الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة القاسم المشترك الأكبر.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " القاسم المشترك الأكبر " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: توظيف القواسم، المضاعفات، المربعات التامة، ....

توجيهات: : يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

الثلاثيات الفيثاغورثية

تصحيح: /

الهدف: توظيف القواسم.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التفكير بواسطة الحاسوب

تصحيح: /

الهدف: توظيف القواسم.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1 مجموعة قواسم العدد 20 هي : $\{-20,-10,-5,-4,-2,-1,1,2,4,5,10,20\}$.

2 مجموعة قواسم الموجبة للعدد 39 هي $\{1,3,13,39\}$

$(a,b)\in\{(1,39);(39,1);(3,13);(13,3)\}$.

3 لدينا $x^2-y^2=15$ تعني $(x-y)(x+y)=15$ ويكون العددان الصحيحان $x-y$ و $x+y$ من قواسم15.

4 أ ـــ $(x-2)(y-3)=xy-3x-2y+6$.

ب ـــ $xy=3x+2y$ تعني $xy-3x-2y+6=6$ أي $(x-2)(y-3)=6$ ثم نستعمل قواسم 6.

7 $-1027\le 53k\le 1112$ معناه $-19\le k\le 20$

عدد المضاعفات للعدد 53 المحصورة بين -1027 و 1112 هو 40.

8 1) $a=7k$ و $7k<50$ أي $k\leq 7$

$a\in\{7,14,21,28,35,42,49\}$.

2) $\frac{33}{21}=\frac{11}{7}=\frac{11a}{7a}$ حيث a عدد صحيح غير معدوم ، $0<7a<50$ معناه $0<a\leq 7$ وبالتالي :

$$\frac{11}{7}=\frac{22}{14}=\frac{33}{21}=\frac{44}{28}=\frac{55}{35}=\frac{66}{42}=\frac{77}{49}$$

9 13 قاسم للعدد $n+4$ معناه $n+4=13k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ أي $n=13k-4$. $|n|\leq 22$ معناه $-24\leq n\leq 22$

ويكافئ $-24\leq 13k\leq 22$ ومعناه $-\frac{24}{13}\leq k\leq\frac{22}{13}$ أي $k\in\{-1,0,1\}$ ،

ومنه $n\in\{-17,-4,9\}$.

10 $12=2^2\times 4$, مجموعة قواسم 12 هي : $\mathscr{D}_{12}=\{-12,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,12\}$

$5n+7$	−12	−6	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	6	12
$5n$	−19	−13	−11	−10	−9	−8	−6	−5	−4	−3	−1	5
n				−2				−1				1

العدد $n+6$ يقبل القسم على n معناه $n+6=nk$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ ويكافئ $6=n(k-1)$ إذن n يقسم 6 .

وبالتالي $n\in\{1;2;3;6\}$. وبالعكس كل القيم المعينة تحقق المطلوب .

1) $34=2\times 17$ ومنه مجموعة قواسم 34 هي :

$\mathscr{D}_{34}=\{-34,-17,-2,-1,1,2,17,34\}$.

$5n+6$	−34	−17	−2	−1	1	2	17	34
$5n$	−40	−23	−8	−9	−5	−4	11	28
n	−8				−1			

2) $5n+6$ قاسم للعدد $n+8$ ومنه $5n+6$ يقسم $5n+40$ إذن $5n+6$ يقسم $(5n+40)-(5n+6)$ أي $5n+6$ يقسم 34 ومنه $n=-1$ أو $n=-8$.

وبالعكس إذا كان $n=-1$ فإن 1 يقسم 7 وإذا كان $n=-8$ فإن -34 يقسم 0 إذن كلا النتيجتين تحقق المطلوب .

14 n عدد صحيح . نضع $a=3n+7$ و $b=7n+2$

إذا كان العدد d قاسما لِـ : a و b فإن d يقسم $7a$ و $3b$

ومنه d يقسم $7a-3b=49$.

15 n عدد طبيعي غير معدوما ويختلف عن العدد 1 .

$n^3-n=n(n-1)(n+1)$. بعض القواسم للعدد n^3-n : 1 ، $n-1$ ، n ، $n+1$ ، n^2-n ، n^2+n ، n^2-1 ،

n^3-n

17 ليكن a و b عددن صحيحين غير معدومين .

أ) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ب) نفرض أن $a^3 + b^3 = 3k$ إذن

$(a+b)^3 = 3k + 3a^2b + 3ab^2 = 3(k + a^2b + ab^2)$

2 - القسمة الأقليدية

18 تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b :

أ - $a = 118$ و $b = 5$. $118 = 5\times 23 + 3$ الباقي هو 3 .
ب - $a = 152$ و $b = 7$. $152 = 7\times 21 + 5$ الباقي هو 5 .
جـ - $a = -118$ و $b = 5$. $-118 = 5(-24) + 2$
د - $a = -152$ و $b = 7$. $-152 = 7(-22) + 2$

19 عين الأعداد الطبيعية $n = 41k + 5$ مع $41k + 5 < 100$ أي $k \le 2$ ومنه $n \in \{5, 46, 87\}$

20 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a = 17b + 3$ و $b > 3$ و $a = 23b + 27$ ،
إذن $6b - 24 = 0$ ومنه $b = 4$ و $a = 71$

21 n عدد طبيعي ، بقسمته على 7 أو على 3 نجد نفس الباقي أي $n = 7k + r$ و $n = 3k' + r$ مع $0 \le r < 3$.
$n - r$ يقبل القسمة على 3 و 7 وهما عددان أوليان ،
إذن موجودين في تحليله وبالتالي 21 يكون قاسم له ،
أي $n - r = 21\alpha$ معناه $n = 21\alpha + r$ بما أن $0 \le r < 3$
فإن $n = 21\alpha$ ، $n = 21\alpha + 1$ أو $n = 21\alpha + 2$ ، $\alpha \in \mathbb{N}$.

24 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث :

$a + b = 416$ و $a = bk + 61$ مع $b > 61$.

ومنه $bk + 61 + b = 416$ أي $b(k+1) = 355$ إذن b قاسم للعدد 355 ولدينا $355 = 5\times 71$.قواسم 355 هي 1 ، 5 ، 71 و 355 بما أن $b > 61$ فإن $b = 71$ أو $b = 355$.

إذا كان $b = 71$ فإن $a = 416 - 71 = 345$.

إذا كان $b = 355$ $a = 416 - 355 = 61$.

25 استعمال خوارزمية أقليدس لتعيين $PGCD(a,b)$:

أ - $a = 315$ و $b = 117$. $315 = 117\times 2 + 81$
$117 = 81\times 2 + 36$ ؛ $81 = 36\times 2 + 9$ ؛ $36 = 9\times 4 + 0$. ومنه $PGCD(315,117) = 9$.

ب - $a = 1260$ و $b = 528$. $1260 = 528\times 2 + 204$ ؛ $528 = 204\times 2 + 120$ ؛ $204 = 120\times 1 + 84$ ؛
$120 = 84\times 1 + 36$ ؛ $84 = 36\times 2 + 12$ ؛ $36 = 12\times 3 + 0$ ومنه $PGCD(1260,528) = 12$.

