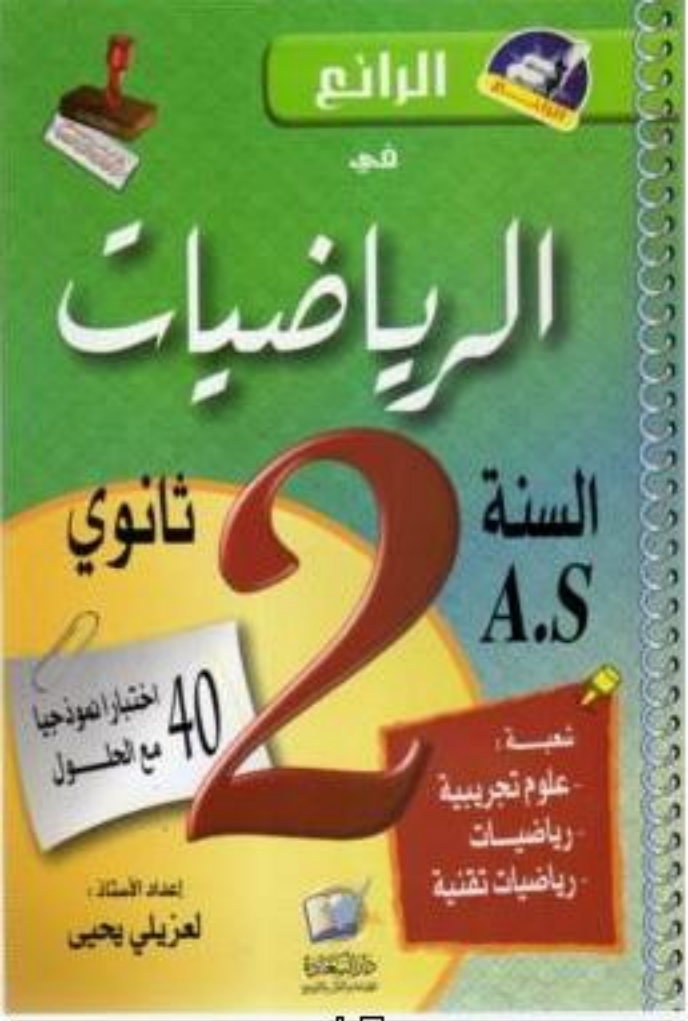

الرائع
في
الرياضيات
السنة
A.S
ثانوي
2
40 اختبارا نموذجيا
مع الحلول
شعبة:
- علوم تجريبية
- رياضيات
- رياضيات تقنية
إعداد الأستاذ:
لعزيلي يحيى

أمل النجاح

الاختبـــــار (1)

التمرين الأول:

عيّن مجموعة تعريف كل من الدوال المعرّفة كما يلي:

$f(x)=1-\sqrt{(x+3)(4-2x)}$ ، $g(x)=\dfrac{-4}{\left|4x^2+5x\right|}$ ، $h(x)=1-\sqrt{|x|}-\sqrt{\left|2-x^2\right|}$

التمرين الثاني:

f و g دالتان معرفتان كما يلي:

$f(x)=\dfrac{1+2x}{1+2x^2}$ ، $g(x)=3-2x$.

1) عين مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g

2) احسب $f\circ g(x)$ ، $g\circ f(x)$. ماذا تستنتج ؟

3) احسب $f\circ f(x)$ ، $g\circ g(x)$.

التمرين الثالث:

x عدد حقيقي حيث $x>1$.

1) قارن بين الأعداد الحقيقية : x ، x^2 و $\sqrt{x}$.

2) استنتج ترتيبا للأعداد الحقيقية:

$\dfrac{-2}{1-4x^2}$ ، $\dfrac{-2}{1-4x}$ ، $\dfrac{-2}{1-4\sqrt{x}}$.

التمرين الرابع:

1) اكتب جدول تغيرات الدالة u حيث $u(x)=\dfrac{1}{x}$.

2) استنتج جدول تغيرات كل من الدوال المعرفة كما يلي :

$f:x\mapsto\dfrac{5}{x}+3$ ، $g:x\mapsto\dfrac{-3}{x}-4$ ، $h:x\mapsto\dfrac{-3}{x}+4$

الاختبـــــار (2)

التمرين الأول:

ا دالة معرفة كما يلي: $h(x)=\dfrac{9-3x-2x^2}{6-x-2x^2}$

1) أوجد مجموعة تعريف الدالة h ثم اختزل العبارة $h(x)$.

2) حل في المجموعة R المعادلتين $h(x)=0$ ثم $h(x)=1$

التمرين الثاني:

x عدد حقيقي. أوجد حصرا لكل عدد من الأعداد الحقيقية التالية:

$4\cos x-5\sin x$ ، $3\sin x\cos x$ ، $\cos^2 x-\sin^2 x$

التمرين الثالث:

1) أنشئ في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$ القطع المكافئ (p) الذي معادلته: $y=-2x^2+6x-3$.

2) أنشئ في نفس المعلم المستقيم (d) ذي المعادلة: $y=x-1$ ثم احسب إحداثيات النقط المشتركة بين القطع المكافئ (p) والمستقيم (d).

3) باستعمال التمثيل البياني حل المتراجحة: $-2x^2+6x-3<x-1$

التمرين الرابع:

α و β عددان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في معلم متعامد ومتجانس النقطتين $A(\alpha;0)$ و $B(0;\beta)$.

1) أنشئ النقطتين A و B ثم أوجد معادلة المستقيم (AB) بدلالة α و β.

2) احسب $\wp$ فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$. جد علاقة بين الأعداد الحقيقية : $\dfrac{1}{\alpha}$ ، $\dfrac{1}{\beta}$ و $\dfrac{1}{\wp}$.

3) العدد ρ يسمى نصف الوسط التوافقي للعددين a و b.
أحسب الوسط التوافقي لكل ثنائية (3; 2) ، (5; 1) ، (4; 2)

الاختبـــــار (3)

التمرين الأول:

α و β عددان حقيقيان. نعتبر في المجموعة R المعادلة : $x^2+\alpha x+\beta=0$ ...(*)

1) عين الشرط على α و β حتى تقبل المعادلة (*) حلا على الأقل.
2) عين العددين α و β حتى يكون 3- هو حلا مضاعفا للمعادلة (*).
3) في حالة وجود حلين متمايزين x' و x'' للمعادلة (*). احسب بدلالة α و β
الأعداد الحقيقية التالية : $x'^2+x''^2$ ، $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}$ ، $x'^2+x''^2+x'^2x''$ ، $x'^3+x''^3$

التمرين الثاني:

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي3. نقبل أن عدد أقطار مضلع له n ضلعا $\frac{n(n-3)}{2}$ قطرا.

1) تحقق من صحة الخاصية من أجل المثلث و المربع.
2) ما هو المضلع الذي له نفس عدد الأضلاع وعدد الأقطار ؟
3) ما هو المضلع الذي له 9 أقطار ؟ 434 قطرا ؟

التمرين الثالث:

حل في المجموعة R المتراجحات التالية : $\frac{5x^2-3x-14}{7x^2-8x-12}\geq 0$ ، $\sqrt{x^2-4}\geq\sqrt{5x-10}$

التمرين الرابع:

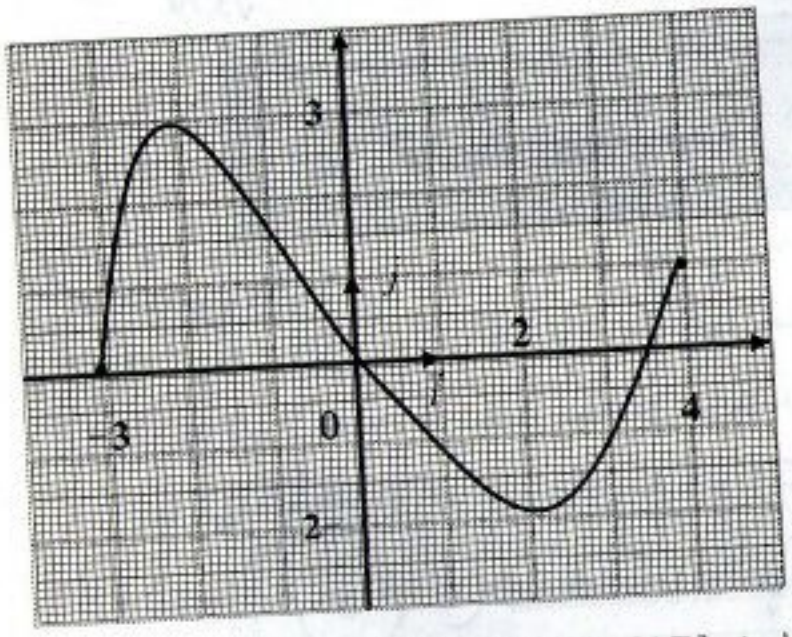
f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=x(1-x^2)$ و (C) تمثيلها البياني.

1) بيّن باستعمال التعريف أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1- و أحسب $f'(-1)$

2) برهن أنه توجد نقطتان من (C) يكون عندهما ميل المماس يساوي 11- يطلب تعيينهما.
3) اكتب معادلتي المماسين (d_1) و (d_2) للمنحنى (C) في النقطتين الموجودتين سابقا.

الاختبـــــار (4)

التمرين الأول:



دالة معرفة بتمثيلها البياني (C) على المجال [3;4-].
تنتج التمثيل البياني لكل من الدوال المعرفة كما يلي:
$g=-f$ ،
$k=\frac{1}{2}f$ ، $h=f+$

التمرين الثاني:

MAI مثلث متساوي الساقين قاعدته [AB] ، وارتفاعه [MH]. بحيث $AB=4cm$
ضع $MH=x(cm)$.
بدلالة x عن مساحة المثلث ABC باعتبار قاعدته [AB] وارتفاعه MH، ثم
عتبار قاعدته MB و ارتفاعه AK (تأكد أن النتيجتين متساويتان).

التمرين الثالث:

ع مكافئ يقطع حاملي المحورين في النقط التالية: A(-1 ;0)، B(2 ;0)، E(0 ;4).
جد معادلة هذا القطع، ثم استنتج محور تناظره.

التمرين الرابع:

f دالة معرفة على E كما يلي: $f(x)=\sqrt{5-x^2}$

1) عين E مجموعة تعريف الدالة f.

2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي h فإن: $f(1+h)-f(1)=\dfrac{-h(h+2)}{\sqrt{-h^2-2h+4}+2}$

ثم استنتج العدد المشتق للدالة f عند 1.

3) أوجد التقريب التآلفي للدالة f في جوار 1، ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{3,79}$

الاختبـــــار (5)

التمرين الأول:

u دالة معرفة كما يلي $u(x)=4x-12$.

1) أدرس إشارة $u(x)$، ثم استنتج مجموعة تعريف، و اتجاه تغير الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة h حيث $h(x)=|u(x)|$

التمرين الثاني:

x عدد حقيقي أكبر تماما من 1- نعرف دالتين f و g كما يلي :

$f(x)=1-x+x^2-x^3$ و $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

1) أعط جدول قيم للدالتين f و g على المجال $]-1;1]$ بخطوة تساوي 0,5.

قارن بين النتيجتين.

2) نضع $d(x)=g(x)-f(x)$. بسط العبارة d(x).

واستنتج أن: $g(x)\geq f(x)$ مهما كان العدد الحقيقي x أكبر تماما من 1-.

التمرين الثالث:

f و g دالتان معرفتان كما يلي: $f(x)=\sin^2 x$ و $g(x)=\cos^2 x$

1) أحسب $f'(x)$ ، $g'(x)$.

2) أحسب $f'(x)+g'(x)$ بطريقتين مختلفتين.

3) أحسب $(fg)'$ ثم $(f^2)'(x)$ و $(g^2)'(x)$

التمرين الرابع:

f دالة معرفة على R كما يلي:

$f(x)=-x^2+4x-2$ و (p) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

ليكن a عدد حقيقي كيفي. A نقطة من (p) فاصلتها a.

1) برهن أن معادلة المماس (T_a) للمنحنى (p) في النقطة A هي:

$y=(4-2a)x+a^2-2$

2) ما هو عدد المماسات للمنحنى (p) التي تمر بالنقطة $E(\frac{3}{2};4)$ ؟ أعط في هذه الحالة معادلة كل مماس.

الاختبـــــار (6)

التمرين الأول:

h دالة معرفة كما يلي: $h(x)=\dfrac{3x^2-16x+17}{4-x}$.

1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب $h'(x)$.

2) بين أن $h(x)=4-3x+\dfrac{1}{4-x}$. حيث x يختلف عن 4.

3) أحسب $h'(x)$ باستعمال هذا الشكل (الشكل الموجود في الفرع الثاني)، و قارنها مع النتيجة في الفرع الأول.

التمرين الثاني:

f دالة معرفة كما يلي : $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$ و (C) تمثيلها البياني. حيث α و β عددان حقيقيان معلومان.

1) عين α و β بحيث يكون (C) يقبل عند النقطة A(1 ;4) مماسا معامل توجيهه يساوي 5.

2) جد علاقة بين α و β بحيث يكون (C) لا يقطع محور الفواصل.

3) عين قيم α بحيث يكون (C) قطعا مكافئا.

التمرين الثالث:

بين أن الدالة h حيث $h(x)=\sin\sqrt{x+4}$ مع $x\geq 0$.

هي تركيب ثلاث دوال مرجعية يطلب تعيينها.

التمرين الرابع:

1) حل في R الجملة ذات المجهولين m و t. $\begin{cases} t-4m=-11 \\ 2t+3m=11 \end{cases}.....(S_1)$

2) استنتج حلول الجملة ذات المجهولين α و β : $\begin{cases} \frac{-2}{\alpha}+\frac{12}{\beta}=-11 \\ \frac{-4}{\alpha}+\frac{9}{\beta}=11 \end{cases}$

3) استنتج حلول الجملة ذات المجهولين x و y : $\begin{cases} \frac{1}{x^2}-\frac{48}{y^2}=-11 \\ \frac{2}{x^2}+\frac{36}{y^2}=11 \end{cases}$

الاختبـــــار (7)

التمرين الأول:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=(x-1)\sqrt{1-x}$ و (C) تمثيلها البياني.

1) عين مجموعة تعريف الدالة f.

2) احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

3) أوجد احداثيي النقطة A من (C) التي يكون عندها معامل توجيه المماس يساوي $\frac{3}{2}$.

التمرين الثاني:

f دالة معرفة على R^* كما يلي $f(x)=\frac{2}{x}$ و (C) تمثيلها البياني.

ليكن a عدد حقيقي غير معدوم. A نقطة من (C) فاصلتها a

1) أكتب بدلالة a معادلة المماس (d_a) للمنحنى (C) في النقطة A.

2) عين احداثيي النقطة A بحيث يكون معامل توجيه المماس في A يساوي $-\frac{1}{2}$.

3) هل توجد مماسات للمنحنى (C) تشمل النقطة M(-4 ;4) ؟ في حالة الإيجاب أكتب معادلة كل مماس.

التمرين الثالث:

1) حل في R المعادلة: $(1-\sqrt{2})x^2-2(1+\sqrt{2})x+1++3\sqrt{2}=0$

2) حل في R المتراجحة: $(x^2-x+1)>(2x^2+3x)^2$

التمرين الرابع:

دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي:

x	-5		3		8
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	9	↘	2	↗	4

1) عين القيمة الصغرى للدالة u على المجال $[-5;8]$.

2) أنشئ جدول تغيرات كل من الدوال المعرفة كما يلي : $f=-\frac{1}{2}u$ ،

$g=3f-10$ ، $h=\sqrt{u}$.

الاختبـــــار (8)

التمرين الأول:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\frac{6x^2-11x-1}{2x-3}$

1) عين E مجموعة تعريف الدالة f.

2) عين الأعداد الحقيقية α ، β ، $\wp$ بحيث يكون :

$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\wp}{2x-3}$. مع $x\in E$.

3) باستعمال العبارة المناسبة أحسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f.

التمرين الثاني:

حل في المجموعة R جملة المتراجحتين.

$$\begin{cases}-2x^2+9x-4\geq 0.....(1)\\ \frac{3+x}{4-2x}\geq 0.....(2)\end{cases}$$

التمرين الثالث:

مجموع عددين حقيقيين يساوي 58. إذا أضفنا إلى جدائهما العدد الأكبر فيهما يصبح الناتج 814.

أحسب هذين العددين.

التمرين الرابع:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

1) حل في R المعادلة $f(x)=0$ و استنتج نقط تقاطع (C) مع (xx').

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f و أنشئ تمثيلها البياني (C).

3) (Δ) مستقيم ذي المعادلة $y=x+\frac{5}{2}$.

عين نقط تقاطع (C) و (Δ) ثم أنشئ (Δ).

4) هل (C) يقبل محور تناظر؟ ما هي معادلته ؟

الاختبـــــار (9)

التمرين الأول:

1) عين مجموعة تعريف كل من الدوال المعرفة كما يلي:

$f(x)=(3-x)\cos(3-x)$ ، $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ ، $h(x)=x^2\left(\sqrt{2x+5}\right)^{-1}$.

2) أوجد المجموعة التي تكون فيها كل دالة قابلة للاشتقاق، ثم أحسب الدالة المشتقة لكل دالة.

التمرين الثاني:

x و y عددان حقيقيان موجبان مجموعهما يساوي 1.

1) عين العددين x و y بحيث يكون الجداء xy أعظميا.

2) n عدد طبيعي غير معدوم. عين العددين x و y بحيث يكون الجداء $x^n y$ أعظميا.

التمرين الثالث:

f دالة معرفة كما يلي $f(x)=\dfrac{-3x+1}{2-x}$ و (C) تمثيلها البياني.

1) عين E مجموعة تعريف الدالة f.
2) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.
3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أكتب جدول تغيراتها.
4) عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C).

التمرين الرابع:

m عدد حقيقي. نعتبر في R المعادلة ذات المجهول الحقيقي x.

$$(m+2)x^2-2(m+1)x+m-1=0 \quad .....(*)$$

1) عين قيم m بحيث تقبل المعادلة (*) حلا وحيدا.
2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة (*).
3) في حالة وجود حلين متمايزين x_1 و x_2 جد علاقة بين x_1 و x_2 مستقلة عن m.

الاختبـــــار (10)

التمرين الأول:

1) حل في R المعادلة ذات المجهول t : $2t^2-11t+12=0$ .....(1)
2) استنتج في R حلول المعادلة ذات المجهول m : $2m-11\sqrt{m}+12=0$ ...(2)
3) استنتج في R حلول المعادلة ذات المجهول x : $32x^4-44x^2+12=0$ ...(3)

التمرين الثاني:

في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(3;0)$ ، $B(-2;0)$ ، $M(x;1)$. حيث x عدد حقيقي.

نضع $f(x)=MA^2+2MB^2$

1) عبر عن $f(x)$ بدلالة x.
2) أوجد بطريقتين مختلفتين وضعية النقطة M بحيث يكون $f(x)$ أصغريا.

التمرين الثالث:

f دالة معرفة كما يلي $f(x)=-2x+1+\dfrac{2}{4-x}$.

1) عين مجموعة تعريف الدالة f.
2) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.
3) أدرس اتجاه تغير الدالة f واكتب جدول تغيراتها.
4) بين أن التمثيل البياني (C) للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائلا.

التمرين الرابع:

f دالة معرفة على المجال $[0;\pi]$ كما يلي:

$f(x)=\sin^2 x-2\sin x$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أوجد حصرا للعدد $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى المجال $[0;\pi]$.
2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ (C).
3) استنتج (C') التمثيل البياني للدالة h حيث $h=f+1$.

الاختبـــــار (11)

التمرين الأول:

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0=1;U_1=3 \\ U_{n+2}=U_{n+1}-U_n, n\in N \end{cases}$$

1) أحسب الحدود التسعة الأولى لهذه المتتالية.

2) بين U_{n+3} تكتب بدلالة U_n ثم استنتج عبارة U_{n+6} بدلالة U_n. واستنتج أن (U_n) متتالية دورية.

3) أحسب قيمة الحد U_{2007}.

التمرين الثاني:

ABC مثلث متقايس الأضلاع. (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$، و يشمل A. G مركز ثقل المثلث ABC. (النقط A، B، C في الاتجاه المباشر).

أعط القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية:

$\left(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HC}\right)$، $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)$، $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CG}\right)$، $\left(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GC}\right)$، $\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{CG}\right)$.

التمرين الثالث:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان في المستوي. حيث: $\|\vec{u}\|=2$، $\|\vec{v}\|=3$، $\vec{u}.\vec{v}=-4$

عين قيم m الحقيقية في كل حالة:

1) $\left(\overrightarrow{mu}-\vec{v}\right)\left(\overrightarrow{mu}+\vec{v}\right)=27$

2) $\left(\overrightarrow{mu}-\vec{v}\right)^2=9$

التمرين الرابع:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+3x-5}{1-2x}$ و (C) تمثيلها البياني.

1) عين E مجموعة تعريف الدالة f.

2) بين أن $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\wp}{2x-1}$ حيث $\wp,\beta,\alpha$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها مع $x\in E$.

3) برهن أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته. ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

الاختبـــــار (12)

التمرين الأول:

f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$. و (C) تمثيلها البياني.

1) عين E مجموعة تعريف الدالة f.

2) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.

3) أحسب $f'(x)$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f و اكتب جدول تغيراتها.

4) بين أن (C) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيينها.

5) عين الأعداد الحقيقية α ، β ، $\wp$ بحيث مهما كان x من E فإن:

$f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{x+1}+\dfrac{\wp}{x-3}$.

التمرين الثاني:

ABE مثلث و I منتصف [BE]. E و B نقطتان ثابتتان و A نقطة متغيرة من دائرة (C) مركزها I و نصف قطرها R.

عين مجموعة مراكز ثقل المثلث ABE عندما A تتغير في الدائرة (C).

التمرين الثالث:

A، B، C، D، E خمس نقط مختلفة من المستوي. أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1);(B:1).(C;2);(D,4);(E,8)\}$

التمرين الرابع:

حل في المجموعة R المعادلات التالية:

1) $0,001x^2-2x+10=0$

2) $5x^2-(5\times3^2+5^4)x+3^2\times5^4=0$

3) $x^4=4x^2$

الاختبـــــار (13)

التمرين الأول:

نضع $u(x)=4x-8$ ، $v(x)=-2x+6$.

1) أدرس إشارة كل من العبارتين $u(x)$ و $v(x)$.

2) f و g دالتان معرفتان كما يلي: $f=u^2$ و $g=v^2$

أنشئ جدول تغيرات كل من الدالتين f و g.

التمرين الثاني:

ليكن (p) قطع مكافئ معادلته $y=x^2$ في معلم متعامد و متجانس. M نقطة من (p) فاصلتها a غير معدوم.

1) أكتب معادلة المماس (d_a) للمنحنى (p) في النقطة M.

2) لتكن L المسقط العمودي للنقطة M على (yy'). و المستقيم (d_a) يقطع (yy') في النقطة T. برهن أن النقطة O منتصف القطعة [LT] مهما كانت النقطة M من (p).

3) أكتب بدلالة a معادلة المستقيم (Δ) العمودي على (d_a)، و يشمل M.

هذا المستقيم (Δ) يقطع (yy') في النقطة N. برهن أن الطول LN ثابت.

التمرين الثالث:

A، B، C، D أربع نقط من المستوي. بحيث كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

ليكن G مركز ثقل المثلث ABD. عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث:

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MD}\right\| \quad .....(1) \\ \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}\right\| \quad .....(2) \end{cases}$$

التمرين الرابع:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$

1) عين E مجموعة تعريف الدالة f ثم اختزل العبارة $f(x)$.

2) حل في R المعادلة $f(x)=0$ ثم المتراجحة $f(x)\geq m^2$. حيث m عدد حقيقي معطى.

الاختبـــــار (14)

التمرين الأول:

f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$ حيث a ، b، c أعداد حقيقية.

و (C) تمثيلها البياني.

عين الأعداد الحقيقية a ، b، c بحيث يكون للمنحنى (C) في النقطة A(2 ;3) مماسا يوازي حامل محور الفواصل، و (C) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة B(0,-1).

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r.

حيث: $u_2=6023$ ، $u_6=14055$.

1) أحسب الحد الأول u_1 و الأساس r ثم استنتج عبارة الحد العام.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n+u_{n+2}=2u_{n+1}$

3) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$

التمرين الثالث:

ليكن ABC مثلث. G مرجح الجملة $\{(A;1);(B,2),(C;3)\}$ و M نقطة من المستوي

1) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$.

2) عين و أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا.

3) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| = 12AB$$

الاختبـــــار (15)

التمرين الأول:

لتكن u متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n مع $n \geq 1$ كما يلي:

$$u_n = \frac{n+1}{n^2}\sin n$$

1) بين أن المتتالية V حيث $V_n = \frac{n+1}{n^2}$ متقاربة.

2) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة.

التمرين الثاني:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A(-2 ;0)، B(-1 ;m)، C(m ;3)، D(-m ;-1) حيث m عدد حقيقي.

1) عين احداثيي G مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;3);(C;-1),(D;1)\}$

2) عين مجموعة النقط G عندما يمسح m مجموعة الأعداد الحقيقية.

3) استنتج احداثيي النقطة G من أجل m = -2.

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$.

1) A و B نقطتان معرفتان بالإحداثيات القطبية: $A(3,\frac{3\pi}{4})$ ، $B(2;-\frac{\pi}{3})$..

أنشئ النقطتين A و B ثم أعط الإحداثيات الديكارتية لهما.

2) M و N نقطتان من المستوي معرفتان بالإحداثيات الديكارتية حيث $M(-5;-5)$ ، $N(-2\sqrt{3};2)$. أوجد الاحداثيان القطبيان لكل نقطة.

التمرين الرابع:

f و g دالتان حيث $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$

1) أعط تقريبا تآلفيا للدالة جيب في جوار $\frac{\pi}{6}$. ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $\sin(\frac{\pi}{6}+0{,}02)$.

2) أعط تقريبا تآلفيا للدالة جيب تمام في جوار $\frac{\pi}{6}$، ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $\cos(\frac{\pi}{6}-0{,}01)$.

الاختبـــــار (16)

التمرين الأول:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x+\wp}{x}$ و (C) تمثيلها البياني.

1) عين الأعداد الحقيقية $\wp,\beta,\alpha$ بحيث يكون (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=3x+4$، و (C) يتقاطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(1;0)$.

2) استنتج مستقيما مقاربا ثانيا للمنحنى (C).

التمرين الثاني:

f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x)=\sqrt{5+x^2}$. ليكن a عدد حقيقي.

1) باستعمال التعريف بين أن f قابلة للاشتقاق عند a.

2) استنتج عبارة $f'(x)$.

3) أعط تقريبا تآلفيا للدالة f في جوار 2 ثم استنتج قيمة تقريبه للعدد $\sqrt{5,0009}$.

التمرين الثالث:

x عدد حقيقي. برهن أن:

1) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$.

2) $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$.

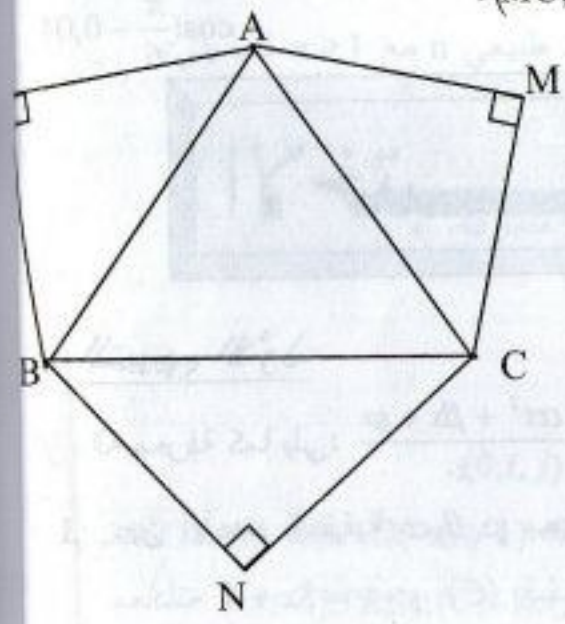
التمرين الرابع:

ABC مثلث متقايس الأضلاع ننشئ خارج هذا المثلث ثلاثة مثلثات قائمة و متساوية الساقين، حيث وتر كل منها هو أحد أضلاع المثلث ABC. G مركز ثقل المثلث ABC (لاحظ A,B,C في الاتجاه المباشر).

نضع $(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA})=(\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC})=(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PB})=-\frac{\pi}{2}$.

أحسب بالراديان قيسا للزوايا الموجهة التالية:

$(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AC})$، $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})$، $(\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BC})$،
$(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AM})$، $(\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BM})$، $(\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CP})$،
$(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB})$، $(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PG})$، $(\overrightarrow{GP};\overrightarrow{GB})$.



الاختبار (17)

التمرين الأول:

لتكن u متتالية معرفة على N كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=-2u_n+1$

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+2}-u_{n+1}$ و $u_{n+1}-u_n$ من إشارتين مختلفتين.

3) نعرف متتالية عددية V حيث $v_n=u_n-\frac{1}{3}$ و n عدد طبيعي.

- برهن أن v هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- هل المتتالية v متقاربة ؟ هل المتتالية u متقاربة ؟
- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+....+u_n$

التمرين الثاني:

f دالة معرفة كما يلي : $f(x)=-x-3-\frac{1}{\sqrt{4-4x}}$. (C) تمثيلها البياني.

1) عين E مجموعة تعريف الدالة f.

2) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$. فسر هذه النتيجة هندسيا.

ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-3)]$. فسر هذه النتيجة هندسيا.

3) أحسب $f'(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها.

4) A نقطة من (C) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى (C) في A هو $-\frac{13}{14}$. عين احداثيي A.

5) أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

التمرين الثالث:

وي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

النقط A(-2 ;0)، B(4 ;0)، C(1 ;5).

عين مجموعة النقط M(x ;y) من المستوي بحيث يكون الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BC}$ معدوما .

برهن بطريقتين مختلفتين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن العدد α معدوما حيث $\alpha = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$

الاختبـــــار (18)

التمرين الأول:

g دالتان معرفتان كما يلي: $f(x)=\frac{2+x^2}{x}$ ، $g(x)=\frac{1+2x}{x}$.

بين أن f و g لهما نفس مجموعة التعريف.

سمي (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على الترتيب.

توجد نقط فواصلها مشتركة بين (C_f) و (C_g) بحيث يكون المماس عندها له معامل التوجيه ؟ إذا كان الجواب نعم. عين إحداثيات هذه النقط.

التمرين الثاني:

الة معرفة كما يلي: $h(x)=\frac{1+x^2}{x-x^2}$. و (C) تمثيلها البياني.

عين E مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب نهاياتها عند أطراف مجالات تعريفها.

عين الأعداد الحقيقية α ، β ، $\wp$ بحيث يكون من أجل كل x من E:

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\wp}{x-1}$$

أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) في النقطة A ذات الفاصلة 2.

التمرين الثالث:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث: $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{6}$ ، $(\vec{u};\vec{w})=\frac{\pi}{12}$.

أحسب قيس كل من الزوايا التالية:

$(\vec{u};-\vec{v})$ ، $(2007\vec{u};2008\vec{v})$ ، $(\vec{v};\vec{w})$ ، $(-2\vec{w};-5\vec{v})$ ، $(\vec{u};4\vec{u})$.

التمرين الرابع:

1) حل المعادلة $2\sin x=\sqrt{3}$ على المجال $[0;2\pi]$ ثم على R.

2) حل المعادلة $1+2\cos 3x=0$ على المجال $[0;2\pi]$ ثم على R.

التمرين الخامس:

D,C,B,A أربع نقط من المستوي حيث $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$.

1) بيّن أنّ A مرجح النقط D,C,B المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

2) بيّن أنّ B هي مرجح النقط D,A,C مرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

الاختبـــــار (19)

التمرين الأول:

u متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n};n\in N\end{cases}$$

1) أحسب الحدود u_4,u_3,u_2,u_1 ثم أحسب مقلوباتها.

2) إذا كان $u_n\neq 0$ نضع: $t_n=\frac{1}{u_n}$.

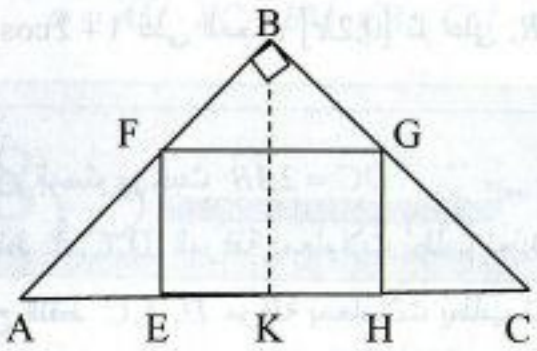
أ) برهن أن المتتالية u هي متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عبر عن t_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n.

أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + ... + \frac{1}{u_n}$.

التمرين الثاني:

AB مثلث قائم ومتساوي الساقين في B. ننشئ مستطيلا $EFGH$، بحيث يكون
ر تناظر المثلث ABC هو أيضا محور تناظر المستطيل.
ع $AB = 2$ ، $AE = x$ (وحدة الطول هي cm).
د قيمة x التي من أجلها تكون مساحة المستطيل $EFGH$ أعظمية.



التمرين الثالث:

$M(x;y)$ مجموعة النقط التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + 4mx - 2(m-1)y - 7m + 1 = 0$$

حسب قيم الوسيط الحقيقي m طبيعة مجموعة النقط M.

التمرين الرابع:

سب قيمة المجموع التالي:

$$\alpha = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$$

الاختبار (20)

التمرين الأول:

لتكن الدالة العددية f حيث $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{8x^2 - 14x + 5}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f.

2) حل في R المعادلة: $f(x) = 0$ ثم المتراجحة $f(x) \le 0$.

التمرين الثاني:

من أجل كل عدد حقيقي m نعرف كثير حدود $f_m(x)$ كما يلي:

$$f_m(x) = (2m+1)x^2 + 2x + m + 1$$

1) عين قيمة m بحيث تكون المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا يطلب تعيينه.

2) عين قيمة m بحيث يكون العدد 2- حلا للمعادلة $f_m(x) = 0$.

3) عين قيمة m التي من أجلها تقبل المعادلة $f_m(x) = 0$ حلين متمايزين x_1 و x_2.
ثم جد علاقة بين x_1 و x_2 مستقلة عن m.

التمرين الثالث:

برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي α فإن:

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

2) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

التمرين الرابع:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

α و β عددان حقيقيان غير معدومين معا.

...بين أن المعادلة $x^2+y^2+\alpha x+\beta y=0$ هي معادلة الدائرة (C). يطلب تعيين ...كزها و نصف قطرها.

... أكتب معادلة المماس (d) في النقطة O للدائرة (C).

...التمرين الخامس:

...ل في المجال $[0;2\pi]$ المتراجحة $\sqrt{2}+2\cos x\le 0$.

الاختبـــــار (21)

...التمرين الأول:

...مثل السلسلة الإحصائية أنصاف أقطار 125 شجرة مقدرة بـ Cm.

أنصاف الأقطار	3	4	5	6	8	10	12	14	15	20
عدد الأشجار	10	14	18	20	23	15	19	26	30	25

1) أحسب نصف القطر الوسيط.

2) أحسب الربعي الأول والربعي الثالث لهذه السلسلة.

3) أحسب العشري الأول والعشري التاسع لهذه السلسلة.

4) مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.

التمرين الثاني:

أحسب المجاميع التالية:

$S_1=5+10+15+20+\ldots+5n$

$S_2=1+5+25+125+625+\ldots+5^n$

التمرين الثالث:

ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 1. لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

1) أحسب $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

2) لتكن D صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$. عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MC}=0$.

التمرين الرابع:

ABCDEF مضلع سداسي منتظم مركزه O مرسوم داخل دائرة لها نفس المركز ونصف قطرها 3. (النقط A، B، C، D، E، F مأخوذة في الاتجاه المباشر).

- أنشئ الشكل باعتبار (OA) محور الفواصل.
- أعط الإحداثيات القطبية لكل من النقط التالية:

A، B، C، D، E، F.

الاختبـــــار (22)

التمرين الأول:

u و v متتاليتين عدديتين معرفتين من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$u_n=\dfrac{3^n+4n-8}{4}$ ، $v_n=\dfrac{3^n-4n+8}{4}$.

1) أحسب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتالية.

2) لتكن t_n و d_n متتاليتين معرفتين كما يلي:

$t_n=u_n+v_n$ ، $d_n=u_n-v_n$. حيث n عدد طبيعي.

أ) عبر عن كل من t_n و d_n بدلالة n.

ب) برهن أنّ (t_n) متتالية هندسية، و(d_n) متتالية حسابية، في كل حالة يُطلب تعيين الأســاس والحد الأول.

ج) نقبل أن $n<3^n$. أحسب نهاية $\dfrac{u_n}{v_n}$ عندما n يؤول إلى $+\infty$.

د) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $\alpha_n=t_n+d_n$. أحسب بدلالة n المجموع $S_n=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots..+\alpha_n$.

التمرين الثاني:

AB مثلث أطوال أضلاعه أعداد طبيعية متتالية (متعاقبة) مجموعها 24.

أحسب أطوال أضلاع هذا المثلث (وحدة الطول Cm).

أحسب أقياس زوايا المثلث الثلاثة بالتدوير إلى الدرجة.

التمرين الثالث:

بر في R المعادلة $2\cos x - 2\sin x - \sqrt{2} = 0$ .....(*)

ن في المجموعة R المعادلة (*) ثم مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية.

التمرين الرابع:

سب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للسلسلة الإحصائية:

$a+8$ ، $a+20$ ، $a+10$ ، $a+2\epsilon$ ، $a+10$ ، $a+10$ ، $a+8$. حيث a

د حقيقي موجب.

الاختبـــــار (23)

التمرين الأول

دالة تآلفية معرفة كما يلي: $f(x) = 0,5x^2 - 0,5x + \alpha$. و (C_f) تمثيلها البياني في

ستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. α عدد حقيقي.

) أوجد قيم α الممكنة إذا علمت أن α هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

) أدرس حسب قيم α وضعية القطع المكافئ (C_f) بالنسبة إلى المحور (xx').

) بوضع $\alpha = -1$. أكتب جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C_f).

التمرين الثاني:

تبر السلسلة الإحصائية: 7، 8 ، 6، 5 ، 9

حسب التباين والانحراف المعياري.

التمرين الثالث:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$

1) عبر عن $f(x)$ بدلالة $\cos x$ ثم بدلالة $\sin x$.

2) حلل العبارة $1 - f(x)$.

3) أحسب بدلالة $f(x)$ العبارات التالية:

$f(\pi + x)$ ، $f(\frac{\pi}{2} - x)$ ، $f(x + 2008\pi)$.

التمرين الرابع:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$.

لتكن $M(x;y)$ مجموعة النقط من المستوي حيث:

$x^2 + y^2 - 5x + 2y + 4 = 0$ .... (*)

1) أثبت أن المعادلة (*) هي معادلة دائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

2) بين أن (C) تقطع المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ في نقطتين A و B.

3) أكتب معادلتي المماسين للدائرة (C) في النقطتين A و B. ثم أثبت أن لهذين المماسين نقطة مشتركة وحيدة E يطلب تعيين احداثياها.

4) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي ميله m و يشمل E حيث m = -3.

الاختبـــــار (24)

التمرين الأول:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + d}{x^2}$. a ، b ،d أعداد حقيقية.

1) إذا علمت أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. أحسب العدد a.

أحسب العددين الحقيقيين b و d إذا علمت أن (C_f) التمثيل البياني للدالة f يشمل
طتين A(1 ;0) ، B(3 ;0).
أحسب نهاية الدالة f في جوار 0. ثم استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).
أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي.

التمرين الثاني:

ن يحتوي على 3 بطاقات، منها بطاقة تحمل رقم 1 و بطاقتين تحملان رقم 2.
حب بطريقة عشوائية بطاقة واحدة من الكيس ونسجل الرقم الظاهر عليها، ثم نعيد هذه
طاقة إلى الكيس ونسحب بنفس الطريقة بطاقة ثانية ونسجل أيضا الرقم الظاهر عليها.
في الأخير نسجل مجموع الرقمين المتحصل عليهما.
) بين أنه توجد 9 حالات ممكنة. يطلب تنظيمها في جدول.
) ليكن X متغير عشوائي يأخذ مجموع الرقمين المتحصل عليهما.
أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X.
أحسب الأمل الرياضياتي والانحراف المعياري.

التمرين الثالث:

A و B نقطتان ثابتتان في المستوي حيث: $AB = 5cm$.
) عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
) عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $MA^2 - MB^2 = 0$
) عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ متعامدان.
) استنتج مجموعة النقط التي تحقق :

$$\begin{cases} MA^2 - MB^2 = 0 \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \end{cases}$$

الاختبـــــار (25)

التمرين الأول:

عدد سكان مدينة يوم 2006/01/01 هو 500000 نسمة.
إذا علمت أن نسبة زيادة عدد السكان في هذه المدينة 4% في كل سنة.
1) ما هو عدد سكان هذه المدينة في الأيام التالية:
2007/01/01 ، 2008/01/01 ، 2009/01/01.
2) ما هو عدد سكان هذه المدينة يوم $2006+n/01/01$. ثم استنتج طبيعة المتتالية الناتجة.

التمرين الثاني:

سلسلة إحصائية لها الخواص التالية:
وسيطها 150 ، $Q_1 = 100$ ، $D_1 = 90$ ، $D_9 = 230$ ، الانحراف الربعي 100.
قيم هذه السلسلة محصورة بين 80 و 350.
مثل هذه المعطيات بمخطط بالعلبة.

