الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: الربط بين مساحة حيز تحت منحن لدالة موجبة على مجال و الدوال الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تكامل دالة ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: العلاقة بين دالة أصلية و مساحة حيز.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج و يتوج بتقديم الفقرة " توظيف الحساب التكاملي لتعيين دوال أصلية ".

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: استنباط طريقة لحساب مساحة حيز محدد بمنحنيين.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دالة معرفة بتكامل

تصحيح: /

الهدف: توظيف تعريف التكامل و الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

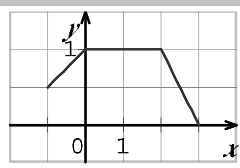
الحل: بسيط

التمارين

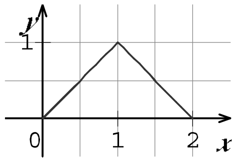
تمارين تطبيقية

1 ـ تكامل دالة

3

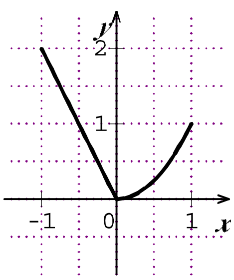


$I=\frac{13}{8}$



$I=1$

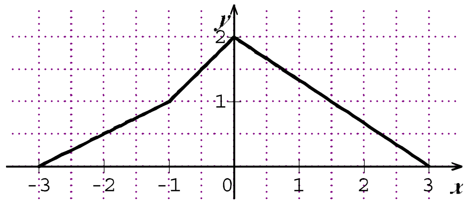
4 1.انشاء المنحني $\mathcal{C}$.



2.نعم الدالة f مستمرة على $[-1;1]$

3. $I=\int_{-1}^{0}-2xdx+\int_{0}^{1}x^2dx$ $I=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

5

1. 

2. نعم f مستمرة على $[-3;3]$.

3. $I = \int_{-3}^{-1} (0.5x+1.5)dx + \int_{-1}^{0} (x+2)dx + \int_{0}^{3} (-\frac{2}{3}x+2)dx$

6 • 1. $y = 1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ .... $(*)$

$(*)$ تكافئ: $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$ و $y-1 \geq 0$

C هو نصف دائرة مركزها $\omega(1;1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$ واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y \geq 1$.

2. تكامل الدالة f هو $I = \sqrt{2}(\pi+2)$

• 1. $y = \sqrt{4-x^2}$ تكافئ: $x^2+y^2 = 4$ و $y \geq 0$

C هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 2 واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y \geq 0$.

2. تكامل الدالة f هو $I = 2\pi$.

7 $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 8$ ، $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 7$ ، $\int_{0}^{2} f(x)dx = 4$.

10 1) $\int_{1}^{2} 2x(x^2-1)dx = \left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right]_1^2 = \frac{3}{2}$

2) $\int_{1}^{10} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{10}-1)$ ، 3) $\int_{3}^{4} \frac{5x}{(x^2-2)^3}dx = \frac{5}{56}$ ، 4) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx = 1$

11 $\int_{0}^{1} (3x-6)(x^2-4x+1)^3 dx = \left[\frac{3}{8}(x^2-4x+1)^4\right]_0^1$ ،

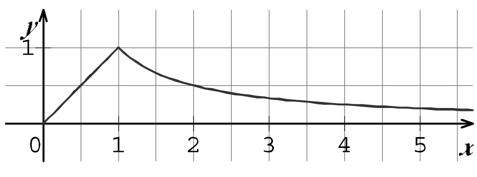
$\int_{0}^{3} \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^3 = 4-2 = 2$ ،

$\int_{1}^{2} \frac{t^3}{t^4+1}dt = \left[\frac{1}{4}\ln(t^4+1)\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{17}{2}\right)$ ،

$\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-1)$

2 - خواص التكامل

32



$$I=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}+\ln 3$$

$$J=\int_2^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_2^1 \frac{1}{x}\,dx+\int_1^{\frac{1}{2}} x\,dx=-\ln 2-\frac{3}{8}$$

3 - القيمة المتوسطة

36 $f(x)=2x+3$ ، $\mu=3$

$f(x)=|x|$ ، $\mu=0$

37 1) من أجل كل x من $\left[\frac{1}{2};1\right]$ لدينا: $\ln x>\ln\frac{1}{2}$ و منه $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx\geq-\ln 2\int_{\frac{1}{2}}^1 dx$ أي $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx\geq-\frac{\ln 2}{2}$

2) من أجل كل x من $[1;2]$ لدينا: $\frac{1}{1+x^3}\leq\frac{1}{2}$ و منه $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx\leq\frac{1}{2}\int_1^2 dx$ أي $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx\leq\frac{1}{2}$

3) من أجل كل x من $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ لدينا: $-1\leq\sin(x^2+1)\leq 1$ ومنه $-\frac{\pi}{2}\leq\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x^2+1)dx\leq\frac{\pi}{2}$

