إذن $u_n \le \ln 2 \le u_n + \frac{1}{2n}$.

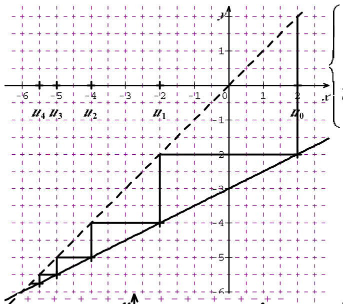
4) المتباينة السابقة تكافئ $0 \le \ln 2 - u_n \le \frac{1}{2n}$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln 2 - u_n\right) = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

التمارين

التمارين التطبيقية

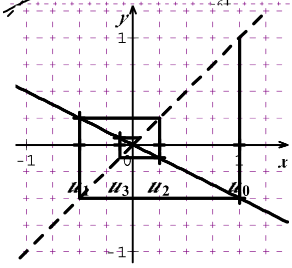
1 - تذكير بالمتتاليات العددية.

1 أ - $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$



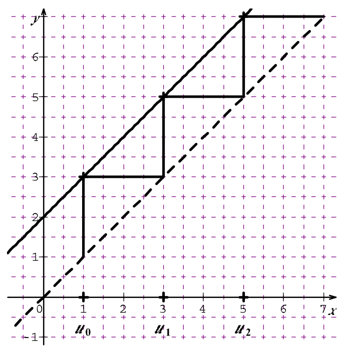
متناقصة تماما.

ب - $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$.



ليست رتيبة .

جـ - $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.



متزايدة تماما.

2 $v_{n+1} - v_n = \frac{3}{5}r$

و $w_{n+1} - w_n = u_{3n+3} - u_{3n} = u_{3n} + 3r - u_{3n} = 3r$.

3 لدينا $180 = 90 + (90 - r) + (90 - 2r)$ ومنه $3r = 90$ أي $r = 30$ إذن الأقياس هي 30° ، 60° و 90° .

4 1) استعمال التراجع.

2) لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{v_n + 1}{v_n} = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + u_n$ إذن (u_n) حسابية أساسها 1.

5 $u_7 = u_3 + 4r$ معناه $r = \frac{u_7 - u_3}{4}$ أي $r = 6$ ؛

$u_{17} = u_3 + 14r = 97$.

6 1) $u_n = u_1 + 3(n-1) = 3n - 5$.

2) $u_1 + u_2 + ... + u_{20} = \frac{20}{2}(u_1 + u_{20})$ ولدينا $u_{20} = 55$ إذن $u_1 + u_2 + ... + u_{20} = 530$.

7 $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + ... + 10$.

S هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $a_1 = \frac{1}{2}$ ؛ $a_n = a_1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n$ إذن $a_n = 10$ معناه $n = 20$ وبالتالي $S = \frac{20}{2}\left(\frac{1}{2} + 10\right)$ أي $S = 105$.

8 $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} = \frac{5^n \times 5}{7^{n+1} \times 7} = \frac{5^n}{7^{n+1}} \times \frac{5}{7} = u_n \times \frac{5}{7}$.

9 $q^3 = \frac{u_{10}}{u_7} = \left(\frac{18}{11}\right)^3$ ؛ $q = \frac{18}{11}$ ؛ $u_{30} = u_{10} \times q^{20}$ أي $u_{30} = \frac{27 \times 18^{20}}{11^{23}}$

10 1) $u_n = -2 \times 3^{n-1}$.

2) $u_1 + u_2 + ... + u_7 = (-2)\frac{3^7 - 1}{3 - 1} = -2186$.

3) $v_{n+1} = u_{2n+2} = u_{2n} \times 3^2 = 9v_n$.

إذن (v_n) هندسية أساسها 9 وحدها الأول $v_1 = u_2 = -6$

$v_1 + v_2 + ... + v_n = (-6)\frac{9^n - 1}{9 - 1} = -\frac{3}{4}(9^n - 1)$.

11 1) $u_3 = 9\,u_1$ معناه $u_1 \times q^2 = 9u_1$ أي $q^2 = 9$ لأن $u_1 > 0$ وعليه $q = 3$ أو $q = -3$ وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن $q = 3$.

2) $u_n = u_0 \times q^n = 2\times 3^n$.

3) $s_n = u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} = 3^{n+1}-1$.

2 - الاستدلال بالتراجع .

12 $p(0)$ تعني $0=\dfrac{0(0+1)}{2}$.

إذا كانت $1+2+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ فإن

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$

أي $1+2+...+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

13 $p(0)$ تعني $0^2=\dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$.

إذا كانت $1^2+2^2+...+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

14 $p(0)$ تعني $0^3=\dfrac{0^2(0+1)^2}{4}$.

إذا كانت $1^3+2^3+...+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ فإن

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=$$

$$\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

15 أ) $p(1)$ تعني $u_1>1$ أي $2>1$.

$u_k>1$ معناه $\sqrt{u_k}>\sqrt{1}$ ومعناه $u_{k+1}>1$.

ب) $p'(1)$ تعني $u_2\le\dfrac{3}{2}$ أي $\sqrt{2}\le\dfrac{3}{2}$.

إذا كان $u_{k+1}\le\dfrac{3}{2}$ فإن $u_{k+1}\le\dfrac{9}{4}$ ومنه $\sqrt{u_{k+1}}\le\sqrt{\dfrac{9}{4}}$

مع الملاحظة أن $u_{k+1}>1$ إذن $u_{k+2}\le\dfrac{3}{2}$.

16 $p(n)$ هي الخاصية " $u_n=3$ "

$p(0)$ تعني $u_0=3$.

إذا كانت $u_k=3$ فإن $u_{k+1}=\sqrt{6+u_k}=\sqrt{9}=3$.

17 1) $p(0)$ تعني $0<u_0<1$

$0<u_k<1$ معناه $0^2<u_k{}^2<1^2$ أي $0<u_{k+1}<1$.

2) $u_{n+1}-u_n=u_n(u_n-1)$ بما أن $0<u_n<1$ فإن $u_n>0$ و $u_n-1<0$ إذن $u_{n+1}-u_n<0$.

18 $p(0)$ تعني 2^0-1 مضاعف لـِ 7 .

لدينا $2^{3k}-1=7\alpha$ معناه $2^{3k}=7\alpha+1$.

أي $2^{3(k+1)}-1=8\times 2^{3k}-1=8\times(7\alpha+1)-1$

$2^{3(k+1)}-1=7\times(8\alpha+1)$.

19 $p(0)$ تعني 3^0-1 مضاعف لـِ 8 .

لدينا $3^{2k}-1=8\alpha$ معناه $3^{2k}=8\alpha+1$.

أي $3^{2(k+1)}-1=9\times 3^{2k}-1=9\times(8\alpha+1)-1$

$3^{2(k+1)}-1=8\times(9\alpha+1)$.

20 $p(n)$ هي " $\underline{3^{2n}-2^n}$ مضاعف للعدد 7 "

$p(0)$ هي الخاصية 3^0-2^0 مضاعف لـِ 7 .

$3^{2n}-2^n=7\alpha$ معناه $3^{2n}-2^n=7\alpha+2^n$.

أي $3^{2(n+1)}-2^{n+1}=9\times 3^{2n}-2\times 2^n$

$$3^{2(n+1)}-2^{n+1}=9(7\alpha+2^n)-2\times 2^n=7(9\alpha+2^n)$$

يمكن اعتبار $p(n)$ هي " $\underline{3^{2n+1}+2^{n+2}}$ مضاعف للعدد 7 ".

21 $p(0)$ تعني $0^3-2\times 0$ يقبل القسمة على 3 .

نفرض أن $n^3+2n=3\alpha$

لدينا $(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+2n+3$

أي $(n+1)^3+2(n+1)=3\alpha+3n^2+3n+3$.

22 1) لدينا $10^n+1=9\alpha$ معناه $10^n=9\alpha-1$ أي $10^{n+1}=90\alpha-10$ ومعناه $10^{n+1}=9(10\alpha-1)-1$.

2) من أجل $n=0$ ، $10^0+1=2$ و 2 ليس مضاعف لـِ 9 .

3 - تقارب متتالية عددية .

23 لدينا $-10^{-3}<u_n<10^{-3}$ معناه $0<\frac{1}{n\sqrt{n}}<10^{-3}$

ومعناه $n\sqrt{n}>\frac{1}{10^{-3}}$ ويكافئ $n^3>10^6$ أي $n>10^2$.

24 $u_n>10^6$ معناه $n\sqrt{n}>10^6$ ومعناه $n^3>10^{12}$

أي $n>10^4$.

25 لدينا $u_n=\frac{3}{2^n}$ ؛ $u_n<10^{-5}$ معناه $2^n>3\times10^5$

أي $n>\frac{3\times10^5}{\ln 2}$ إذن ابتداء من الدليل 432809 .

26 لدينا $u_n=3^n$ ؛ $u_n>10^{12}$ معناه $3^n>10^{12}$ أي

$n>\frac{10^{12}}{\ln 3}$ إذن ابتداء من الدليل 910239226627 .

27 (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{2n-1}=\frac{3}{2}$. (2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n-2}{4n-3}=\frac{5}{4}$.

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}2n-\frac{2}{n+1}=+\infty$.

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3}-4+\frac{n+2}{n^2+1}=+\infty$.

28 (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}=7$.

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}=-1$.

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n+12}{n^2+1}=0$. (4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n}{4n+3}=+\infty$.

29 (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2+2}{n+3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{2n+1}=0$.

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n}+n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\sqrt{n}+1\right)=+\infty$.

30 (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)=\cos(-3\pi)=-1$.

(3 $u_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{17}$. لدينا $-\frac{1}{n}\le u_n\le\frac{1}{n}$ ،

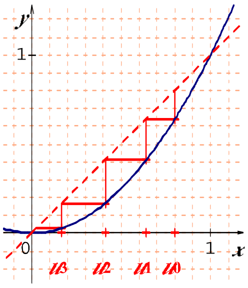
بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

31 (1 تقاطع $\mathscr{C}$ و Δ هما النقطتان $O(0;0)$ و $A(1;1)$.

(2 f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ إذن (u_n) متزايدة تماما.

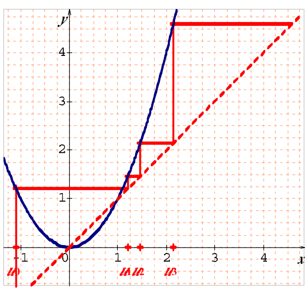
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ومنه (u_n) متباعدة.

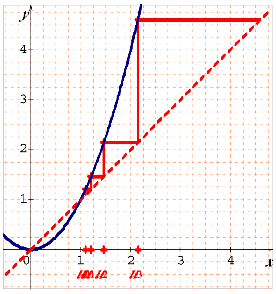
(3 في حالة $v_0=0,8$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما وتتقارب نحو 0



في حالة $v_0=-1,1$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

في حالة $v_0=1,1$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$





(4 لدينا $f(0)=0$ و $f(1)=1$ إذن باختيار $v_0=0$ أو $v_0=1$ فتكون (v_n) ثابتة .

4 - المتتاليات المحدودة .

32 لدينا $u_{10^4}=5-\frac{10}{10^8}=5-10^{-7}=4,9999999$

ومنه $u_{10^4}>4,99999$ إذن العددين 0 و 4,99999 ليس عنصران حادان من الأعلى للمتتالية (u_n) .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $-\frac{10}{n^2}<0$

ومنه $u_n<5$ وبالتالي 5 و 6 هما عنصران حادان من الأعلى للمتتالية.

33 أ - لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $-1\le\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\le1$

إذن (u_n) محدودة بـ -1 و 1 .

ب - لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $1<1+\dfrac{1}{n^2}\le 2$ إذن (u_n) محدودة بـ 1 و 2.

جـ - لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $1<1+\dfrac{1}{n+2}<2$ إذن (u_n) محدودة بـ 1 و 2.

د - لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $0<\dfrac{1}{1+n^2}\le 1$ إذن (u_n) محدودة بـ 0 و 1.

34 أ - $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ؛ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	1

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $0\le u_n<1$.

ب - $u_n=\sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$ ؛ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ ؛

$$f'(x)=\frac{4x}{2(x^2+1)}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}.$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	1

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $0\le u_n<1$.

جـ - $u_n=\dfrac{-3}{\sqrt{3n+2}}$ ؛ $f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{3x+2}}$

$$f'(x)=\frac{9}{2(3x+2)\sqrt{3x+2}}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}$	0

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}\le u_n<0$.

35 أ - $u_n=2^n$ ؛ (u_n) متتالية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0=1$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

ب - $u_n=n\sqrt{3}-2$ ؛ (u_n) متتالية حسابية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0=-2$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

جـ - $u_n=n^2+n-1$ ؛ $f(x)=x^2+x-1$ ؛

$f'(x)=2x+1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1	$+\infty$

(u_n) محدودة من الأسفل بـ $u_0=-1$ فقط.

36 أ - $u_n=\dfrac{1}{n+1}+n^2$ ؛ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>n^2\ge 0$ إذن (u_n) محدودة من الأسفل وغير محدودة من الأعلى.

ب - $u_n=n+\cos n$ ؛ $f(x)=x+\cos x$ ؛

$f'(x)=1-\sin x$ ولدينا $1-\sin x\ge 0$.

بما أن $x-1\le x+\cos x$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
$f(x)$	1	$+\infty$

(u_n) محدودة من الأسفل بـ $u_0=1$ فقط.