التمرين الثالث:

ABC مثلث حيث: AB = 4,5 cm ، BC = 7,5cm ، CA = 9 cm.
لتكن I منتصف القطعة [AB]. أحسب الطول CI.
1) أحسب الطول CI.
2) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MB^2 = 122,625$
3) أحسب بالتدوير إلى الدرجة قيس الزاوية $\hat{A}$.

التمرين الرابع:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

تكن (C_m) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث:

$x^2+y^2-2(m-1)x-2my+6m-5=0$. مع m عدد حقيقي.

1) عين المجموعة E مجموعة قيم m التي من أجلها تكون (C_m) دائرة.

2) إذا كانت (C_m) دائرة ، نسمي W_m مركزها.

عين مجموعة النقط W_m عندما يتغير m في E.

3) A و B نقطتان من المستوي حيث A(0 ;1) ، B(2 ;3).

أثبت أنه مهما كانت الدائرة (C_m) فإن: $\overrightarrow{W_mA}\cdot\overrightarrow{W_mB}=R^2_m$. حيث: R_m هو نصف قطر الدائرة (C_m).

الاختبـــــار (26)

التمرين الأول:

يتسابق 4 تلاميذ : A، M، S، U في قطع نفس المسافة.

نفترض أن كل تلميذين لا يصلا إلى نقطة الوصول في نفس اللحظة.

1) ما هو عدد النتائج الممكنة.

2) ما هو احتمال أن يكون الثلاثة الأوائل هم (A ;M ;S) بهذا الترتيب ؟ ثم (U ;A ;M) بهذا الترتيب ؟

3) ما هو احتمال أن يكون التلميذ M هو الفائز في المسابقة ؟

4) ما هو احتمال أن يكون التلميذ S يحتل إحدى المراتب الثلاثة الأولى ؟

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n=\frac{5}{2^n}$

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2، u_3. ثم بين أن u_n عدد عشري مهما كان العدد الطبيعي n.

2) برهن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

3) بين أن (u_n) متتالية متقاربة. ما هي نهايتها ؟

4) نضع $s_n=\sum_{p=0}^{n}u_p$. أدرس تقارب المتتالية (s_n).

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. $(0;\vec{i},\vec{j})$

ليكن h تحاك مركزه A(-2 ;-2) و نسبته 3- ، h' تحاك مركزه B(1 ;-2) ونسبته 2.

1) أكتب العبارة التحليلية لكل من التحاكين h و h'.

2) أوجد العبارة التحليلية للتحويل f حيث $f=h'\circ h$

عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل f.

3) أوجد صورة الدائرة (C) ذات المركز A ونصف القطر AB بالتحويل h.

التمرين الرابع:

$(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس في الفضاء.

نعتبر الأشعة: $\vec{u}=-5\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}$ ، $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}$ ، $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

هل الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ تقع في نفس المستوي ؟

الاختبـــــار (27)

التمرين الأول:

يمثل الجدول التالي قانون احتمال متغير عشوائي x حيث:

X	-2	1	a	3
p_i	0,3	0,4	0,2	b

1) عين العددين الحقيقيين a و b إذا علمت أن الأمل الرياضياتي لهذا المتغير العشوائي يساوي 0,5.

2) أحسب التباين والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي.

التمرين الثاني:

تعتبر السلسلة الاحصائية: 99,5 ، 99,8، 100، 100,2، 100,2، 100,3 ، 100، 100 ، 100 ، 99,9 ، 100 ، 99,6 ، 99,9 ، 100,3 ، 100,6 ، 100,6 ، 100,3 ، 100,5، 100,6، 100,7، 100,7 ، 101,2 ، 101,2 ، 101,7 ، 101,7 ، 101,9 ، 102,2 ، 102 ، 102,2 ، 102,7.

1) أحسب الوسيط ثم الربعي الأول والربعي الثالث، ثم العشري الأول والعشري التاسع

2) مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.

التمرين الثالث:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

h تحاك مركزه A(-1 ;1,2) ونسبته 2.

1) بين أن المعادلة: (*) ..... $x^2+y^2+z^2-8x-6y-2z+1=0$ هي معادلة سطح كرة (p) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

2) عين صورة (p) بالتحاكي h.

التمرين الرابع:

f دالة معرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(x)$. فسر كل نتيجة هندسيا.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم أكتب جدول تغيراتها.

3) أنشئ (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

4) أوجد تقريبا تآلفيا للدالة f في جوار $\frac{\pi}{6}$ ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)$

الاختبـــــار (28)

التمرين الأول:

u_n متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها q. (q حقيقي غير ممعدوم).

نضع: $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n.

1) ما هي القيم الممكنة للأساس q ؟

2) من بين المتتاليات التي وجدتها. ما هي المتتاليات المتقاربة ؟

3) أحسب في كل حالة المجموع: $1+q+q^2+q^3+.....+q^n$

التمرين الثاني:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$. (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

1) عين E مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و أكتب جدول تغيراتها.

2) بيّن أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلته.

3) أنشئ المنحنى (C) . (نأخذ $\|\vec{i}\|=1cm$, $\|\vec{j}\|=3cm$.

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$.

t انسحاب يحول النقطة A(3,4) إلى النقطة $A'(1;-1)$ و t' انسحاب يحول النقطة B(3 ;-2) إلى $B'(-2;3)$.

1) أكتب العبارة التحليلية لكل من الانسحابين t و t'.

2) نضع $f=t'\circ t$. عين طبيعة f و عناصره المميزة.

3) (Δ) مستقيم ذي المعادلة $x-2y-5=0$. عين صورة (Δ) بالانسحاب t.

4) (C) دائرة مركزها A و نصف قطرها AB. أوجد صورة (C) بالانسحاب t.

التمرين الرابع:

1) أوجـد معادلـة سطح مخروط دوران محوره (oy) ورأسه o. يشمل النقطة A(-2 ;5,2).

2) أحسب بالتدوير إلى الدرجة الزاوية المحصورة بين المولد ومحور التراتيب (oy).

الاختبـــــار (29)

التمرين الأول:

كيس يحتوي على 15 كرة مرقمة من 21 إلى 35. (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس).

نسحب من الكيس كرة واحدة بطريقة عشوائية.

ما هو احتمال كل من الحوادث التالية:

A: الحصول على كرة تحمل رقما فرديا.

B: الحصول على كرة تحمل رقما أوليا.

C: الحصول على كرة تحمل رقما من مضاعفات 4 أو من مضاعفات 5.

D: الحصول على كرة تحمل رقما من مضاعف 3 و ليس من مضاعف 6.

التمرين الثاني:

1) الوسط الحسابي والتباين لسلسلة إحصائية x_i هما 45 و 8 على الترتيب.
أحسب الوسط الحسابي والتباين للسلسلة الإحصائية. y_i حيث $y_i = 10x_i + 40$

2) الربعي الأول والثالث لسلسلة إحصائية k_i هما 115 و 210 على الترتيب.
احسب الإنحراف الربعي للسلسلة الإحصائية z_i حيث $z_i = 3k_i - 12$

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$

لتكن (E) و (F) مجموعتي النقط $M(x,y)$ من المستوي اللتان تحققان على الترتيب.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ ، $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

1) عين طبيعة كل من المجموعتين (E) و (F) (يطلب تعيين العناصر المميزة).

2) عين النقط المشتركة بين المجموعتين (E) و(F) .

3) أنشئ في نفس المعلم المجموعتين (E) و (F).

التمرين الرابع:

$ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. حيث: A(1 ;1 ;2) ، B(2 ;-1 ;0)، D(2 ;3 ;5) ، $B'(4;7;9)$.

احسب إحداثيات بقية رؤوس هذا متوازي المستطيلات.

الاختبـــــار (30)

التمرين الأول:

1) أدرس تقارب المتتالية (u_n) ذات الحد العام u_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = \frac{2}{3^n}$

2) استنتج تقارب المتتاليتين (v_n)و (w_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n:

$v_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$ ، $w_n = \frac{2^n}{3^n + 1}$.

3) احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين الثاني:

يمثل الجدول التالي قانون احتمال متغير عشوائي X.

X	−1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,15	0,25

1) تحقق أن مجموع الاحتمالات يساوي 1.

2) احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

$A=\{X\leq 2\}$ ، $B=\{X>3\}$ ، $C=\{X\leq 3\}$

3) احسب الأمل الرياضياتي E(x) والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الثالث:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) أكتب معادلة سطح كرة مركزها w(-2 ;3 -1) و نصف قطرها $R=3\sqrt{3}$

2) أكتب معادلة سطح كرة مركزها w وتشمل النقطة A(1,-3,2).

3) أكتب معادلة المستوي الذي يشمل النقطة w ويوازي المستوي (xoz).

التمرين الرابع:

f تحويل نقطي للمستوي في نفسه يحول النقطة M إلى النقطة M' من المستوي.

عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل f في كل حالة.

1) M' مرجح الجملة $\{(A;-3),(B,-1),(C,2),(M,3)\}$

2) M' مرجح الجملة $\{(A;5),(B,-4),(C,-1),(M,3)\}$

الاختبـــــار (31)

التمرين الأول:

جزأنا تلاميذ قسم $2S_1$ إلى مجموعتين A و B. يمثل الجدول التالي علامات هذا القسم في فرض للعلوم الطبيعية.

المجموعة A	8	9	9	10	10	12	12	12	13	13	13
المجموعة B	3	4	7	8	10	10	12	13	18	18	18

1) احسب الوسط الحسابي و الوسيط لكل سلسلة.

2) احسب الربعي الأول والربعي الثالث والانحراف الربعي لكل سلسلة.

3) احسب المدى لكل سلسلة.

4) أعط تفسيرا لكل من المدى والانحراف الربعي.

التمرين الثاني:

نعتبر على مستقيم موجه (Δ) المعلم خطي $(0,\vec{i})$. B و C نقطتان من (Δ) فاصلتاهما 1 و 3 على الترتيب. A_0 نقطة فاصلتها 1-. نعرف من أجل كل عدد طبيعي n النقطة A_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n;4);(B,-3);(C;1)\}$

1) أنشئ النقط A_0 ، A_1 ، A_2.

2) لتكن a_n فاصلة النقطة A_n. عبر عن a_{n+1} بدلالة a_n.

عين الطبيعة و العناصر المميزة للمتتالية (a_n).

3) هل المتتالية (a_n) متقاربة ؟ ما هي نهايتها ؟

4) عين العدد الطبيعي n الذي يحقق $a_0+a_1+a_2+...+a_n=-255$

التمرين الثالث:

لتكن (C) دائرة مركزها o، ونصف قطرها R. M نقطة خارج الدائرة (C).

المستقيم الذي يشمل M يقطع الدائرة (C) في النقطتين P و Q.

لتكن I منتصف $[PQ]$.

1) عبّر عن $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ بدلالة MI^2 و IP^2.

2) استنتج أن: $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=OM^2-R^2$

الاختبـــــار (32)

التمرين الأول:

باستخدام المساواة: $\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. أحسب $\sin\frac{7\pi}{12}$ ، $\cos\frac{7\pi}{12}$

استنتج $\tan\frac{7\pi}{12}$ و $\cot an\frac{7\pi}{12}$

التمرين الثاني:

صندوق A يحتوي على 3 بطاقات مرقمة بالأرقام التالية: 2 ، 3 ، 4.

صندوق B يحتوي على 3 بطاقات مرقمة بالأرقام التالية: 3 ، 4 ، 5.

نسحب من كل صندوق بطاقة واحدة بطريقة عشوائية.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ مجموع الرقمين المتحصل عليهما.

1) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟

2) أوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

3) أحسب الأمل الرياضياتي E(X) و الانحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الثالث:

ABCD رباعي وجوه في الفضاء. لتكن I، J، K، L منتصفات الأحرف [AB]، [AD] ، [BC] ، [CD] على الترتيب.

1) برهن أن النقط الأربعة I ، J ، K ، L تنتمي إلى نفس المستوي.

2) عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{JK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{JL}$.

3) استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{JK}$ ، $\overrightarrow{JI}$ ، $\overrightarrow{JL}$ تقع في نفس المستوي.

التمرين الرابع:

ABCD مربع مركزه I. J منتصف [AB]. أنشئ صور النقط A، B، C، D، I ، J بواسطة:

- التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$.
- التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.
- التحاكي الذي مركزه J ونسبته 3.

الاختبـــــار (33)

التمرين الأول:

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{10}(u_n - 5)$

1) أحسب الحدود الأربعة الأولى من هذه المتتالية.

2) أ) برهن أنه يوجد عدد حقيقي α بحيث تكون المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = u_n + \alpha$ هي متتالية هندسية.

ب) عبر عن V_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n.

جـ) احسب S_n مجموع n حدا الأولى من حدود المتتالية (u_n).

د) احسب نهاية: S_n ثم $\frac{S_n}{n}$ من أجل n يؤول إلى $+\infty$.

التمرين الثاني:

يمثل الجدول الثاني علامات 200 تلميذا في اختبار مادة الرياضيات لتلاميذ السنة الثانية ثانوي.

العلامات	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[	[16,20]
عدد التلاميذ	20	30	95	40	15

1) حسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة الإحصائية.

2) أوجد التكرار المجمع الصاعد و التكرار المجمع النازل.

3) أنشئ في نفس المعلم المضلع للتكرار المجمع الصاعد والمضلع للتكرار المجمع النازل ثم استنتج بيانيا قيمة تقريبية للوسيط.

4) احسب الإنحراف المعياري لهذه السلسلة.

التمرين الثالث:

توي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$.

حاك مركزه I(1 ;0) و نسبته 2 ، و g تحاك مركزه J(5 ;2) ونسبته $\frac{1}{2}$.

عط العبارة التحليلية لكل من التحويلين f و g .

نضع $h = g \circ f$. نرمز بـــ $(x";y")$ احداثيي $M"$ صورة النقطة $M(x;y)$

حويل h. عبر عن $x"$ و $y"$ بدلالة x و y.

استنتج أن h هو انسحاب يطلب تعيين شعاعه.

أوجد صورة الدائرة (C) ذات المركز J ونصف القطر 4 بالتحويل h.

الاختبـــــار (34)

التمرين الأول:

ستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$

الة معرفة كما يلي $f(x)=\frac{1-x}{1+2x}$ و (C) تمثيلها البياني.

A نقطة من (C) فاصلتها α. عين إحداثيات النقطة A بحيث يكون عندها ميل

ماس يساوي 3-.

(D_m) مستقيم معادلته: $y = mx+1$. m عدد حقيقي. ناقش حسب قيم m الحقيقية

د نقط تقاطع (C) و(D_m).

التمرين الثاني:

طى $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$.

سب $\sin\frac{\pi}{5}$ ثم استنتج جيب و جيب تمام كل من الأعداد الحقيقية التالية:

$\frac{4\pi}{5}$ ، $\frac{6\pi}{5}$ ، $-\frac{51\pi}{5}$ ، $-\frac{46\pi}{5}$ ، $\frac{2009\pi}{5}$.

التمرين الثالث:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ليكن h تحاك مركزه $w(-2;-3,1)$. و نسبته 2-.

1) أكتب العبارة التحليلية للتحاكي h.

2) أوجد صورتي النقطتين A(0 ;-1 ;1) و B(-2 ;1 ;3) بالتحاكي h.

3) أوجد صورة الكرة التي مركزها E(2 ;-1 ,3) و نصف قطرها 2 بالتحاكي h.

4) عين طبيعة التحويل f حيث $f = h \circ h$ و عين عناصره المميزة.

التمرين الرابع:

x عدد حقيقي نضع: $S = -\cos(x+\frac{\pi}{6}) - \sin(x+\frac{\pi}{6})$

برهن أن S نكتب على الشكل $S = r\cos(x-\varphi)$

حيث r و φ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

الاختبـــــار (35)

التمرين الأول:

تمثل النتائج التالية قامات 27 لاعبا جزائريا في كرة السلة: مقدرة بالمتر.

1,81 ، 1,81 ، 1,90 ، 1,90 ، 1,88 ، 1,86 ، 1,88 ، 1,78 ، 1,77 ، 1,92 ،

1,81 ، 1,88 ، 1,89 ، 1,94 ، 1,89 ، 1,78 ، 1,91 ، 1,94 ، 1,96 ، 1,92 ،

1,89 ، 1,91 ، 1,93 ، 1,86 ، 1,89 ، 1,90 ، 1,91.

1) احسب القامة الوسيط لهذه السلسلة.

2) احسب الربعي الأول Q_1 والربعي الثالث Q_3، العشري الأول D_1 والعشري التاسع D_9 لهذه السلسلة.

3) مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.

التمرين الثاني:

كن (u_n) متتالية حسابية بحيث:

$$\begin{cases} u_6+u_8+u_{10}+u_{12}=132 \\ u_2+u_4=18 \end{cases}$$

1) احسب الأساس r والحد الأول u_1.

2) أوجد عبارة الحد العام.

3) احسب s_n مجموع n حد الأولى من حدود المتتالية (u_n).

التمرين الثالث:

f تحويل نقطي للمستوي في نفسه يحول النقطة M إلى النقطة M'.

بحيث: $\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ و A، B، C، D أربع نقط من المستوي.

1) برهن أن f هو انسحاب يطلب تعيين شعاعه.

2) عين طبيعة التحويل h حيث $h=f\circ f$، وعناصره المميزة.

التمرين الرابع:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A(1 ;3) ، (-8 ;-4) ، C(1 ;7).

نقبل أنه يوجد تحاكي وحيد h يحول O إلى B و يحول A إلى C.

1) ما هي نسبة التحاكي h ؟

2) أوجد المركز I للتحاكي h.

الاختبـــــار (36)

التمرين الأول:

نعتبر المجموعة $\Omega=\{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$ ونعتبر الحوادث

$A=\{2;4;6;9;10;12\}$ ، $B=\{4;5;8;9;10;12;7\}$ ، $C=\{3;4;8;10;9\}$

احسب الاحتمالات التالية: p(A) ، p(B) ، p(C) ، $p(A\cap B)$ ، $p(B\cup C)$ ، $p(A\cap B\cap C)$ ، $p(\overline{B})$ ، $p(\overline{C})$.

التمرين الثاني:

1) حل في المجموعة R المعادلة $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) حل في المجال $]0;2\pi[$ المتراجحة $2\sin x+1\le 0$

التمرين الثالث:

ABCD شبه منحرف متساوي الساقين حيث AD = BC. و $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})=\frac{\pi}{5}$. محور القطعة [AB] يقطع (BC) في I ويقطع (DC) في J.

1) بين أنه يوجد دوران r مركزه I يحول A إلى B و يحول D إلى C، يطلب إعطاء قيسا لزاويته.

2) أنشئ النقطة J' صورة J بالدوران r.

3) برهن أن المثلثين JCJ' و J' JB متساويا الساقين.

التمرين الرابع:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

تعطى النقطتين C(1 ;2 ;3) ، D(-4 ;2 ;0).

t انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{DC}$ ، h تحاك مركزه D و نسبته 2.

1) اعط العبارة التحليلية لكل من الانسحاب t و التحاكي h.

2) أوجد صورة النقطة C بالانسحاب t و بالتحاكي h.

3) أوجد صورة الكرة (S) ذات المعادلة : $(x-1)^2+y^2+(z-4)^2=4$ بالتحاكي h.

الاختبـــــار (37)

التمرين الأول:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$.

من أجل كل عدد حقيقي m يختلف عن 1 و1-. نعرف الدالة f_m كما يلي:

$$f_m(x)=\frac{x^2-mx-2}{x+m}$$

نسمي (C_m) التمثيل البياني للدالة f_m.

1) أوجد D مجموعة تعريف الدالة f_m.

2) برهن أن جميع المنحنيات C_m تشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيين احداثييهما.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D فإن $f_m(x)$ تكتب على الشكل: $f_m(x)=\alpha x+\beta+\frac{\wp}{x+m}$. حيث α، β ، $\wp$ أعداد حقيقية يطلب حسابها.بدلالة m.

4) برهن أن المنحنى (C_m) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلتيهما.

التمرين الثاني:

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

1) عبر عن $f(x)$ بدلالة $\sin x$ و $\cos x$.

2) عبر عن $\sin 3x$ بدلالة $\sin x$.

3) أوجد تقريبا تآلفيا للدالة f في جوار $\frac{\pi}{3}$ ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $\sin\left(0{,}02+\frac{\pi}{3}\right)$.

التمرين الثالث:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن (C) أسطوانة دوران محورها (ox) وقاعدتها دائرة نصف قطرها $2\sqrt{3}cm$.

و(H) مخروط دوران محوره (oz) والزاوية التي يصنعها المولد مع المحور (oz) هي $\frac{\pi}{3}$، (p) مستوي معادلته $x=2$

هل توجد نقط مشتركة بين الأسطوانة (C) والمخروط (H) والمستوي (p) ؟

الاختبـــــار (38)

التمرين الأول:

كيس يحتوي على 20 كرة. منها 3 كرات صفراء، و4 كرات حمراء، و5 كرات بيضاء و8 كرات سوداء. (نفرض أن الاحتمال متجانس).

نسحب من هذا الكيس بطريقة عشوائيا كرة واحدة ونراقب لونها.

ليكن X متغير عشوائي معرف كما يلي:

إذا تحصلنا على كرة صفراء نربح 4 دج، وإذا تحصلنا على كرة حمراء نخسر 2 دج وإذا تحصلنا على كرة بيضاء نربح 7 دج، وإذا تحصلنا على كرة سوداء نخسر 3 دج

1) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟

2) أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X.

3) أحسب الأمل الرياضياتي E(X) والانحراف المعياري $\sigma(x)$.

التمرين الثاني:

يعطى في كل حالة مجال I من R. أوجد مجال J من الشكل: $]3-10^{-k};3+10^{-k}[$ مع k عدد طبيعي غير معدوم، بحيث يكون كل عنصر x من I هو أيضا عنصر من J.

1) $I=]2{,}995;3{,}008[$ 2) $I=]2{,}9999;3{,}0001[$

التمرين الثالث:

(p) مستو معادلته $z = 4$، و يقطع محور الرواقم (oz) في النقطة k.

(C) دائرة مركزها k و نصف قطرها 4cm ، و محتواة في المستوي (p).

(M) مخروط دوراني محوره (oz) ورأسه o وقاعدته (C). لتكن A نقطة من (C).

1) أحسب بالدرجات قيسا للزاوية $K\hat{O}A$ ثم أكتب معادلة (M).

2) عين تقاطع (M) والمستوي (P') الذي معادلته $z = 3$.

التمرين الرابع:

A، B، C ثلاث نقط ثابتة على استقامة واحدة.

عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\left\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

الاختبـــــار (39)

التمرين الأول:

يمثل الجدول التالي علامات 200 تلميذا في اختبار مادة العلوم الطبيعية للسنة الثانية ثانوي.

العلامات	[0;2[	[2,4[	[4;6[	[6;8[	[8,10[	[10;12[	[12;14[	[14;16[	[16;18[	[18;20]
عدد التلاميذ	8	12	16	20	24	46	40	18	10	6

1) أحسب الوسط الحسابي والوسيط لهذه السلسلة.

2) أحسب الربعي الأول Q_1 والربيعي الثالث Q_3 ثم العشري الأول D_1 والعشري التاسع D_9.

3) مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0. حيث: $u_2 = \frac{1}{8}$ و $u_4 = \frac{1}{128}$.

1) أحسب الحد الأول u_0 والأساس q.

2) عبر عن u_n بدلالة n. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ ما هي نهايتها.

3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $u_n = \frac{1}{2048}$.

4) أحسب المجموع s_n مجموع $n+1$ حدا الأولى من حدود المتتالية (u_n).

التمرين الثالث:

نعتبر في الفضاء المعلم المتعامد و المتجانس $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

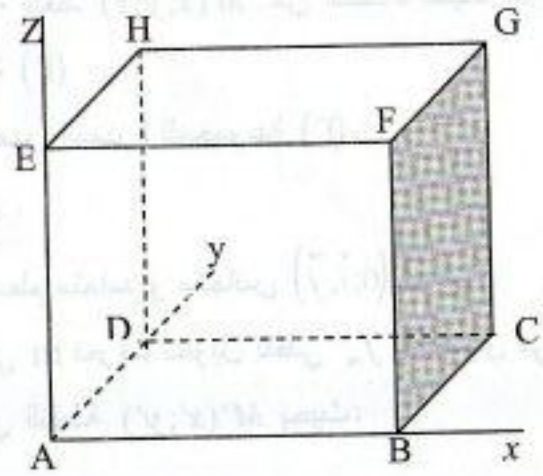
لتكن I، J، K ، L منتصفا الأحرف [AB]، [CD] ، [GH]، [EF] على الترتيب.

1) عين احداثيات رؤوس هذا المكعب في المعلم المعطى.

2) عين إحداثيات النقط: I، J، K، L.

3) أكتب معادلة المستوي (IJKL).

4) أكتب معادلتي المستقيمين (IL)و (LK)



الاختبـــــار (40)

التمرين الأول:

لتكن α ، β ، φ ثلاثة أعداد حقيقية مع α غير معدوم. لتكن f دالة معرفة كما يلي:

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \varphi$

1) برهن أنه إذا قبلت المعادلة $f(x) = 0$ حلين متمايزين x_1 و x_2 فإن: $f'(x_1) \neq 0$ و $f'(x_2) \neq 0$.

2) برهن أن $\frac{x_1}{f'(x_1)} + \frac{x_2}{f'(x_2)} = \frac{1}{\alpha}$

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء حيث $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{v} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$.

و A نقطة احداثياتها (1; 2; -3).

1) بين أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان

2) عين احداثيات النقطة k بحيث $\overrightarrow{AK} = \vec{i} - \vec{v}$.

3) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث يكون $AM = 2\sqrt{2}$.

- جد معادلة المجموعة (Γ)
- عين الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ).

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

من أجل كل عدد حقيقي m نعرف تحويلا نقطيا f_m للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي النقطة $M'(x';y')$ بحيث:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - m + 1 \\ y' = \frac{1}{3}y + 2m - 2 \end{cases}$$

1) برهن أن f_m هو تحاك يطلب تعيين مركزه w_m ونسبته.

2) عين مجموعة المراكز w_m عندما يمسح m المجموعة R.

3) (C) دائرة مركزها A(-2 ;3) ونصف قطرها 4. أوجد معادلة (C')صورة (C) بالتحويل $h = f_m \circ f_m \circ f_m$. عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل h.

حل الاختبار (1)

حل التمرين الأول:

1) تكون الدالة f حيث $f(x)=1-\sqrt{(x+3)(4-2x)}$. معرفة إذا كان $(x+3)(4-2x)\geq 0$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	
$4-2x$	$+$	$+$	$-$	
$(x+3)(4-2x)$	$-$	$+$	$-$	

ينتج من الجدول أن مجموعة تعريف الدالة f هي $E=[-3;2]$.

2) $4x^2+5x=0$ يكافئ $x(4x+5)=0$ يكافئ $x=0$ أو $x=-\frac{5}{4}$.

إذن مجموعة تعريف الدالة g هي $]-\infty;-\frac{5}{4}[\cup]-\frac{5}{4};0[\cup]0;+\infty[$.

3) تكون الدالة h حيث $h(x)=\sqrt{|x|}-\sqrt{|2-x^2|}$ معرفة إذا كان: $|x|\geq 0$ و $|2-x^2|\geq 0$

ومنه h معرفة على R .

حل التمرين الثاني:

1) الدالتان f و g معرفتان على R .

$$f\circ g(x)=f[g(x)]=f(3-2x)=\frac{1+2(3-2x)}{1+2(3-2x)^2}=\frac{-4x+7}{8x^2-24x+19}$$

2)

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=g\left(\frac{1+2x}{1+2x^2}\right)=3-2\left(\frac{1+2x}{1+2x^2}\right)=\frac{6x^2-4x+1}{1+2x^2}$$

نلاحظ أن $f\circ g(x)\neq g\circ f(x)$. ينتج أن عملية تركيب الدوال ليست عملية تبديلية.



$$f\circ f(x)=f(f(x))=f\left(\frac{1+2x}{1+2x^2}\right)=\frac{1+2\left(\frac{1+2x}{1+2x^2}\right)}{1+2\left(\frac{1+2x}{1+2x^2}\right)^2}$$ (3

$$f\circ f(x)=\frac{(1+2x^2)^2+2(1+2x)(1+2x^2)}{(1+2x^2)+2(1+2x)^2}$$

$$g\circ g(x)=g(g(x))=g(3-2x)=3-2(3-2x)=4x-3$$

حل التمرين الثالث:

1) نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>1$ فإن: $\sqrt{x}<x<x^2$...(1)

2) نضرب أطراف المتباينة (1) في العدد 4- نجد: $-4\sqrt{x}<-4x<-4x^2$...(2)

نضيف إلى أطراف المتباينة (2) العدد 1 نجد: $1-4\sqrt{x}<1-4x<1-4x^2$...(3)

بقلب أطراف المتباينة (3) نجد: (لاحظ أن كل الأطراف سالبة).

$$\frac{1}{1-4\sqrt{x}}<\frac{1}{1-4x}<\frac{1}{1-4x^2}$$...(4) . نضرب أطراف المتباينة (4) في العدد 2- نجد:

$$\frac{-2}{1-4x^2}<\frac{-2}{1-4x}<\frac{-2}{1-4\sqrt{x}}$$

حل التمرين الرابع:

1) نعلم أن الدالة u معرفة على R^* ومتناقصة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

2) نلاحظ أن $f=5u+3$ ، $g=-3u-4$ ، $h=-3u+4$ إذن f و u لهما نفس اتجاه التغير، و الدالتان u و g متعاكستان في اتجاه التغير و الدالتان u و h متعاكستان في اتجاه التغير.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u		↘		↘	
f		↘		↘	
g		↗		↗	
h		↗		↗	

حل الاختبار (2)

حل التمرين الأول:

1) لدينا $h(x)=\frac{9-3x-2x^2}{6-x-2x^2}$

مميز المعادلة $-2x^2-x+6=0$ هو $\Delta=49$ وحلاها هما $\frac{3}{2}$ و -2.

إذن مجموعة تعريف الدالة h هي $E=]-\infty;-2[\cup]-2;\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2};+\infty[$

ويكون لدينا $-2x^2-x+6=-2(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

مميز المعادلة $-2x^2-3x+9=0$ هو $\Delta=81$ و حلاها هما $\frac{3}{2}$ و -3.

و يكون لدينا $-2x^2-3x+9=-2(x+3)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من E يكون:

$$h(x)=\frac{-2x^2-3x+9}{-2x^2-x+6}=\frac{-2(x+3)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{-2(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{x+3}{x+2}$$

2) $h(x)=0$ يكافئ $\frac{x+3}{x+2}=0$ يكافئ $x+3=0$ أي $x=-3$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $h(x)=0$ هي $\{-3\}$.

$h(x)=1$ يكافئ $\frac{x+3}{x+2}=1$ يكافئ $x+3=x-2$ أي $3=2$ (مستحيل) إذن المعادلة $h(x)=1$ لا تقبل حلولا في R.

حل التمرين الثاني:

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $-1\le\cos x\le 1$...(1) ، $-1\le\sin x\le 1$...(2)

ولدينا أيضا $0 \le \cos^2 x \le 1$...(3)، $0 \le \sin^2 x \le 1$...(4)

- إيجاد حصر للعدد $4\cos x - 5\sin x$:

نضرب أطراف المتباينة (1) في العدد 4 ونضرب أطراف المتباينة (2) في العدد -5 نجد: $-4 \le 4\cos x \le 4$...(5)، $-5 \le -5\sin x \le 5$

بجمع المتباينتين (5) و (6) نجد: $-9 \le 4\cos x - 5\sin x \le 9$.

- إيجاد حصر للعدد $3\sin x\cos x$: نميز 4 حالات:

1) إذا كان $0 \le \sin x \le 1$ و $0 \le \cos x \le 1$ فإن $0 \le 3\sin x\cos x \le 3$.

2) إذا كان $0 \le \sin x \le 1$ و $(-1 \le \cos x \le 0$ أي $0 \le -\cos x \le 1)$

ومنه $0 \le -\sin x\cos x \le \frac{1}{2}$ أي $-3 \le 3\cos x\sin x \le 0$.

3) إذا كان $-1 \le \sin x \le 0$ و $0 \le \cos x \le 1$ أي $0 \le -\sin x \le 1$ و $0 \le \cos x \le 1$

و منه $-\frac{1}{2} \le -\sin x\cos x \le 0$ إذن $-3 \le 3\cos x\sin x \le 0$.

4) إذا كان $-1 \le \sin x \le 0$ و $-1 \le \cos x \le 0$ أي $0 \le -\sin x \le 1$ و $0 \le -\cos x \le 1$ و منه $0 \le 3\cos x\sin x \le 3$.

- إيجاد حصر للعدد $\cos^2 x - \sin^2 x$:

نضرب أطراف المتباينة (4) في العدد -1 نجد: $-1 \le -\sin^2 x \le 0$...(7)

بجمع المتباينتين (3) و (7) نجد: $-1 \le \cos^2 x - \sin^2 x \le 1$.

حل التمرين الثالث:

1) نعلم أن ذروة القطع المكافئ هي $S\left(-\frac{b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي $S\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

بما أن لمعامل a سالب $(-2 < 0)$ فإن الدالة f حيث $y = f(x)$ متزايدة على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

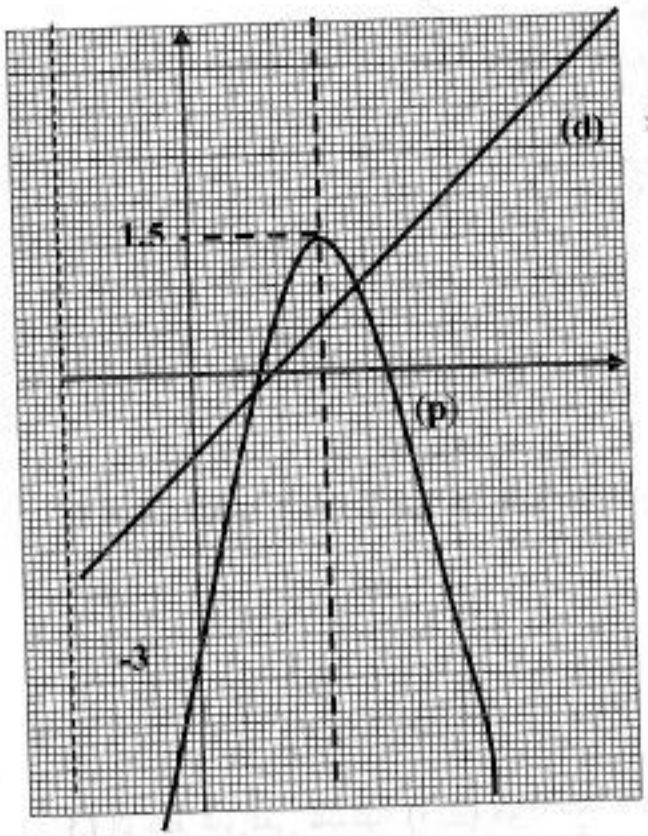
و الدالة f تقبل قيمة كبرى هي $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f		$\frac{3}{2}$ ↗ ↘	

مميز المعادلة $-2x^2 + 6x - 3 = 0$ هو $\Delta = 12$ و حلاها هما $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

إذن $(P) \cap (xx') = \left\{A\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};0\right),\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2};0\right)\right\}$



2) إحداثيات نقط تقاطع المستقيم (d) و القطع المكافئ (p) هي حلول الجملة:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 6x - 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$-2x^2 + 6x - 3 = x - 1$ يكافئ

$2x^2 - 5x + 2 = 0$ يكافئ

$(x-2)(2x-1) = 0$ يكافئ $x = \frac{1}{2}$

أو $x = 2$

إذن $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$، $f(2) = 1$.

و منه (d) يقطع (p) في نقطتين هما $E\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$، $F(2;1)$.

3) $-2x^2 + 6x - 3 < x - 1$ يكافئ $f(x) < x - 1$.

مجموعة حلول هذه المتراجحة هي فواصل نقط (p) التي تقع تحت المستقيم (d) و هي $\left]-\infty;\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$.

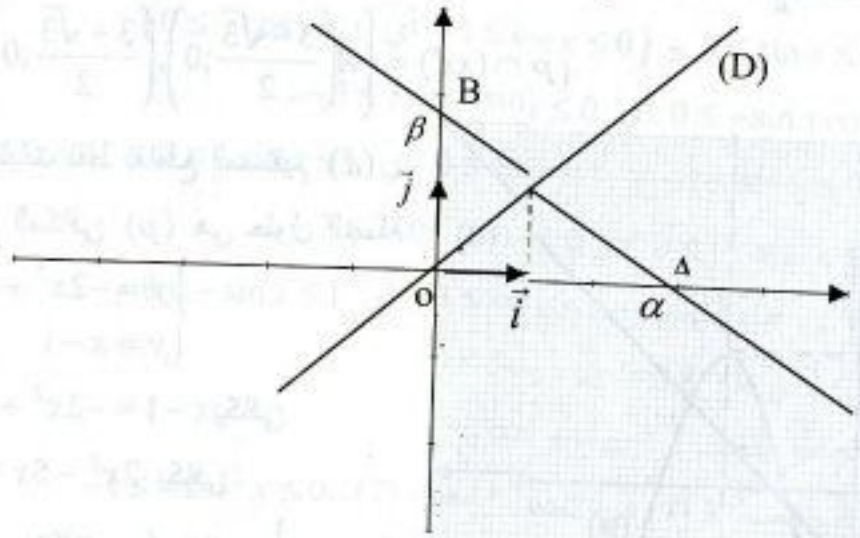
حل التمرين الرابع:

لدينا $A(\alpha;0)$ ، $B(0,\beta)$ نعلم أن معادلة المستقيم (AB) من الشكل $y=mx+p$

$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\beta-0}{0-\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$ إذن $y=-\frac{\beta}{\alpha}x+p$.

تنتمي إلى (AB) يكافئ $y_A=-\frac{\beta}{\alpha}x_A+p$ أي $0=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha+p$ ومنه $p=\beta$

معادلة (AB) هي $y=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta$.



2) حساب العدد $\wp$ يؤول إلى حل المعادلة $x=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta$ أي $\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)x=\beta$ أي

$x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ و منه $\wp=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

$\frac{1}{\wp}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\alpha}{\alpha\beta}+\frac{\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$ و منه $\frac{1}{\wp}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$...(1) .

3) الوسط التوافقي للثنائية (2,3) هو $2\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)=\frac{2(2\times3)}{2+3}=\frac{12}{5}$

الوسط التوافقي للثنائية (1,5) هو: $\frac{2(1\times5)}{1+5}=\frac{5}{3}$

الوسط التوافقي للثنائية (2,4) هو: $\frac{2(2\times4)}{2+4}=\frac{8}{3}$

حل الاختبار (3)

حل التمرين الأول:

نلاحظ أن المعادلة (*) من الدرجة الثانية مهما كان العددين α و β .

1) المعادلة (*) تقبل حلا على الأقل معناه المعادلة تقبل حلا مضاعفا أو حلين متمايزين أي $\Delta\geq0$.

مميز المعادلة $x^2+\alpha x+\beta=0$ هو $\Delta=\alpha^2-4\beta$

إذن حتى تقبل المعادلة (*) حلا على الأقل يجب أن يكون $\alpha^2-4\beta\geq0$.

2) المعادلة (*) تقبل حلا مضاعفا معناه $\Delta=0$ أي $\alpha^2-4\beta=0$ و الحل المضاعف هو $-\frac{b}{2a}=-\frac{\alpha}{2}$

$-\frac{\alpha}{2}=-3$ يكافئ $\alpha=6$ و منه $36-4\beta=0$ إذن $\beta=9$.

3) في حالة وجود حلين متمايزين يعني $\Delta>0$ أي $\alpha^2-4\beta>0$.

نعلم أن مجموع الحلين هو $s=x'+x''=-\alpha$ وجداء الحلين هو $p=x'\times x''=\beta$

$x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=(\alpha)^2-2(\beta)=\alpha^2-2\beta$

$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''}=\frac{-\alpha}{\beta}$

$x'x''^2+x'^2x''=x'x''(x'+x'')=\beta(-\alpha)=-\alpha\beta$

$x'^3+x''^3=(x'+x'')(x'^2-x'x''+x''^2)=(-\alpha)\left[\alpha^2-2\beta-\beta\right]=\alpha(3\beta-\alpha^2)$

حل التمرين الثاني:

عدد أقطار مضلع له n ضلعا هو $\frac{n(n-3)}{2}$ قطرا.

1) من أجل المثلث: عدد أضلاعه هو $n=3$ وعدد أقطاره حسب القاعدة هو $\frac{3(3-3)}{2}=0$. (الخاصية صحيحة)

من أجل المربع: عدد أضلاعه هو $n = 4$ وعدد أقطاره حسب القاعدة هو: $\frac{4(4-3)}{2} = 2$. (الخاصية صحيحة).

2) نرمز بـــ n إلى عدد أضلاع المضلع.

عدد الأضلاع يساوي عدد الأقطار معناه $\frac{n(n-3)}{2} = n$ أي

$n^2 - 3n - 2n = 0$ أي $n^2 - 5n = 0$ و منه $n = 0$ (مرفوض) أو $n = 5$.

إذن المضلع الذي له نفس عدد الأضلاع و الأقطار هو المضلع الخماسي.

3) * إيجاد عدد أضلاع المضلع الذي له 9 أقطار يؤول إلى حل المعادلة :

$\frac{n(n-3)}{2} = 9$ أي $n^2 - 3n - 18 = 0$. مميز هذه المعادلة هو $\Delta = 81$ و حلاها هما 3- و 6 . الحل 3- مرفوض. إذن $n = 6$

إذن المضلع الذي له 9 أقطار هو المضلع السداسي.

