السلسلة رقم 1 مدعمة بالتصحيح تحضيرا لبكالوريا 2011

(إعداد الأستاذ بواب نورالدين)

التمرين الأول : (بكالوريا المغرب 2010 علوم تجريبية)

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$.

❷ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $z_A = 3 - i$ و $z_B = 3 + i$.

وليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- بيّن أن الكتابة المركبة للدوران r هي : $z' = iz + 2 - 4i$.

❸ C النقطة التي لاحقتها $z_C = 7 - 3i$ و D صورتها بالدوران r .

- تحقق أن لاحقة النقطة D هي : $z_D = 5 + 3i$.

❹ بيّن أن : $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1}{2}i$ ثم استنتج طبيعة المثلث BCD .

التمرين الثاني : (Bac Pondichéry Avril 2010)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

❶ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ يوازي المستوي الذي معادلة له : $x + 2y + z - 3 = 0$.

❷ المستويات (P) ، (P') و (P'') التي معادلاتها على الترتيب :

$x - 2y + z = 3$ ، $2x + 3y - 2z = 6$ وَ $4x - y + 4z = 12$

ليس لها أي نقطة مشتركة .

❸ المستقيمان اللذان تمثيلا هما الوسيطيان :

$\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t - 3 \end{cases}$ وَ $\begin{cases} x = 2t' + 7 \\ y = 2t' + 2 \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = -t' - 6 \end{cases}$ هما مستقيمان متقاطعان .

❹ نعتبر النقط : $A(-1;0;2)$ ، $B(1;4;0)$ و $C(3;-4;-2)$.

معادلة للمستوي (ABC) هي : $x+z=1$.

❺ نعتبر النقط : $A(-1;1;3)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(4;-1;5)$.
يمكن اعتبار النقطة C كمرجح للنقطتين A و B .

التمرين الثالث : (Bac Centres Etrangers Juin 2010 S)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=6-\dfrac{5}{x+1}$

❶ أ- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.
ب- حل في المجال $[0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=x$ ، نرمز إلى الحل بالرمز α .
جـ- بيّن أنه إذا كان $x\in[0;\alpha]$ فإن $f(x)\in[0;\alpha]$.
بيّن أيضا أنه إذا كان $x\in[\alpha;+\infty[$ فإن $f(x)\in[\alpha;+\infty[$.

❷ (u_n) متتالية عددية معرفة بـ :
$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)=6-\dfrac{5}{u_n+1}$.
أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ والمنحنى (c) الممثل للدالة f .
- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .
ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

❸ أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$.
ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

التمرين الرابع : (علوم تجريبية 2010)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :
$f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$ ، نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
ب- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ وفسّر هندسيا النتيجة .

❷ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيّراتها .

❸ أ- بيّن أن المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.

ب- ادرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

❹ أثبت أن النقطة $\omega\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني $\left(C_f\right)$.

❺ أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

ب- هل توجد مماسات للمنحني $\left(C_f\right)$ توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ- ارسم (Δ) و (Δ') ثم المنحني $\left(C_f\right)$.

د- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$(m-1)e^{-x}=m$$

تصحيح السلسلة رقم 1

التمرين الأول :

❶ حل المعادلة $z^2 - 6z + 10 = 0$:

تذكير : إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- مميّز هذه المعادلة هو : $\Delta = -4 = 4i^2 = (2i)^2$
- المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $z_1 = 3 - i$ و $z_2 = 3 + i$.

❷ تبيان أن الكتابة المركبة للدوران r هي $z' = iz + 2 - 4i$:

تذكير : الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه $M_0(z_0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $\boxed{z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)}$

وعليه فإن : $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ونعلم أن : $z_A = 3 - i$ و $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

وبالتعويض نجد : $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ ومنه : $z' = iz + 2 - 4i$.

❸ التحقق أن لاحقة النقطة D هي $z_D = 5 + 3i$:

لدينا : $r(C) = D$ ومنه : $z_D = iz_C + 2 - 4i = i(7 - 3i) + 2 - 4i = 5 + 3i$

❹ تبيان أن $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1}{2}i$:

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{5 + 3i - 3 - i}{7 - 3i - 3 - i} = \frac{2 + 2i}{4 - 4i} \times \frac{4 + 4i}{4 + 4i} = \frac{8 + 8i + 8i - 8}{32} = \frac{1}{2}i$$

- استنتاج طبيعة المثلث BCD :

لدينا : $\left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$ وَ $\arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $\left|\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right| = \frac{1}{2}$ وَ $\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$.

وهذا يعني أن : $BC = 2BD$ و $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

نستنتج أن المثلث BCD قائم في النقطة B .

