التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدالة الأسية

3 1) $\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

2) $e^{-x}-e^{-2x}=\dfrac{1}{e^{x}}-\dfrac{1}{e^{2x}}=\dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}}$

3) تصويب: $(e^{x}+e^{-x})^2=(e^{x})^2+2e^{x}e^{-x}+(e^{-x})^2$

$$(e^{x}+e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$$

$$(e^{x}+e^{-x})^2=e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}+2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}+2$$

4) $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{x}\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

2 - الدوال الأسية $x \mapsto e^{kx}$

15 تصويب: $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

1) أ) إذا كان $x=y=0$ فإن: $f(0)=f(0)\times f(0)$ ومنه $f(0)-\left[f(0)\right]^2=0$

ومنه $f(0)\left[1-f(0)\right]=0$ ومنه $f(0)=1$ لأن f غير معدومة.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)\times f(-x)=f(x-x)$

ومنه $f(x)\times f(-x)=f(0)$ أي $f(x)\times f(-x)=1$

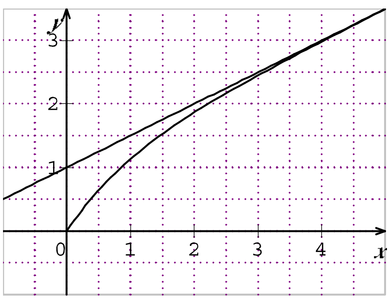
2. أ- من أجل كل عدد حقيقي x، $f\left(\dfrac{x}{2}\right)\times f\left(\dfrac{x}{2}\right)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=f(x)$

ب) الدالة f موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

3 - دراسة الدالة الأسية

f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{-x}$$



1.أ) $f'(x)=\dfrac{1}{2}+e^{-x}$ الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2.أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)=0$

معادلة المستقيم المقارب D هي: $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

ب) المنحني (C) أسفل المستقيم D.

3. الرسم (انظر الشكل)

51 1. $g(x)-f(x)=e^{-x}(1-\sin x)$

$\sin x=1$ على $[0;\pi]$ معناه $x=\frac{\pi}{2}$. إذن المنحنيان يشتركان في النقطة $A\left(\frac{\pi}{2};e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

2. $f'(x)=e^{-x}(-\sin x+\cos x)$ و $g'(x)=e^{-x}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$ إذن المنحنيان يقبلان في النقطة A مماسا مشتركا.

4 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

61 $P(x)=-2x^3+3x^2+11x-6$

1) $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

2) $P(x)=0$ معناه أو $(x=-2)$ أو $(x=3)$

3) $x\in\left\{e^{\frac{1}{2}};e^{-2};e^{3}\right\}$

4) $x\in\left\{\ln\frac{1}{2};\ln 3\right\}$

5 - الخواص الجبرية

73 2) $\begin{cases} x^2+2y=16 \\ \ln\frac{x}{y}=-\ln 3 \end{cases}$ مجوعة الحلول هي $S=\{(-8;-24),(2;6)\}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln x+\ln y=\ln 60 \end{cases}$ مجوعة الحلول هي $S=\{(5;12),(12;5)\}$

74 1) $2t^2-5t+2=0$ معناه $t\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$

2) مجموعة حلول الجملة هي: $S=\{(-\ln 2;\ln 2),(\ln 2;-\ln 2)\}$

6 - دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

91 $f(x)=3\ln(2+x)+x^2-3x$

$$f'(x)=\frac{3}{x+2}+2x-3=\frac{2x^2+x-3}{x+2}$$

$f'(x)=0$ تكافئ $2x^2+x-3=0$

$f'(x)=0$ تكافئ $(x=1)$ أو $\left(x=-\frac{3}{2}\right)$

إذن المنحني C الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين التين فاصلتاهما 1 و $\frac{3}{2}$

7- دالة اللوغاريتم العشري

98 1. $\log\left(2^{1234}\right)=1234\log 2$ ، $E\left(1234\log 2\right)=371$.

2. من $E\left(\log n\right)=371$ نستنتج أن: $371\le \log n<372$

ومنه $\log 10^{371}\le \log n<\log 10^{372}$ و منه $10^{371}\le n<10^{372}$

3. الكتابة العشرية للعدد n تتكون من 372 رقما.

