الدرس 4

الدَّالَّةُ الأُسِّيَّةُ

1. دراسة المعادلة التفاضلية $f'=f$ مع $f(0)=1$

مثال .

تقبل انه توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=f(x)$ و $f(0)=1$.

نريد إنشاء المنحنى البياني التقريبي للدالة f باستعمال مجيول (طريقة أولر) على $[-1\,,1]$.

1) باستعمال التقريب التالي $f(a+h)\approx f(a)+h\times f'(a)$

أ) عين قيمة تقريبية لـ $f(0,5)$ و $f(1)$ بخطوة $h=0,5$

ب) عين قيمة تقريبية لـ $f(-0,5)$ و $f(-1)$ بخطوة $h=-0,5$

2) على المجال $[0,1]$ نختار خطوة $h=0,1$ و نشكل متتالية النقط $M_n(x_n\,,y_n)$ حيث $y_n=f(x_n)$ و $x_0=0$ و $y_0=1$

أ) بين ان المتتالية (x_n) حسابية و (y_n) متتالية هندسية ثم اكتب x_n و y_n بدلالة n .

ب) أعطا القيمة التقريبية لـ $y_n=f(x_n)$ مع $0\le n\le 10$ و $n\in\mathbb{N}$.

جـ) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة f على المجال $[0,1]$ في معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة $0,1$)

3) على المجال $[-1,0]$ نختار خطوة $h=-0,1$ و نشكل متتالية النقط $M_n(x_n\,,y_n)$ حيث $y_n=f(x_n)$ و $x_0=0$ و $y_0=1$

أ) اكتب x_n و $y_n=f(x_n)$ بدلالة n.

ب) اعط القيمة التقريبية لـ $y_n=f(x_n)$ حيث $10\geq n\geq 0$

جـ) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة f على المجال $[-1,0]$ في نفس المعلم السابق.

✓الحل

1) بما أن $f'(a)=f(a)$ فإن $f(a+h)\approx(1+h)\times f(a)$

أ) $f(0,5)=f(0+0,5)=(1+0,5)f(0)=1,5\times 1=1,5$

$f(1)=f(0,5+0,5)=(1+0,5)f(0,5)=1,5\times1,5=2,25$

ب) $f(-0,5)=f(0-0,5)=(1-0,5)f(0)=0,5$

$f(-1)=f(-0,5-0,5)=(1-0,5)f(-0,5)=0,5\times0,5=0,25$

2) أ) النقطة M_0 احداثياتها $(0,1)$ و النقطة M_1 إحداثياتها $(x_1\,,y_1)$ حيث $x_1=x_0+h$ و $y_1=(1+h)y_0$.

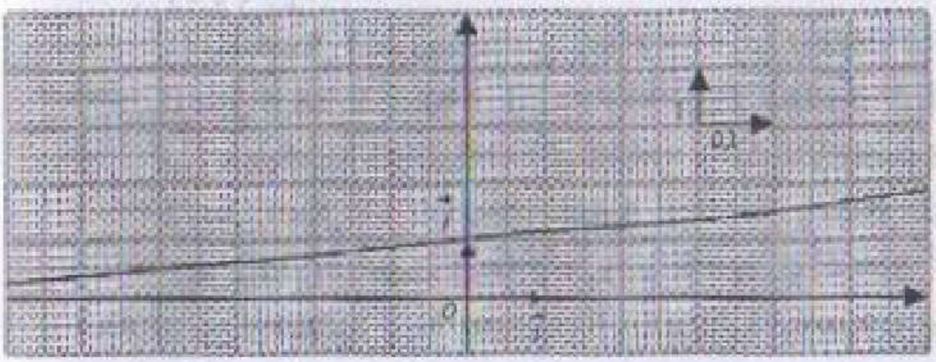
النقطة M_2 إحداثياتها $(x_2\,,\,y_2)$ حيث $y_2=(1+h)\,y_1$ و $x_2=x_1+h$ و هكذا دواليك النقطة M_n إحداثياتها تحقق $x_n=x_{n-1}+h$ و $y_n=(1+h)y_{n-1}$ و منه نستنتج أن (x_n) متتالية حسابية أساسها h و (y_n) متتالية هندسية أساسها $(1+h)$.

بما أن $h=0,1$ فإن $x_n=x_0+n\,h=0,1\,n$ و $y_n=y_0\times(1+h)^n$ أي $y_n=(1,1)^n$

ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_n	1	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,94	2,14	2,35	2,59

جـ) المنحنى التقريبي للدالة f مشكل من قطع $[M_k\,M_{k+1}]$ حيث $n-1\geq k\geq 0$ و $M_k\left(0,1k\,,\,(1,1)^k\right)$



3) أ) المتتالية (x_n) معرفة كما يلي

$x_n=x_{n-1}+h$

أي $x_n=x_{n-1}-0,1$ و عليه (x_n) متتالية حسابية أساسها -1 إذن $x_n=-0,1n$.

المتتالية (y_n) معرفة كمايلي $y_n=(1-0,1)y_{n-1}$ أي $y_n=0,9\,y_{n-1}$

وبالتالي (y_n) متتالية هندسية أساسها $0,9$ و عليه $y_n=1\times(0,9)^n$.

ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1
y_n	1	0,9	0,81	0,72	0,65	0,59	0,53	0,47	0,43	0,38	0,34

خاصية

إذا وجدت دالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ فإنها لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

الإثبات

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x)\times f(-x)$.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة h' معرفة بـ

$h'(x)=f'(x)f(-x)-f'(-x)f(x)$

وبما أنه $f'(x)=f(x)$ فإن عبارة $h'(x)$ تصبح $h'(x)=f(x)f(-x)-f(x)f(-x)=0$

إذن h دالة ثابتة.

بما أنه $f(0)=1$ فإن $h(0)=f(0)f(0)=1$ و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$

يكون $h(x)=1$

بما أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)f(-x)=1$ فإن $f(x)$ غير معدومة على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.

الإثبات

وجود الدالة f يقبل بدون برهان ولكن يلزمنا إثبات وحدانية f .

لتكن g دالة أخرى قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بحيث $g'=g$ و $g(0)=1$.

الدالة $\frac{g}{f}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'f-gf'}{f^2}=0$

إذن الدالة $\frac{g}{f}$ ثابتة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $\left(\frac{g}{f}\right)(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=\frac{1}{1}=1$ فإن من أجل

كل x من $\mathbb{R}$ يكون $\frac{g(x)}{f(x)}=1$ اي $g(x)=f(x)$ و هذا يدل على أن f وحيدة.

2. تعريف الدالة الأسية

نسمي دالة أسية، الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$

ونرمز لها بـ $\exp$ و نكتب $f(x)=\exp(x)$.

3. خواص الدالة الأسية

1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي نفسها اي $\exp'(x)=\exp(x)$
2) الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\exp(0)=1$
3) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b لدينا $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$
4) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b و العدد الصحيح n لدينا

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad ، \quad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)} \quad ، \quad \exp(2a)=(\exp(a))^2$$

$$\exp(na)=(\exp(a))^n$$

5) مهما يكن العدد الحقيقي a يكون $\exp(a)\rangle 0$

الإثبات

نتحصل على الخاصيتين (1) و (2) من التعريف

3) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=f(a+b-x)f(x)$ حيث f الدالة الأسية.
g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=-f(a+b-x)f(x)+f(a+b-x)f(x)=0$
إذن g دالة ثابتة.
بما أن $f(a+b)=f(a+b)f(0)=g(0)$ و $g(b)=f(a)f(b)$ فإن
$f(a+b)=f(a)\times f(b)$ اي $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

4) - $\exp(2a)=\exp(a+a)=\exp(a)\times\exp(a)=(\exp(a))^2$

- لدينا $\exp(-a+a)=\exp(-a)\times\exp(a)$ و لدينا من جهة أخرى $\exp(-a+a)=1$
إذن $1=\exp(-a)\times\exp(a)$ و بالتالي $\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$

- $\exp(a-b)=\exp(a)\times\exp(-b)=\exp(a)\times\dfrac{1}{\exp(b)}=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- نتقبل ان $\exp(na)=(\exp(a))^n$ (نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع من اجل n طبيعي).
و من أجل n عدد صحيح سالب فإن $-n$ عدد طبيعي و لدينا

$$\exp(na)=(\exp-(-na))=\frac{1}{\exp(-na)}=\frac{1}{(\exp a)^{-n}}=(\exp a)^n$$

5) بكتابة $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ فيكون $\exp(a)=\exp\left(\frac{a}{2}\right)\times\exp\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$
و منه نستنتج $\exp(a)\rangle 0$.

مبرهنة

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، غير معدومة، حيث
$f(a+b)=f(a)\times f(b)$ و $f'(0)=1$

الإثبات

الدالة الأسية تحقق الشروط الأربعة التالية:

(قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$) ، (غير معدومة) ، ($f'(0)=1$) ، ($f(a+b)=f(a)\times f(b)$).

لتكن f دالة اخرى تحقق هذه الشروط الأربعة السابقة و بحيث من اجل a عدد حقيقي معطى ومن أجل كل عدد حقيقي x كيفي $f(x+a)=f(x)\times f(a)$.

الدالة $x\mapsto f(x+a)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين ، والدالة $x\mapsto f(x)f(a)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن $f'(x+a)=f(a)\times f'(x)$

من اجل $x=0$ لدينا $f'(a)=f(a)f'(0)$ و بما أن $f'(0)=1$ فإن $f'(a)=f(a)$ من أجل كل a

إذن الدالة f حل للمعادلة $f'=f$.

بالإضافة إلى ذلك $f(a+0)=f(a)\times f(0)$ اي $f(a)=f(a)\times f(0)$

لكن $f(a)$ غير معدوم إذن $f(0)=1$

و عليه f هي حل للمعادلة $f'=f$ و $f(0)=1$ و هذا يعني ان f هي الدالة الأسية.

تمرين تدريبي 1

f ، g ، h دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\exp(x)+2x$ ، $g(x)=\exp(x-1)$
و $h(x)=\exp(-2x)$

أ) عين اتجاه تغير كل دالة .

ب) أوجد علاقة بين g و g' وأيضا بين h و

✓ الحل

أ) ـ الدالة f هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x\mapsto \exp x$ و $x\mapsto 2x$ و لدينا $f'(x)=\exp x+2$.

