تمارين

1 الحد الأول للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_n=\frac{1-n^2}{1+n^2}$ ، هو $u_0=1$ ومنه الحد الخامس هو $u_4=\frac{-15}{17}$ وبالتالي الجواب خطئ .

2 صحيح المتتالية متزايدة .لأن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=(n+1)\times 2^{n+1}-n\times 2^n=2^n(n+2)$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$.

3 صحيح لأن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=2n+1$ ومنه : $u_{n+1}-u_n>0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما إذن هي رتيبة .

4 صحيح لأنه إذا كان u_0 موجب تماما فإن كل حدود المتتالية الهندسية (u_n) تكون موجبة تماما وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=4u_n$ معناه أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}=4$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

5 $u_{n+1}=u_n-3$ معناه $u_{n+1}-u_n=-3$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n<0$ إذن صحيح.

6 من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+r$ و $u_{n+1}=qu_n$ ومنه: $u_n+r=qu_n$ بوضع $u_n=x$ يصبح لدينا من أجل كل عدد حقيقي x: $x+r=qx$ معناه $q=1$ و $r=0$ إذن (u_n) متتالية ثابتة وأجب بصحيحة.

7 خطأ لأن إذا قبلت متتالية نهاية فإنها تكون وحيدة.

8 لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2$ ، $AC=AB+r$ ، $BC=AB+2r$ نضع $AB=a$

إذن : $(a+2r)^2=a^2+(a+r)^2$ ومنه : $a^2+4ar+4r^2=a^2+a^2+2ar+r^2$ إذن : $3r^2+2ar-a^2=0$ ، $\Delta'=4a^2$ ومنه: $r=-a$ أو $r=\frac{a}{3}$ نستبعد $r=-a$ لأنه في هذه الحالة $AC=0$ وكذلك $BC=-a$ الطول سالب وبالتالي أجب بصحيح

9 خطأ لأن $u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n$ معناه $u_0q^nq^2=u_0q^n(4q-3)$ بما أن $u_0\neq 0$ و $u_0\neq 0$ فإن $q^2=4q-3$ وبالتالي : $q^2-4q+3=0$ ومنه : $(q-1)(q-3)=0$ أي : $q=1$ أو $q=3$

10 صحيح لأن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-u_n=a$ و a عدد حقيقي ثابت إذن (u_n) هي متتالية حسابية أساسها a (يمكن $a=0$) .

11 لدينا $u_0=u_1$ و $u_1=0$ وبما أن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=(1-n)u_n$ فإن $u_n=0$ وبالتالي (u_n) متتالية معدومة وهي هندسية أساسها أي عدد حقيقي إذن صحيح .

12 خطأ لأنه لا يمكن الحكم على (v_n) أنها هندسية من الحدين v_1 و v_2 فقط .

13 $3+7+11+15+...+203=5160$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=4n+3$ إذن $u_0=3$ ، $u_{50}=203$ ومنه : $\frac{51}{2}(u_0+u_{50})=51\times 103=5253$ إذن الإجابة خاطئة

- $1+2+4+8+...+128=263$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=2^n$ إذن $v_0=1$ ، $v_7=2^7=128$ ومنه $v_0\frac{q^8-1}{q-1}=\frac{2^8-1}{2-1}=255$ إذن الإجابة خاطئة .

14 لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ وبالتالي الإقتراحين الأول والثاني خاطئين .

لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=-\frac{3}{4}(2n+1)$ الفرق $u_{n+1}-u_n$ ليس ثابتا إذن (u_n) ليست حسابية .

$f'(x)=-\frac{3}{2}x$ من أجل كل x موجب، $f'(x)\leq 0$ إذن f متناقصة ومنه (u_n) متناقصة والإقتراح 4 صحيح

15 $u_1=\frac{9}{5}$ ، $u_2=\frac{57}{50}$ ، $u_3=\frac{317}{375}$.

$\frac{u_2}{u_1}=\frac{57}{90}\simeq 0,63$ ، $\frac{u_3}{u_2}=\frac{634}{855}\simeq 0,74$ ليست هندسية

$u_2-u_1=-0.66$ ، $u_3-u_2\simeq -0.3$ ليست حسابية

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ وبالتالي الاقتراحات الأول والثاني والرابع خاطئة . بينما الاقتراح الثالث صحيح لأن $u_{n+1}-u_n=-\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة .

16 لدينا $-2\leq 1\leq 2$ ومنه $-\frac{2}{n}\leq\frac{1}{n}\leq\frac{2}{n}$ إذن $4-\frac{2}{n}\leq 4+\frac{1}{n}\leq 4+\frac{2}{n}$ ، إذن يمكن أخذ $u_n=4+\frac{1}{n}$ الاقتراحان الأول والثاني خطئان .

