تمارين

1 صحيح.

2 صحيح.

3 صحيح.

4 خطأ.

5 خطأ.

6 (3

7 (2

8 (3

9 (3

10
$D_f = \Re$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

11
$D_f = \Re^*$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

12
$D_f = [-2,1[\cup]1,+\infty[$
$f(-2) = -1 \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

13 تصحيح:
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} k(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
المنحنى الأول يمثل الدالة h.
المنحنى الثاني يمثل الدالة k.
المنحنى الثالث يمثل الدالة g.
المنحنى الرابع يمثل الدالة f.

14
(1 $-\frac{1}{5}$ (2 1
(3 $+\infty$ (4 $-\infty$.

15
(1 9 (2 9.
(3 $+\infty$ (4 $+\infty$.

16
(1 0 (2 0 (3 1.
(4 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (5 $-\infty$ (6 $+\infty$

17
(1 0.   (2 $\sqrt{3}$.
(3 3.   (4 $+\infty$.

18
(1 $-\frac{1}{3}$
(2 $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} f(x) = +\infty$
(3 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$
(4 $+\infty$.
(5 $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$
(6 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

19
(1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
(2 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
(3 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
(4 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
(5 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
(6 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

20
(1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
(2 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
(3 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
(4 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2 \ , \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

21
(1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$
(2 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = 3$
(3 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$
(4 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$

22

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \times g(x)) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \times g(x)) = 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \times g(x)) = 2$

23

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{f(x)}{g(x)}) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{f(x)}{g(x)}) = 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{f(x)}{g(x)}) = +\infty$

24

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

25

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

3) لا يمكن حساب النهاية.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

5) لا يمكن حساب النهاية.

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

10) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

26

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

5) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

6) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

7) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

8) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

27 (1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

منحنى *f* يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

منحنى *f* يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

منحنى *f* يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

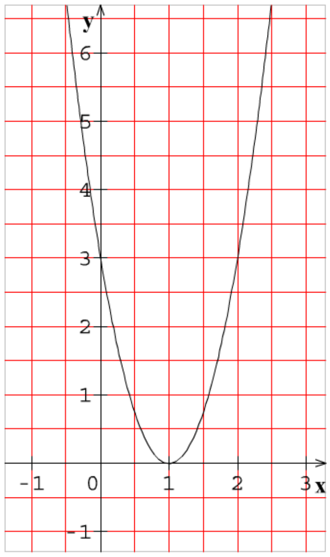
منحنى *f* يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

(5 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

منحنى *f* يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

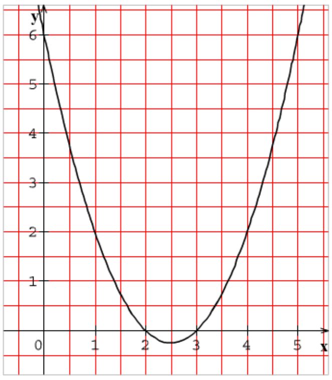
28 (1

x	-z		1		+z
f'(x)		−	0	+	
f(x)	+z	↘	0	↗	+z



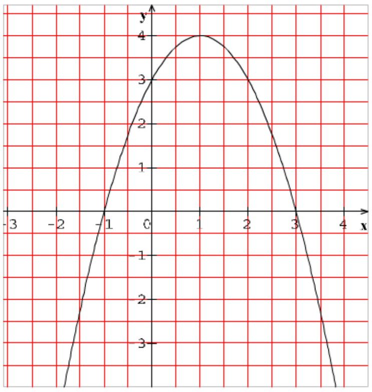
(2

x	-z		$\frac{5}{2}$		+z
f'(x		−	0	+	
f(x)	+z	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	+z



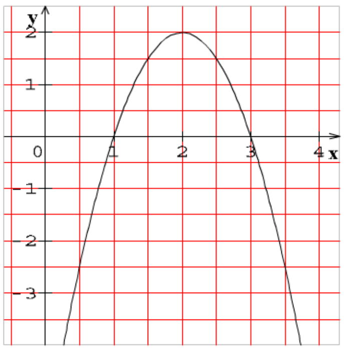
(3

x	-z		1		+z
f'(x		+	0	−	
f(x)	-z	↗	4	↘	-z



(4

x	-∞		2		-∞
f'(		+	0	−	
f(x)	-∞	↗	2	↘	-∞



29 (1

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{367}{265}$	↘	$\frac{163}{265}$	↗	$+\infty$