جـ - $a = 1380$ و $b = 972$.
$1380 = 972\times 1 + 408$ ؛ $972 = 408\times 2 + 156$ ؛
$408 = 156\times 2 + 96$ ؛ $156 = 96\times 1 + 60$ ؛ $96 = 60\times 1 + 36$ ؛ $60 = 36\times 1 + 24$ ؛ $36 = 24\times 1 + 12$ ؛
$24 = 12\times 2 + 0$ ومنه $PGCD(1380,972) = 12$.

26 n عدد طبيعي غير معدوم .

$PGCD\left(n^2,n\right)=n$ ؛ $PGCD\left(3n,n\right)=n$

27 البرهان أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة قواسم العدد $p\gcd\left(a,b\right)$.

نضع $\delta=p\gcd\left(a,b\right)$.

كل عدد d قاسم للعدد δ هو قاسم للعددين a و b لأن δ يقسم a و b.

العكس نفرض أن d قاسم للعددين a و b ومنه $a=\alpha d$ و $b=\beta d$ مع α و β عددين طبيعيين غير معدومين .

إذا كان $p\gcd\left(\alpha,\beta\right)=1$ فإن $p\gcd\left(a,b\right)=d$ ومنه $d=\delta$ وبالتالي d يقسم δ .

إذا كان $p\gcd\left(\alpha,\beta\right)=\lambda$ مع $\lambda\neq1$ فإنه يوجد عددين طبيعيين غير معدومين وأوليين فيما بينهما α' و β' حيث $\alpha=\lambda\alpha'$ و $\beta=\lambda\beta'$ ومنه $a=d\lambda\alpha'$ و $b=d\lambda\beta'$ إذن $p\gcd\left(a,b\right)=d\lambda$ ومنه $\delta=d\lambda$ ومنه d يقسم δ.

28

	1	1	2	1	4	
792	456	336	120	96	24	0

إذن $PGCD\left(792,456\right)=24$. لدينا $24=2^3\times3$.

ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي:

$\mathcal{D}_{24}=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

29 ـ

	1	2	5	
448	308	140	28	0

إذن $PGCD\left(448,308\right)=28$. لدينا $28=2^2\times7$

-مجموعة القواسم المشتركة للعددين 448 و 308 هي : $\mathcal{D}_{28}=\{1,2,4,7,14,28\}$.

$4294=nk+10$ و $3521=nk'+11$ ومنه

$4284=nk$ و $3510=nk'$ إذن n هو قاسم للعددين 4284 و 3510 .

	1	4	1	1	6	1	2	
4284	3510	774	414	360	54	36	18	0

$PGCD\left(4284,3510\right)=18$ ولدينا : $18=2\times3^2$.

إذن $n\in\{1,2,3,6,9,18\}$.

31 n عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام حيث:

$21685=nk+37$ و $33509=nk'+53$

ومنه $21648=nk$ و $33456=nk'$

إذن n هو قاسم للعددين 21648 و 33456 لدينا $PGCD\left(33456,21648\right)=12\times PGCD\left(2788,1804\right)$

	1	1	1	5	
2788	1804	984	820	164	0

$PGCD\left(33456,21648\right)=12\times164=1968$

$1968=2\times984$ إذن القاسم الوحيد المكون من أربعة أرقام للعدد $PGCD\left(33456,21648\right)$ هو نفسه ؛

إذن $n=1968$.

32 (1

	1	2	4	

182	126	56	14	0

إذن $PGCD(182,126)=14$.

2) استعمال خوارزمية أقليدس :

$182=126\times1+56$ معناه $182-126=56$

$126=56\times2+14$ معناه $126-56\times2=14$

إذن : $14=126-56\times2=126-(182-126)\times2$ أي $14=182(-2)+126\times3$. إذن $\alpha=-2$ و $\beta=3$.

3 - خواص القاسم المشترك الأكبر

33 $1399=82\times17+5$ ومنه الباقي هو 5 .

$PGCD(1399,82)=PGCD(82,5)=1$

34 تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b:

أ - $a=-350$ و $b=-252$.

$PGCD(-350,-252)=PGCD(350,252)=14$

ب - $a=126$ و $b=-735$.

$PGCD(126,-735)=PGCD(126,735)=21$

جـ - $a=-138$ و $b=575$.

$PGCD(-138,575)=PGCD(138,575)=23$

35 $PGCD(54,82)=2$

$PGCD(5400,8200)=100PGCD(54,82)=200$.

من التمرين 36 إلى التمرين 41 ، عيّن كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين.

نضع : $PGCD(a,b)=d$ ونطبق الخاصية $a=da'$ ، $b=db'$ مع a' و b' أوليين فيما بينهما .

36 $\begin{cases}a+b=54\\PGCD(a,b)=9\end{cases}$ معناه $\begin{cases}9(a'+b')=54\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases}a'+b'=6\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$ ويكافئ (a',b') تنتمي إلى $\{(1,5);(5,1)\}$ أي $(a,b)\in\{(9,45);(45,9)\}$.

37 $\begin{cases}a+b=72\\PGCD(a,b)=9\end{cases}$ ؛ $(a,b)\in\{(9,63);(27,45);(45,27);(63,9)\}$

38 $\begin{cases}a+b=420\\PGCD(a,b)=84\end{cases}$ ؛ $(a,b)\in\{(84,336);(168,252);(252,168);(336,84)\}$

39 $\begin{cases}ab=360\\PGCD(a,b)=6\end{cases}$ معناه $\begin{cases}36a'b'=360\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases}a'b'=10\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$ ويكافئ $(a',b')\in\{(1,10);(2,5);(5,2);(10,1)\}$ أي

$(a,b)\in\{(6,60);(12,30);(30,12);(60,6)\}$

40 $\begin{cases} ab = 2700 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ ؛ $(a,b) \in \{(5,540);(20,135);(20,135);(540,5)\}$

41 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ معناه $(a,b) = (85,80)$ أو $(a,b) = (35,28)$.

42 أ - $a = 55$ و $b = 36$ ؛ $PGCD(36,55) = 1$.

ب - $a = 14$ و $b = 165$ ؛ $PGCD(165,14) = 1$.

جـ - $a = 1155$ و $b = 872$ ؛ $PGCD(1155,872) = 1$

في كل حالة نقول أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

43 1) $PGCD(140,143) = 1$

2) استنتج في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ – $\begin{cases} a = 140 \times 34 \\ b = 143 \times 34 \end{cases}$ و $PGCD(140,143) = 1$ معناه $PGCD(a,b) = 34$.

ب – $\begin{cases} a = 143 \times 82 \\ b = 140 \times 82 \end{cases}$ و $PGCD(140,143) = 1$ معناه $PGCD(a,b) = 82$.

44 لأن 7 لا يقسم 500.

تمارين للتعمق

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

45 المسافة بين العمودين المتتاليين هي عدد طبيعي x حيث $2 < x < 5$ وبالتالي : إمّا $x = 3$ وإما $x = 4$. لدينا 4 لا يقسم 90 بينما 3 هو قاسم مشترك للعددين 90 و 156 ، ونأخذ قاسما مشتركا لأن كل زاوية القطعة يغرس عمود. إذن المسافة بين عموديين متتاليين هي $3m$.

محيط القطعة هو $2(90+156) = 492m$ ولدينا عدد الأعمدة هو نفس عدد الفراغات الموجودة بين عمودين متتاليين أي $\frac{492}{3} = 164$

46 قواسم 220 هي : 1، 2، 4 ، 5 ، 10 ، 11، 20 ، 22، 44، 55، 110، 220.