- إيجاد عدد أضلاع المضلع الذي له 434 يؤول إلى حل المعادلة :

$\frac{n(n-3)}{2} = 434$ أي $n^2 - 3n - 868 = 0$. مميز هذه المعادلة هو $\Delta = 3481$.

و حلاها هما 28- و 31. الحل 28- مرفوض. إذن $n = 31$

إذن المضلع الذي له 434 قطرا هو المضلع ذو 31 ضلعا.

حل التمرين الثالث :

1) نحل المتراجحة $\frac{5x^2 - 3x - 14}{7x^2 - 8x - 12} \geq 0$.

مميز المعادلة $7x^2 - 8x - 12 = 0$ هو $\Delta = 400$ و حلاها هما $-\frac{6}{7}$ و 2.

المتراجحة معرفة على المجموعة $]-\infty;-\frac{6}{7}[\cup]-\frac{6}{7};2[\cup]2;+\infty[$

و مميز المعادلة $5x^2 - 3x - 14 = 0$ هو $\Delta = 289$ و حلاها هما $-\frac{7}{5}$ و 2.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$-\frac{6}{7}$		2		$+\infty$
$5x^2 - 3x - 14$	+	‖	−		−	‖	+		
$7x^2 - 8x - 12$	+		+	‖	−	‖	+		
$\frac{5x^2 - 3x - 14}{7x^2 - 8x - 12}$	+		−		+		+		

ينتج من الجدول أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي

$S =]-\infty;-\frac{5}{7}] \cup]-\frac{6}{7};2] \cup [2;+\infty[$

2) نكون المتراجحة $\sqrt{x^2-4} \geq \sqrt{5x-10}$ معرفة إذا كان : $(x^2 - 4 \geq 0$ و $5x - 10 \geq 0)$

أي $x \geq 2$ و $(x \leq -2$ أو $x \geq 2)$

و منه $x \geq 2$. إذن المتراجحة معرفة على المجموعة $[2;+\infty[$.

$\sqrt{x^2-4} \geq \sqrt{5x-10}$ تكافئ $(\sqrt{x^2-4})^2 \geq (\sqrt{5x-10})^2$ تكافئ

$x^2 - 4 \geq 5x - 10$ تكافئ $x^2 - 5x - 6 \geq 0$ تكافئ $(x+1)(x-6) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$(x+1)(x-6)$	+	0	−	0	+		

إذن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي: $S =]-\infty;-1] \cup [6;+\infty[\cap [2;+\infty[= [2;+\infty[$

حل التمرين الرابع :

1) نحسب نسبة تزايد الدالة f بين العددين 1- و $-1+h$.

$$r(h) = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{(-1+h)\left[1-(-1+h)^2\right]}{h} = \frac{(-1+h)(2h-h^2)}{h} = (h-1)(2-h)$$

$$Limr(h) = Lim(h-1)(2-h) = -2$$

$h \to 0 \qquad h \to 0$

بما أن النسبة $r(h)$ قبلت نهاية منتهية فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1- و $f'(-1) = -2$.

نعلم أن $f'(x) = 1 - 3x^2$

2) نعلم أن ميل المماس في نقطة فاصلتها a هو $f'(a)$.

$f'(a) = -11$ تكافئ $1 - 3x^2 = -11$ تكافئ $-3x^2 + 12 = 0$ تكافئ

$-3(x-2)(x+2) = 0$ تكافئ $x = 2$ أو $x = -2$.

ومنه $f(2) = -6$ ، $f(-2) = -6$. إذن النقطتان اللتان يكون عندهما ميل المماس -11 هما $A(2;-6)$ ، $B(-2;6)$.

3) * إيجاد معادلة المماس (d_1) في النقطة A :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y = -11(x-2) - 6 = -11x + 16$$

إذن معادلة (d_1) هي $y = -11x + 16$.

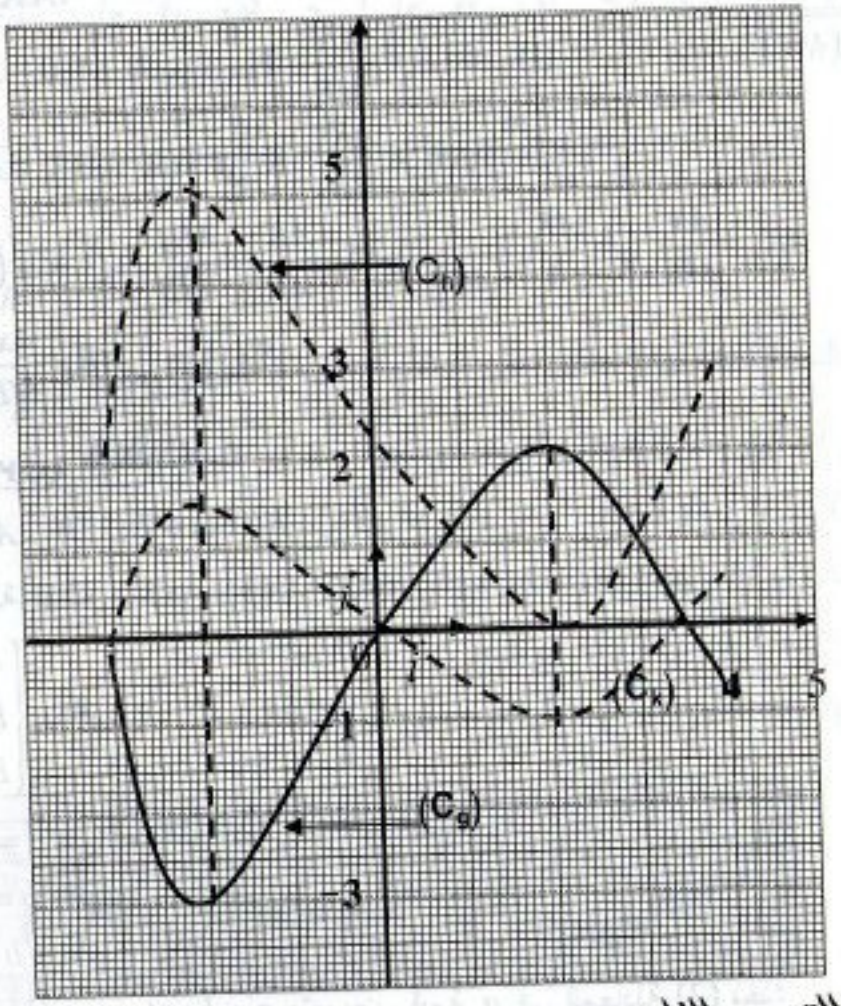
* إيجاد معادلة المماس (d_2) في النقطة B :

$$y = f'(-2)(x+2) + f(2) = -11(x+2) + 6 = -11x - 16$$

حل الاختبار (4)

حل التمرين الأول:

- المساواة $g = -f$ تعني أن g و f متعاكستين في اتجاه التغير و (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.
- المساواة $h = f + 2$ تعني أن f و h لهما نفس اتجاه التغير وو (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0;2)$
- المساواة $k = \frac{1}{2}f$ تعني أن f و k لهما نفس اتجاه التغير.



حل التمرين الثاني:

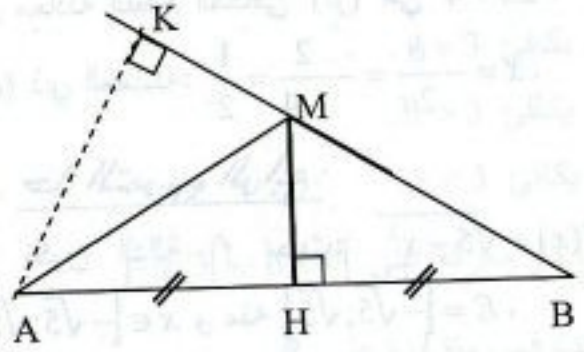
لدينا $AB = 4cm$ ، $MH = x(cm)$

مساحة المثلث ABC باعتبار قاعدته AB و ارتفاعه MH هي:

$$S(x) = \frac{1}{2} AB \times MH = \frac{1}{2}(4)x = 2x$$

مساحة المثلث ABC باعتبار قاعدته MB و ارتفاعه AK هي:

$$S'(x) = \frac{1}{2} MB \times AK$$



حساب الطول AK:

لدينا في المثلث MBH القائم في H: $\sin\hat{B}=\frac{MH}{MB}$...(1)

ولدينا في المثلث ABK القائم في K: $\sin\hat{B}=\frac{AK}{AB}$...(2)

من (1) و (2) ينتج أن: $\frac{AK}{AB}=\frac{MH}{MB}$ يكافئ $\frac{AK}{4}=\frac{x}{MB}$ أي $AK=\frac{4x}{MB}$

ومنه $S'(x)=\frac{1}{2}MB\times\frac{4x}{MB}=2x$

حل التمرين الثالث:

لدينا $A(-1;0)$ ، $B(2;0)$ ، $E(0;4)$.

نعلم أن معادلة القطع المكافئ (p) من الشكل: $y=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases}A\in(p)\\B\in(p)\\E\in(p)\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}0=a-b+c\\0=4a+2b+c\\4=0+0+c\end{cases}$$

بتعويض $c=4$ في المعادلة الأولى و الثانية نجد:

$$\begin{cases}a-b=-4...(1)\\2a+b=-2...(2)\end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد: $a=b-4$ بتعويض قيمة a في المعادلة (2) نجد:

$2(b-4)+b=-2$ تكافئ $3b=6$ ومنه $b=2$ إذن $a=-2$.

إذن معادلة القطع المكافئ (p) هي $y=-2x^2+2x+4$ ومحور تناظره هو المستقيم (d) ذي المعادلة: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{-4}=\frac{1}{2}$.

حل التمرين الرابع:

1) تكون الدالة f حيث: $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ معرفة إذا كان $5-x^2\geq 0$ أي $x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ و منه $E=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

2) من أجل كل عدد حقيقي h فإن:

$$f(1+h)-f(1)=\sqrt{5-(1+h)^2}-2=\left(\sqrt{5-(1+h)^2}-2\right)\times\frac{\sqrt{5-(1+h)^2}+2}{\sqrt{5-(1+h)^2}+2}$$

$$f(1+h)-f(1)=\frac{5-(1+h)^2-4}{\sqrt{-h^2-2h+4}+2}=\frac{-h(h+2)}{\sqrt{-h^2-2h+4}+2}$$

$$Lim\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=Lim\frac{-h-2}{\sqrt{-h^2-2h+4}+2}=-\frac{1}{2}$$

بما أن النسبة قبلت نهاية منتهية فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1)=-\frac{1}{2}$

3) نعلم أن التقريب التألفي للدالة f في جوار a هو الدالة التألفية.

$h\mapsto f(a)+hf'(a)$ أي $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$

إذن لدينا $f(1+h)=f(1)+hf'(1)$ أي $f(1+h)\approx 2-0,5h$

$\sqrt{5-(1+h)^2}\approx 2-0,5h$. بوضع $h=0,5$ نجد:

$\sqrt{5-(1+0,1)^2}\approx 2-0,5(0,1)$ أي $\sqrt{3,79}\approx 1,95$

حل الاختبار (5)

حل التمرين الأول:

1) الدالة u حيث $u(x)=4x-12$ معرفة على R.

- $u(x)=0$ يكافئ $4x-12=0$ يكافئ $x=3$.
- $u(x)>0$ يكافئ $4x-12>0$ يكافئ $x>3$.
- $u(x)<0$ يكافئ $4x-12<0$ يكافئ $x<3$.

الدالة f حيث $f(x)=\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{4x-12}$ معرفة على $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

بما أن u دالة تألفية و معاملها 4 موجب فهي متزايدة على R.

نعلم أنه إذا كانت $u(x)$ تحافظ على إشارة ثابتة على I مع $u(x)\neq 0$ فإن الدالتين u

$\frac{1}{u}$ متعاكستين في اتجاه التغير.

إذن الدالة f متناقصة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

2) بما أن $u(x) \geq 0$ من أجل $x \geq 3$ فإن u و $|u|$ لهما نفس اتجاه التغير أي h متزايدة على المجال $[3;+\infty[$. و بما أن $u(x) \leq 0$ من أجل $x \leq 3$ فإن u و $|u|$ متعاكسين في اتجاه التغير. و منه h متناقصة على المجال $]-\infty;3]$.

حل التمرين الثاني:

1) من خلال جدول قيم الدالتين f و g نلاحظ أن $g(x)-f(x)$ عدد موجب أي $g(x)-f(x) \geq 0$ أي $g(x) \geq f(x)$.

x	$-0,5$	0	$0,5$	1
$g(x)$	2	1	$0,666$	$0,5$
$f(x)$	$1,125$	1	$0,375$	0
$g(x)-f(x)$	$0,875$	0	$0,291$	$0,5$

2) تبسيط العبارة $d(x)$: يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x)=1-x+x^2(1-x)=(1+x)(1+x^2)$$

$$(x)=g(x)-f(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)(1+x^2)=\frac{1}{1+x}\left[1-(1-x)(1+x)(1+x^2)\right]$$

$$=\frac{1}{1+x}\left[1-(1-x^2)(1+x^2)\right]=\frac{1}{1+x}\left[1-(1-x^4)\right]=\frac{x^4}{1+x}$$

بما أن $x>-1$ فإن $1+x>0$ و $x^4 \geq 0$ أي $\frac{x^4}{1+x} \geq 0$ و منه $g(x)-f(x) \geq 0$

إذن $g(x) \geq f(x)$.

حل التمرين الثالث:

1) الدالتان f و g معرفتان وقابلتان للاشتقاق على R.

$f'(x)=2\sin x\cos x$ ، $g'(x)=-2\cos x\sin x$

2) حساب $f'(x)+g'(x)$:

✓ **الطريقة الأولى:** $f'(x)+g'(x)=2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=0$

✓ **الطريقة الثانية:** نعلم أن $(f+g)'=f'+g'$.

$$f(x)+g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

و منه $f'(x)+g'(x)=\left(f(x)+g(x)\right)'=(1)'=0$

3)

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$(fg)'(x)=2\sin x\cos x(\cos^2 x)+\sin^2 x(-2\sin x\cos x)$$

$$(fg)'(x)=2\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

$$(f^2)'(x)=2f'(x)f(x)=2(2\sin x\cos x)\sin^2 x=4\sin^3 x\cos x$$

$$(g^2)'(x)=2g'(x)g(x)=2(-2\sin x\cos x)\cos^2 x=-4\sin x\cos^3 x$$

حل التمرين الرابع:

1) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على R و $f'(x)=-2x+4$

معادلة المماس (T_a) للمنحنى (C) في النقطة $A\left(a;-a^2+4a-2\right)$ هي:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=(-2a+4)(x-a)-a^2+4a-2$$

$$y=(-2a+4)x-a(-2a+4)-a^2+4a-a=(4-2a)x+a^2-2$$

إذن معادلة (T_a) هي: $y=(4-2a)+a^2-2$

2) E تنتمي إلى المماس (T_a) معناه: $4=(4-2a)\frac{3}{2}+a^2-2$...(*)

أي $2a^2-6a=0$ أي $2a(a-3)=0$ و منه $a=3$ أو $a=0$

بما أن المعادلة (*) قبلت حلين متمايزين فإنه يوجد مماسين كل منهما يشمل النقطة E.

- من أجل $a=0$ فإن معادلة المماس (T_0) هي: $y=\left(4-2(0)\right)x+0-2=4x-2$
- من أجل $a=3$ فإن معادلة المماس (T_3) هي: $y=\left(4-2(3)\right)x+9-2=-2x+7$

حل الاختبار (6)

حل التمرين الأول:

1) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(6x-16)(4-x)+(3x^2-16x+17)}{(4-x)^2}=\frac{-3x^2+24x-47}{(4-x)^2}$$

2) مهما كان العدد الحقيقي x يختلف عن 4 فإن:

$$f(x)=4-3x+\frac{1}{4-x}=\frac{(4-3x)(4-x)+1}{4-x}=\frac{3x^2-16x+7}{4-x}$$

3) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=-3+\frac{1}{(4-x)^2}=\frac{-3(4-x)^2+1}{(4-x)^2}=\frac{-3x^2+24x-47}{(4-x)^2}$$

ملاحظ أنه باستعمال الشكلين المختلفين للدالة h تحصلنا على نفس النتيجة.

حل التمرين الثاني:

1) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على R و $f'(x)=2\alpha x+\beta$.

A تنتمي إلى (C) تكافئ $f(1)=4$ تكافئ $\alpha+\beta+2=4$ أي $\alpha+\beta=2$

معامل توجيه المماس في A يساوي 5 يكافئ $f'(1)=5$ أي $2\alpha+\beta=5$.

إيجاد العددين α و β يؤول إلى حل الجملة: $\begin{cases}\alpha+\beta=2...(1)\\2\alpha+\beta=5...(2)\end{cases}$

بطرح (1) من (2) نجد: $\alpha=3$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $3+\beta=2$ أي $\beta=-1$ إذن $(\alpha;\beta)=(3;-1)$.

2) نعلم أن فواصل نقط تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة $\alpha x^2+\beta x+2=0$. نناقش حسب قيم α و β .

• إذا كان $\alpha=0$ فإن (C) هو مستقيم معادلته $y=\beta x+2$ و نميز حالتين:

أ) إذا كان $\beta=0$ فإن (C) هو مستقيم معادلته $y=2$ و هو لا يقطع محور الفواصل

ب) إذا كان $\beta\neq 0$ فإن (C) هو مستقيم معادلته $y=\beta x+2$ وهو يقطع محور الفواصل

• إذا كان $\alpha\neq 0$ فإن (C) هو قطع مكافئ معادلته $y=\alpha x^2+\beta x+2$ والمعادلة $\alpha x^2+\beta x+2=0$ معادلة من الدرجة الثانية.

(C) لا يقطع محور الفواصل معناه المعادلة لا تقبل حلولا في R أي $\Delta<0$ و منه $\beta^2-8\alpha<0$. و هي العلاقة بين α و β .

3) مجموعة قيم α بحيث يكون (C) قطعا مكافئا هي R^* .

حل التمرين الثالث:

نضع $u(x)=\sin x$ ، $v(x)=\sqrt{x}$ ، $w(x)=x+4$.

$$u[v(w(x))]=u[v(x+4)]=u\left(\sqrt{x+4}\right)=\sin\sqrt{x+4}$$

إذن h هي تركيب ثلاث دوال مرجعيـــة: الدالة التآلفية w ، والدالة الجذر التربيعي v ، و الدالة جيب u .

حل التمرين الرابع:

1) لحل الجملة (S_1) نضرب طرفي المعادلة الأولى في العدد 2- نجد:

$\begin{cases}-2t+8m=22\\2t+3m=11\end{cases}$ بجمع المعادلتين نجد $11m=33$ أي $m=3$.

بالتعويض في المعادلة (2) نجد: $2t+3(3)=11$ أي $2t=2$ و منه $t=1$ إذن الجملة (S_1) تقبل حلا وحيدا هو الثنائية $(t;m)=(1;3)$.

2) تكون الجملة (S_2) معرفة إذا كان $\alpha\neq 0$ و $\beta\neq 0$.

بوضع $t=\frac{-2}{\alpha}$ و $m=\frac{3}{\beta}$ في الجملة (S_1) نحصل بالضبط على الجملة (S_2) (تأكد من ذلك).

حل الجملة (S_2) يؤول إلى حل الجملة: $t=1$ و $m=3$ أي:

يكافئ $\begin{cases}\frac{-2}{\alpha}=1\\ \frac{3}{\beta}=3\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=1\end{cases}$

ن الجملة (S_2) تقبل حلا وحيدا هو الثنائية $(\alpha;\beta)=(-2;1)$.

) تكون الجملة (S_3) معرفة إذا كان $x\neq 0$ و $y\neq 0$.

ضع: $t=\frac{1}{x^2}$ و $m=\frac{12}{y^2}$ في الجملة (S_1) فحصل بالضبط على الجملة (S_3) إذن

ل الجملة (S_3) يؤول إلى حل الجملة $t=1$ و $m=3$ أي:

يكافئ $\begin{cases}\frac{1}{x^2}=1\\ \frac{12}{y^2}=3\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x^{2}=1\\ y^{2}=4\end{cases}$ يكافئ $\begin{matrix}x=1\\ y=2\end{matrix}$ أو $\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$

ذن الجملة (S_3) تقبل أربع حلول هي الثنائيات: $(1;2),(1;-2),(-1;2),(-1;-2)$.

حل الاختيار (7)

حل التمرين الأول:

1) تكون الدالة f حيث $f(x)=(x-1)\sqrt{1-x}$ معرفة إذا كان $1-x\geq 0$ أي $x\leq 1$

و منه f معرفة على $]-\infty;1]$.

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;1[$.

$$f'(x)=\sqrt{1-x}+\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}(x-1)=\frac{2(\sqrt{1-x})^2-(x-1)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x)=\frac{2-2x-x+1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{3(1-x)}{2\sqrt{1-x}}$$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$.

بما أن $x<1$ فإن $1-x>0$ و منه $f'(x)>0$ أي f متزايدة على المجال $]-\infty;1[$.

3) نعلم أن معامل توجيه المماس في A هو $f'(a)$ حيث a فاصلة A.

$f'(a)=\frac{3}{2}$ يكافئ $\frac{3(1-a)}{2\sqrt{1-a}}=\frac{3}{2}$ يكافئ $\sqrt{1-a}=1-a$ يكافئ

$(\sqrt{1-a})^2=(1-a)^2$ أي $1-a=1-2a+a^2$ أي $a^2-a=0$ ومنه $a=0$ أو

($a=1$ مرفوض لأن $a<1$) و منه $a=0$. $f(0)=1$ و منه $A(0;-1)$.

حل التمرين الثاني:

الدالة h حيث $h(x)=\frac{2}{x}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على R^* و $h'(x)=\frac{-2}{x^2}$ لدينا

$A\left(a;\frac{2}{a}\right)$ و $f'(a)=\frac{-2}{a^2}$

1) إيجاد معادلة المماس (d_a) للمنحنى (C) في A:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=-\frac{2}{a^2}(x-a)+\frac{2}{a}=-\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a}$$

و منه معادلة (d_a) هي: $y=-\frac{2}{a^2}x+\frac{4}{a}$

2) إيجاد إحداثيي النقطة A يؤول إلى حساب a.

$f'(a)=-\frac{1}{2}$ يكافئ $-\frac{2}{a^2}=-\frac{1}{2}$ يكافئ $a^2=4$ أي $a=2$ أو $a=-2$. و منه

$f(2)=1$ ، $f(-2)=-1$. إذن توجد نقطتان $A_1(2;1)$ و $A_2(-2;-1)$ يكون عندهما

معامل توجيه المماس هو $-\frac{1}{2}$.

3) $M(-4;4)$ تنتمي إلى (d_a) يكافئ $-\frac{2}{a^2}(-4)+\frac{4}{a}=4$ يكافئ $(*)\ldots a^2-a-2=0$

يكافئ $(a+1)(a-2)=0$ يكافئ $a=2$ أو $a=-1$ و لدينا $f(2)=1$ ، $f(-1)=-2$

بما أن المعادلة (*) قبلت حلين متمايزين فإنه يوجد مماسين للمنحنى (C) في النقطتين

$F(-1;-2)$ ، $E(2;1)$ كل منهما يشمل النقطة M.

معادلة المماس (Δ) في النقطة E هي: $y=-\frac{2}{4}x+\frac{4}{2}=-\frac{1}{2}x+2$

معادلة المماس (Δ') في النقطة F هي: $y=-\frac{2}{1}x+\frac{4}{-1}=-2x-4$.

حل التمرين الثالث:

$$(1-\sqrt{2})x^2-2(1+\sqrt{2})x+1+3\sqrt{2}=0$$

$$\Delta=\left[-2(1+\sqrt{2})\right]^2-4(1-\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})$$

$$\Delta=4(3+2\sqrt{2})-4(-5+2\sqrt{2})=12+8\sqrt{2}+20-8\sqrt{2}=32$$

لاحظ أن: $\sqrt{\Delta}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(1+\sqrt{2})-4\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}}=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(1+\sqrt{2})+4\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})}=\frac{1+3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$x_2=\frac{1+4\sqrt{2}+6}{1-2}=-7-4\sqrt{2}$$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{-7-4\sqrt{2};1\}$

2) $(x^2-x+1)^2>(2x^2+3x)^2$ يكافئ $(x^2-x+1)^2-(2x^2+3x)^2>0$

يكافئ $\left[(x^2-x+1)+(2x^2+3x)\right]\left[(x^2-x+1)-(2x^2+3x)\right]>0$

يكافئ $(3x^2+2x+1)(-x^2-4x+1)>0$.

مميز المعادلة $-x^2-4x+1=0$ هو $\Delta=20$ و حلاها هما $-2+\sqrt{5}$ و $-2-\sqrt{5}$

ومميز المعادلة $3x^2+2x+1=0$ هو $\Delta=-8$ (لا تقبل حلولا).

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$3x^2+2x+1$		+		+		+	
$-x^2-4x+1$		−	0	+	0	−	
$(3x^2+2x+1)(-x^2-4x+1)$		−	0	+	0	−	

ينتج من الجدول أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S=\left]-2-\sqrt{5};-2+\sqrt{5}\right[$

حل التمرين الرابع:

1) ينتج من الجدول أن الدالة u تقبل قيمة حدية صغرى هي $u(3)=2$

2) * المساواة $f=-\frac{1}{2}u$ تعني أن الدالتين u و f متعاكستين في إتجاه التغير

ولدينا $f(-5)=-\frac{1}{2}u(-5)=-\frac{9}{2}$ ، $f(3)=-\frac{1}{2}u(3)=-1$ ، $f(8)=-\frac{1}{2}u(8)=-2$

* المساواة $g=3f-10$ تعني أن الدالتين f و g لهما نفس إتجاه التغير

ولدينا $g(-5)=3f(-5)-10=-18,5$ ، $g(3)=3f(3)-10=-13$ ،

$g(8)=3f(8)-10=-16$.

* من خلال الجدول ينتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-5;8]$

فإن $u(x)>0$.

المساواة $h=\sqrt{u}$ تعني أن الدالتين u و h لهما نفس إتجاه التغير.

ويكون لدينا $h(-5)=\sqrt{u(-5)}=\sqrt{9}=3$ ، $h(3)=\sqrt{u(3)}=\sqrt{2}$ ،

$h(8)=\sqrt{u(8)}=\sqrt{4}=2$

x	-5		3		8
$u'(x)$		−	0	+	
u	9	↘	2	↗	4
f	$-4,5$	↗	-1	↘	-2
g	$-18,5$	↗	-13	↘	-16
h	3	↘	$\sqrt{2}$	↗	2

حل الاختبـــار (8)

حل التمرين الأول:

1) مجموعة تعريف الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{6x^2-11x-1}{2x-3}$ هي: $E=\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

2) **إيجاد الأعداد الحقيقية** α ، β ، $\wp$:

$$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\wp}{2x-3}=\frac{(\alpha x+\beta)(2x-3)+\wp}{2x-3}=\frac{2\alpha x^2-3\alpha x+2\beta x-3\beta+\wp}{2x-3}$$

$$=\frac{2\alpha x^2+(2\beta-3\alpha)x-3\beta+\wp}{2x-3}$$

•

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases}2\alpha=6\\2\beta-3\alpha=-11\\-3\beta+\wp=-1\end{cases}\text{ يكافئ }\begin{cases}\alpha=3\\\beta=-1\\\wp=-4\end{cases}\quad\text{و منه } f(x)=3x-1-\frac{4}{2x-3}$$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على E: $f'(x)=3+\dfrac{2}{(2x-3)^2}=\dfrac{3(2x-3)^2+2}{(2x-3)^2}$

بما أن $3(2x-3)^2\geq 0$ و $2>0$ فإن $3(2x-3)^2+2>0$

أي $f'(x)>0$ و منه الدالة متزايدة على كل من المجالين $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ و $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

حل التمرين الثاني:

• نحل المتراجحة $-2x^2+9x-4\geq 0$.

مميز المعادلة $-2x^2+9x-4=0$ هو $\Delta=49$ وحلاها هما 4 و $\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$-2x^2+9x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ينتج من الجدول أن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_1=\left[\dfrac{1}{2};4\right]$

• نحل المتراجحة $\dfrac{3+x}{4-2x}\geq 0$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$4-2x$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$\dfrac{3+x}{4-2x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

ينتج من الجدول أن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S_2=[-3;2[$

إذن مجموعة حلول الجملة هي:

$$S=S_1\cap S_2=\left[\frac{1}{2};4\right]\cap[-3;2[=\left[\frac{1}{2};2\right[$$

حل التمرين الثالث:

نرمز بـ x و y إلى العددين المطلوب حسابهما.

1) إذا كان x أكبر من y فإن إيجاد العددين x و y يؤول إلى حل الجملة.

$$\begin{cases}x+y=58.....(1)\\xy+x=814....(2)\end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد : $y=58-x$. بالتعويض في المعادلة (2) نجد :

$x(58-x)+x=814$ يكافئ $-x^2+59x-814=0$

مميز هذه المعادلة هو $\Delta=225$ و حلاها هما 37 و 22

• إذا كان $x=37$ فإن $y=58-37=21$

• إذا كان $x=22$ فإن $y=58-22=36$

الثنائية (36; 22) مرفوضة لأن $x<y$.

الثنائية المطلوبة في هذه الحالة هي $(x;y)=(37;21)$

إذا كان y أكبر من x فإن إيجاد العددين x و y يؤول إلى حل الجملة.

$\begin{cases} x+y=58 \ldots\ldots(3) \\ xy+y=814 \ldots\ldots(4) \end{cases}$

من المعادلة (3) نجد : $y=58-x$ بالتعويض في المعادلة (4) نجد :

$x(58-x)+58-x=814$ تكافئ $-x^2+57x-756=0$

مميز هذه المعادلة هو $\Delta=225$ و حلاها هما 36 و 21.

- إذا كان $x=36$ فإن $y=58-36=22$
- إذا كان $x=21$ فإن $y=58-21=37$

نلاحظ أن الثنائية (22; 36) مرفوضة لأن $x<y$. إذن الثنائية المطلوبة في هذه الحالة هي $(x;y)=(21;37)$. وعليه فإنه توجد ثنائيتين تحققان المطلوب هما (21; 37)، (37 ;21).

حل التمرين الرابع:

1) $f(x)=0$ تكافئ $-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}=0$ تكافئ $-x^2-4x+5=0$ تكافئ $(x-1)(-x-5)=0$ تكافئ $x-1=0$ أو $-x-5=0$ أي $x=1$ أو $x=-5$.

إذن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين $A(1;0)$ و $B(-5;0)$.

2) بما أن f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية فإن تمثيلها البياني (C) هو قطع مكافئ رأسه $S\left(-\frac{b}{2a};f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ أي $S(-2;4,5)$.

بما أن المعامل a سالب (أي $a=-\frac{1}{2}$) فإن الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة على المجال $[-2;+\infty[$. و الدالة f تقبل قيمة عظمى هي $f(-2)=4,5$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↗	$4,5$	↘	

3) إحداثيا نقط تقاطع المستقيم (Δ) و المنحنى (C) هي حلول الجملة:

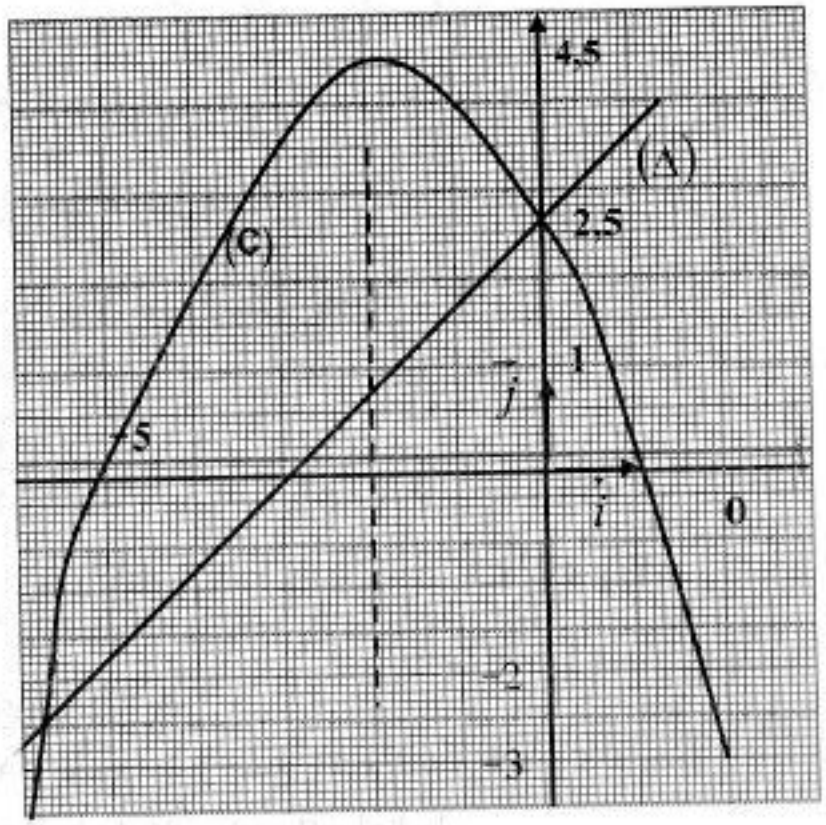
$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2} \\ y=x+\frac{5}{2} \end{cases}$

$x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$ يكافئ $2x+5=-x^2-4x+5$ يكافئ $x^2+6x=0$

يكافئ $x(x+6)=0$ أي $x=0$ أو $x=-6$. و منه $f(0)=\frac{5}{2}$ ، $f(-6)=-3,5$.

إذن المستقيم (Δ) يقطع (C) في نقطتين هما $A'\left(0;\frac{5}{2}\right)$ ، $B'(-6;-3,5)$.

4) بما أن التمثيل البياني (C) هو قطع مكافئ فإنه يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{b}{2a}$ أي $x=-\frac{-2}{-1}=-2$.



حل الاختبار (9)

حل التمرين الأول:

الدالة f حيث $f(x)=(3-x)\cos(3-x)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على R. (لاحظ
f هي جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على R).

$f'(x)=(-1)\cos(3-x)+(-1)[-\sin(3-x)](3-x)=-\cos(3-x)+(3-x)\sin(3-$

تكون الدالة g حيث $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ معرفة إذا كان $4-x^2\geq 0$ أي
$x\in[-2$. إذن مجموعة تعريف g هي $E[-2;2]$.

ة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-2;2[$.

$$g'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

تكون الدالة h حيث $h(x)=x^2\left(\sqrt{2x+5}\right)^{-1}=\frac{x^2}{\sqrt{2x+5}}$ إذا كان $2x+5>0$ أي
$x>-$. إذن مجموعة تعريف الدالة h هي $\left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$.

الة h قابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$.

$$h'(x)=\frac{2x\sqrt{2x+5}-\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}x^2}{\left(\sqrt{2x+5}\right)^2}=\frac{4x\left(\sqrt{2x+5}\right)^2-2x}{2(2x+5)\sqrt{2x+5}}$$

$$h'(x)=\frac{4x(2x+5)-2x^2}{2(2x+5)\sqrt{2x+5}}=\frac{3x^2+10x}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$$

حل التمرين الثاني:

ينا $x+y=1$ أي $y=1-x$ مع $0\leq x\leq 1$ و $0\leq y\leq 1$

) الجداء xy أعظميا يكافئ $x(1-x)$ أعظميا.

نضع $f(x)=x(1-x)=x-x^2$. البحث عن قيم x التي تجعل xy أعظميا يؤول إلى البحث عن القيمة العظمى للدالة f.

إذن ندرس اتجاه تغير f على المجال $[0;1]$.

$f'(x)=1-2x$. $f'(x)=0$ يكافئ $1-2x=0$ يكافئ $x=\frac{1}{2}$. $f'(x)>0$ يكافئ $0<x<\frac{1}{2}$، $f'(x)<0$ يكافئ $\frac{1}{2}<x<1$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

ينتج من الجدول أن f يقبل قيمة عظمى من أجل $x=\frac{1}{2}$ و تكون $y=\frac{1}{2}$. إذن يكون الجداء xy أعظميا إذا كان $x=y=\frac{1}{2}$.

2) الجداء x^ny أعظميا يكافئ $x^n(1-x)$ أعظميا.

نضع $f(x)=x^n(1-x)=x^n-x^{n+1}$. ندرس اتجاه تغير الدالة f للبحث عن القيمة العظمى للدالة f.

$f'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=-x^{n-1}((n+1)x-n)$. $f'(x)=0$ يكافئ
$-x^{n-1}((x+1)x-n)$ يكافئ $x=0$ أو $(x+1)x-n=0$ أي $x=0$ أو $x=\frac{n}{n+1}$.

إن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-[(x+1)x-n]$.

$f'(x)>0$ يكافئ $0<x<\frac{n}{n+1}$، $f'(x)<0$ يكافئ $\frac{n}{n+1}<x<1$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{n}{n+1}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
f	0	↗	$f\left(\frac{n}{n+1}\right)$	↘

نتج من جدول تغيرات أن الدالة f تقبل قيمة عظمى من أجل $x=\frac{n}{n+1}$.

منه $y=1-x=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$. إذن يكون الجداء $x^n y$ أعظميا إذا كان $x=\frac{n}{n+1}$ و $y=\frac{1}{n+1}$.

حل التمرين الثالث:

1) الدالة f حيث $f(x)=\frac{-3x+1}{2-x}$ معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$. $E=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

2) حساب نهايات الدالة f .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{-3x}{-x}=3$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty\left(\frac{-5}{0^+}\right)$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{-x}=3$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty\left(\frac{-5}{0^-}\right)$

x	0		2		1
$2-x$		$+$	0	$-$	

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على E.

$f'(x)=\frac{-3(2-x)+(-3x+1)}{(2-x)^2}=\frac{-5}{(2-x)^2}$. و منه $f'(x)<0$ أي f متناقصة على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	3	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	3

4) من النهايات ينتج أن:

$x=2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) موازي لمحور التراتيب.

$y=3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C)موازي لمحور الفواصل.

حل التمرين الرابع:

لدينا: $(m+2)x^2-2(m+1)x+m-1=0$

1) تكون المعادلة (*) تقبل حلا وحيدا إذا كانت المعادلة من الدرجة الأولى أي $m+2=0$ و $m+1\neq 0$ و منه $m=-2$.

إذن تصبح المعادلة (*) على الشكل: $0=-2-1-2(-2+1)x$. أي $2x-3=0$ و منه $x=\frac{3}{2}$.

2) نناقش حلول المعادلة (*) حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

✓ **الحالة الأولى:** إذا كان $m+2=0$ أي $m=-2$ فإن المعادلة (*) تقبل حلا وحيدا هو $x=\frac{3}{2}$.

✓ **الحالة الثانية:** إذا كان $m+2\neq 0$ أي $m\neq -2$ فإن المعادلة (*) من الدرجة الثانية مميزها Δ .

$\Delta=b^2-4ac=[-2(m+1)]^2-4(m+2)(m-1)$

$\Delta=4(m^2+2m+1)-4(m^2+m-2)=4m^2+8m+4-4m^2-4m+8=4m+12$

$\Delta=0$ يكافئ $4m+12=0$ يكافئ $m=-3$.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$4m+12$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

) إذا كان $m \in]-\infty;-3[$ فإن $\Delta < 0$. و منه المعادلة (*) لا تقبل حلولا.

ب) إذا كان $m \in]-3;-2[\cup]-2;+\infty[$ فإن $\Delta > 0$. و منه المعادلة (*) تقبل حلين

تمايزين x_1 و x_2 هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(m+1)-\sqrt{4m+12}}{2(m+2)} = \frac{m+1-\sqrt{m+3}}{m+2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(m+1)+\sqrt{4m+12}}{2(m+2)} = \frac{m+1+\sqrt{m+3}}{m+2}$$

ج) إذا كان $m=-3$ فإن $\Delta = 0$. و منه المعادلة (*) تقبل حلا مضاعفا هو:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2(m+1)}{2(m+2)} = \frac{m+1}{m+1} = \frac{-3+1}{-3+2} = 2$$

3) نعلم أن مجموع الحلين هو: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+1)}{m+2}$

و جداء الحلين هو $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{m+2}$

$$x_1 + x_2 = \frac{2m+2}{m+2} = \frac{2(m+2)-2}{m+2} = \frac{2(m+2)}{m+2} - \frac{2}{m+2} = 2 - \frac{2}{m+2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{m-1}{m+2} = \frac{m+2-3}{m+2} = \frac{m+2}{m+2} - \frac{3}{m+2} = 1 - \frac{3}{m+2}$$

$$\begin{cases} 3(x_1+x_2) = 6 - \frac{6}{m+2} \ldots(1) \\ -2x_1x_2 = -2 + \frac{6}{m+2} \ldots.(2) \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - \frac{2}{m+2} \\ x_1 x_2 = 1 - \frac{3}{m+2} \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد: $3(x_1+x_2) - 2x_1x_2 = 4$ و هي العلاقة x_1 و x_2

حل الاختبار (10)

حل التمرين الأول:

1) مميز المعادلة $2t^2 - 11t + 12 = 0$ هو $\Delta = 25$ و حلاها هما $t_1 = \frac{3}{2}$ و $t_2 = 4$.

2) تكون المعادلة ذات المجهول m : $2m - 11\sqrt{m} + 12 = 0$ معرفة إذا كان $m \geq 0$.