8- المعادلات التفاضلية

102 1) $f(x)=\lambda e^{3x}$ ، 2) $f(x)=\lambda e^{-2x}$

3) $f(x)=\lambda e^{-\frac{5}{2}x}$ ، 4) $f(x)=\lambda e^{8x}$

103 1) $f(x)=\lambda e^{-\frac{1}{2}x}$

2) الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(\ln 4\right)=1$ هو

$$f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x}$$

تمارين للتعمق

108 1) تصويب: المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $-\infty$.

$\left(a,b,c\right)=\left(2,-3,1\right)$

2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. المنحني (C) يقبل المستقيم الذي معادلته $y=1$ كمقارب عند $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $f'(x)=e^{x}\left(4e^{x}-3\right)$

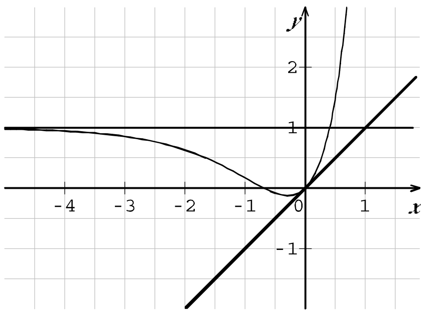
x	$-\infty$		$\ln\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1		$-\frac{1}{8}$		$+\infty$

ب) المنحني (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و $-\ln 2$.

• معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي $y=x$.

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

د) الرسم



116 1) أ) $f\left(x\right)-\left(x-1\right)=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}-x+1 \;=\dfrac{2}{e^x+1}$

$$f\left(x\right)-\left(x+1\right)=-\frac{e^x-1}{e^x+1}-1=\frac{-2e^x}{e^x+1}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(x-1\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(x+1\right)=0$

إذن المستقيمان Δ_1 و Δ_2 اللذين معادلتاهما على مقاربان لــ $\left(C\right)$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

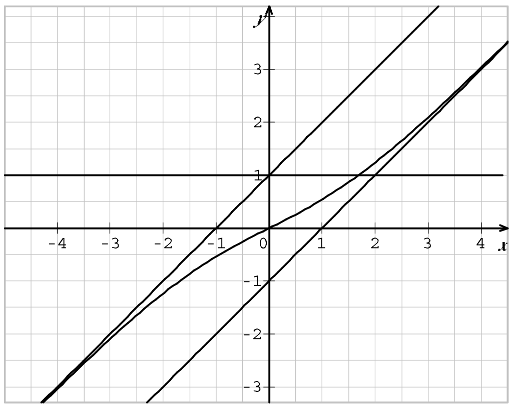
د) بجوار $+\infty$ $\left(C\right)$ أعلى Δ_2 ، و بجوار $-\infty$ $\left(C\right)$ أسفل Δ_1.

2) أ) $f(-x)=-x-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x+\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)$

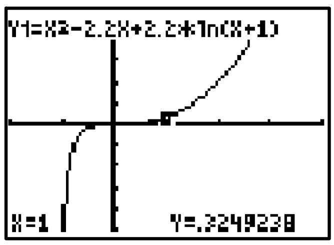
ب) $f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	1	$+\infty$

3) الرسم



117 (1



2.أ) الدالة f متزايدة.

ب) الدالة f تنعدم عند $x=0$.

3.أ) من أجل $x>-1$: $f'(x)=2x-2,2+\dfrac{2,2}{x+1}=\dfrac{2x^2-0,2x}{x+1}$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس لإشارة $x\left(2x-0,2\right)$

$f'(x)>0$ معناه $x\in\left]-1;0\right[\cup\left]0,1;+\infty\right[$ ، $f'(x)<0$ معناه $x\in\left]0;0,1\right[$ ، $f'(x)=0$ معناه $x\in\{0;0,1\}$

x	-1		0		$0,1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$\approx -0,0003$	↗	$+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

جـ) لدينا $f(0)=0$ و على المجال $\left]0,1;+\infty\right[$ الدالة f مستمرة و متزايدة و تأخذ قيمها في $\left]f(0,1);+\infty\right[$

