على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول :(4 نقاط)

I- ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z المعرّف كما يلي : $P(z)=8z^4+8z^3-z-1$.

1- احسب $P(-1)$ ثم $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

2- اوجد كثير حدود $Q(z)$ للمتغيّر المركّب z من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية حيث يكون من أجل كل عدد مركّب z : $P(z)=(z+1)(2z-1)\times Q(z)$.

3- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $P(z)=0$.

II- المستوى المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ النقط D , C, B , A التى لواحقها على الترتيب $z_A=\frac{-1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$ ؛ $z_B=\frac{1}{2}$ ؛ $z_C=\overline{z_A}$ و $z_D=-1$.

1- اكتب العدد المركب $L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

2- استنتج طبيعة المثلث ABC .

3- اوجد طبيعة و العناصر المميزة للتحويل T الذي يحول النقطة B الى النقطة C ويحول النقطة C الى النقطة D .

4- استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

5- عين قيم n الطبيعية حتى تكون صورة العدد $(L)^n$ تنتمي الى نصف المستقيم $[O,\vec{u})$.

التمرين الثاني:(4 نقاط)

(x_n) و (y_n) متتاليتين حدودها اعداد طبيعية معرفتان على $\mathbb{N}$:
$$\begin{cases} x_0=3 \text{ و } x_{n+1}=2x_n-1 \\ y_0=1 \text{ و } y_{n+1}=2y_n+3 \end{cases}$$

1. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $x_n=2^{n+1}+1$.
2. احسب $PGCD$ لكل من (x_n) و (x_{n+1}) من اجل كل عدد طبيعيn، ثم استنتج $PGCD(x_{2013};x_{2014})$
3. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n فان $2x_n-y_n=5$.ثم عبر عن (y_n) بدلالة n .
4. أ- ادرس حسب قيم p الطبيعية بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^p على العدد 5 .

ب- نضع $PGCD(x_n;y_n)=d_n$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي n ؛ برهن أن : $d_n=1$ أو $d_n=5$.

جـ - استنتج مجموعة الاعداد الطبيعية n حيث (x_n) و (y_n) أوليين فيما بينهما .

التمرين الثالث(4 نقاط):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;-2;2)$، $B(6:1;5)$، $C(6;-2;-1)$ و (P) المستوي الذي معادلته $x+y+z-3=0$.

1) - أ)- بين أن المثلث ABC قائم في A .

ب)- بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

جـ)- ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل A .أكتب معادلة ديكارتية لـ (P') .

د)- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

2)- أ)- لتكن D النقطة ذات الاحداثيات $(0;4;-1)$ بين أن المستقيم (AD) عمودي على ~~المستقيم~~ (ABC) .

المستوى

ب)- أحسب حجم رباعي الوجوه $ABDC$.

جـ) - بين أن قيس الزاوية $B\hat{D}C$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان.

د) - أحسب مساحة المثلث BDC ؛ ثم استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC) .

التمرين الرابع(8 نقاط):

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x\ e^{2x+1}$

نسمي $(\mathscr{C})$ التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع (وحدة الطول $4cm$).

1- ماهي حسب قيم x الحقيقية إشارة الدالة f .ماذا تستنتج بيانيا .

2- أوجد نهاية f عند أطراف مجال التعريف .

3- أدرس إتجاه تغير الدالة f ؛ ثم شكل جدول تغيرات f .

4- أوجد معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة (1-) .

5- نسمي (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^x$

أوجد معادلة المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة (1-) ؛ ماذا تلاحظ؟

II. نسمي h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1+xe^{x+1}$

1- ادرس إتجاه تغير h ثم شكل جدول تغيراتها دون حساب نهايتها ؛
مع تحديد إشارة $h(x)$ حسب قيم x الحقيقية .

2- أدرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحنى (Γ) .

3- ارسم بدقة في نفس المعلم المنحنيات (T) ، $(\mathscr{C})$ ، (Γ) .

4- أوجد العددين الحقيقين b,a حتى تكون الدالة $H(x)=(ax+b)e^{2x+1}$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

III. m عدد حقيقي كيفي و M نقطة من المنحنى (Γ) ذات الفاصلة m .

1- اكتب معادلة (D) المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة M .

2- المماس (D) يقطع محوري الإحداثيات في نقطتين A و B
احسب بدلالة m إحداثيات المنتصف J للقطعة $[AB]$.

3- برهن أن النقطة J تنتمي إلى المنحنى $(\mathscr{C})$.

4- أرسم (D) و J من اجل $m=0$.

الموضوع الثاني

التمرين الاول :(6 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A_0 , A_1 و A_2 ذات اللواحق على الترتيب $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$, $z_2 = -4 - i$.

I. 1- بين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث $S(A_0) = A_1$ و $S(A_1) = A_2$.

2- بين أن S له عبارة مركبة من الشكل $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.