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\exp x>0$ ومنه $f'(x)>0$ اي أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

• $g(x)=\exp(x)\times\exp(-1)$

الدالة g هي جداء الدالة exp بعدد حقيقي موجب $\exp(-1)$ ومنه

$g'(x)=\exp'(x)\exp(-1)=\exp(x-1)$ إذن $g'(x)>0$ و منه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• $h(x)=(\exp(-x))^2=\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^2$ إذن الدالة h من الشكل $\left(\frac{1}{u}\right)^2$ حيث $u(x)=\exp(x)$

$$h'(x)=\frac{-2\exp(x)}{(\exp(x))^3}=\frac{-2}{(\exp(x))^2}=-2\exp(-2x)$$

لكن $\exp(-2x)>0$ إذن $h'(x)<0$ و منه نستنتج أن h متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) $g'(x)=\exp(x-1)=g(x)$ و $h'(x)=-2\exp(-2x)=-2h(x)$

تمرين تدريبي 2

أ) بسط العبارات التالية :

$A=(\exp(x))^3$ ، $B=\exp(3-2x)\times\exp(5x-7)$ ، $C=\dfrac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}$.

ب) تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\dfrac{\exp x}{\exp x - x}=\dfrac{1}{1-x\exp(-x)}$

و $\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\dfrac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$

✓ الحل

أ) $A=(\exp(x))^3=\exp(x)\times\exp(x)\times\exp(x)=\exp(2x)\times\exp(x)=\exp(3x)$

$B=\exp(3-2x)\times\exp(5x-7)=\exp(3-2x+5x-7)=\exp(-4+3x)$

$$C=\frac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}=\frac{\exp(3x-1)}{(\exp(3x))^{-1}}=\exp(3x-1)\times\exp(3x)=\exp(3x-1+3x)$$
$$=\exp(6x-1)$$

ب) $$\frac{\exp(x)}{\exp(x)-x}=\frac{\exp(x)}{\exp(x)\left[1-x\exp(-x)\right]}=\frac{1}{1-x\exp(-x)}$$

$$\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\frac{\exp(x)\left[1-\dfrac{\exp(-x)}{\exp(x)}\right]}{\exp(x)\left[1+\dfrac{\exp(-x)}{\exp(x)}\right]}=\frac{1-(\exp(-x))^2}{1+(\exp(-x))^2}=\frac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$$

4. الترميز e^x

صورة الواحد بالدالة الأسية نرمز له بـ e اي $\exp(1)=e$.

العدد e هو عدد حقيقي و القيمة التقريبية له هي 2,71828

الخواص المبرهنة في الفقرة السابقة تسمح لنا بكتابة $\exp(n)=\exp(n\times1)=(\exp(1))^n=e^n$

من أجل كل عدد صحيح n.

نرمز بـ e^x إلى صورة العدد الحقيقي x بالدالة الأسية و نكتب $\exp(x)=e^x$

ملاحظة

العدد e عدد غير ناطق.

خواص

خواص الدالة الأسية المبرهنة في الفقرة السابقة تكتب بالترميز الجديد كمايلي :

1) الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي نفسها

2) $e^0 = 1$ و من أجل كل عدد حقيقي x يكون $e^x > 0$.

3) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b و العدد الصحيح n ؛

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad ، \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ، \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad ، \quad \left(e^a\right)^n = e^{na}$$

4) من أجل كل الأعداد الحقيقية a_1 ، a_2 ، ... ، a_p حيث p عدد طبيعي لدينا

$$e^{a_1} e^{a_2} \times \ldots \times e^{a_p} = e^{a_1+a_2+\ldots+a_p}$$

تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية :

$$A = e^{-3} \times \left(e^{2}\right)^4 \quad ، \quad B = \left(e^{-x}\right) \times \left(e^{x}\right)^3$$

$$C = e^{2x} \times e^{-2x} \quad ، \quad D = \frac{e^{-x}}{e^x+1} - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$$

✓ الحل

$$A = e^{-3} \times e^8 = e^{-3+8} = e^5$$

$$B = e^{-x} \times \left(e^x\right)^3 = e^{-x} \times e^{3x} = e^{-x+3x} = e^{2x}$$

$$C = e^{2x} \times e^{-2x} = e^{2x-2x} = e^0 = 1$$

$$D = \frac{e^{-x}}{e^x+1} - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x e^{-x}}{e^{2x}+e^x} - \frac{e^{-2x} e^{2x}}{e^{2x}+e^{-x}e^{2x}}$$

$$= \frac{e^0}{e^{2x}+e^x} - \frac{e^0}{e^{2x}+e^x} = \frac{1}{e^{2x}+e^x} - \frac{1}{e^{2x}+e^x} = 0$$

5. دراسة الدالة الأسية

1.5 اتجاه التغير والنهايات

مبرهنة

1) الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) إذا كان $x > 0$ فإن $e^x > 1$ و إذا كان $x < 0$ فإن $e^x < 1$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

4) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ و من اجل h قريب من الصفر $\approx 1+h$

الإثبات

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\exp'(x)=\exp(x)$ و $\exp(x)\rangle 0$
إذن الدالة الأسية متزايدة على $\mathbb{R}$

2) بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على المجال $[0,+\infty[$ و $\exp(0)=1$
فإنه من اجل كل $0\langle x$ يكون $\exp(x)\rangle 1$
- بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على $]-\infty,0]$ و $\exp(0)=1$
فإنه من اجل كل $x\langle 0$ يكون $\exp(x)\langle 1$

3) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-x$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=e^x-1$ و $f'(0)=0$
- على المجال $]-\infty,0[$ لدينا $f'(x)\langle 0$ و منه f متناقصة تماما على مجال $]-\infty,0]$.
- على المجال $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)\rangle 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$
و بما أن $f(0)=1$ فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى تساوي 1 .
إذن من اجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)\geq 1$
و منه نستنتج أن $f(x)\rangle 0$ على $\mathbb{R}$ و هذا يعني أن $e^x\rangle x$.
و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ (حسب نظرية الحصر)
- نضع $X=-x$ و بالتالي لما x يؤول الى $(-\infty)$ فإن X يؤول الى $(+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=\lim_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$$

4) - الدالة $x\mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق عند الصفر وعددها المشتق عند الصفر هو 1
و منه نستنتج بالتعريف أن $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$
- من النهاية السابقة نستنتج أن في جوار الصفر $e^h=1+h+\phi(h)$ حيث $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$
إذن $e^h\approx 1+h$ بجوار الصفر.

تمرين تدريبي 1

لتكن f و g دالتين معرفتين بـ $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+1}$ ، $g(x)=\frac{e^x-1}{x^3}$
احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
ثم احسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

✓ الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=1$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x^2}=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

تمرين تدريبي ❷

1) باستعمال التقريب التالفي لـ e^x برهن انه عندما يكون العدد الطبيعي n كبير بالقدر الكافي يكون $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) لتكن (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ احسب بتقريب 10^{-10} الحدود U_{100} ، U_{1000} ثم قارنها مع e.

✓ الحل

1) بجوار الصفر لدينا $e^h\approx h+1$

و بوضع $h=\frac{1}{n}$ مع n كبير بالقدر الكافي نجد $e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}$

و برفع الطرفين إلى القوة n نجد $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ أي $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) $U_{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2,7048138294$

$U_{1000}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2,7169239325$

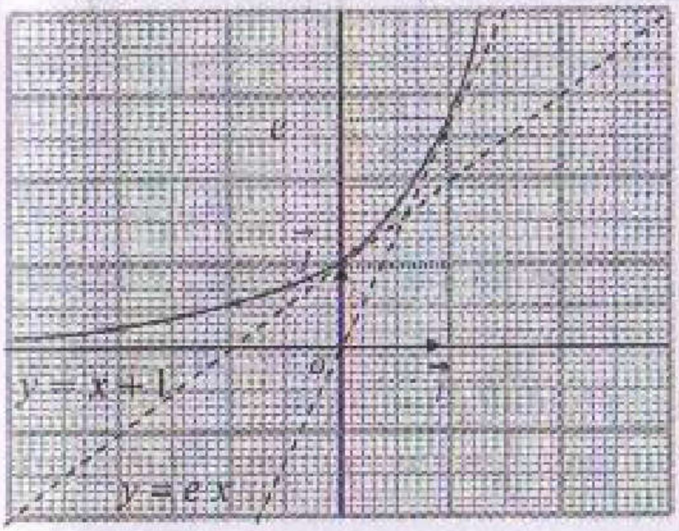
نلاحظ أن U_{100} و U_{1000} قيم مقربة إلى 10^{-10} للعدد e

و كلما كان n كبيرا جدا كلما اقتربنا من العدد e

و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n=e$

2.5 جدول تغيرات و المنحنى البياني للدالة الأسية

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$	$+$		
$\exp(x)$	0 ↗	1	↗ $+\infty$



- المنحني الممثل للدالة $\exp$ يقبل المستقيم ذا المعادلة $y=0$ مقارب له بجوار $(-\infty)$
- المماسان لمنحنى الدالة $\exp$ عند 1 و 0 معادلتاهما على الترتيب $y=ex$ و $y=x+1$
- بما ان $e^x > x$ من اجل كل x فإن المنحنى الممثل للدالة $\exp$ يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y=x$

3.5 الوضع النسبي لبيان الدالة $\exp$ و مماساته

نسمي (γ) المنحنى البياني للدالة $\exp$ في معلم متعامد ومتجانس، و ليكن a عدد حقيقي و لتكن $M(a, e^a)$ نقطة من (γ).

معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند M هي $y=e^a+e^a(x-a)$.

لدراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (T) ندرس إشارة المقدار $e^x-\left[e^a+e^a(x-a)\right]$.

نضع $f(x)=e^x-\left[e^a+e^a(x-a)\right]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما :
$x\mapsto e^x$ و $x\mapsto -\left[e^a+e^a(x-a)\right]$ و لدينا $f'(x)=e^x-e^a$

بما ان الدالة $\exp$ متزايدة تماما فإن

- إذا كان $x>a$ يكون $e^x>e^a$ و عليه $f'(x)>0$
- إذا كان $x<a$ يكون $e^x<e^a$ و عليه $f'(x)<0$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(a)=0$	↗

- من جدول تغيرات f نلأحظ انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)\geq 0$ وهذا يعني ان المنحنى للدالة $\exp$ يقع فوق المماس (T) و يمسه في النقطة الوحيدة $M(a, e^a)$.