التمرين الثاني :

❶ أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}>0$

وعليه فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

ب- حل في المجال $[0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=x$:

$f(x)=x$ يكافئ $6-\dfrac{5}{x+1}=x$ ومنه : $x^2-5x-1=0$

مميّز هذه المعادلة هو $\Delta=29$ وبالتالي فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

$x_1=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$ و $x_2=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ ، لكن $x\in[0;+\infty[$ وعليه فإن الحل

الوحيد للمعادلة $f(x)=x$ هو $\alpha=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

جـ- تبيان أنه إذا كان $x\in[0;\alpha]$ فإن $f(x)\in[0;\alpha]$:

إذا كان $x\in[0;\alpha]$ فإن $f(x)\in[f(0);f(\alpha)]$ لأن الدالة f متزايدة تماما

على المجال $[0;+\infty[$. ونعلم أن : $f(0)=6-\dfrac{5}{0+1}=1$ و $f(\alpha)=\alpha$

وبالتالي : $f(x)\in[1;\alpha]$ ، لكن : $[1;\alpha]\subset[0;\alpha]$ وعليه : $f(x)\in[0;\alpha]$

إذن : إذا كان $x\in[0;\alpha]$ فإن $f(x)\in[0;\alpha]$.

• تبيان أنه إذا كان $x\in[\alpha;+\infty[$ فإن $f(x)\in[\alpha;+\infty[$:

إذا كان $x\in[\alpha;+\infty[$ أي : $x\geq\alpha$ فإن $f(x)\geq f(\alpha)$ لأن الدالة f متزايدة

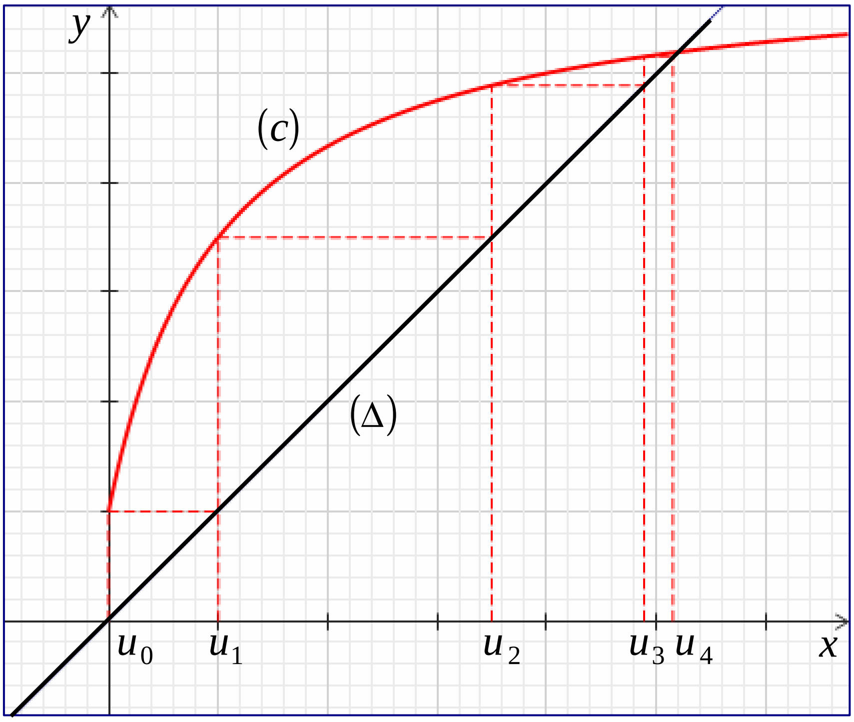
تماما على المجال $[0;+\infty[$. ونعلم أن : $f(\alpha)=\alpha$ وبالتالي : $f(x)\geq\alpha$

أي : $f(x)\in[\alpha;+\infty[$.

إذن : إذا كان $x\in[\alpha;+\infty[$ فإن $f(x)\in[\alpha;+\infty[$.

❷ $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)=6-\dfrac{5}{u_n+1}$.

أ- رسم (Δ) ، (c) وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 : أنظر الشكل .



ب- وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

من الشكل يمكن أن نخمّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو العدد α

(العدد α هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المنحني (c))

❸ أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$:

نسمي p_n الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ "

- التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$ أي : $0 \le 0 \le 1 \le \alpha$ وهي محققة .

إذن : p_0 صحيحة .

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$.

من فرضية التراجع ، لدينا : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن : $f(0) \le f(u_n) \le f(u_{n+1}) \le f(\alpha)$

وبالتالي : $0 \le 1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$

($f(0)=1$ ، $f(\alpha)=\alpha$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_{n+2}=f(u_{n+1})$)

ومنه : p_{n+1} صحيحة .

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.

ب- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

تذكير : كل متتالية ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة .

من السؤال السابق وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

و هذا يعني أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ، نستنتج أنها متقاربة .

• حساب نهاية المتتالية (u_n) : نفرض أن (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي L

ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$ ، نحصل على : $u_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{u_n + 1}$

وبالتالي : $L = 6 - \dfrac{5}{L+1}$ أي : $f(L) = L$

ومن السؤال ❶ - ب - نستنتج أن : $L = \alpha$.