3- استنتج نسبة ، وزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه المباشر S .

4- نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z حيث $z \neq \omega$ وصوراتها M' ذات اللاحقة z'

تحقق أن $\omega - z' = i(z - z')$ ؛ ثم استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

II. من أجل كل عدد طبيعي n ، النقطة A_{n+1} معرفة بـ $A_{n+1} = S(A_n)$

ونضع $u_n = A_nA_{n+1}$ حيث (A_nA_{n+1} تمثل المسافة بين A_n و A_{n+1}).

1- مثّل النقط A_0 , A_1 و A_2 ثم أنشئ هندسيا النقط A_3 , A_4 , A_5 و A_6 .

2- برهن أن المتتالية (u_n) هندسية مع تحديد أساسها و حدها الاول .

III. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1- أوجد v_n بدلالة n .

2- هل المتتالية (v_n) متقاربة مع التعليل ؟

3- احسب بدلالة n نصف القطر r_n للدائرة التي تشمل رؤوس المثلث ΩA_nA_{n+1} .

4- أوجد أصغر عدد طبيعي p حيث من أجل كل عدد طبيعي n: إذاكان $n > p$ فإن $r_n < 10^{-2}$

التمرين الثاني :(6 نقاط)

I. 1- أوجد $PGCD(16104,18117)$.

2- x و y عددان من $\mathbb{Z}$ بين أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان حيث :

$$(1) \leftarrow 16104x + 18117y = -20130 \quad \text{و} \quad (2) \leftarrow 8x + 9y = -10$$

3- تحقق أن الثنائية $(1;-2)$ حلا خاصا للمعادلة (2) ، ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة (2).

II. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس في الفضاء ونتبر المستويين (P_1) و (P_2) معادلة كل منهما $(P_1): x + 2y - z = -2$ و $(P_2): 3x - y + 5z = 0$.

1- بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعين وفق مستقيم وليكن (D) .

2- بين إحداثيات نقط المستقيم (D) تحقق المعادلة (2) .

3- استنتج (Γ) مجموعة النقط من (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

III. نعتبرالمستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad / \, t \in \mathbb{R}$.

و ليكن العدد الطبيعي N الذي يكتب في النظام ذو الاساس 8 على الشكل $N = \overline{\alpha\beta\alpha\gamma}$

و في النظام ذو الاساس 9 على الشكل $N = \overline{2\gamma\beta\beta}$.

1- أوجد الاعداد الطبيعية α , β و γ حيث النقطة $A(\alpha;\beta;\gamma)$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ثم أكتب العدد N في النظام العشري .

2- بين أن أشعة توجيه كل من المستقيمين (Δ) و (D) متعامدة وليسا من نفس المستوي .

3- أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (Q_1) الذي يشمل المستقيم (Δ) ويعامد المستقيم (D) .

4- أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (Q_2) الذي يشمل المستقيم (Δ) ويوازي المستقيم (D) .

التمرين الثالث : (8 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=(-x-1)e^x$ ونسمي (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ مع وحدة الطول $2cm$.

.I 1- احسب f' ، f'' ثم برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن $f^{(n)}(x)=(-x-n-1)e^x$ حيث $f', f'', ..., f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f .

2- استنتج حلول المعادلة التفاضلية (1)حيث $y''=(-x-5)e^x \leftarrow (1)$.

3- اوجد الدالة$h(x)$ التي تمثل حلا للمعادلة التفاضلية (1) حيث بيانها يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ كمقارب مائل بجوار $-\infty$.

.II 1- ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

2- برهن ان (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب إحداثياتها .

3- أوجد معادلة المماس (Δ) للمنحنى(C_f)عند نقطة منه ذات الفاصلة -1 .

4- ثم ارسم(C_f) و (Δ).

5- بين ان الدالة f تكتب على الشكل $f(x)=-e^x-xe^x$ ثم استنتج اصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

.III λ عدد حقيقي موجب تماما ؛ نعتبر الدالة g_λ المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $g_\lambda(x)=e^x-\lambda(x+2)$ و(C_λ) منحنها البياني .

1- برهن ان جميع المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة B يطلب إحداثياتها .

2- حدد وضعية المنحنيين (C_λ) و $(C_{\lambda+1})$.

3- ادرس إتجاه تغير الدالة g_λ على $\mathbb{R}$.

4- أوجد نهاية g_λ عند أطراف مجال تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

5- استنتج بدلالة λ إحداثيات ω_λ ذروة المنحنى (C_λ)

ثم برهن أنه لما يتغير λ على $]0;+\infty[$ فإن ω_λ ترسم المنحنى (C_f) .

بالتوفيق .

مع تمنياتنا لكم بالنجاح في البكالوريا .