44 1) من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا:

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^3}\leq 1$ ومنه $\frac{1}{2}\leq\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx\leq 1$

2) على المجال $[0;9]$ الدالة: $f:x\mapsto\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ متناقصة تماما، إذن من أجل كل x من $[0;9]$:

$f(9)\leq f(x)\leq f(0)$ و منه $\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 1$ أي: $\frac{9}{4}\leq\int_0^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\leq 9$

45 1) على المجال $[1;2]$ الدالة: $f:x\mapsto\sqrt{x^3+1}$ متزايدة تماما،

إذن من أجل كل x من $[1;2]$: $f(1)\leq f(x)\leq f(2)$ ومنه $\sqrt{2}\leq f(x)\leq 3$ أي: $\sqrt{2}\leq\int_1^2\sqrt{x^3+1}\,dx\leq 3$

2) من أجل كل x من $[0;2]$: $e^{-4}\leq e^{x^2}\leq 1$ ومنه $2e^{-4}\leq\int_0^2 e^{-x^2}\,dx\leq 2$

3) من أجل كل x من $[2;4]$: $\ln 3\leq\ln(x^2-1)\leq\ln 15$ ومنه $2\ln 3\leq\int_2^4\ln(x^2-1)\,dx\leq 2\ln 3+2\ln 5$

46 تصويب: 1. باستعمال الشكل بين أن: $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

بقراءة بيانية المنحني C_f يقع أسفل Δ و أعلى P في المجال $[4;12]$،

نستنتج أن : $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

2.على المجال $[4;12]$، المنحني C_f أعلى محور الفواصل، إذن: $A=\int_4^{12} f(x)\,dx$

بما أن $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\le f(x)\le \frac{1}{2}x+2$ فإن: $\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx \le \int_4^{12} f(x)\,dx \le \int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$

دالة أصلية للدالة g المعرفة بـــ $g(x)=-\frac{1}{10}x^2+2x-5$ هي الدالة G المعرفة بـــ: $G(x)=-\frac{1}{30}x^3+x^2-5x$

دالة أصلية للدالة h المعرفة بـــ $h(x)=\frac{1}{2}x+2$ هي الدالة H المعرفة بـــ: $H(x)=\frac{1}{4}x^2+2x$

$$\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx=G(12)-G(4)=\frac{792}{30}-\left(-\frac{184}{30}\right)=\frac{976}{30}$$

$$\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=H(12)-H(4)=60-12=48$$

إذن: $\frac{976}{30}\le A\le 48$

49 1) $\int_1^4 f(x)\,dx=3\mu=6$ ، 2) $\int_1^3 f(x)\,dx=2\mu=2\ln 2$ ،

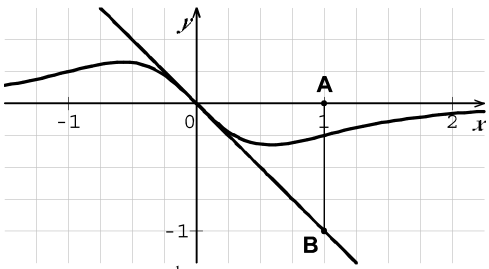
3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{74}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\mu=\frac{1}{2}$

51 1) من أجل كل x من $[n;n+1]$: $\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$ ومنه $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{1}{n}$.

2) حسب مبرهنة الحصر (I_n) متقاربة و تتقارب نحو0.

4 - التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

59



$A_1=\int_0^1 -\frac{-x}{(x^2+1)^2}dx$ ومنه $A_1=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$ ومنه $A_1=\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^1$ أي $A_1=\frac{1}{4}$

2) أ- معادلة المماس T للمنحني (C) عند المبدأ هي: $y=-x$

ب- المنحني (C) أسفل T في المجال $]-\infty;0[$ و (C) أعلى T في المجال $]0;+\infty[$.

ج- المساحة A_2 للمثلث المحدد بـــ T ، محور الفواصل و المستقيم D هي $A_2=\frac{1}{2}u.a$.

3) $A=A_2-A_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}u.a$

4) أ- $I(\lambda)=-\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}$

$$I(\lambda)=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}=\frac{1}{2(\lambda^2+1)}-\frac{1}{2}$$

ب- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)=-\frac{1}{2}$.

عندما يؤول λ إلى $+\infty$ ، مساحة المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل تقترب من $(-A_2)$ حيث A_2 مساحة المثلث OAB .

5 - توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

71 1. $I+J=\frac{\pi^2}{8}$.