جـ - $u_n=(-1)^n\times n^2$ ؛ إذا كان n زوجيا فإن $u_n=n^2$ وبالتالي (u_n) ليست محدودة من الأعلى؛ وإذا كان n فرديا فإن $u_n=-n^2$ وبالتالي (u_n) ليست محدودة من الأسفل.

37 1) $f(x)=x^2-5x+6$ ؛ $f'(x)=2x-5$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

2) الدالة f متزايدة تماما على $[4;+\infty[$ إذن من أجل كل $x\ge 4$ ، $f(x)\ge f(4)$ أي $x^2-5x+6\ge 2$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 ، $n^2-5n+6\ge 2$ وهذا يعني $\frac{1}{n^2-5n+6}\le\frac{1}{2}$.

5 - المتتاليتان المتجاورتان .

38 $u_n=\frac{-1}{2n+4}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$ ؛ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$

و $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ إذن (u_n) متزايدة

و (v_n) متناقصة ، ولدينا $u_n-v_n=\frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ وبالتالي (u_n) و (v_n) متجاورتين.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

39 $u_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ و $v_n=1+\frac{1}{n^2}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$ إذن (v_n) متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$.

40 أ - $u_n=\frac{2n-3}{n+1}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{5}{(n+1)(n+2)}$

ومنه (u_n) متزايدة.

$v_n=\frac{2n+3}{n+1}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}$ ومنه (v_n) متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6}{n+1}=0$

إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

ب - $u_n=3+\frac{(-1)^n}{n}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n+1}$

ومنه (u_n) ليست رتيبة وبالتالي (u_n) و (v_n) غير متجاورتين .

41 $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.

$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$

إذن (v_n) متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

42 $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.

$v_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}$ ؛

$v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{2n(2n+1)}$ إذن (v_n) متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$.

43 $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ إذن (u_n) متزايدة.

$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{n(n+1)^2}$ إذن (v_n) متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$.

44 $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{(n+2)(n+1)}\right)}$

ومنه (u_n) متزايدة.

$v_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ ؛

$v_{n+1}-v_n = \frac{-2n^2-2n-1}{\sqrt{n+1}\left(2\sqrt{n(n+1)}+(2n+1)\right)}$ ومنه (v_n) متناقصة.

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$$

تمارين للتعمّق

1 - تذكير بالمتتاليات العددية .

45 $u_n=\frac{\ln n}{n}$ ؛ ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ؛

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ؛ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)\le 0$ معناه $x\ge e$ ؛ إذن f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ وبالتالي (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة 3.

46 $u: n\mapsto \frac{5^n}{n!}$ ؛ كل حدود u موجبة تماما ؛ ولدينا

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5}{n+1}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ معناه $\frac{5}{n+1}<1$ أي $n>4$

إذن المتتالية u تكون متناقصة ابتداء من الدليل 5 أي الرتبة السادسة.

47 $u:n\mapsto \frac{n!}{7^n}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{7}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ معناه $n>6$ إذن u تكون متزايدة ابتداء من الدليل 7 أي الرتبة الثامنة.

48 $u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$.

$v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n!)n(n+1)^2}$ إذن $v_{n+1}-v_n<0$.

49 1) أ – $\begin{cases}v_1+v_2+v_3=24\\ v_4+v_5+v_6+v_7=74\end{cases}$ معناه $\begin{cases}v_1+r=8\\ 2v_1+9r=37\end{cases}$ أي $\begin{cases}v_1=5\\ r=3\end{cases}$.

ب – $v_n=3n+2$ ؛ $v_n>6023$ معناه $n>2007$

وبالتالي أصغر عدد طبيعي n هو 2008 .

2) $2S_n=n(3n+7)$ معناه $n(u_1+u_n)=n(3n+7)$

أي $(d-3)n-d+2u_1-7=0$ إذن $d=3$ و $u_1=5$.

50 (u_n) متتالية حسابية أساسها -5 و $u_0=-4$.

1) $u_n=-5n-4$.

2) $S=u_{26}+u_{27}+...+u_{125}=50(u_{26}+u_{125})$ أي

$S=50(-5\times26-4-5\times125-4)=-38150$

51 $u_0=2$ ، $4u_{n+1}-2u_n=9$ ، $v_n=2u_n-9$

أ - $u_1=3,25$ ، $u_2=3,875$ و $u_3=4,1875$.

$v_0=-5$ ، $v_1=-2,5$ ، $v_2=-1,25$ و $v_3=-0,625$.

ب - $v_{n+1}=2u_{n+1}-9=u_n-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}v_n$

جـ - $v_n=-5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n=-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{9}{2}$.

د - $v_0+v_1+...+v_n=10\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$ ؛

$u_0+u_1+...+u_n=5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]-\frac{9}{2}(n+1)$.

52 $u_0=14$ ، $u_{n+1}=4u_n+3$ ، $v_n=u_n+1$.

1) $v_{n+1}=u_{n+1}+1=4(u_n+1)=4v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0=u_0+1=15$.

2) $v_n=15\times4^n$ ؛ $u_n=15\times4^n-1$.

3) لدينا ؛ $S_n = u_0^2+u_1^2+...+u_n^2$

ومنه $u_n^2 = 225\times 4^{2n} - 30\times 4^n + 1$

$$S_n = 225\left(4^0+4^2+...+4^{2n}\right)$$
$$-30\left(4^0+4^1+...+4^n\right)+n+1$$

$.S_n = 15\times 4^{2(n+1)} - 10\times 4^{n+1}+n-4$

53 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_0=\frac{2}{9}$

$$S = u_3+u_4+...+u_{10} = u_3\frac{3^8-1}{2} = \frac{2}{9}\times 3^3\times\frac{3^8-1}{2}$$

أي $S=19680$.

54 $S = 0,02-0,1+0,5-2,5+...+312,5$ ؛

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها -5 ؛

بوضع $u_1=0,02$ يكون $u_n = 0,02(-5)^{n-1}$

$u_n=312,5$ معناه $(-5)^{n-1}=15625$ أي $n=7$.

$$.S = 0,02\frac{(-5)^7-1}{-6} = -52,08$$

55 $u_n = 2\times 3^n+3\times 4^n$. $s_n=u_0+u_1+...+u_n$

$$.s_n = 2\frac{3^{n+1}-1}{2}+3\frac{4^{n+1}-1}{3} = 3^{n+1}+4^{n+1}-2$$

56 $u_1=1$ ، $u_{n+1}=2u_n+3$ ، $v_n=u_n+3$

1) $v_{n+1}=u_{n+1}+3=2u_n+6=2v_n$ إذن (v_n) هندسية أساسها 2 .

- $v_n = 4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$ ؛ $u_n=2^{n+1}-3$.

2) $.s_n = v_1\frac{2^n-1}{2-1} = 2^{n+2}-4$

- $u_1+u_2+...+u_n+3n = v_1+v_2+...+v_n$ أي

. $u_1+u_2+...+u_n+3n = 2^{n+2}-4 = 4\left(2^n-4\right)$

57 $u_0=\frac{1}{6}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8}$ ، $.v_n = 2u_n+\frac{5}{3}$

1) $u_1=-\frac{7}{12}$ ، $u_2=-\frac{37}{48}$ و $u_3=-\frac{157}{192}$. $v_0=2$ ،

$v_1=\frac{1}{2}$ و $v_2=\frac{1}{8}$.

2) $v_{n+1}=2u_{n+1}+\frac{5}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{5}{12}=\frac{1}{4}v_n$ إذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$. - $v_n=\frac{2}{4^n}$ ؛ $u_n=\frac{1}{4^n}-\frac{5}{6}$.

3) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث :

$$s_n = v_0+v_1+...+v_n = 2\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}-1} = -\frac{2}{3\times 4^n}+\frac{8}{3}$$ ،

لدينا $u_n=\frac{1}{2}v_n - \frac{5}{6}$ ومنه $.t_n = -\frac{1}{3\times 4^n}-\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}$

58 من أجل كل $n\ge 1$: $\begin{cases} u_0=2 \ , \ u_1=4 \\ u_{n+1}=4u_n-u_{n-1} \end{cases}$.

1) $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$ ؛ a و b هما حلا المعادلة

$x^2-4x+1=0$ إذن $(a;b)=\left(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$ أو

. $(a;b)=\left(2+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$

2) $v_n=u_{n+1}-au_n$ ؛ ليكن n عددا طبيعيا ،

أي $v_{n+1}=u_{n+2}-au_{n+1}=4u_{n+1}-u_n-au_{n+1}$

أي $v_{n+1}=(4-a)u_{n+1}-u_n=bu_{n+1}-abu_n$

$v_{n+1}=bv_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

3) $w_n=u_{n+1}-bu_n$ ؛ ليكن n عددا طبيعيا ،

$w_{n+1}=u_{n+2}-bu_{n+1}=4u_{n+1}-u_n-bu_{n+1}$

أي $w_{n+1}=(4-b)u_{n+1}-u_n=au_{n+1}-abu_n$

$w_{n+1}=aw_n$ إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

4) $v_0=u_1-au_0=4-2a=b-a$

و $w_0=u_1-bu_0=4-2b=a-b$

$v_n=v_0b^n=(b-a)b^n$ و $w_n=w_0a^n=(a-b)a^n$

لدينا : $v_n=u_{n+1}-au_n$ و $w_n=u_{n+1}-bu_n$ إذن

$w_n-v_n=-bu_n+au_n=(a-b)u_n$ ومنه

$$.u_n=\frac{w_n-v_n}{a-b}=a^n+b^n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

59 a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

1) $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+2ca-b^2+c^2$

بما أن $b^2=ac$ فإن $2b^2=2ac$ ، ومنه

$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

2) لدينا $\begin{cases} a+b+c=78 \\ a^2+b^2+c^2=3276 \end{cases}$ معناه

أي $\begin{cases} a+b+c=78 \\ (a+b+c)(a-b+c)=3276 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b+c=78 \\ a-b+c=42 \end{cases}$ إذن $2b=78-42=36$ أي $b=18$.

$\begin{cases} a+c=60 \\ ac=18^2=324 \end{cases}$ ؛ a و c هما حلا المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2-60x+324=0$. إذن $(a;b;c)=(6;18;54)$ أو $(a;b;c)=(54;18;6)$.

60 a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية . $b^3=343$ أي $b=7$.

$\begin{cases} a+c=29,75 \\ ac=49 \end{cases}$. $x^2-29,75x+49=0$

$(a;b;c)=\left(28;7;\frac{7}{4}\right)$ أو $(a;b;c)=\left(\frac{7}{4};7;28\right)$.

61 لدينا $b=qa$ و $c=q^2a$ ؛ $3a+c=4b$ إذن $3a+q^2a=4qa$ بما أن $a\neq 0$ فإن $q^2-4q+3=0$ أي $q=1$ أو $q=3$.

62 1) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، $v_{n+1}=13u_{n+1}-4$ معناه

$$v_{n+1}=13\left(\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n\right)-4=\frac{12}{10}-\frac{39}{10}\times\frac{v_n+4}{13}$$

أي : $v_{n+1}=\frac{12}{10}-\frac{3}{10}v_n+\frac{12}{13}=-\frac{3}{10}v_n$ وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{3}{10}$.

2) $v_n=v_1\times q^{n-1}$ ومنه $v_n=(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

$$u_n=\frac{v_n+4}{13}=\frac{1}{13}\left[(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+4\right]$$

أي $u_n=\frac{(13a-4)}{13}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{13}$.

3) $s_n=u_1+u_2+...+u_n$ معناه

$s_n=\frac{1}{13}(v_1+4+v_2+4+...+v_n+4)$ ومعناه

أي $s_n=\frac{1}{13}(v_1+v_2+...+v_n+4n)$

$s_n=\frac{v_1}{13}\times\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{4n}{13}$ ؛

$$s_n=-\frac{10}{13}\left(a-\frac{4}{13}\right)\left[\left(-\frac{3}{10}\right)^n-1\right]+\frac{4n}{13}$$

63 $\alpha_1=3$ ؛ $\alpha_3+\alpha_5=\frac{15}{16}$.

1) $q=\frac{1}{2}$.

2) $s_n=\alpha_1\frac{q^n-1}{q-1}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ،

$$\beta_{n+1}-\beta_n=\ln(\alpha_{n+1})-\ln(\alpha_n)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

وبالتالي (β_n) هي متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$

ب - $t_n=\frac{n}{2}(\beta_1+\beta_n)=\frac{n}{2}(2\beta_1-(n-1)\ln 2)$

$$t_n=\frac{n}{2}\left(2\ln 3-\ln 2^{n-1}\right)=\frac{n}{2}\ln\frac{9}{2^{n-1}}$$

64 لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$A_n=\underbrace{11...1}_{n\text{ رقم}}$ ومنه $9A_n=\underbrace{99...9}_{n\text{ رقم}}$ ومنه

$$9A_n+1=1\underbrace{00...0}_{n\text{ رقم}}=10^n$$

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=10^n$ هي هندسية أساسها 10 . ولدينا : $A_n=\frac{1}{9}(10^n-1)=\frac{1}{9}(u_n-1)$

ومنه $s_n=\frac{1}{9}(u_1-1)+\frac{1}{9}(u_2-1)+...+\frac{1}{9}(u_n-1)$

. $s_n=\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{1}{9}n$

65 $u_n=10^n$ و $A_n=\frac{1}{3}(u_n-1)$

وعليه $s_n=\frac{1}{3}\left[(u_1+u_2+...+u_n)-n\right]$ ؛

$$s_n=\frac{1}{3}\left[u_1\frac{10^n-1}{9}-n\right]=\frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{1}{3}n$$

66 $u_0=5$ ، $u_{n+1}=5u_n-7n$ ؛

. $v_n=u_n-\frac{7}{4}n-\frac{7}{16}$

1) النتائج المحصل عليها مع حساب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

n	0	1	2	3	4
u_n	5	25	118	576	2859
v_n	4.5625	22.81	114.06	570.31	2851.56
	5	5	5	5	5

5	6	7	8
14267	71300	356458	1782241
14257,81	71289,1	356445,313	1782226,56
5	5	5	5

يبدو أن المتتالية (v_n) هندسية ذات الأساس 5 .

