x) - 2$$

$$\boxed{g'(x) = 2x(1-\ln x) - 2}$$

الدالة g' قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

$$g''(x) = 2(1-\ln x) + 2x\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{g''(x) = -2\ln x}$$

* دراسة اتجاه تغيرات g':

$g''(x) \geq 0$ تكافئ $-2\ln x \geq 0$

تكافئ $\ln x \leq 0$

تكافئ $0 < x \leq 1$

الدالة g' متزايدة تماما على $]0;1]$

$g''(x) < 0$ تكافئ $-2\ln x < 0$

تكافئ $\ln x > 0$

تكافئ $x > 1$

الدالة g' متناقصة تماما على المجال $]1 ; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g':

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖ -2	↗	0	↘	$-\infty$

لدينا $g'(1) = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} g'(x) = -2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = -\infty \end{cases}$$

اشارة $g'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$:

من جدول تغيرات الدالة g' نجد:

من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ $g'(x) \leq 0$.

2) تحديد اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال 1) : $g'(x) \leq 0$ وهكذا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0 ; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g ولدينا $g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	↘	0	↘	$-\infty$

من جدول تغيرات الدالة g نجد:

$g(x) \geq 0$ من أجل $x \in]0, 1]$

$g(x) \leq 0$ يكافئ $x \in [1 ; +\infty[$

استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

يعود إلى دراسة إشارة الفرق $f(x) - (2x + \frac{1}{2})$ أي $f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أي اشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	$-$
الوضعية	‖	(C_f) ~~تحت~~ فوق (D)	(C_f) تقع تحت (D)

$$(C_f) \cap (D) = \left\{ B\left(1 ; \frac{5}{2}\right) \right\}$$

3) انشاء (D) و (C_f) في

أنظر الورقة المرفقة.

III)

1) حساب I_n بدلالة n (نستعمل المكاملة بالتجزئة)

لدينا $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$

نضع:

$u'(x) = x^2$ ومنه $u(x) = \frac{1}{3}x^3$

$v(x) = \ln x$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{n^3} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{n^3}\right)$$

بعد التبسيط نجد:

$$\boxed{I_n = \frac{1}{3n^3}\left[\frac{1}{3} + \ln(n)\right] - \frac{1}{9}}$$

2) استنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$

بما أن $0 < \frac{1}{n} \leq x \leq 1$ أي $0 < x < 1$

فإن $f(x) - (2x + \frac{1}{2}) > 0$ حسب السؤال 2) من الجزء II.

أي من أجل $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$:

$f(x) - (2x + \frac{1}{2}) \geq 0$ ، وهكذا

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[f(x) - (2x + \tfrac{1}{2})\right] dx$$

$$f(x) - (2x + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} x^2 (3 - 2\ln x) + 1 - 2x - \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{3}{2} x^2 - x^2 \ln x - 2x + \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{3}{2} x^2 - 2x + \tfrac{1}{2} - x^2 \ln x$$

ومنه

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\tfrac{3}{2} x^2 - 2x + \tfrac{1}{2} - x^2 \ln x\right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\tfrac{3}{2} x^2 - 2x + \tfrac{1}{2}\right) dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} x^3 - x^2 + \tfrac{1}{2} x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$$

بعد التبسيط نجد :

$$A(n) = -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - I_n$$

$$A(n) = -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^3}\left[\frac{1}{3} + \ln(n)\right] + \frac{1}{9}$$

بعد التبسيط نجد :

$$A(n) = \left(-\frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right) + \frac{1}{9}\right) \times 4$$

حساب $\lim_{n \to +\infty} A(n)$

لدينا $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} = 0$

وهكذا نجد

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} A(n) = \frac{1}{9} \times (4)}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} A(n) = \frac{4}{9}}$$

ملاحظة :

نضرب قيمة المساحة ~~بو~~ بمربع وحدة الطول

أي ~~...~~ بالعدد $4 = 2 \times 2$

الموضوع الثاني :

حل التمرين الأول :

1) تعيين قيم x و y بحيث : $x^2 e^{2iy}+4=0$ و $x>0$

$x^2 e^{2iy}+4=0$ يكافئ $x^2 e^{2iy}=-4$

لنكتب (-4) على الشكل الأسي : $-4=4e^{i\pi}$

ومنه $x^2 e^{2iy}=4e^{i\pi}$

إذن $\begin{cases} x^2=4 \\ \text{و} \\ 2y=\pi+2k\pi \end{cases} ; k\in\mathbb{Z}$