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{2}{n}<4$ ومنه :

$4-\frac{2}{n}>0$ إذن : $u_n>0$ والاقتراح الثالث صحيح .

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\frac{2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\frac{2}{n}=4$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=4$

ومنه (u_n) متقاربة إذن الاقتراح الرابع صحيح كذلك.

17 بوضع u_n السعر للبضاعة خلال n سنة ، $u_0=P$

لدينا $u_{n+1}=u_n+0.05u_n$ ومنه $u_{n+1}=1,05u_n$ نحصل على متتالية هندسية أساسها 1,05 ومنه: $u_n=P(1,05)^n$

بالآلة الحاسبة لدينا : $(1,05)^{10}\simeq 1.6$ ؛

$(1,05)^{15}\simeq 2.08$ ؛ $(1,05)^{14}\simeq 1.9799$

إذن $u_n\geq 2P$ إذا كان $n\geq 15$ إذن الاقتراح (2) صحيح .

18 $u_n=\frac{3^{n+2}}{4^{n-2}}$ معناه $u_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\times 9\times 16$ أي : $u_n=144\left(\frac{3}{4}\right)^n$ إذن (u_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول 144 $u_0=144$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ أي متقاربة ولكن متناقصة

. إذن : الاقتراحان الأول و الثالث صحيحان والاقتراحان الثاني و الرابع خطئان.

19 الاقتراح الأول صحيح ، عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q .

$u_n=u_0+q^n$ معناه $u_n=u_0+\frac{u_n}{u_0}$ أي $u_n=\frac{{u_0}^2}{u_0-1}$

إذن الاقتراح الثاني يكون صحيح في حالة خاصة فقط وهي عندما يكون $u_0\neq 1$ و $q=1$

الاقتراحان الثالث والرابع صحيحان في حالة $q=1$ فقط .

20 1° $u_n=3n-4$ ؛ f معلرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=3x-4$. $u_0=-4$ ، $u_1=-1$ ، $u_2=2$ ، $u_3=5$.

2° $u_n=\frac{n-2}{n+2}$ ؛ f معلرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$. $u_0=-1$ ، $u_1=-\frac{1}{3}$ ، $u_2=0$ ، $u_3=\frac{1}{5}$.

3° $u_n=n^2-\sqrt{n}$ ؛ f معلرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=x^2-\sqrt{x}$. $u_0=0$ ، $u_1=0$ ، $u_2=4-\sqrt{2}$ ، $u_3=9-\sqrt{3}$.

4° $u_n=\cos\left(3n-\frac{\pi}{4}\right)$ ؛ f معلرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

$u_0=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $u_1=\cos\left(\frac{12-\pi}{4}\right)$ ، $u_1\simeq -0,6$ ؛ $u_2=\cos\left(\frac{24-\pi}{4}\right)$ ، $u_2\simeq 0,48$ ، $u_3=\cos\left(\frac{36-\pi}{4}\right)$ ، $u_3\simeq -0,35$.

21 1° $f:x\mapsto (x-1)^2$ معرفة على $[-2\,;+\infty[$ ؛ $u_1=9$ ، $u_2=64$ ، $u_3=3969$

2° $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ معرفة على $[0\,;+\infty[$ ؛ $u_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، $u_2=\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}$ ، $u_3=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}+1}$

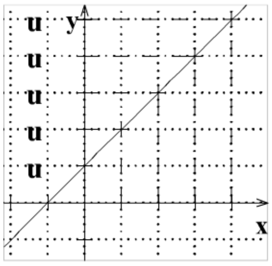
3° $f:x\mapsto\frac{2x}{x+1}$ معرفة على $[0\,;+\infty[$ ؛ $u_1=\frac{8}{5}$ ، $u_2=\frac{16}{13}$ ، $u_3=\frac{32}{29}$.

4° $f:x\mapsto x^2-2x$ معرفة على $\mathbb{R}$ ؛ $u_1=15$ ، $u_2=195$ ، $u_3=37635$.

22 1° $u_n=n+1$.

$u_0=1$ ، $u_1=2$ ، $u_2=3$ ، $u_3=4$.

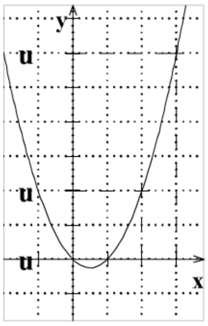
نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x+1$ و $u_n=f(n)$.