2) ليكن n عدد طبيعي ، $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{7}{4}(n+1)-\frac{7}{16}$

$v_{n+1}=5v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية ذات الأساس 5 .

$v_n=v_0\times5^n$ ومنه $v_n=\frac{73}{16}\times5^n$ ؛

$u_n=\frac{73}{16}\times5^n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$.

3) $s_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، ولدينا

$u_n=v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$ ،

$$s_n=\left(v_0+\frac{7}{16}\right)+\left(v_1+\frac{7}{4}+\frac{7}{16}\right)+...+\left(v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}\right)$$

$$s_n=(v_0+v_1+...+v_n)+\frac{7}{4}(1+2+...+n)+\frac{7}{16}(n+1)$$

$$s_n=v_0\frac{5^{n+1}-1}{4}+\frac{7n(n+1)}{8}+\frac{7}{16}(n+1)$$ ؛

$$s_n=\frac{73}{64}\left(5^{n+1}-1\right)+\frac{7}{16}\left(2n^2+3n+1\right)$$.

67 $u_0=-2$ ، $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ ، α و β عددان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=u_0=-2$ ومنه العلاقة $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ تصبح $-2=-2\alpha+\beta$ أي : $\beta=2\alpha-2$.

2) أ - ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\gamma$.

$$v_{n+1}=\alpha u_n+\beta+\gamma=\alpha(v_n-\gamma)+\beta+\gamma$$

$$v_{n+1}=\alpha v_n-\alpha\gamma+\beta+\gamma=\alpha v_n-\gamma(\alpha-1)+\beta$$

إذن لكي تكون المتتالية (v_n) هندسية يجب أن يكون

$-\gamma(\alpha-1)+\beta=0$ أي : $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$.

ب - $\alpha=3$, $\beta=2$ و $\gamma=1$ العلاقة $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$ محققة

وبالتالي (v_n) هندسية أساسها $\alpha=3$ حدها الأول

$v_0=-1$ ؛ ومنه $s_n=v_0\frac{3^n-1}{3-1}=-\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}$.

لدينا $v_n=u_n+1$ معناه $u_n=v_n-1$ ومنه

$$t_n=(v_0-1)+(v_1-1)+...+(v_n-1)=s_n-(n+1)$$

$t_n=-\frac{3^n}{2}-n-\frac{1}{2}$.

2 - الاستدلال بالتراجع .

68 1) أ - $s_1=1$ ، $s_2=5$ ، $s_3=14$ و $s_4=30$.

ب - $s_{n+1}=s_n+(n+1)^2$.

2) $p(1)$ هي الخاصية $s_1=\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$

إذا كان $s_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

$s_{k+1}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$ أي

$s_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

69 1) $t_1=1\times2=2$ ، $t_2=t_1+2\times3=8$ ،

$t_3=t_2+3\times4=20$ و $t_4=t_3+4\times5=40$.

$t_{n+1}=t_n+(n+1)(n+2)$.

2) $p(1)$ تعني $t_1=\frac{1}{3}\times1(1+1)(1+2)$ وهي صحيحة.

إذا كانت $t_k=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ فإن

$t_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ معناه

$t_{k+1}=\left(\frac{1}{3}k+1\right)(k+1)(k+2)$ أي

$t_{k+1}=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$.

70 $s_2=1$ و $p(2)$ تعني. $s_2=1+\left(\frac{1}{2}\times2-1\right)2^2$.

إذا كانت $s_k = 1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k$ فإن

$s_{k+1} = 1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k + k\times 2^{k-1}$ معناه

$s_{k+1} = 1+\left(\frac{k+1}{2}-1\right)2^{k+1}$.

$$(n-1)2^n - n\times 2^{n-1}+1 = n\times 2^n - 2^n - \frac{1}{2}n\times 2^n +1$$

$$= -2^n + \frac{1}{2}n\times 2^n + 1 = 1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n = s_n$$

71 $p(1)$ تعني $1\times2\times3 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$.

نضع $\alpha_n = 1\times2\times3+2\times3\times4+...+n(n+1)(n+2)$

نفرض $\alpha_k = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$؛

$\alpha_{k+1} = \alpha_k + (k+1)(k+2)(k+3)$ معناه

$$\alpha_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + \frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

أي $\alpha_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

72 $p(1)$ تعني $1=(1+1)!-1$.

نضع $\alpha_n = 1+2\times2!+3\times3!+...+n(n!)$

نفرض $\alpha_k=(k+1)!-1$.

$\alpha_{k+1}=\alpha_k+(k+1)\left[(k+1)!\right]$ معناه

أي $\alpha_{k+1} = (k+1)!-1+(k+1)\left[(k+1)!\right]$

$\alpha_{k+1} = (k+1)!\,(k+2)-1 = (k+2)!-1$

73 $p(1)$ تعني $1!\ge 2^{1-1}$.

من أجل كل $k\in\mathbb{N}^*$ ، $k+1\ge2$

إذا كان $k!\ge 2^{k-1}$ فإن $(k!)(k+1)\ge 2^{k-1}\times 2$

أي $(k+1)!\ge 2^k$.

74 $\mathcal{P}(4)$ تعني $2^4\ge4^2$.

ليكن k عددا طبيعيا حيث $k\ge4$ ونفرض $2^k\ge k^2$.

إذا كان $k\ge4$ فإن $k^2\ge4k$ وكذلك إذا كان $k\ge4$

فإن $2k\ge8$ ومنه $2k>1$ إذن $2k+2k>1+2k$

وبالتالي $k^2>2k+1$ وحسب فرضية التراجع لدينا

$2^k \ge k^2$ إذن $2^k>2k+1$

لدينا إذن $2^k\ge k^2$ و $2^k>2k+1$ بجمع طرف إلى طرف نجد $2^k+2^k>k^2+2k+1$ أي

$2\times2^k>(k+1)^2$ معناه $2^{k+1}>(k+1)^2$

ومنه $2^{k+1}\ge(k+1)^2$.

75 $\mathcal{P}(2)$ تعني $5^2\ge4^2+3^2$.

نفرض $5^k\ge4^k+3^k$ ومنه $5^{k+1}\ge5\times4^k+5\times3^k$،

بما أن $5\times4^k\ge4\times4^k$ و $5\times3^k\ge3\times3^k$ فإن

$5\times4^k+5\times3^k\ge4^{k+1}+3^{k+1}$ ومنه $5^{k+1}\ge4^{k+1}+3^{k+1}$.

76 متباينة برنولي (*Bernoulli*)

1) $p(1)$ تعني $1+a\ge1+a$.

نفرض $(1+a)^k\ge1+ka$ ومنه

$(1+a)^{k+1}\ge1+(k+1)a+ka^2\ge1+(k+1)a$.

2) إذا كان $q>1$ فإن $q=1+a$ مع $a>0$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $q^n\ge1+an$ ولدينا

$\lim\limits_{n\to+\infty}1+an=+\infty$ لأن $a>0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$

77 1) $p(2)$ تعني $12\ge9$. نفرض $3k^2\ge(k+1)^2$

ومنه $3k^2+6k+3\ge(k+1)^2+6k+3$

أي $3(k+1)^2\ge k^2+8k+4$ بما أن $8k\ge4k$ فإن

$3(k+1)^2\ge k^2+4k+4$ أي $3(k+1)^2\ge(k+2)^2$.

2) نسمي P_n الخاصية : " $3^n\ge2^n+5n^2$ " .

أ ـ P_1 تعني $3\ge7$ ؛ P_2 تعني $9\ge24$ ؛ P_3 تعني $27\ge53$ ؛ P_4 تعني $81\ge96$ ؛ P_5 تعني $243\ge157$

إذن P_5 هي الخاصية الأولى الصحيحة .

ب ـ نفرض $3^k\ge2^k+5k^2$ مع $k\ge5$ ، ومنه

$3^{k+1}\ge3\times2^k+5\times3k^2\ge2\times2^k+5\times(k+1)^2$

لأن $3\ge2$ ومن 1) لدينا $3k^2\ge(k+1)^2$.

78 من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، P_n تعني " $3^n\ge(n+2)^2$ ".

1) P_0 تعني $1\ge4$ ، P_1 تعني $3\ge9$ ، P_2 تعني $9\ge16$ و P_3 تعني $27\ge25$ وهي الخصية الصحيحة.

2) نفرض $3^k \ge (k+2)^2$ من أجل $k \ge 3$ إذن

$3^{k+1} \ge 3(k+2)^2$ معناه $3^{k+1} \ge 3k^2+12k+12$

ومنه $3^{k+1} \ge k^2+6k+9$ أي $3^{k+1} \ge (k+3)^2$.

79 $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1) $u_1=\dfrac{\sqrt2}{2}$ ، $u_2=\dfrac{\sqrt3}{3}$ ، $u_3=\dfrac{1}{\sqrt4}=\dfrac12$ ؛ يبدو أن $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=1$.

نفرض $u_k=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ ؛ $u_{k+1}=\dfrac{u_k}{\sqrt{u_k^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k+2}}$.

80 $u_0=7$ ، $u_{n+1}=10u_n-18$.

1) $u_1=52$ ، $u_2=502$ ، $u_3=5002$ ، $u_4 50002$ و $u_5=500002$. في الحد u_n يوجد $(n-1)$ صفرا

2) $u_n=5\times10^n+2$.

$p(0)$ تعني $u_0=5\times10^0+2=7$.

نفرض $u_k=5\times10^k+2$ ؛ $u_{k+1}=10u_k-18$ معناه $u_{k+1}=10(5\times10^n+2)-18=5\times10^{n+1}+2$.

81 $u_0=2$ ، $u_{n+1}=2u_n-3$.

1) $u_1=1$ ، $u_2=-1$ ، $u_3=-5$ ، $u_4=-13$ و $u_5=-29$. $3-u_n=2^n$.

2) $p(0)$ تعني $3-u_0=2^0$. نفرض $3-u_k=2^k$ ؛ $3-u_{k+1}=6-2u_k=6-2(3-2^k)=2^{k+1}$.

82 $u_0=3$ ، $u_{n+1}=4-u_n$.

1) $u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_3=1$ ، $u_4=3$ و $u_5=1$.

$u_{2n+1}=1$ و $u_{2n}=3$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=3$ و $u_1=1$.

نفرض $u_{2k}=3$ و $u_{2k+1}=1$. لدينا

$u_{2(k+1)}=4-u_{2k+1}=3$ و $u_{2(k+1)+1}=4-u_{2(k+1)}=1$.

83 $s_n=1+3+5+...+(2n-1)$.

1) $s_1=1$ ، $s_2=4$ ، $s_3=9$ و $s_4=16$. $s_n=n^2$.

2) $p(1)$ تعني $s_1=1^2$. نفرض $s_k=k^2$ ؛ $s_{k+1}=s_k+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

3) s_n هو مجموع n حدا الأولى من متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول 1 إذن $s_n=\dfrac{n}{2}(1+2n-1)=n^2$.

84 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=n+u_n$.

1) $u_1=1$ ؛ $u_2=2$ ؛ $u_3=4$ ؛ $u_4=7$ ؛ $u_5=11$.

يبدو أن $u_n=\dfrac{n(n-1)}{2}+1$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=\dfrac{0(0-1)}{2}+1$.

نفرض $u_k=\dfrac{k(k-1)}{2}+1$ ؛

$u_{k+1}=k+\dfrac{k(k-1)}{2}+1=\dfrac{k(k+1)}{2}+1$.

85 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+2}$.

1) $u_1=\dfrac13$ ، $u_2=\dfrac17$ ، $u_3=\dfrac1{15}$ ، $u_4=\dfrac1{31}$ ، $u_5=\dfrac1{63}$.

$u_n=\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=\dfrac{1}{2-1}$. نفرض $u_k=\dfrac{1}{2^{k+1}-1}$ ؛

أي $u_{k+1}=\dfrac{u_k}{u_k+2}=\dfrac{1}{2^{k+1}-1}/\left(\dfrac{1}{2^{k+1}-1}+2\right)$

$u_{k+1}=\dfrac{1}{2^{k+1}-1}/\left(\dfrac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}-1}\right)=\dfrac{1}{2^{k+2}-1}$.

86 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=u_n+2$.

$v_0=1$ ، $v_{n+1}=v_n+u_n$.

1) u_n هو الحد العام لمتتالية حسابية أساسها 2 ومنه $u_n=2n+1$.

2) $p(0)$ تعني $v_0=1+0^2$. نفرض $v_k=1+k^2$ ؛ $v_{k+1}=v_k+u_k=1+k^2+2k+1=1+(k+1)^2$.

87 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=u_n+2n+3$.

1) $u_{n+1}-u_n=2n+3$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n>0$ أي (u_n) متزايدة تماما.

2) $p(0)$ تعني $u_0>0$ نفرض $u_k>k^2$ ؛

$u_{k+1}=u_k+2k+3$ ومنه $u_{k+1}>k^2+2k+3$
وعليه $u_{k+1}>k^2+2k+1$.