بوضع $t = \sqrt{m}$ في المعادلة $2m - 11\sqrt{m} + 12 = 0$ نجد:

$t^2 - 11m + 12 = 0$ و هي بالضبط المعادلة (1).

- $t_1 = \sqrt{m_1}$ يكافئ $\frac{3}{2} = \sqrt{m_1}$ يكافئ $m_1 = \frac{9}{4}$.
- $t_2 = \sqrt{m_2}$ يكافئ $4 = \sqrt{m_2}$ يكافئ $m_2 = 16$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (2) هي $\left\{16;\frac{9}{4}\right\}$.

3) بوضع $t = 4x^2$ في المعادلة $2t^2 - 11t + 12 = 0$ نجد:

$2(4x^2) - 11(4x^2) + 12 = 0$ أي $32x^4 - 44x^4 + 12 = 0$ و هي بالضبط المعادلة (3)

- $t_1 = 4x^2$ يكافئ $\frac{3}{2} = 4x^2$ يكافئ $x^2 = \frac{3}{8}$ أي $x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ أو $x = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
- $t_2 = 4x^2$ يكافئ $4 = 4x^2$ يكافئ $x^2 = 1$ أي $x = 1$ أو $x = -1$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (3) هي $\left\{-1,1,-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right\}$.

حل التمرين الثاني:

لدينا $A(3;0)$ ، $B(-2;0)$ ، $M(x;1)$

1) نحسب أولا MA^2 و MB^2 :

$$MA^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = (3-x)^2 + (0-1)^2 = (3-x)^2 + 1$$

$$MB^2 = (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 = (-2-x)^2 + (0-1)^2 = (-2-x)^2 + 1$$

$$f(x) = MA^2 + 2MB^2 = (3-x)^2 + 1 + 2(-2-x)^2 + 2$$

$$f(x) = 9 - 6x + x^2 + 1 + 8 + 8x + 2x^2 + 2 = 3x^2 + 2x + 20$$

و منه $f(x) = 3x^2 + 2x + 20$.

إيجاد وضعية النقطة M يؤول إلى تعيين قيم x بحيث يكون $f(x)$ أصغريا أي البحث من القيم الحدية للدالة f.

✓ **الطريقة الأولى:** باستعمال اتجاه التغير.

ن f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية و المعامل a موجب $(3>0)$ فإن الدالة
تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x=-\frac{b}{2a}$ و هي $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ و منه

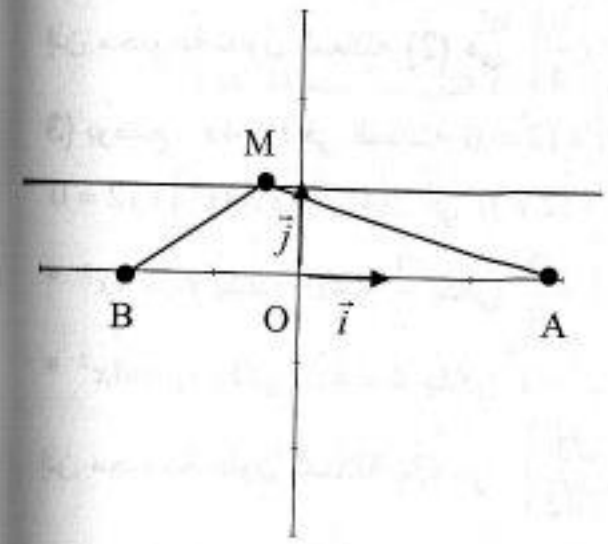
$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{6}=$ إذن $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{59}{3}$ و منه $M\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

✓ **الطريقة الثانية:** باستعمال الشكل النموذجي:

$$f(x)=3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{20}{3}\right)$$

$$f(x)=3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right.$$

$$f(x)=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{59}{3}$$



حظ أن $f(x)$ هو مجموع حدين موجبين $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ و $\frac{59}{3}$. يكون هذا المجموع
غريا إذا كان $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=0$ أي $x+\frac{1}{3}=0$ و منه $x=-\frac{1}{3}$ و منه $M\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

حل التمرين الثالث:

) الدالة f حيث $f(x)=-2x+1+\frac{2}{4-x}$ معرفة على $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ $E=$.

) حساب نهايات الدالة f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}4} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\xrightarrow{>}4} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	0^+	0^-	$-$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على E:

$$f'(x)=-2+\frac{2}{(4-x)^2}=\frac{2\left[1-(4-x)^2\right]}{(4-x)^2}=\frac{2[1-(4-x)][1+(4-x)]}{(4-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-3)(-x+5)}{(4-x)^2}$$

إن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-3)(-x+5)$.

$f'(x)=0$ تكافئ $(x-3)(-x+5)=0$ تكافئ $x=3$ أو $x=5$.

$f'(x)>0$ يكافئ $x\in]3;4[\cup]4,5[$.

$f'(x)<0$ يكافئ $x\in]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	3	4	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0 $-$
f	$+\infty$ ↘	-3 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	11 ↘ $-\infty$

4) من النهايات ينتج أن:

$x=4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) موازي لمحور التراتيب.

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-2x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x+1+\frac{2}{4-x}+2x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4-x}=0$$

فإن المستقيم ذي المعادلة $y=-2x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C).

حل التمرين الرابع:

1) إيجاد حصر للعدد $f(x)$ حيث $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x ينتمي إلى المجال $[0;\pi]$:

$0\le \sin x\le 1...(1)$ ، $0\le \sin^2 x\le 1...(2)$

نضرب أطراف المتباينة (1) في العدد 2− نجد: $-2\le -2\sin x\le 0...(3)$

بجمع المتباينتين (2) و (3) نجد: $-2\le \sin^2 x-2\sin x\le 1$ و منه $-2\le f(x)\le 1$.

2) ندرس اتجاه تغير الدالة f : f قابلة للاشتقاق على $]0;\pi[$.

$f'(x)=2\sin x\cos x-2\cos x=2\cos x(\sin x-1)$.

$f'(x)=0$ تكافئ $2\cos x(\sin x-1)=0$ تكافئ $\cos x=0$ أو $\sin x-1=0$ يكافئ

$x=\frac{\pi}{2}$ أو $x=\frac{\pi}{2}$ أي $x=\frac{\pi}{2}$.

$f'(x)>0$ يكافئ $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

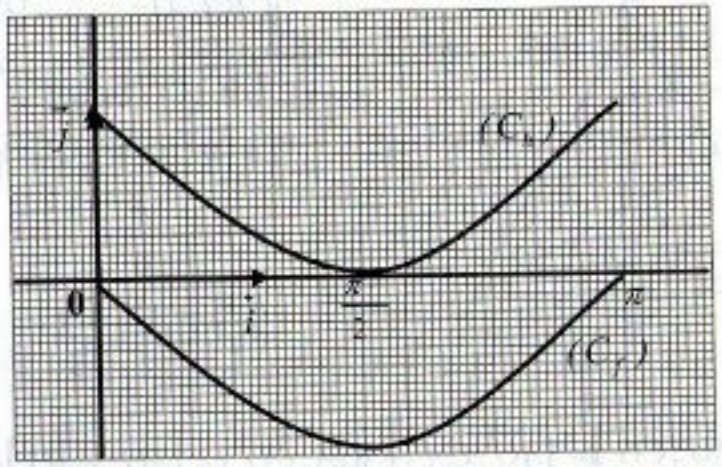
$f'(x)<0$ يكافئ $0<x<\frac{\pi}{2}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$2\cos x$		+	0	−	
$\sin x-1$		−	0	−	
$f'(x)$		−	0	+	
f	0	↘	-1	↗	0

إنشاء المنحنى(C):

3) المساواة $h(x)=f(x)+1$ تعني المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0;1)$



حل الاختبار (11)

حل التمرين الأول:

لدينا $U_0=1$ ، $U_1=3$. $U_{n+2}=U_{n+1}-U_n$

1) حساب الحدود التسعة الأولى:

$U_2=U_1-U_0=3-1=2$ ، $U_3=U_2-U_1=2-3=-1$ ، $U_4=U_3-U_2=-3$

$U_5=U_4-U_3=-2$ ، $U_6=U_5-U_4=1$ ، $U_7=U_6-U_5=3$ ،

$U_8=U_7-U_6=2$.

2) $U_{n+3}=U_{n+2}-U_{n+1}=+U_{n+1}-U_n-U_{n+1}=-U_n$ ومنه $U_{n+3}=-U_n$. من هذه المساواة ينتج: $U_{n+6}=-U_{n+3}=-(-U_n)=U_n$ (بدل n نضع n+3)

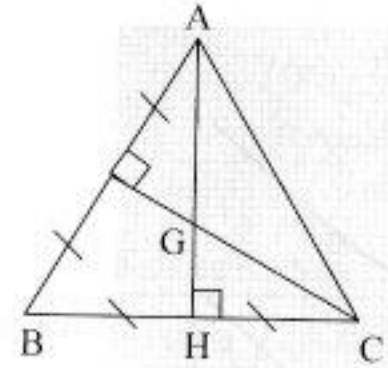
و منه $U_{n+6}=U_n$. هذه المساواة تعني أن المتتالية U دورية و دورها 6.

3) نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن $U_{6k+a}=U_a$ حيث a عدد طبيعي.

نلاحظ أن $2007=6(334)+3$. إذن $U_{2007}=U_{6(334)+3}=U_3=-1$

حل التمرين الثاني:

نعلم أن القيس الرئيسي لزاوية هو عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$



$\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{3}$ ، $\left(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HC}\right)=-\frac{\pi}{2}$

$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CG}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CG}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AC};-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CG}\right)$

$=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$

$\left(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GC}\right)=\frac{2\pi}{3}$

$\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{CG}\right)=\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{CG}\right)=\left(\overrightarrow{AG};-\overrightarrow{AG}\right)+\left(\overrightarrow{GA};-\overrightarrow{GC}\right)$

$=\pi+\pi-\frac{2\pi}{3}=2\pi-\frac{2\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$

حل التمرين الثالث:

لدينا $\|\vec{u}\|=2$ ، $\|\vec{v}\|=3$ ، $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$

1) $(m\vec{u}-\vec{v})\cdot(m\vec{u}+\vec{v})=27$ يكافئ $(m\vec{u})^2-\vec{v}^2=27$

يكافئ $m^2\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=27$ يكافئ $4m^2-3^2=27$

يكافئ $4m^2-36=0$ يكافئ $4(m-3)(m+3)=0$ و منه $m=3$ أو $m=-3$

إذن مجموعة قيم m هي $\{-3;3\}$.

2) $(m\vec{u}-\vec{v})^2=9$ يكافئ $m^2\vec{u}^2-2m\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=9$

يكافئ $4m^2-2m(-4)+3^2=9$ يكافئ $4m^2+8m=0$

يكافئ $4m(m+2)=0$ و منه $m=0$ أو $m=-2$.

إذن مجموعة قيم m هي $\{-2;0\}$

حل التمرين الرابع:

1) مجموعة تعريف الدالة f حيث $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{1-2x}$ هي:

$E=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};-\infty\right[$

2) إيجاد الأعداد α ، β ، $\wp$:

$$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\wp}{2x-1}=\frac{(\alpha x+\beta)(2x-1)+\wp}{2x-1}=\frac{2\alpha x^2-\alpha x+2\beta x-\beta+\wp}{2x-1}$$

$$=\frac{2\alpha x^2+(2\beta-\alpha)x-\beta+\wp}{2x-1}=\frac{-2\alpha x^2+(\alpha-2\beta)+\beta-\wp}{1-2x}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد :

$$\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \beta=-\frac{7}{4}\\ \wp=\frac{13}{4}\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}-2\alpha=1\\ \alpha-2\beta=3\\ \beta-\wp=-5\end{cases}$$

و منه $f(x=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}+\frac{13}{4(2x-1)}$

3) إثبات أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ): بما أنّ

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}+\frac{13}{4(2x-1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{13}{4(2x-1)}=0$$

و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{13}{4(2x-1)}=0$

فإن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$ هو مقارب مائل للمنحنى (C).

لدراسة وضعية (Δ) بالنسبة إلى (C) ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)=\frac{13}{4(2x-1)}$$

بما أن $13\neq0$ فإن (Δ) لا يقطع (C).

إن إشارة الفرق $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)$ هي من إشارة $2x-1$.

* $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)>0$ يكافئ $x>\frac{1}{2}$. أي (C) يقع فوق (Δ).
* $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)<0$ يكافئ $x<\frac{1}{2}$. أي (C) يقع تحت (Δ).

حل الاختبار (12)

حل التمرين الأول:

1) إيجاد مجموعة تعريف الدالة f حيث $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$.

مميز المعادلة $x^2-2x-3=0$ هو $\Delta=16$ و حلاها هما -1 و 3.

إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $E=]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

2) حساب نهايات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	$0+$	$0-$	$0-$	$0+$	$+$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=+\infty$.

3) f قابلة للاشتقاق على E.

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-2)[x^2-2x-3-x^2+2x+15]}{(x^2-2x-3)^2}=\frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

* $f'(x)=0$ يكافئ $24(x-1)=0$ يكافئ $x=1$

* $f'(x)>0$ يكافئ $24(x-1)>0$ يكافئ $x>1$
* $f'(x)<0$ يكافئ $24(x-1)<0$ يكافئ $x<1$

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
f	1	↘	$\|+\infty$	↘	4	↗	$+\infty\|$	↗	1
		$-\infty$					$-\infty$		

4) ينتج من النهايات أن:

* $x=-1$ و $x=3$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C) موازيان لحامل محور التراتيب.
* $y=1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) موازي لحامل محور الفواصل.

5) إيجاد الأعداد الحقيقية $\alpha,\beta,\wp$:

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\wp}{x-3}=\frac{\alpha(x+1)(x-3)+\beta(x-3)+\wp(x-1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$f(x)=\frac{\alpha x^2-2\alpha x-3\alpha+\beta x-3\beta+\wp x+\wp}{x^2-2x-3}=\frac{\alpha x^2+(\beta-2\alpha+\wp)x-3\alpha-3\beta+\wp}{x^2-2x-3}$$

بالمطابقة مع العبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=3\\ \wp=-3\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta+\wp=0\\ -3\beta+\wp=-12\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta-2\alpha+\wp=-2\\ -3\alpha-3\beta+\wp=-15\end{cases}$$

و منه $f(x)=1+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-3}$

حل التمرين الثاني:

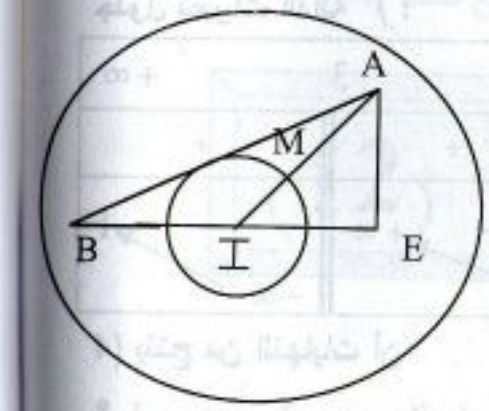
لدينا $IB=IE$ و $IA=R$، نعلم أن نقطة تلاقي المتوسطات في مثلث هي مركز ثقله.

✓ **المرحلة الأولى:** لتكن M مركز ثقل المثلث ABE.

بما أن I منتصف $[BE]$ فإن $[IA]$ هو المتوسط المتعلق بالضلع $[BE]$ أي $IM=\frac{1}{3}IA$

و منه $IM=\frac{R}{3}$. إذن النقطة M تنتمي إلى الدائرة(Γ) ذات المركز I ونصف القطر $\frac{R}{3}$.

✓ **المرحلة الثانية:** (العكس)



لتكن نقطة M نقطة من (Γ).

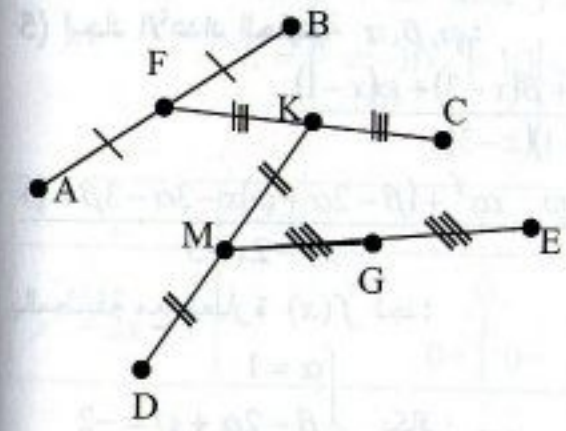
نصف المستقيم $[IM]$ يقطع الدائرة (C) في النقطة A.

و لدينا $IM=\frac{R}{3}$ أي $IM=\frac{IA}{3}$. (لاحظ أن AI متوسط).

ومنه M مركز ثقل المثلث ABE وعليه فإن مجموعة النقط M

مراكز ثقل المثلث ABE هي الدائرة (Γ).

حل التمرين الثالث:



لتكن F مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1)\}$

و K مرجح الجملة $\{(F;2),(C;2)\}$

و M مرجح الجملة $\{(K;4),(D;4)\}$

و T مرجح الجملة $\{(M;8),(E;8)\}$

حيث T,M,K,F منتصفات القطع

$[AB],[FC],[KD],[ME]$ على الترتيب.

G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;2),(D;4),(E;8)\}$ يعني G مرجح الجملة $\{(F;2),(C;2),(D;4),(E;8)\}$ يعني G مرجح الجملة $\{(K;4),(D;4),(E;8)\}$ يعني G مرجح الجملة $\{(M;8),(E;8)\}$ و منه G منتصف $[ME]$.

حل التمرين الرابع:

1) $0,001x^2-2x+10=0$ يكافئ $x^2-2000x+10000=0$ مميز هذه المعادلة هو $\Delta=4\times10^6-4\times10^4=4\times10^4\left(10^2-1\right)=\left(6\times10^2\right)^2\times11$ و حلاها هما:

$$x_1=\frac{2\times10^3-6\times10^2\sqrt{11}}{2}=10^2\left(10-3\sqrt{11}\right)$$

$$x_2=\frac{2\times10^3+6\times10^2\sqrt{11}}{2}=10^2\left(10+3\sqrt{11}\right)$$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $\left\{10^2\left(10+3\sqrt{11}\right);10^2\left(10-3\sqrt{11}\right)\right\}$

2) مميز المعادلة $5x^2-\left(5\times3^2+5^4\right)x+3^2\times5^4=0$ هو:

$$\Delta=\left(5\times3^2+5^4\right)^2-4\times5\times3^2\times5^4=5^2\times3^4+2\times5\times3^2\times5^4+5^8-4\times5\times3^2\times5^4$$

$$\Delta=\left(5\times3^2\right)^2-2\left(5\times3^2\right)\left(5\right)^4+\left(5^4\right)^2=\left(5\times3^2-5^4\right)^2$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(5\times3^2-5^4\right)^2}=\left|5\times3^2-5^4\right|=5^4-5\times3^2$$

و حلاها هما:

$$x_1=\frac{5\times3^2+5^4-5^4+5\times3^2}{10}=\frac{2\times5\times3^2}{10}=9$$

$$x_2=\frac{5\times3^2+5^4+5^4-5\times3^2}{10}=\frac{2\times5^4}{10}=\frac{5^4}{5}=125$$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{125;9\}$.

3) $x^4=4x^2$ يكافئ $x^4-4x^2=0$ يكافئ $x^2\left(x^2-4\right)=0$ يكافئ $x^2(x+2)(x-2)=0$

و منه $x=0$ أو $x=2$ أو $x=-2$.

مجموعة حلول هذه المعادلة هي: $\{-2;2;0\}$.

حل الاختبار (13)

حل التمرين الأول:

1) دراسة إشارة $u(x)$ و $v(x)$ باستعمال جدول الإشارات:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$v(x)$	$+$	$-$	

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=3\overrightarrow{MG}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'D}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG'}+\left(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'D}\right)=3\overrightarrow{MG'}$$

* $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}\right\|$ يكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}\right\|$ أي $MG=MD$

ومنه مجموعة النقط M التي تحقق المساواة (1) هي محور القطعة $[GD]$.

* $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{3MA}\right\|$ يكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG'}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}\right\|$ أي $MG'=MA$

ومنه مجموعة النقط M التي تحقق المساواة (2) هي محور القطعة $[AG']$.

وعليه فإن مجموعة النقط M التي تحقق الجملة المقترحة هي K نقطة تقاطع محوري القطعتين $[GD]$ و $[AG']$.

حل التمرين الرابع:

1) الدالة f معرفة على المجموعة $E=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

2) مهما كان العد الحقيقي x من E فإن:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}=\frac{(x-1)^3}{x-1}=(x-1)^2$$

3) $f(x)=0$ يكافئ $(x-1)^2=0$ يكافئ $x-1=0$ أي $x=1$. و منه مجموعة حلول المعادلة هي $\{1\}$.

4) $f(x)\geq m^2$ يكافئ $(x-1)^2\geq m^2$ يكافئ $(x-1)^2-m^2\geq 0$ يكافئ $(x-1+m)(x-1-m)\geq 0$.

$x-1-m=0$ يكافئ $x=1+m$ ، $x-1+m=0$ يكافئ $x=1-m$.

* إذا كان $m\geq 0$ فإن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S=]-\infty;1-m]\cup[1+m;+\infty[$.
* إذا كان $m\leq 0$ فإن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S=]-\infty;1+m]\cup[1-m;+\infty[$.

حل الاختبار (14)

حل التمرين الأول:

الدالة f معرفة على المجموعة $E=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على E و دالتها المشتقة f'.

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+c)}{(x-1)^2}=\frac{2ax^2-2ax+bx-b-ax^2-bx-c}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{ax^2-2ax-b-c}{(x-1)^2}$$

* $A(2;3)$ تنتمي إلى (C) يكافئ $f(2)=3$ يكافئ $4a+2b+c=3$

* المماس في A يوازي محور الفواصل يكافئ $f'(2)=0$

يكافئ $4a-4a-b-c=0$ أي $b+c=0$ (2).

* (C) يقطع محور التراتيب في $B(0;1)$ يكافئ $f(0)=-1$ أي $c=1$.

بتعويض قيمة c في المعادلة (2) نجد: $b+1=0$ أي $b=-1$

بتعويض قيمتي b و c في المعادلة (1) نجد: $4a-2+1=3$ و منه $a=1$

إذن $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

حل التمرين الثاني:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $U_n=U_1+(n-1)r$

1) حساب U_1 و r يؤول إلى حل الجملة:

$$\begin{cases}U_2=6023\\U_6=14055\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}U_1+r=6023...(1)\\U_1+5r=140555...(2)\end{cases}$$

بطرح (1) من (2) نجد: $4r=8032$ و منه $r=\frac{8032}{4}=2008$

بتعويض قيمة r في المعادلة (1) نجد: $U_1 + 2008 = 6023$ فإن $U_1 = 6023 - 2008 = 4015$

عبارة الحد العام هي: $U_n = 4015 + (n-1)(2008) = 2007 + 2008n$

2) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:

$$\begin{aligned} U_n + U_{n+2} &= 2007 + 2008n + 2007 + 2008(n+2) \\ &= 2007 + 2008n + 2007 + 2008n + 2(2008) \\ &= 2(2007) + 2(2008n) + 2(2008) \\ &= 2(2007 + 2008n + 2008) = 2[2007 + 2008(n+1)] \\ &= 2U_{n+1} \end{aligned}$$

و منه $U_n + U_{n+2} = 2U_{n+1}$. U_{n+1} يسمى الوسيط الحسابي للعددين U_n و U_{n+2}.

3) نلاحظ أن S_n هو مجموع n حدا الأولى لمتتالية حسابية أساسها r و حدها الأول U_1.

$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) = \frac{n}{2}(4015 + 2007 + 2008n) = n(3011 + 1004n)$.

حل التمرين الثالث:

1) G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;3)\}$ معناه $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{O}$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + 3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG} + \left(\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}\right) = 6\overrightarrow{MG}$$

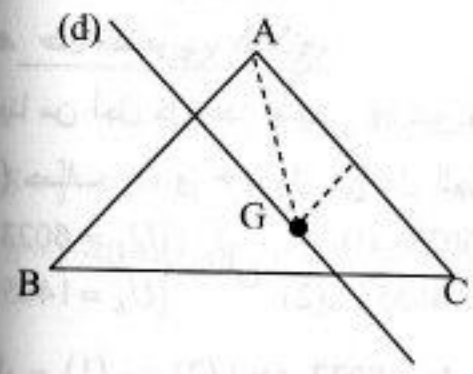
2) إنشاء النقطة G:

$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{O}$ يكافئ

- $\overrightarrow{GA} + 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + 3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{O}$

يكافئ $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{O}$ يكافئ

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



- الشعاعان $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ و $6\overrightarrow{MG}$ مرتبطان خطيا معناه $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا أي $\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا. و منه M تنتمي إلى المستقيم (d) الذي يشمل G و يوازي (AC).

3) $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 12\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = 12AB$ و منه $MG = 2AB$

إذن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق هذه المساواة هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 2AB.

حل التمرين الرابع:

لدينا $\cos\frac{3\pi}{8} = a$ ، $\sin\frac{3\pi}{8} = b$

1)

$$\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8} = b$$

$$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\frac{3\pi}{8} = -a$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\frac{3\pi}{8} = a$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8} = b$$

$$\sin\frac{11\pi}{8} = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\frac{3\pi}{8} = -b$$

$$\cos\frac{11\pi}{8} = \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\frac{3\pi}{8} = -a$$

$$\sin\frac{2007\pi}{8} = \sin\left(2(125)\pi + \frac{7\pi}{8}\right) = \sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \cos\frac{3\pi}{8} = a$$

$$\cos\frac{2007\pi}{8} = \cos\left(2(125)\pi + \frac{7\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8}$$

$$= -\sin\frac{3\pi}{8} - b$$

2) $a^2 + b^2 = \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} = 1$

حل الاختبار (15)

حل التمرين الأول:

مهما كان العددُ الطبيعي n غير معدوم: $v_n = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$

تاليتن ذات الحدين العامين $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n^2}$ متقاربين نحو0. إذن المتتالية v متقاربة

و 0.

لدينا مهما كان العدد الطبيعي n غير المعدوم: $-1 \le \cos n \le 1$...(1)

رب أطراف هذه المتباينة في العدد الموجب $\frac{n+1}{n^2}$ نجد:

$$-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \le u_n \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \text{ أي } \frac{n+1}{n^2} \le \frac{n+1}{n^2}\cos n \le \frac{n+}{n^2}$$

ا أن المتتاليتن ذات الحدين العاملين $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$ و $-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}$ متقاربين نحو نفس النهاية

فإن حسب نظرية الحصر المتتالية u ذات الحد العام u_n متقاربة نحو 0.

حل التمرين الثاني:

ينا $A(-2;0), B(-1;m), C(m;3), D(-m;-1)$.

) بما أنّ $-1+3-1+1 \neq 0$ فإن النقطة G موجودة و وحيدة.

رمز بـ $(x;y)$ إلى إحداثيي G.

$$x = \frac{-(-2)+3(-1)-1(m)+1(-m)}{2} = \frac{2-3-m-m}{2} = \frac{-1-2m}{2}$$

$$y = \frac{-(0)+3(m)-1(3)+1(-1)}{2} = \frac{3m-4}{2} \text{ و منه } G\left(\frac{-2m-1}{2};\frac{3m-4}{2}\right).$$

2) لإيجاد مجموعة النقط G عندما يسمح m المجموعة R نبحث عن علاقة بين x و

ر مستقلة عن m.

$$\begin{cases} x = \frac{-2m-1}{2} \\ y = \frac{3m-4}{2} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 2x = -2m-1 \\ 2y = 3m-4 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 6x = -6m-3....(1) \\ 4y = 6m-12...(2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد: $6x+4y=-15$ أي $6x+4y+15=0$ إذن مجموعة النقط G هي مستقيم معادلته $6x+4y+15=0$.

3) من أجل $m=-2$ فإنّ $G\left(\frac{2}{3};-5\right)$

حل التمرين الثالث:

1) لدينا $A\left(3;\frac{3\pi}{4}\right), B\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$

لإنشاء النقطة A نرسم نصف مستقيم $[OZ)$ بحيث يكون $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OZ}) = \frac{3\pi}{4}$ ثم نعين على هذا نصف المستقيم النقطة A بحيث $OA=3$.

و الإحداثيات الديكارتية للنقطة A هما:

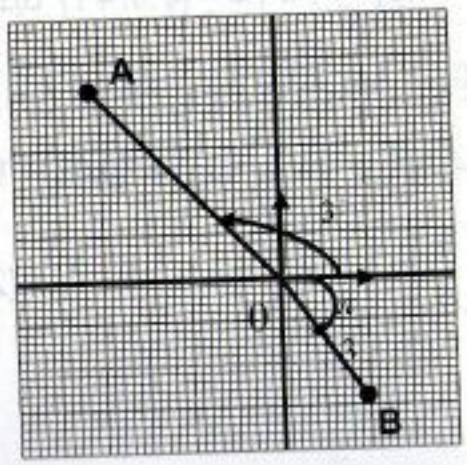
$x_A = 3\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$ و $y_A = 3\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ و منه $A\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2};\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.

لإنشاء النقطة B نرسم نصف مستقيم $[Ot)$ بحيث $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{Ot}) = -\frac{\pi}{3}$ ثم نعين على هذا نصف المستقيم النقطة B بحيث $OB=2$.

والإحداثيات الديكارتية للنقطة B هما:

$x_B = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1$ و

$y_B = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ و منه $B\left(1;-\sqrt{3}\right)$.



2) إيجاد الإحداثيان القطبيان لكل من النقطتين M و N.

بالنسبة إلى M: $r = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ \sin\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r}\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}\end{cases}$$

و منه $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$

إذن الإحداثيان القطبيان للنقطة M هما: $\left(5\sqrt{2};\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

بالنسبة إلى N: $r=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4$

$$\begin{cases}\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r}\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}\end{cases}\text{ و منه }\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$$

إذن الإحداثيان القطبيان للنقطة N هما $\left(4;\dfrac{5\pi}{6}\right)$

حل التمرين الرابع:

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على R و $f'(x)=\cos x$ ، $g'(x)=-\sin x$

1) $f'(a)\times h+f(a)=f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\times h+f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}h+\dfrac{1}{2}$

إذن الدالة التآلفية $h\mapsto\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}h+1\right)$ هي تقريب تآلفي للدالة f في جوار $\dfrac{\pi}{6}$.

ولدينا $f\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)\approx\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}h+1\right)$

بوضع في هذه المساواة التقريبية $h=0{,}02$ نجد:

$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+0{,}02\right)\approx\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}(0{,}02)+1\right)$ و منه $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+0{,}002\right)\approx 0{,}51$

2) $g'(a)\times h+g(a)=g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\times h+g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}h+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

إذن الدالة التآلفية $h\to\dfrac{1}{2}\left(-h+\sqrt{3}\right)$ هي تقريب تآلفي للدالة g في جوار $\dfrac{\pi}{6}$ و يكون لدينا $g\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)\approx\dfrac{1}{2}\left(-h+\sqrt{3}\right)$

بوضع في هذه المساواة التقريبية $h=-0{,}01$ نجد:

$\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-0{,}01\right)\approx\dfrac{1}{2}\left(0{,}01+\sqrt{3}\right)$ و منه $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-0{,}01\right)\approx 0{,}87$.

حل الاختبار (16)

التمرين الأول:

الدالة f معرفة على R^* و يمكن كتابتها على الشكل:

$$f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x+\wp}{x}=\frac{\alpha x^2}{x}+\frac{\beta x}{x}+\frac{\wp}{x}=\alpha x+\beta+\frac{\wp}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\alpha x+\beta)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\alpha x+\beta+\frac{\wp}{x}-\alpha x-\beta\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\wp}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\alpha x+\beta)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha x+\beta+\frac{\wp}{x}-\alpha x-\beta\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\wp}{x}=0$$

إذن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=\alpha x+\beta$

بما أن (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=3x+4$ هو مقارب مائل للمنحنى (C) فإن

$\alpha=3$ و $\beta=4$. و منه $f(x)=3x+4+\dfrac{\wp}{x}$.

A تنتمي إلى (C) يكافئ $f(1)=0$ أي $3+4+\wp=0$ و منه $\wp=-7$.

2) بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty$ فإن المستقيم ذي المعادلة $x=0$ هو مقارب للمنحنى (C) منطبق على (yy').

حل التمرين الثاني:

الدالة f حيث $f(x)=\sqrt{5+x^2}$ معرفة على R.

1) نحسب نسبة تزايد الدالة f بين العددين a و $a+h$.

$$f(a+h)-f(a)=\sqrt{5+(a+h)^2}-\sqrt{5+a^2}$$

$$=\left(\sqrt{5+(a+h)^2}-\sqrt{5+a^2}\right)\times\frac{\sqrt{5+(a+h)^2}+\sqrt{5+a^2}}{\sqrt{5+(a+h)^2}+\sqrt{5+a^2}}$$

$$=\frac{5+(a+h)^2-5-a^2}{\sqrt{5+(a+h)^2}+\sqrt{5+a^2}}=\frac{h(h+2a)}{\sqrt{5+(a+h)^2}+\sqrt{5+a^2}}$$

$$\lim_{h\to 0} r(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2a}{\sqrt{5+(a+h)^2}+\sqrt{5+a^2}}=\frac{2a}{2\sqrt{5+a^2}}$$

بما أن النسبة $r(h)$ قبلت نهاية محدودة مهما كان العدد الحقيقي a فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و يكون لدينا $f'(a)=\frac{2a}{2\sqrt{5+a^2}}$...(*)

2) بوضع $a=x$ في العبارة (*) نجد:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{5+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{5+x^2}}$$

3) $f'(a)\times h+f(a)=f'(2)\times h+f(2)=\frac{2}{3}h+3$

إذن الدالة التآلفية $h\to\frac{2}{3}h+3$ هي تقريب تآلفي للدالة f في جوار 2. و يكون لدينا

$f(2+h)\approx\frac{2}{3}h+3$....(1)

بوضع $h=0,03$ في العلاقة (1) نجد: $f(2+0,03)\approx\frac{2}{3}(0,03)+3$ أي

$f(2,03)\approx 3,02$ و منه $\sqrt{5+(0,03)^2}\approx 3,02$ (لاحظ أن $5+(0,03)^2=5,0009$)

حل التمرين الثالث:

1) من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^4 x+\cos^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x\right)-2\cos^2 x\sin^2 x$$

$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\cos^2 x\sin^2 x=1-2\cos^2 x\sin^2 x$$

2) من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$(1+\sin x+\cos x)^2=(1+\sin x+\cos x)(1+\sin x+\cos x)$$

$$=1+\sin x+\cos x+\sin x+\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos x+\cos x\sin x+\cos^2 x$$

$$=1+2\sin x+2\cos x+\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+2\sin x\cos x$$

$$=2+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x$$

$$=2[(1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)]$$

$$=2(1+\sin x)(1+\cos x)$$

حل التمرين الرابع:

لدينا $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}$،

$\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right)=\left(\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}\right)=\left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PB}\right)=-\frac{\pi}{2}$،

$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM}\right)=\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BP}\right)=\left(\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CN}\right)=\frac{\pi}{4}$

$\left(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

$\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM}\right)-\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{12}$

$\left(\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{4}$

نعلم أن المتوسط في المثلث المتقايس الأضلاع هو محور ومنصف وأيضا المتوسط في المثلث المتساوي الساقين الذي يشمل رأسه الأساسي هو محور ومنصف.

إذن يكون لدينا (AN) هو منصف لكل من الزاويتين $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NB}\right)$ ومنه $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}\right)=\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}$.

$\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AN}\right)=\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$

$\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BM}\right)=\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$

$\left(\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right)=\left(\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CP}\right)=-\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CN}\right)-\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{12}$

$\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=\frac{2\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PG}\right)=-\frac{\pi}{4}$; $\left(\overrightarrow{GP},\overrightarrow{GB}\right)=-\frac{\pi}{3}$

حل الاختبار (17)

حل التمرين الأول:

لدينا $U_0=1$ ، $U_{n+1}=-2U_n+1$

1) حساب الحدود U_1,U_2,U_3 **:**

$U_1=-2U_0+1=-1$ ، $U_2=-2U_1+1=3$ ، $U_3=-2U_2+1=-5$

2) مهما كان العدد الطبيعي n **فإن:**

$U_{n+2}-U_{n+1}=-2U_{n+1}+1-\left(-2U_n+1\right)=-2U_{n+1}+2U_n=-2\left(U_{n+1}-U_n\right)$

إذن المساواة $U_{n+2}-U_{n+1}=-2\left(U_{n+1}-u_n\right)-U_n$ تعني أن $U_{n+2}-U_{n+1}$ و $U_{n+1}-U_n$ من إشارتين مختلفين لأن 2- سالب.

3)• من أجل كل عدد طبيعي n **فإن:**

$V_{n+1}=U_{n+1}-\frac{1}{3}=-2U_n+1-\frac{1}{3}=-2U_n+\frac{2}{3}=-2\left(U_n-\frac{1}{3}\right)=-2v_n$

ومنه $v_{n+1}=-2v_n$. أي v متتالية هندسية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $v_0=U_0-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

• بما أنّ v متتالية هندسية وأساسها لا ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ فهي غير متقاربة (متباعدة)

$v_n=U_n-\frac{1}{3}$ تكافئ $U_n=v_n+\frac{1}{3}$. بما أن المتتالية v غير متقاربة والمتتالية الثابتة $\frac{1}{3}$ متقاربة فإن المتتالية ذات الحد العام $v_n+\frac{1}{3}$ ليست متقاربة. إذن u متتالية غير متقاربة.

• نلاحظ أن S_n هو مجموع $n+1$ حدا الأولى لمتتالية هندسية أساسها 2- وحدها الأول v_0.

$S_t=v_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{2}{3}\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)}=\frac{2}{9}\left[1-(-2)^{n+1}\right]$

حل التمرين الثاني:

1) تكون الدالة f حيث $f(x)=-x-3-\frac{1}{\sqrt{4-4x}}$ معرفة إذا كان $4-4x>0$ أي $x<1$. إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $E=]-\infty;1[$.

2) $\lim\limits_{x\to 1^<} f(x)=-\infty$. هذه النتيجة تعني هندسيا أن المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو مقارب للمنحنى (C) موازي لحامل محور التراتيب.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-3-\frac{1}{\sqrt{4-4x}}+x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-4x}}=0$

هذه النتيجة تعني أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-x-3$ هو مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$.

3) f **قابلة للاشتقاق على E.**

$f'(x)=-3-\frac{\frac{4}{2\sqrt{4-4x}}}{\left(\sqrt{4-4x}\right)^2}=-3-\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}=-\frac{1+12(1-x)\sqrt{1-x}}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$

بما أن $1-x\geq 0$ فإن $12(1-x)\sqrt{1-x}>0$ أي $1+12(1-x)\sqrt{1-x}>0$ و منه $-\left[1+12(1-x)\sqrt{1-x}\right]<0$. إذن $f'(x)<0$ أي f متناقصة على E.

جدول تغيرات الدالة f **:**

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$

4) $f'(x)=-\frac{13}{4}$ يكافئ $-3-\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}=-\frac{13}{4}$ يكافئ

$-\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}=-\frac{13}{4}+3$ يكافئ $\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}=1$ يكافئ $(1-x)\sqrt{1-x}=1$

يكافئ $(1-x)^3=1$ يكافئ $(1-x)^3-1=0$ يكافئ $1-3x+3x^2-x^3-1$ أي

$x^3-3x^2+3x=0$ أي $x(x^2-3x+3)=0$ و منه $x=0$ (لاحظ أن المعادلة

$x^2-3x+3=0$ لا تقبل حلولا لأن مميزها 3- سالب).

و منه $f(0)=-\frac{7}{2}$ إذن $A\left(0;-\frac{7}{2}\right)$.

5) ندرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ):

$$f(x)-(-x-3)=-x-3-\frac{1}{\sqrt{4-4x}}+x+3=\frac{-1}{\sqrt{4-4x}}$$

نلاحظ أن $f(x)-(-x-3)<0$. إذن (C) يقع تحت (Δ)على E.

حل التمرين الثالث:

لدينا $A(-2;0), B(4;0), C(1;5), \overrightarrow{AM}(x+2;y), \overrightarrow{BC}(-3;5)$

1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0$ يكافئ $-3(x+2)+5y=0$ أي $-3x+5y-6=0$ إذن مجموعة النقط M بحيث يكون $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0$ هي مستقيم معادلته $-3x+5y-6=0$.

2) نبرهن أنّ: $\alpha=0$ بطريقتين مختلفتين:

✓ **الطريقة الأولى:** باستعمال العبارة التحليلة للجداء السلمي.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(6;0), \overrightarrow{CM}(x-1;y-5), \overrightarrow{CA}(-3;-5), \overrightarrow{BM}(x-4;y)$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=-3(x+2)+5y-3(x-4)-5y+6(x-1)+0(y-5)$

$=-3x-6+5y-3x+12-5y+6x-6=0$

✓ **الطريقة الثانية:** باستعمال علاقة شال.

$$\alpha=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{CA}+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{AB}$$

$$\alpha=\left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$$

$$\alpha=\overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AM}.\vec{O}+\overrightarrow{CA}.\vec{O}=0$$

حل الاختبار (18)

حل التمرين الأول:

1) لدينا $f(x)=\frac{2+x^2}{x}, g(x)=\frac{1+2x}{x}$ الدالتان معرفتان على نفس المجموعة R^*

2) f و g قابلتان للاشتقاق على R^*:

$$f'(x)=\frac{2x(x)-\left(x^2+2\right)}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}; g'(x)=\frac{2x-(1+2x)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

ليكن a عدد حقيقي من R^*. نبحث عن حلول $f'(a)=g'(a)$.