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 =$
284

قواسم 284 هي : 1 ، 2 ، 4 ، 71 ، 142 ، 284 .

$1+2+4+71+142 = 220$.

47 ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3.

لدينا $n+5 = n-2+7$ ومنه $n+5$ مضاعف لـ $n-2$

معناه $n-2$ قاسم للعدد 7 وبالتالي $n-2=1$ أو $n-2=7$ أي $n=3$ أو $n=9$.

عكسيا إذا كان $n=3$ أو $n=9$ فإن $n+5=8$ أو $n+5=14$ و $n-2=1$ أو $n-2=7$ وبالتالي في كلا الحالتين $n+5$ مضاعف لـِ $n-2$.

48 1) قواسم 8 هي 1 ، 2 ، 4 ، 8 ؛ ومنه مجموع قواسم العدد 8 هو : 15.

قواسم 81 هي 1 ، 3 ، 9 ، 27 ، 81 ؛ ومنه مجموع قواسم العدد 81 هو : 121.

2) عدد قواسم 8 هو 4 وعدد قواسم 81 هو 5 إذن عدد قواسم العدد 8×81 هو $4\times 5=20$.

49 1) $\frac{n+2}{n-1}=\frac{n-1+3}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}+\frac{3}{n-1}$

$\frac{n+2}{n-1}=1+\frac{3}{n-1}$ وبالتالي لكي يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا يكفي أن يكون $\frac{3}{n-1}$ عددا صحيحا ولهذا يجب أن يكون العدد $(n-1)$ قاسما للعدد 3.

قواسم العدد 3 هي -1 ، -3 ، 1 و 3 وبالتالي $(n-1=-1)$ ، $(n-1=-3)$ ، $(n-1=1)$ أو $(n-1=3)$

معناه $(n=0)$ ، $(n=-2)$ ، $(n=2)$ أو $(n=4)$ وبما أن $n\in\mathbb{N}$ فإن قيمه الممكنة هي : 0 ، 2 و 4.

2) ليكن α و β عددين طبيعيين حيث $a=2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ ومنه $a^2=2^{2\alpha}\times 3^{2\beta}$ عدد قواسم a^2 هو $(2\alpha+1)(2\beta+1)$

وعدد قواسم a هو $(\alpha+1)(\beta+1)$ ومن المعطيات لدينا : $(2\alpha+1)(2\beta+1)=3(\alpha+1)(\beta+1)$ معناه

$4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=3\alpha\beta+3\alpha+3\beta+3$ ومعناه $\alpha\beta-\alpha=\beta+2$ يكافئ $\alpha(\beta-1)=\beta+2$ أي

$\alpha=\frac{\beta+2}{\beta-1}$. وحسب السؤال السابق ينتج أن $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\end{cases}$ ؛ إذن $a=2^2\times 3^4=324$ أو $a=2^4\times 3^2=144$.

50 $xy-4y-12=0$ إذا كان $x=4$ فإن المعادلة تصبح $-12=0$ وهذا غير ممكن إذن $x\neq 4$.

$xy-4y-12=0$ معناه $y=\frac{12}{x-4}$ ومنه $x-4$ يقسم 12 ولدينا $12=2^2\times 3$.

$x-4$	–12	–6	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	6	12
x	–8	–2	0	1	2	3	5	6	7	8	10	16
y	–1	–2	–3	–4	–6	–12	12	6	4	3	2	1

51 1) ليكن $x\in[-3;1[\cup]1;3]$

$$f(x)=\frac{2x^2-3x-3}{x-1}=\frac{2x^2-3x+1-4}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}-\frac{4}{x-1}=2x-1-\frac{4}{x-1}$$

2) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي إحداثيتيها أعداد صحيحة . $M\in C_f$ معناه $x\in[-3;1[\cup]1;3]$

و $y=2x-1-\frac{4}{x-1}$ أي $y-2x+1=-\frac{4}{x-1}$.

إذن $x-1$ يقسم 4

$x-1$	–4	–2	–1	1	2	4
$y-2x+1$	1	2	4	–4	–2	–1
x	–3	–1	0	2	3	$\cancel{5}$

y	-6	-1	3	-1	3	8

52 n عدد طبيعي . نضع $a=n\left(n^2+5\right)$.

1) إذا كان n عددا زوجيا فإن a عدد زوجي.

إذا كان n عددا فرديا فإن $n=2k+1$ ومنه $n^2+5=4k^2+4k+6$ وهو عدد زوجي إذن a عدد زوجي.

2) بنفس الطريقة نميز الحالات $n=3k$ ، $n=3k+1$ ، $n=3k+2$.

53 a عدد طبيعي؛ للبرهان أن العدد $a\left(a^2-1\right)$ مضاعف للعدد 6 يكفي أن نبرهن $a\left(a^2-1\right)$ مضاعف لـِ 2 و 3 لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما ثم نميز الحالات.

54 رقم آحاد العدد n^5-n هو 0 معناه n^5-n يقبل القسمة على 10 ولدينا من بين القواسم للعدد 10 قاسمين أوليين فقط هما 2 و 5.

$n^5-n=n\left(n^4-1\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$ أي $n^5-n=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)$.

لدينا $n\left(n+1\right)$ هو جداء عددين طبيعيين متواليين إذن هو عدد زوجي أي مضاعف لـِ 2 .

n^5-n مضاعف لـِ $n\left(n+1\right)$, و $n\left(n+1\right)$ مضاعف لـِ 2 إذن n^5-n مضاعف لـِ2 .

لدينا كل عدد طبيعي n هو إماّ مضاعفا لـِ 5 وإما ليس مضاعفا لـِ 5.

إذا كان n مضاعفا لــِ 5, بما أن n^5-n مضاعف لــِ n فإن n^5-n مضاعف لــِ 5 .

إذا كان n ليس مضاعفا لــِ 5 فإن بواقي قسمته على 5 هي 1 ، 2 , 3 , 4 .

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 1 فإن $n-1$ يكون مضاعف لـــ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لــِ $n-1$ فإنه يكون مضاعف لـــ 5 .

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 4 فإن $n+1$ يكون مضاعف لـــ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لــِ $n+1$ فإنه يكون مضاعف لـــ 5 .

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو r حيث $r\in\{2;3\}$ فإن $n=5k+r$ ومنه $n^2=25k^2+10k+r^2$

أي $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+r^2+1$

وبالتالي إذا كان $r\in\{2;3\}$ فإن $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+5$ أو $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+10$ إذن في الحالتين n^2+1 مضاعف لــِ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لـــ n^2+1 فإن n^5-n مضاعف لـــ 5 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، n^5-n مضاعف لـ 5. وبالتالي تحليل العدد n^5-n يشمل العددين الأوليين 2 و 5 إذن n^5-n هو مضاعف للعدد 10 .

n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد معناه أن رقم آحاد $n^{p+5}-n^{p+1}$ هو 0 . $n^{p+5}-n^{p+1}=n^p\left(n^5-n\right)$ ومنه $n^{p+5}-n^{p+1}$ مضاعف للعدد 10.

55 للبرهان أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون n^7-n يقبل القسمة على 14 يكفي أن نبرهن أنه يقبل القسمة على 2 وعلى 7 لأن 2 و 7 أوليان فيما بينهما.