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ (هذا يؤكد صحة التخمين السابق)

التمرين الثالث :

❶ صحيح

نسمي (D) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$

$\vec{u}(1;-2;3)$ هو شعاع توجيه لهذا المستقيم .

ونسمي (P) المستوي الذي معادلة له : $x + 2y + z - 3 = 0$

$\vec{n}(1;2;1)$ هو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = 1\times1 + (-2)\times2 + 3\times1 = 0$ ومنه : $\vec{u} \perp \vec{v}$

نستنتج أن المستقيم (D) يوازي المستوي (P) .

طريقة أخرى :

لنبحث عن نقط تقاطع (D) و (P) وذلك بحل الجملة : $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

عند حل المعادلة $(t+2) + 2(-2t) + (3t-1) = 3$ بحثا عن t نجد : $1 = 3$

و هذا مستحيل . نستنتج أن المستقيم (D) و المستوي (P) ليس لهما نقطا مشتركة .

إذن : المستقيم (D) يوازي المستوي (P) .

❷ خاطئ

للبحث عن نقط تقاطع المستويات (P) ، (P') و (P'') نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+3y-2z=6 \\ 4x-y+4z=12 \end{cases}$$ ومنه : $$\begin{cases} x=2y-z+3 \\ 2(2y-z+3)+3y-2z=6 \\ 4(2y-z+3)-y+4z=12 \end{cases}$$

وبالتالي : $$\begin{cases} x=2y-z+3 \\ 7y-4z=0 \\ 7y+4z=0 \end{cases}$$ وأخيرا نحصل على الجملة : $$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 7y-4z=0 \end{cases}$$

تمثل هذه الجملة الأخيرة تقاطع مستويين في الفضاء (المستقيم في الفضاء معرّف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين) .

إذن : للمستويات (P) ، (P') و (P'') مستقيم مشترك .

❸ صحيح

ليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $$\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=t+1 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=2t-3 \end{cases}$$

وليكن (D') المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $$\begin{cases} x=2t'+7 \\ y=2t'+2 \quad (t'\in\mathbb{R}) \\ z=-t'-6 \end{cases}$$

للبحث عن نقط تقاطع المستقيمين (D) و (D') ، نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} -3t+2=2t'+7 \\ t+1=2t'+2 \\ 2t-3=-t'-6 \end{cases}$$. من المعادلتين الأولى والثانية لهذه الجملة نجد :

$t=-1$ و $t'=-1$ وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الثالثة نحصل على $-5=-5$ وهي محققة دوما . نستنتج أن المستقيمين (D) و (D') متقاطعان ونقطة تقاطعهما هي $A(5;0;-5)$.

إذن : المستقيمان (D) و (D') متقاطعان .

❹ صحيح

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;4;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(4;-4;-4)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ وهذا يعني أن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فهي تعيّن مستويا (ABC) .

من جهة أخرى : $A\in(ABC)$ لأن $-1+2=1$ ،
$B\in(ABC)$ لأن $1+0=1$ و $C\in(ABC)$ لأن $3-2=1$
أي أن إحداثيات كل من النقط A ، B و C تحقق المعادلة $x+z=1$.
إذن : $x+z=1$ هي معادلة للمستوي (ABC) .

❺ خاطئ
تذكير : C مرجح النقطتين A و B معناه : النقط A ، B و C في استقامية .
لدينا : $\overrightarrow{CA}(-3;2;-2)$ و $\overrightarrow{CB}(-2;2;-5)$.
واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{CA}=k\,\overrightarrow{CB}$ و هذا يعني أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .
نستنتج أنه لا يمكن اعتبار النقطة C كمرجح للنقطتين A و B .

التمرين الرابع :

❶ أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

نعلم أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=-1$. إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

• حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=0$. إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- حسب نهاية الدالة f عند 0 : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=+\infty$

• هندسيا : المستقيم الذي معادلته $x=0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

❷ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

• الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ،

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}>0$.

وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

• جدول تغيّرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

❸ أ- تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') :

تذكير : إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي : $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

لدينا : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$ وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{e^x-1}=0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلاته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{e^x-1}=+1$ فإن المستقيم (Δ') الذي معادلاته $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$ ومنه : $f(x)-x=-\dfrac{1}{e^x-1}$

وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-x$ هي إشارة $-(e^x-1)$ ومنه النتائج الآتية :

- إذا كان $x\in\,]-\infty\,;0[$ يكون $f(x)-x>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) .
- إذا كان $x\in\,]0\,;+\infty[$ يكون $f(x)-x<0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ) .

• دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f(x)-(x-1)=\dfrac{-e^x}{e^x-1}$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$ هي إشارة $-(e^x-1)$ (لأن $e^x>0$) ومنه النتائج الآتية :

- إذا كان $x\in\,]-\infty\,;0[$ يكون $f(x)-x>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ') .