أولا نغير رمز النقطة ليصبح مثلا ω ثم نتبع طريقة تغيير المعلم:بحيث تكتب معادلة (C_f) في المعلم $(\omega ;I ;J)$ و تصبح:
$F(X)=X^3-X$ حيث: $X=x+0$ و $Y=y+1$
و في الأخير نثبت أن F دالة فردية

(2

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{19}{3}$	↘	$-\frac{13}{3}$	↗	$+\infty$

إثبات المركز يتم بنفس الطريقة السابقة.

(3

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

إثبات المركز يتم بنفس الطريقة السابقة.

30 (1

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

يقبل (C_f) مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=-1$ و $y=2$.

(2

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	
$f(x)$	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

يقبل (C_f) مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=0$ و $y=0$.

(4

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

يقبل (C_f) مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=0$ و $y=1$.

(5

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	
$f(x)$	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

يقبل (C_f) مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=5$ و $y=2$.

(6

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	
$f(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

يقبل (C_f) مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=2$ و $y=0$.

31 (1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

بما أن:
$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$
فإن: (Δ) مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f.

(2

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{647}{169}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{373}{204}$	↗	$+\infty$

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

(3

x	-∞		$-\frac{169}{408}$		1		$\frac{408}{169}$		+∞
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	-∞	↗	$-\frac{169}{204}$	↘	-∞ ‖ +∞	↘	$\frac{816}{169}$	↗	+∞

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

(4

x	-∞		$\frac{239}{408}$		2		$\frac{577}{169}$		+∞
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	-∞	↗	$\frac{239}{204}$	↘	-∞ ‖ +∞	↘	$\frac{1154}{169}$	↗	+∞

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

32

المنحنى الأول يمثل الدالة *f*.
المنحنى الثاني يمثل الدالة *g*.
المنحنى الثالث يمثل الدالة h.
المنحنى الرابع يمثل الدالة *k*.
المنحنى الخامس يمثل الدالة *l*.
المنحنى السادس يمثل الدالة *m*.

33

(1 1   (2 0   (3 $-\frac{1}{2}$

(4 $\frac{1}{2}$ (5 4   (6 12.

(7 $\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$

(8 3   (9 $\frac{1}{12}$.

(10 $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

(11 $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

34

(1 0   (2 $-\infty$ (3 $+\infty$

(4 0   (5 $-\frac{3}{4}$ (6 0

(7 $\frac{1}{2}$ (8 $+\infty$.

35 (1

x	-∞		+∞
f'(x)		+	
f(x)	-∞	↗	+∞

نستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(2

x	-∞		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		+∞
f'(x)		−	0	+	0	+	0	+	
f(x)	+∞	↘	$-\frac{28}{9}$	↗	-3	↗	12	↗	+∞

نستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(3

x	-∞		0		2		4		+∞
f'(x)		−	0	+	0	−	0	+	
f(x)	+∞	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗	+∞

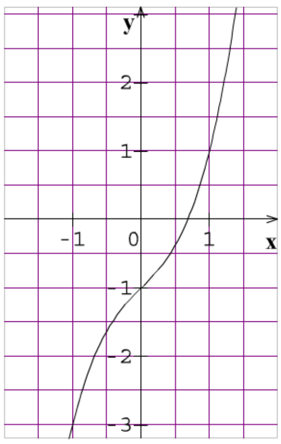
نستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(4

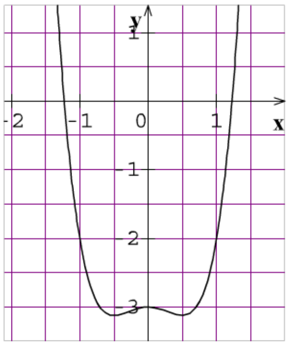
x	-∞		-1		0		+∞
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	+∞	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1	↘	-∞

نستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

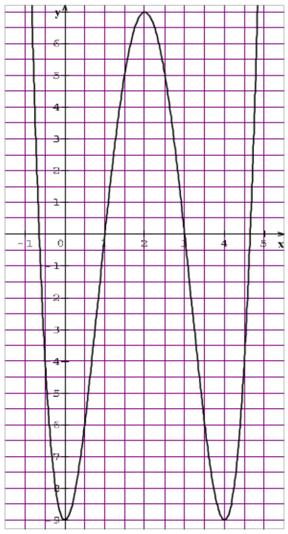
36 (1



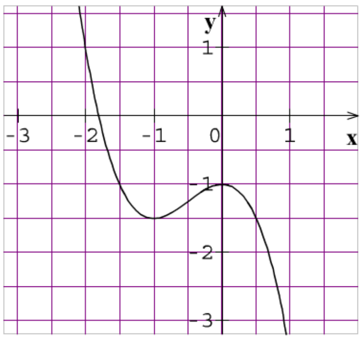
(2



(3

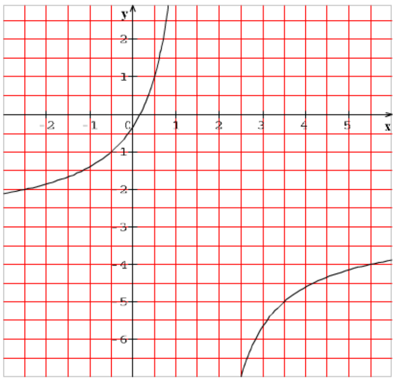


(4



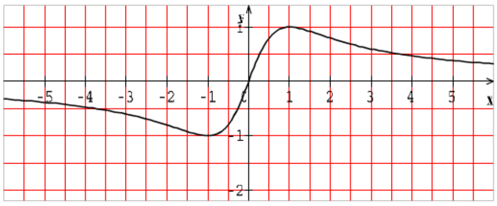
37 (1

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 3$



(2

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



الأجزاء 3) 4) 5) 6) 7) يتم الإجابة عليها بنفس الطريقة.

38 (1 ليكن x عدد حقيقي من D:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

2) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D:

$$\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}>0 \quad \text{و} \quad \sqrt{x+3}+\sqrt{x} .... (1)$$

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}>\sqrt{x} \quad \text{و} \quad \sqrt{x+3}>0$$

أي

$$\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}<\frac{3}{\sqrt{x}} ....(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D: $0 \le f(x) \le \frac{3}{\sqrt{x}}$

3) بما أن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

39

(1

x	10^4	10^6	10^{10}
f(x)	1,01	1	1
x	10^{12}	10^{20}	10^{40}
f(x)	1	1	1

2) لدينا من أجل العدد الحقيقي x الموجب تماما:

$$x^2 \le x^2+x+1 \quad \text{و} \quad x^2+x+1 \le x^2+2x+1$$

أي

$$x^2 \le x^2+x+1 \le (x+1)^2$$

و منه:

$$x \le \sqrt{x^2+x+1} \le x+1$$

3) لدينا من أجل العدد الحقيقي x الموجب تماما:

$$x \le \sqrt{x^2+x+1} \le x+1$$

بحساب مقلوب العبارة نجد.

$$\frac{1}{x+1} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \le \frac{1}{x}$$

بضرب النتيجة بـ $x+\sqrt{x}$ مع التبسيط نجد:

$$1-\frac{1}{x+1} \le f(x) \le 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

4) بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{1+x} = 1$$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

40 لدينا من أجل العدد الحقيقي x من D:

$$-1 \le \sin x \le +1$$

$$2 \le 3+\sin x \le 4$$

بالقسمة على x نجد:

$$\frac{2}{x} \le f(x) \le \frac{4}{x}$$

2) بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

41 1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$-1 \le \sin x \le +1$$

$$x^2-1 \le x^2+\sin x \le x^2+1$$

بالقسمة على x نجد:

$$\frac{x^2-1}{x} \le f(x) \le \frac{x^2+1}{x}$$

2) بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = +\infty$$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

42 1) $0 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

لا يمكن حساب النهاية لما x يؤول إلى $+\infty$.

2) $$\frac{-x}{x^2+3} \le f(x) \le \frac{x}{x^2+3}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+3} = 0 \ , \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+3} = 0$$

بنفس الطريقة يتم الإجابة على 3) و 4).

43 1) بما أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=3$.

2) حسب إشارة الفرق $f(x) - y$.