2° $u_n=n^2-n$.

$u_0=0$ ، $u_1=0$ ، $u_2=2$ ، $u_3=6$

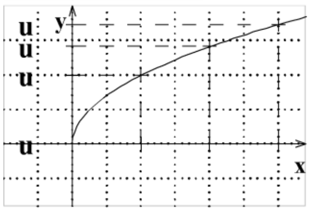
نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x^2-x$ و $u_n=f(n)$.



3° $u_n=\sqrt{n}$.

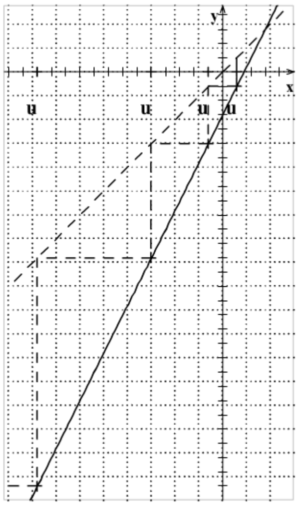
$u_0=0$ ، $u_1=0$ ، $u_2=\sqrt{2}$ ، $u_3=\sqrt{3}$

نعتبر الدالة f حيث: $f(x)=\sqrt{x}$ و $u_n=f(n)$.



4° $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=2u_n-3\end{cases}$ $u_1=-1$ ، $u_2=-5$ ، $u_3=-13$

لتكن الدالة f حيث: $f(x)=2x-3$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.



23 الشكل 1 : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

الشكل 2 : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

الشكل 3 : $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

24 °1 $u_n = 4n - 1$ ؛ $u_{n+1} = 4n + 3$ ؛

$u_n + 1 = 4n$ ؛ $u_{2n} = 8n - 1$ ؛ $u_{n^2} = 4n^2 - 1$ ؛

$u_{2n+1} = 8n + 3$ ؛ $u_{2n-1} = 8n - 5$.

°2 $u_n = n^2 + n - 3$ ؛ $u_{n+1} = n^2 + 3n - 1$ ؛

$u_n + 1 = n^2 + n - 2$ ؛ $u_{2n} = 4n^2 + 2n - 3$ ؛

$u_{n^2} = n^4 + n^2 - 3$ ؛ $u_{2n+1} = 4n^2 + 5n - 2$ ؛

$u_{2n-1} = 4n^2 - 3n - 2$.

°3 $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ ؛ $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$ ؛ $u_n + 1 = \dfrac{2n+1}{n+1}$

$u_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}$ ؛ $u_{n^2} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ ؛ $u_{2n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}$ ؛

$u_{2n-1} = \dfrac{2n-1}{2n}$.

°4 $u_n = \sqrt{n} + 1$ ؛ $u_{n+1} = \sqrt{n+1} + 1$ ؛

$u_n + 1 = \sqrt{n} + 2$ ؛ $u_{2n} = \sqrt{2n} + 1$ ؛ $u_{n^2} = n + 1$ ؛

$u_{2n+1} = \sqrt{2n+1} + 1$ ؛ $u_{2n-1} = \sqrt{2n-1} + 1$.

25 $u_n = 2^{3n}$ ؛ $u_{n+1} = 2^{3(n+1)} = (2^3)^{n+1} = 8^{n+1}$ ؛

$u_{2n} = 2^{6n} = (2^6)^n = 64^n$ ؛

$u_{2n-1} = 2^{3(2n-1)} = 2^{6n-3} = 2^{6n} \times 2^{-3} = \dfrac{64^n}{8}$ ؛

$u_{n^2} = 2^{3n^2} = (2^3)^{n^2} = 8^{n^2}$.

26 1) $u_0 = 3$ ؛ $u_1 = 5$ ؛ $u_2 = 3$.

(u_n) متتالية غير ثابتة .

2) $u_n - 3 = n(n^2 - 5n + 6) = n(n-2)(n-3)$

$u_n = n^3 - 5n^2 + 6n + 3$. إلى جداء عوامل

3) $u_n = 3$ معناه $u_n - 3 = 0$ ومعناه :

$n(n-2)(n-3) = 0$ أي: $n = 0$ أو $n = 2$ أو $n = 3$

27 1) $u_0 = -5$ ، $u_1 = -2$ ، $u_2 = 5$ ، $u_3 = 10$.

2) $u_0 = -1$ ، $u_1 = 6$ ، $u_2 = 10,5$ ، $u_3 = 12$.

3) $u_0 = 6$ ، $u_1 = 10,5$ ، $u_2 = 12$ ، $u_3 = 12,5$.