56 1) من أجل كل عدد طبيعي n ، $a=n^2+5n+4=\left(n+1\right)\left(n+4\right)$ و $b=n^2+3n+2=\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

إذن العدد $n+1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

2) لدينا $3n^2+15n+20=(n+1)(3n+12)+8$

إذن العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$ معناه العدد $n+1$ قاسما للعدد 8 ومنه $n+1\in\{1;2;4;8\}$ أي $n\in\{0;1;3;7\}$.

وعكسيا بتعويض n بقيم المجموعة $\{0;1;3;7\}$ نجد العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$

57 n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$ و n^2+n+3 .

أ - لدينا $n^2-2n+1=(n-1)^2$ و a يقسم $n-1$ إذن a يقسم $(n-1)^2$ أي a يقسم n^2-2n+1 .

ب - a يقسم n^2+n+3 و n^2-2n+1 إذن a يقسم الفرق $(n^2+n+3)-(n^2-2n+1)$ أي يقسم $3n+2$.

جـ - a يقسم $n-1$ ومنه a يقسم $3n-3$ وبما أن a يقسم $3n+2$ فإنه يقسم الفرق $(3n+2)-(3n-3)$ أي a يقسم 5 .

د - $a\in\{-5;-1;1;5\}$.

58 نفترض أن الثنائية $(x\,;y)$ يكون من أجلها العدد xy قاسما للعدد $x+y$ إذن $x\neq 0$ و $y\neq 0$

ولدينا $x+y=xyk$ مع $k\in\mathbb{N}$ إذن $x=y(xk-1)$ و $y=x(yk-1)$ وبالتالي x يقسم y و y يقسم x إذن $x=y$ وبالتالي يصبح $2x=x^2k$ أي $2=xk$ ومنه x يقسم 2 إذن $x=y=1$ أو $x=y=2$.

وبالعكس الثنائيتين $(1,1)$ و $(2,2)$تحققان المطلوب.

59 n عدد طبيعي فردي . S مجموع أعداد طبيعية متتابعة وعددها n . نعتبر العدد الطبيعي a ونضع $S=a+(a+1)+(a+2)+...+(a+n-1)$ هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 1 .

$$S=\frac{n}{2}\left(a+(a+n-1)\right)=n\left(a+\frac{n-1}{2}\right)$$

بما أن n عدد طبيعي فردي فإن $n-1$ هو زوجي وبالتالي $\frac{n-1}{2}$ يكون عدد طبيعي ومنه $k=a+\frac{n-1}{2}$ هو عدد طبيعي ومنه $S=nk$ مع $k\in\mathbb{N}$ إذن العدد S يقبل القسمة على n .

2 - القسمة الأقليدية

66 $71=0\times 72+71$ إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد 71 على 72 هو 71 .

67 كتاب مكتوب عليه 4350 سطرا . كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة ناقصة .

$4350=34\times 127+32$ إذن توجد بالكتاب 127 صفحة كاملة والصفحة الأخيرة مكتوب عليها 32 سطرا فقط .

68 علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100}=13k+35$. ولدينا $100^{100}=13k+26+9$

أي $100^{100}=13(k+2)+9$ بما أن $9<13$ فإن باقي قسمة 100^{100}على 13 هو 9.

69 الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين m و n على 17 هما على التوالي 8 و 12. أي $m=17k+8$ و $n=17p+12$ مع $k\in\mathbb{N}$ و $p\in\mathbb{N}$.

$$m+n=17(k+p)+20=17(k+p+1)+3$$

إذن باقي قسمة $m+n$ على 17 هو 3 .

$m\times n=(17k+8)(17p+2)$

$m\times n=17^2kp+17(2k+8p)+16$

$m\times n=17(17kp+2k+8p)+16$

إذن باقي قسمة $m\times n$ على 17 هو 16 .

$m^2=(17k)^2+16\times 17k+64$

$.m^2=17(17k^2+16k+3)+13$

إذن باقي قسمة m^2 على 17 هو 13.

79 $2^{3\times 0}-1=0$ وهو يقبل القسمة على 7 .

نفرض $2^{3p}-1$ يقبل القسمة على 7أي $2^{3p}-1=7k$ مع $k\in\mathbb{N}$ ولنبرهن $2^{3(p+1)}-1$ يقبل القسمة على 7 .

$2^{3(p+1)}-1=8\times 2^{3p}-1=8(7k+1)-1=56k+7$

أي $2^{3(p+1)}-1=7(8k+1)$ومنه $2^{3(p+1)}-1$ يقبل القسمة على 7. إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7.

أ- من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $2^{3n}-1=7k$ مع $k\in\mathbb{N}$

أي $2^{3n}=7k+1$ إذن الباقي هو 1.

ب- $a=2^{3n+1}=2(7k+1)=7(2k)+2$ إذن الباقي 2.

جـ- $a=2^{3n+2}=4(7k+1)=7(4k)+4$ الباقي هو 3.

80 إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و b فهو قاسم a^2 وبالتالي هو قاسم للعدد a^2+b ومنه d يكون قاسما مشتركا a و (a^2+b).

إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و (a^2+b)فهو قاسم a^2 وبالتالي هو قاسم للعدد $(a^2+b)-a^2$أي قاسم للعدد b ومنه d يكون قاسما مشتركا للعددين a و b .

نستنتج من هذا أن القواسم المشتركة للعددين a و (a^2+b) هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

وبالأخص $PGCD(a;a^2+b)=PGCD(a;b)$.

2) كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم لكل من الأعداد : $a+b$ ، $2a$ ، $3b$ و $2a+3b$

إذن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$.

وبالعكس لدينا كل قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هو قاسم لكل من الأعداد $3(a+b)$ ، $2(a+b)$ ، $3(a+b)-(2a+3b)$ و $(2a+3b)-2(a+b)$ولدينا $3(a+b)-(2a+3b)=a$ و $(2a+3b)-2(a+b)=b$

إذن كل قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

نستنتج من هذا أن القواسم المشتركة للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

وبالأخص $PGCD(a+b;2a+3b)=PGCD(a;b)$.

81 n عدد طبيعي . $a=11n+3$ و $b=13n-1$.

1) $13a-11b=13(11n+3)-11(13n-1)$

$.13a-11b=143n+39-143n+11=50$

2) $PGCD(a;b)$ يقسم $13a$ و $11b$ والفرق $13a-11b$ أي $PGCD(a;b)$ يقسم 50 .لدينا $50=2\times5^2$, إذن $PGCD(a;b)$ ينتمي إلى المجموعة $\{1,2,5,10,25,50\}$.

3) تعيين ثنائية $(a;b)$ بحيث يكون $PGCD(a;b)=50$.

50 يقسم a و b ومنه يقسم $6a$ و $5b$ وكذلك $6a-5b$

أي 50 يقسم $n+23$ ومعناه $n+23=50k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

ومعناه $n=50k-23$ وبأخذ $k=1$ نجد $n=27$ ومنه $(a;b)=(300;350)$

وبالعكس $a=300=6\times50$ و $b=350=7\times50$ ولدينا 6 و 7 أوليان فيما بينهما إذن $PGCD(a;b)=50$

82 $\begin{cases}2a^2+b^2=20992\\PGCD(a;b)=16\end{cases}$ معناه توجد $(a';b')$ من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث $a=16a'$, $b=16b'$ ؛ a' و b' أوليان فيما بينهما

من الفرضية الأولى نحصل على $2a'^2+b'^2=82$ ومعناه $b'^2=2(41-a'^2)$ إذن يجب $a'^2<41$

a'^2	1	4	9	16	25	36
b'^2	80	74	64	50	32	10

إذن الثنائية الوحيدة $(a';b')$ هي $(3,8)$ ومنه $(a;b)=(48,128)$

83 a و b عددان من $\mathbb{N}^*$ و $PGCD(a;b)=d$.