لما $x \in]1 , +\infty[$ فإن (C_f) يقع أعلى (D).

لما $x \in]-\infty , 1[$ فإن (C_f) يقع أسفل (D).

44 1) $a=-2 \quad , \quad b=3$.

إجابة السؤالين 2) و 3) مثل التمرين 43 .

45 1) بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)-y = 0$$

فإن: (C) يقبل (Δ) كمستقيم مقارب.

2) دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$.

46 1) $a=2 \ , \ b=6 \ , \ c=17$

نفس الطرق السابقة للإجابة على 2)

47 1) (الدالة h هي التي توفر الشروط السابقة.

2) لا يمكن تعيين قيمة a من أجل $x=1$

(الدالة k هي التي تمثيلها البياني (C) .

$(C_f)\cap(d)=\{\ \}$

2) $(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(-\frac{1}{2},0\right)\right\}$

$(C_f)\cap(yy')=\{(0,1)\}$

49 1) المستقيم المقارب المائل معادلته $y=x-2$

المستقيم المقارب العمودي معادلته $x=-2$

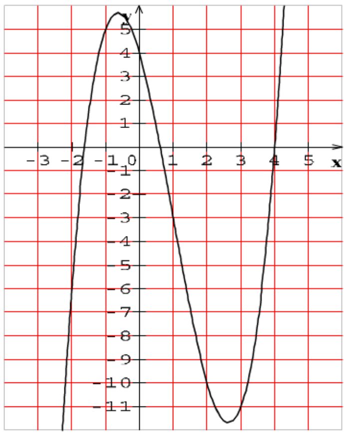
2) $(C_f)\cap(C_g)=\{(-3,-9)\}$.

50 1)

x	$-\infty$		$-\frac{188}{297}$		$\frac{495}{188}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{491}{86}$	↘	$-\frac{1007}{86}$	↗	$+\infty$

2) سبق التطرق إلى كيفية إثبات مركز التناظر.

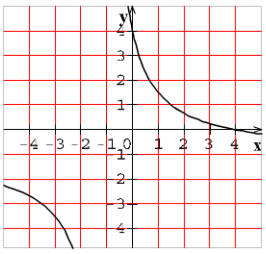
3)



4)

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

5)



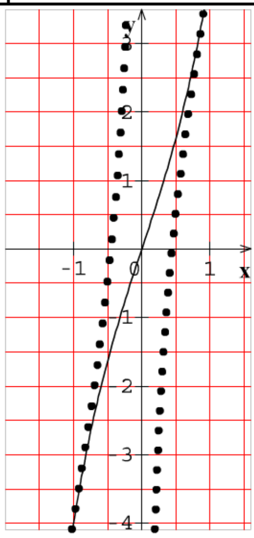
6) النقطتان المتناظرتان بالنسبة للنقطة S هما: $(-2\ ,\ -6)$ و $(4\ ,\ 0)$

51 1)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$



3) (d): $y=5x$.

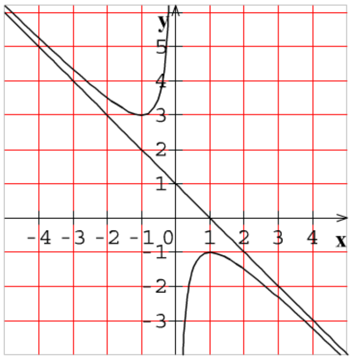
x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$-\frac{1}{x}$	$+$	$-$
الوضعية	(C_g) فوق المستقيم	(C_g) تحت المستقيم

4) $(C_f)\cap(C_g)=\{(-1,-4)\ ,(1,4)\}$

52 1) سبق كيفية إثبات وجود مستقيم مقارب مائل و دراسة الوضعية النسبية.

(2

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	3	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘	$-\infty$



3) لما $m\in]-1,1[$ لا يوجد حلول.
لما $m=-1$ حل مضاعف $x=1$.
لما $m=1$ حل مضاعف $x=-1$.
لما $m\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ يوجد حلين.

4) $I\left(\frac{-m+1}{2},m\right)$

5) المماس يوازي محور الفواصل معناه:
$f'(x_0)=0$ و منه:
$A(-1\ ,\ 3)\ ,\ B(1\ ,\ -1)$.
A، B و I في استقامية معناه:
$\overline{AB}\ ,\ \overline{AI}$ متوازيان. و هذا محقق.