4.5 نهايات شهيرة

مبرهنة

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\bar{0}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

الإثبات

لتكن f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$.

f و f' قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=e^x-x$ و $f''(x)=e^x-1$.

من اجل كل x من $[0,+\infty[$ لدينا $f''(x)\geq 0$ و منه الدالة f' متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

بما ان $f'(0)=1$ فإن $f'(x)\rangle 0$ و عليه فإن الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

و بما ان $f(0)=1$ فإن $f(x)\geq 1\rangle 0$.

$f(x)\rangle 0$ يكافئ $e^x\rangle\frac{x^2}{2}$ بالقسمة على العدد الحقيقي الموجب تماما x نجد $\frac{e^x}{x}\rangle\frac{x}{2}$

و بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$ فإن حسب نظرية الحصر نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

• بوضع $X=-x$ يكون $xe^x=-Xe^{-X}=\frac{-X}{e^X}=\frac{-1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{-1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)}=\bar{0}$ لأن $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$

ملاحظة

من اجل قيم كبرى لـ x ، فالعددان x و e^x يأخذان قيما كبرى جدا و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ فإن e^x اكبر بكثير عن x نقول ان الدالة الأسية تتفوق عن الدالة $x\mapsto x$.

تمرين تدريبي 1

1) f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-2x+1$ و $g(x)=\frac{3e^x+2}{e^x+2}$

احسب نهايات f و g عند $+\infty$ و $-\infty$

2) h و k دالتان معرفتان كما يلي $h(x)=\frac{x+2}{3e^x-1}$ و $k(x)=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

أ) احسب نهاية h عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) احسب نهاية k عند $(+\infty)$ ، $(-\infty)$ و 1

✓الحل

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(3-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}} = 3$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3e^x-2}{e^x+2} = -\frac{2}{2} = -1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x-2x+1\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x+1) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{-2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}+\frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

(2 (1 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{3e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{e^x\left(3-\frac{1}{e^x}\right)} = 0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{3e^x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{3e^x-1} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3e^x-1\right) = -1$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X-1}{X}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x-1}-1\right)\times\frac{1}{x-1} = 0$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x-1}-1\right) = -1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x\to1} k(x) = \lim\limits_{X\to0} \frac{e^X-1}{X} = 1$ حيث $X = x-1$

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x}-x-2$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f.

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ لها حلان في $\mathbb{R}$. ثم ارسم (γ).

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim e^{x}\left(1-\frac{x}{e^{x}}-\frac{2}{e^{x}}\right)=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}}=0$

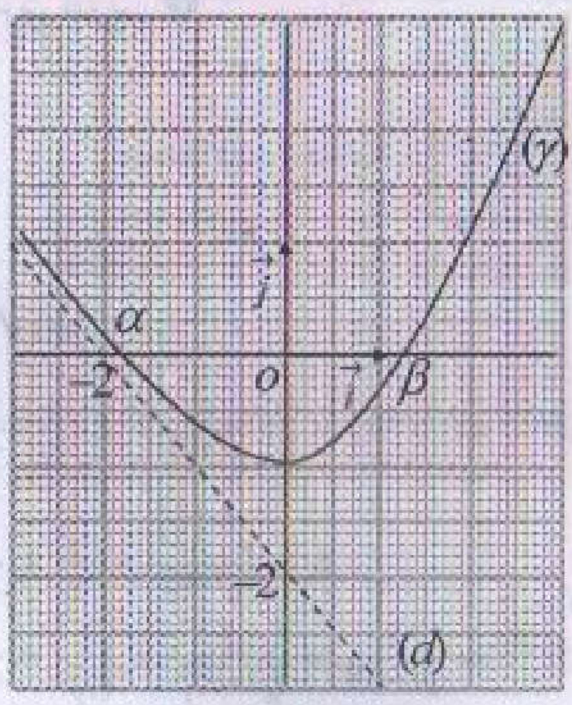
• f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=e^{x}-1$.

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$.

- إذا كان $x\rangle 0$ فإن $e^{x}\rangle 1$ و بالتالي $f'(x)\rangle 0$ اي f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

- إذا كان $x\langle 0$ فإن $e^{x}\langle 1$ و بالتالي $f'(x)\langle 0$ اي f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	
تغيرات f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$



2) - بما أن $f'\langle 0$ على المجال $]-\infty,0[$ و $0\in]-1,+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α من $]-\infty,0[$

- بما أن $f'\rangle 0$ على المجال $]0,+\infty[$ و $0\in]-1,+\infty[$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ لها حلا وحيدا β من $]0,+\infty[$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β على $\mathbb{R}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x-2)=0$ فإن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x-2$ مقارب لـ (γ) بجوار $-\infty$

5.5 المعادلات والمتراجحات

خاصية

1) مهما يكن العدد الحقيقي الموجب تماما m فالمعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ونرمز له بـ $Ln(m)$ ونكتب $x = Ln(m)$

2) من اجل كل عددين حقيقيين a و b :

$e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$

الإثبات

1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالإضافة إلى كونها متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنها تقابل من $\mathbb{R}$ في $]0,+\infty[$.