88 $u_0\in]0;1[$ ، <u>تصحيح</u> $u_{n+1}=-u_n^2+2u_n$.

$p(0)$ تعني $0<u_0<1$. نفرض $0<u_k<1$.
نعتبر الدالة $f:x\mapsto -x^2+2x$ ؛ $f'(x)=-2x+2$
ومنه f' موجبة تماما على $]0;1[$ أي f متزايدة تماما على $]0;1[$ وبالتالي $f(0)<f(u_k)<f(1)$ أي $0<u_{k+1}<1$.

89 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

* $p(0)$ تعني $0\le u_0\le 2$. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x)=\sqrt{2+x}$ ؛ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$
f' موجبة على $[0;2]$ ومنه f متزايدة تماما على $[0;2]$
وبالتالي إذا كان $0\le u_k\le 2$ فإن $f(0)\le f(u_k)\le f(2)$
أي $\sqrt{2}\le u_{k+1}\le 2$ ومنه $0\le u_{k+1}\le 2$
* $p(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}>u_n$.
$p(0)$ تعني $u_1>u_0$ أي $\sqrt{3}>1$.نفرض $u_{k+1}>u_k$ معناه $u_{k+1}+2>u_k+2$ وبما أن $u_n\ge 0$ فإن $u_{k+2}>u_{k+1}$

90 $u_0=0$ ، $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n<4$.
3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

1) $u_1=\sqrt{12}\simeq 3.464$ ، $u_2=\sqrt{12+\sqrt{12}}\simeq 3.93$ ، $u_3=\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}\simeq 3,991$ ، هي تنتمي إلى المجال $[0;4]$.
2) الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $0\le u_0<4$ وهذا صحيح
ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفترض $0\le u_k<4$ ومنه $12\le 12+u_k<16$ أي $\sqrt{12}\le\sqrt{12+u_k}<4$
ومنه $0\le\sqrt{12+u_k}<4$ إذن $0\le u_{k+1}<4$.
3) نلاحظ أن $u_0<u_1<u_2<u_3$ لنبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}>u_n$ وهذا باستعمال الاستدلال بالراجع
الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1>u_0$ وهذا صحيح لأن $u_0=0$ و $u_1=\sqrt{12}$. ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض
$u_{k+1}>u_k$ ومنه $12+u_{k+1}>12+u_k$ ومما سبق كل الحدود موجبة إذن $\sqrt{12+u_{k+1}}>\sqrt{12+u_k}$ ومنه $u_{k+2}>u_{k+1}$.

91 $u_0=2$ و $u_{n+1}=0,6\,u_n-1,2$.

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}<u_n$.
الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1<u_0$ ولدينا من تعرف المتتالية $u_0=2$ و $u_1=0$ ومنه $u_1<u_0$ إذن $\mathcal{P}(0)$ صحيحة .
ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه $0,6u_{k+1}<0,6u_k$ أي $0,6u_{k+1}-1,2<0,6u_k-1,2$
ومعناه $u_{k+2}<u_{k+1}$.
2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $\mathcal{P}'(n)$ هي الخاصية $u_n>-3$.
$\mathcal{P}'(0)$ تعني $u_0>-3$ وهذا صحيح لأن $u_0=2$.
ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>-3$ معناه $0,6u_k>-1,8$ أي $0,6u_k-1,2>-1,8-1,2$
وباستعمال تعريف المتتالية يكون $u_{k+1}>-3$.

92 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+3}$.

1) $p(0)$ تعني $0\le u_0\le 1$ وهي صحيحة.
نفرض $0\le u_k\le 1$ ؛ لدينا $u_{k+1}=\frac{u_k+1}{u_k+3}$ ومنه $u_{k+1}\ge 0$.
$u_{k+1}-1=\frac{-2}{u_k+3}$ ومنه $u_{k+1}-1\le 0$ أي $0\le u_{k+1}\le 1$.
2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}<u_n$.
$p'(0)$ تعني $u_1<u_0$ أي $\frac{1}{2}<1$. نعتبر الدالة
$f:x\mapsto\frac{x+1}{x+3}$ ؛ $f'(x)=\frac{2}{(x+3)}$ ومنه $f'(x)>0$
إذن f متزايدة تماما على $[0;1]$ وبالتالي إذا كان $u_{k+1}<u_k$ فإن $f(u_{k+1})<f(u_k)$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$.

93 θ عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$u_0=2\cos\theta$ ، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

1) أ - $u_1=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}$.

. $u_2=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=2\cos\frac{\theta}{4}$

ب - $p(0)$ هي $u_0>0$ أي $2\cos\theta>0$ وهذا صحيح لأن $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. نفرض $u_k>0$ إذن $2+u_k>2$ ومنه $\sqrt{2+u_k}>\sqrt{2}$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$ ومنه $u_{k+1}>0$.

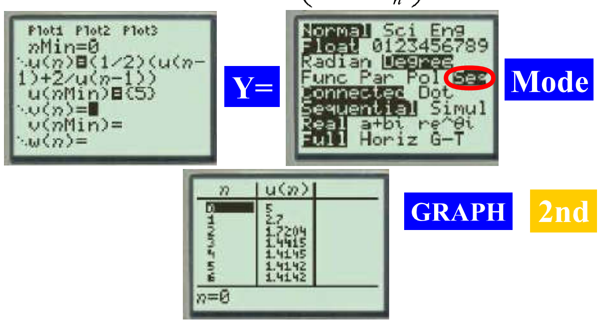
2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$ ؛

$p'(0)$ تعني $u_0=2\cos\frac{\theta}{2^0}=2\cos\theta$.

نفرض $u_k=2\cos\frac{\theta}{2^k}$ ، $u_{k+1}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^k}\right)}$ أي

$$u_{k+1}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^k\times2}}=2\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

94 $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$.



2) يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة .

نعتبر الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ لدينا من أجل كل عدد $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

ومنه من أجل كل $x\in[\sqrt{2};+\infty[$ $f'(x)\geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\sqrt{2};+\infty[$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-u_n=\frac{2-u_n^2}{2u_n}$$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية "$u_n>\sqrt{2}$".

$\mathcal{P}(0)$ هي $u_0>\sqrt{2}$ وهذا صحيح لأن $u_0=5$.

ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>\sqrt{2}$ ، لدينا $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ و $f(u_k)=u_{k+1}$ من فرضية التراجع وبما أن $u_k>\sqrt{2}$ و f متزايدة تماما على $[\sqrt{2};+\infty[$ ينتج $f(u_k)>f(\sqrt{2})$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$.

لدينا $2-u_n^2<0$ و $u_n>0$ إذن $\frac{2-u_n^2}{2u_n}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

95 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=n\times 2^{n-1}$.

$p(1)$ تعني $u_1=1+(1-1)2^1$.

نفرض أن $u_1+u_2+...+u_k=1+(k-1)2^k$ ؛

$$u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=1+(k-1)2^k+(k+1)2^k$$

أي $u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=1+k\,2^{k+1}$.

96 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

1) لدينا $u_1=\frac{1}{2}$ و $p(1)$ تعني $u_1=\frac{1}{1+1}$.

نفرض $u_1+u_2+...+u_k=\frac{k}{k+1}$ ؛

$$u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

أي $u_1+u_2+...+u_{k+1}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$.

2) نسمي S المجموع

$$\frac{1}{1427\times1428}+\frac{1}{1428\times1429}+...+\frac{1}{2007\times2008}.$$

ونضع $T=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+...+\frac{1}{2007\times2008}$

و $t=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+...+\frac{1}{1426\times1427}$

إذن $S=T-t=\frac{2007}{2008}-\frac{1426}{1427}=\frac{581}{2865416}$

97 الخاصية الابتدائية هي $\left(2+\sqrt{3}\right)^0=p_0+q_0\sqrt{3}$

وهي صحيحة بأخذ $p_0=1$ و $q_0=0$.

نفرض أنه من أجل $k\in\mathbb{N}$ ، يوجد عددان طبيعيان p_k و q_k حيث $\left(2+\sqrt{3}\right)^k=p_k+q_k\sqrt{3}$.

معناه $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(p_k+q_k\sqrt{3}\right)$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2p_k+3q_k\right)+\left(p_k+2q_k\right)\sqrt{3}$$

بوضع $p_{k+1}=2p_k+3q_k$ و $q_{k+1}=p_k+2q_k$ وهما عددان طبيعيان فيكون $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=p_{k+1}+q_{k+1}\sqrt{3}$.

98 1) $u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.

أ ــ $u_3=5$ ، $u_4=7$ و $u_5=9$. $u_n=2n-1$.

ب ــ الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $u_1=2\times1-1=1$.

نفرض $u_k=2k-1$ ؛

$$u_{k+1}=2u_k-u_{k-1}=4k-2-2k+3=2k+1$$

2) $v_0=\frac{2}{5}$ ، $v_1=1$ و $v_{n+2}=5v_{n+1}-6v_n$.

الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $\frac{2}{5}=\frac{2^0+3^0}{5}=v_0$.

نفرض $v_k=\frac{2^k+3^k}{5}$ ؛ $v_{k+1}=5v_k-6v_{k-1}$

$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{6}{5}\left(2^{k-1}+3^{k-1}\right)$ ؛

$$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{3}{5}2^k-\frac{2}{5}3^k=\frac{1}{5}2^{k+1}+\frac{1}{5}3^{k+1}.$$

99 $u_0=1$ ، $u_1=2$ ، $u_{n+1}+u_{n-1}=4u_n$.

الخاصية الابتدائية $u_0=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^0+\left(2-\sqrt{3}\right)^0\right]$.

نفرض $u_k=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$ ؛

ومعناه $u_{k+1}=4u_k-u_{k-1}$

$$u_{k+1}=2\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]-\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}}{2}$$

$$u_{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

$$4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

ومنه $u_{k+1}=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k+1}\right]$.

100 $u_0=2$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

أ - الخاصية الابتدائية $u_0>-1$.

نفرض $u_k>-1$ معناه $u_k+1>0$ ومنه $\sqrt{u_k+1}>0$

أي $u_{k+1}>0$ وبالتالي $u_{k+1}>-1$.

ب - $u_0=2$ و $u_1=\sqrt{3}$ ومنه $u_1<u_0$.

نفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه $0<u_{k+1}+1<u_k+1$ إذن $\sqrt{u_{k+1}+1}<\sqrt{u_k+1}$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$.

جـ - الخاصية الابتدائية $u_0\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أي $2\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نفرض $u_k\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ومنه $u_k+1\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ إذن $\sqrt{u_k+1}\geq\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ أي $u_{k+1}\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

لأن $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

101 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+4}{u_n-2}$ ، $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$.

1) $u_0=1$ ومنه $u_0\neq4$. نفرض $u_k\neq4$

ونفترض $u_{k+1}=4$ أي $\frac{u_k+4}{u_k-2}=4$ معناه $u_k=4$

وهذا تناقض إذن $u_{k+1}\neq4$ أي كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n\neq4$.

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-4}=\frac{2u_n+2}{u_n-2}\times\frac{u_n-2}{-3u_n+12}$؛

$v_{n+1}=-\frac{2}{3}\times\frac{u_n+1}{u_n-4}=-\frac{2}{3}v_n$.

2) $v_n=v_0\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

$v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$ معناه $u_n\left(v_n-1\right)=4v_n+1$

لنبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_n\neq1$

لدينا الخاصية الابتدائية $v_0 \neq 1$ لأن $v_0 = -\frac{2}{3}$. إذا كان $v_k \neq 1$ أي $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \neq 1$ فإن $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2} \neq 1$ ومنه $v_{k+1} \neq 1$

$$u_n = \frac{4v_n+1}{v_n-1} = \left[4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]/\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right].$$

102 . $p(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$

1) $$p(x+1)-p(x)=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{6}\right)-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right)=x^2$$

2) الخاصية الابتدائية هي $p(0)=0$ إذن $p(0)\in\mathbb{N}$.
نفرض $p(k)\in\mathbb{N}$ لدينا $p(k+1)=p(k)+k^2$ ومنه $p(k+1)\in\mathbb{N}$.

3) الخاصية الابتدائية هي $p(1)=0^2$ وهذا صحيح لأن
$$p(1)=\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2-3+1}{6}=0.$$
نفرض $p(k+1)=1^2+2^2+...+k^2$ ؛
لدينا $p(n+2)=p(n+1)+(n+1)^2$ معناه
$$p(n+2)=1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2.$$

103 $u_1=0$ ، $u_{n+1}=\frac{-1}{u_n-2}$.

لدينا $u_2=\frac{1}{2}$ ، $u_3=\frac{2}{3}$ ، $u_4=\frac{3}{4}$ يبدو أن $u_n=\frac{n-1}{n}$
لنبرهن باستعمال التراجع .
الخاصية الابتدائية هي $u_1=\frac{1-1}{1}=0$ وهي صحيحة.
نفرض $u_k=\frac{k-1}{k}$ ؛ $u_{k+1}=\frac{-1}{u_k-2}=\frac{-1}{\frac{k-1}{k}-2}=\frac{k}{k+1}$

$u_{2006}=\frac{2005}{2006}$.

104 إذا كان $n=24$ فإن $n=5\times2+7\times2$
نفرض من أجل $k\geq 24$ فيكون $k=5a+7b$

- إذا كان $b=0$ فإن $k=5a$ وعليه $a\geq 5$ ولدينا : $k+1=5a-20+21=5(a-4)+7\times3$.
- إذا كان $b=1$ فإن $k=5a+7$ وعليه $a\geq 4$ ولدينا : $k+1=5a-20+28=5(a-4)+7\times4$.
- إذا كان $b\geq 2$ فإن $k+1=5a+7b+15-14$ أي $k+1=5(a+3)+7(b-2)$.