28 1) $u_1 = 4$ ، $u_2 = 5$ ، $u_3 = 6$

2) من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + 1$.

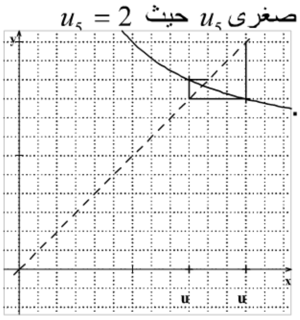
29 1) $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x} = \dfrac{x^2 + 25}{5x}$

2) $f'(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{5}{x^2} = \dfrac{x^2 - 25}{5x^2}$ ومنه f متناقصة تماما على $]0;5]$ ومتزايدة تماما على $[5;+\infty[$.

3) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4) (u_n) ليست رتيبة .

5) (u_n) تقبل قيمة حدية صغرى u_5 حيث $u_5 = 2$



30 1) $u_1 = 1,5$ ؛

$u_2 \simeq 1,66$ ، $u_3 = 1,6$.

2) $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

3) $u_4 = 1,625$ ؛

$u_5 \simeq 1,615$ ،

$u_6 \simeq 1,619$

31 1) $u_1 = 1$ لأنه يوجد مثلث واحد AB_0B_1 ؛ $u_2 = 3$

لأنه توجد 3 مثلثات هي AB_0B_1 ، AB_0B_2 و AB_1B_2 .

2) $u_{n+1} - u_n = n + 1$.

3) $u_3 = 6$ ؛ $u_4 = 10$ ؛ $u_5 = 15$.

4) $v_1 = 1$ ؛ $v_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(n+1)}{2}$

ومنه : $v_{n+1} = v_n + n + 1$ ؛ $v_n = u_n$

32 1) $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ، $u_2 = 4$ ، $u_3 = 8$ ، $u_4 = 16$

2) $u_n = 2^n$. 3) $u_5 = 31$ ، $u_6 = 57$ ، $u_7 = 99$

التخمين خاطأ لأن $2^n \neq 31$.

33 1)

n	u_n
0	1
1	-998.99
2	-1998.98
3	-2998.97
4	-3998.96
5	-4998.95

1419	-63718.9
1420	-51166
1421	-38477.7
1422	-25652.5
1423	-12689
1424	414.1081
1425	13658.25

2001	441678067
2002	446113858
2003	450594016
2004	455118987
2005	459689216
2006	464305159
2007	468967270

(2

$$u_{n+1} - u_n = 1,01^{n+1} - 1000(n+1) - 1,01^n + 1000n$$

$$u_{n+1} - u_n = 0,01\left(1,01^n - \frac{1000}{0,01}\right)$$

لدينا $u_{1158} - u_{1157} \simeq -0,39$ و $u_{1159} - u_{1158} \simeq 9,6$

ومنه $n_0 = 1158$ ونلاحظه كذلك من المجدول .

34 $u_n = -2n + 3$. المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

35 $u_n = \frac{2-4n}{n+2}$.الدالة $f : x \mapsto \frac{2-4x}{x+2}$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

36 $u_n = (n-5)^2$. المتتالية (u_n) غير رتيبة تكون متناقصة تماما من أجل $0 \le n \le 5$ ومتزايدة تماما من أجل $n \ge 5$.

37 $u_n = \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$. كل الحدود موجبة تماما و $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{8}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ومنه إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

38 $u_n = \frac{n^2+1}{2n}$. الدالة $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x}$ متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

39 $u_{n+1} - u_n = 2n$ و $n \in \mathbb{N}$ إذن (u_n) متزايدة تماما.

40 $u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$. $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ونجد (u_n) متناقصة تماما.

41 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ وكل الحدود سالبة إذن $u_{n+1} > u_n$ ومنه (u_n) متزايدة تماما.

42 (u_n) ليست رتيبة .

43 1) $v_6 = -41$ ؛ $v_{n+1} - v_n = 2n - 11$.
من أجل $n \ge 6$ ؛ $2n - 11 > 0$ إذن (v_n) متزايدة تماما.

44 1) f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$ و $]10;+\infty[$ ، ومتناقصة تماما على $[0;10]$.

2) ابتداء من الدليل 10 ، (u_n) متزايدة تماما.

45 1) $0,5$ ؛ 1 ؛ $2,25$ ؛ $5,4$ ؛ $13,5$.

2) $3^n > 0$ و $n+2 > 0$ إذن $u_n > 0$.

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{2n+3}{n+3}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$

4) $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ وكا الحدود موجبة إذن (u_n) متزايدة تماما .

46 1) الدالة f ليست رتيبة .