بما أن $x>0$ نجد $\boxed{x=2}$

و $\boxed{y=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ مع } k\in\mathbb{Z}}$

* التحقق أن العدد $(-2i)$ يحقق المساواة :

لدينا $-2i=2e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

ومنه $2^2\times e^{2i(-\frac{\pi}{2})}+4=4e^{-i\pi}+4$

$=4(-1)+4=0$

إذن العدد $(-2i)$ يحقق المساواة.

2) لدينا :

$z'=\frac{z-2i}{z+2i}$

$z_A=2i \; ; \; z_B=-2i \; ; \; z=-2i+re^{i\theta}$

أ) نبين أن $z'-1=\frac{4}{r}e^{i(-\theta-\frac{\pi}{2})}$

لدينا :

$z'-1=\frac{z-2i}{z+2i}-1$

$=\frac{z-2i-z-2i}{z+2i}=\frac{-4i}{z+2i}$

$=\frac{-4i}{-2i+re^{i\theta}+2i}$

$=\frac{-4i}{re^{i\theta}}$

$=\frac{4}{r}\left(\frac{-i}{e^{i\theta}}\right)$

ومنه $z'-1=\frac{4}{r}\times\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}}$ (لأن : $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$)

إذن $\boxed{z'-1=\frac{4}{r}e^{i(-\frac{\pi}{2}-\theta)}}$

ب) استنتاج مجموعة النقط M حيث يكون العدد z' عددا حقيقيا.

* $z'\in\mathbb{R}$ يكافئ $\arg(z')=k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

$\arg(z')=\arg\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)=(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})$

$z'\in\mathbb{R}$ معناه $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$

إذن النقط M، A و B في استقامية

وهكذا مجموعة النقط M بحيث يكون z' عدد حقيقي هي المستقيم (AB) أي محور التراتيب باستثناء النقطة B.

ملاحظة : من أجل $M=A$ يكون $z'=0$

جـ) نبين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B ونصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C')

$M\in(C)$ معناه $|z-(-2i)|=2$

أي $|z+2i|=2$

ومنه $z+2i=2e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$

أي $z=-2i+2e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$

لكن z معرف بـ : $z=-2i+re^{i\theta}$

أي : $r=2$

من السؤال أ) نجد : $z'-1=\frac{4}{2}e^{i(-\frac{\pi}{2}-\theta)}$

وبوضع $\alpha=-\frac{\pi}{2}-\theta$ نجد :

$z'-1=2e^{i\alpha}$

وهكذا $|z'-1|=2$

إذن $M'H=2$ حيث H لاحقتها 1

ومنه ~~النقطة~~ النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها H ذات اللاحقة 1 ونصف قطرها 2.

3) لدينا R الدوران الذي مركزه النقطة I ذات اللاحقة $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ وزاويته α.

4) لتعيين القيس الرئيسي للزاوية α علما أن $R(A)=H$ مع H لاحقتها 1.

لدينا: الكتابة المركبة للدوران R من الشكل:

$z' = az + b$

~~بما أن هي زاوية الدوران R فإن~~

أو وبما أن I مركز هذا الدوران فإن:

$$z' - z_I = a(z - z_I)$$

لدينا $R(A)=H$ ومنه

$$z_H - z_I = a(z_A - z_I)$$

$$z_I = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_I = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3(1+i)}{2}$$

$$I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

ومنه:

$$a = \frac{z_H - z_I}{z_A - z_I}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{2}(1+i)}{2i - \frac{3}{2}(1+i)} = i \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

إذن: $a = i$

ومنه $\alpha = \arg(a)$ أي $\alpha = \arg(i)$

إذن: $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$ وهي زاوية الدوران.

ب) أنظر تعيين النقطة في الورقة المرفقة.

جـ) التحقق أن الدائرة (C') صورة دائرة مركزها A بالدوران R.

لدينا $R(A)=H$ مع H مركز الدائرة (C')

إذن الدائرة (C') هي صورة الدائرة (C) التي مركزها A بالدوران R.