توجد $(a';b')$ من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث $a=da'$, $b=db'$ ؛ a' و b' أوليان فيما بينهما ؛ $ab+5d^2=35d$ تصبح

$d^2(a'b'+5)=35d$ معناه $d(a'b'+5)=35$ ومنه d يقسم 35 و $a'b'=\dfrac{35}{d}-5$ ؛ قواسم 35 هي: $1,5,7,35$

إذا كان $d=35$ أو $d=7$ فإن $a'b'\le0$ وهذا مرفوض

إذا كان $d=1$ فإن $a'b'=30$ ولدينا $30=2\times3\times5$

ومجموعة قواسم 30 هي : $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ ومنه : $(a';b')\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6);$
$(6,5);(10,3);(15,2);(30,1)\}$

إذا كان $d=5$ فإن $a'b'=2$ ؛ $(a';b')\in\{(1,2);(2,1)\}$ ومنه $(a;b)\in\{(5,10);(10,5)\}$.

خلاصة : $(a;b)\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6);(6,5);(10,3);(15,2);(30,1);(5,10);(10;5)\}$.

84 1) ليكن d قاسما مشتركا لـ a ، b إذن هو قاسم لكل من $7a$, $5b$, $4a$ و $3b$ وبالتالي d يقسم $7a-5b$, $5b-7a$, $4a-3b$ و $3b-4a$ أي d قاسم مشترك لـ $|x|$ و $|y|$.

العكس ليكن d قاسما مشتركا لـ x و y إذن هو قاسم لكل من $4x$, $7y$, $3x$ و $5y$ وبالتالي d قاسم للفرقين $4x-7y$ و $3x-5y$

لدينا $4x-7y=4(7a-5b)-7(4a-3b)=b$ و $3x-5y=3(7a-5b)-5(4a-3b)=a$

إذن d قاسم مشترك لـ a ، b .

ومنه: مجموعة القواسم المشتركة للعددين a، b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين x و y ؛ وبالأخص $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(x;y)=PGCD(a;b)$.

2) $$(1)\ldots\begin{cases}(7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300\\PGCD(\alpha;\beta)=5\end{cases}$$

نضع : $x=7\alpha-5\beta$ و $y=4\alpha-3\beta$. وحسب السؤال 1) يكون $\alpha=3x-5y$ و $\beta=4x-7y$

ومنه $PGCD(x;y)=PGCD(\alpha;\beta)=5$. إذن (1) تصبح $\begin{cases} xy=1300 \\ PGCD(x;y)=5 \end{cases}$

$PGCD(x;y)=5$ معناه يوجد x' و y' عددان صحيحان غير معدومين حيث $|x'|$ و $|y'|$ و $x=5x'$ و $y=5y'$

ومنه $25x'y'=1300$ أي $x'y'=52$

$52=2^2\times 13$ وقواسمه هي 1 , 2 , 4 , 13 , 26 و 52

x'	-52	-13	-2	-1	1	2	13	52
y'	-1	-2	-13	-52	52	13	2	1
x	-260	-65	-10	-5	5	10	65	260
y	-5	-10	-65	-260	260	65	10	5
α	-755	-145	295	1285	-1285	-295	145	755
β	-1005	-190	415	1800	-1800	-415	190	1005

$(\alpha;\beta)\in\{(295,415);(1285,1800);(145,190);(755,1005)\}$

من التمرين 85 إلى التمرين 88 ، برهن من أجل كل عدد طبيعي n ، أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما .

85 $a=n+3$ و $b=2n+7$.

d يقسم a و b إذن يقسم $2a$ وكذلك $b-2a$ ولدينا : $b-2a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

86 $a=3n+4$ و $b=8n+11$.

d يقسم a و b إذن يقسم $8a$ و $3b$ وكذلك $3b-8a$ ولدينا : $3b-8a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

87 $a=9n+7$ و $b=5n+4$.

d يقسم a و b إذن يقسم $5a$ و $9b$ وكذلك $9b-5a$ ولدينا : $9b-5a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

88 $a=7n^2+2$ و $b=4n^2+1$.

d يقسم a و b إذن يقسم $4a$ و $7b$ وكذلك $4a-7b$ ولدينا : $4a-7b=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

89 n عدد طبيعي غير معدوم .

1) نضع $PGCD(2n-1;9n+4)=d$ إذن d يقسم $(9n+4)$ و $(2n-1)$ ومنه d يقسم $2(9n+4)$

و $9(2n-1)$ إذن d يقسم $2(9n+4)-9(2n-1)$

بما أن $2(9n+4)-9(2n-1)=17$ فإن d يقسم 17 أي $d=1$ أو $d=17$.

2) إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $(9n+4)$ و $(2n-1)$ ومنه 17 يقسم $4(2n-1)$

إذن 17 يقسم الفرق $(9n+4)-4(2n-1)=n+8$.

3) إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $n+8$ ومنه $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$.

لنبرهن العكس , نفرض أن $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه $9n+4=9(17\alpha-8)+4=9\times17\alpha-68$ و $2n-1=2(17\alpha-8)-1=2\times17\alpha-17$

أي : $9n+4=17(9\alpha-4)$ و $2n-1=17(2\alpha-1)$

نضع $PGCD(2\alpha-1;9\alpha-4)=\delta$ إذن δ يقسم $(2\alpha-1)$ و $(9\alpha-4)$ ومنه δ يقسم $9(2\alpha-1)$

و $2(9\alpha-4)$ إذن δ يقسم $2(9\alpha-4)-9(2\alpha-1)$

أي δ يقسم 1 وبالتالي $\delta=1$.

$PGCD\left(2\alpha-1;9\alpha-4\right)=1$ ، $9n+4=17\left(9\alpha-4\right)$ و $2n-1=17\left(2\alpha-1\right)$ معناه

$PGCD\left(2n-1;9n+4\right)=17$.

خلاصة : $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$ معناه $PGCD\left(2n-1;9n+4\right)=17$.

90 n عدد طبيعي .

نضع $a=5n^2+14n+14$ ، $b=n+2$ و $c=5n+3$.

1) لدينا $5n^2+14n+8=\left(n+2\right)\left(5n+4\right)$ ومنه b قاسم للعدد $5n^2+14n+8$.

2) b يقسم a إذن b يقسم $a-\left(5n^2+14n+8\right)$ أي b يقسم 6 .

وبالعكس ، نفرض أن b يقسم 6 بما أن b يقسم $5n^2+14n+8$ فإنه يقسم المجموع $5n^2+14n+8+6$ أي b يقسم a.

خلاصة : b يقسم a معناه b يقسم 6 .

3) b يقسم 6 معناه $n+2=1$ أو $n+2=2$ أو $n+2=3$ أو $n+2=6$ ومعناه $n=0$ أو $n=1$ أو $n=4$.

ــ إذا كان $n\in\{0,1,4\}$ فإن b يقسم 6 أي b يقسم a ومنه باقي قسمة a على b هو 0 .

ــ إذا كان $n=2$ فإن $a=62$ و $b=4$ إذن الباقي 2.

ــ إذا كان $n=3$ فإن $a=101$ و $b=5$ إذن الباقي 1.