2.أ- $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$

ب-نضع: $u(x)=x$ و $v'(x)=\cos 2x$ ومنه $u'(x)=1$ و $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$I-J=\left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx$ ومنه $I-J=\frac{1}{2}$

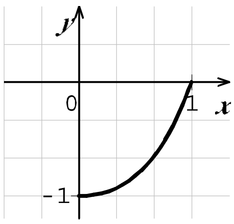
3. $I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)$ و $J=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\right)$

6- بعض تطبيقات الحساب التكاملي

73

$$a=\int_0^1 -(x-1)e^x dx$$

$$a=\left[(2-x)e^x\right]_0^1=e-2$$



2) $v=\int_0^1 \pi\left[(x-1)e^x\right]^2 dx=\pi\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)e^{2x} dx$

$v=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1$ ، $v=\pi\frac{e^2-5}{4}u.v$

تمارين للتعمق

86 1. $J=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{1+2\sin x}dx$$

2. $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ ومنه $I=1-J=1-\frac{1}{2}\ln 3$

87 1) مجموعة النقط M هي ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها r واقعة في الربع الأول.

2) . $\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}r^2$ ، $\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}r^2$

97 1. من اجل كل x من $[0;1]$: $\frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ و $e^{nx} > 0$ و منه $\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$

2. بالمكاملة على المجال $[0;1]$ نجد :

$\frac{e^n-1}{(1+e)n} \leq u_n \leq \frac{e^n-1}{2n}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\frac{1-e^{-n}}{(1+e)n} \leq \frac{u_n}{e^n} \leq \frac{1-e^{-n}}{2n}$،حسب مبرهنة الحصر يكون $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$.

مســائل

112

الجزء A :

1. $f(0)=1$ و $g(0)=0$ إذن C_g هو الذي يمر بمبدأ المعلم.

2. الدالتان f و g زوجيتان.

3.نقتصر الدراسة على $\mathbb{R}^+$.

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ، $g'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	1 $\searrow$ 0

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (بوضع $X = -x^2$)

4. $f(x) - g(x) = (1-x^2)e^{-x^2}$

C_f أعلى C_g إذا كان $-1 < x < 1$ و C_f أسفل C_g إذا كان $x < -1$ أو $x > 1$ ، C_fيقطع C_g عند النقطتين اللتينفاصلتاهما-1 و 1.

الجزءB : $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

1. G هي الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند0.

2.الدالة g موجبة تماما على $]0;+\infty[$.من أجل $x > 0$ ، $G(x)$ هو مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ حيث $0 \leq a \leq x$ و $0 \leq b \leq g(x)$.

3. الدالة G متزايدة على $\mathbb{R}$.

4.الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، إذن مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}\left[F(x) - xe^{-x^2}\right]$ هي :

$x \mapsto \frac{1}{2}\left[f(x) - e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2}\right]$ أي الدالة g .

G و F لهما نفس المشتقة على $\mathbb{R}$. $G(0) = 0$ و $\frac{1}{2}\left[F(0) - 0\right] = 0$. إذن $G(x) = \frac{1}{2}\left[F(x) - xe^{-x^2}\right]$

5.أ- $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(-x^2e^{-x^2}\right) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$ ،إذن $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\ell}{2}$.

ب- $N = \int_0^1 (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt$ و $f(t) > g(t)$ على المجال $[0;1]$.N هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين C_f و C_g و محور التراتيب.

جـــ-نضع من أجل كل $x \geq 1$:

D_1 : مساحة الحيز المحدد بالمنحني C_f ، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

D_2 : مساحة الحيز المحدد بالمنحني C_g ، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

$D_3(x)$: مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1 \leq a \leq x$ و $0 \leq b \leq f(x)$.

$D_4(x)$: مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1 \leq a \leq x$ و $0 \leq b \leq g(x)$.

إذا كانت F و G دالتان أصليتان للدالتين f و g على $\mathbb{R}^+$ و $F(0) = G(0) = 0$

$$\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = F(x) - G(x) \quad و \quad \int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = \int_0^1 (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt + \int_1^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt$$

أي $\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = D_2 - D_1 - \left(D_4(x) - D_3(x)\right)$

$$\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = N - \left(D_4(x) - D_3(x)\right)$$

بما أن من أجل كل $x \geq 1$: $D_4(x) - D_3(x) \geq 0$ يكون : $N \geq F(x) - G(x)$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$ و $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\ell}{2}$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} F(x) - G(x) = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$

إذن $N \geq \lim_{x\to+\infty} F(x) - G(x)$ أي $N \geq \frac{\ell}{2}$.

ملاحظة: $\int_0^x [f(t) - g(t)]dt = \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt + + \int_1^x [f(t) - g(t)]dt$

ومنه $\int_0^x [f(t) - g(t)]dt - \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt = \int_1^x [f(t) - g(t)]dt$

من أجل كل $x \geq 1$: $f(x) < g(x)$ فيكون $\int_1^x [f(t) - g(t)]dt < 0$ ومنه $\int_0^x [f(t) - g(t)]dt < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$

ومنه $F(x) - G(x) < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$ و بالتالي $\frac{\ell}{2} < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$ ومنه $\frac{\ell}{2} < \int_0^1 \left[(1 - t^2)e^{-t^2}\right]dt$