حل التمرين الثاني:

لدينا

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

1) نبين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $x_n = 2^{n+1} + 1$

نوظف مبدأ الاستدلال بالتراجع:

• من أجل $n=0$ لدينا $x_0 = 3 = 2^{0+1}+1$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$.

• نفرض أن الخاصية محققة من أجل العدد الطبيعي n أي $x_n = 2^{n+1}+1$ ونبرهن أن صحتها من أجل العدد الطبيعي $(n+1)$ أي نبرهن أن $x_{n+1} = 2^{n+2}+1$

لدينا:

$$x_{n+1} = 2x_n - 1$$

$$= 2\left(2^{n+1}+1\right) - 1 \quad \text{(من فرضية التراجع)}$$

$$= 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$$

وعليه صحة الخاصية من أجل العدد الطبيعي $(n+1)$ حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n: $x_n = 2^{n+1}+1$

2) حساب $PGCD(x_9; x_8)$ و $PGCD(x_{2014}; x_{2013})$

لدينا $* \ x_9 = 2x_8 - 1$

ومنه $PGCD(x_9; x_8) = PGCD(x_8; 1) = 1$

$* \ x_{2014} = 2x_{2013} - 1$

$$PGCD(x_{2014}; x_{2013}) = PGCD(x_{2013}; 1) = 1$$

نستنتج أن العددان x_8 و x_9 أوليان فيما بينهما والعددان x_{2013} ، x_{2014} كذلك أوليان فيما بينهما .

3) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : العددان x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما :

لدينا $x_{n+1}=2x_n-1$

ومنه $PGCD(x_{n+1};x_n)=PGCD(x_n;1)$
$=1$

ومنه العددان x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما

4) أ) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$2x_n-y_n=5$

نوظف مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل $n=0$: $2x_0-y_0=6-1=5$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

• نفرض أن الخاصية محققة من أجل العدد الطبيعي n أي $2x_n-y_n=5$ ونبرهن صحتها من أجل العدد الطبيعي $(n+1)$ أي نبرهن أن
$2x_{n+1}-y_{n+1}=5$

$2x_{n+1}-y_{n+1}=2(2x_n-1)-(2y_n+3)$
$=4x_n-2-2y_n-3$
$=2(2x_n-y_n)-5$

وحسب فرض التراجع : $2x_n-y_n=5$

ومنه $2x_{n+1}-y_{n+1}=2(5)-5$
$=5$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :
من أجل كل عدد طبيعي n : $2x_n-y_n=5$

* استنتاج عبارة y_n بدلالة n :

$2x_n-y_n=5$ ومنه $y_n=2x_n-5$

$y_n=2(2^{n+1}+1)-5$

$\boxed{y_n=2^{n+2}-3}$

ب) دراسة بواقي قسمة 2^p على 5 .
نلخصها في الجدول الآتي :

p	4k	4k+1	4k+2	4k+3
باقي قسمة 2^p على 5	1	2	4	3

جـ) $d_n=PGCD(x_n;y_n)$

* تعيين القيم الممكنة لـ d_n

لدينا $y_n=2x_n-5$ ومنه

$d_n=PGCD(y_n;x_n)=PGCD(x_n;5)$

إذن $\boxed{d_n\in\{1;5\}}$

استنتاج قيم n بحيث تكون x_n و y_n أوليان فيما بينهما . أي $d_n=1$.

$d_n=1$ معناه $PGCD(x_n;5)=1$

أي x_n ليس مضاعف للعدد 5 .

لنجد قيم n بحيث x_n مضاعف للعدد 5 :

أي $x_n\equiv0[5]$ ومنه $2^{n+1}+1\equiv0[5]$

إذن $2^{n+1}\equiv-1[5]$

وهكذا : $2^{n+1}\equiv-1+5[5]$

ومنه $2^{n+1}\equiv4[5]$

من الفرع ب) نجد $n+1=4k+2$

أي $n=4k+1$

إذن قيم n بحيث تكون x_n و y_n أوليان فيما بينهما هي :

$\boxed{n\in\mathbb{N}-\{4k+1;k\in\mathbb{N}\}}$

معناه : قيم n هي كل الأعداد الطبيعية باستثناء الأعداد التي باقي قسمتها على 4 هو 1 . أي :