$f'(a)=g'(a)$ أي $\frac{a^2-2}{a^2}=\frac{-1}{a^2}$ أي $a^2-2=-1$ و منه $a^2-1=0$ أي

$(a-1)(a+1)=0$ و منه $a=1$ أو $a=-1$.

- إذا كان $a=1$ فإن $f(1)=3, g(1)=3$
- إذا كان $a=-1$ فإن $f(-1)=-3, g(-1)=1$

✓ **الحالة الأولى:** نلاحظ أن النقطة $A(1;3)$ هي مشتركة بين (C_f) و(C_g) وفي نفس الوقت معامل توجيه المماس لـ (C_f) في A يساوي معامل توجيه المماس لـ (C_g) في A و يساوي $f'(1)=g'(1)=-1$.

معادلة المماس لـ (C_f) و (C_g) في النقطة A هي:

(لاحظ $f(1)=g(1)$). $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-(x-1)+3=-x+4$

✓ **الحالة الثانية:** توجد نقطة $B(-1;-3)$ من (C_f) و نقطة $C(-1;1)$ من (C_g) يكون المماسان فيهما متوازيان أي $f'(-1)=g'(-1)=-1$.

- معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة B هي:

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=-(x+1)-3=-x-4$$

- معادلة المماس لـ (C_g) في النقطة C هي:

$$y = g'(-1)(x+1) + g(-1) = -(x+1) + 1 = -x$$

حل التمرين الثاني:

1) إيجاد مجموعة تعريف الدالة f :

$x - x^2 = 0$ تكافئ $x(1-x) = 0$ أي $x = 0$ أو $x = 1$. إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $E =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$.

حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty; \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1; \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty; \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x - x^2$		$-$	$0-$	$+$	$0+$	$-$	
			$0+$		-0		

3) حساب الأعداد φ, β, α : مهما كان x من E:

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\varphi}{x-1} = \frac{\alpha x(x-1) + \beta(x-1) + \varphi x}{x(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - \alpha x + \beta x - \beta + \varphi x}{x^2 - x} = \frac{\alpha x^2 + (\beta - \alpha + \varphi)x - \beta}{x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{-\alpha x^2 + (\alpha - \beta - \varphi)x + \beta}{x - x^2}$$

بالمطابقة مع العبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} -\alpha = 1 \\ \alpha - \beta - \varphi = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \varphi = -2 \end{cases}$$ و منه $f(x) = -1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1}$

3) لحساب معامل توجيه المماس نحسب $f'(x)$.

$$f'(2) = \frac{7}{4}, f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) في النقطة A:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y = \frac{7}{4}(x-2) - \frac{5}{2} = \frac{7}{4}x - \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7}{4}x - 6$$

حل التمرين الثالث:

لدينا $(\vec{u};\vec{w}) = \frac{\pi}{12}, (\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$

$$(\vec{u};-\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v}) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$(2007\vec{u};2008\vec{v}) = (\vec{u};2008\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

$$(\vec{v};\vec{w}) = (\vec{v};\vec{u}) + (\vec{u};\vec{w}) = -(\vec{u};\vec{v}) + (\vec{u};\vec{w}) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$$

$$(-2\vec{w};-5\vec{v}) = \pi + (\vec{w};-5\vec{v}) = \pi + \pi + (\vec{w};\vec{v}) = 2\pi - (\vec{v};\vec{w}) = 2\pi + \frac{\pi}{12} = \frac{25\pi}{12}$$

$$(\vec{u};4\vec{u}) = (\vec{u};\vec{u}) = 2k\pi, k \in Z$$

حل التمرين الرابع:

1) $2\sin x = \sqrt{3}$ تكافئ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يكافئ $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi....(1) \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi..(2) \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$ يكافئ

نبحث عن الحلول التي تنتمي إلى المجال $[0;2\pi]$.

في المعادلة (1): من أجل $k = 0$ فإن $x_1 = \frac{\pi}{3}$.

في المعادلة (2): من أجل $k = 0$ فإن $x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

مجموعة حلول هذه المعادلة على المجال $[0;2\pi]$ هي $\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\}$.

بينما مجموعة حلول هذه المعادلة على R هي: $\left\{k\in Z,\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$

2) $1+2\cos 3x=0$ يكافئ $\cos 3x=-\frac{1}{2}$ يكافئ $\cos 3x=\cos\frac{2\pi}{3}$

يكافئ $\begin{cases}3x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\3x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}....(1)\\x=-\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$

من المعادلة (1): من أجل القيم 0، 1، 2 للعدد k نجد الحلول $\frac{14\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{2\pi}{9}$

من المعادلة (2): من أجل القيم 1، 2، 3 للعدد k نجد الحلول $\frac{16\pi}{9},\frac{10\pi}{9},\frac{4\pi}{9}$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة على المجال $[0;2\pi]$ هي:

$\left\{\frac{16\pi}{9},\frac{10\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{14\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{2\pi}{9}\right\}$

بينما مجموعة حلول هذه المعادلة على R هي:

$\left\{k \text{ عدد صحيح},-\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$

حل التمرين الخامس:

1) $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\vec{O}$ يكافئ $-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{O}$. هذه المساواة تعني أن النقطة A هي مرجح النقط D,C,B المرفقة بالمعاملات 2-، 1، 1- على الترتيب.

2) $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}=\vec{O}$ يكافئ $\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}=\vec{O}$. هذه المساواة تعني أن النقطة B هي مرجح النقط D,A,C المرفقة بالعلامات 1، 2، 1- على الترتيب.

حل الاختبار (19)

حل التمرين الأول:

لدينا $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{U_n}{1+2U_n};n\in N$

1) $U_2=\frac{U_1}{1+2U_1}=\frac{1}{5},U_1=\frac{U_0}{1+2U_0}=\frac{1}{3}$

$U_4=\frac{U_3}{1+2U_3}=\frac{1}{9},U_3=\frac{U_2}{1+2U_2}=\frac{1}{7}$

و مقلوبات هذه الحدود هي: $\frac{1}{U_0}=1;\frac{1}{U_1}=3;\frac{1}{U_2}=5,\frac{1}{U_3}=7,\frac{1}{U_4}=9$.

2) أ) مهما كان العدد الطبيعي n فإن:

$$t_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}}=\frac{1}{\frac{U_n}{1+2U_n}}=\frac{1+2U_n}{U_n}=\frac{1}{U_n}+2=t_n+2$$

ومنه $t_{n+1}=t_n+2$ إذن المتتالية t هي حسابية أساسها $r=2$ و حدها الأول $t_0=1$

ب) مهما كان العدد الطبيعي n فإن: $t_n=t_0+nr=1+2n$

$t_n=\frac{1}{U_n}$ يكافئ $U_n=\frac{1}{t_n}$ أي $U_n=\frac{1}{1+2n}$

ج)

$$S_n=\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+.....+\frac{1}{U_n}=t_0+t_1+t_2+.....+t_n$$

$$S_n=\frac{n+1}{2}(t_0+t_n)=\frac{n+1}{2}(1+1+2n)=(n+1)^2$$

حل التمرين الثاني:

لدينا $AE=x,BC=AB=2$

$\tan A = \frac{EF}{AE}$ يكافئ $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{EF}{AE}$ أي $1 = \frac{EF}{x}$ و منه $EF = x$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ يكافئ $AC^2 = 4+4 = 8$ و منه $AC = 2\sqrt{2}$

بما أن (BK) محور للمثلث و للمستطيل أيضا فإن $EH = 2\sqrt{2} - 2x$

مساحة المستطيل EFGH هي: $f(x) = EH \times EF = (2\sqrt{2} - 2x)x = 2\sqrt{2}x - 2x^2$.

ندرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;\sqrt{2}[$:

لدينا: $f'(x) = 2\sqrt{2} - 4x$

- $f'(x) = 0$ يكافئ $2\sqrt{2} - 4x = 0$ يكافئ $x = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $f'(x) > 0$ يكافئ $2\sqrt{2} - 4x > 0$ يكافئ $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $f'(x) < 0$ يكافئ $2\sqrt{2} - 4x < 0$ يكافئ $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \sqrt{2}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	1	↘	

ينتج من الجدول أن الدالة f تقبل قيمة عظمى من أجل $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و عليه تكون مساحة المستطيل أعظمية من أجل $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

حل التمرين الثالث:

$x^2 + y^2 + 4mx - 2(m-1)y - 7m + 1 = 0$ يكافئ

$(x+2m)^2 + (y-(m-1))^2 - 4m^2 - (m-1)^2 - 7m + 1 = 0$ يكافئ

$(x+2m)^2 + (y-(m-1))^2 = 5m^2 + 5m$

$5m^2 + 5m = 0$ يكافئ $5m(m+1) = 0$ أي $m = 0$ أو $m = -1$

m	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$5m^2 + 5m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1) إذا كان $m \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ فإن $5m^2 + 5m > 0$. إذن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $w(-2m;m-1)$ و نصف قطرها $R = \sqrt{5m^2 + 5m}$.

2) إذا كان $m = -1$ فإن $5m^2 + 5m = 0$ أي $(x+y)^2 + (y+2)^2 = 0$ أي $x - 2 = 0$ و $y + 2 = 0$ و منه $x = 2$ و $y = -2$. إذن مجموعة النقط M هي النقطة $\{A(2;-2)\}$

3) إذا كان $m = 0$ فإن $5m^2 + 5m = 0$ أي $x^2 + (y+1)^2 = 0$ أي $x = 0$ و $y = -1$ إذن مجموعة حلول النقط M هي النقطة $\{B(0;-1)\}$

4) إذا كان $m \in]-1;0[$ فإنّ $5m^2 + 5m < 0$. إذن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

حل التمرين الرابع:

نعلم أنّه من أجل كل عدد حقيقي a : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

أي $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a)$ و منه $\cos^4 a = \frac{1}{4}(1+\cos 2a)^2$

$$\alpha = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$$

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{7\pi}{4}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{1}{4}\left[\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

حل الاختبار (20)

حل التمرين الأول:

1) إيجاد مجموعة تعريف الدالة f حيث: $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+3}{8x^2-14x+5}$

مميز المعادلة $8x^2-14x+5=0$ هو: $\Delta=36$ و حلاها هما $\frac{5}{4}$ و $\frac{1}{2}$

إذن مجموعة تعريف f هي $E=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right[\cup\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$

2) $f(x)=0$ تكافئ $\dfrac{2x^2-7x+3}{8x^2-14x+5}=0$ تكافئ $2x^2-7x+3=0$ و $x\neq\frac{5}{4}$ و $x\neq\frac{1}{2}$

مميز المعادلة $2x^2-7x+3=0$ هو $\Delta=25$ و حلاها هما $\frac{1}{2}$ و 3.

الحل $\frac{1}{2}$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى E.

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي $\{3\}$.

2) نحل المتراجحة: $\dfrac{2x^2-7x+3}{8x^2-14x+5}\leq 0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$2x^2-7x+3$	+	0	−		−	0	+		
$8x^2-14x+5$	+	0	−	0	+			+	
$\frac{2x^2-7x+3}{8x^2-14x+5}$	+	‖	+	‖	−	0	+		

ينتج من الجدول أن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S=\left]\frac{5}{4};3\right]$

حل التمرين الثاني:

لدينا $f_m(x)=(2m+1)x^2+2x+m+1$

1) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا يكافئ $2m+1=0$ أي $m=-\frac{1}{2}$

من أجل $m=-\frac{1}{2}$: $f_m(x)=0$ يكافئ $2x-\frac{1}{2}+1=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{4}$ إذن من أجل $m=-\frac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $-\frac{1}{4}$.

2) 2- حلا للمعادلة $f_m(x)=0$ يكافئ $f_m(-2)=0$ يكافئ

$(2m+1)(-2)^2+2(-2)+m+1=0$ أي $8m+4-4+m+1=0$ أي $9m+1=0$

و منه $m=-\frac{1}{9}$.

3) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين متمايزين يكافئ $2m+1\neq 0$ و $\Delta>0$

$\Delta=2^2-4(2m+1)(m+1)=4-4(2m^2+3m+1)$

$\Delta=4-8m^2-12m-4=-8m^2-12m=-4m(2m+3)$

$\Delta=0$ يكافئ $-4m(2m+3)=0$ يكافئ $m=0$ أو $m=-\frac{3}{2}$.

m	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0	$+\infty$
$-4m(2m+3)$	−	0	+	0	−	

إذن مجموعة قيم m حتى تقبل المعادلة $f_m(x)=0$ حلين متمايزين هي:

$$\left]-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right[.$$

4) نعلم أن مجموع الحلين هو: $S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-2}{2m+1}$

وجداء الحلين هو $P=x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{2m+1}$

$$x_1x_2=\frac{m+1}{2m+1}=\frac{\frac{1}{2}(2m+1)+\frac{1}{2}}{2m+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2m+1)}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-2}{2m+1}.....(1)\\ 4x_1x_2=2+\frac{2}{2m+1}...(2)\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-2}{2m+1}\\ x_1x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2m+1)}\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد: $x_1+x_2+4x_1x_2=2$. و هي العلاقة بين x_1 و x_2.

حل التمرين الثالث:

من أجل كل عدد حقيقي α فإن:

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\alpha+\cos\alpha\cos\frac{2\pi}{3}$$
$$-\sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\alpha\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{4\pi}{3}$$
$$=\cos\alpha+\cos\alpha\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\alpha\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\alpha+\cos\alpha\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)-\sin\alpha\left(\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=cos\alpha+cos\alpha\left(-cos\frac{\pi}{3}-cos\frac{\pi}{3}\right)-sin\alpha\left(sin\frac{\pi}{3}-sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=cos\alpha-2cos\alpha cos\frac{\pi}{3}=cos\alpha-2(cos\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)=cos\alpha-cos\alpha=0$$

2) من أجل كل عدد حقيقي α فإن:

$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\alpha+\sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos\alpha$$
$$+\sin\alpha\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\cos\alpha$$
$$=\sin\alpha+\sin\alpha\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\alpha\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=\sin\alpha+\sin\alpha\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)+\cos\alpha\left(\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=\sin\alpha+\sin\alpha\left(-\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\cos\alpha\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}=\sin\alpha-2\sin\alpha\left(\frac{1}{2}\right)=\sin\alpha-\sin\alpha=0$$

حل التمرين الرابع:

1) $x^2+y^2+\alpha x+\beta y=0....(1)$ تكافئ $\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}=0$

تكافئ $\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$. بما أن $\alpha\neq0$ و $\beta\neq0$ فإن:

$\alpha^2+\beta^2>0$ أي $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}>0$. إذن المعادلة (1) هي معادلة دائرة مركزها $w\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$ و نصف قطرها $R=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

2) إيجاد معادلة المماس (d) في النقطة O.

نعلم أن المماس (d) عمودي على المستقيم القطري (OW) في النقطة O.

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوي.

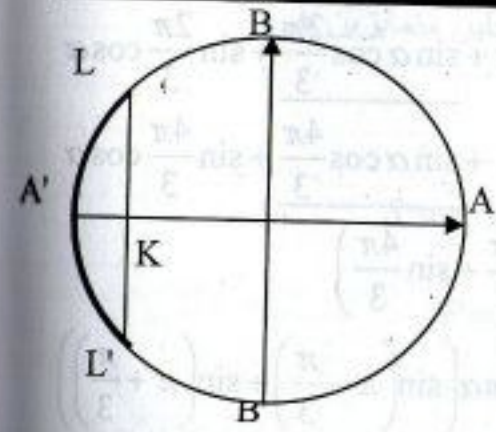
M تنتمي إلى (d) يكافئ $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{OW}$ حيث $\overrightarrow{OM}(x;y),\overrightarrow{OM}\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$

$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{OW}$ يكافئ $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OW}=0$ يكافئ $-\frac{\alpha}{2}x-\frac{\beta}{2}y=0$

أي $\alpha x+\beta y=0$. و هي معادلة (d).

حل التمرين الخامس:

$\sqrt{2}+2\cos x \le 0$ يكافئ $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ نرسم



على محور جيوب التمام (xx') النقطة K ذات الفاصلة $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

المستقيم العمودي على (AA') في K يقطع الدائرة المثلثية (C) في النقطتين L و L' حيث: $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OL}\right)=\frac{3\pi}{4}$ و $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OL'}\right)=\frac{5}{4}\pi$

لتكن M نقطة من الدائرة (C) حيث $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=x$ يكون العدد $\cos x$ أصغر أو يساوي $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ إذا كانت النقطة M تنتمي إلى القوس $\widehat{LA'L'}$ أي $\frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$

إذن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S=\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$.

حل الاختبار (21)

حل التمرين الأول:

1) لحساب الوسيط نجعل التوزيع تكرارا مجمعا صاعدا.

أصناف الأقطار	3	4	5	6	8	10	12	14	15	20
عدد الأشجار	10	14	18	20	23	15	19	26	30	25
ت.م.ص	10	24	42	62	85	100	119	145	175	200

بما أن عدد التكرارات 200 زوجيا فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الموجودتين في وسط الترتيب أي للقيمتين ذي المرتبتين.

$\frac{n}{2}=\frac{200}{2}=100$ و $\frac{n}{2}+1=\frac{200}{2}+1=101$

إذن الوسيط هو $Me=\frac{10+12}{2}=11$

2) حساب الربعي الأول Q_1 والربعي الثالث Q_3:

- $\frac{n}{4}=\frac{200}{4}=50$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\ge 50$ هو $p=50$.

الربعي الأول هو القيمة ذي المرتبة 50. و منه $Q_1=6$.

- $\frac{3n}{4}=\frac{3(200)}{4}=150$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\ge 150$ هو $p=150$

الربعي الثالث هو القيمة ذي المرتبة 150. و منه $Q_3=15$.

3) حساب العشري الأول و العشري التاسع:

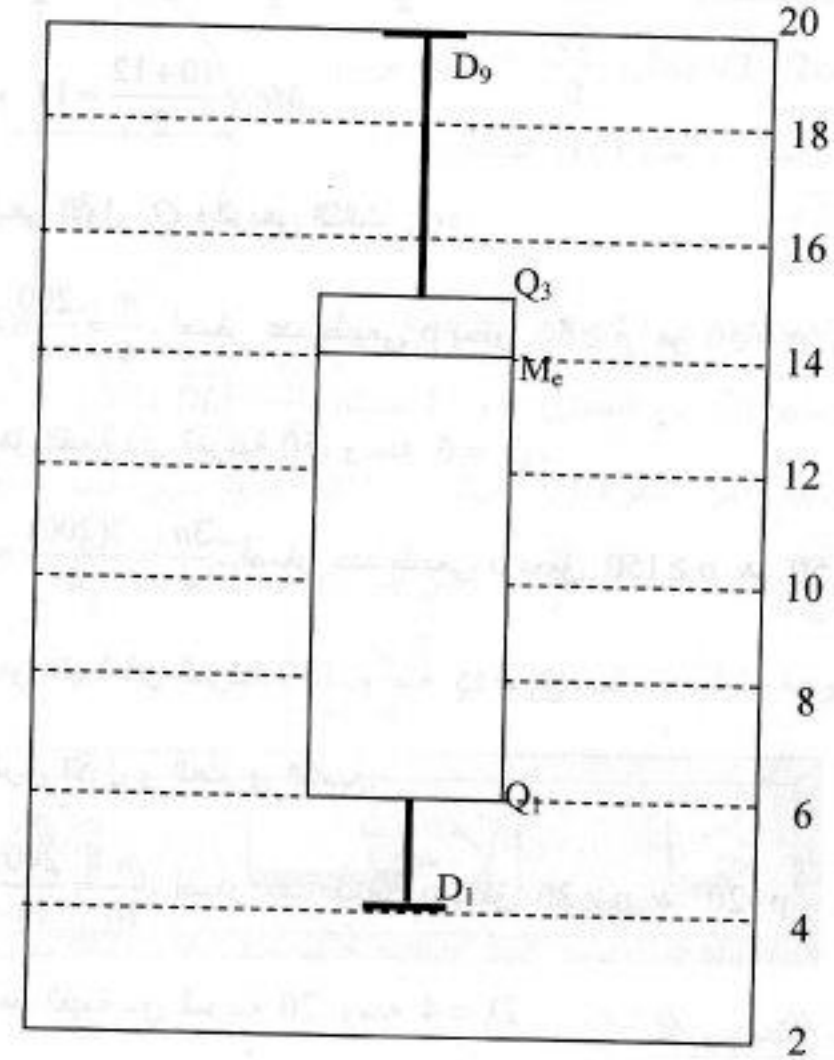
- $\frac{n}{10}=\frac{200}{10}=20$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\ge 20$ هو $p=20$

العشري الأول هو القيمة ذي المرتبة 20. ومنه $D_1=4$

$\frac{9n}{10}=\frac{9(200)}{10}=180$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\ge 180$ هو $p=180$.

العشري التاسع هو القيمة ذي المرتبة 180 و منه $D_9=20$

4) تمثيل السلسلة بمخطط بالعلبة:



حل التمرين الثاني:

حساب المجموعتين:

(1 $S_1 = 5+10+15+.....+5n = 5(1+2+3+4+...+n)$

$= 5\left[\frac{n}{2}(1+n)\right] = \frac{5}{2}n(n+1)$

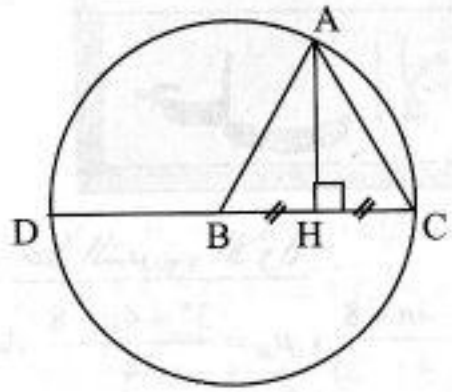
لاحظ أن $1+2+3+....+n$ هو مجموع n حدا الأولى لمتتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1.

(2 $S_2 = 1+5+25+125+625+...+5^n = 5^0+5^1+5^2+5^3+5^4+.....5^n$

$= 1\frac{1-5^{n+1}}{1-5} = \frac{1}{4}(5^{n+1}-1)$

لاحظ أن $5^0+5^1+....+5^n$ هو مجموع n+1 حدا الأولى لمتتالية هندسية أساسها 5 وحدها الأول 1.

حل التمرين الثالث:



لدينا: $AB = AC = BC = 1$

$BH = HC = 0,5$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC} = BH\ X\ BC$

$= 0,5\times 1 = 0,5$

نعلم أن $B\hat{A}H = \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\times\cos B\hat{A}H = 1\times 0,5\times\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

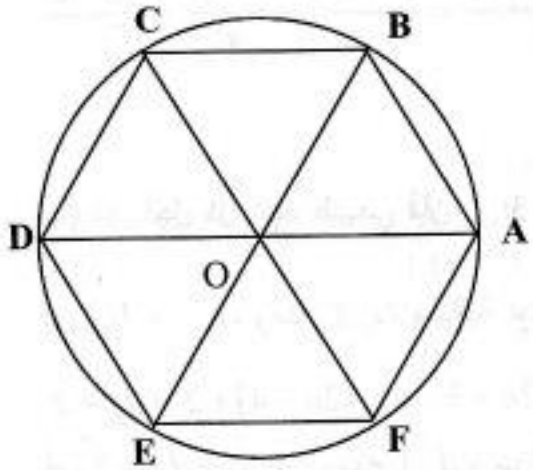
2) D صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ معناه $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$.

مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$ هي الدائرة التي قطرها [DC].

حل التمرين الرابع:

لدينا: $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 3Cm$



إيجاد الإحداثيان القطبيان لكل من النقط A ، B ، C، D ،E ،F.

بما أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}\right) = 0$ فإن A(3 ;0).

بما أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$ فإن $B\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$.

بما أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) = \frac{2\pi}{3}$ فإن $C\left(3,\frac{2\pi}{3}\right)$.

بما أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right) = \pi$ فإن $D(3,\pi)$.

بما أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right) = \frac{4\pi}{3}$ فإن $E\left(3,\frac{4\pi}{3}\right)$.

بما أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{5\pi}{3}$ فإن $F\left(3,\frac{5\pi}{3}\right)$.

حل الاختبار (22)

حل التمرين الأول:

لدينا: $u_n=\frac{3^n+4n-8}{4}$ ، $v_n=\frac{3^n-4n+8}{4}$. n عدد طبيعي.

1) حساب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتالية:

$$u_2=\frac{9}{4},u_1=-\frac{1}{4},u_0=\frac{7}{4}$$

$$v_2=\frac{9}{4},v_1=\frac{7}{4},v_0=\frac{9}{4}$$

2) أ) من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$t_n=u_n+v_n=\frac{3^n+4n-8}{4}+\frac{3n-4n+8}{4}=\frac{3^n+4n-8+3^n-4n+8}{4}$$

$$=\frac{2\cdot 3n}{4}=\frac{1}{2}\cdot 3n$$

$$d_n=u_n-v_n=\frac{3^n+4n-8}{4}-\frac{3n-4n+8}{4}=\frac{3^n+4n-8-3^n+4n-8}{4}$$

$$=\frac{8n-16}{4}=2n-4$$

ب) من أجل كل عدد طبيعي فإنّ: $t_{n+1}=\frac{1}{2}\times 3^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\times 3^n\right)\times 3=3t_n$

أي $t_{n+1}=3t_n$. ومنه (t_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول $t_0=\frac{1}{2}$

$$d_{n+1}=2(n+1)-4=2n+2-4=(2n-4)+2=d_n+2$$

أي $d_{n+1}=d_n+2$. ومنه (d_n) متتالية حسابية حدها الأول $d_0=-4$ و أساسها 2.

ج) $n<3^n$ تكافئ $\frac{n}{3^n}<1$. أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3^n}=0$.

$$\lim\frac{u_n}{v_n}=\lim\frac{3^n+4n-8}{3^n-4n+8}=\lim\frac{1+4\frac{n}{3^n}-\frac{8}{3^n}}{1-4\frac{n}{3^n}+\frac{8}{3^n}}=1$$

د) حساب المجموع s_n بدلالة n:

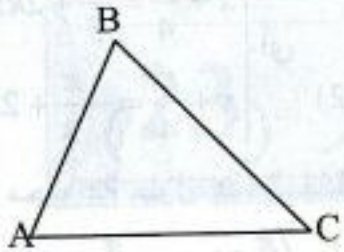
$$s_n=\alpha_0+\alpha_1+....+\alpha_n=(t_0+d_0)+(t_1+d_1)+(t_2+d_2)+....+(t_n+d_n)$$

$$=(t_0+t_1+t_2+.....+t_n)+(d_0+d_1+d_2+.....+d_n)$$

$$=t_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}+\frac{n+1}{2}(d_0+d_n)=\frac{1}{2}\frac{1-3^{n+1}}{1-3}+\frac{n+1}{2}(-4+2n-4)$$

$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-1)+(n+1)(n-4)$$

حل التمرين الثاني:



نرمز بـ x ، y ، z إلى أطوال أضلاع المثلث [AB] ، [BC] ، [AC] على الترتيب حيث:

x ، y ، z أعداد طبيعية متعاقبة أي:

$y=1+x$ ، $z=y+1=x+2$

$x+y+z=24$ يكافئ $x+x+1+x+2=24$ يكافئ $3x+3=24$ أي $3x=21$

ومنه: $x=\frac{21}{3}=7$ إذن $y=8$ ، $z=9$.

2) حساب أقياس زوايا المثلث ABC:

- $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\times\cos\hat{C}$

يكافئ $7^2=9^2+8^2-2(8)(9)\cos\hat{C}$ أي $\cos\hat{C}=\frac{96}{144}=\frac{2}{3}$

باستعمال الحاسبة وبتدوير النتيجة إلى الوحدة نجد $\hat{C}\approx 48°$

- $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\hat{B}$ يكافئ

$9^2=7^2+8^2-2(7)(8)\cos\hat{B}$ أي $\cos\hat{B}=\frac{32}{112}=\frac{2}{7}$

باستعمال الحاسبة وبتدوير النتيجة إلى الوحدة نجد $\hat{B} \approx 73°$

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\hat{A}$ يكافئ

$\cos\hat{A} = \frac{66}{126} = \frac{11}{21}$ أي $8^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9) \times \cos\hat{A}$

باستعمال الحاسبة وبتدوير النتيجة إلى الوحدة نجد $\hat{A} \cong 58°$

حل التمرين الثالث:

$2\cos x - 2\sin x - \sqrt{2} = 0$ يكافئ $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ يكافئ

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ يكافئ $\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{2}$ يكافئ

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ يكافئ $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ يكافئ

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \ldots\ldots(1) \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ldots\ldots(2) \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة على R هي:

$\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi \ ، \ -\frac{7\pi}{12} 2k\pi \ ، \ k$ عدد صحيح $\}$

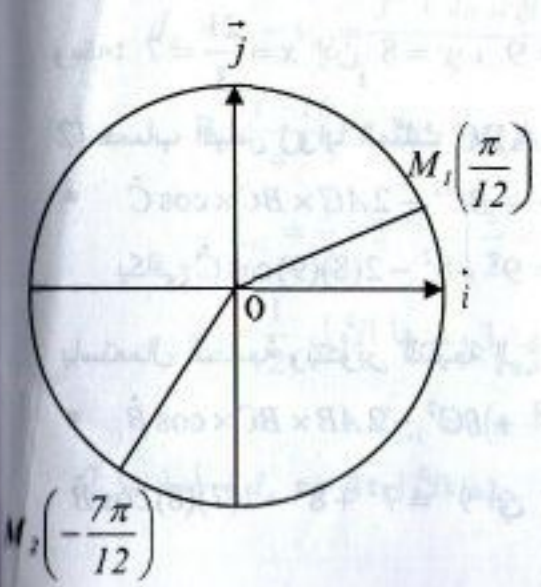
من المساواة (1): إذا كان $k = 0$ فإن $x_1 = \frac{\pi}{12}$.

نسمي M_1 صورة الحل x_1.

المساواة (2): إذا كان $k = 0$ فإن $x_2 = -\frac{7\pi}{12}$.

نسمي M_2 صورة الحل x_2.

تمثيل صورة حلول المعادلة في الدائرة المثلثية.



حل التمرين الرابع:

1) الوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية:

a ، $a+8$ ، $a+20$ ، $a+10$ ، $a+26$ ، $a+10$ ، $a+10$ ، $a+8$ هو

$\bar{x} = \frac{a+a+8+a+20+a+10+a+26+a+10+a+10+a+8}{8} = \frac{8a+92}{8}$

$= a + 11,5$

2) لحساب الوسيط نرتب هذه القيم تصاعديا (أو تنازليا).

a ، $a+8$ ، $a+8$ ، $\boxed{a+10, a+10}$ ، $a+10$ ، $a+20$ ، $a+26$.

بما أن عدد القيم 8 زوجيا فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الموجودتين في وسط الترتيب. إذن الوسيط هو : $Me = \frac{a+10+a+10}{2} = a+10$

3) منوال هذه السلسلة هو القيمة الأكثر تكرارا و هي $a+10$.

حل الاختبار (23)

حل التمرين الأول:

لدينا: $f(x) = 0,5x^2 - 0,5x + \alpha$

نلاحظ أن $f(x) = 0$ هي معادلة من الدرجة الثانية مهما كان العدد الحقيقي α.

ونعلم أن المعادلة من الدرجة الثانية إما لا تقبل حلولا (0) أو تقبل حلا مضاعفا (1) أو تقبل حلين متمايزين (2).

إذن قيم α الممكنة هي $\{2، 1، 0\}$ و تمثل عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

2) دراسة وضعية القطع المكافئ (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل تؤول إلى دراسة إشارة $f(x)$ حسب قيم α.

مميز المعادلة $0,5x^2 - 0,5x + \alpha = 0$ هو $\Delta = 0,25 - 2\alpha$

$\Delta = 0$ يكافئ $0,25 - 2\alpha = 0$ يكافئ $\alpha = \frac{0,25}{2} = 0,125$

α	$-\infty$		$0,125$		$+\infty$
$0,25-2\alpha$		$+$	0	$-$	

❶ إذا كان $\alpha \in]-\infty;0,125[$ فإن $\Delta > 0$. أي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين متمايزين هما: $x_1 = 0,5 - \sqrt{0,25-2\alpha}$ و $x_2 = 0,5 + \sqrt{0,25-2\alpha}$

و القطع المكافئ (C_f) يقطع المحور (xx') في النقطتين :

$A\left(0,5-\sqrt{0,25-2\alpha};0\right)$ و $B\left(0,5+\sqrt{0,25-2\alpha};0\right)$

- إذا كان $x \in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$ فإن $f(x)>0$ أي القطع المكافئ (C_f) يقع فوق المحور (xx').
- إذا كان $x \in]x_1;x_2[$ فإن $f(x)<0$ أي القطع المكافئ (C_f) يقع تحت المحور (xx').
- إذا كان $x = x_1$ أو $x = x_2$ فإن (C_f) يقطع المحور (xx') في النقطتين A و B .

❷ إذا كان $\alpha = 0,125$ فإن $\Delta = 0$. أي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا مضاعفا هو $x = 0,5$. و يكون المحور (xx') مماس للقطع المكافئ في النقطة $E(0,5;0)$. و المنحنى (C_f) يقع فوق (xx').

❸ إذا كان $\alpha \in]0,125;+\infty[$ فإن $\Delta < 0$. أي المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$، و القطع المكافئ (C_f) لا يقطع محور الفواصل و يكون القطع المكافئ يقع فوق المحور (xx').

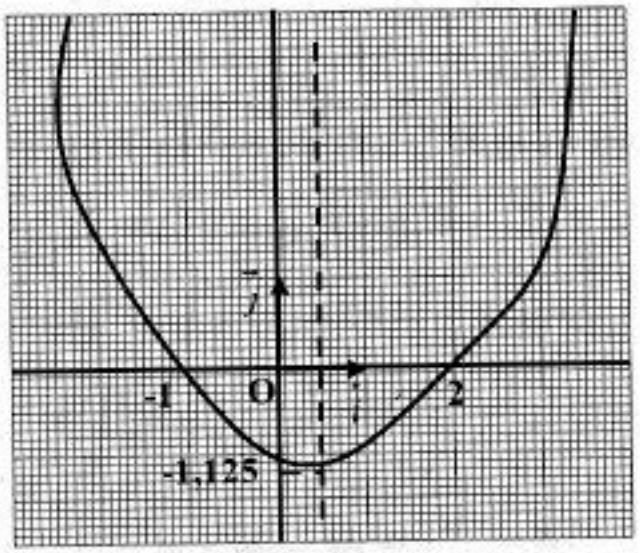
3) بوضع $\alpha = -1$ نحصل على $f(x) = 0,5x^2 - 0,5x - 1$

نعلم أن رأس القطع المكافئ (C_f) هو $s\left(-\frac{b}{2a}\right);f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ أي $S(0,5;-1,125)$

بما أن المعامل a موجب $(a = 0,5)$ فإن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;0,5]$ و متزايدة على المجال $[0,5;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$0,5$	$+\infty$
f		$-1,125$	



لإنشاء المنحنى (C_f) نستفيد من الدراسة

في الفرع الثاني :المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين

A(-1 ;0) ، B(2 ;0) ويقع فوق محور الفواصل على المجال:

$]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$

ويقع تحت محور الفواصل على المجال $]-1;2[$.

حل التمرين الثاني:

الوسط الحسابي للسلسلة: 7، 8، 6، 5، 9 هو: $\bar{x} = \frac{7+8+6+5+9}{5} = \frac{35}{5} = 7$

التباين لهذه السلسلة هو:

$$V = \frac{1}{5}\left[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + (x_3-\bar{x})^2 + (x_4-\bar{x})^2 + (x_5-\bar{x})^2\right]$$

$$V = \frac{1}{5}\left[(7-7)^2 + (8-7)^2 + (6-7)^2 + (5-7)^2 + (9-7)^2\right] = \frac{10}{5} = 2$$

الانحراف المعياري هو: $S = \sqrt{V} = \sqrt{2} = 1,41$

حل التمرين الثالث:

نعلم أن $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ، $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

1) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x = (1-\cos^2 x)\cos^2 x = \cos^2 x - \cos^4 x$

$f(x) = \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x(1-\sin^2 x) = \sin^2 x - \sin^4 x$

2) تحليل العبارة $1-f(x)$:

$$1-f(x)=1-\sin^2 x\cos^2 x=(1-\sin x\cos x)(1+\sin x\cos x)$$

3) $f(\pi+x)=\sin^2(\pi+x)\cos^2(\pi+x)=(-\sin x)^2(-\cos x)^2$

$$=\sin^2 x\cos^2 x=f(x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^2 x\sin^2 x=f(x)$$

$$f(x+2008\pi)=\sin^2(x+2008\pi)\cos^2(x+2008\pi)$$

$$=\sin^2(x+2(1004)\pi)\cos^2(x+2(1004)\pi)=\sin^2 x\cos^2 x=f(x)$$

حل التمرين الرابع:

1) $x^2+y^2-5x-2y+4=0$ يكافئ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2-\frac{25}{4}-1+4=0$ أي $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}$. ومنه المعادلة (*) هي معادلة دائرة (C) مركزها $w\left(\frac{5}{2};1\right)$ و نصف قطرها $R=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

2) إحداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) مع المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هي حلول الجملة

$$\begin{cases}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}\\ x=1\end{cases}$$

$(y-1)^2=\frac{13}{4}-\frac{9}{4}=1$ يكافئ $\frac{9}{4}+(y-1)^2=\frac{13}{4}$ يكافئ $\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}$

يكافئ $(y-1)^2-1=0$ يكافئ $(y-1+1)(y-1-1)=0$ يكافئ $y(y-2)=0$ أي

$y=0$ أو $y=2$ و منه $A(1;0)$ ، $B(1;2)$.

3) إيجاد معادلة المماس (d) للدائرة (C) في النقطة A.

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوي.

M تنتمي إلى (d) يكافئ $\overrightarrow{AW}\perp\overrightarrow{AM}$. $\overrightarrow{AW}\left(\frac{3}{2};1\right)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-1;y)$

$\overrightarrow{AW}\perp\overrightarrow{AM}$ يكافئ $\overrightarrow{AW}.\overrightarrow{AM}=0$ يكافئ $\frac{3}{2}(x+1)+1(y)=0$ أي $\frac{3}{2}x+y-\frac{3}{2}=0$

أي $3x+2y-6=0$ و هي معادلة المماس (d).

إيجاد معادلة المماس (d') للدائرة (C) في النقطة B.

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوي.

M تنتمي إلى (d') يكافئ $\overrightarrow{BW}\perp\overrightarrow{BM}$. $\overrightarrow{BW}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ ، $\overrightarrow{BM}(x-1;y-2)$

$\overrightarrow{BW}\perp\overrightarrow{BM}$ يكافئ $\overrightarrow{BW}.\overrightarrow{BM}=0$ يكافئ $\frac{3}{2}(x-1)-1(y-2)=0$ يكافئ

$\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}=0$ أي $3x-2y+1=0$. و هي معادلة المماس (d').

إحداثيا النقطة E هي حلول الجملة $\begin{cases}3x+2y-6=0....(1)\\ 3x-2y+1=0....(2)\end{cases}$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد: $6x-5=0$ أي $x=\frac{5}{6}$. بالتعويض في المعادلة (1)

نجد: $3\left(\frac{5}{6}\right)+2y-6=0$ أي $2y=\frac{7}{2}$ أي $y=\frac{7}{4}$ و منه $E\left(\frac{5}{6};\frac{7}{4}\right)$.

4) نعلم أن معادلة المستقيم (Δ) من الشكل: $y=mx+p$ حيث $m=-3$. أي

$y=-3x+p$. E تنتمي إلى (Δ) معناه: $y_E=-3x_E+p$ أي $\frac{7}{4}=-3\left(\frac{5}{6}\right)+p$

و منه $p=\frac{7}{4}+\frac{5}{2}=\frac{17}{4}$. إذن معادلة (Δ) هي $y=-3x+\frac{17}{4}$.

حل الاختبار (24)

حل التمرين الأول:

1) نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ يكافئ $a=1$

2) لدينا: $f(x)=\frac{x^2+bx+d}{x^2}$. حساب العددين b و d.

$\begin{cases}A\in(C_f)\\B\in(C_f)\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}f(1)=0\\f(3)=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}1+b+d=0....(1)\\9+3b+d=0...(2)\end{cases}$

بطرح (1) من (2) نجد:

$2b=8$ أي $b=-4$.

بتعويض قيمة في المعادلة (1)نجد: $d=3$ أي $0=d+4-1$

ومنه: $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

$x=0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) منطبق على (yy')

$y=1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) موازي لحامل محور الفواصل.

4) ندرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=1$:

$f(x)-1=\frac{x^2-4x+3}{x^2}-1=\frac{x^2-4x+3-x^2}{x^2}=\frac{-4x+3}{x^2}$

نلاحظ أن إشارة $f(x)-1$ من إشارة $-4x+3$.

* $f(x)-1<0$ يكافئ $-4x+3<0$ أي $x>\frac{3}{4}$.

إذن (C_f) يقع تحت المستقيم ذي المعادلة $y=1$ على المجال $\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$.

* $f(x)-1>0$ يكافئ $-4x+3>0$ أي $x<\frac{3}{4}$.

إذن (C_f) يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y=1$ على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right[$.

* $f(x)-1=0$ يكافئ $-4x+3=0$ أي $x=\frac{3}{4}$.

إذن (C_f) يقطع المستقيم ذي المعادلة $y=1$ في النقطة $E\left(\frac{3}{4};1\right)$.

حل التمرين الثاني:

1) من الجدول ينتج أنه توجد 9 حالات ممكنة للسحب بهذه الطريقة.