إذن من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما m فالمعادلة ذات المجهول x التالية $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا الذي نرمز له بـ $Ln(m)$.

2) بما ان الدالة الأسية تقابل من $\mathbb{R}$ في $]0,+\infty[$ ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن

$e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$.

ملاحظة

بما ان المعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا هو $Ln(m)$ فإنه يمكن كتابة $e^{Ln(m)} = m$.

تمرين تدريبي 1

بسط الأعداد التالية، $A = e^{Ln(2)-Ln(3)}$ ، $B = \dfrac{e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{Ln(2)}}$ ، $C = e^{-2Ln(3)}$

$D = e^{2Ln(5)}$ ، $E = e^{Ln(3)-2Ln(2)}$

الحل ✓

$$A = e^{Ln(2)} \times e^{-Ln(3)} = 2 \times \frac{1}{e^{Ln(3)}} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{Ln(2)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$C = e^{-2Ln(3)} = \frac{1}{e^{2Ln(3)}} = \frac{1}{\left(e^{Ln(3)}\right)^2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$D = e^{2Ln(5)} = \left(e^{Ln(5)}\right)^2 = 5^2 = 25$$

$$E = e^{Ln(3)-2Ln(2)} = e^{Ln(3)} \times \frac{1}{e^{2Ln(2)}} = 3 \times \left(\frac{1}{e^{Ln(2)}}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

تمرين تدريبي 2

حل المعادلات والمتراجحات التالية

أ) $e^{x^2+3x}=e^4$ ، ب) $e^{2x+1}<e^{x^2-x-3}$ ، جـ) $e^{-3x+2}\geq 3$

✓ الحل

المعادلتان $e^{U(x)}=e^{V(x)}$ و $U(x)=V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول

المتراجحتان $e^{U(x)}<e^{V(x)}$ و $U(x)<V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول

أ) المعادلتان $e^{x^2+3x}=e^4$ و $x^2+3x=4$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المعادلة $x^2+3x=4$ تكافئ المعادلة $x^2+3x-4=0$ التي حلاها هما $x_1=1$ و $x_2=-4$

إذن مجموعة حلول المعادلة $e^{x^2+3x}=e^4$ هي $S=\{1,-4\}$.

ب) المتراجحتان $e^{2x+1}<e^{x^2-x-3}$ و $2x+1<x^2-x-3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المتراجحة $2x+1<x^2-x-3$ تكافئ المتراجحة $x^2-3x-4>0$

و هذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

جـ) بما أن $e^{Ln3}=3$ فإن المتراجحة (جـ) تكتب على الشكل $e^{-3x+2}\geq e^{Ln3}$

المتراجحتان $e^{-3x+2}\geq e^{Ln3}$ و $-3x+2\geq Ln3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

مجموعة حلول المتراجحة $-3x+2\geq Ln3$ هي $\left]-\infty,\frac{2-Ln3}{3}\right[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $\left]-\infty,\frac{2-Ln3}{3}\right[$

تمرين تدريبي 3

حل المعادلات والمتراجحات التالية

أ) $e^{2x}=\left(e^{-x}\right)^2\times e^{-3}$ ، ب) $e^{2x}-3e^x-4=0$ ، جـ) $e^{-x}-3\geq 0$

✓ الحل

لحل معادلة من الشكل $ae^{2x}+be^x+c=0$ نضع $e^x=X$

الحلول (في حالة وجودها) هي الأعداد x_0 بحيث $x_0=Ln(X_0)$ حيث X_0 هو الحل

الموجب للمعادلة $aX^2+bX+c=0$

أ) $\left(e^{-x}\right)^2\times e^{-3}=e^{-2x}\times e^{-3}=e^{-2x-3}$

و منه المعادلة (أ) تكتب على الشكل $e^{2x}=e^{-2x-3}$

و هذه الأخيرة تكافئ $2x=-2x-3$

مجموعة حلول المعادلة $2x=-2x-3$ هي $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

و منه مجموعة حلول المعادلة أ) هي $S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

ب) بوضع $X=e^x$ المعادلة ب) تكتب على الشكل $X^2-3X-4=0 \quad ...(I)$

حلا المعادلة (I) هما $X_0=4$ و $X_1=-1$

$X_1=-1$ مرفوض و $X_0=4$ مقبول

$X_0=e^x$ " يكافئ $x_0=Ln(X_0)=Ln\,4$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{Ln\,4\}$.