$n\in\{4k;4k+2;4k+3/k\in\mathbb{N}\}$

حل التمرين الثالث:

① تعيين طبيعة المجموعة (E) المعرفة بـ:

$$(\vec{MO}+2\vec{MA}+3\vec{MB})\cdot\vec{MC}=0$$

لدينا G مرجح الجملة $\{(O,1);(A,2);(B,3)\}$

إذن من أجل كل نقطة M من الفضاء:

$$\vec{MO}+2\vec{MA}+3\vec{MB}=6\vec{MG}$$

ومنه

$$6\vec{MG}\cdot\vec{MC}=0$$

أي: $\vec{MG}\cdot\vec{MC}=0$

إذن المجموعة (E) هي سطح كرة قطرها $[GC]$

② لدينا

$$(\Pi_m):(2-m)x+y+mz+6m-6=0$$

أ) نبين أن كل المستويات (Π_m) تشمل مستقيما ثابتا (Δ):

لدينا $(2-m)x+y+mz+6m-6=0$

ومنه $2x+y-6+m(-x+z+6)=0$

من أجل كل m من $\mathbb{R}$: $2x+y-6+m(-x+z+6)=0$

ومنه

$$\begin{cases}2x+y-6=0\\ \text{و}\\ -x+z+6=0\end{cases}$$

وهي جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم في الفضاء.

إذن كل المستويات تشمل مستقيما ثابتا (Δ) معرف بالجملة

$$(\Delta):\begin{cases}2x+y-6=0\\ -x+z+6=0\end{cases}$$

* تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

بوضع $x=t$ نجد: $y=-2t+6$

$z=t-6$

وهكذا:

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=t\\ y=-2t+6\\ z=t-6\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}}$$

ب) كتابة معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(2,1,2)$ ونصف قطرها 3.

$$\boxed{(S):\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9}$$

جـ) تعيين قيم m بحيث يكون (Π_m) مماسا لسطح الكرة (S): أي:

$$d(\Omega;(\Pi_m))=3$$

$$\frac{|(2-m)(2)+1+2m+6m-6|}{\sqrt{(2-m)^2+m^2+1}}=3$$

بعد التبسيط نجد

$$\frac{|6m-1|}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=3$$

بتربيع الطرفين نجد

$$\frac{(6m-1)^2}{2m^2-4m+5}=9$$

وهكذا: $(6m-1)^2=9(2m^2-4m+5)$

ومنه:

$$18m^2+24m-44=0$$

نجد هكذا: $m_1=\frac{-12-\sqrt{936}}{18}\ ;\ m_2=\frac{-12+\sqrt{936}}{18}$

د) هل توجد قيم للعدد m بحيث يكون المستقيم (D) الموجه بالشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ عمودي على المستوي (Π_m):

لدينا: $\vec{n}_m\begin{pmatrix}2-m\\1\\m\end{pmatrix}$ شعاع ناظم لـ (Π_m)

يكون (D) عمودي على (Π_m) إذا وفقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}_m$ مرتبطان خطيا أي:

$$\begin{cases}\frac{2-m}{1}=\frac{1}{-2}\\ \text{و}\\ \frac{m}{1}=\frac{1}{-2}\end{cases}$$

ومنه $\begin{cases}m=\frac{5}{2}\\ \text{و}\\ m=-\frac{1}{2}\end{cases}$ تناقض

إذن لا توجد قيم للعدد m بحيث يكون (D) عمودي على (Π_m).

حل التمرين الرابع :

لدينا :
$$f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}\, e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

الجزء الأول :

1) أ) نضع $t=\frac{2}{x-1}$

لنتحقق أن $f(x)=\frac{e}{2}t^2e^t$

$$\frac{e}{2}t^2e^t=\frac{e}{2}\left(\frac{2}{x-2}\right)^2 e^{\left(\frac{2}{x-2}\right)}$$
$$=\frac{e}{2}\times\frac{4}{(x-2)^2}\cdot e^{\left(\frac{2}{x-2}\right)}$$
$$=\frac{2}{(x-2)^2}\cdot e^{\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}$$
$$=\frac{2}{(x-1)^2}\cdot e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=f(x)$$