105 1) $u_1=\frac{1}{2}$ ، $u_{n+1}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

أ ـ $u_2=\frac{1}{2}$ ، $u_3=\frac{3}{8}$ ، $u_4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ ، $u_5=\frac{5}{32}$.

ب ـ الخاصية الابتدائية هي $u_1=\frac{1}{2^1}$. نفرض $u_k=\frac{k}{2^k}$ ؛
$$u_{k+1}=\left(\frac{k+1}{2k}\right)u_k=\left(\frac{k+1}{2k}\right)\frac{k}{2^k}=\frac{k+1}{2^{k+1}}.$$

2) $k\in\mathbb{N}^*$ ، $v_1=\frac{1}{k}$ ، $v_{n+1}=\left(\frac{n+1}{kn}\right)v_n$.
$v_1=\frac{1}{k}$ ، $v_2=\frac{2}{k^2}$ ، $v_3=\frac{3}{k^3}$ ... ، $v_n=\frac{n}{k^n}$.
الخاصية الابتدائية هي $v_1=\frac{1}{k^1}$. نفرض $v_r=\frac{r}{k^r}$ ،
$$v_{r+1}=\left(\frac{r+1}{kr}\right)v_n=\left(\frac{r+1}{kr}\right)\frac{r}{k^r}=\frac{r+1}{k^{r+1}}.$$

3 ـ تقارب متتالية عددية .

106 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{1-n}=0$. 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)=0$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)e^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}+2e^{-n}=0$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(3+e^{2-n}\right)=\ln 3$.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n-6}{2e^n+1}=\frac{1}{2}$. 6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-n}-1}{2e^{-n}+1}=-1$.

7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{e^n-3}{e^n+1}\right)=\ln 1=0$.

8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{e^n+2}{e^{2n}+1}\right)=0$.

107 1) $u_n=n^2\left(\sqrt{3+\frac{2}{n+1}}-\sqrt{3}\right)$.

$u_n=\frac{2n^2}{n+1}\frac{1}{\sqrt{3+\frac{2}{n+1}}+\sqrt{3}}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{3}}=+\infty$

2) $u_n=\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{3}n=\dfrac{-1}{\sqrt{3n^2-1}+\sqrt{3}n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3) $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n+2}}-\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$.

$$u_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)$$

$u_n=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

4) $u_n=\dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$ ،

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

108 أ - $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{5^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ لأن $-1<\dfrac{2}{5}<1$.

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3,01^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3,01}{3}\right)^n=+\infty$ لأن $\dfrac{3,01}{3}>1$.

جـ - $u_n=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{5^n}$ ؛

$u_n=-\dfrac{5}{4}\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}-1\right]$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{5}{4}$.

109 $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3u_n+1}$ و $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

1) استعمال التراجع ؛ $p(0)$ تعني $u_0>0$.

إذا كانت $u_k>0$ فإن $3u_k+1>0$ ومنه $u_{k+1}>0$.

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{3u_n+1}{u_n}=3+v_n$.

3) $v_n=3n+\dfrac{1}{2}$ ومنه $u_n=\dfrac{2}{6n+1}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

110 $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n-2$ و $v_n=u_n+3$.

$s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}+3=\dfrac{1}{3}u_n+1$ معناه

$v_{n+1}=\dfrac{1}{3}(v_n-3)+1=\dfrac{1}{3}v_n$ ومنه (v_n) هندسية .

2) $v_n=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ومنه $u_n=v_n-3=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-3$ بما

أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-3$.

$s_n=\dfrac{3}{2}v_0\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\dfrac{3}{2}v_0=\dfrac{15}{2}$.

$t_n=s_n-3(n+1)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=-\infty$

111 $u_n=\dfrac{n^2+1}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$.

$v_n=\dfrac{u_n}{n}=\dfrac{n^2+1}{n^2+n}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1$.

$w_n=u_n-n=\dfrac{1-n}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{n}=-1$.

$t_n=\dfrac{v_n-1}{w_n-1}=\dfrac{n-1}{2n^2}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$.

112 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-4}{n+1}=+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n-4}{n+1}=-3$.

113 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=\dfrac{1}{n!}$.

1) $u_1=1$ ؛ $u_2=\dfrac{1}{2}$ ؛ $u_3=\dfrac{1}{6}$ ؛ $u_4=\dfrac{1}{24}$ ؛

$u_5=\dfrac{1}{120}$ ؛ $u_6=\dfrac{1}{720}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ $n!\geq n$

ومنه $0<u_n\leq\dfrac{1}{n}$ ؛ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

114 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\dfrac{\cos(3n-\pi)}{\sqrt{n}}$.

من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1\le \cos(3n-\pi)\le 1$

ومنه من أجل $n\neq 0$ ، $-\frac{1}{\sqrt{n}}\le u_n\le \frac{1}{\sqrt{n}}$ ؛ بما أن

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

115 من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=n+1-\cos\frac{n\pi}{5}$.

$-1\le -\cos\frac{n\pi}{5}\le 1$ ومنه $n\le u_n\le n+2$ ؛ بما أن

$\lim\limits_{n\to+\infty} n=\lim\limits_{n\to+\infty} n+2=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

116 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\left(\frac{n}{10}-1\right)^n$.

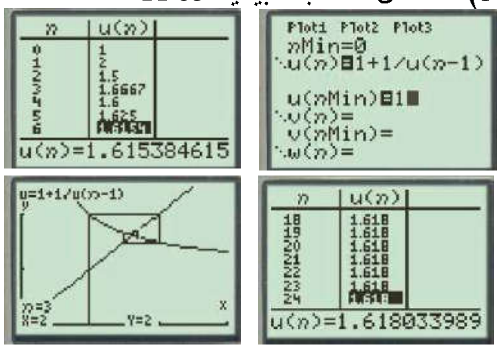
1) القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من (u_n).

2) ليكن n عدد طبيعي، $n\ge 30$ معناه $\frac{n}{10}-1\ge 2$

ومعناه $\left(\frac{n}{10}-1\right)^n\ge 2^n$ أي $u_n\ge 2^n$

$2>1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

117 1) استعمال الحاسبة البيانية TI 83 .



ابتداء من u_{23} أي الدليل 23 تستقر قيم الحدود على 1,618033989 .

يبدو أن المتتالية متقاربة ونهايتها العدد الحقيقي 1,618033989 .

إذا كانت المتتالية u متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي l حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ هذا من جهة ،

ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{u_n}=1+\frac{1}{l}$ إذن

$1+\frac{1}{l}=l$ ومعناه $l^2-l-1=0$ و $l\neq 0$.

مميز المعادلة $l^2-l-1=0$ هو 5 ومنه المعادلة تقبل حلين متمايزين هما $l'=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $l''=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

لدينا $u_0=1$ ومنه $u_0>0$ وإذا كان $u_k>0$ من أجل k عدد طبيعي كيفي, فإن $1+\frac{1}{u_k}>0$ أي $u_{k+1}>0$

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n>0$ وبالتالي $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

118 لدينا $u_1=0,57=57\times\frac{1}{100}$ ،

$u_2=0,57+0,0057=0,57+0,57\times\frac{1}{100}$

$u_2=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}\right)$.

نفترض أن $u_k=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^k}\right)$ من أجل k عدد طبيعي كيفي غير معدوم. $u_{k+1}=0,\underbrace{57...57}_{2k+2}$

ومنه $u_{k+1}=\underbrace{\qquad}_{2k}+\underbrace{0,00...0057}_{2k+2}$

إذن $u_{k+1}=u_k+\frac{57}{10^{2k+2}}$ ؛

$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^k}\right)+57\times\frac{1}{100^{k+1}}$

$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^k}+\frac{1}{100^{k+1}}\right)$.

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^n}\right)$

$\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^n}\right)$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها وحدها الأول مساويين للعدد $\frac{1}{100}$.

$$u_n = 57\times\frac{1}{100}\times\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}} = \frac{57}{100}\times\frac{100}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$$

ومنه $u_n = \frac{57}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$ بما أن $-1<\frac{1}{100}<1$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{57}{99}$.

119 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\sqrt{n^2+n}-n$.

1) حساب الحدود باستعمال مجدول إكسيل .

n	u_n
1	0.4142135623731
2	0.4494897427832
3	0.4641016151378
4	0.4721359549996

n	u_{10^n}
1	0.4880884817015
2	0.4987562112089
3	0.4998750624610
4	0.4999875006251
5	0.4999987500050
6	0.4999998749699
7	0.4999999869615
8	0.5000000000000
9	0.5000000000000
10	0.5000000000000
11	0.5000000000000
12	0.5000000000000
13	0.5000000000000
14	0.5000000000000
15	0.0000000000000

2) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ،

$$u_n=\sqrt{n^2+n}-n$$

$$u_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

$$u_n=\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}=\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

من أجل القيم الكبيرة للعدد n ، في المجدولات أو الحاسبات n يهمل بالنسبة لِـ n^2 ولا يمكن التمييز بين n^2 و n^2+n ولهذا نتائج الحساب لِـ $\sqrt{n^2+n}-n$ تسجل 0.

120 (u_n) معرفة بـ $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$.

1) لنبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}>u_n$.

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\frac{1}{3}u_0+\frac{14}{3}=5$ إذن $u_1>u_0$.

نفترض أن $u_{k+1}\ge u_k$ وهذا من أجل k عدد طبيعي كيفي. الدالة التآلفية $f: x\mapsto\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن $f(u_{k+1})>f(u_k)$ أي $u_{k+2}>u_{k+1}$

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}>u_n$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2) $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ معناه $3x=x+14$ ومعناه $2x=14$ أي $x=7$.

3) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنها تقبل نهاية عددا حقيقيا l ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}\right)=\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}$ وبالتالي

$\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}=l$ وحسب السؤال السابق يكون $l=7$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-7$ معناه

$v_{n+1}=u_{n+1}-7$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}-7=\frac{1}{3}u_n-\frac{7}{3}$

بما أن $u_n=v_n+7$ فإن $v_{n+1}=\frac{1}{3}(v_n+7)-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}v_n$

وبالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول

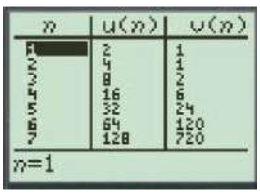
$v_0=-6$. $v_n=v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$v_n=u_n-7$ معناه $u_n=v_n+7$

أي $u_n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n+7$. بما أن $-1<\frac{1}{3}<1$ فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7$ إذن (u_n) متقاربة.

121



1) الخاصية $2^n\le(n-1)!$ تكون صحيحة من أجل $n=6$.

نفترض أن $2^k \le (k-1)!$ من أجل k عدد طبيعي كيفي أكبر من أو يساوي 6 . إذن $2^k \le (k-1)!$ و $2 \le k$ ومنه $2\times 2^k \le k\,(k-1)!$ وبالتالي $2^{k+1} \le k\,!$

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من كل عدد طبيعي $n \ge 6$ ، $2^n \le (n-1)!$

2) ليكن $n \ge 6$ ، $2^n \le (n-1)!$ معناه $2^n \le \frac{n(n-1)!}{n}$ أي $2^n \le \frac{n!}{n}$ و بالتالي $\frac{2^n}{n!} \le \frac{1}{n}$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 6$ ،

بما أن $0 \le \frac{2^n}{n!} \le \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$ ،

إذن المتتالية ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ ، متقاربة .

122 a عدد حقيقي و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=a$ و العلاقة التراجعية : $u_{n+1}=\frac{u_n}{2+u_n^{\;2}}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا، $2+u_n^{\;2} \ge 2$ معناه $\frac{1}{2+u_n^{\;2}} \le \frac{1}{2}$ ومعناه $\frac{|u_n|}{2+u_n^{\;2}} \le \frac{|u_n|}{2}$

ولدينا $u_{n+1}=\frac{u_n}{2+u_n^{\;2}}$ إذن $|u_{n+1}|=\frac{|u_n|}{|2+u_n^{\;2}|}=\frac{|u_n|}{2+u_n^{\;2}}$

وبالتالي : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $|u_{n+1}| \le \frac{|u_n|}{2}$.

2) لدينا $|u_0|=|a|$ و $\frac{|a|}{2^0}=|a|$ إذن الخاصية $|u_0| \le \frac{|a|}{2^0}$ صحيحة .

نفترض أن الخاصية $|u_k| \le \frac{|a|}{2^k}$ من أجل عدد طبيعي k كيفي إذن $\frac{1}{2}|u_k| \le \frac{1}{2}\times\frac{|a|}{2^k}$ ، ومنه $\frac{|u_k|}{2} \le \frac{|a|}{2^{k+1}}$ بما أن $|u_{k+1}| \le \frac{|u_k|}{2}$ من السؤال السابق فإن $|u_{k+1}| \le \frac{|a|}{2^{k+1}}$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل n من $\mathbb{N}$،

$|u_n| \le \frac{|a|}{2^n}$.

3) حسب السؤال السابق من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $|u_n| \le \frac{|a|}{2^n}$ معناه $-\frac{|a|}{2^n} \le u_n \le \frac{|a|}{2^n}$ أي

$$-|a|\left(\frac{1}{2}\right)^n \le u_n \le |a|\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} -|a|\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} |a|\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

123 (u_n) معرفة بـ $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{u_n+2}{2u_n+1}$.