2) $u_n = n + 1$.

3) $u_{n+1} - u_n = 1$ ومنه (u_n) متزايدة تماما .

47 1) $u_1 = 0,5$ ، $u_2 \simeq 0,166$ ، $u_3 = 0,083$ ، $u_4 = 0,05$.

2) $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

3) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2}$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

بما أن $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ فإن $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$ ومنه كل الحدود موجبة وبالتالي (u_n) متناقصة تماما.

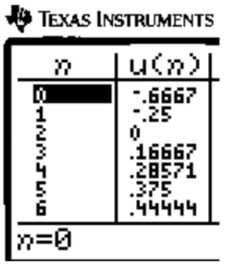
48 1) من المنحني البياني يلاحظ أن الدالة f ليست رتيبة

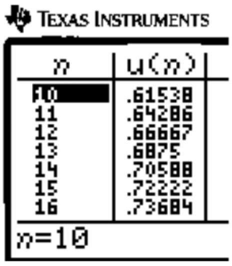
2) $u_n = \frac{2\sin(2\pi n)}{2n+1} = 0$.

3) (u_n) متتالية معدومة إذن هي ثابتة .

49

1)

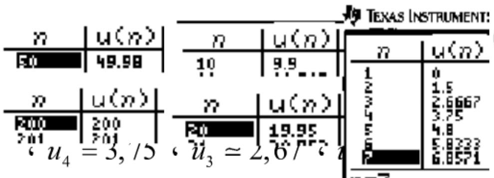




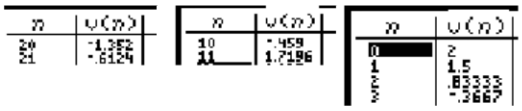
الحاسبة TI83+ نجد : $u_0 = -0,67$ ، $u_1 = -0,25$ ، $u_5 = 0,38$ ، $u_{10} = 0,62$ ، $u_{15} = 0,74$

2) $u_{2n} = 1 - \frac{5}{2n+3}$ ، $u_{4n+1} = 1 - \frac{5}{4n+4}$ ، $u_{10^3 n} = 1 - \frac{5}{10^3 n + 3}$.

50



[illegible] $= 0$ ، $u_3 \simeq 2,67$ ، $u_4 = 3,75$ ،
$u_{10} = 9,9$ ، $u_{20} = 19,95$ ، $u_{50} = 49,98$ ،
$u_{200} = 200$.



$v_1 = 1,5$ ، $v_2 = 0,83$ ، $v_3 \simeq -0,37$ ، $v_{10} \simeq -0,46$ ،
$v_{20} \simeq -1,35$.

51 °1 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 3x^2 = -\infty$.

°2 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 3 = -3$.

°3 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\sqrt{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right) = -\infty$.

°4 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$.

°5 $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $-1 \le (-1)^n \le 1$ ؛ ومنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

°6 $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{3n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^2} = 0$.

ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $-1 \le \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \le 1$ ؛ ومنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $-\frac{1}{3n^2} \le \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{3n^2} \le \frac{1}{3n^2}$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

°7 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، لأن $0 < 0,7 < 1$.

°8 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، لأن $0 < \frac{\sqrt{5}}{4} < 1$.

°9 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ، لأن $0 < \frac{1}{3} < 1$.

°10 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{3x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$.

52 (1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

53 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 .

54 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -3$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها -3 .

55 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 4n+5$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

56 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 2n+1$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

57 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+3} - u_{n+2} = -\frac{4}{5}$ إذن : (u_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{4}{5}$ وحدها الأول $u_2 = \frac{3}{5}$.

58 من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+1}$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

59 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 2$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 .

60 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -5u_n$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

61 $q = u_1 - u_0 = 7$ ؛ $u_{100} = u_0 + 100q = 698$.

62 $u_{15} = u_0 + 15q$ ومنه $q = \frac{u_{15} - u_0}{15} = 4$ ؛ $u_{2007} = u_0 + 2007q = 8027$.

63 $u_{200} = u_0 + 200q$ ؛ $q = \frac{u_{200} - u_0}{200} = 2,5 = \frac{5}{2}$ ؛ $u_{100} = u_0 + 100q = 253$

64 $u_{24} = u_7 + (24-7)q$ ؛ $q = \frac{u_{24} - u_7}{17} = 2$ ؛ $u_0 = u_7 + (0-7)q = -15$.

65 $u_0 = u_{17} + (0-17)q = 1$.

66 °1 $u_n = 4n - 1$. °2 $u_n = -5n + \frac{3}{2}$.