53

1) ليكن D∋x و -x∈D:
لدينا $f(-x)=f(x)$ إذن f زوجية.

(2

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

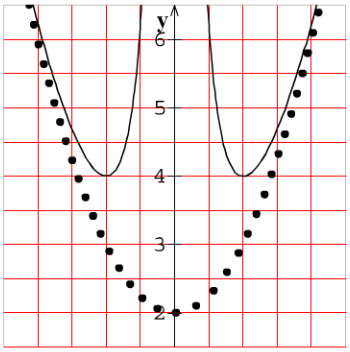
3) معادلة المستقيم المقارب هي: x=0.

4) $MN=\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} MN=0\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty} MN=0$.

5) (C) يقع أعلى (P).

(6



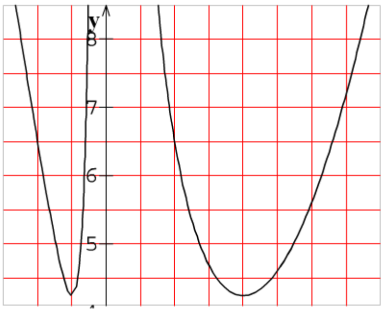
54

1) $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\right)^2$

(2

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		2		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	‖	−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{17}{2}$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{17}{2}$	↗	$+\infty$

(3



(4

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		2		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	‖	−	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	$\frac{134}{65}$	↗	‖	↘	$\frac{134}{65}$	↗	$+\infty$

5) المسافة AM ممثلة بالدالة g و تكون لها قيمة

6) يتعامد المماس لـ (H) في النقطة M_1 و المستقيم (AM_1) إذا كان جداء معاملي توجيههما يساوي -1 و هذا محقق لأن: $-\frac{1}{4}\times4=-1$

نفس الشئ بالنسبة للحالة الثالثة.

55

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
f'(x)	−	‖	+	0	−	‖	+
f(x)	1 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{4}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 1

56 1) $D_f=\Re$
2) انطلاقا من $-1\le \cos x \le +1$ يمكن حصر $f(x)$ ثم الإحالة على السؤال 3).

57 1) $x=1$, $y=-2$, $y=3$.
2) يتم الرسم.

58 1) $D_f = \Re-\{1\}$
2) أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$
ب/ $x=1$ معادلة المقارب العمودي.
3) تصحيح: $x?1$
$a=-1$, $b=0$, $c=-2$
4) معادلة المقارب المائل هي: $y=x-1$
5) $(C)\cap(d)=\{(0\ ,\ 1),(2\ ,\ 3)\}$

59 1) $\varphi(h)=h^2+3h+1$
2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} h(x)=1$

60 تصحيح: المقام هو: x+2
1) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=+\infty$
2) $a=2$, $b=-1$, $c=3$
3) $y=2x-1$
4) يمكن التحقق من ذلك.
5) يتم دراسة الوضعية كما سبق.

61 1) $a=1$, $b=0$, $c=2$, $d=-1$
2) $x=1$, $x=-1$, $y=x$
3) دراسة الوضعية تم التطرق لها سابقا.

62 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
(C) يقبل مستقيم مقارب معادلته: $y=2$
2) أ/ $a=2$, $b=-3$, $c=-1$

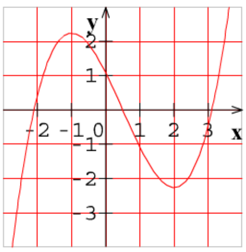
ب/ دراسة الوضعية تتم كما سبق.

63 1) لدينا: $f(x)-1=\dfrac{u(x)}{x^2}$
و كذلك: $0\le \dfrac{u(x)}{x^2}\le \dfrac{1}{x}$
و منه: $|f(x)-1|\le \dfrac{1}{x}$
2) بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

64 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2) من أجل كل عدد حقيقي x:
$f'(x)=x^2-x-2$
لما $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ فإن: $f'(x)>0$
لما $x\in]-1,2[$ فإن: $f'(x)<0$
3)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{17}{12}$	↘	$\frac{27}{12}$	↗	$+\infty$

4) تم التطرق لإثبات مركز التناظر.
5) للمعادلة $f(x)=0$ ثلاث حلول هي:
$x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$, $x=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$
6)



7) سبق التعرض لمثل هذا السؤال.