ــ إذا كان $n>4$ فإن $b>6$ ولدينا $a=bc+6$ إذن باقي قسمة a على b هو 6 .

$c=5n+3$ ؛

ــ إذا كان $n=0$ فإن $a=14$ و $c=3$ ومنه باقي قسمة a على c هو 2 .

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $c>6$ ولدينا $a=cb+6$ إذن باقي قسمة العدد a على c هو 6 .

91 1) $n\in\mathbb{Z}-\{1\}$ نضع : $a=3n+5$ و $b=n-1$.

أ ـ لدينا $a-3b=3n+5-3n+3=8$ إذن $a=3b+8$

ب ـ $\frac{a}{b}=3+\frac{8}{b}$. $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا معناه b يقسم 8

أي : $b\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$ معناه $n\in\{-7;-3;-1;0;2;3;5;9\}$

2) نفرض أن n عدد طبيعي .

أ ـ نضع $PGCD\left(a;b\right)=d$. d يقسم a و b إذن يقسم $3b$ ومنه يقسم $a-3b$ وبالتالي d يقسم 8 .

ب ـ إذا كان $n=8k$ فإن d يقسم n ومنه d يقسم $n-b$ أي d يقسم 1 وبالتالي $d=1$.

ــ إذا كان $n=8k+1$ فإن $a=8\left(3k+1\right)$ و $b=8k$ إذن 8 يقسم d وبما أن d يقسم 8 فإن $d=8$.

ــ إذا كان $n=8k+2$ فإن $a=24k+11$ و $b=8k+1$ بما أن d يقسم 8 , و a و b فرديان فإن $d=1$.

ــ إذا كان $n=8k+3$ فإن $a=2\left(12k+7\right)$ و $b=2\left(4k+1\right)$ ؛ نضع $d'=PGCD\left(12k+7;4k+1\right)$ d' يقسم $3\left(4k+1\right)$ ومنه يقسم $12k+7-3\left(4k+1\right)$ أي يقسم 4 وبالتالي d' يقسم $4k$ و $4k+1$ إذن يقسم فرقهما 1 وبالتالي $d'=1$ إذن $d=PGCD\left(a;b\right)=2$.

ــ إذا كان $n=8k+4$ فإن $a=24k+17$ و $b=8k+3$

a و b فرديان بما أن d يقسم 8 فإن $d=1$.

ـ إذا كان $n=8k+5$ فإن $a=4(3k+5)$ و $b=4(2k+1)$ ؛ إذا كان $d=8$ فإن $2k+1$ يقبل القسمة على 2 وهذا تناقض إذن $d=4$.

ـ إذا كان $n=8k+6$ فإن $a=24k+23$ و $b=8k+5$ ؛ a و b فرديان بما أن d يقسم 8 فإن $d=1$

ـ إذا كان $n=8k+7$ فإن $a=2(8k+13)$ $b=2(4k+3)$ ؛ $2k+3$ هو فردي , إذا كان $d=8$ أو $d=4$ فإن $2k+3$ يقبل القسمة على الأقل على 2 وهذا تناقض إذن $d=2$.

92 1) n عدد طبيعي ، $\alpha=n^2+n$ و $\beta=n+2$.

أ ـ نضع $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(n;\beta)=d'$

d يقسم α و β إذن يقسم كذلك $n\beta$ ومنه يقسم $n\beta-\beta$ أي يقسم n وبالتالي d يقسم $PGCD(n;\beta)=d'$.

العكس : d' يقسم n و β إذن يقسم $n(n+1)$ أي يقسم α وبالتالي d' يقسم $PGCD(\alpha;\beta)=d$.

d يقسم d' و d' يقسم d معناه $d=d'$ أي

$PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(n;\beta)$.

ب ـ d يقسم $n+2$ و n إذن يقسم فرقهما 2 وبالتالي $PGCD(\alpha;\beta)=2$ أو $PGCD(\alpha;\beta)=1$.

2) أ ـ $a=3n^3+5n^2+2n=(3n+2)(n^2+n)$

$b=3n^2+8n+4=(3n+2)(n+2)$

إذن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

ب ـ لدينا $a=\alpha(3n+2)$ و $b=\beta(3n+2)$.

ـ إذا كان n فرديا فإن β يكون فرديا وبالتالي $d\neq 2$ إذن $d=PGCD(\alpha;\beta)=1$ ومنه $PGCD(a;b)=(3n+2)$.

ـ إذا كان n زوجيا فإن α و β زوجيان ومنه $d=2$

إذن يوجد عددان طبيعيان α' و β' أوليان فيما بينهما حيث $\alpha=2\alpha'$ و $\beta=2\beta'$ أي $a=2(3n+2)\alpha'$ و $b=2(3n+2)\beta'$ ومنه $PGCD(a;b)=2(3n+2)$

جـ ـ $PGCD(a;b)=41$ هو عدد فردي إذن لا يمكن أن يكون $PGCD(a;b)=2(3n+2)=41$ ونأخذ الحالة المتبقية أي $PGCD(a;b)=(3n+2)=41$ معناه $n=13$ وبالتالي $\alpha=182$ و $\beta=15$.

93 n عدد طبيعي ؛ نضع: $a=9n+1$ و $b=9n-1$

1) $a-b=2$ ؛ $PGCD(a;b)$ يقسم الفرق $a-b$ أي $PGCD(a;b)$ يقسم 2 هو إما 1 وإما 2.

ـ إذا كان n زوجيا فإن a و b يكونا فرديان وبالتالي $PGCD(a;b)=1$.

ـ إذا كان n فرديا فإن a و b يكونا زوجيان ومنه يقبلان القسمة على 2 وبالتالي $PGCD(a;b)=2$.

3) $ab=(9n+1)(9n-1)=81n^2-1$ وفي حالة n عدد فردي ، $PGCD(a;b)=2$ معناه $a=2k$ ، $b=2k'$ و $p\gcd(k;k')=1$ إذن $ab=4kk'$ وبالتالي $81n^2-1=4k''$ معناه $81n^2=4k''+1$

إذن باقي قسمة العدد $81n^2$ على 4 هو 1 .

المسائل

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع: $s_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية :

$PGCD(a;b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2) = 1$.

1) $s_n = 1^3 = 1$ و $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$ إذن $s_1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ومنه الخاصية البدائية صحيحة .

نفرض $s_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ من أجل $k \in \mathbb{N}^*$ ولنبرهن صحة الخاصية $s_{k+1} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

$s_{k+1} = s_k + (k+1) = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$ أي

$s_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$ $s_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) k و $k+1$ عددان متواليان إذن هما أوليان فيما بينهما وبالتالي $PGCD(k;k+1) = 1$.

ـــ ليكن k عدد طبيعي غير معدوم , $s_{2k} = \left(\frac{2k(2k+1)}{2}\right)^2$

أي $s_{2k} = k^2(2k+1)^2$ ؛ $s_{2k+1} = \left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2$

معناه $s_{2k+1} = (2k+1)^2(k+1)^2$. بما أن $PGCD(k;k+1) = 1$ فإن $PGCD(k^2;(k+1)^2) = 1$

وبالتالي : $PGCD(s_{2k};s_{2k+1}) = (2k+1)^2$

3) $PGCD(2k+1;2k+3)$ يقسم الفرق الذي هو 2 إذن $PGCD(2k+1;2k+3) = 1$

أو $PGCD(2k+1;2k+3) = 1$.