- إذا كان $x\in]0;+\infty[$ يكون $f(x)-x<0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ') .

❹ إثبات أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) :

تذكير : إذا كان من أجل كل x من D_f ، لدينا :

$$\begin{cases}(2a-x)\in D_f\\ f(x)+f(2a-x)=2b\end{cases}$$

فإن النقطة $\Omega(a;b)$ هي مركز تناظر للمنحني الممثل للدالة f .

لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=\cdots=1$

وبالتالي فإن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

❺ أ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β :

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛
- f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛
- $f(a)\times f(b)<0$.

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.

- من جدول تغيرات f نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[\ln 2;1]$

زيادة على ذلك : $f(\ln 2)\approx -0.30$ و $f(1)\approx 0.42$ ($e^{\ln 2}=2$)

ومنه : $f(\ln 2)\times f(1)<0$.

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 2<\alpha<1$.

- من جدول تغيرات f نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1.4;-1.3]$

زيادة على ذلك : $f(-1.4)\approx -0.075$ و $f(-1.3)\approx 0.071$

ومنه : $f(-1.4)\times f(-1.3)<0$.

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-1.4<\beta<-1.3$.

خلاصة : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث :

$\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

ب- وجود مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ) :

تذكير : يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كان معاملا توجيههما متساويين .
البحث عن المماسات التي توازي المستقيم (Δ) يؤول إلى حل المعادلة $f'(x)=1$

ومنه : $1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ وبالتالي : $\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$.

وبما أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $e^x>0$ و $(e^x-1)^2>0$ فإن هذه المعادلة $\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}^*$.

إذن : لا توجد مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

جـ- رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) : انظر الشكل .

د- المناقشة البيانية :

لدينا : $(m-1)e^{-x}=m$ ومنه : $(m-1)e^{-x}\times e^x=m\times e^x$

وبالتالي : $(m-1)=m\times e^x$ ومنه : $(m-1)-m=m\times e^x-m$

أي : $-1=m\times e^x-m$ ومنه : $-1=m\left(e^x-1\right)$ وعليه : $\dfrac{-1}{e^x-1}=m$

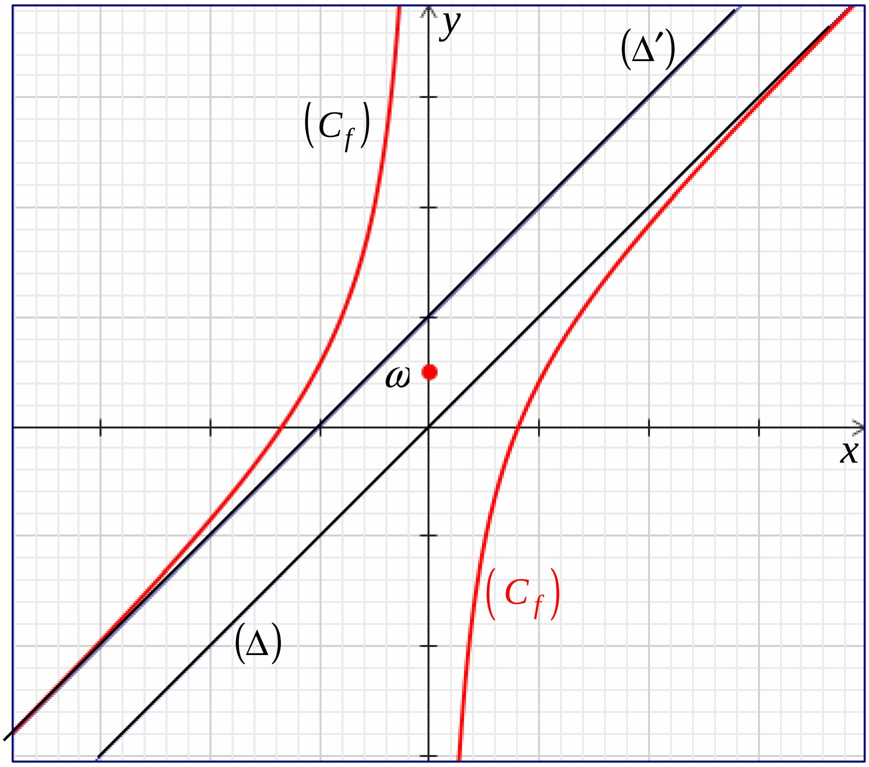
وأخيرا : $x-\dfrac{1}{e^x-1}=x+m$. إذن : $f(x)=x+m \quad ...\ (E)$

البحث عن عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ يؤول إلى البحث عن عدد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=x+m$.