65 1) نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x :
$-x\in\Re$ و $f(-x)=-f(x)$ إذا f فردية.
2) $f(x+2\pi)=x+2\pi-\sin x$
$f(x+4\pi)=x+4\pi-\sin x$
$f(x+k2\pi)=x+k2\pi-\sin x$

(3

x	0		2π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2π

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$0 \le f'(x) \le 2$ و منه f متزايدة على $\mathfrak{R}$.

$-1 \le -\sin x \le 1$

(4 $x-1 \le x-\sin x \le 1+x$

$x-1 \le f(x) \le 1+x$

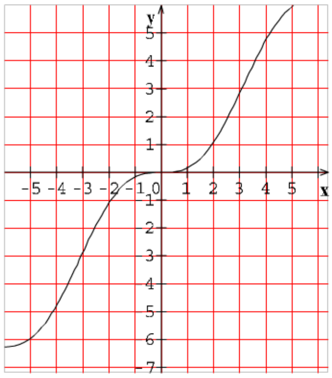
(5 لدينا:

$f(x) \ge x-1$ و $x-1 \ge A$

إذن: $f(x) \ge A$

حسب تعريف النهاية لما x يؤول إلى $+\infty$

فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



66 تصحيح: المقام هو: x-c

(1 معادلة المستقيم المقارب هي: x=c.

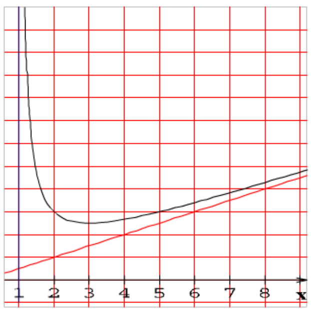
و عليه c=1.

(2 لدينا: $f(3)=\frac{5}{2}$ و منه: 6a+b=5.

(3 لدينا: $f'(3)=0$ و منه: 4a-b=0.

(4 $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x-1}$

(5 (C_f) يقع أعلى (D)



67 (1 $D_f=\mathfrak{R}-\{1,-1\}$

(5 $f'(x)=\frac{x^4-3x^2-18x}{(x^2-1)^2}$

$P(x)=x(x-3)(x^2+3x+6)$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

68 I) (1 $D_f=\mathfrak{R}$

لما $x \in [0,+\infty[$ فإن: $f(x)=\frac{x}{x+1}$

لما $x \in]-\infty,0]$ فإن: $f(x)=\frac{x}{1-x}$

(2 f دالة فردية.

(3 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=1$

(4 لما $x \in [0,+\infty[$ فإن:

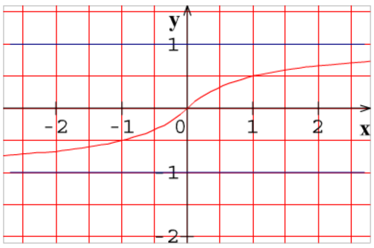
$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$

و منه f قابلة للاشتقاق عند 0.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

(5



6) لما $y \geq 0$: $x = \dfrac{y}{1-y}$.

لما $y \leq 0$: $x = \dfrac{y}{1+y}$.

7) الحل الوحيد على $\Re$ للمعادلة $f(x)=y$ هو

$x = \dfrac{y}{1-|y|}$.

II) 1) $D_g = \Re - \{-1, 1\}$

2) لما $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0]$ فإن: $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$

لما $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ فإن: $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$

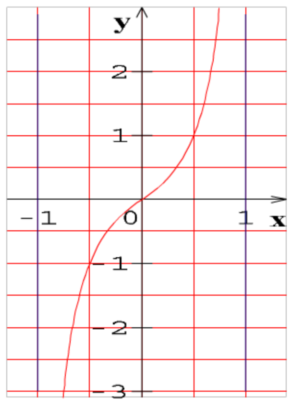
3) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} g(x) = +\infty$

4) $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{g(x)}{x} = 1$$

x	-1 $\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

(5



من أجل كل عدد حقيقي x من المجال]1- ، 1[:

$(f \circ g)(x) = x$

6) نستنتج أن المنحنيين متناظرين بالنسبة إلى (D) .