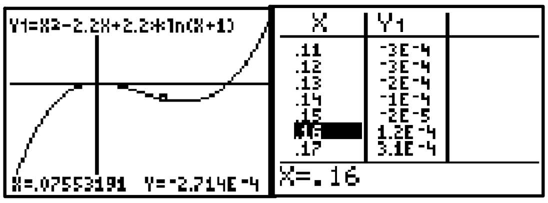
و $f(0,1)<0$. إذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 حيث $f(x_0)=0$

خلاصة: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين 0 و x_0.

د) نتائج دراسة الدالة لا تتطابق مع التخمين.

4.أ) يمكن أخذ $-0,0018\le y\le 0,00111$

ب) $f(0,15)<0$ و $f(0,16)>0$ ومنه $0,15<\alpha<0,16$. قيمة مقربة بالزيادة إلى 10^{-2} للعدد α هي $0,16$



121 1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x : $-1\le\cos 4x\le 1$ و $e^{-x}>0$ ومنه .

$-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

2) النقط المشتركة للمنحنيين Γ و C هي النقط $M_k\left(k\frac{\pi}{2};e^{-k\frac{\pi}{2}}\right)$

3) أ) $u_{n+1}=e^{-n\frac{\pi}{2}}\times e^{-\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}u_n$. المتتالية (u_n) هندسية أساسها $e^{-\frac{\pi}{2}}$

ب) أساس المتتالية (u_n) $0<e^{-\frac{\pi}{2}}<1$ و $u_0=1$. إذن المتتالية (u_n) موجبة و متزايدة و تتقارب نحو 0.

4) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $\left[0;+\infty\right[$:

تصويب: $f'(x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$

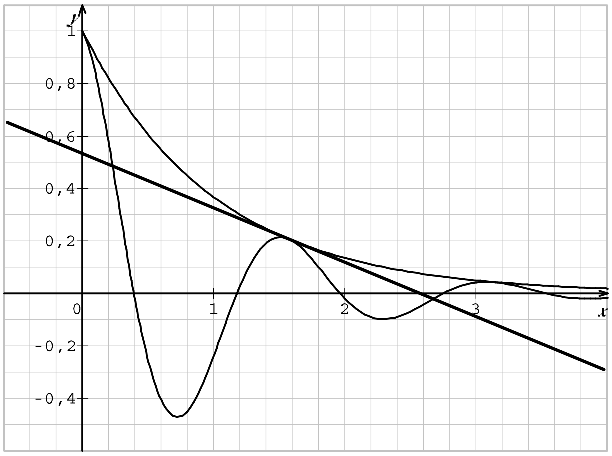
ب) $g'(x)=-e^{-x}$. إذا كان $x=k\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos 4x=1$ و $\sin 4x=0$

$f'\left(k\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(k\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-k\frac{\pi}{2}}$

إذن المنحنيين Γ و C لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5) لدينا: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$. قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس T للمنحني Γ عند النقطة التي فاصلتها

$\frac{\pi}{2}$ هي $-0,2$.



مسائل

123 1) المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة للصفر، $f(-x)=\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}=f(x)$ إذن الدالة f زوجية

2) الدالة $x\mapsto e^{x}$ متزايدة على $\mathbb{R}$.من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $-x\le x$ ومنه $e^{-x}\le e^{x}$.

3) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) $f'(x)=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$.من أجل كل $x\ge 0$: $e^{x}\ge e^{-x}$ و منه $f'(x)<0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad$ $-$
f	$\frac{1}{2}$ $\searrow$ 0

4) أ) من أجل كل $x\ge 0$: $0<e^{-x}\le e^{x}$ ومنه $0<e^{x}<e^{-x}+e^{x}\le 2e^{x}$ ومنه $\frac{1}{2e^{x}}\le\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}\le\frac{1}{e^{x}}$

إذن :من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $h(x)\le f(x)\le g(x)$.

ب) نستنتج أنه على $\mathbb{R}^{+}$ ، Γ يكون بين Γ_1 و Γ_2 .