جـ) $e^{-x}-3\geq 0$ يكافئ $e^{-x}\geq e^{Ln\,3}$ يكافئ $-x\geq Ln\,3$ يكافئ $x\leq -Ln\,3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=\left]-\infty\,,-Ln\,3\right]$

6. الدالة المركبة $x\mapsto e^{u(x)}$

دراسة هذا النوع من الدوال تعتمد على مبرهنة نهاية دالة مركبة واشتقاق دالة مركبة.
الدالة exp معرفة على $\mathbb{R}$ و بالتالي مجموعة تعريف الدالة $\exp o u$ هي مجموعة تعريف الدالة u

مبرهنة

1) إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة f المعرفة بـ $f(x)=(\exp o u)(x)=e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

2) اتجاه تغير الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هو نفس إتجاه تغير الدالة u

الإثبات

1) $f'(x)=(\exp o u)'(x)=u'(x)\times\exp'(u(x))$

لكن $\exp'(u(x))=e^{u(x)}$ و عليه $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$

2) بما أن $e^{u(x)}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $u'(x)$

و عليه فإن اتجاه تغير الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هو نفس إتجاه تغير الدالة $x\mapsto u(x)$

مثال 1

عين المجال الذي تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=e^{2x+3}$ ، ب) $f(x)=e^{2x^2+x}$ ، جـ) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

د) $f(x)=e^{\sin x}$ ، هـ) $f(x)=e^{\frac{x}{x^2+1}}$

✓ الحل

أ) الدالة $x \xrightarrow{u} 2x+3$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=2\times e^{2x+3}$

ب) الدالة $x \xrightarrow{u} 2x^2+x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(4x+1)e^{2x^2+x}$

جـ) الدالة $x \xrightarrow{u} \frac{1}{x}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ و لدينا $f'(x)=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

د) الدالة $x \xrightarrow{u} \sin(x)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$

هـ) الدالة $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,e^{\frac{x}{x^2+1}}$

تمرين تدريبي 1

احسب نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=e^{2x+3}$ ، 2) $f(x)=e^{\frac{2x+1}{x-2}}$

3) $f(x)=e^{-x^2}$ ، 4) $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$

✓ الحل

1) نهاية الدالة $x \xrightarrow{u} 2x+3$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$
ونهاية الدالة $x\mapsto e^x$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) نهاية الدالة $x \xrightarrow{u} \frac{2x+1}{x-2}$ عند $(+\infty)$ هي 2
و نهاية الدالة $x\mapsto e^x$ عند 2 هي e^2 و منه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^2$

3) نهاية الدالة $x \xrightarrow{u} -x^2$ عند $(+\infty)$ هي $(-\infty)$
ونهاية الدالة $x\mapsto e^x$ لما x يؤول $(-\infty)$ هي 0 و منه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

4) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$ و $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ منه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين تدريبي ❷

لتكن f_k و g_k دالتين معرفتين كما يلي $f_k(x)=e^{-kx}$ و $g_k(x)=e^{-kx^2}$
مع $k \rangle 0$ ، (γ_k) و (Γ_k) للمنحنيين الممثلين لـ f_k و g_k على الترتيب في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) أدرس تغيرات الدالة f_k

ب) أدرس الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ثم ارسم (γ_1) و (γ_2)

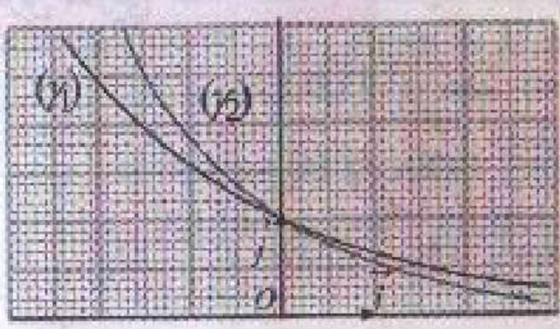
2) أ) أدرس تغيرات الدالة g_k

ب) أدرس الوضع النسبي لـ (Γ_1) و (Γ_2) ثم ارسم (Γ_1) و (Γ_2)

✓ الحل

1) أ) الدالة $x \xrightarrow{u} -kx$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f_k معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'_k(x) = (-k)e^{-kx}$

بما أن $k \rangle 0$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'_k(x) \langle 0$ أي أن f_k متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة f'_k	$-$	
تغيرات f_k	$+\infty$ ↘	0

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (-kx) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx} = 0$

بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} (-kx) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-kx}\right) = +\infty$

ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ندرس إشارة الفرق $f_2(x)-f_1(x)$.

$$\dots(x)-f_1(x) = e^{-2x}-e^{-x} = e^{-x}\left(e^{-x}-1\right) = e^{-x}\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)$$

$f_2(x)-f_1(x)=0$ يكافئ $1-e^x=0$ يكافئ $x=0$

- إذا كان $x \rangle 0$ فإن $f_2(x)-f_1(x) \langle 0$ و بالتالي (γ_2) تقع تحت (γ_1)
- إذا كان $x \langle 0$ فإن $f_2(x)-f_1(x) \rangle 0$ وبالتالي (γ_2) تقع تحت (γ_1)

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحني (γ_k) في جوار $(-\infty)$

2) دراسة تغيرات الدالة g_k

الدالة $x \xrightarrow{v} -k\,x^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

اذن الدالة g_k معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $g_k'(x) = -2\,k\,x\,e^{-k x^2}$

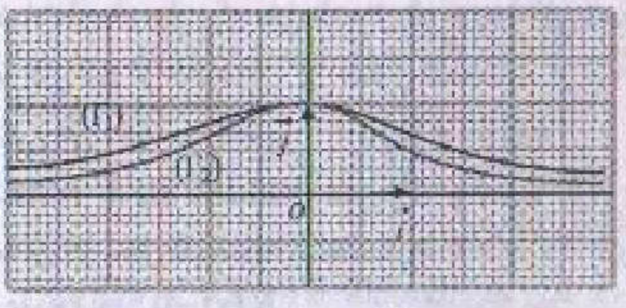
$g_k'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$