1) أ- لدينا : $u_0>0$ نفترض أن $u_k>0$ من أجل k عدد طبيعي كيفي ، ومنه $u_k+2>0$ و $2u_k+1>0$ إذن $\frac{u_k+2}{2u_k+1}>0$ وبالتالي $u_{k+1}>0$ وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n>0$.

ب - إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنها تقبل نهاية أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}_+^*$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ هذا من جهة . ومن جهة أخرى لدينا

$\frac{l+2}{2l+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n+2}{2u_n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ ومنه $\frac{l+2}{2l+1}=l$

ومعناه $2l^2=2$ أي $l^2=1$ ومنه $l=1$.

2) $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة $f: x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$، الدالة f تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ و $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

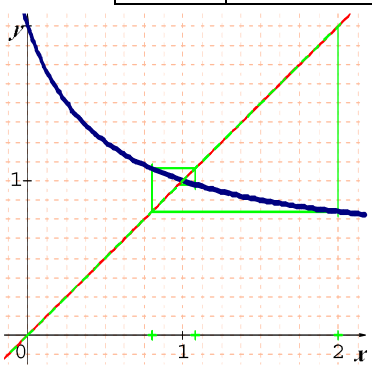
ولدينا : $f'(x)=\frac{(2x+1)-2(x+2)}{(2x+1)^2}=\frac{-3}{(2x+1)^2}$

ومنه من أجل كل عدد x من $[0\,;\,2,2]$ $f'(x)<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $[0\,;\,2,2]$

x	0	1	2,2
$f(x)$			2 1 0,77

يبدو أن (u_n) متقاربة



ونهايتها 1 .

3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ- ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = -\frac{1}{3} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = -\frac{1}{3} v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3}$

بما أن $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ فإن (v_n) متقاربة .

$v_n = v_0 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = (-1)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

ب- ليكن n عددا طبيعيا ، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

لدينا $v_n = 1$ معناه $\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = 1$ ومعناه $u_n - 1 = u_n + 1$

أي $-1 = 1$ وهذا تناقض إذن $v_n \neq 1$.

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ معناه $v_n u_n + v_n = u_n - 1$ ومعناه

$v_n u_n - u_n = -v_n - 1$ يكافئ $(v_n - 1)u_n = -v_n - 1$

أي $u_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1}$.

لدينا $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} v_0 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ إذن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

وبالتالي (u_n) متقاربة.

124 (u_n) معرفة بـ $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1) لدينا $u_0 = 5$ ، $u_1 = \sqrt{7}$ و $2 \le \sqrt{7} \le 5$ إذن $2 \le u_1 \le u_0$.

نفترض $2 \le u_{k+1} \le u_k$ يعني $4 \le 2 + u_{k+1} \le 2 + u_k$

بما أن الدالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

فإن $\sqrt{4} \le \sqrt{2 + u_{k+1}} \le \sqrt{2 + u_k}$ أي $2 \le u_{k+2} \le u_{k+1}$

وحسب مبدأ التراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \le u_{n+1} \le u_n$.

2) من السؤال السابق ينتج أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 إذن هي متقاربة ونهايتها $l \ge 2$.

3) $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ إذن $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ هذا من جهة ، ومن جهة أخرى $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + l}$ إذن $l = \sqrt{2 + l}$.

لدينا $l \ge 2$ و $l = \sqrt{2 + l}$ إذن $l^2 = 2 + l$ معناه $l^2 - l - 2 = 0$ ومعناه $(l+1)(l-2) = 0$ يكافئ $l = 2$ أو $l = -1$. بما أن $l \ge 2$ فإن $l = 2$.

125 نعتبر المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) الدالة $f : x \mapsto \ln(x+1) - x$ تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ و $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$.

$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$ ؛

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right] = -\infty$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		0		$-\infty$

2) من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $f(x) \le 0$ معناه $\ln(x+1) \le x$ ، بوضع $x = \frac{1}{k}$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ يكون $x \in]-1; +\infty[$ ومنه $\ln\left(\frac{1}{k} + 1\right) \le \frac{1}{k}$ ولدينا

$$\ln\left(\frac{1}{k} + 1\right) = \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) = \ln(1+k) - \ln k$$

ومنه من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(k+1)-\ln k \le \frac{1}{k}$.

بتطبيق هذه المتباينة n مرة نحصل على :

$\ln 2-\ln 1\le 1$ ، $\ln 3-\ln 2\le \frac{1}{2}$ ، $\ln 4-\ln 3\le \frac{1}{3}$ ،

... ، $\ln(n+1)-\ln n\le \frac{1}{n}$ ؛ وبجمع طرفا إلى طرف

نجد من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(n+1)\le u_n$.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ و $\ln(n+1)\le u_n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

3) البرنامج الذي يحدّد أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n\ge 10$.

أصغر عدد طبيعي n يحقق $u_n\ge 10$ هو $n=12367$.

4 - المتتاليات المحدودة .

126 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n=\frac{1}{n}$.

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $n^2+1>1$ معناه $\sqrt{n^2+1}>1$ أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<1$ ، إذن 1 عنصر حاد من الأعلى لـ (u_n).

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $n^2+1>n^2$ معناه $\sqrt{n^2+1}>n$ أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{n}$

3) $0<u_n<v_n<1$.

127 (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $u_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1}-u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$1+\frac{1}{n+1}>1$ معناه $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ أي (u_n) متزايدة .

2) $u_n=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$$u_n=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times...\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$$

3) (u_n) متزايدة ونهايتها $+\infty$ إذن هي محدودة من الأسفل بـ $u_0=\ln 2$ وليست محدودة من الأعلى.

128 (u_n) معرفة بـ : $u_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}$.

1) $u_n=\dfrac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ ومنه

$u_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ أي $u_n-\frac{3}{2}<0$ معناه $u_n<\frac{3}{2}$.

إذن العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}=\frac{3}{2}$.

129 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=e^{-u_n}$.

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$ ، $0<u_n<1$.

لدينا $u_1=e^{-u_0}$ ومن أجل كل عدد حقيقي u_0 $e^{-u_0}>0$

إذن $u_1>0$ وبما أن الدالة $x\mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $0<e^{-u_1}<e^{-0}$ أي $0<e^{-u_1}<1$ وبالتالي $0<u_2<1$.

نفترض أنه من أجل k عدد طبيعي كيفي , $0<u_k<1$ ولنبرهن أن $0<u_{k+1}<1$.

بما أن الدالة $x \mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإنه من فرضية التراجع $0 < u_k < 1$ ينتج : $e^{-0} > e^{-u_k} > e^{-1}$

أي $1 > e^{-u_k} > \frac{1}{e}$ ، ومن تعريف المتتالية لدينا $u_{k+1} = e^{-u_k}$

إذن $\frac{1}{e} < u_{k+1} < 1$ ومنه $0 < u_{k+1} < 1$.

إذن حسب مبدأ التراجع نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $0 < u_n < 1$.

130 (u_n) معرفة بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$.

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4^{n+1}}$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4^{n+1}}$ ؛ إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n > 0$ ، وبالتالي (u_n) متزايدة تماما .

2) u_n هو مجموع حدود متتابعة للمتتالية الهندسية ذات الأساس $\frac{1}{4}$ والحد الأول 1 ؛

إذن $u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$ أي

$u_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$. بما أن

$-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{3}$.

3) بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول u_0 . زيادة عن هذا فإنها تتقارب إلى $\frac{4}{3}$ إذن هي محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{4}{3}$ وبالتالي لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $1 \leq u_n < \frac{4}{3}$.

$u_n > 1,333333$ معناه $\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 1,333333$

ومعناه $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{4}{3} - 1,333333$ ويكافئ

$\left(\frac{1}{4}\right)^n < 4 - 3,999999$ ومعناه

$n \ln 0,25 < \ln(0,000001)$ أي $n > \frac{\ln 10^{-6}}{\ln 0,25}$ ومنه $n \geq 10$ إذن ليس 1,333333 عنصرا حادا للمتتالية (u_n) .

131 (u_n) المعرفة بـ u_0 عدد حقيقي معطى و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 5$.

1) $u_{n+1} - u_n - 1 = u_n^2 - 4u_n + 4 = (u_n + 2)^2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ، نستنتج أن (u_n) متزايدة.

2) إذا كانت (u_n) متقاربة ونهايتها l فإن $l = l^2 - 3l + 5$ معناه $l^2 - 4l + 5 = 0$.

3) المميز المختصر لـ $l^2 - 4l + 5 = 0$ هو -1 إذن لا يوجد أي عدد حقيقي l يحقق المعادلة $l^2 - 4l + 5 = 0$ ومنه المتتالية (u_n) متباعدة.

إذا كانت (u_n) محدودة بما أنها متزايدة فتكون متقاربة وهذا تناقض إذن (u_n) ليست محدودة من الأعلى.

مما سبق نستنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

132 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1) $u_1 = \frac{17}{4}$ و $u_2 = \frac{35}{4}$.

2) استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على الخاصية $u_{n+1} \geq u_n$.

3) (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ ـ $v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha = 4(3u_n - 4) + \alpha$ ؛

$v_{n+1} = 12u_n - 16 + \alpha = 12\left(\frac{v_n - \alpha}{4}\right) - 16 + \alpha$ ؛

$v_{n+1} = 3v_n - 16 - 2\alpha$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا كان $\alpha = -8$.

ب ـ $v_n = 4u_n - 8$ ومنه $v_0 = 4u_0 - 8 = 3$ ،

$v_n = 3^{n+1}$ ؛ $u_n = \frac{v_n+8}{4} = \frac{3^{n+1}+8}{4}$.

جـ ـ (u_n) متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = \frac{11}{4}$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذن (u_n) ليست محدودة من الأعلى وبالتالي هي ليست محدودة.

د ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4}+\frac{u_2}{4^2}+\ldots+\frac{u_n}{4^n}$.

$w_n = \frac{3+8}{4}+\frac{3^2+8}{4^2}+\frac{3^3+8}{4^3}+\ldots+\frac{3^{n+1}+8}{4^{n+1}}$ ،

$$w_n = \left(\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)+$$

$$8\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$$w_n = \frac{3}{4}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}+\frac{8}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\text{ ،}$$

$$w_n = 3\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\text{ ،}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3+\frac{8}{3} = \frac{17}{3}$ إذن (w_n) متقاربة .

5 - المتتاليتان المتجاورتان .

133 لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n+\frac{1}{n\times n!}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا ، $u_{n+1} = u_n+\frac{1}{(n+1)!}$ ومنه

$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n > 0$ إذن

(u_n) متزايدة تماما .

ليكن n عددا طبيعيا ،

$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)\times n!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)\times n!}-\frac{1}{n\times n!}$$

$$=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)^2\times n!}$$

$$=\frac{n^2+n+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2\times n!}=\frac{-1}{n(n+1)^2\times n!}$$

إذن $v_{n+1}-v_n < 0$ وبالتالي (v_n) متناقصة تماما .

$v_n = u_n+\frac{1}{n\times n!}$ معناه $v_n-u_n = \frac{1}{n\times n!}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\times n!} = 0$.

خلاصة : (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان .

2) بما أن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n \le l \le v_n$ أي

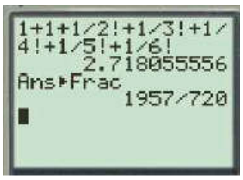
$u_n \le l \le u_n+\frac{1}{n\times n!}$

لكي يكون u_n قيمة مقربة بالنقصان إلى 10^{-3} للعدد l

يكفي أن يكون $\frac{1}{n\times n!} \le 10^{-3}$ أي $n\times n! \ge 1000$

لدينا $5\times 5! = 600$ و $6\times 6! = 4320$ وهذا يبين أن u_6 هو أقرب قيمة بالنقصان إلى 10^{-3} للعدد l .

$u_6 = \frac{1957}{720}$, $u_6 \simeq 2,718055556$



134 $u_0 = 0$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4}$.

1) الخاصية الابتدائية $u_0 \le 1 \le v_0$ ؛ نفرض $u_k \le 1 \le v_k$

معناه $3u_k \le 3 \le 3v_k$ ومعناه $3u_k+1 \le 4 \le 3v_k+1$

أي $\frac{3u_k+1}{4} \le 1 \le \frac{3v_k+1}{4}$.

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{4}-u_n=\frac{1-u_n}{4}$ بما أن $u_n\le 1$ فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\frac{3v_n+1}{4}-v_n=\frac{1-v_n}{4}$ بما أن $1\le v_n$ فإن $v_{n+1}-v_n\le 0$ ومنه (v_n) متناقصة.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4}-\frac{3v_n+1}{4}=\frac{3}{4}(u_n-v_n)$ ومنه المتتالية (w_n) المعرفة بـ $w_n=u_n-v_n$ هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وعليه $u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\frac{3}{4}\right)^n$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ؛ إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

$u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4}$ معناه $4u_{n+1}-3u_n=1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(4u_{n+1}-3u_n)=1$ أي $l=1$.

135 $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا ، $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}$

$$=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+4v_n}{5}=\frac{2u_n-2v_n}{15}$$

أي $w_{n+1}=\frac{2}{15}(u_n-v_n)=\frac{2}{15}w_n$ ، إذن (w_n) هندسية أساسها $\frac{2}{15}$ وحدها الأول $w_0=u_0-v_0=-1$ وبما أن $-1<\frac{2}{15}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$. $w_n=-\left(\frac{2}{15}\right)^n$.