97 a عدد طبيعي غير معدوم .

1) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية: $9 + a^2 = 2^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 4 .

أ - نفترض أن المعادلة تقبل حلا a زوجيا ومنه 2 يقسم a^2 إذن يقسم الفرق $2^n - a^2$ وبالتالي 2 يقسم 9 وهذا تناقض إذن لا يمكن أن يكون a زوجيا إذن يكون فرديا .

ب - نفترض أن المعادلة تقبل حلا a إذن هو فردي ومنه باقي قسمة a^2 على 4 هو 1 أي $a^2 = 4k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$ ومنه $9 + 4k + 1 = 2^n$ أي $10 = 2^n - 4k$. بما أن 4 يقسم 2^n وهذا من أجل $n \geq 4$ فإن 4 يقسم $2^n - 4k$ أي 4 يقسم 10 وهذا تناقض . إذن المعادلة لا تقبل حلول.

2) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية: $9 + a^2 = 3^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 .

أ - $3^2 - 1 = 8$ و 8 يقبل القسمة 4 إذن الخاصية البدائية صحيحة . نفرض أنه من أجل $k \in \mathbb{N}^*$ العدد $3^{2k} - 1$ يقبل القسمة على 4 أي $3^{2k} - 1 = 4P$ مع $p \in \mathbb{N}^*$.

$3^{2(k+1)}-1=3^{2k+2}-1=9\times 3^{2k}-1=9(4p+1)-1$

$3^{2(k+1)}-1=36p+8=4(9p+2)$ إذن $3^{2(k+1)}-1$ يقبل القسمة على 4 , وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من اجل كل $n\in\mathbb{N}^*$, $3^{2n}-1$ يقبل القسمة على 4 .

ب - لدينا $3^{2n}=4k+1$ حيث k عدد طبيعي و $3\times 3^{2n}=4(3k)+3$ أي $3^{2n+1}=4k'+3$ حيث k' عدد طبيعي .

إذن الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين 3^{2n} و 3^{2n+1} على 4 هما 1 و 3 على الترتيب .

جـ - حسب السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي زوجي n ، باقي قسمة 3^n على 4 هو 1 ومن أجل كل عدد طبيعي فردي n ، باقي قسمة 3^n على 4 هو 3 إذن الباقي يختلف عن 2.

نفترض أن المعادلة $9+a^2=3^n$ تقبل حلا a فرديا إذن $a^2=4k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$ ؛ ولدينا إذا كان n فرديا فإن $3^n=4k'+1$ ومنه $9=4(k'-k)$ وهذا غير ممكن ؛ وإذا كان n زوجيا فإن $3^n=4k'+3$ ومنه $7=4(k'-k)$ وهذا كذلك غير ممكن , ومنه إذا كان a حلا للمعادلة فلا يمكنه أن يكون فرديا وبالتالي يكون a زوجيا ، ومنه $a=2m$ وبالتالي $3^n=9+a^2=4(m+2)+1$ إذن باقي قسمة 3^n على 4 هو 1 وهذا في الحالة n زوجي

د - $3^{2p}-a^2=(3^p-a)(3^p+a)$.

نفترض أن المعادلة $9+a^2=3^n$ تقبل حلا a فإن n زوجي أي $n=2p$ و a زوجي

ومنه $9=(3^p-a)(3^p+a)$ و a زوجي.

قواسم العدد 9 هي 1 ، 3 و 9 إذن :

(3^p-a)	1	3	9
(3^p+a)	9	3	1
$2a$	8	0	-8
a	4	0	-4

إذا كان $a=0$ فإن $3^n=9$ أي $n=2$ ولكن $n\geq 3$

وإذا كان $a=-4$ أو $a=4$ فإن $3^n=25$ وهذا غير ممكن.

3) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية : $9+a^2=5^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

أ - نضع $n=2p+1$ ومنه $5^n=5\times 5^{2p}$ ، الباقيان الممكنان لقسمة 5^p على 3 هما 1 أو 2 ومنه باقي قسمة 5^{2p} على 3 هو 1 وبالتالي باقي قسمة 5^n على 3 هو 2.

إذا كان $a=3k$ فإن باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 0.

إذا كان $a=3k+1$ أو $a=3k+2$ فنجد باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 1 إذن من أجل كل عدد طبيعي a يكون باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 0 أو 1 وبالتالي لا يوجد عدد طبيعي a يحقق $9+a^2=5^n$.

ب - في حالة n زوجي ، يكتب على الشكل $n=2p$ ويكون لدينا $9=5^{2p}-a^2=(5^p-a)(5^p+a)$

والحالة الوحيدة هي $5^p+a=9$ و $5^p-a=1$ وهذا يعني $2\times 5^p=10$ و $a=9-5^p$ أي $p=1$ و $a=4$

98 1) **أ -** إذا كان d قاسم للعددين a^p-1 و $a^{p+1}-1$ فإنه يقسم فرقهما $a^{p+1}-a^p$ أي d يقسم العدد $a^p(a-1)$.

ب - نفرض $PGCD(4^{p+1}-1,4^p-1)=D$ ومنه $D=4^i$ أو $D=3$ أو $D=3\times 4^i$ مع $i\in\{0,1,...,p\}$

ولدينا D لا يمكن أن يكون زوجيا وبالتالي $D=1$ أو $D=3$.

2) **أ -** $u_2=5$ ، $u_3=21$ و $p\gcd(5;21)=1$.

ب - استعمال التراجع للبرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=4u_n+1$.

جـ - البرهان بالتراجع نجد ، من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n هو عدد طبيعي .

د - $PGCD\left(u_{n+1},u_n\right)=1$.

3) أ - ليكن n عددا طبيعيا، $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}=4u_n+\frac{4}{3}$

$v_{n+1}=4\left(v_n-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}=4v_n$ إذن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

ب - $v_n=\frac{4}{3}\times 4^n$ ومنه $u_n=\frac{4}{3}\times 4^n-\frac{1}{3}=\frac{4^{n+1}-1}{3}$

جـ - لدينا $4^{n+1}-1=3u_n$ و $4^{n+2}-1=3u_{n+1}$ وحسب السؤال 2) لدينا $PGCD\left(u_{n+1},u_n\right)=1$ وهذا معناه $PGCD\left(4^{n+2}-1,4^{n+1}-1\right)=3$.

99 1) $E\ ...\ x^2+y^2=4$ معناه $\left(2-x\right)\left(2+x\right)=y^2$

إذن يجب أن يكون $2-x>0$ أي $x=1$ ونجد $y^2=3$

إذن لا يوجد عدد طبيعي y يحقق المعادلة E.

2) أ - نفترض أن العددين x و y زوجيان أي $x=2n$ و $y=2m$ إذن $p^2=2\left(n^2+m^2\right)$ وبالتالي 2 يقسم p^2 ومنه يقسم p وهذا تناقض لأن p أولي $p\neq 2$ أي p عدد فردي .

نفترض أن العددين x و y فرديان أي $x=2n+1$ و $y=2m+1$ إذن $p^2=2\left(2n^2+2n+2m^2+2m+1\right)$ وهذا كذلك تناقض إذن x و y أحدهما زوجي والآخر فردي .

ب - نفترض أن p يقسم x أي $x=kp$ إذن $y^2=p^2\left(1-k^2\right)$ حالتين ممكنتين $k=1$ أو $k=0$ أي $x=0$ أو $y=0$ ولكن x و y غير معدومين

وبنفس الطريقة إذا افترضنا p يقسم y ؛

إذن p لا يقسم x ولا y.