- إذا كان $x > 0$ فإن $g_k'(x) < 0$ و بالتالي g_k متناقصة تماما على $]0,+\infty[$
- إذا كان $x < 0$ فإن $g_k'(x) > 0$ و بالتالي g_k متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

$$\lim_{x\to-\infty}(-k\,x^2) = \lim_{x\to+\infty}(-k\,x^2) = -\infty$$

و بالتالي $\lim_{x\to-\infty} g_k(x) = \lim_{x\to+\infty} g_k(x) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
تغيرات g_k	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (Γ_1) و (Γ_2) ندرس إشارة المقدار $g_2(x) - g_1(x)$

$$g_2(x) - g_1(x) = e^{-2x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(\frac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}}\right)$$

$g_2(x) - g_1(x) = 0$ يكافئ $x = 0$

من اجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $x^2 > 0$

وبما أن الدالة exp متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

فإن $e^{x^2} > e^0$ اي $e^{x^2} > 1$

إذن $g_2(x) - g_1(x) < 0$ و هذا يعني أن (Γ_2) يقع تحت (Γ_1)

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب لـ (Γ_1) و (Γ_2) في جوار $+\infty$ و $-\infty$
- الدالة g_k زوجية وبالتالي منحناها يقبل المستقيم $(x = 0)$ كمحور تناظر له

7. المعادلات التفاضلية

نسمي معادلته تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة ومشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال I يعني إيجاد كل الدوال f القابلة للاشتقاق على I و التي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق فقط إلى المعادلات التفاضلية من الشكل، $y' = a\,y + b$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a \neq 0$

1.7 حل المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$.

مبرهنة ❶

حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$ على $\mathbb{R}$ هي دوال f_k المعرفة بـ $f_k(x)=ke^{ax}$
حيث k عدد حقيقي كيفي.

الإثبات

من اجل كل عدد حقيقي k لدينا $f_k'(x)=ake^{ax}$
إذن $f_k'(x)=af_k(x)$ و هذا يعني أن f_k حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$.

• وحدانية الدوال f_k ؛
لإثبات أن الدوال f_k هي الدوال الوحيدة التي تحقق $y'=ay$
نفرض أنه توجد دوال g حلول للمعادلة $y'=ay$ و نبين أن g من الشكل f_k.
لتكن h دالة معرفة بـ $h(x)=g(x)e^{-ax}$
الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $h'(x)=e^{-ax}(g'(x)-ag(x))$
بما أن g حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ فإن $g'(x)-ag(x)=0$
و عليه نجد $h'(x)=0$
إذن الدالة h ثابتة
وهذا يعني من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $h(x)=k$
إذن $g(x)=ke^{ax}$

مبرهنة ❷

من أجل كل ثنائية (x_0,y_0) المعادلة $y'=ay$ تقبل حلا وحيدا f
بحيث $f(x_0)=y_0$

الإثبات

القول أن $f_k(x_0)=y_0$ يكافئ القول أن $ke^{ax_0}=y_0$
إذن لا توجد إلا قيمة وحيدة ممكنة لـ k هي $y_0e^{-ax_0}$
و الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}$

مثال . ◆

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y'=-3y$ مع $(x_0,y_0)=(1,3)$

الحل ✓

حل المعادلة التفاضلية المعطاة هي الدالة f المعرفة من اجل كل x بالعبارة
$f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}$ و بتعويض a و x_0 و y_0 نجد $f(x)=3e^{-3(x-1)}$

2.7 حل المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $ab\neq 0$

مبرهنة

الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $ab\neq 0$ هي الدوال f_k المعرفة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

الإثبات

نفرض أن الدالة f القابلة للاشتقاق على I هي حلا للمعادلة $y'=ay+b$ عندئذ نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$ نضع $g(x)=f(x)+\frac{b}{a}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f'(x)$

لكن $f'(x)=af(x)+b=ag(x)$

إذن $g'(x)=ag(x)$ و هذا ما يثبت أن g هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$

إذن g هي الدالة $x\mapsto ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

بالعكس كل دالة f من الشكل $x\mapsto ke^{ax}-\frac{b}{a}$ هي حل للمعادلة $y'=ay+b$ لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=kae^{ax}$ و $f'(x)=af(x)+b$.

و عليه حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال f_k المعرفة بـ $f_k(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}$

ملاحظة

المعادلة التفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات a و b ثابتة.

تمرين تدريبي

أوجد الدالة f حلا للمعادلة التفاضلية $y+y'=1 \ldots (E)$ بحيث $f(0)=2$

✓ الحل

المعادلة التفاضلية (E) تكتب على الشكل $y'=-y+1$

الحل العام لهذه الأخيرة هي الدوال f_k المعرفة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=ke^{-x}+1$

$f_k(0)=2$ يكافئ $k+1=2$ يكافئ $k=1$

منه الدالة f المطلوبة معرفة كما يلي $f(x)=e^{-x}+1$