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{-2u_n+2v_n}{3}$ أي $u_{n+1}-u_n=-\frac{2}{3}(u_n-v_n)=-\frac{2}{3}w_n$.

وكذلك لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$ ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+4v_n}{5}-v_n$ أي $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{5}=\frac{w_n}{5}$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n<0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$ و $v_{n+1}-v_n<0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية العدد الحقيقي l .

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، $t_n=3u_n+10v_n$ ومنه

$$t_{n+1}-t_n=3u_{n+1}+10v_{n+1}-3u_n-10v_n$$
$$=3(u_{n+1}-u_n)+10(v_{n+1}-v_n)=-2w_n+2w_n=0$$

وبالتالي المتتالية (t_n) ثابتة .

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $t_n=t_0$ أي $3u_n+10v_n=3u_0+10v_0=23$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=23$ هذا من جهة. ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=3l+10l=13l$ إذن $13l=23$ وبالتالي $l=\frac{23}{13}$.

136 $u_0=3$ ، $v_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}$.

1) $u_1=\frac{7}{2}$ ، $v_1=\frac{15}{4}$ ، $u_2=\frac{29}{8}$ و $v_2=\frac{59}{16}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $w_n=v_n-u_n$.

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_{n+1}}{2}$$

$w_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{4}=\frac{1}{4}w_n$ إذن (w_n) هندسية .

$$\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}w_0\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{w_n}{2}$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-v_n=\frac{u_{n+1}-v_n}{2}=\frac{u_n-v_n}{4}$$

بما أن $v_{n+1}-v_n=-\frac{w_n}{4}$ و $w_n>0$ فإن (u_n) متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما .

ولدينا $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}w_n=0$ إذن (u_n) و (v_n) مجاورتان .

4) تحذف **(برهن أن)** من المعطيات .

$$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}+2v_{n+1})=\frac{1}{3}(2u_{n+1}+v_n)$$

$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$ إذن (t_n) متتالية ثابتة .

$$\lim_{n\to+\infty}t_n=t_0=\frac{1}{3}(u_0+2v_0)=\frac{11}{3}$$

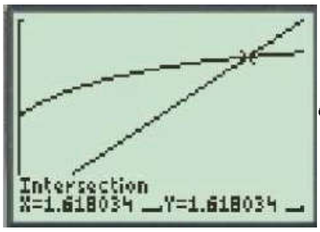
و $\lim_{n\to+\infty}t_n=\frac{1}{3}(l+2l)=l$ إذن $l=\frac{11}{3}$.

137 f معرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

1) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه f متزايدة تماما على $[0;2]$

وبالتالي إذا كان $1\leq x\leq 2$ فإن $f(1)\leq f(x)\leq f(2)$ أي $\frac{3}{2}\leq f(x)\leq\frac{5}{3}$ ومنه $f(x)\in[1;2]$.

2) $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$.



يبدو أن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ولهما نفس النهاية وهي فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين .

3) البرهان بالتراجع عن الخواص :

* " $1\leq u_n\leq 2$ " ؛ $u_0=1$ ومنه $1\leq u_0\leq 2$

إذا كان $1\leq u_k\leq 2$ فإن $1\leq f(u_k)\leq 2$ أي $1\leq u_{k+1}\leq 2$.

* " $1\leq v_n\leq 2$ " ؛ نفس البرهان.

* " $u_n\leq u_{n+1}$ " ؛ $u_0=1$ و $u_1=\frac{3}{2}$ إذن $u_0\leq u_1$.

إذا كان $u_k\leq u_{k+1}$ فإن $f(u_k)\leq f(u_{k+1})$ لأن f متزايدة ومنه $u_{k+1}\leq u_{k+2}$.

* " $v_n\geq v_{n+1}$ " ؛ نفس البرهان.

4) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}.$$

$1\leq u_n\leq 2$ و $1\leq v_n\leq 2$ إذن $2\leq u_n+1\leq 3$ و $2\leq v_n+1\leq 3$ ومنه $4\leq(u_n+1)(v_n+1)\leq 9$ ،

إذن v_n-u_n و $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الإشارة ؛

استعمال التراجع : $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\geq 0$ ، وإذا كان $v_k-u_k\geq 0$ فإن $v_{k+1}-u_{k+1}\geq 0$.

لدينا $4\leq(u_n+1)(v_n+1)\leq 9$ ومنه $0<\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\leq\frac{1}{4}$ بما أن $v_n-u_n\geq 0$ فإن

$\frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}\leq\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ أي

$v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

استعمال التراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

لدينا $v_0-u_0=1$ و $\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$ إذن $v_0-u_0\leq\left(\frac{1}{4}\right)^0$

نفرض أن $v_k-u_k\leq\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

$$v_{k+1}-u_{k+1}\leq\frac{1}{4}(v_k-u_k)\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

لدينا $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ إذن

$\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$ وحسب السؤال 3) لدينا $u_n \le u_{n+1}$

و $v_n \ge v_{n+1}$ معناه (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة إذن

(u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية l .

$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ معناه $u_{n+1}u_n + u_{n+1} - 2u_n - 1 = 0$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_{n+1}u_n + u_{n+1} - 2u_n - 1) = 0$ أي

$l^2 - l - 1 = 0$ ومعناه $l = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ أو $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

بينما $1 \le u_n \le 2$ و $1 \le v_n \le 2$ إذن $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

138 a و b عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0 = a$ ، $v_0 = b$

ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ ، $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1) نسمي p_n الخاصية " $0 < u_n \le v_n$ "

لدينا $u_0 = a$ ، $v_0 = b$ و $0 < a < b$ إذن

$0 < u_0 \le v_0$ ومنه الخاصية p_0 صحيحة .

نفرض أن الخاصية p_k صحيحة أي $0 < u_k \le v_k$

لدينا $u_k v_k > 0$ إذن $\sqrt{u_k v_k} > 0$ وبالتالي $0 < u_{k+1}$.

لدينا $(u_k + v_k)^2 - (u_k - v_k)^2 = 4u_k v_k$ معناه

$(u_k + v_k)^2 \ge 4u_k v_k$ بما أن $0 < u_k \le v_k$ فإن

$u_k + v_k > 0$ ومنه $u_k + v_k \ge 2\sqrt{u_k v_k}$ معناه

$\frac{u_k + v_k}{2} \ge \sqrt{u_k v_k}$ أي $v_{k+1} \ge u_{k+1}$ وبالتالي :

$0 < u_{k+1} \le v_{k+1}$ إذن الخاصية p_{k+1} صحيحة .

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

الخاصية p_n أي $0 < u_n \le v_n$.

2) ليكن n عددا طبيعيا

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{u_n}^2 + \sqrt{v_n}^2 - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}{2\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)}{\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}(v_n - u_n)$$

$-\sqrt{u_n} < \sqrt{u_n}$ ومنه $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} < \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}$

إذن $\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < 1$

وبالتالي $\frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

أي $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

نستعمل التراجع ولدينا الخاصية $v_0 - u_0 \le \frac{1}{2^0}(b - a)$

تكافئ $v_0 - u_0 \le (b - a)$ وهي صحيحة .

نفرض أن الخاصية $v_k - u_k \le \frac{1}{2^k}(b - a)$ ولنبرهن

صحة الخاصية $v_{k++} - u_{k+1} \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a)$

لدينا مما سبق $v_{k+1} - u_{k+1} < \frac{1}{2}(v_k - u_k)$ ومن فرضية

التراجع $v_k - u_k \le \frac{1}{2^k}(b - a)$ ينتج أن

$\frac{1}{2}(v_k - u_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a)$ إذن

$v_{k+1} - u_{k+1} \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a)$ وحسب مبدأ التراجع ينتج

أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b - a)$.

3) لدينا كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما إذن ندرس

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n v_n}}{\sqrt{u_n}^2} = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}}$ بما أن $0 < u_n \le v_n$ فإن

$0 < \sqrt{u_n} \le \sqrt{v_n}$ ومنه $\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}} \ge 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$

وبالتالي (u_n) متزايدة .

بما أن $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{2}$

فإن $0<u_n\le v_n$ أي $u_n-v_n\le 0$ $v_{n+1}-v_n\le 0$

وبالتالي (v_n) متناقصة .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$0\le v_n-u_n\le\dfrac{1}{2^n}(b-a)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}(b-a)=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

خلاصة : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) $a=2$ و $b=5$ إذن, $v_n-u_n\le\dfrac{3}{2^n}$.

$\dfrac{3}{2^n}<10^{-3}$ معناه $2^n>3000$ ولدينا $2^{11}=2048$

و $2^{12}=4096$ إذن $n\ge 12$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u	2	3,1623	3,32686	3,3289968	3,3289971	3,328997	3,3289971	3,328997	3,328997	3,3289971	3,329
v	5	3,5	3,33114	3,3289975	3,3289971	3,328997	3,3289971	3,328997	3,328997	3,3289971	3,329

والعدد $l\simeq 3,329$ هو النهاية المشتركة لِـ (u_n) و (v_n).

139 $u_0=-1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$.

1) أ ــ $u_0<v_0$ صحيحة . من أجل k عدد طبيعي ،

$u_k<v_k$ معناه $u_k-v_k<0$. لدينا

$u_{k+1}-v_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}-\dfrac{u_k+4v_k}{5}=\dfrac{3u_k-3v_k}{10}$

أي $u_{k+1}-v_{k+1}=\dfrac{3}{10}(u_k-v_k)$ إذن $u_{k+1}-v_{k+1}<0$

ب ــ $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}$

لدينا $u_n<v_n$ معناه $v_n-u_n>0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي (u_n) متزايدة تماما.

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+4v_n}{5}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{5}$ ومنه

$v_{n+1}-v_n<0$ إذن (v_n) متناقصة تماما.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{3}{10}(u_n-v_n)$

نضع $w_n=u_n-v_n$ ، (w_n) هندسية أساسها $\dfrac{3}{10}$ ومنه

$w_n=u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ ؛ ومنه (u_n) و (v_n) متجاورتان .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $x_n=u_n+av_n$

و $y_n=u_n+bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين.

$x_{n+1}=u_{n+1}+av_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}+a\dfrac{u_n+4v_n}{5}$

$x_{n+1}=\dfrac{(2a+5)u_n+(8a+5)v_n}{10}$

$x_{n+1}=\dfrac{(2a+5)}{10}\left(u_n+\dfrac{8a+5}{2a+5}v_n\right)$

(x_n) هندسية معناه $\dfrac{8a+5}{2a+5}=a$ أي $2a^2-3a-5=0$

وكذلك (y_n) هندسية معناه $2b^2-3b-5=0$

إذن a و b هما الحلان المتمايزان للمعادلة

$2x^2-3x-5=0$ أي $a=-1$ و $b=\dfrac{5}{2}$ أو $b=-1$

و $a=\dfrac{5}{2}$.

نفرض $a=-1$ و $b=\dfrac{5}{2}$ إذن

$x_{n+1}=\dfrac{3}{10}(u_n-v_n)=\dfrac{3}{10}x_n$

و $y_{n+1}=\left(u_n+\dfrac{5}{2}v_n\right)=y_n$.

لدينا $x_0=u_0-v_0=-3$ و $y_0=u_0+\dfrac{5}{2}v_0=4$ إذن

$x_n=-3\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ و $y_n=y_0=4$.

3) إيجاد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

لدينا $x_n=u_n+av_n$ و $y_n=u_n+bv_n$ أي

$x_n=u_n-v_n=-3\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ و $y_n=u_n+\dfrac{5}{2}v_n=4$

ومنه $\frac{7}{2}v_n=4+3\left(\frac{3}{10}\right)^n$ أي $v_n=\frac{8}{7}+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n$ إذن $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{8}{7}$

مسائل

140 لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ والتي تحقق الخاصية التالية :

$u_{n+2}=\frac{3}{35}u_{n+1}+\frac{2}{35}u_n$.

1) (u_n) ثابتة معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$u_n=\frac{3}{35}u_n+\frac{2}{35}u_n$ معناه $\frac{6}{7}u_n=0$ أي $u_n=0$.

(u_n) حسابية ذات الأساس r معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$u_n+2r=\frac{3}{35}(u_n+r)+\frac{2}{35}u_n$ أي $u_n=-\frac{67}{30}r$

ومنه (u_n) ثابتة أي $u_n=0$.

(u_n) هندسية ذات الأساس q معناه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$u_nq^2=\frac{3}{35}(u_nq)+\frac{2}{35}u_n$ ومعناه

$u_n(35q^2-3q-2)=0$ أي $u_n=0$ أو $q=-\frac{2}{5}$

أو $q=\frac{4}{7}$.

بما أن (E) هي مجموعة المتتاليات غير المعدومة فإنه لا توجد فيها متتالية ثابتة ولا متتالية حسابية ؛ بينما توجد متتاليتان هندسيتان في المجموعة (E) أساسهما $q=-\frac{2}{5}$

و $q=\frac{4}{7}$.

2) ليكن α و β عددين حقيقيين،

$$\frac{3}{35}u_{n+1}+\frac{2}{35}u_n=\frac{3}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}\right]+$$

$$+\frac{2}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n}+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{1}{35}\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{6}{7}+2\right)+\frac{1}{35}\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{-3}{5}+2\right)$$

$$=\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{4}{49}\right)+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$=\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2}+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+2}=u_{n+2}$$

إذن المتتالية (u_n) هي عنصر من المجموعة (E) .

