تا مبارك الليل عناب | اختبار تجريبي في مادة الرياضيات | ماي 2016
الأستاذ: جعيمات محمد | المدة: 4 ساعات ونصف | شعبة رياضيات

التمرين الأول: في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(2;2;-2)$، $B(-3;2;3)$، $C(0;3;0)$ و $D(0;0;-3)$ ولتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $MA^2+MB^2=\frac{55}{2}$

1- أعط معادلة ديكارتية للمجموعة (S) ثم أستنتج أنها سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

2- أ) بين أن النقط A، C و D تعين مستوي يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

ب) أحسب المسافة بين النقطة B والمستوى (ACD)

ج) أدرس الوضع النسبي للمستوي (ACD) وسطح الكرة (S)

3- أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ومتجاه توجيهه $\vec{u}(-2;0;1)$، بين أن (Δ) محتوى في المستوى (ACD)

التمرين الثاني: 1- حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (u,v)

$9u-14v=13$ علما أن $(3;1)$ حلا خاصا لها

2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) حيث $45x-28y=130$

أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف لـ 2 و y مضاعف للعدد 5 ثم حل هذه المعادلة

3- A عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\times3}^{9}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5\beta86}^{7}$ في نظام تعداد أساسه 7 عين α و β ثم أكتب A في النظام العشري

التمرين الثالث: 1- نعتبر كثير الحدود المعرف بـ $P(Z)=Z^3-6Z^2+12Z-16$

أحسب $P(4)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$

2- المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ وحدة الرسم 2cm

لتكن النقط A، B و C ذات اللواحق $a=4$، $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=1-i\sqrt{3}$

أ- علم النقط A، B و C في شكل مناسب وأتممه حسب معطيات التمرين

ب- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3- لتكن K النقطة ذات اللاحقة $k=-\sqrt{3}+i$، نسمي F صورة K بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و G صورة K بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$

2) عين لاحقتي النقطتين F و G

ب) بين أن المستقيمين (OC) و (OF) متعامدان

4) لتكن H النقطة الرابعة في متوازي الأضلاع COFH

أ) برهن أن COFH مربع ب) أحسب لاحقة النقطة H ج) هل المثلث AGH متقايس الأضلاع؟

التمرين الرابع: (08 نقاط) ① نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$$

① أحسب $g'(x)$ ثم استنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

② أحسب $g(1)$ ثم استنتج أن لكل $x>1$ فإن $g(x)>0$

② نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$ وليكن (C_f) التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

① بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ (يمكن وضع $x=\sqrt{x}$) / أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Δ)

③ أ) بين أن من أجل كل x من مجال $]0,+\infty[$ $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$ ثم استنتج اتجاه تغير f

ب) شكل جدول تغيرات f ثم أرسم المنحنى (C_f)

④ أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_{e^{-2}}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = -4$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب المائل (Δ) والمستقيمين المعمودين بين $x=1$ و $x=e^{-2}$

⑤ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^x + 1$

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ $h(x) = f(e^x)$

③ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1 \quad ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq 1$

② بين أن $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ثم حدد اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

③ أستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط) ① أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

② عين العدد الطبيعي n حتى يكون العدد: $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1$ قابلا للقسمة على 7

③ A عدد طبيعي يكتب $\overline{1xx0}^5$ في النظام ذي الأساس 5 عين x حتى يكون العدد A قابلا للقسمة على 35 ثم اكتب العدد A في النظام العشري

التمرين الثاني: الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ولتكن النقط $A(1;1;1)$ ، $B(1;2;3)$ ، $C(2;1;-1)$

① - نعتبر سطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(1;-3;2)$ ونصف قطرها 3
اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S)

② - ليكن $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3-2t \\ z = 2+t \end{cases}$ تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

أ- بين أن (D) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين I و J حيث I هي النقطة التي فاصلتها سالبة ثم تحقق $[IJ]$ قطر لسطح الكرة (S)

③ - أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستوى، يطلب تعيين معادلة له

ب) أحسب المسافة بين النقطة Ω والمستوى (ABC)

ج) تحقق من أن المستوى (ABC) عمودي على المستقيم (D)

د) حدد نقطة تماس المستوي (ABC) و سطح الكرة (S)

التمرين الثالث: المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ الوحدة 2cm

① أ) اكتب على الشكل الجبري العدد الذي طويلته 2 وعمدته $\frac{\pi}{2}$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $iz - 2 = 4i - z$ (يعطى الحل على الشكل الجبري)

② نرمز بـ A ، B و I للنقط ذات اللواحق 1 ؛ $2i$ و $3+i$ على الترتيب

أ) أحسب z_C لاحقة النقطة C نظيرة النقطة A بالنسبة إلى I

ب) اكتب العدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الجبري واستنتج طويلة وعمدة

جـ) لتكن D نقطة لاحقتها z_D حيث $z_D - z_C = z_A - z_B$ برهن أن $ABCD$ مربع

⑤ نعتبر M نقطة كيفية من المستوى

أكتب الشعاع $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}$ بدلالة الشعاع $\vec{MI}$

ب) بين أن النقطة K المعرفة بـ $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{KC}+\vec{KD}=2\vec{AB}$ هي منتصف القطعة [AD]

ج) عين المجموعة (T) للنقط M من المستوى حيث $\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\|=\|2\vec{AB}\|$ ثم أنشئ (T)

التمرين الرابع: (09 نقاط) I نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x-x-1$

① أحسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير g

② (لاحظ أن $g(0)=0$) بين أن $g(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$

③ بين أن $g(-x)=e^x(1+(x-1)e^x)$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ $1+(x-1)e^x\geq 0$

II نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي $u_0=1$ و $u_{n+1}=g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ $0\leq u_n\leq 1$

② بين أن المتتالية (u_n) متناقصة

③ استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

III نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x)=x-1-\frac{x}{e^x-x-1}$

و $(\mathcal{C}_f)$ هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

① بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

② أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (لاحظ أن $f(x)=x-1+\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}-1}$)

أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ (لاحظ أن $f(x)=x-1-\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}-1}$)

③ أ) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من D $f'(x)=1+\frac{1+(x-1)e^x}{(e^x-x-1)^2}$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in\mathbb{R}^*$ $f(x)>0$ ثم استنتج جدول تغيرات f

④ بين أن $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$ ثم استنتج أن (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$

بين أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+1)=0$ ثم استنتج أن (Δ') الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$

⑤ بين أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $]1,2[$ بحيث $f(\alpha)=0$

بين أنه يوجد عدد حقيقي β وحيد من المجال $]-4,-1[$ بحيث $f(\beta)=0$ استنتج $e^\beta-\beta-1=\frac{\beta}{\beta-1}$

⑥ أنشئ (Δ) و (Δ') و $(\mathcal{C}_f)$ في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\alpha=1,65$ و $\beta=-1,29$)

⑦ 1 - بين أن $\int_1^{\beta} \left(1 + \frac{x}{e^x - x - 1}\right) dx = 1 + \ln\left(\frac{\beta}{\beta - 1}\right)$

لاحظ أن

$$1 + \frac{x}{e^x - x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}$$

ب. احسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها على التوالي

$x = -1$ ، $x = \beta$ ، $y = x$ انتهى بالتوفيق