°3 $u_n = \frac{5}{4}n + \sqrt{3}$. °4 $u_n = 10^{-2}n + \frac{45}{2}$.

67 الشكل 1 يمثل متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = -\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{3}{2}$. الشكل 2 يمثل متتالية ليست حسابية .
الشكل 3 يمثل متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 3$ وأساسها -1 . الشكل 4 يمثل كذلك متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -1$ وأساسها 2 .

68 °1 $u_n = u_{15} + (n-15)q$ ونجد $n = 53$.

°2 $q = \frac{u_{10} - u_5}{10-5} = -10$ ؛ $n = \frac{u_n - u_5}{q} + 5 = 15$.

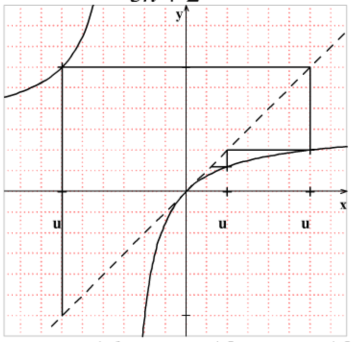
°3 $q = \frac{u_{31} - u_{19}}{31-19} = \frac{9}{2}$ ؛ $u_6 = 69 - 9q = \frac{57}{2}$ ؛ $n = \frac{u_n - u_6}{q} + 6 = 13$.

69 $q = 5$ ؛ $u_{29} = 111$ ؛ $S = \frac{20}{2}\left(u_{10} + u_{29}\right) = 1270$

70 (1 $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}$ ؛ $v_0 = -\frac{1}{3}$.

2) $v_n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{3}$ (3 $u_n = \frac{6n-2}{3n+2}$.

71 1) التمثيل



2) $v_{n+1} - v_n = 2$ ؛ $v_0 = 0$.

3) $v_n = 2n$ ؛ $u_n = \frac{1}{2n-1}$.

4) $\lim_{n-0} u_n = 0$

72 1) $u_2 = 7$ ؛ $u_3 = 10$ ؛ $u_4 = 13$ ؛ $u_5 = 16$.

2) $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = u_1 - u_0 = 3$ ؛ $q = 3$.

3) $u_n = 3n+1$. 4) $u_n = 361$ معناه $n = 120$.

5) $S = 6n^2 - n$.

73 1) $S = \frac{63}{2}(5+67) = 2268$.

2) $u_n = 2n+1$ ؛ $S = \frac{51}{2}(1+101) = 2601$.

3) $S = (17+7-3-13-23-33-43-53) + (12+2-8-18-28-38-48)$

$$S = 4(17-53) + \frac{7}{2}(12-48) = -270$$

74 1° (u_n) هندسية و $r = 3$.

2° (u_n) ليست هندسية . 3° (u_n) هندسية و $r = \frac{4}{3}$.

4° (u_n) هندسية و $r = 9$. 5° (u_n) هندسية و $r = 4$.

6° $u_{n+1} = 5u_n + 2n - \frac{1}{2}$ ؛ (u_n) ليست هندسية .

7° (u_n) ليست هندسية . 8° (u_n) هندسية و $r = \sqrt{2}$.

9° $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ ؛ (u_n) ليست هندسية .

10° $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}u_n$ ؛ (u_n) ليست هندسية .

75 الشكل 1 يمثل متتالية هندية أساسها $-\frac{1}{2}$.

الشكل 2 يمثل متتالية ليست هندسية .

الشكل 3 يمثل متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

76 $u_n = 3 \times 2^n$.

77 $u_n = \frac{5}{2} \times (-3)^n$.

78 $u_3 = 4$ ؛ $u_5 = 16$.

79 $u_0 = -320$ ؛ $u_2 = -80$.

80 $q^3 = \frac{1}{8}$ ومنه $q = \frac{1}{2}$ ؛ $u_{100} = \frac{11}{2^{92}}$.

81 1° (u_n) متناقصة تماما .

2° (u_n) متناقصة تماما . 3° (u_n) متناقصة تماما .

4° (u_n) ليست رتيبة . 5° (u_n) متناقصة تماما .

5° (u_n) ليست رتيبة .

82 1° $u_n = -\frac{7^n}{4}$ ؛ 2° $u_n = 3^{n+1}$ ؛ 3° $u_n = \frac{\sqrt{2}}{(-2)^n}$

83 لدينا: $a + ar + ar^2 = 21$ ، $2a + ar - ar^2 = 27$

و $3a + 2ar = 48$ ونجد $a = \frac{48}{3+2r}$ ؛ ومنه

أي : $16 + 16r + 16r^2 = 21 + 14r$

$16r^2 + 2r - 5 = 0$ ؛ $\Delta' = 81$ ؛ $r' = \frac{-5}{8}$ ؛ $r'' = \frac{1}{2}$

$r = \frac{-5}{8}$ ، $a = \frac{192}{7}$ ، $b = -\frac{120}{7}$ ، $c = \frac{75}{7}$.