(المستقيمات (Δ) ، (Δ') و (Δ_m) متوازية لأن لها نفس معامل التوجيه 1)

- إذا كان $m=0$ فإن (Δ_m) ينطبق على (Δ) وبالتالي فإن (Δ_m) لا يقطع (C_f) نستنتج أن المعادلة (E) لا تقبل حلولا .
- إذا كان $m=1$ فإن (Δ_m) ينطبق على (Δ') وبالتالي فإن (Δ_m) لا يقطع (C_f) نستنتج أن المعادلة (E) لا تقبل حلولا .
- إذا كان $m\in\left]0;1\right[$ فإن (Δ_m) يقع بين (Δ) و (Δ') ومواز لهما وبالتالي فإن (Δ_m) لا يقطع (C_f) ، نستنتج أن المعادلة (E) لا تقبل حلولا .
- إذا كان $m\in\left]-\infty;0\right[$ فإن (Δ_m) يقطع (C_f) في نقطة واحدة فاصلتها موجبة نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلا واحدا موجبا .
- إذا كان $m\in\left]1;+\infty\right[$ فإن (Δ_m) يقطع (C_f) في نقطة واحدة فاصلتها سالبة

نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلا واحدا سالبا .



السلسلة رقم 2 تحضيرا لبكالوريا 2011
(إعداد الأستاذ بواب نورالدين)

التمرين الأول : (Bac Pondichéry Avril 2010)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$.

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3 .
2. أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ ، $u_n\geq 0$.
   ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$ ، $u_n\geq n-3$.
   جـ- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .
3. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$
   أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
   ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$
   جـ- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

التمرين الثاني : (Bac Polynésie Juin 2010 S)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر :

النقطتين $A(1;1;1)$ و $B(3;2;0)$ ؛

المستوي (P) المارّ بالنقطة B و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له ؛

المستوي (Q) الذي معادلة له $x-y+2z+4=0$ ؛

سطح الكرة (S) التي مركزها A ونصف قطرها AB .

1. بيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي : $2x+y-z-8=0$.
2. اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) .
3. أ- احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (Q) .
   - استنتج أن المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S) .
   ب- هل المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) ؟
4. لتكن النقطة $C(0;2;-1)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) .
   أ- بيّن أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان .
   ب- ليكن (D) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) .
   بيّن أن تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو : $\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4-3t \end{cases}$
   جـ- تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D) .
   د- نسمي (R) المستوي المعرف بالنقطة A والمستقيم (D) .
   هل الجملة الآتية صحيحة أو خاطئة ؟ علل إجابتك .
   « كل نقطة من (R) متساوية المسافة عن النقطتين B و C » .

التمرين الثالث : (Bac Métropole Juin 2010 STL)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2-4z+16=0$.

② نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $z_A=2-2i\sqrt{3}$ و $z_B=2+2i\sqrt{3}$.

- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_A و z_B .

③ لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C=-2\sqrt{3}-2i$

أ- بيّن أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (c) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب- أنشئ الدائرة (c) والنقط A ، B و C .

④ لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=4i$.

- بيّن أن النقطة C هي صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

⑤ بيّن أن النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$ تنتمي إلى الدائرة (c) .

- علم النقطة E في الشكل .

التمرين الرابع : (Bac Liban Juin 2010 S)

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2+\ln x$

① ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

② بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.31<\alpha<1.32$.

③ استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$$

① أثبت أنه ، من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$.

② استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثالث :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، نسمي (Γ) المنحني الممثل للدالة ln (الدالة اللوغاريتمية النيبيرية) .

لتكن A النقطة ذات الإحداثيين $(0;2)$ و M نقطة من (Γ) ذات الفاصلة x .

① أثبت أن المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

② لتكن h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- بيّن أن للدالتين f و h نفس اتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$.

ب- عيّن إحداثيي النقطة P من (Γ) بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

جـ- بيّن أن : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

③ (T) مماس للمنحني (Γ) في النقطة P . بيّن أن (AP) عمودي على (T) .

السلسلة رقم 3 تحضيرا لبكالوريا 2011
(إعداد الأستاذ بواب نورالدين)

التمرين الأول : (Bac Métropole Juin 2010 STL)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2-4z+16=0$.

2) نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $z_A=2-2i\sqrt{3}$ و $z_B=2+2i\sqrt{3}$.

- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_A و z_B .

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C=-2\sqrt{3}-2i$

أ- بيّن أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (c) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب- أنشئ الدائرة (c) والنقط A ، B و C .

4) لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=4i$.

- بيّن أن النقطة C هي صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

5) بيّن أن النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$ تنتمي إلى الدائرة (c) .

- علم النقطة E .

التمرين الثاني : (Bac Amérique du Nord Juin 2010 S)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط :
$A(1;-2;4)$ ، $B(2;-6;5)$ و $C(-4;0;-3)$.

1) أ- بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

ب- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1;-1;-1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

جـ- عيّن معادلة للمستوي (ABC) .

2) أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يمرّ بالنقطة O وعمودي على المستوي (ABC) .

ب- عيّن إحداثيات النقطة O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .

3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) .

ليكن t العدد الحقيقي الذي يحقق $\overrightarrow{BH}=t\,\overrightarrow{BC}$.

أ- بيّن أن : $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.

ب- استنتج قيمة t وإحداثيات النقطة H .

التمرين الثالث :

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء و 3 كرات حمراء (لا نميّز بينها عند اللمس) .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من هذا الصندوق .

1) نعتبر الحادثتين التاليتين :

A : « الحصول على كرة حمراء واحدة فقط »

B : « الحصول على كرة بيضاء على الأقل »

- بيّن أن : $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{41}{42}$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يربط بكل سحبة لأربع كرات بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ- حدّد القيم التي يأخذها المتغيّر العشوائي X .

ب- عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X .

التمرين الرابع : (Bac Polynésie Juin 2010 S)

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $g(x)=\ln(2x)+1-x$

1 أ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $[1;+\infty[$ حلا وحيدا α .

ب- أثبت أن : $1+\ln(2\alpha)=1$.

2 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\ln(2u_n)+1$.

نسمي (Γ) المنحني الذي معادلته $y=\ln(2x)+1$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- باستعمال المنحني (Γ) ، مثل على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le u_{n+1}\le 3$.

جـ- أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد α .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=(x-1)e^{1-x}$.

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 من أجل كل عدد حقيقي x أكبر من أو يساوي 1 ، نضع :

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x(t-1)e^{1-t}dt$$

أ- بيّن أن الدالة F متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;+\infty[$ ،

$$F(x)=-x\,e^{1-x}+1$$

جـ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;+\infty[$ ،

المعادلة $F(x)=\frac{1}{2}$ تكافئ المعادلة $\ln(2x)+1=x$.

2 a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1 . نسمي D_a جزء المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=a$.

عيّن العدد a بحيث يكون $D_a=\frac{1}{2}$.

مراجعة عامة في الرياضيات تحضيرا لبكالوريا 2011 « السلسلة 4 »

إعداد الأستاذ : بواب نورالدين

تمرين 1 : (بكالوريا تونس 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط :
$A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$.

1) أ- عيّن إحداثيات كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
ب- استنتج أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .
جـ- احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

2) لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC).
- بيّن أن $OH=\frac{4}{3}$

3) لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها النقطة O وتمرّ بالنقطة A .
أ- بيّن أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو دائرة (c) مركزها النقطة H .
ب- احسب نصف قطر الدائرة (c) .

تمرين 2 : (بكالوريا تسيير واقتصاد جوان 2008)

يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 بيضاء تحمل الأرقام -2 ، 1 ، 2 و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 1 ، 1 .

1) نسحب كرة واحدة من الكيس .
أ- ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1 ؟
ب- إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو احتمال أن يكون لونها أحمرا ؟

2) نسحب على التوالي كرتين من الكيس دون إرجاع .
أ- ما هو احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منها رقما فرديا ؟
ب- ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟
جـ- ما هو احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3 ؟

تمرين 3 : (Bac Centres Etrangers juin 2008 S)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2+4z+8=0$.
تعطى الحلول على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي .

2) A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a=2-2i$ و $b=-a$.
أ- علم النقطتين A و B على أن يتم إكمال الشكل في سياق التمرين .
ب- عيّن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
جـ- نسمي D صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- بيّن أن لاحقة النقطة D هي $d = 2 - 6i$

د- علم النقطتين C و D . ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

3) α عدد حقيقي غير معدوم ، نسمي G_α مرجح الجملة المثقلة : $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$

أ- عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{CG_\alpha}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BA}$.

ب- استنتج مجموعة النقط G_α عندما يمسح α المجموعة $\mathbb{R}^*$. أنشئ هذه المجموعة.

جـ- ما هي قيمة α لكي تنطبق G_α على D ؟

4) نفرض في هذا السؤال أن $\alpha = 2$.

عيّن وأنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$

تمرين 4 : (BAC 2008 STI)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{3}{e^{3x}+1}$

نسمي (c_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(وحدة الطول : $4\,cm$ على محور الفواصل و $2\,cm$ على محور التراتيب)

1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسّر هذه النتيجة هندسيا .

2) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y = 3$

أ- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب- استنتج أن (D) مستقيم مقارب للمنحني (c_f) عند $-\infty$.

جـ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = 3 - \dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$.

د- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (c_f) بالنسبة للمستقيم (D) .

3) نرمز بـ f' للدالة المشتقة للدالة f .

أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -\dfrac{9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها .

4) اكتب معادلة(Δ) مماس المنحني (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) ارسم (D) ، (Δ) و (c_f) .