* حساب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$

لدينا $t=\frac{2}{x-1}$

لما $x\overset{<}{\to}1$ فإن $t\to-\infty$

ومنه

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=\lim_{t\to-\infty}\frac{e}{2}t^2e^t=0$$

لأن :
$$\lim_{t\to-\infty}t^2e^t=0$$

إذن $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=0$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

~~مباشرة~~
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

لأن
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=e\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{(x-1)^2}=0\end{cases}$$

التفسير البياني :

المستقيم المعرف بالمعادلة $y=0$ (محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

2) نبين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;1[$
$$f'(x)=\frac{4x}{(x-1)^4}\, e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ حيث :
$$f'(x)=-\frac{2\times2}{(x-1)^3}\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}\right]$$
$$=-\frac{4}{(x-1)^3}e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}-\frac{4}{(x-1)^4}\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$
$$=\left[-\frac{4}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^4}\right]\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

بعد التبسيط نجد :
$$f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^4}\cdot e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

3) دراسة اتجاه تغيرات الدالة f :

اشارة $f'(x)$ هو اشارة المقدار $(-4x)$

لأن : $\frac{1}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}>0$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

4) انشاء المنحني (C_f) في الورقة المرفقة :

الجزء الثاني :

1) تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty,1[$:

الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty,1[$ ، على تقبل دوالا أصلية على هذا المجال .

ولدينا
$$f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}\, e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

بوضع $u(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ نجد أن
$$f(x)=-\left(u'(x)\cdot e^{u(x)}\right)$$

~~ومنه الدالة U ... على $]-\infty,1[$: $U(x)=-e^{\frac{x+1}{x-1}}$ هي دالة أصلية للدالة f .~~

ومنه الدالة $x \longmapsto -e^{\frac{x+1}{x-1}}$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty,1[$

2) لدينا $\alpha \in]0;1[$

أ) حساب العدد $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \left[-e^{\frac{x+1}{x-1}}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad = -e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + e^{\frac{1-\alpha}{-1-\alpha}}$$

إذن

$$I(\alpha)= e^{\frac{-\alpha+1}{-\alpha-1}} - e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$$

ب) حساب $\lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} 1} I(\alpha)$:

$$\lim_{\alpha \overset{<}{\to} 1} I(\alpha) = \lim_{\alpha \overset{<}{\to} 1} \left[e^{\frac{-\alpha+1}{-\alpha-1}} - e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\right]$$

لدينا :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} 1} \left(\dfrac{-\alpha+1}{-\alpha-1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \overset{<}{\to} 1} \left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه

$$\boxed{\lim_{\alpha \overset{<}{\to} 1} I(\alpha) = 1}$$

3) حساب المساحة A ب cm^2

: لأن الدالة f موجبة على المجال $[-1,1]$ فإن

$$A=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \overset{<}{\to} 1} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

من الشكل [illegible] ،

$$A = \lim_{\alpha \overset{<}{\to} 1} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \overset{<}{\to} 1} I(\alpha)$$

و منه

$$A = 1 \times (2\times 2)\ cm^2$$

$$\boxed{A = 4\ cm^2}$$

الجزء الثالث :

1) - أ) بين أن المعادلة : $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلين أحدهما -1 والآخر β في المجال $]-\infty,1[$.

من جدول تغيرات الدالة f لدينا

$$\frac{1}{2} \in \left]0;\frac{2}{e}\right[$$

إذن من أجل $x=-1$ لدينا :

$$f(-1)=\frac{1}{2}$$

ومن أجل $x \in]0;1[$ لدينا :

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;1[$ ولدينا :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) \leq \frac{1}{2} \leq f(0)$$

وهكذا المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]0;1[$.

2) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $f(x)=f(k)$ حسب قيم الوسيط k

نضع : $k'=f(k)$

يكون k' موجود إذا كان $k \in D_f$ أي $k \in]-\infty;1[$. حيث $0 < k' \leq \frac{2}{e}$

$f(x)=f(k)$ تكافئ $f(x)=k'$

من التمثيل البياني نجد :

من أجل $0 < k' < \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين

* من أجل $k'=\frac{2}{e}$ فالمعادلة تقبل حل مضاعف

إذن :

من أجل $k \in]-\infty;0[\cup]0;1[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

* من أجل $k=0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $\frac{2}{e}$