$r = \frac{1}{2}$ ، $a = 12$ ، $b = 6$ ، $c = 3$.

84 1) لدينا $a + c = 2b$ ، $ab = c^2$ و $a + b + c = 18$

ومنه $b = 6$ ويصبح لدينا $a + c = 12$ و $a = \frac{c^2}{6}$ ونحل

المعادلة $c^2 + 6c - 72 = 0$ ، $c' = -12$ ، $c'' = 6$

الحالة الأولى $(a;b;c) = (24;6;-12)$

الحالة الثانية $(a;b;c) = (6;6;6)$

2) الحالة الأولى الأساس -2 والحالة الثانية الأساس 1 .

85 1) $0 < r < 1$

2) $u_2 = -\frac{1}{2}$ ثم نحل المعادلة $12x^2 + 13x + 3 = 0$ ،

$\Delta = 25$ ، $x' = -\frac{3}{4}$ ، $x'' = -\frac{1}{3}$ وبما أن المتتالية

متزايدة فإن $u_1 = -\frac{3}{4}$ ، $u_2 = -\frac{1}{2}$ ، $u_3 = -\frac{1}{3}$.

3) $u_n = -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. 4) $S = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \frac{9}{4}$

86 $1 + y + y^2 + y^3 = \frac{y^4 - 1}{y - 1} = (y+1)(y^2+1)$

$1 + y + y^2 + y^3 = 0$ معناه $y = -1$ ونجد $x = 0$.

87 1) $u_1 = 0$ ، $u_2 = \frac{2}{3}$ ، $u_3 = \frac{10}{11}$.

2) $\frac{10}{11} - \frac{2}{3} \neq \frac{2}{3} - 0$ و $\frac{2}{3} \neq 0 \times q$.

3) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=...=\frac{1}{4}v_n$. 4) $v_n=\frac{-2}{4^n}$.

5) $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ ، $u_n=\frac{-2v_n-1}{v_n-1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$.

88 1) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=...=\frac{3}{4}v_n$ ، $v_1=\frac{3}{4}$ ، $r=\frac{3}{4}$

2) $v_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$. 3) $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه (v_n) متناقصة تماما .

4) $u_{n+1}-u_n=n\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{-n+3}{4n}$ ومنه ابتداء من الرتبة $n_0=3$ تكون (u_n) متناقصة تماما .

89 1) $\alpha=-4$.

2) $v_{n+1}=u_{n+1}+4=...=\frac{1}{2}v_n$ ؛ $v_n=9\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛

$u_n=9\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$.

3) $S_1=-18\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+18$ ؛ $S_2=S_1-4(n+1)$.

90 1) $u_1=\pi$ ، $u_2=\frac{\pi}{2}$ ، $u_3=\frac{\pi}{4}$ ، $u_n=\frac{\pi}{2^{n-1}}$.

2) الطول يساوي $2\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

91 نضع a_n العدد الأول الموجود في السطر n و b_n العدد الموجود في آخره . لدينا : $b_n=n^2$ ، $a_{n+1}=b_n+1$ و $a_{n+1}=a_n+2n-1$ ومنه نستنتج $a_n=n^2-2n+2$ لدينا $a_n\le 2007\le b_n$.

$n^2-2n+2\le 2007$ تكافئ $-43\le n\le 45$

و $n^2\ge 2007$ تكافئ $n\ge 45$ أو $n\le -44$

(مع اعتبار n عدد طبيعي) إذن $n=45$ و $a_{45}=1937$

رقم العمود هو $2007-1937+1=71$

ولكن حسب المثال لدينا العدد 1 موجود في السطر 0

ومنه العدد 2007 موجود في السطر 44 والعمود 71

92 عدد الصفحات 63 و رقم الصفحة الملتصقة مع موالية لها هو 4 .

93 1) $u_1=0$ ، $u_2=-0,5$ ، $u_3=-0,75$.

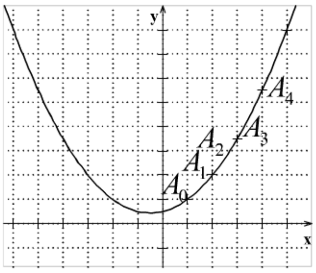
2) $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+\frac{\alpha-1}{2}$ ؛ $\alpha=1$. $v_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$u_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$. 3) (u_n) متناقصة تماما .