6) ليكن α عددا حقيقيا موجبا تماما . $A(\alpha)$ بوحدة المساحة هي مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (c_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \alpha$.

أ- أثبت أن : $A(\alpha) = 3\alpha - \ln(e^{3\alpha}+1) + \ln 2$.

ب- احسب نهاية $A(\alpha)$ عندما يؤول α إلى $+\infty$ (لاحظ أن : $3\alpha = \ln e^{3\alpha}$) .

مراجعة عامة في الرياضيات تحضيرا لبكالوريا 2011 « السلسلة 5 »

إعداد الأستاذ : بواب نورالدين

تمرين 1 : (Bac Polynésie juin 2008)

1) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2-6z+13=0$.

2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $a=3-2i$ ، $b=3+2i$ و $c=4i$ على الترتيب .

أ- علم النقط A ، B و C .

ب- أثبت أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

جـ- عيّن لاحقة النقطة Ω ، مركز متوازي الأضلاع $OABC$.

3) عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$

4) لتكن M نقطة من المستقيم (AB) . يرمز β إلى الجزء التخيلي للاحقة M . نسمي N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- بيّن أن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.

ب- كيف نختار β بحيث تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) .

تمرين 2 : (Bac Polynésie juin 2008)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(1;2;3)$ ، $B(0;1;4)$ ، $C(-1;-3;2)$ ، $D(4;-2;5)$ والشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1) أ- بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

ب- بيّن أن $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي :
$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4-t \end{cases}$$

- بيّن أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC).

3) لتكن E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

- بيّن أن النقطة E هي مركز ثقل المثلث ABC .

تمرين 3 : (بكالوريا الجزائر 2008 . الشعبة : تسيير واقتصاد)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0=\alpha \quad ; (\alpha\in\mathbb{R}) \\ u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{8}{9} \quad ; \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha=-\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) في كل ما يلي $\alpha=2$ ، ونعرّف المتتالية العددية (v_n) كما يلي : $v_n=u_n+\frac{8}{3}$

أ- احسب u_1 و u_2 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .

جـ- اكتب عبارة u_n بدلالة n . واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 4 : (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية . الدورة العادية)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln x$

1) أ- احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

ب- بيّن أن g متناقصة على $]0;2]$ ومتزايدة على $[2;+\infty[$.

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$ (لاحظ أن $g(2)>0$) .

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$ ، (c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا .

2) أ- بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$. نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$)

ب- استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ وأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ (لاحظ أن : $f(x)=x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$) .

جـ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثم استنتج أن المنحني (c) يقبل ، بجوار $+\infty$ ، فرعا مكافئا اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

د- بيّن أن المنحني (c) يوجد تحت المستقيم (Δ) .

3) أ- بيّن أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ وبيّن أن f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f .

جـ- بيّن أن $y=x$ هي معادلة لمماس المنحني (c) في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وأن $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$.

5) أنشئ (Δ) و (c) (نقبل أن $I(e;e-1)$ نقطة انعطاف للمنحني (c)) .

6) أ- بيّن أن $H:x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ثم بيّن أن $\int_1^e \ln x\,dx=1$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، بيّن أن : $\int_1^e (\ln x)^2\,dx=e-2$.

جـ- احسب مساحة حيّز المستوي المحصور بين المنحني (c) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

مراجعة عامة في الرياضيات تحضيرا لبكالوريا 2011 « السلسلة 7 »
إعداد الأستاذ : بواب نورالدين

تمرين 1 : (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

① حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2-6z+34=0$.

② في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $a=3+5i$ ، $b=3-5i$ و $c=7+3i$

ليكن z لاحقة النقطة M من المستوي و z' لاحقة النقطة M' صورة M بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $4-2i$.

أ- بيّن أن : $z'=z+4-2i$ ثم تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T .

ب- بيّن أن : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$.

جـ- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC=2AC$.

تمرين 2 : (بكالوريا تونس 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$.

① أ- عيّن إحداثيات كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ب- استنتج أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

جـ- احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

② لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC). بيّن أن $OH=\frac{4}{3}$.

③ لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها النقطة O وتمرّ بالنقطة A .

أ- بيّن أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو دائرة (c) مركزها النقطة H .

ب- احسب نصف قطر الدائرة (c) .

تمرين 3 : (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

يحتوي كيس على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .

① نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس .

أ- احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء .

ب- بيّن أن احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل هو $\dfrac{16}{21}$.

② نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إرجاع ثلاث كرات من هذا الكيس .

- احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء .

تمرين 4 : (Bac Antilles Guyane sept 2008 S)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$

نسمي (c) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$) .