3) $u_0=3$ معناه $\alpha+\beta=3$ و $u_1=-\frac{4}{35}$ معناه

$\frac{2}{7}\alpha-\frac{1}{5}\beta=-\frac{4}{35}$ أي $10\alpha-7\beta=-4$ وبالتالي نجد

$\alpha=1$ و $\beta=2$ أي $u_n=\left(\frac{2}{7}\right)^n+2\left(\frac{-1}{5}\right)^n$.

$-1<\frac{2}{7}<1$ و $-1<\frac{-1}{5}<1$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0$

و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n=0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

141 $I-1$) الدالة f قابلة للاشتقاق ومن أجل كل

$x\geq 0$ لدينا $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}$ ومنه

$f'(x)\leq 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

الدالة g قابلة للاشتقاق ومن أجل كل $x\geq 0$ لدينا

$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$ ومنه $g'(x)\leq 0$ إذن

الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

2) لدينا $f(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن

$f(x)<f(0)$ أي $f(x)<0$ وبالتالي من أجل كل

$x\geq 0$ ، $f(x)\leq 0$ أي $x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x)\leq 0$

معناه $x-\frac{1}{2}x^2\leq\ln(1+x)$.

لدينا $g(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $g(x)<g(0)$

أي $g(x)<0$ وبالتالي من أجل كل $x\geq 0$,

$g(x)\leq 0$ أي $\ln(1+x)-x\leq 0$ معناه

$\ln(1+x)\leq x$.

خلاصة: من أجل كل $x \geq 0$ ، $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

$II-1$) لدينا $u_1=\frac{3}{2}$ ومنه $u_1>0$. نفرض أن

$u_n>0$ بما أن $1+\frac{1}{2^{n+1}}>0$ فإن $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>0$

ومنه $u_{n+1}>0$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>0$.

2) $\ln u_1=\frac{3}{2}$ و $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ إذن

$\ln u_1=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$. نفرض أن

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

ولدينا

$$\ln u_{n+1}=\ln u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\ln u_n+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه :

$$\ln u_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) ليكن k عددا طبيعيا حيث $1\leq k\leq n$, نضع

$x=\frac{1}{2^k}$ العلاقة (1) تصبح

$$\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^k}\leq\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leq\frac{1}{2^k}$$

وعدد هذه العلاقات هو n لأن k يتغير من 1 إلى n وبجمع أطراف كل العلاقات نحصل على

$$S_n-\frac{1}{2}T_n\leq\ln u_n\leq S_n$$

4) أ - S_n و T_n هما مجموعان لحدود متتابعة لمتتاليتين هندسيتين أساسهما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ على الترتيب .

$$S_n=\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ؛}$$

$$T_n=\frac{1}{4}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ .}$$

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$ ؛

$\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{3}$.

5) أ - ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ,

لدينا ، $u_{n+1}-u_n=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-u_n=\frac{1}{2^{n+1}}\times u_n$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $\frac{1}{2^{n+1}}>0$

و $u_n>0$ (من السؤال 1) إذن $\frac{1}{2^{n+1}}\times u_n>0$ أي

$u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي (u_n) متزايدة تماما .

ب - لدينا $S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n\leq 1$ بما أن $\ln u_n\leq S_n$ فإن $\ln u_n\leq 1$ ومنه $u_n\leq e$ إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى وبما أنها متزايدة تماما فإنها متقاربة .

جـ - بما أن (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي l حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ ؛ لدينا $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq\ln u_n\leq S_n$ ومنه

أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n-\frac{1}{2}T_n\right)\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n\leq\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

$1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\leq\ln l\leq 1$ معناه $\frac{5}{6}\leq\ln l\leq 1$ ويكافئ

$e^{\frac{5}{6}}\leq l\leq e$.

142 (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+...+\sin\frac{n}{n^2}$$

و $v_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}$.

1) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، $v_n=\frac{1}{n^2}(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)}{2n^2}$

أي $v_n = \frac{n+1}{2n}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2) $f : x \mapsto x - \sin x$ ؛ من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x) = 1-\cos x$ ومنه $f'(x)\ge 0$
إذن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ولدينا $f(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $f(x)>f(0)$ أي $f(x)>0$ وبالتالي الدالة f موجبة .

$g : x\mapsto -1+\frac{x^2}{2}+\cos x$ ؛ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ،
$g'(x) = x-\sin x = f(x)$ بما أن f موجبة فإن $g'(x)\ge 0$ وبالتالي g متزايدة تماما ولدينا $g(0)=0$
وإذا كان $x>0$ فإن $g(x)>g(0)$ أي $g(x)>0$
وبالتالي الدالة g موجبة .

$h : x\mapsto -x+\frac{x^3}{6}+\sin x$ ؛ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ،
$h'(x) = -1+\frac{x^2}{2}+\cos x = g(x)$ بما أن g موجبة فإن $h'(x)\ge 0$ وبالتالي h متزايدة تماما ولدينا $h(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $h(x)>h(0)$ أي $h(x)>0$ وبالتالي الدالة h موجبة .

3) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، من أجل كل عدد طبيعي k حيث $1\le k\le n$ لدينا $1\le k^3\le n^3$ أي $1^3\le n^3$ ، $2^3\le n^3$ ، ... ، $n^3\le n^3$ وبالجمع طرفا إلى طرف نحصل على $1^3+2^3+...+n^3\le n\times n^3$ أي $1^3+2^3+...+n^3\le n^4$.
لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $f(x)\ge 0$ و $h(x)\ge 0$ معناه $x\ge \sin x$ و $\sin x\ge x-\frac{x^3}{6}$
أي $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x$. نضع $x=\frac{k}{n^2}$ ومنه $\frac{x^3}{6}=\frac{k^3}{6n^6}$ إذن $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\le \sin\frac{k}{n^2}\le\frac{k}{n^2}$
وبالجمع نحصل على :
$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\le \sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+...+\sin\frac{n}{n^2}\le\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{n}{n^2}$$
أي $v_n - \frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\le u_n\le v_n$

ولدينا $1^3+2^3+...+n^3\le n^4$ معناه
$$-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\ge -\frac{1}{6n^6}n^4$$
ومعناه $v_n-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\ge v_n-\frac{1}{6n^2}$ إذن
$v_n-\frac{1}{6n^2}\le u_n\le v_n$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{6n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{2}$ ومنه
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-\frac{1}{6n^2}=\frac{1}{2}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$.
إذن المتتالية (u_n) متقاربة ، ونهايتها $\frac{1}{2}$.

143 I - f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

1) من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$
ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة g متزايدة تماما .
g مستمرة على $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=-\infty$
و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
خلاصة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β .
لدينا : $g(0,27)\simeq$ -0.039 و $g(0,28)\simeq 0.007$ إذن $0,27\le\beta\le 0,28$

2) من أجل $x>0$ لدينا
$$f'(x)=\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$
$f'(\beta)=0$ ومن أجل $x\in]-\infty;\beta[$ ، $f'(x)<0$
ومن أجل $x\in]\beta;+\infty[$ ، $f'(x)>0$.
$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x\ln x}{x+1}=0$$
و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$
أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

II - 1) نلاحظ أن $f(1)=0$ ولدينا $g(\beta)=0$ معناه $\ln\beta=-1-\beta$ إذن $f(\beta)=\frac{\beta\ln\beta}{\beta+1}=-\beta$

الدالتان $x \mapsto x\sin x$ و $x \mapsto x+1$ مستمرتان على $]0;+\infty[$ و من أجل $x>0$ $x+1\neq 0$ إذن الدالة f مستمرة على $]0;+\infty[$ ومنه جدول تغيراتها:

x	0		β		1		α_n		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		+		+	
$f(x)$	0		$-\beta$		0		n		$+\infty$

إذن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n .

2) أ - $f(e^n)=\frac{e^n\ln e^n}{e^n+1}=n\frac{e^n}{e^n+1}$ ولدينا $e^n\le e^n+1$ أي $\frac{e^n}{e^n+1}\le 1$ ومعناه $\frac{ne^n}{e^n+1}\le n$ إذن $f(e^n)\le n$.

بما أن $f(\alpha_n)=n$ فإن $f(e^n)\le f(\alpha_n)$ وبما أن f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ فإن حتما يكون $e^n\le\alpha_n$.

ب - $f(\alpha_n)=n$ تكافئ $\frac{\alpha_n\ln\alpha_n}{\alpha_n+1}=n$ وتكافئ $\alpha_n\ln\alpha_n=n\alpha_n+n$ أي $\alpha_n(\ln\alpha_n-n)=n$ ومعناه $\ln\alpha_n-\ln e^n=\frac{n}{\alpha_n}$ أي $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}\ldots(1)$

لدينا $e^n\le\alpha_n$ معناه $\frac{e^n}{n}\le\frac{\alpha_n}{n}$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{n}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\alpha_n}=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\frac{\alpha_n}{e^n}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{e^n}=1$.

3) أ - (2) معناه $1+\varepsilon_n=\frac{\alpha_n}{e^n}$ ومنه $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{\alpha_n}{e^n}\ln\frac{\alpha_n}{e^n}$ ومن (1) ينتج $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{n}{e^n}$.

ب - الدالة $u:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t$ تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا $u'(t)=\ln(1+t)+(1+t)\frac{1}{1+t}-1$ أي $u'(t)=\ln(1+t)$ ، من أجل $t\ge 0$ يكون $(1+t)\ge 1$ ومنه $\ln(1+t)\ge 0$ إذن $u'(t)\ge 0$

وبالتالي u متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ لدينا $u(0)=0$ ومن أجل $t>0$ يكون $u(t)>u(0)$. إذن من أجل كل $t\ge 0$, $u(t)\ge 0$ أي $0\le(1+t)\ln(1+t)-t$.

الدالة $v:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t-\frac{t^2}{2}$ تقبل الاشتقاق ومن أجل كل $t\ge 0$ لدينا $v'(t)=\ln(1+t)-t$

من أجل $t\ge 0$ يكون $v''(t)=\frac{1}{1+t}-1=\frac{-t}{1+t}$

$v''(t)\le 0$ إذن v' متناقصة على $[0;+\infty[$ و $v'(0)=0$ إذن من أجل $t\ge 0$ يكون $v'(t)\le 0$

إذن v متناقصة على $[0;+\infty[$ و $v(0)=0$ إذن من أجل $t\ge 0$ يكون $v(t)\le 0$ أي

$(1+t)\ln(1+t)-t-\frac{t^2}{2}\le 0$ معناه

$(1+t)\ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$.

خلاصة : من أجل كل $t\ge 0$,

$0\le(1+t)\ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$.

جـ - نضع $t=\varepsilon_n$ يكون إذن

$0\le(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)-\varepsilon_n\le\frac{\varepsilon_n^2}{2}$ ولدينا

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{n}{e^n}$ ،

إذن $0\le\frac{n}{e^n}-\varepsilon_n\le\frac{\varepsilon_n^2}{2}$ من المتباينة الأولى ينتج

$\varepsilon_n\le\frac{n}{e^n}$ ويكافئ $\varepsilon_n^2\le\frac{n^2}{e^{2n}}$ أي $\frac{\varepsilon_n^2}{2}\le\frac{n^2}{2e^{2n}}$.

وبالتالي $0\le\frac{n}{e^n}-\varepsilon_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{n}{e^n}\right)^2$ أي

$0\le ne^{-n}-\varepsilon_n\le\frac{n^2}{2}e^{-2n}$

د - (3) تكافئ $0\le n-\varepsilon_n e^n\le\frac{n^2}{2}e^{-n}$ و (2) تكافئ $\varepsilon_n e^n=\alpha_n-e^n$ إذن $0\le n-\alpha_n+e^n\le\frac{n^2}{2}e^{-n}$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(e^{-\frac{1}{2}n}\right)^2=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2}e^{-n}=0$ $\lim_{n\to+\infty}\left(e^n+n-\alpha_n\right)=0$

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

144 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=0$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+2}=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

تصحيح إضافة $u_1=1$.

$v_n=u_{n+1}-u_n$ و $w_n=u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

1) **ب -** المتتالية (w_n) حسابية أساسها 0 وحدها الأول 1.

جـ - المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$ وحدها الأول 1.

د - المتتالية (w_n) هندسية أساسها 1.

2) **أ -** $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. **جـ -** $w_n=1$.

3) **أ -** $u_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$.

ب - $u_n=\frac{3}{5}(w_n-v_n)$.

د - المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$.

145 1) **ب -** $\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$. **جـ -** $n\sin\frac{1}{n}$ و $n>0$.

2) **ب -** المتتالية v محدودة من الأسفل.

د - لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية v تقبل نهاية أم لا .

أصحيح أم خطأ ؟

146 1) **صحيحة** لأن كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى بحدها الأول.

2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة ، **جملة خاطئة** لأن نهايتها موجبة ويمكن أن تكون غير معدومة مثلا المتتالية المعرفة بـــ $u_n=1+\frac{1}{n+1}$.

3) إذا كانت متتالية متزايدة فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول؛ والجملة المعطاة **صحيحة**.

4) الجملة **صحيحة**.

5) الجملة **صحيحة**.

6) جملة **خاطئة** لأنه يمكن أن تكون $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}u_n$

مثلا $u_n=\frac{1}{n+2}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$.

148 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_0=1{,}5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-1$.

1) **صحيحة** لأنه $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(x)=2x-1$، $f(x)=x$ معناه $x=1$.

2) $v_{n+1}=u_{n+1}-1=2u_n-2=2v_n$ إذن الجملة **صحيحة**.

3) $v_n=2^{n-1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ وبالتالي المتتالية (v_n) ليست محدودة من الأعلى ، والجملة المعطاة **خاطئة**