	1	2	2
1	(1 ;1)	(1 ;2)	(1 ;2)
2	(2 ;1)	(2 ;2)	(2 ;2)
2	(2 ;1)	(2 ;2)	(2 ;2)

2) * مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{4,3,2\}$.

$P(X=4)=\frac{4}{9}; P(X=3)=\frac{4}{9}; P(X=1)=\frac{1}{9}$

قانون المتغير العشوائي X :

X	2	3	4
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

* حساب الأمل الرياضياتي والانحراف المعياري.

الأمل الرياضياتي هو :

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=2\left(\frac{1}{9}\right)+3\left(\frac{4}{9}\right)+4\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{26}{9}=2,88$

التباين هو : $V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+p_3(x_3-E(x))^2$

$=\frac{1}{9}(2-2,88)^2+\frac{4}{9}(3-2,88)^2+\frac{4}{9}(4-2,88)^2\approx 0,70$

الانحراف المعياري هو: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0,70}\approx 0,83$

حل التمرين الثالث:

لدينا AB=5cm.

1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AB}$ مجموعة النقط M

التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ هي مستقيم (Δ) عمودي

على (AB) في النقطة A.

2) $MA^2-MB^2=0$ يكافئ $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=0$

يكافئ $\overrightarrow{BA}.2\overrightarrow{ME}=0$ يكافئ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{ME}=0$.

حيث E منتصف $[AB]$.

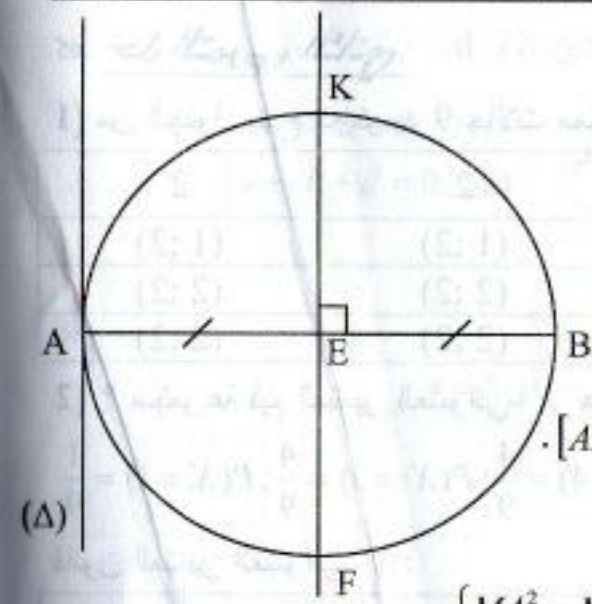
ومنه مجموعة النقط M التي تحقّق:

$MA^2-MB^2=0$ هي محور القطعة $[AB]$

3) $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$ يكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

إذن مجموعة النقط M بحيث يكون:

$\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ متعامدان هي دائرة قطرها $[AB]$.



4) مجموعة النقط M التي تحقق: $\begin{cases}MA^2-MB^2=0\\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\end{cases}$ هي تقاطع الدائرة ذات القطر $[AB]$ مع محور القطعة $[AB]$.

نقطتا التقاطع هما K و F متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (AB).

حل الاختبار (25)

✍ حل التمرين الأول:

نضع $U_0=5\times10^5$. نسمي U_0 عدد سكان المدينة يوم 2006/01/01. ويكون U_1 عدد سكان المدينة يوم 2007/01/01. زيادة عدد السكان بنسبة 4% يعني ضرب U_0 في العدد $\left(1+\frac{4}{100}\right)=1{,}04$ ومنه $U_1=1{,}04U_0$

أي: $U_1=1{,}04\times5\times10^5=52\times10^4$.

إذن عدد سكان هذه المدينة يوم 2007/01/01 هو 52×10^4 نسمة.

* نسمي U_2 عدد سكان المدينة يم 2008/01/01.

زيادة عدد السكان بنسبة 4% يعني ضرب U_1 في العدد $\left(1+\frac{4}{100}\right)=1{,}04$

ومنه: $u_2=1{,}04u_1=(1{,}04)^2u_0$ أي: $U_2=(1{,}04)^2\times5\times10^5=5408\times10^2$

إذن عدد سكان هذه المدينة يوم 2008/01/01 هو 5408×10^2 نسمة.

* نسمي U_3 عدد سكان المدينة يوم 2009/01/01.

زيادة عدد السكان بنسبة 4% يعني ضرب U_2 في العدد $\left(1+\frac{4}{100}\right)=1{,}04$

ومنه $U_3=1{,}04^2U_2=(1{,}04)^3U_0$ أي $U_3=(1{,}04)^3\times5\times10^5=562432$

إذن عدد سكان هذه المدينة يوم 2009/01/01 هو 562432 نسمة.

2) عدد سكان المدينة يوم $2006+n/01/01$ يمثل عدد سكان المدينة بعد n سنة.

نرمز بـ U_n إلى عدد سكان المدينة بعد n سنة.

لدينا: $U_0,U_1=1{,}05U_0,U_2=(1{,}05)^2U_0,U_3=(1{,}05)^3U_0,....,U_n=(1{,}05)^nU_0$.

إذن عدد سكان المدينة بعد n سنة هو $(1{,}05)^nU_0$.

طبيعة هذه المتتالية هندسية أساسها 1,05.

✍ حل التمرين الثاني:

لدينا: $Q_1=100$،

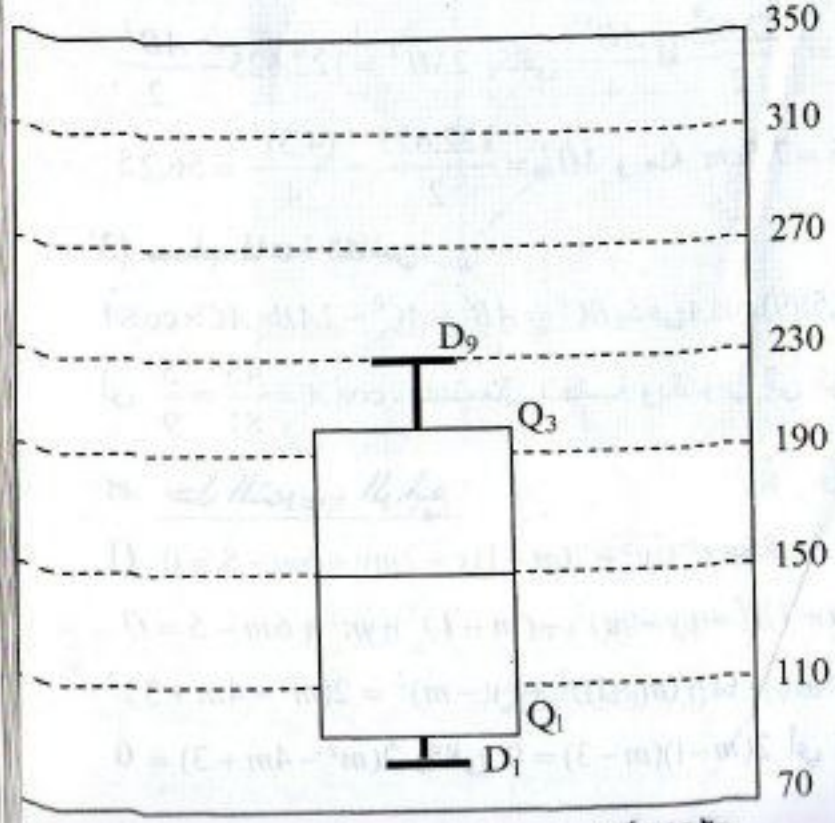
$Q_3=100+100=200$

$M_e=150$ ، $D_1=90$

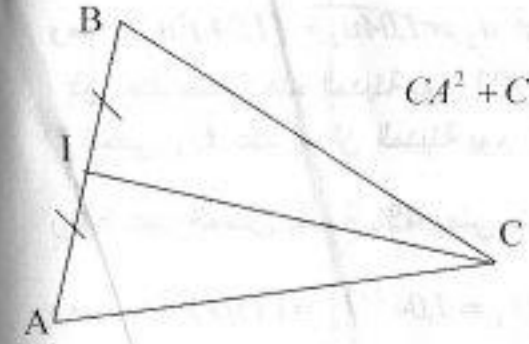
$D_9=230$

أصغر قيمة للسلسلة الإحصائية 80 وأكبر قيمة لها 350.

تمثيل السلسلة الإحصائية بمخطط بالعلبة.



حل التمرين الثالث:



لدينا AC=9cm ،BC=7,5cm ،AB=4,5cm

حسب نظرية المتوسط لدينا: $CA^2+CB^2=2CI^2+\frac{AB^2}{2}$

تكافئ $2CI^2=CA^2+CB^2-\frac{AB^2}{4}$ تكافئ

$CI^2=\frac{CA^2+CB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}$ يكافئ

$CI^2=\frac{9^2+(7,5)^2}{2}-\frac{(4,5)^2}{4}=\frac{245,25}{4}$

و منه $CI=\sqrt{\frac{254,25}{4}}=\frac{1,5}{2}\sqrt{113}=0,75\sqrt{113}$

2) لدينا $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$

$MA^2+MB^2=122,625$ تكافئ $2MI^2+\frac{AB^2}{2}=122,625$ يكافئ

$2MI^2=122,625-\frac{AB^2}{2}$ يكافئ $MI^2=\frac{122,625}{2}-\frac{AB^2}{4}$

و منه $MI^2=\frac{122,625}{2}-\frac{(4,5)^2}{4}=56,25$. $MI=\sqrt{56,25}=7,5cm$

3) حساب قاعدة الكاشي:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يكافئ $(7,5)^2=(4,5)^2+9^2-2(4,5)(9)\cos\hat{A}$

أي $\cos\hat{A}=\frac{45}{81}=\frac{5}{9}$. باستعمال الحاسبة وبالتدوير إلى الوحدة نجد $\hat{A}\approx 56°$.

حل التمرين الرابع:

1) $x^2+y^2-2(m-1)x-2my+6m-5=0$ يكافئ

$(x-(m-1))^2+(y-m)^2-(m-1)^2-m^2+6m-5=0$ تكافئ

$(x-(m-1))^2+(y-m)^2=2(m^2-4m+3)$.

$2(m^2-4m+3)=0$ يكافئ $2(m-1)(m-3)=0$ أي $x=1$ أو $x=3$.

m	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2(m^2-4m+3)$		+	0	−	0	+	

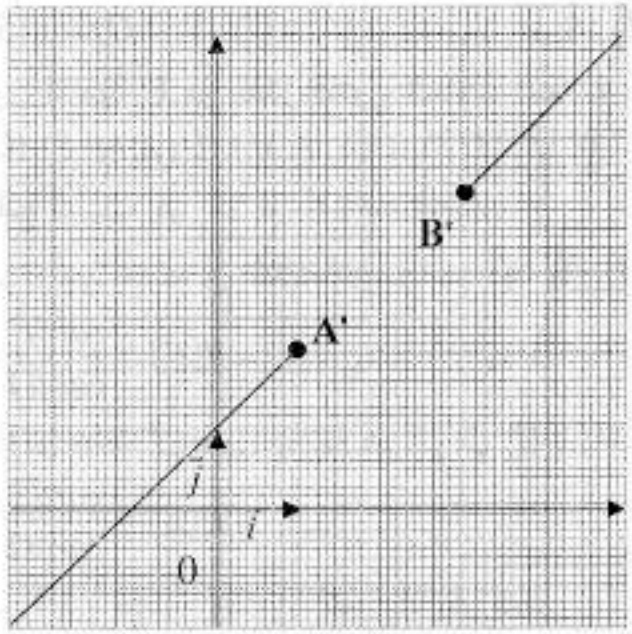
ينتج من الجدول أن مجموعة قيم m التي من أجلها تكون (C_m) دائرة هي:

$E=]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$.

2) من أجل m ينتمي إلى E فإن (C_m) هي دائرة مركزها $w(m-1;m)$ و نصف قطرها $R_m\sqrt{2(m^2-4m+3)}$.

إيجاد مجموعة النقط w_m :

نضع $x=m-1$ و $y=m$) أي $x=y-1$ أي $x-y+1=0$ من أجل $m=1$ نضع $A'(0;1)$ ومن أجل $m=3$ نضع $B'(2;3)$ إذن مجموعة النقط w_m عندما يتغير m في E هي مستقيم معادلته $x-y+1=0$ باستثناء القطعة المستقيمة $[A'B']$.



3) نبرهن أن: $\overrightarrow{W_mA}.\overrightarrow{W_mB}=R^2_m$.

لدينا $\overrightarrow{W_mA}(3-m;3-m);\overrightarrow{W_mA}(-m+1;1-m)$

$\overrightarrow{W_mA}.\overrightarrow{W_mB}=(-m+1)(3-m)+(1-m)(3-m)=2(1-m)(3-m)$

$=2(m^2-4m+3)=2\left(\sqrt{m^2-4m+3}\right)^2=2R^2_m$

و منه $\overrightarrow{W_mA}.\overrightarrow{W_mB}=R^2_m$.

حل الاختبار (26)

حل التمرين الأول:

1) إيجاد الحالات الممكنة:

إما أن يكون التلميذ A هو الفائز فتكون الحالات الممكنة عندئذ هي:

$(A;U;M;S),(A;U;S;M)(A;S;U;M),(A;S;M;U),(A;M;U;S),(A;M;S;U)$

وإما أن يكون التلميذ M هو الفائز فتكون الحالات الممكنة عندئذ هي:

$(M;U;S;A),(M;U;A;S),(M;S;U;A),(M;S;A;U),(M;A;U;S),(M;A;S;U)$

وإما أن يكون التلميذ S هو الفائز فتكون الحالات الممكنة عندئذ هي:

$(S;U;M;A),(S;U;A;M),(S;M;U;A),(S;M;A;U),(S;A;U;M),(S;A;M;U)$

وإما أن يكون التلميذ U هو الفائز فتكون الحالات الممكنة عندئذ هي:

$(U;M;S;A),(U;M;A;S),(U;S;M;A),(U;S;A;M),(U;A;M;S),(U;A;S;M)$

إذن عدد النتائج الممكنة هو 24 أي $card\Omega = 24$.

2) نرمز بـــ F إلى حدث أنّ الثلاثة الأوائل هم $(S;M;A)$ أي $F = \{(S;M;A;U)\}$

ومنه $P(F) = \frac{cardF}{card\Omega} = \frac{1}{24}$.

نرمز بـــE إلى حدث أن يكون الثلاثة هم الأوائل $(M;A;U)$ أي $E = \{(M;A;U;S)\}$

ومنه $P(E) = \frac{cardE}{card\Omega} = \frac{1}{24}$.

3) نرمز بـــ K إلى حدث أن يكون التلميذ M هو الفائز.

$K = \{(M;S;U;A),(M;S;A;U),(M;A;U;S),(M;A;S;U),(M;U;S;A),(M;U;S;A)\}$

ومنه $P(K) = \frac{cardK}{card\Omega} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

4) نرمز بـــ H إلى حدث أن يكون التلميذ S يحتل إحدى المراحل الثلاثة الأولى.

إما التلميذ S في المرتبة الأولى (توجد 6 حالات).

إما التلميذ S في المرتبة الثانية (توجد 6 حالات).

إما التلميذ S في المرتبة الثالثة (توجد 6 حالات).

$P(H) = \frac{cardH}{card\Omega} = \frac{6+6+6}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.

* ملاحظة: الثلاثيات أو الرباعيات تقرأ من اليسار إلى اليمين.

حل التمرين الثاني:

لدينا $U_n = \frac{5}{2^n}$. n عدد طبيعي.

1) $U_0 = 5$، $U_1 = \frac{5}{2}$، $U_2 = \frac{5}{4}$، $U_3 = \frac{5}{8}$.

نعلم أن الأعداد العشرية هي التي تكتب على الشكل: $\frac{a}{10^n}$ حيث n عدد طبيعي و a عدد صحيح نسبي.

مهما كان العدد الطبيعي n فإن: $U_n = \frac{5}{2^n} = \frac{5\times 5^n}{2^n\times 5^n} = \frac{5\times 5^n}{(2\times 5)^n} = \frac{5^{n+1}}{10^n}$ و منه U_n عدد عشري.

2) من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_{n+1} = \frac{5}{2^{n+1}} = \frac{5}{2^n\times 2} = \frac{1}{2}\times\frac{5}{2^n} = \frac{1}{2}U_n$ و منه $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$. أي U متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $U_0 = 5$.

3) بما أن المتتالية U هندسية و أساسها $\frac{1}{2}$ ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ فإنها متقاربة.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{2^n} = 0$.

4) $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$

نلاحظ أن S_n هو مجموع $n+1$ حدا الأولى للمتتالية الهندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول u_0.

$$S_n = U_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 5\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 10\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

يمكن كتابة S_n على الشكل $S_n = 10 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

نعلم أن مجموع متتاليتين هو متتالية متقاربة.

نلاحظ أن المتتالية ذات الحد العام $-5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هي متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول 5− و بما أن $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ فهي متقاربة نحو 0. و المتتالية الثابتة 10 متقاربة نحو 10

بما أن S_n هو مجموع متتاليتين متقاربتين فإن المتتالية (S_n) هي متقاربة نحو 10.

حل التمرين الثالث:

1) إيجاد العبارة التحليلية للتحاكي h الذي مركزه $A(-2;2)$ ونسبته 3−.

لتكن $M'(x';y')$ صورة النقطة $M(x;y)$ بالتحاكي h.

$h(M) = M'$ تكافئ $\overrightarrow{AM'} = -3\overrightarrow{AM}$. $AM'(x'+2;y'+2)$ ، $\overrightarrow{AM}(x+2;y+2)$

$\overrightarrow{AM'} = -3\overrightarrow{AM}$ تكافئ $x'+2 = -3(x+2)$ و $y'+2 = -3(y+2)$ تكافئ

$x' = -3x-8$ و $y' = -3y-8$.

إيجاد العبارة التحليلية للتحاكي h' الذي مركزه $B(1;-2)$ و نسبته 2.

لتكن $M'(x';y')$ صورة النقطة $M(x;y)$ بالتحاكي h'.

$h'(M) = M'$ يكافئ $\overrightarrow{BM'} = 2\overrightarrow{BM}$. $\overrightarrow{BM'}(x'-1;y'+2)$ ، $\overrightarrow{BM}(x-1;y+2)$

$\overrightarrow{BM'} = 2\overrightarrow{BM}$ تكافئ $x'-1 = 2(x-1)$ و $y'+2 = 2(y+2)$ يكافئ

$x' = 2x-1$ و $y' = 2y+2$).

3) إيجاد العبارة التحليلية للتحويل f حيث $f = h' \circ h$.

$M(x;y) \xrightarrow{h} M_1(x_1;y_1) \xrightarrow{h'} M'(x';y')$.

$h(M) = M_1$ تكافئ $\begin{cases} x_1 = -3x-8 \\ y_1 = -3y-8 \end{cases}$

$h'(M_1) = M'$ يكافئ $\begin{cases} x' = 2x_1 - 1 \\ y' = 2y_1 + 2 \end{cases}$

$h' \circ h(M) = M'$ يكافئ $\begin{cases} x' = 2(-3x-8)-1 \\ y' = 2(-3y-8)+2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x' = -6x-17 \\ y' = -6x-14 \end{cases}$

بما أن التحويل f من الشكل: $x' = ax+b$ و $y' = ay+b'$ و $a \neq 1$ فإن f هو تحاك نسبته $k = -6$، ومركزه النقطة الصامدة.

إيجاد النقطة الصامدة:

$f(M) = M$ يكافئ $\begin{cases} x = -6x-17 \\ y = -6y-14 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 7x = -17 \\ 7y = -14 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = -\frac{17}{7} \\ y = -2 \end{cases}$

و منه f تحاك مركزه $E\left(-\frac{17}{7};-2\right)$ و نسبته 6−.

3) إيجاد معادلة الدائرة (C): $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$.

لإيجاد صورة الدائرة (C) بالتحاكي h نبحث عن التحاكي العكسي h^{-1}.

$h(M) = M'$ يكافئ $(x' = -3x-8$ و $y' = -3y-8)$ يكافئ

$(x = -\frac{1}{3}x' - \frac{8}{3}$ و $y = -\frac{1}{3}y' - \frac{8}{3})$

$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$ يكافئ $\left(-\frac{1}{3}x' - \frac{8}{3} + 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}y' - \frac{8}{3} + 2\right)^2 = 9$ يكافئ

$\frac{1}{9}(-x'-2)^2 + \frac{1}{9}(-y'-2)^2 = 9$ يكافئ $(x'+2)^2 + (y'+2)^2 = 81$ ومنه صورة الدائرة (C) ذات المركز A و نصف القطر 3 بالتحاكي h هي الدائرة (C') ذات المركز A و نصف القطر 9. ومعادلتها هي: $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 81$.

حل التمرين الرابع:

لدينا $\vec{u} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 9k$ ، $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ ، $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ من نفس المستوي إذا وجد عددان حقيقيان α و β بحيث: $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.

$\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \alpha(-\vec{i} + 3\vec{j}) + \beta(\vec{i} + \vec{j} - 3k) = (-\alpha + \beta)\vec{i} + (3\alpha + \beta) + 3\beta\vec{k}$

$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ يكافئ $-5\vec{i} + 3\vec{j} - 9k = (-\alpha + \beta)\vec{i} + (3\alpha + \beta)\vec{j} + 3\beta\vec{k}$

يكافئ $\begin{cases} -\alpha+\beta=-5 \\ 3\alpha+\beta=3 \\ 3\beta=-9 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-3 \end{cases}$

و منه $\vec{u}=2\vec{v}-3\vec{w}$. إذن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ تقع في نفس المستوي.

حل الاختبار (27)

حل التمرين الأول:

نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوي 1.

0,3+0,4+0,2+b=1 يكافئ 0,9+b=1 أي b=1-0,9=0,1

نحسب الأمل الرياضياتي باستعمال القاعدة:

$$E(x)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=-2(0,3)+1(0,4)+a(0,2)+3(0,1)$$

$$=-0,6+0,4+0,2a+0,3=0,1+0,2a$$

$E(x)=0,5$ يكافئ $0,1+0,2a=0,5$ يكافئ $0,2a=0,5-0,1=0,4$

ومنه $a=\frac{0,4}{0,2}=2$.

حساب التباين:

$$v(x)=p_1(x_1-E(x))^2+p_2(x_2-E(x))^2+p_3(x_3-E(x))^2+p_4(x_4-E(x))^2$$

$$v(x)=0,3(-2-0,5)^2+0,4(1-0,5)^2+0,2(2-0,5)^2+0,1(3-0,5)^2$$

$$v(x)=1,875+0,1+0,45+0,67=3,095$$

الانحراف المعياري هو $\sigma(x)=\sqrt{v(x)}=\sqrt{3,095}=1,75$.

حل التمرين الثاني:

نرتب قيم هذه السلسلة الإحصائية تصاعديا.

99,5 ، 99,6 ، 99,8 ، 99,9 ، 99,9 ، 100 ، 100 ، 100 ، 100 ،100، 100,2 ،

100,2 ، 100,3 ، 100,3 ، 100,3 ، 100,6 ، 100,6 ، 100,6 ، 100,6 ، 100,7

100,7 ، 101,2 ، 101,2 ، 101,7 ، 101,7 ، 101,9 ، 102 ، 102,2 ، 102,2 ،

102,7 .

* بما أن عدد القيم هو 30 زوجيا فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الموجودتين في وسط الترتيب أي القيمتين ذي المرتبتين $\frac{n}{2}=\frac{30}{2}=15$ و $\frac{n}{2}+1=\frac{30}{2}+1=16$.

إذن الوسيط هو $Me=\frac{100,3+100,6}{2}=100,45$.

حساب الربعي الأول Q_1 و الربعي الثالث Q_3:

* $\frac{n}{4}=\frac{30}{4}=7,5$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\geq 7,5$ هو p=8.

الربع الأول هو القيمة ذي المرتبة 8. و منه $Q_1=100$.

* $\frac{3n}{4}=\frac{3(30)}{4}=22,5$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\geq 22,5$ هو p=23.

الربع الثالث هو القيمة ذي المرتبة 23. و منه $Q_3=101,2$.

حساب العشري الأول D_1 والعشري التاسع D_9.

* $\frac{n}{10}=\frac{30}{10}=3$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\geq 3$ هو p = 3.

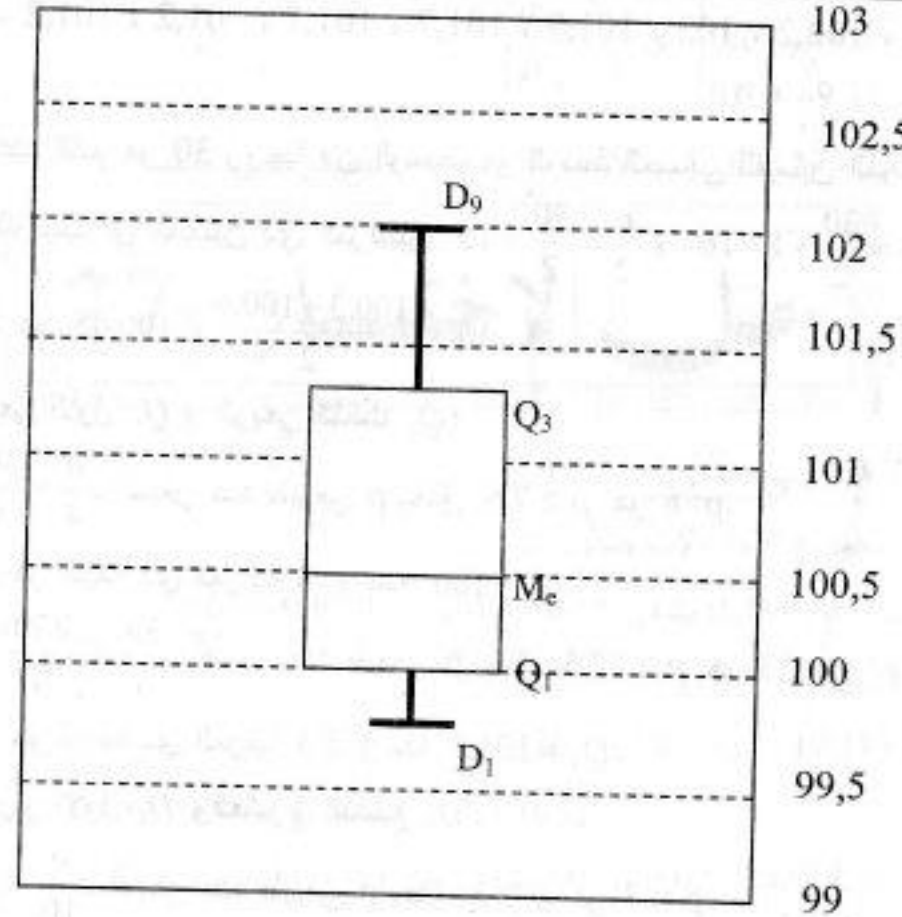
العشري الأول هو القيمة ذي المرتبة 3. و منه $D_1=99,8$.

* $\frac{9n}{10}=\frac{9(30)}{10}=27$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\geq 27$ هو p=27.

العشري التاسع هو القيمة ذي المرتبة 27. و منه $D_9=102$.

نلاحظ أن أصغر قيمة في السلسلة هي 99,5 و أكبر قيمة لها 102,7.

2) تمثيل السلسلة الإحصائية بمخطط بالعلبة:



✍ التمرين الثالث:

1) $x^2+y^2+z^2-8x-6y-2z+1=0$ تكافئ

$(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2-16-9-1+1=0$ يكافئ

$(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$ و منه المعادلة (*) هي معادلة سطح كرة مركزها $w(4;3;1)$ ونصف قطرها $R=5$.

2) إيجاد العبارة التحليلية للتحاكي h الذي مركزه A(-1 ;1 ;2) و نسبته 2.

لتكن $M'(x';y';z')$ صورة النقطة $M(x;y;z)$ بالتحاكي h .

$h(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$. و لدينا

$\overrightarrow{AM'}(x'+1;y'-1;z'-2)$ ، $\overrightarrow{AM}(x+1;y-1;z-2)$

$\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$ يكافئ $\begin{cases}x'+1=2(x+1)\\y'-1=2(y-1)\\z'-2=2(z-2)\end{cases}$ أي $\begin{cases}x'=2x+1\\y'=2y-1\\z'=2z-2\end{cases}$

لإيجاد صورة سطح الكرة (p) بالتحاكي h نبحث عن التحاكي العكسي h^{-1}

$h(M)=M'$ يكافئ $\begin{cases}x'=2x+1\\y'=2y-1\\z'=2z-2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}\\z=\frac{1}{2}z'+1\end{cases}$

$(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$ تكافئ

$\left(\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}-4\right)^2+\left(\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}-3\right)^2+\left(\frac{1}{2}z'+1-1\right)^2=25$ يكافئ

$\frac{1}{4}(x'-9)^2+\frac{1}{4}(y'-5)^2+\frac{1}{4}z'^2=25$ يكافئ

$(x'-9)^2+(y'-5)^2+z'^2=10$

و منه صورة سطح كرة مركزها w(4 ;3 ;1) و نصف قطرها 5 بالتحاكي h هي كرة مركزها $w'(9;5;0)$ و نصف قطرها 10.

✍ حل التمرين الرابع:

لدينا $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ ، $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$ تعني هذه النتيجة هندسيا أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=-\frac{\pi}{2}$ هو مقارب للمنحنى (C).

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$. تعني هذه النتيجة هندسيا أن المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C).

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و $f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$f'(x)=0$ تكافئ $-\sin x=0$ تكافئ $\sin x=0$ تكافئ $x=0$

$f'(x)<0$ يكافئ $\sin x<0$ أي $x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.

$f'(x)>0$ يكافئ $\sin x>0$ أي $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

و منه f متناقصة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ ومتزايدة على المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3) إنشاء التمثيل البياني (C):

نعلم أن التقريب التآلفي للدالة f في جوار a هي الدالة التآلفية:

$h\mapsto h\times f'(a)+f(a)$

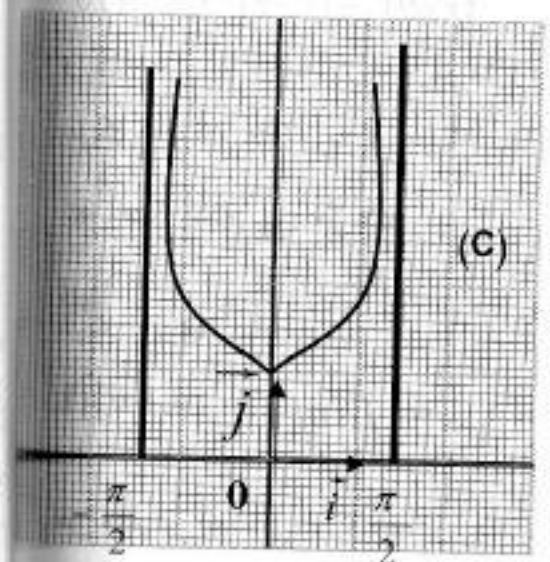
و لدينا $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ، $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$

ومنه الدالة $h\mapsto\frac{2}{3}h+\frac{2}{3}\sqrt{3}$ هي التقريب التآلفي للدالة f في جوار $\frac{\pi}{6}$.

نعلم أن $f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\approx\frac{2}{3}h+\frac{2}{3}\sqrt{3}$

بوضع h=0,03 نجد:

$f\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)\approx\frac{2}{3}(0{,}03)+\frac{2}{3}\sqrt{3}$ أي $f\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)\approx 1{,}17$



و منه $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)}\approx 1{,}17$ أي $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)\approx\frac{1}{1{,}17}$

و منه $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)\approx 0{,}85$

حل الاختبار (28)

حل التمرين الأول:

1) عبارة الحد العام هي: $u_n=u_0q^n=q^n$. حيث $u_0=0$ و $q\neq 0$

و لدينا $u_{n+2}=q^{n+2}$ ، $u_{n+1}=q^{n+1}$.

$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ تكافئ $q^{n+2}=q^{n+1}+q^n$ تكافئ $q^{n+2}-q^{n+1}-q^n=0$

تكافئ $q^n\left(q^2-q-1\right)=0$ يكافئ $q^2-q-1=0$.

مميز المعادلة $q^2-q-1=0$ هو $\Delta=5$ و حلاها هما $q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ أو $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

إن القيم الممكنة الأساس q هي $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2) * من أجل $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإن $u_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. بما أن $q>1$ فإن المتتالية الهندسية ليست متقاربة (متباعدة).

* من أجل $q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ فإن $u_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ بما أن $-1<q<1$ فإن المتتالية الهندسية u متقاربة.

3) نلاحظ أن المجموع $1+q+q^2+q^3+.....+q^n$ هو عبارة عن مجموع $n+1$ حدا الأولى من متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها q

• من أجل $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإنّ:

$$1+q+q^2+.....+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-1\right]$$

• من أجل $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ فإنّ:

$$1+q+q^2+....+q^n = \frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-1\right]$$

حل التمرين الثاني:

1) تكون الدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ معرفة إذا كان $x^2+4>0$.

إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $E = R$.

f قابلة للاشتقاق على R و $f'(x) = \frac{-x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$

إنّ إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $(-x)$.

$f'(x)=0$ تكافئ $-x=0$ أي $x=0$.

$f'(x)>0$ تكافئ $-x>0$ أي $x<0$.

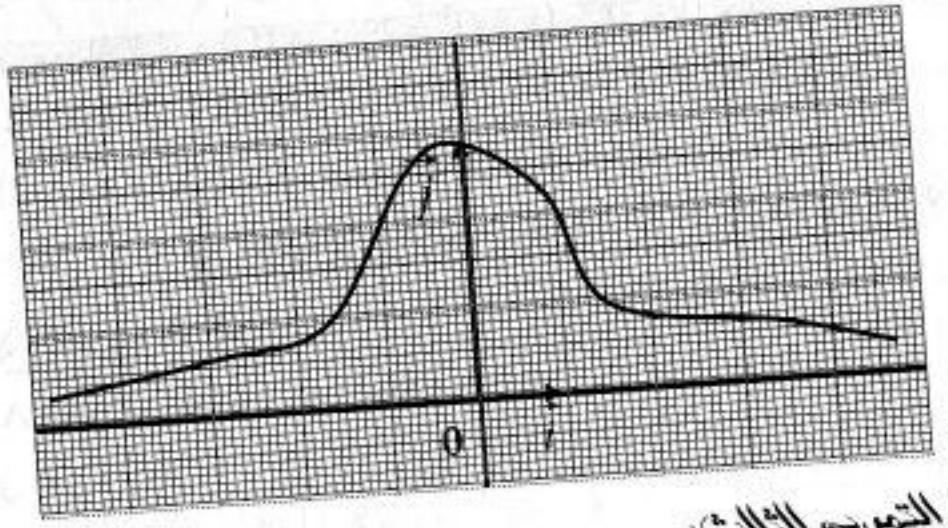
$f'(x)<0$ تكافئ $-x<0$ أي $x>0$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$0,5$	↘	0

من النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ينتج أن المستقيم ذي المعادلة $y=0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C).

• إنشاء المنحنى (C):



حل التمرين الثالث:

1) شعاع الانسحاب t هو $\overrightarrow{AA'}(-2;-5)$.

وشعاع الانسحاب t' هو $\overrightarrow{BB'}(-5;5)$.

• إيجاد العبارة التحليلية للانسحاب t:

ليكن $M'(x';y')$ صورة النقطة $M(x;y)$ بالانسحاب t.

$t(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$ يكافئ

$x'-x=-2$ و $y'-y=-5$ أي $x'=x-2$ و $y'=y-5$

• إيجاد العبارة التحليلية للانسحاب t':

ليكن $M'(x',y')$ صورة النقطة $M(x;y)$ بالانسحاب t'.

$t'(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BB'}$ يكافئ

$x'-x=5$ و $y'-y=5$ يكافئ $x'=x-5$ و $y'=y+5$

نعلم أن تركيب انسحابين هو انسحاب شعاعه مجموع الشعاعين.

f هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}=\vec{u}$ أي $\vec{u}(-7;0)$

لإيجاد صورة (Δ) بالانسحاب t نبحث عن التحويل العكسي t^{-1}.

$t'(M)=M'$ يكافئ $(x'-x=-2$ و $y'-y=-5)$ يكافئ $x=x'+2$ و $y=y'+5$

$x-2y-5=0$ يكافئ $x'+2-2(y'+5)-5=0$ يكافئ $x'-2y'-13=0$

إذن صورة المستقيم (Δ) بالانسحاب t هو مستقيم (Δ') معادلته $x-2y-13=0$.

4) نعلم أن معادلة الدائرة (C) هي: $(x-3)^2+(y-4)^2=29$ حيث $AB=\sqrt{29}$

$(x-3)^2+(y-4)^2=29$ يكافئ $(x'+2-3)^2+(y'+5-4)^2=29$ يكافئ

$(x'-1)^2+(y'+1)^2=29$. إذن صورة الدائرة (C) ذات المركز A

ونصف القطر $\sqrt{29}$ هي الدائرة (C') ذات المركز E(1 ;-1) ونصف قطرها $\sqrt{29}$

حل التمرين الرابع:

النقطة Λ تنتمي إلى المستوي ذي المعادلة $y=5$

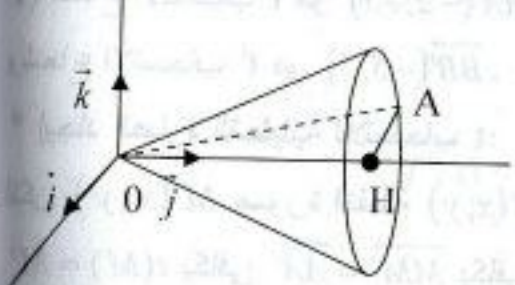
العمودي على (oy).

لتكن H المسقط العمودي للنقطة A

على (oy) أي H(0 ;5 ;0)

إذن $\overrightarrow{AH}(-2;0;2)$

ومنه $AH=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$



لدينا المثلث AOH قائم في H إذن:

$\tan H\hat{O}A=\frac{AH}{OH}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

و منه معادلة سطح المخروط هي:

$x^2+z^2=y^2\tan^2 H\hat{O}A$ أي

$x^2+z^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2y^2$ أي $x^2+z^2=\frac{8}{25}y^2$

لدينا: $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{5}$. باستعمال الحاسبة وبتدوير النتيجة إلى الوحدة نجد $\alpha=29°$

حل الاختبار (29)

حل التمرين الأول:

نسمي Ω مجموعة النتائج الممكنة و عددها 15.

$\Omega=\{21;22;23;24;25;26;27;28;29;30;31;32;33;34;35\}$

1) لدينا $A=\{21;23;25;27;29;31;33;35\}$

$p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{8}{15}$

2) لدينا $B=\{23;29;31\}$ و منه $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

3) لدينا $C=\{24;25;28;30;32;35\}$

$p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{6}{15}$

4) لدينا $D=\{21;27;33\}$ و منه $p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

حل التمرين الثاني:

1) لدينا $\bar{x}=45$ ، $v(x)=8$.

الوسط الحسابي للسلسلة y_i حيث $y_i=10x_i+40$ هو:

$\bar{y}=10\bar{x}+40=10(45)+40=490$

التباين للسلسلة y_i هو $v(y)=a^2v(x)=10^2(8)=800$

2) الانحراف الربعي للسلسلة الإحصائية k_i هو $I_k=210-115=95$

الانحراف الربعي للسلسلة الإحصائية z_i حيث $z_i=3k_i-12$ هو

$I_z=aI_k=3(95)=285$

حل التمرين الثالث:

($x^2+y^2+2x-4y-4=0$ يكافئ $(x+1)^2+(y-2)^2-1-4-4=0$

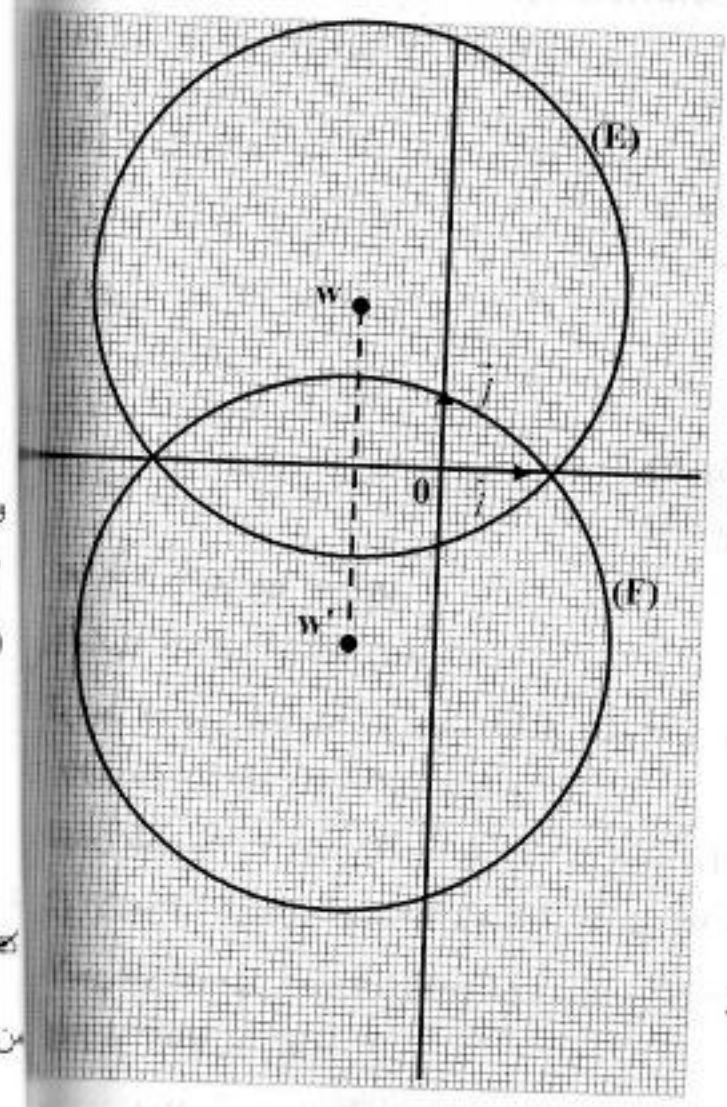
يكافئ $(x+1)^2+(y-2)^2=9$. إذن المجموعـة (E) هي دائرة مركزها w(-1 ;2) ونصف قطرها 3.