1) أ- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.
ب- بيّن أن المستقيم (D_1) الذي معادلته $y=x+2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) عند $-\infty$.
جـ- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (c) بالنسبة للمستقيم (D_1) .
2) أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$.
ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيّراتها .
3) أ- ما ذا يمكن القول عن المماس (D_2) للمنحني (c) في النقطة I ذات الفاصلة $\ln 3$ ؟
ب- باستعمال تغيرات الدالة f ، ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (D_2) .
4) أ- بيّن أن معادلة المماس (D_3) للمنحني (c) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي: $y=\frac{1}{4}x+1$.
ب- ادرس ، على المجال $]-\infty;\ln 3]$ ، وضعية المنحني (c) بالنسبة للمماس (D_3)
(يمكن استعمال المشتقة الثانية f'' للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f''(x)=\dfrac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^2}$) .
5) نقبل أن النقطة I هي مركز تناظر للمنحني (c) .
- ارسم (D_1) ، (D_2) ، (D_3) و (c) .
6) أ- عيّن دالة أصلية للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$.
ب- ليكن λ عددا حقيقيا سالبا تماما . $A(\lambda)$ بوحدة المساحة هي مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (c) ، المستقيم (D_1) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\lambda$.
- أثبت أن : $A(\lambda)=4\ln 4-4\ln\left(e^{\lambda}+3\right)$.
جـ- احسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$.

تمرين 5 : (بكالوريا تونس 2008 . الشعبة : رياضيات)

① نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E): $3x-8y=5$.
- برهن أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث: $x=8k-1$ و $y=3k-1$ مع $k\in\mathbb{Z}$.
② أ- ليكن n ، x و y ثلاثة أعداد طبيعية حيث : $\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$
- أثبت أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E).
ب- نعتبر الجملة (S) : $(n\in\mathbb{N})$ $\begin{cases} n\equiv 2\,[3] \\ n\equiv 7\,[8] \end{cases}$
- أثبت أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان : $n\equiv 23\,[24]$.
③ أ- ليكن k عددا طبيعيا . عيّن باقي قسمة 2^{2k} على 3 وباقي قسمة 7^{2k} على 8 .
ب- تحقق أن 1991 حل للجملة (S) وبيّن أن العدد $(1991)^{2008}-1$ يقبل القسمة على 24 .

مراجعة عامة في الرياضيات تحضيرا لبكالوريا 2011 « السلسلة 8 »
(إعداد الأستاذ بواب نور الدين)

التمرين الأول :

1. ليكن p كثير الحدود المعرف من أجل كل عدد مركب z كما يلي :

$$p(z)=z^3-7z^2+20z-24$$

أ- تحقق أن $p(3)=0$.

ب- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z :

$$p(z)=(z-3)(z^2+\alpha z+\beta)$$

جـ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $a=3$ ، $b=2+2i$ و $c=2-2i$ على الترتيب .

أ- علم النقط A ، B و C .

ب- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين b و c .

جـ- أثبت أن المثلث OBC قائم ومتساوي الساقين .

3. نعتبر المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z-3|=\sqrt{5}$

أ- بيّن أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (E) .

ب- عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (E) وأنشئها في نفس المعلم السابق .

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{3}{4}$$

1. احسب u_1 و u_2 .

2. أ- برهن بالتراجع أنه ، من كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq -1$.

ب- بيّن أنه ، من كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{4}(u_n+1)$.

جـ- بيّن أن المتتالية (u_n) هي متتالية متناقصة ، استنتج أنها متقاربة .

د- عيّن نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+1$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

ب- عبّر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

جـ- عيّن ، ثانية ، نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(-3;-1;-3)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-2;-1)$ والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $B(3;2;3)$ وشعاع توجيهه $\vec{v}(1;2;-2)$.

1. أ- بيّن أن المستقيمين (Δ) و (D) متعامدان و لا ينتميان إلى مستو واحد .

ب- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يحوي (Δ) ويوازي (D) .

② لتكن S سطح الكرة التي مركزها $C(-1;0;-1)$ ونصف قطرها 6 .

وليكن (P) المستوي الذي معادلته : $2x+y+2z+13=0$.

أ- بيّن أن S و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها النقطة A ، يطلب تعيين نصف قطرها .

ب- بيّن أن المستقيم (D) مماس لسطح الكرة S في النقطة B .

③ أ- احسب AB ، واستنتج أن النقطة C تنتمي إلى القطعة $[AB]$.

ب- عيّن مستقيما عموديا على كل من المستقيمين (Δ) و (D) .

التمرين الرابع :

f دالة عددية للمتغيّر الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .

② أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا .

③ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

④ أ- اكتب معادلة المماس T للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب- احسب الدالة المشتقة الثانية للدالة f وبيّن أن النقطة O هي نقطة انعطاف للمنحني C_f .

⑤ ارسم T و C_f .

6) أ- بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=1-\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

ب- احسب ، بوحدة المساحة ، مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني C_f والمستقيمات التي معادلاتها : $y=1$ ، $x=0$ و $x=1$.

7) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x)=mx$.