4) $v_n<10^{-4}$ ، $v_{14}\simeq 0,000122$ ، $v_{15}\simeq 0,000061$ ومنه $n=15$.

5) $S_n=5-n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 6) $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=-1$.

94 $u_1=100$ ، $u_2=120$ ، عدد المرضى لليوم الرابع $u_4=100+4\times 20=180$ ؛ $u_7=240$ وعدد كل المرضى بعد 7 أيام هو $\frac{7\times 340}{2}=1190$ وبعد 15 اليوم 3600 .



95 1) التمثيل .
2) بالحساب نجد العبارة
3) $n=x_n-1$

$y_n=\frac{x_n^2+x_n+2}{4}$

4) إنشاء (P) .

96 تصحيح: تستقبل في كل سنة 20 تلميذ جديد في السنة الأولى **أكثر من السنة الماضية .**
متتالية حسابية أساسها 20 وحدها الأول $u_0=1500$ ونجد بعد 25 سنة يكون عدد التلاميذ 2000 .

97 لدينا متتالية حسابية حدها الأول $u_0=5,3$ وأساسها $r=0,0175$ ونجد في سنة 2000 عدد السكان $u_{10}=5,475$ وفي سنة 2007 : $u_{17}=5,5975$ وفي سنة 2030 : $u_{40}=6$ مقدرا بالمليار نسمة .

98 باعتبار متتالية حسابية حدها الأول $u_1=1$ وأساسها $r=2$ نجد ثمن الحصان هو $u_{24}=47$ مقدرا بالدينار .

99 1) $u_1=1$ ؛ $u_2=2$ ؛ ... $u_{10}=10$.
2) $u_n=n$. 3) ابتداء من $n=31$.

100 1) $l_n=A\Omega_n=10\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ؛ $R_n=5\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2) $A\Omega_n-R_n=A\Omega_{n+1}+R_{n+1}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3) $u_n=\pi R_n^2$ أساسها $\frac{1}{9}$.

4) $S_n=\frac{225\pi}{8}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right]$ ؛ $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{225\pi}{8}$

101 1) $\alpha=a\alpha+b$ ومنه $\alpha=\frac{b}{1-a}$.

2) $v_{n+1}=u_{n+1}-\alpha=av_n$ الأساس هو a .

3) $v_n=(u_0-\alpha)a^n$ ؛ $u_n=(u_0-\alpha)a^n+\alpha$ ؛

$u_n=\left(u_0-\frac{b}{1-a}\right)a^n+\frac{b}{1-a}$.

4) $h_n=u_n-u_{n-1}$ ؛ $h_n=\left(u_0-\frac{b}{1-a}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)a^n$

(h_n) هندسية أساسها a .

$$h_1+h_2+...+h_n=u_1-u_0+u_2-u_1+$$
$$+...+u_n-u_{n-1}$$

بحذف الحدود المتعاكسة نجد $h_1+h_2+...+h_n=u_n-u_0$

102 1) المثلثات متشابهة نبرهن أن الإرتفاعات h_n

والأضلاع a_n تحقق : $h_{n+1}=2h_n$ و $a_{n+1}=2a_n$ ومنه

$S_{n+1}=4S_n$ إذن المساحات (S_n) هندسية أساسها 4.

2) $\frac{h_n}{3}$ هو نصف قطر الدائرة المرسومة في المثلث ذي

الارتفاع h_n والمساحة للقرص المرفق هي $S'_n=\frac{\pi}{9}h_n^2$

إذن (S'_n) هندسية أساسها 4.

103 تصحيح رقم التمرين غير موجود وبالنسبة للسؤال1)

بين أن المتتالية (t_n) لمساحات المثلثات هي هندسية ...

1) المثلثات المتقايسة الأضلاع (اللون الأزرق) متشابهة ،

نضع a_n طول ضلعها و b_n طول ارتفاعها ونبين أن :

$2=\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ والمساحة $t_n=\frac{1}{2}a_nb_n$ إذن المتتالية

(t_n) هندسية أساسها 4 .

2) $h_n=t_n+3k_n$ حيث k_n مساحة المثلث المتساوي

الساقين (اللون الأصفر) ذي القاعدة a_n والارتفاع $\frac{1}{3}b_n$.

ونجد $h_n=a_nb_n$ ومنه (h_n) هندسية أساسها 4 .

المتتالية $\frac{1}{2}a_0b_0$ ، a_0b_0 ، $\frac{1}{2}a_1b_1$ ، a_1b_1 . . . هي

هندسية أساسها 2 .