* $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ تكافئ $(x+1)^2+(y+2)^2-1-4-4=0$

تكافئ $(x+1)^2+(y+2)^2=9$. إذن المجموعة (F) هي دائرة مركزها $w'(-1;-2)$ ونصف قطرها 3.

2) إحداثيات النقط المشتركة بين المجموعتين (E) و (F) هي حلول الجملة.

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=9.....(1)\\(x+1)^2+(y+2)^2=9.....(2)\end{cases}$$



بطرح (2) من (1) نجد:

$(y-2)^2-(y+2)^2=0$ تكافئ

$(y-2-y-2)(y-2+y+2)=0$

تكافئ $-4y=0$ أي $y=0$.

بتعويض قيمة y في المعادلة (1)

نجد: $(x+1)^2+4=9$

أي $(x+1)^2-5=0$ أي

$(x+1+\sqrt{5})(x+1-\sqrt{5})=0$

ومنه $x=\sqrt{5}-1$ أو

$x=-\sqrt{5}-1$.

إذن الدائرتان (E) و (F) تتقاطعان في النقطتين

$K(\sqrt{5}-1;0)$ ، $G(-\sqrt{5}-1;0)$

3) إنشاء المجموعتين (E) و (F).

حل التمرين الثاني:

لدينا A(1 ;1 ;2) ، B(2 ;-1 ;0) ، D(2 ;3 ;5) ، B'(4 ;7 ;9)

نعلم أن $\overrightarrow{BB'}(2;8;9)$

نرمز بـ $(x;y;z)$ إلى إحداثيات النقطة A' . فيكون $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$

ولدينا $\overrightarrow{AA'}(x-1;y-1;z-2)$.

$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ يكافئ $x-1=2$ و $y-1=8$ و $z-2=9$)

يكافئ $x=3$ و $y=9$ و $z=11$ و منه $A'(3;9;11)$

- نرمز بـ $(x;y;z)$ إلى إحداثيات النقطة C فيكون $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

و لدينا $\overrightarrow{BC}(x-2;y+1;z)$ ، $\overrightarrow{AD}(1;2;3)$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ يكافئ $x-2=1$ و $y+1=2$ و $z=3$)

تكافئ $x=3$ و $y=1$ و $z=3$) و منه $C(3;1;3)$.

- نرمز بـ $(x;y;z)$ إلى إحداثيات النقطة C' فيكون $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$

و لدينا $\overrightarrow{CC'}(x-3;y-1;z-3)$. $\overrightarrow{BB'}(2;8;9)$

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$ يكافئ $x-3=2$ و $y-1=8$ و $z-3=9$) يكافئ

$x=5$ و $y=9$ و $z=12$) و منه $C'(5;9;12)$

- نرمز بـ $(x;y;z)$ إلى إحداثيات النقطة D' فيكون $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BB'}$

و لدينا $\overrightarrow{DD'}(x-2;y-3;z-5)$.

$\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BB'}$ يكافئ $x-2=2$ و $y-3=8$ و $z-5=9$) يكافئ

$x=4$ و $y=11$ و $z=14$) و منه $D'(4;11;14)$

حل الاختبار (30)

حل التمرين الأول:

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$u_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{3}u_n$

ومنه $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n$. أي (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $u_0=1$.

بما أن u_n متتالية هندسية و أساسها $\frac{2}{3}$ ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ فإنها متقاربة.

2) لدينا $v_n=\frac{2^n-1}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

بما أن المتتالية ذات الحد العام $-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ هندسية و أساسها $\frac{1}{3}$ ينتمي إلى المجال $]-1;1[$

فهي متقاربة. والمتتالية ذات الحد العام $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متقاربة. ونعلم أن مجموع متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة.

إذن المتتالية ذات الحد العام v_n متقاربة.

- $w_n=\frac{2^n}{3^n+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

بما أنّ المتتالية ذات الحد العام $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ متقاربة نحو 0 (لأنها هندسية و أساسها $\frac{1}{3}$)

والمتتالية الثابتة 1 متقاربة نحو 1 فإنّ المتتالية ذات الحد العام.

$1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$ متقاربة نحو 1. ومنه المتتالية ذات الحد العام $\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ متقاربة نحو 1.

ونعلم أن جداء متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة نحو جداء نهايتيهما ومنه المتتالية

ذات الحد العام $\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متقاربة نحو 0 (لأنّ $1\times 0=0$).

إذن $s_n=u_0+u_1+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

حل التمرين الثاني:

1) $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=0,1+0,2+0,3+0,15+0,25=1$

2) $p(A)=p(\{X\le 2\})=p(X=2)+p(X=-1)=0,2+0,1=0,30$

$p(B)=p(\{X>3\})=p(X=4)+p(X=5)=0,15+0,25=0,40$

$p(C)=p(\{X\le 3\})=1-p(\{X>3\})=1-0,40=0,60$

3) حساب الأمل الرياضياتي والانحراف المعياري.

* **الأمل الرياضياتي هو:**

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5$

$=-1(0,1)+2(0,2)+3(0,3)+4(0,15)+5(0,25)=3,05$

* **التباين هو:**

$V(x)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+p_3(x_3-E(X))^2+p_4(x_4-E(X))^2+p_5(x_5-E(X))^2$

$=0,1(-1-3,05)^2+0,2(2-3,05)^2+0,3(3-3,05)^2+0,15(4-3,05)^2+0,25(5-3,05)^2$

$=1,64+0,22+0,0007+0,1353+0,95=2,946$

* **الانحراف المعياري هو:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2,946}=1,71$

حل التمرين الثالث:

1) معادلة سطح كرة مركزها w(-2 ;-3 ;-1) ونصف قطرها $R=3\sqrt{3}$ هي:

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=27$

2) نصف قطر الكرة هو الطول AW حيث:

$AW=\sqrt{(-2-1)^2+(3+3)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{6}$.

معادلة كرة التي مركزها w و نصف قطرها $3\sqrt{6}$ هي:

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)=54$

معادلة المستوي الذي يشمل w ويوازي المستوي $(x\circ z)$ هي y=3.

حل التمرين الرابع:

1) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;-3);(B;-1);(C;2)\}$

(لاحظ أن $-3-1+2\neq 0$)

M' مرجح الجملة $\{(A;-3);(B;-1);(C;2);(M;3)\}$ يعني

M' مرجح الجملة $\{(G;-2);(M;3)\}$ أي $-2\overrightarrow{M'G}+3\overrightarrow{M'M}=0$

أي $-2\overrightarrow{M'G}+3\left(\overrightarrow{M'G}+\overrightarrow{GM}\right)=0$ و منه $\overrightarrow{M'G}+3\overrightarrow{GM}=0$

أي $\overrightarrow{GM'}=3\overrightarrow{GM}$. إذن f هو تحاك مركزه G و نسبته 3.

2) M' مرجح الجملة $\{(A;5);(B;-4);(C;-1);(M;3)\}$ معناه:

أي $5\overrightarrow{M'A}-4\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'C}+3\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

أي $5\overrightarrow{M'A}-4\left(\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AC}\right)+3\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

أي $5\overrightarrow{M'A}-4\overrightarrow{M'A}-4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

و منه $-4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$ $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}\left(4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

بما أن الشعاع $\frac{1}{3}\left(4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ ثابت لا يتعلق بالنقطة M فإن التحويل f هو انسحاب

شعاعه $\frac{1}{3}\left(4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

حل الاختبار (31)

حل التمرين الأول:

1) أ/ حساب الوسط الحسابي و الوسيط للسلسلة A:

الوسط الحسابي هو:

$$\overline{x_1}=\frac{8+9+9+10+10+12+12+12+13+13+13}{11}=\frac{121}{11}=11$$

بما أن عدد القيم 11 فرديا فإن الوسيط هو العلامة التي تقع في وسط الترتيب.

إذن الوسيط هو $m_1=12$. (لاحظ ترتيب الوسيط $=\frac{11+1}{2}=6$)

ب) حساب الوسط الحسابي و الوسيط للسلسلة B:

* **الوسط الحسابي هو:**

$$\overline{x_2}=\frac{3+4+7+8+10+10+12+13+18+18+18}{11}=\frac{121}{11}=11$$

الوسيط للسلسلة B هو $m_2=10$

2) أ/ **حساب الربعي الأول والربعي الثالث والانحراف الربعي للسلسلة A:**

* $\frac{n}{4}=\frac{11}{4}=2.75$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\geq 2.75$ هو p=3.

الربعي الأول هو القيمة ذي المرتبة 3. إذن $Q_1=9$.

* $\frac{3n}{4}=\frac{33}{4}=8.25$. أصغر عدد طبيعي p يحقق $p\geq 8.25$ هو p=9.

الربعي الثالث هو القيمة ذي المرتبة 9. إذن $Q_3=13$.

الانحراف الربعي هو $I=Q_3-Q_1=13-9=4$.

ب) حساب الربعي الأول والثالث والانحراف الربعي للسلسلة B:

الربعي الأول هو القيمة ذي المرتبة 3. إذن $Q_1=7$

الربعي الثالث هو القيمة ذي المرتبة 9 . إذن $Q_3=18$

الانحراف الربعي للسلسلة B هو $I = Q_3 - Q_1 = 18 - 7 = 11$

3) المدى للسلسلة A هو 5=8-13 و المدى للسلسلة B هو 15=3-18

* **نلخص بعض المؤشرات في جدول مع تفسير بعضها.**

	تفسير الانحراف الربعي	الانحراف الربعي	المدى	تفسير المدى	الوسيط	الوسط الحسابي
المجموعة A	50% من علامات السلسلة تتشتت على مجال طوله 4	4	5	العلامات موزعة على مجال طوله 5	12	11
المجموعة B	50% من علامات السلسلة تتشتت على مجال طوله 11	11	15	العلامات موزعة على مجال طوله 15	10	11

* **تفسير حول المدى:** بما أن المدى في السلسلة B أكبر من المدى في السلسلة A. فإنه يمكن القول بأن مستوى عمل المجموعة A متقارب أكثر من مستوى عمل المجموعة B. أي مستوى المجموعة A متجانس وهو العكس بالنسبة إلى مستوى المجموعة B. وهذا بالرغم من أن معدل المجموعتين هو نفسه 11.

حل التمرين الثاني:

لدينا $x_B = 1$ و $x_C = 3$ ، $x_{A_0} = -1$.

A_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n;4);(B;-3);(C;1)\}$ يعني:

$$4\overrightarrow{A_{n+1}A_n} - 3\overrightarrow{A_{n+1}B} + \overrightarrow{A_{n+1}C} = \vec{0} \quad \ldots\ldots (*)$$

1) بوضع n=0 في المساواة (*) نجد : $4\overrightarrow{A_1A_0} - 3\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} = \vec{0}$ يكافئ

$4\overrightarrow{A_1A_0} - 3\left(\overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{A_0B}\right) + \overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{A_0C} = \vec{0}$ أي $2\overrightarrow{A_1A_0} = 3\overrightarrow{A_0B} - \overrightarrow{A_0C}$

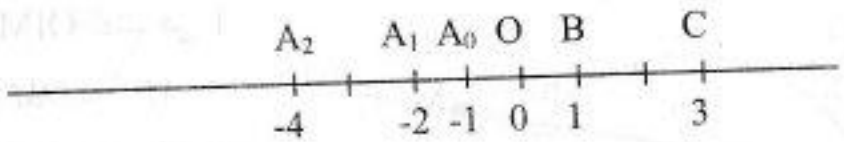
و منه $\overrightarrow{A_0A_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_0C} - 3\overrightarrow{A_0B}\right)$. إذن فاصلة M' هي 2-.

بوضع n=1 في المساواة (*) نجد : $4\overrightarrow{A_2A_1} - 3\overrightarrow{A_2B} + \overrightarrow{A_2C} = 0$ يكافئ.

$4\left(\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1}\right) - 3\left(\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

أي: $2\overrightarrow{A_2O} = -4\overrightarrow{OA_1} + 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

ومنه: $\overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{2}\left(4\overrightarrow{OA_1} - 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. (بعد الحساب) نجد فاصلة A_2 هي 4-.



2) حساب a_{n+1} بدلالة a_n :

إحداثية الشعاع $\overrightarrow{A_{n+1}A_n}$ هي $a_2 - a_{n+1}$ ، وإحداثية الشعاع $\overrightarrow{A_{n+1}B}$ هي $1 - a_{n+1}$

وإحداثية الشعاع $\overrightarrow{A_{n+1}C}$ هي $3 - a_{n+1}$.

$4\overrightarrow{A_{n+1}A_n} - 3\overrightarrow{A_{n+1}B} + \overrightarrow{A_{n+1}C} = \vec{0}$ يكافئ $4(a_n - a_{n+1}) - 3(1 - a_{n+1}) + (3 - a_{n+1}) = 0$

يكافئ $4a_n - 4a_{n+1} - 3 + 3a_{n+1} + 3 - a_{n+1} = 0$ أي $4a_n - 2a_{n+1} = 0$

و منه $a_{n+1} = 2a_n$. إذن المتتالية a_n هندسية أساسها 2 وحدها الأول $a_0 = -1$. (لاحظ أن $a_0 = -1$ هي فاصلة A_0)

3) بما أن المتتالية a_n هندسية وأساسها 2 لا ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ فهي ليست متقاربة (متباعدة).

وعبارة الحد العام هي: $a_n = a \circ q^n = -2^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-2^n\right) = -\infty$$

4) نحسب أولا المجموع $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ الذي يمثّل مجموع n+1 حدا الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول a_0 و أساسها 2.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 1 - 2^{n+1}$$

$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = -255$ يكافئ $1 - 2^{n+1} = -255$ يكافئ

$2^{n+1} = 256$ أي $2^{n+1} = 2^8$ و منه $n + 1 = 8$ أي $n = 7$.

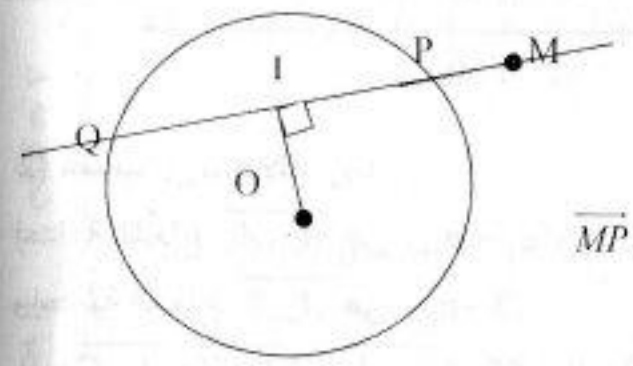
حل التمرين الثالث:

1) I منتصف [PQ] يكافئ $\vec{IP}+\vec{IQ}=\vec{0}$ أي $\vec{IQ}=-\vec{IP}$

$$\vec{MP}\cdot\vec{MQ}=\left(\vec{MI}+\vec{IP}\right)\cdot\left(\vec{MI}+\vec{IQ}\right)=\left(\vec{MI}+\vec{IP}\right)\cdot\left(\vec{MI}-\vec{IP}\right)$$
$$=MI^2-IP^2$$

2) في المثلث OIM القائم في I

لدينا: $MI^2=OM^2-OI^2$



في المثلث OIP القائم في I لدينا:

$IP^2=OP^2-OI^2$ (لاحظ OP=R).

$$\vec{MP}\cdot\vec{MQ}=MI^2-IP^2$$
$$=OM^2-OI^2-\left(OP^2-OI^2\right)$$
$$=OM^2-OI^2-OP^2+OI^2$$
$$=OM^2-OP^2=OM^2-R^2$$

حل الاختبار (32)

حل التمرين الأول:

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$
$$=\frac{2+2\sqrt{12}+6}{2-4}=-4-2\sqrt{3}$$

$$\cot an\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{\tan\frac{7\pi}{12}}=\frac{1}{-4-2\sqrt{3}}\times\frac{-4+2\sqrt{3}}{-4+2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{-4+2\sqrt{3}}{16-12}=-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

حل التمرين الثاني:

1) ينتج من الجدول أن عدد الحالات الممكنة هو 9 أي $Card\Omega=9$

مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي {9,8,7,6,5}

	3	4	5
2	(2 ;3)	(2 ;4)	(2 ;5)
3	(3 ;3)	(3 ;4)	(3 ;5)
4	(4 ;3)	(4 ;4)	(4 ;5)

2) إيجاد قانون احتمال المتغير العشوائي X:

$p(X=5)=\frac{1}{9}$ ، $p(X=6)=\frac{2}{9}$ ، $p(X=7)=\frac{3}{9}$ ، $p(X=8)=\frac{2}{9}$ ،

$p(X=9)=\frac{1}{9}$

X	5	6	7	8	9
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

3) حساب الأمل الرياضياتي و الانحراف المعياري:

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5$$
$$E(X)=5\left(\frac{1}{9}\right)+6\left(\frac{2}{9}\right)+7\left(\frac{3}{9}\right)+8\left(\frac{2}{9}\right)+9\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{63}{9}=7$$

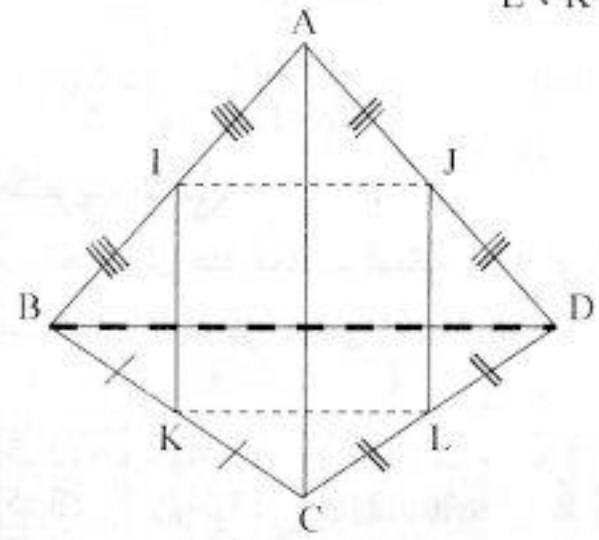
* **التباين هو:**

$$V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+p_3(x_3-E(X))^2+p_4(x_4-E(X))^2+p_5(x_5-E(X))^2$$
$$=\frac{1}{9}(5-7)^2+\frac{2}{9}(6-7)^2+\frac{3}{9}(7-7)^2+\frac{2}{9}(8-7)^2+\frac{1}{9}(9-7)^2=\frac{12}{9}=1,33$$

* **الانحراف المعياري هو:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1,33}=1,15$

حل التمرين الثالث

1) لكي نبرهن أن النقط I ، J ، K ، L تنتمي إلى نفس المستوي يكفي أن نبرهن أن الرباعي IJKL متوازي أضلاع.



لدينا في المثلث ACD: J و L منتصفا الضلعين [AD] و [CD] على الترتيب حسب خاصية مستقيم المنتصفين فإن (LJ) // (AC) و $\overrightarrow{LG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.....(1)

لدينا في المثلث ACB: I و K منتصفا الضلعين [AB] و [BC] على الترتيب.

حسب خاصية مستقيم المنتصفين فإن (KI) // (AC) و $\overrightarrow{KI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.....(2)

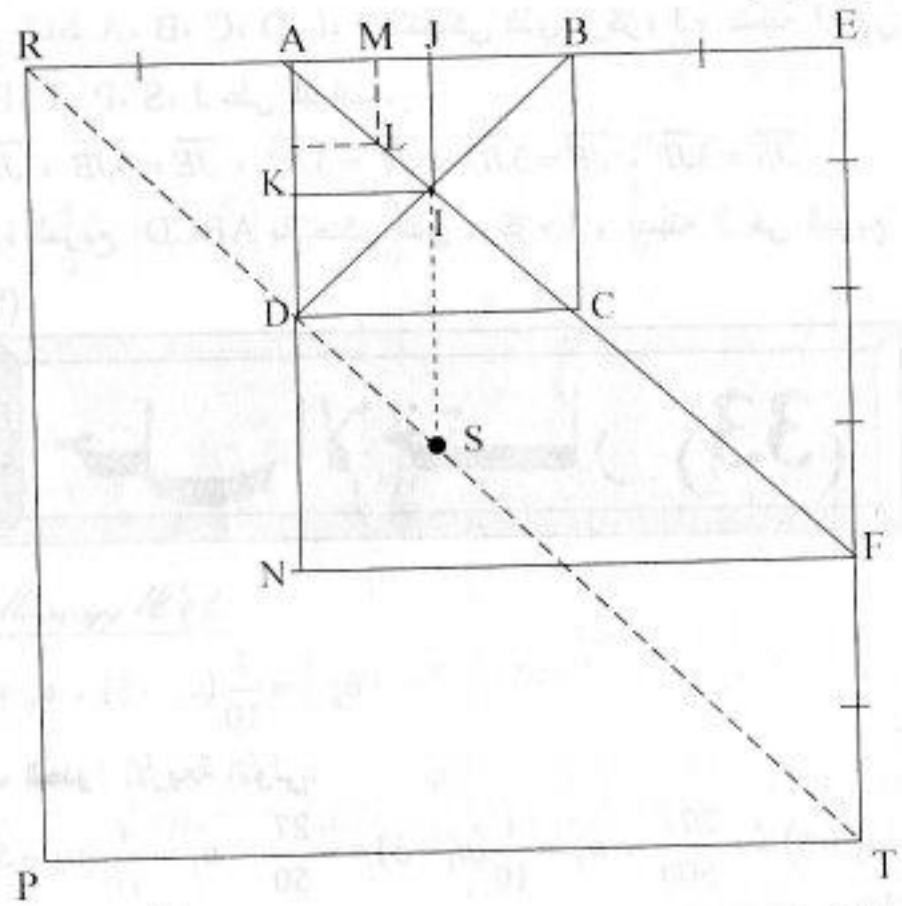
من المساواتين (1) و (2) نجد : $\overrightarrow{LG}=\overrightarrow{KI}$ و هذا معناه أن الرباعي IJKL متوازي أضلاع. إذن النقط I، J، K، L تنتمي إلى نفس المستوي.

2) لدينا $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IK}$ و بما أن $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{JL}$ فإن $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{JL}$

3) المساواة $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{JL}$ تعني أن الأشعة $\overrightarrow{JK}$ ، $\overrightarrow{JI}$ ، $\overrightarrow{JL}$ تقع في نفس المستوي أي مرتبطة خطيا.

حل التمرين الرابع

ABCD مربع مركزه I.



- صور النقط A، B ، C، D، I، J بالتحاكي الذي Aو نسبته $\frac{1}{2}$ هي النقط A، J، I ، K ، L ، M على الترتيب.

حيث $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$

إذن صورة المربع ABCD بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ هي المربع AJIK (مركزه L).

- صور النقط A، B، C، D، I، J بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 هي النقط A، E ، F، N، C، B على الترتيب.

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AJ}$ ، $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$

إذن صورة المربع ABCD بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 هي المربع AEFN (مركزه C) .

- صور النقط A، B، C، D، I، J بالتحاكي الذي مركزه J و نسبته 3 هي النقط R، E، T، P، S، J على الترتيب.

$\overrightarrow{JR}=3\overrightarrow{JA}$ ، $\overrightarrow{JE}=3\overrightarrow{JB}$ ، $\overrightarrow{JT}=3\overrightarrow{JC}$ ، $\overrightarrow{JP}=3\overrightarrow{JD}$ ، $\overrightarrow{JS}=3\overrightarrow{JI}$

إذن صورة المربع ABCD بالتحاكي الذي مركزه J و نسبته 3 هي المربع RETP. (مركزه S).

حل الاختبار (33)

حل التمرين الأول:

لدينا: $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{10}(u_n-5)$

1) حساب الحدود الأربعة الأولى:

$u_1=\frac{1}{10}(u_0-5)=-\frac{2}{5}$ ، $u_2=\frac{1}{10}(u_1-5)=-\frac{27}{50}$ ، $u_3=\frac{1}{10}(u_2-5)=-\frac{277}{500}$

2) أ/ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha=\frac{1}{10}(u_n-5)+\alpha=\frac{1}{10}u_n-\frac{1}{2}+\alpha$$

$$=\frac{1}{10}(u_n+\alpha)-\frac{1}{10}\alpha-\frac{1}{2}+\alpha$$

$$=\frac{1}{10}(u_n+\alpha)+\frac{9}{10}\alpha-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}v_n+\frac{9}{10}\alpha-\frac{1}{2}$$

المتتالية V_n هندسية يكافئ $\frac{9}{10}\alpha-\frac{1}{2}=0$ أي $\frac{9}{10}\alpha=\frac{1}{2}$ و منه $\alpha=\frac{5}{9}$

إذن من أجل $\alpha=\frac{5}{9}$ تكون المتتالية V_n هندسية أساسها $\frac{1}{10}$ وحدها الأول

$$v_0=u_0+\frac{5}{9}=1+\frac{5}{9}=\frac{14}{9}$$

ب) من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_n=v_0q^n=\frac{14}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n$

و منه $u_n=v_n-\frac{5}{9}=\frac{14}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n-\frac{5}{9}$

ج) $s_n=u_0+u_1+u_2+....+u_{n-1}$

$$s_n=\left(v_0-\frac{5}{9}\right)+\left(v_1-\frac{5}{9}\right)+\left(v_2-\frac{5}{9}\right)+...+\left(v_{n-1}-\frac{5}{9}\right)$$

$$s_n=(v_0+v_1+v_2+.....+v_{n-1})-\left(\frac{5}{9}+\frac{5}{9}+.....+\frac{5}{9}\right)$$

$$s_n=v_0\frac{1-q^n}{1-q}-\frac{5}{9}n=\frac{14}{9}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}-\frac{5}{9}n=\frac{140}{81}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)-\frac{5}{9}n$$

د) $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{140}{81}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]-\frac{5}{9}n\right)=-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{140}{81n}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]-\frac{5}{9}\right)=0\times(1-0)-\frac{5}{9}=-\frac{5}{9}$$

حل التمرين الثاني:

العلامات	عدد التلاميذ n_i	مركز الفئات x_i	n_ix_i	التكرار المجمع النازل	التكرار المجمع الصاعد
[0;4[	20	2	40	200	20
[4;8[	30	6	180	180	50
[8;12[	95	10	950	150	145
[12;16[	40	14	560	55	185
[16;20]	15	18	270	15	200

1) الوسط الحسابي لهذه السلسلة هي:

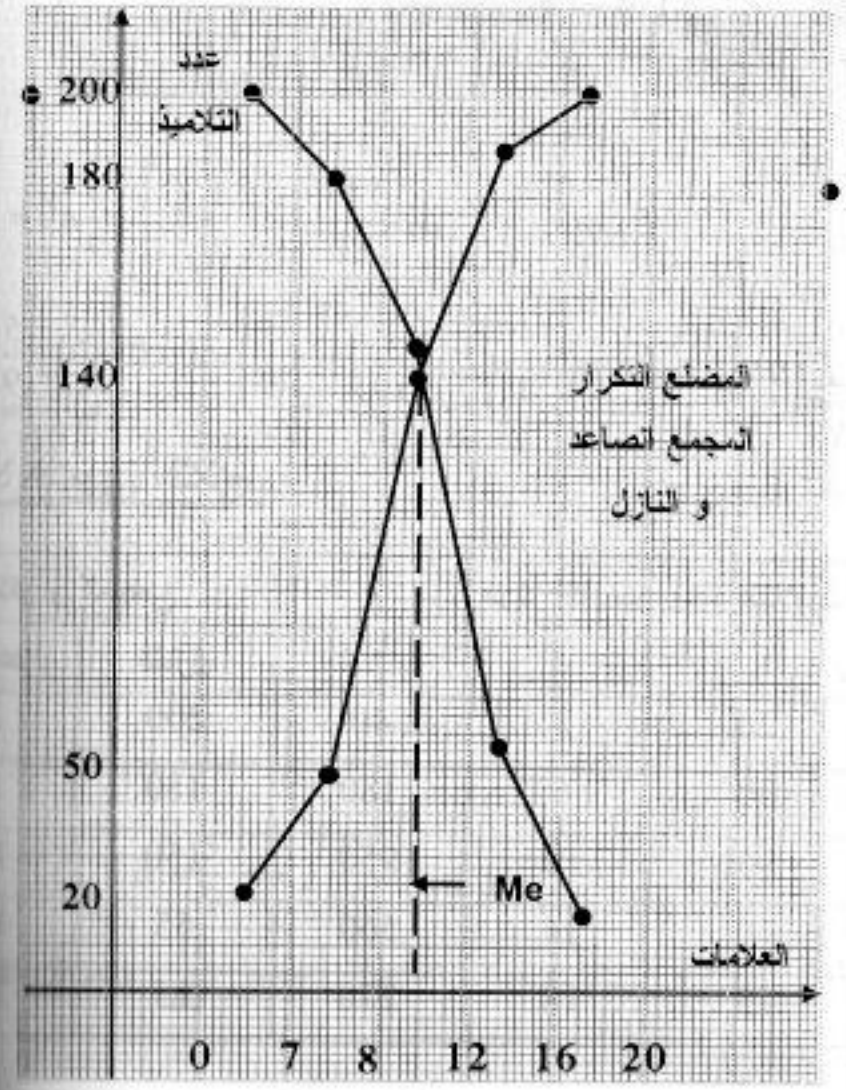
$$\bar{x} = \frac{40+180+950+560+270}{200} = \frac{2000}{200} = 10$$

2) التكرار المجمع الصاعد لفئة هو مجموع تكرار هذه الفئة و تكرارات الفئات التي تسبقها، والتكرار المجمع النازل لفئة هو مجموع تكرار هذه الفئة وتكرارات الفئات التي تليها.

3) إنشاء المضلع للتكرار المجمع الصاعد و النازل.

نعلم أن فاصلة نقطة تقاطع المضلعين للتكرار المجمع الصاعد والنازل هي قيمة الوسيط.

إذن ينتج من الرسم أن الوسيط هو $Me = 10$.



4) التباين هو:

$$v = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + n_3(x_3-\bar{x})^2 + n_4(x_4-\bar{x})^2 + n_5(x_5-\bar{x})^2\right]$$

$$v = \frac{1}{200}\left[20(2-10)^2 + 30(6-10)^2 + 95(10-10)^2 + 40(14-10)^2 + 15(18-10)^2\right]$$

$$v = \frac{1}{200}(1280+480+0+640+960) = \frac{3360}{200} = 16,8$$

* الانحراف المعياري هو: $s = \sqrt{v} = \sqrt{16,8} = 4,09$

حل التمرين الثالث:

1) إيجاد العبارة التحليلية لكل من التحويلين f و g.

- لتكن $M'(x';y')$ صورة النقطة $M(x;y)$ بالتحاكي f الذي مركزه $I(1;0)$ و نسبته 2.

$f(M) = M'$ يكافئ $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$. و لدينا $\overrightarrow{IM'}(x'-1;y')$ ، $\overrightarrow{IM}(x-1;y)$

$\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$ يكافئ $\begin{cases} x'-1 = 2(x-1) \\ y'-0 = 2(y-0) \end{cases}$ أي $\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y \end{cases}$

- لتكن $M'(x';y')$ صورة النقطة $M(x;y)$ بالتحاكي g الذي مركزه $J(5;2)$ و نسبته $\frac{1}{2}$

$g(M) = M'$ يكافئ $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ و لدينا $\overrightarrow{JM'}(x'-5;y'-2)$، $\overrightarrow{JM}(x-5;y-2)$

$\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ يكافئ $\begin{cases} x'-5 = \frac{1}{2}(x-5) \\ y'-2 = \frac{1}{2}(y-2) \end{cases}$ أي $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$

2) إيجاد العبارة التحليلية للتحويل h حيث $h = g \circ f$

$$M(x;y) \xrightarrow{f} M'(x';y') \xrightarrow{g} M''(x'';y'')$$

$f(M) = M'$ يكافئ $\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y \end{cases}$

$g(M') = M''$ يكافئ $\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x' + \frac{5}{2} \\ y'' = \frac{1}{2}y' + 1 \end{cases}$

$h(M)=M'$ يكافئ $\begin{cases}x''=\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{5}{2}\\ y''=\frac{1}{2}(2y)+1\end{cases}$ أي $\begin{cases}x''=x+2\\ y''=y+1\end{cases}$

3) ينتج من الفرع السابق أن h هو انسحاب شعاعه $\vec{u}(2;1)$

4) لإيجاد صورة الدائرة (C) نبحث عن الانسحاب العكسي h^{-1} :

$h(M)=M'$ يكافئ $\begin{cases}x'=x+2\\ y'=y+1\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=x'-2\\ y=y'-1\end{cases}$

نعلم أن معادلة الدائرة (C) هي : $(x-5)^2+(y-2)^2=16$.

$(x-5)^2+(y-2)^2=16$ يكافئ $(x'-2-5)^2+(y'-1-2)^2$ أي

$(x-7)^2+(y-3)^2=16$. إذن صورة الدائرة (C) ذات المركز J بالانسحاب h هي الدائرة (C') ذات المركز $J'(7;3)$ و نصف القطر 4.

حل الاختبار (34)

حل التمرين الأول:

1) الدالة f حيث $f(x)=\frac{1-x}{1+2x}$ معرفة على $E=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

ليكن α عدد حقيقي حيث $x\in E$. نعلم أن ميل المماس في A هو $f'(\alpha)$

$$f'(x)=\frac{-1(1+2x)-2(1-x)}{(1+2x)^2}=\frac{-1-2x-2+2x}{(1+2x)^2}=\frac{-3}{(1+2x)^2}$$

$f'(\alpha)=-3$ يكافئ $\frac{-3}{(1+2\alpha)^2}=-3$ يكافئ $(1+2\alpha)^2=1$

يكافئ $(1+2\alpha)^2-1=0$ يكافئ $(1+2\alpha+1)(1+2\alpha-1)=0$

يكافئ $4\alpha(\alpha+1)=0$ و منه $x=0$ أو $x=-1$

إذن $f(0)=1$ و $f(-1)=-2$. و منه توجد نقطتان من (C).

يكون عندهما ميل المماس يساوي 3- هما $A_1(0;1)$ ، $A_2(-1;-2)$

2) نعلم أن عدد نقط تقاطع (C) و (D_m) هي عدد حلول الجملة:

$$\begin{cases}y=\frac{1-x}{1+2x}\\ y=mx+1\end{cases}$$

$\frac{1-x}{1+2x}=mx+1$ يكافئ $(1-x)=(mx+1)(1+2x)$ يكافئ

$1-x=mx+2x^2+1+2x$ أي $2mx^2+(m+3)x=0$ .....(*)

*** المناقشة:**

✓ **الحالة الأولى:** إذا كان $2m=0$ أي $m=0$: بالتعويض في المعادلة (*) نجد:

$3x=0$ أي $x=0$. بما أن المعادلة (*) قبلت حلا وحيدا هو 0

فإن الجملة أيضا تقبل حلا وحيدا هو الثنائية (1 ;0) وبالتالي (C) يقطع (D_0) في النقطة $A_1(0;1)$

✓ **الحالة الثانية:** إذا كان $2m\neq 0$ أي $m\neq 0$ فإن:

لاحظ أن $\Delta=(m+3)^2-4(2m)(0)=(m+3)^2$.$(m+3)^2\geq 0$

1) إذا كان m=-3 فإن المعادلة (*) تقبل حلا مضاعفا هو 0، و بالتالي الجملة تقبل حلا مضاعفا هو الثنائية (1 ;0) و عليه فإن (C) يقطع (D_{-3}) في نقطة واحدة هي: $E(0;1)$

2) إذا كان $m\in R-\{0;-3\}$ فإن المعادلة (*) تقبل حلين متمايزين هما:

$x_1=0$ ، $x_2=\frac{-m-3}{2m}$.

- إذا كان $x_1=0$ فإن: $y_1=m(0)+1=1$
- إذا كان $x_2=\frac{-m-3}{2m}$ فإن: $y_2=m\left(\frac{-m-3}{2m}\right)+1=-\frac{1}{2}(m+1)$

بما أن الجملة قبلت حلين متمايزين هما الثنائيتين: (0 ;1) ، $\left(\frac{-m-3}{2m};-\frac{1}{2}(m+1)\right)$

فإن (C) يقطع (D_m) في النقطتين $A_1(0;1)$ ، $B\left(\frac{-m-3}{2m};-\frac{1}{2}(m+1)\right)$.

حل التمرين الثاني:

لدينا $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$

$$\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\cos^2\frac{\pi}{5}=1-\left(\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^2=1-\frac{1}{16}\left(6+2\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(10-2\sqrt{5}\right)$$

بما أن $\sin\frac{\pi}{5}>0$ فإنّ $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$$sin\ \frac{4\pi}{5}=sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=sin\ \frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}=-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

$$\sin\frac{6\pi}{5}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}=-\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$cos\frac{6\pi}{5}=cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=-cos\frac{\pi}{5}=-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{51\pi}{5}\right)=-\sin\frac{51\pi}{5}=-\left(2\times5\pi+\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}=-\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\cos\left(-\frac{51\pi}{5}\right)=\cos\frac{51\pi}{5}=\cos\left(2\times5\pi+\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

$$sin\left(-\frac{46\pi}{5}\right)=-sin\frac{46\pi}{5}=-sin(2\times5\pi-\frac{4\pi}{5})=+sin\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$cos\left(-\frac{46\pi}{5}\right)=cos\frac{46\pi}{5}=cos\left(2\times5\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

$$\sin\frac{2009\pi}{5}=\sin\left(2\times201\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}=-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{2009\pi}{5}=\cos\left(2\times201\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

حل التمرين الثالث:

1) إيجاد العبارة التحليلية للتحاكي h الذي مركزه w(-2 ;-3 ;1) ونسبته 2-.

لتكن $M'(x';y';z')$ صورة النقطة $M(x;y;z)$ بالتحاكي h.

$h(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{WM'}=-2\overrightarrow{WM}$. حيث $\overrightarrow{WM'}(x'+2,y'+3,z'-1)$ ، $\overrightarrow{WM}(x+2,y+3,z-1)$.

$$\begin{cases}x'=-2x-6\\y'=-2y-9\\z'=-2z+3\end{cases}\text{ أي }\begin{cases}x'+2=-2(x+2)\\y'+3=-2(y+3)\\z'-1=-2(z-1)\end{cases}\text{ يكافئ }\overrightarrow{WM'}=-2\overrightarrow{WM}$$

2) لإيجاد صورة A و B بالتحاكي h نعوض كل من إحداثيات A و B في العبارة التحليلية للتحاكي h نحصل على : $A'(-6;-7;1)$ ، $B'(-2;-11;-3)$.

3) نعلم أن معادلة سطح الكرة التي مركزها E(2 ;-1 ;3) و نصف قطرها 2 هي $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.

لإيجاد صورة الكرة نبحث عن التحويل العكسي h^{-1}.

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}x'-3\\y=-\frac{1}{2}y'-\frac{9}{2}\\z=-\frac{1}{2}z'+\frac{3}{2}\end{cases}\text{ يكافئ }\begin{cases}x'=-2x-6\\y'=-2y-9\\z'=-2z+3\end{cases}\text{ يكافئ }h(M)=M'$$

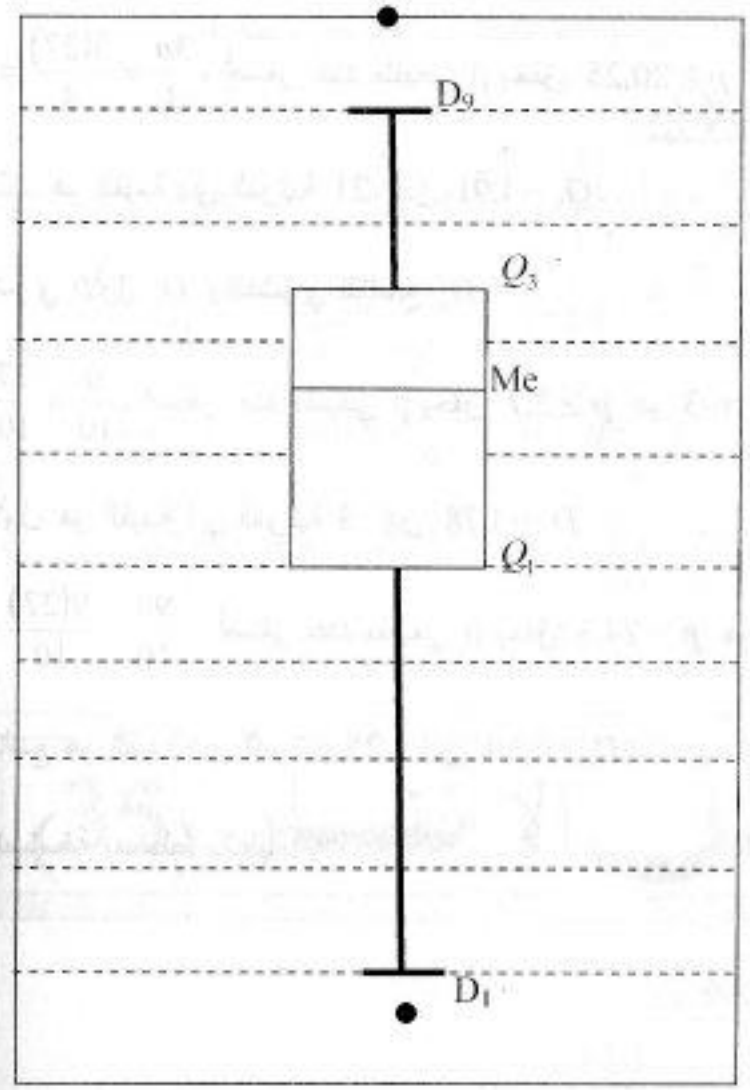
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$ تكافئ

$\left(-\frac{1}{2}x'-3-2\right)^2+\left(-\frac{1}{2}y'-\frac{9}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{1}{2}z'+\frac{3}{2}-3\right)^2=4$ يكافئ

$\frac{1}{4}(x'+10)^2+\frac{1}{4}(y'+7)^2+\frac{1}{4}(z'+3)^2=4$ يكافئ

$(x'+10)^2+(y'+7)^2+(z'+3)^2=16$

إذن صورة كرة مركزها E(2 ;-1 ;3)h هي كرة مركزها $E'(-10;-7;-3)$ ونصف قطرها 4.