جـ - نضع $PGCD\left(x^2,y^2\right)=d$ ؛ d يقسم المجموع x^2+y^2 أي d يقسم p^2.

د - $d=1$ أو $d=p$ ، أو $d=p^2$ بما أن p لا يقسم x ولا y فإن $d\neq p$ ، أو $d\neq p^2$ وبالتالي $d=1$.

3) أ - $\left(u^2-v^2\right)^2+\left(2uv\right)^2=u^4+v^4-2u^2v^2+4u^2v^2$

$\left(u^2-v^2\right)^2+\left(2uv\right)^2=u^4+v^4+2u^2v^2=\left(u^2+v^2\right)^2$ $\left(u^2-v^2\right)^2+\left(2uv\right)^2=p^2$ وهذا هو المطلوب .

ب - $p=5$ معناه $p=1^2+2^2$ إذن $\left(3,4\right)$ هي حل لـ E

$p=13$ معناه $p=3^2+2^2$ إذن $\left(5,12\right)$ هي حل لـ E.

4) أ - $p=3$ ؛ إذا افترضنا أن $u^2+v^2=3$ فإن $u^2=3-v^2$ ويجب أن يكون $v^2<3$ وبالتالي $v=1$ ثم نجد $u^2=2$ و 2 ليس مربعا تاما إذن 3 ليس مجموع مربعين .

$x^2+y^2=9$ معناه $y^2=9-x^2$ ومنه يجب أن يكون $x^2=1$ أو $x^2=4$ وعليه $y^2=8$ أو $y^2=5$ و 8 و 5 ليسا مربعين إذن المعادلة لا تقبل حلا .

ب - $p=7$ ؛ إذا افترضنا أن $u^2+v^2=7$ فإن $u^2=7-v^2$ ويجب أن يكون $v^2<7$ وبالتالي $v=1$ أو $v=2$ ثم نجد $u^2=6$ أو $u^2=3$ و 6 و 3 ليسا مربعين تامين إذن 7 ليس مجموع مربعين .

$x^2+y^2=49$ معناه $y^2=49-x^2$ ومنه يجب أن يكون $x^2=1$ أو $x^2=4$ أو $x^2=9$ أو $x^2=16$ أو $x^2=25$ أو $x^2=36$ وعليه $y^2=48$ أو $y^2=45$ أو $y^2=40$ أو $y^2=33$ أو $y^2=24$ أو $y^2=13$ وفي كل حالة y ليسا عددا طبيعيا إذن المعادلة لا تقبل حلا .

100 (1 $M_0(x_0;y_0)$ ؛ $M_0(1;8)$ ولدينا $5(1)-8+3=0$ ومنه المعادلة محققة إذن $M_0\in(\Delta)$.

نفرض أن $M_k\in(\Delta)$ أي $5x_k-y_k+3=0$.

لنبرهن $M_{k+1}\in(\Delta)$.

لدينا $\begin{cases} 5x_{k+1}=\dfrac{35}{3}x_k+\dfrac{5}{3}y_k+5 \\ -y_{k+1}=-\dfrac{20}{3}x_k-\dfrac{8}{3}y_k-5 \end{cases}$ ومنه $5x_{k+1}-y_{k+1}=5x_k-y_k$ أي $5x_{k+1}-y_{k+1}+3=5x_k-y_k+3$

معناه $5x_{k+1}-y_{k+1}+3=0$ إذن $M_{k+1}\in(\Delta)$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $M_n\in(\Delta)$.

ــ ليكن n عدد طبيعي ، $M_n\in(\Delta)$ معناه $5x_n-y_n+3=0$ أي $5x_n+3=y_n$ بالتعويض في المعادلة الأولى للجملة نجد $x_{n+1}=\dfrac{7}{3}x_n+\dfrac{1}{3}(5x_n+3)+1$ ومعناه $x_{n+1}=4x_n+2$.

(2 $x_0=1$ ومنه $x_0\in\mathbb{N}$ ؛ نفرض $x_k\in\mathbb{N}$ ومنه $4x_k\in\mathbb{N}$ إذن $(4x_k+2)\in\mathbb{N}$ والتالي $x_{k+1}\in\mathbb{N}$.

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $x_n\in\mathbb{N}$.

ــ لدينا $5x_n+3=y_n$ بما أن $x_n\in\mathbb{N}$ فإن $(5x_n+3)\in\mathbb{N}$ وبالتالي $y_n\in\mathbb{N}$.

(3 $PGCD(x_n;y_n)=d$ إذن يوجد عددان طبيعيان غير معدومين وأوليين فيما بينهما x و y حيث $x_n=dx$ و $y_n=dy$. لدينا الثنائية $(x_n;y_n)$ تحقق معادلة (Δ) إذن $5x_n-y_n+3=0$ ومنه $d(5x-y)+3=0$ أي $3=d(y-5x)$ إذن d قاسم للعدد 3 أي $d\in\{1;3\}$.

(4 $x_0=\dfrac{5}{3}\times4^0-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}=1$ وهذا صحيح .

نفرض أن $x_k=\dfrac{5}{3}\times4^k-\dfrac{2}{3}$ ولنبرهن $x_{k+1}=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{2}{3}$.

لدينا $x_{k+1}=4x_k+2=4\left(\dfrac{5}{3}\times4^k-\dfrac{2}{3}\right)+2$ $x_{k+1}=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{8}{3}+2=\dfrac{5}{3}\times4^{k+1}-\dfrac{2}{3}$.

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $x_n=\dfrac{5}{3}\times4^n-\dfrac{2}{3}$.

ــ مما سبق ينتج $3x_n=5\times4^n-2$ إذن 3 قاسم للعدد $5\times4^n-2$. لدينا 2 يقسم 4^n ومنه 2 يقسم 5×4^n وبالتالي 2 يقسم $5\times4^n-2$ إذن 2 و 3 موجودان في تحليل العدد $5\times4^n-2$ إذن 6 قاسم للعدد $5\times4^n-2$.

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

101 1) **ب -** $r=5$
2) **جـ -** $46=13\times3+7$.
3) **ب -** $70=11\times6+4$.

102 1) **ب -** $PGCD(a;12)$ هو 1 أو 3؛
لأن $a-12b=15$ تعني أن $a-12(b+1)=3$
ومنه $PGCD(a;12)$ هو قاسم للعدد 3.
2) **جـ -** العدد a هو جداء عددين أوليين في ما بينهما ،
لأن $a=2835=3^4\times5\times7=81\times45$؛ 81 و 45 أوّليان فيما بينهما.
3) **ب -** يوجد كسر مساويا لِـ F مقامه من قوى العدد 15 لأن $F=\frac{4487}{14175}=\frac{7\times641}{3^4\times5^2\times7}=\frac{5^2\times641}{(3\times5)^4}$

103 **جـ -** $PGCD(n;n+1)=1$.

أصحيح أم خطأ ؟

104 1) خاطئة. 2) صحيحة. 3) صحيحة.
4) خاطئة. 5) خاطئة. 6) خاطئة.

105 1) خاطئ. 2) صحيح. 3) صحيح. 4) صحيح. 5) خاطئ. 6) خاطئ.

106 1) صحيحة. 2) خاطئة. 3) صحيحة.
4) خاطئة. 5) صحيحة. 6) خاطئة.