حل التمرين الثاني:

نعلم أن عبارة الحد العام هي: $u_n = u_1 + (n-1)r$ ، $n \in N^*$

لدينا $u_6 = u_1 + 5r$ ، $u_8 = u_1 + 7r$ ، $u_{10} = u_1 + 9r$ ، $u_{12} = u_1 + 11r$

$u_2 = u_1 + r$ ، $u_3 = u_1 + 3r$.

$u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} = u_1 + 5r + u_1 + 7r + u_1 + 9r + u_1 + 11r = 4u_1 + 32r$

$u_2 + u_4 = u_1 + r + u_1 + 3r = 2u_1 + 4r$

$\begin{cases} u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} = 132 \\ u_2 + u_4 = 18 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 4u_1 + 32r = 132 \\ 2u_1 + 4r = 18 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 2u_1 + 16r = 66 \ldots.(1) \\ 2u_1 + 4r = 18 \ldots..(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد : $12r = 48$ و منه $r = \frac{48}{12} = 4$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد: $2u_1 + 4(4) = 18$ أي $2u_1 = 2$ و منه $u_1 = 1$

2) عبارة الحد العام هي: $u_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$

4) $s_n = u_1 + u_2 + \ldots.. + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(1 + 4n - 3) = n(2n-1)$

حل التمرين الثالث:

1) إثبات أن f انسحاب:

$\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ يكافئ $\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

يكافئ $\overrightarrow{M'M} = \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right)$ يكافئ

$\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ يكافئ $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$.

بما أن الشعاع $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$ ثابت لا يتعلق بالنقطة M فإن f هو انسحاب شعاعه $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$.

2) نعلم أن تركيب انسحابين هو انسحاب شعاعه مجموع شعاعيهما.

إذن h هو انسحاب شعاعه $2\vec{u} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CD}$.

حل التمرين الرابع:

1) لدينا: A(1 ;3) ، B(-4 ;-8) ، C(1 ;7)

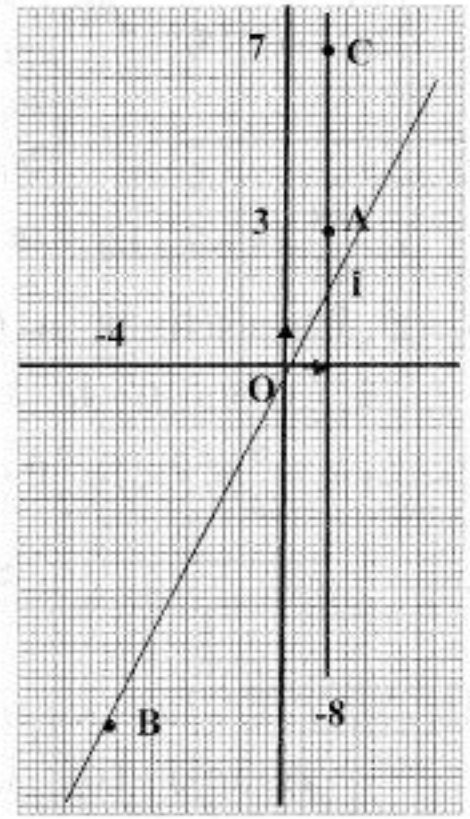
نعلم أن الخاصية المميزة للتحاكي $\overrightarrow{E'F'} = k\overrightarrow{EF}$ حيث k نسبة التحاكي.

بما أن $h(O) = B$ و $h(A) = C$ فإن $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{OA}$.

و لدينا $\overrightarrow{OA}(1;3)$ ، $\overrightarrow{BC}(5;15)$

واضح أن $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{OA}$

ومنه نسبة التحاكي h هي 5.



2) إيجاد المركز I للتحاكي h:

$h(O)=B$ يكافئ $\overrightarrow{IB}=5\overrightarrow{IO}$ أي النقط O، B، I على استقامة واحدة.

$h(A)=C$ يكافئ $\overrightarrow{IC}=5\overrightarrow{IA}$ أي النقط A، C، I على استقامة واحدة.

إذن النقطة I تنتمي إلى المستقيمين (AC) و (OB) أي I هي نقطة تقاطعهما.

معادلة المستقيم (AC) هي $x=1$، و معادلة المستقيم (OB) هي $y=2x$

إذن تقاطع المستقيمين (AC) و (OB) هي النقطة I(1 ;2).

و منه مركز التحاكي هو النقطة I .

حل الاختبار (36)

حل التمرين الأول:

لدينا $Card\Omega=11$ ، $CardA=6$ ، $CardC=5$ ، $CardB=7$

$p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{11}$ ، $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{7}{11}$ ، $p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{5}{11}$.

- $A\cap B=\{4;9;10;12\}$ و منه $p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{4}{11}$
- $B\cup C=\{3;4;5;7;8;9;10;12\}$ و منه $p(B\cup C)=\frac{Card(B\cup C)}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$
- $A\cap B\cap C=\{4;9;10\}$ و منه $p(A\cap B\cap C)=\frac{Card(A\cap B\cap C)}{Card\Omega}=\frac{3}{11}$
- $p(\overline{B})=1-p(B)=1-\frac{7}{11}=\frac{4}{11}$ ، $p(\overline{C})=1-p(C)=1-\frac{5}{11}=\frac{6}{11}$

حل التمرين الثاني:

1) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ يكافئ $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}$

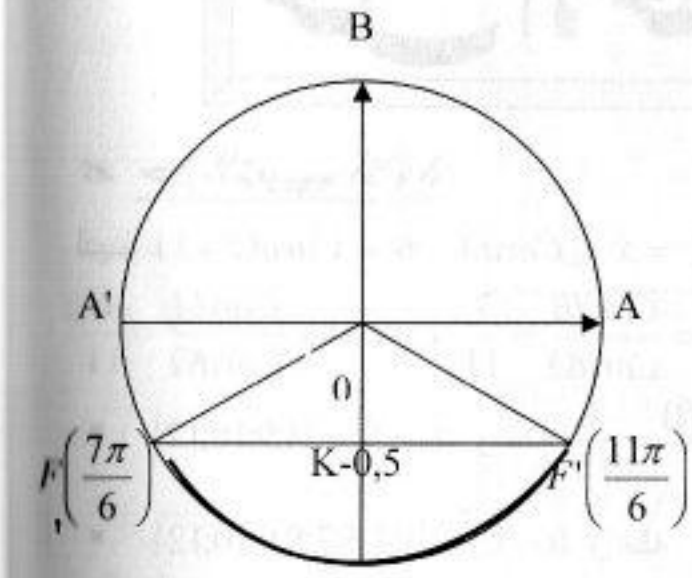
يكافئ $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ يكافئ

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}\frac{x}{2}=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\\ \frac{x}{2}=\frac{13\pi}{12}+2k\pi\end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases}x=-\frac{7\pi}{6}+4k\pi;k\in Z\\ x=\frac{13\pi}{6}+4k\pi;k\in Z\end{cases}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة على R هي $\left\{k \in Z, \frac{13\pi}{6}+4k\pi, -\frac{7\pi}{6}+4k\pi\right\}$

2) $2\sin x+1 \le 0$ يكافئ $\sin x \le -\frac{1}{2}$



ننشئ على محور الجيوب (BB') نقطة K ترتيبها $-\frac{1}{2}$

نرسم المستقيم الذي يشمل K وعمودي على (BB')، و يقطع الدائرة المثلثية (C) في النقطتين F و F' . حيث

$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF}\right)=\frac{7\pi}{6}$ ، $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF'}\right)=\frac{11\pi}{6}$

لتكن M نقطة من الدائرة (C) بحيث $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=x$.

يكون الترتيب $\sin x$ أصغر من أو يساوي $-\frac{1}{2}$ إذا كانت النقطة M تنتمي إلى القوس $\widehat{FB'F'}$ أي $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$

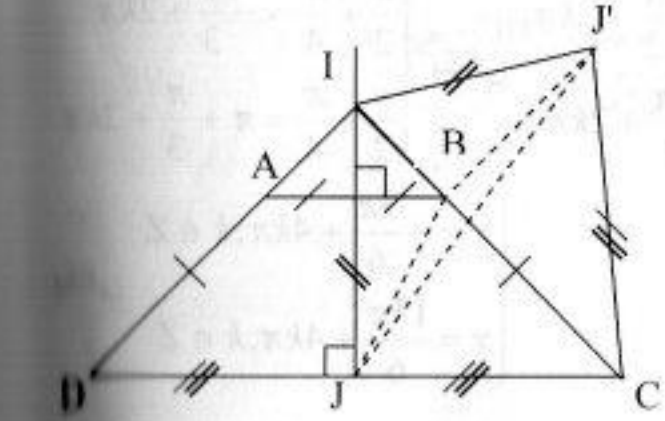
إذن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S=\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

حل التمرين الثالث:

لدينا $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)=\frac{\pi}{5}$ ، $AD=BC$.

1) بما أن (DC) // (AB) و (AD) قاطع لهما فإن الزاويتين $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right)$ متقايستان لأنهما متماثلتان.

و بما أن (IJ) محور للمثلث AIB المتساوي الساقين في I.



و منه $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right)=\left(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)=\frac{\pi}{5}$

إذن $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\right)=\pi-\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$

بما أن المثلث AIB متساوي الساقين في A فإن IA=IB و لدينا $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)=\frac{3\pi}{5}$.

إذن الدوران r الذي يحول A إلى B مركزه I و زاويته $\frac{3\pi}{5}$

- بما أن AD=BC و IA=IB فإن IA+AD=IB+BC

أي ID=IC و منه المثلث DIC متساوي الساقين في I.

إذن الدوران r الذي يحول D إلى C مركزه I و زاويته $\frac{3\pi}{5}$.

2) J' صورة J بالدوران r يعني IJ = IJ' و $\left(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IJ'}\right)=\frac{3\pi}{5}$

نعلم أن الدوران هو تساوي قياس أي يحفظ الأطوال أي صورة قطعة مستقيم بالدوران هي قطعة مستقيم تقايسها.

بما أن (IJ) هو محور للقطعة [AB] فهو أيضا محور للقطعة [DC] لأن شبه المنحرف ABCD متساوي الساقين (AD = BC).

أي لدينا DJ = JC .....(1)

و من جهة أخرى صورة القطعة [DJ] بالدوران r هي القطعة [CJ'] تقايسها

أي DJ = CJ' .....(2) . حيث C و J' صورتا D و J بالدوران r.

من المساواتين (1) و (2) ينتج أن : JC = CJ' هذه المساواة تعني أن المثلث JCJ' متساوي الساقين في C.

نبين أن المثلث JBJ' متساوي الساقين:

بما أن (IJ) منصف للزاوية $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)$ فإن:

$\left(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}$

وبما أن $\left(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IJ'}\right)=\frac{3\pi}{5}$ فإنّ:

$\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IJ'}\right)=\left(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IJ'}\right)-\left(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IB}\right)=\frac{3\pi}{5}-\frac{3\pi}{10}=\frac{3\pi}{10}$

إذن ينتج أن: $\left(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IJ'}\right)=\frac{3\pi}{10}$ وهذا معناه أنّ (IC) منصف للزاوية $\left(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IJ'}\right)$

و نعلم أن المنصف في المثلث المتساوي الساقين هو محور.

بما أن المثلث 'IJJ متساوي الساقين في I و (IC) محور للقطعة ['JJ].

و B نقطة من هذا المحور (تختلف عن نقطة تقاطع (IC) و ('JJ).

فإن (IB) هو محور للقطعة ['JJ] في المثلث 'BJJ. و منه المثلث 'BJJ متساوي الساقين في B (توجد طريقة أخرى للبرهان).

حل التمرين الرابع:

لدينا C(1 ;2 ;3)، D(-4 ;2 ;0). $\overrightarrow{DC}(5;0;3)$ ، $2\overrightarrow{DC}(10;0;6)$

1) إيجاد العبارة التحليلية للانسحاب t الذي شعاعه $2\overrightarrow{DC}$

لتكن $M'(x';y';z')$ صورة النقطة $M(x;y;z)$ بالانسحاب t.

$t(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{DC}$ يكافئ $\begin{cases}x'-x=10\\y'-y=0\\z'-z=6\end{cases}$ أي $\begin{cases}x'=x+10\\y'=y\\z'=z+6\end{cases}$

إيجاد العبارة التحليلية للتحاكي h الذي مركزه D و نسبته 2.

لتكن $M'(x';y';z')$ صورة النقطة $M(x;y;z)$ بالتحاكي h.

$h(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{DM'}=2\overrightarrow{DM}$ ، حيث $\overrightarrow{DM'}(x'+4;y'-2;z')$ ، $\overrightarrow{DM}(x+4;y-2;z)$

$\overrightarrow{DM'}=2\overrightarrow{DM}$ يكافئ $\begin{cases}x'+4=2(x+4)\\y'-2=2(y-2)\\z'=2z\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x'=2x+4\\y'=2y-2\\z'=2z\end{cases}$

2) لإيجاد صورة C بالانسحاب t و بالتحاكي h نعوض احداثيات النقطة C في العبارة التحليلية لكل من الانسحاب و التحاكي.

$t(C)=C_1$ حيث $C_1(11;2;9)$ ، $h(c)=c_2$ حيث $c_2(6;2;6)$

3) لإيجاد صورة الكرة (s) بالتحاكي h نبحث عن التحاكي العكسي h^{-1}.

$h(M)=M'$ يكافئ $\begin{cases}x'=2x+4\\y'=2y-2\\z'=2z\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x'-2\\y=\frac{1}{2}y'+1\\z=\frac{1}{2}z'\end{cases}$

$(x-1)^2+y^2+(z-4)^2=4$ يكافئ

$\left(\frac{1}{2}x'-2-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}y'+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}z'-4\right)^2=4$ يكافئ

$\frac{1}{4}(x'-6)^2+\frac{1}{4}(y'+2)^2+\frac{1}{4}(z'-8)^2=4$ يكافئ

$(x'-6)^2+(y'+2)^2+(z'-8)^2=16$. إذن صورة الكرة (s) ذات المركز w(1 ;0 ;4) ونصف القطر 2 هي الكرة ('s) ذات المركز w' (6 ;-2 ;8) و نصف القطر 4.

حل الاختبار (37)

حل التمرين الأول:

1) الدالة f_m حيث $f_m(x)=\frac{x^2-mx-2}{x+m}$ معرفة على $D=]-\infty,-m[\cup]-m;+\infty[$

2) إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين.

$y=\frac{x^2-mx-2}{x+m}$ تكافئ $x^2-mx-2=yx+ym$ تكافئ

$x^2-mx-ym-yx-2=0m+0$ تكافئ $-(x+y)m+x^2-yx-2=0m+0$

تكافئ $\begin{cases} -(x+y)=0 \\ x^2-yx-2=0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y=-x.....(1) \\ x^2-yx-2=0.....(2) \end{cases}$

بتعويض قيمة y في المعادلة (2) نجد: $x^2+x^2-2=0$ أي $2(x^2-1)=0$ أي

$(x-1)(x+1)=0$ و منه $x=1$ أو $x=-1$

إذا كان $x=1$ فإنّ $y=-1$ و إذا كان $x=-1$ فإن $y=1$

إذن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين هما A(1 ;-1) و B(-1 ;1).

3) من أجل كل عدد حقيقي x من D فإن:

$$f(x)=\frac{x^2-mx-2}{x+m}=\frac{(x^2-m^2+m^2)+(-mx-m^2+m^2)-2}{x+m}$$

$$=\frac{(x^2-m^2)+(-mx-m^2)+2m^2-2}{x+m}$$

$$=\frac{(x-m)(x+m)}{x+m}-\frac{m(x+m)}{x+m}+\frac{2m^2-2}{x+m}$$

$$=x-m-m+\frac{2(m^2-1)}{x+m}=x-2m+\frac{2(m^2-1)}{x+m}$$

ومنه $\alpha=1$ ، $\beta=-2m$ ، $\wp=2(m^2-1)$

4) إذا كان $m\in R-\{-1;1\}$ فإنّ:

- $\lim\limits_{x\to -m^{<}} f(x)=-\infty$ من أجل $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ (لأن $2(m^2-1)>0$)
- $\lim\limits_{x\to -m^{<}} f(x)=-\infty$ من أجل $m\in]-1;1[$ (لأن $2(m^2-1)<0$).

من هذه النهايات ينتج أن $x=-m$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) موازي لحامل محور التراتيب.

x	$-\infty$		$-m$		$+\infty$
$x+m$		$-$	$0-$ ‖ 0^+	$+$	

$$\lim_{x\to-\infty}[f_m(x)-(x-2m)]=\lim_{x\to-\infty}(x-2m+\frac{2(m^2-1)}{x+m}-x+2m)$$

بما أنّ:

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2(m^2-1)}{x+m}=0$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_m(x)-(x-2m)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2(m^2-1)}{x+m}=0$

فإن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x-2m$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_m).

حل التمرين الثاني:

1)

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$$

2) كتابة $\sin 3x$ **بدلالة** $\sin x$:

نعلم أنّ: $\sin 2x=2\sin x\cos x$ ، $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ ، $\cos x^2=1-\sin^2 x$

$$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x$$

$$=(2\sin x\cos x)\cos x+\sin x(2\cos^2 x-1)$$

$$=2\sin x\cos^2 x+2\sin x\cos^2 x-\sin x$$

$$=4\sin x\cos^2 x-\sin x=4\sin x(1-\sin^2 x)-\sin x$$

$$=3\sin x-4\sin^3 x$$

3) لدينا $f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ، $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$،

$f(\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

نعلم أن الدالة التآلفية $h\mapsto f'(a)\times h+f(a)$ هي التقريب التآلفي للدالة f في جوار a. إذن الدالة $h\mapsto -\frac{1}{2}h+\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي التقريب التآلفي للدالة f في جوار $\frac{\pi}{3}$.

ولدينا $f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\approx -\frac{1}{2}h+\frac{\sqrt{3}}{2}$ .....(*)

بوضع h=0,02 في العلاقة (*) نجد : $f\left(\frac{\pi}{3}+0{,}02\right)\approx -\frac{1}{2}(0{,}02)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

أي $\sin\left(\frac{\pi}{3}+0{,}02\right)\approx 0{,}85$.

حل التمرين الثالث:

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

معادلة الأسطوانة (C) التي محورها (ox) وقاعدتها دائرة نصف قطرها $2\sqrt{3}cm$ هي $y^2+z^2=12$ (أي $M\in(C)$).

معادلة مخروط الدوران الذي محوره (oz) والزاوية التي يصنعها المولد مع (oz) تساوي $\frac{\pi}{3}$ هي: $x^2+y^2=z^2\tan^2\frac{\pi}{3}$ أي $x^2+y^2=3z^2$ (أي $M\in(H)$)

معادلة المستوي (P) هي $x=2$. (أي $M\in(p)$).

احداثيات النقط المشتركة بين الأسطوانة (C) والمخروط (H) والمستوي (p) هي حلول الجملة:

$$\begin{cases}x=2.....(1)\\ y^2+z^2=12.....(2)\\ 3z^2-y^2=4.....(3)\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}x=2\\ y^2+z^2=12\\ x^2+y^2=3z^2\end{cases}$$

بجمع المعادلتين (2) و (3) نجد: $4z^2=16$ أي $z^2=4$ و منه $z=2$ أو $z=-2$

بتعويض قيمة $z^2=4$ في المعادلة (2) نجد : $y^2+4=12$

أي $y^2=8$ و منه $y=2\sqrt{2}$ أو $y=-2\sqrt{2}$

بما أن الجملة قبلت أربعة حلول مختلفة فإنه توجد أربعة نقط مشتركـة بين (C) و (H) و (p) هي: $M_1(2;2\sqrt{2};2)$ ، $M_2(2;2\sqrt{2};-2)$ ، $M_3(2;-2\sqrt{2};2)$ ، $M_4(2;-2\sqrt{2};-2)$.

حل الاختبار (38)

حل التمرين الأول:

1) عدد الحالات الممكنة هو: 20 أي $Card\Omega=20$.

نرفق بالربح الإشارة + و بالخسارة الإشارة –

إذا تحصلنا على كرة صفراء نرفق بالعملية العدد +4

وإذا تحصلنا على كرة حمراء نرفق بالعملية العدد –2

وإذا تحصلنا على كرة بيضاء نرفق بالعملية العدد +7

وإذا تحصلنا على كرة سوداء نرفق بالعملية العدد –3

إذن مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي $\{-3,-2,+4,+7\}$

2) إيجاد قانون احتمال المتغير العشوائي X:

$p(X=3)=\frac{8}{20}=0,4$ ، $p(X=-2)=\frac{4}{20}=0,2$ $p(X=+4)=\frac{3}{20}=0,15$ ،

$p(X=+7)=\frac{5}{20}=0,25$

X	–3	–2	+4	+7
p_i	0,4	0,2	0,15	0,25

3) الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو:

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=-3(0,4)-2(0,2)+4(0,15)+7(0,25)$

$=0,75$

*** التباين هو:**

$V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+p_3(x_3-E(X))^2+p_4(x_4-E(X))^2$

$=0,4(-3-0,75)^2+0,2(-2-0,75)^2+0,15(4-0,75)^2+0,25(7-0,75)^2$

$=18,48$

*** الانحراف المعياري هو:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{18,48}=4,29$

حل التمرين الثاني:

1) ليكن x عدد حقيقي ينتمي إلى المجال I أي $2,995<x<3,008$

أي $3-0,005<x<3+0,008$ أي $3-\frac{5}{10^3}<x<3+\frac{8}{10^3}$

و لدينا من جهة أخرى : $8<10$ أي $\frac{8}{10^3}<\frac{10}{10^3}$ أي $\frac{8}{10^3}<\frac{1}{10^2}$

و منه $3+\frac{8}{10^3}<3+\frac{1}{10^2}$ .....(1)

ولدينا أيضا: $10>5$ تكافئ $-5>-10$ تكافئ $-\frac{5}{10^3}>-\frac{10}{10^3}$ تكافئ

$3-\frac{5}{10^3}>3-\frac{10}{10^3}$ تكافئ $3-\frac{1}{10^2}>3-\frac{5}{10^3}$ .....(2)

باستعمال المتراجحتين (1) و (2) نجد:

$3-\frac{1}{10^2}<3-\frac{5}{10^3}<x<3+\frac{8}{10^3}<3+\frac{1}{10^2}$ أي

$3-\frac{1}{10^2}<x<3+\frac{1}{10^2}$ ومنه $3-10^{-2}<x<3+10^{-2}$

إذن $x\in\left]3-10^{-2};3+10^{-2}\right[$ و منه $J=\left]3-10^{-2};3+10^{-2}\right[$. $(k=2)$.

2) ليكن x عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]2,9999;3,0001[$

$2,9999<x<3,0001$ تكافئ $3-0,0001<x<3+0,0001$

تكافئ $3-\frac{1}{10^4}<x<3+\frac{1}{10^4}$ أي $3-10^{-4}<x<3+10^{-4}$

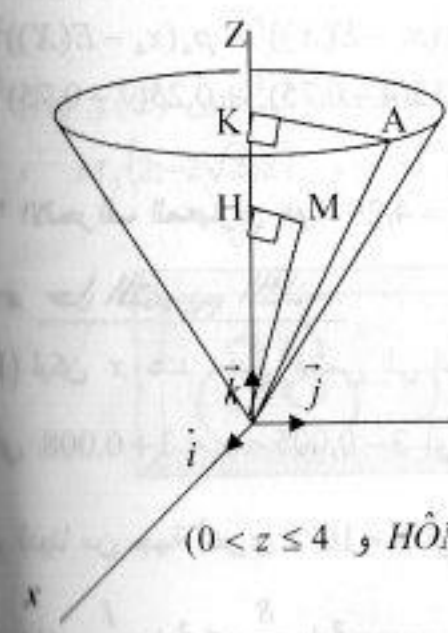
إذن $x\in\left]3-10^{-4};3+10^{-4}\right[$ و منه $J=\left]3-10^{-4};3+10^{-4}\right[$ $(k=4)$.

حل التمرين الثالث:

لدينا $KA=4cm$ ، $OK=4cm$ ، $K(0\ ;0\ ;4)$

في المثلث KOA القائم في K لدينا :

$\tan K\hat{O}A=\frac{KA}{OK}=\frac{4}{4}=1$ و منه $K\hat{O}A=45°$



• إيجاد معادلة (M):

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

H مسقطها العمودي على (oz)

حيث $H(0\ ;0\ ;z)$

فتكون $MH=\sqrt{x^2+y^2}$ و $OH=z$

النقطة $M(x;y;z)$ تنتمي إلى (M) معناه $(H\hat{O}M=45°$ و $0<z\leq 4)$

أي $(\tan H\hat{O}M=1$ و $0<z\leq 4)$

أي $\frac{MH}{OH}=1$ و $0<z\leq 4)$ أي $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=1$ و $0<z\leq 4)$.

ومنه $x^2+y^2=z^2$ و $0<z\leq 4)$. بما أن O تنتمي إلى المخروط (M)

فإن معادلة (M) هي : $x^2+y^2=z^2$ و $0\leq z\leq 4$

2) احداثيات نقط تقاطع المخروط (M) و المستوي (p') هي حلول الجملة:

$$\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\0\leq z\leq 4\\z=3\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=3\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}HM^2=9\\z=3\end{cases}$$

يكافئ $(HM=3$ و $z=3)$. هذه الجملة تعني أن تقاطع (M) و (p') هي الدائرة المحتواة في (p) والتي مركزها $H(0\ ;0\ ;3)$ ونصف قطرها 3.

حل التمرين الرابع:

لتكن G مرجح الجملة $\{(A;4);(B;-1);(c;-1)\}$

و F مرجح الجملة $\{(B;1);(C;1)\}$

$$4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=4\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$$
$$=2\overrightarrow{MG}+\left(4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}\right)=2\overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{MF}+\left(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}\right)=2\overrightarrow{MF}$$
$$\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MF}\right\|\text{ يكافئ }\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

يكافئ MG=MF. إذن مجموعة النقط M هي محور القطعة [GF].

حل الاختبـار (39)

حل التمرين الأول:

العلامات	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[	[14;16[	[16;18[	[18;20]
عدد التلاميذ	8	12	16	20	24	46	40	18	10	6
مراكز الفئات	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
التكرار المتجمع الصاعد	8	20	36	56	80	126	166	184	194	200

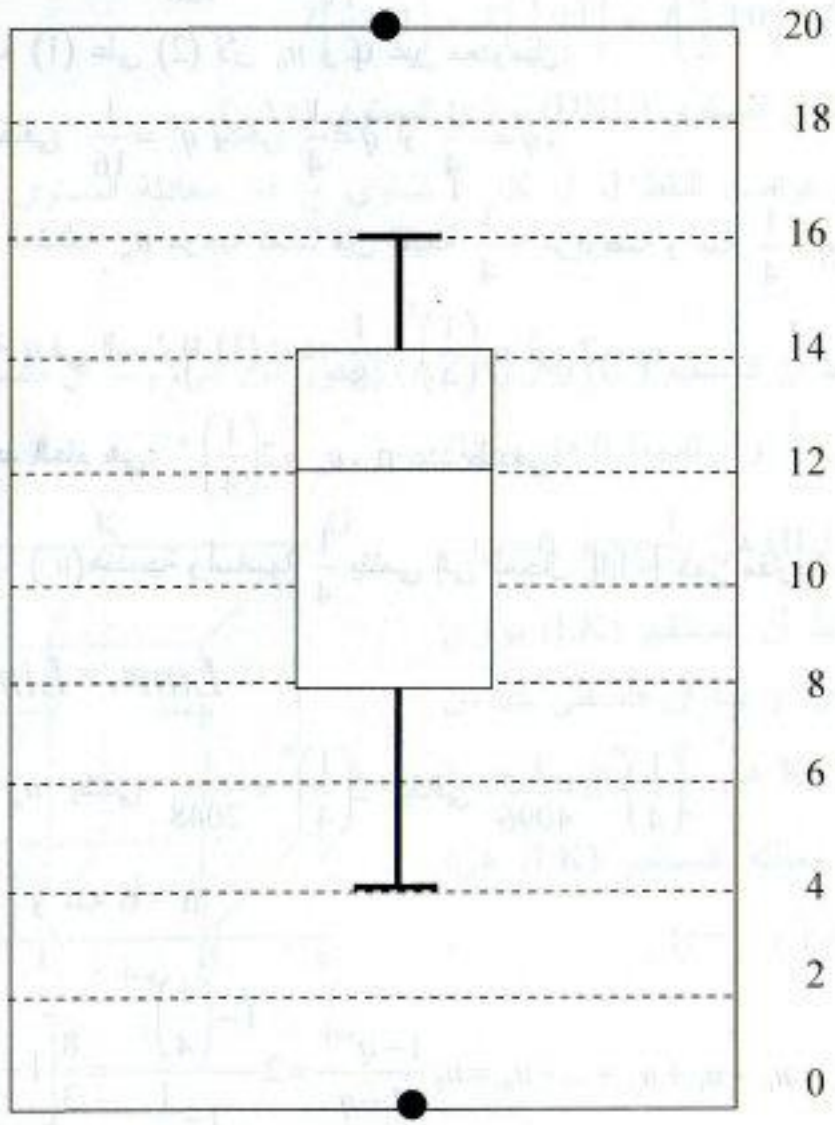
1) الوسط الحسابي هو: $\bar{x} = \frac{2060}{200} = 10{,}03$

بما أن $\frac{200}{2} = 100$ فإن $10 < M_e \leq 12$

2) حساب الربعي الأول Q_1 و الربعي Q_3:

- $\frac{n}{4} = \frac{200}{4} = 50$. الربعي الأول هي القيمة ذي المرتبة 50 و منه $6 < Q_1 \leq 8$.
- $\frac{3n}{4} = \frac{600}{4} = 150$ الربعي الثالث هي القيمة ذي المرتبة 150 و منه $12 < Q_3 \leq 14$
- $\frac{n}{10} = \frac{200}{10} = 20$. العشري الأول هي القيمة ذي المرتبة 20 و منه $2 < D_1 \leq 4$

- $\frac{9n}{10} = \frac{9(200)}{10} = 180$. العشري التاسع هي القيمة ذي المرتبة 180 ومنه $14 < D_9 \leq 16$
- أكبر قيمة للسلسلة هي 20 و أصغرها هي 0.
- بما أن $Q_3 - Q_1 = 6$ فإن النصف المركزي لقيم السلسلة يتوزع على مجال طوله 6.



حل التمرين الثاني:

لدينا: $u_2=\frac{1}{8}$ ، $u_4=\frac{1}{128}$ و عبارة الحد العام هي: $u_n=u_0q^n$

فيكون $u_2=u_0q^2$ ، $u_4=u_0q^4$

$$\begin{cases}u_2=\frac{1}{8}\\u_4=\frac{1}{128}\end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases}u_0q^2=\frac{1}{8}.....(1)\\u_0q^n=\frac{1}{128}....(2)\end{cases}$$

بقسمة المعادلة (1) على (2) لأن u_0 و q غير معدومين:

$\frac{q^4}{q^4}=\frac{128}{8}$ يكافئ $q^2=\frac{1}{16}$ يكافئ $q=\frac{1}{4}$ أو $q=-\frac{1}{4}$.

بما أن حدود المتتالية u_n موجبة تماما فإن القيمة $-\frac{1}{4}$ مرفوضة و منه $q=\frac{1}{4}$

بتعويض قيمة q في المساواة (1) نجد: $u_0\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ أي $u_0=2$

2) عبارة الحد العام هي: $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n$. n عدد طبيعي.

بما أن المتتالية (u_n) هندسية وأساسها $\frac{1}{4}$ ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ فهي مقاربة.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$$

3) $u_n=\frac{1}{2048}$ يكافئ $2\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2048}$ يكافئ $\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{4096}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^6$ و منه $n=6$

4) $s_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

حل التمرين الثالث:

1) تعيين احداثيات رؤوس المكعب:

A(0 ;0 ;0) ، B(1 ;0 ;0)، C(1 ;1 ;0)، D(0 ;1 ;0) ، E(0 ;0 ;1) ، F(1 ;0 ;1)،
G(1 ;1 ;1) ، H(0 ;1 ;1)

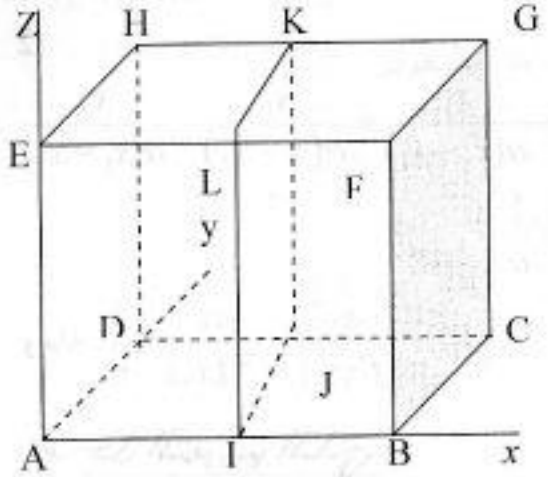
2) تعيين إحداثيات المنتصفات I، J ، K ، L:

$I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ ، $J\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ ، $K\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ ، $L\left(\frac{1}{2};0;1\right)$

3) نلاحظ أن المستوي (IJKL) يوازي المستوي (yAz)

وبما أن فواصل النقط I، J، K، L تساوي $\frac{1}{2}$ فإن معادلة المستوي (IJKL) هي $x=\frac{1}{2}$.

4) نلاحظ أن المستقيم (IL) يوازي (AZ) (محور الرواقم)، وبما أن فاصلتي كل من I و L هي $\frac{1}{2}$ و ترتيبهما 0 فإن معادلة المستقيم (IL) هي $(x=\frac{1}{2}$ و $y=0)$.



- نلاحظ أن المستقيم (LK) يوازي (Ay). و بما أن فاصلتي كل من L و K هي $\frac{1}{2}$ ورقمهما هو 1 فإن معادلة المستقيم (LK) هي: $(z=1$ و $x=\frac{1}{2})$

حل الاختبـار (40)

حل التمرين الأول:

1) نبرهن أنّ: $f'(x_1)\neq 0$ و $f'(x_2)\neq 0$

بما أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2 فإن $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

نحسب $f'(x)$: $f'(x)=\alpha[(x-x_2)+(x-x_1)]=\alpha[2x-(x_1+x_2)]$

و بما أن $x_1\neq x_2$ فإن $x_1-x_2\neq 0$.

$f'(x_1)=\alpha[2x_1-(x_1+x_2)]=\alpha(2x_1-x_1-x_2)=\alpha(x_1-x_2)$

وبما أن $x_1-x_2\neq 0$ و $\alpha\neq 0$ فإن $\alpha(x_1-x_2)\neq 0$ و منه $f'(x_1)\neq 0$

$f'(x_2)=\alpha[2x_2-(x_1+x_2)]=\alpha(2x_2-x_1-x_2)=\alpha(x_2-x_1)$

وبما أن $x_2-x_1\neq 0$ و $\alpha\neq 0$ فإن $\alpha(x_2-x_1)\neq 0$ و منه $f'(x_2)\neq 0$

2)

$$\frac{x_1}{f'(x_1)}+\frac{x_2}{f'(x_2)}=\frac{x_1}{\alpha(x_1-x_2)}+\frac{x_2}{\alpha(x_2-x_1)}=\frac{x_1}{\alpha(x_1-x_2)}-\frac{x_2}{\alpha(x_1-x_2)}$$
$$=\frac{x_1-x_2}{\alpha(x_1-x_2)}=\frac{1}{\alpha}$$

ومنه $\frac{x_1}{f'(x_1)}+\frac{x_2}{f'(x_2)}=\frac{1}{\alpha}$

حل التمرين الثاني:

1) لدينا $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ ، $\vec{v}=-2\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$.

$\vec{v}=-2\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}=-2(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})=-2\vec{u}$

و منه $\vec{v}=-2\vec{u}$ أي الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان.

2) نرمز بـ $(a;b;c)$ إلى احداثيات النقطة K.

فيكون $\overrightarrow{AK}(a+3;b-2;c-1)$ ، $\vec{u}-\vec{v}=3\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$ أي $\vec{u}-\vec{v}(3;-6;9)$

$\overrightarrow{AK}=\vec{u}-\vec{v}$ تكافئ $\begin{cases}a+3=3\\b-2=-6\\c-1=9\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}a=0\\b=-4\\c=10\end{cases}$

و منه K(0 ;-4 ;10).

3) * إيجاد معادلة للمجموعة (T):

$AM=2\sqrt{2}$ يكافئ $\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}=2\sqrt{2}$ يكافئ

$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=8$ وهي معادلة سطح كرة مركزها A(-3 ;2 ;1) و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

حل التمرين الثالث:

$f_m(M)=M'$ يكافئ $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x-m+1\\y'=\frac{1}{3}y+2m-2\end{cases}$.

1) بما أن التحويل f_m من الشكل $x'=kx+a$ و $y'=ky+b$ حيث $k\neq 1$ فإن f_m هو تحاك نسبته $k=\frac{1}{3}$. ومركزه هي النقطة الصامدة بالتحويل f_m.

$f(M)=M$ تكافئ $\begin{cases}x=\frac{1}{3}x-m+1\\y=\frac{1}{3}y+2m-2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\frac{2}{3}x=-m+1\\\frac{2}{3}y=2m-2\end{cases}$

يكافئ $x=\frac{3}{2}(1-m)$ و $y=3m-3$ و منه $w_m\left(\frac{3}{2}(1-m);3m-3\right)$

2) إيجاد مجموعة المراكز w_m:

نضع ($x=\frac{3}{2}(1-m)$ و $y=3m-3$) أي ($2x=3-3m$ و $y=3m-3$)

بجمع المعادلتين نجد : $2x+y=0$. إذن مجموعة المراكز w_m عند بمسح M المجموعة R هي مستقيم (Δ) معادلته $2x+y=0$

3) نعلم أن معادلة الدائرة (C) هي: $(x+2)^2+(y-3)=16$

لإيجاد صورة الدائرة (C) بالتحاكي f_m نبحث عن التحاكي العكسي f^{-1}_m

$f_m(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}x-m+1 \\ y'=\frac{1}{3}y+2m-2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \frac{1}{3}x=x'+m-1 \\ \frac{1}{3}y=y'-2m+2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x=3x'+3m-3 \\ y=3y'-6m+6 \end{cases}$

$(x+2)^2+(y-3)^2=16$ يكافئ $(3x'+3m-3+2)^2+(3y'-6m+6-3)^2=16$

يكافئ $(3x'+3m-1)^2+(3y'-6m+3)^2=16$ يكافئ

$9\left(x'+m-\frac{1}{3}\right)^2+9(y'-2m+1)^2=16$ يكافئ

$\left(x'+m-\frac{1}{3}\right)^2+(y'-2m+1)^2=\frac{16}{9}$. إذن صورة الدائرة (C) ذات المركز A(-2 ;3)

ونصف القطر 4 هي الدائرة (C') ذات المركز $B_m\left(\frac{1}{3}-m;2m-1\right)$ ونصف القطر $\frac{4}{3}$

4) نلاحظ أن h هو تركيب ثلاث تحاكيات لها نفس المركز w_m و نفس النسبة $\frac{1}{3}$.

إذن h هو تحاك مركزه w_m و نسبته $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

أمل النـجاح

الفهـــرس

رقم الاختبار	صفحة النصوص	صفحة الحلول	رقم الاختبار	صفحة النصوص	صفحة الحلول
الاختبار 1	6	57	الاختبار 21	30	124
الاختبار 2	7	59	الاختبار 22	31	128
الاختبار 3	8	63	الاختبار 23	32	131
الاختبار 4	9	66	الاختبار 24	33	135
الاختبار 5	10	69	الاختبار 25	35	138
الاختبار 6	11	72	الاختبار 26	36	142
الاختبار 7	13	74	الاختبار 27	37	146
الاختبار 8	14	78	الاختبار 28	39	151
الاختبار 9	15	82	الاختبار 29	40	155
الاختبار 10	16	86	الاختبار 30	41	157
الاختبار 11	17	91	الاختبار 31	42	161
الاختبار 12	19	94	الاختبار 32	43	164
الاختبار 13	20	97	الاختبار 33	45	168
الاختبار 14	21	101	الاختبار 34	46	172
الاختبار 15	22	104	الاختبار 35	47	176
الاختبار 16	23	108	الاختبار 36	48	181
الاختبار 17	25	110	الاختبار 37	50	185
الاختبار 18	26	113	الاختبار 38	51	188
الاختبار 19	27	117	الاختبار 39	52	192
الاختبار 20	29	120	الاختبار 40	54	196