تمارين للتعمق :

مسائــل:

حل المسألة 111 ص36 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$:

1) أ) تعيين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\frac{1-4+8-4}{0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا من أجل كل x من D_f الدالة المشتقة f' هي :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-(2(x-1))(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-(2)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-8x^2+8x+8x-8-2x^3+8x^2-16x+8}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

إشارة $f'(x)$:

$f'(x)=0$ معناه $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0$ ، ومنه $\begin{cases} x^2(x-3)=0 \\ \text{و} \\ (x-1)^3\neq 0\end{cases}$ ، لأن $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$x^2(x-3)=0$ ، معناه $x^2=0$ ، ومنه $x=0$ ، وَ $(x-3)=0$ ، ومنه $x=3$

أي أنه لمّا $f'(x)=0$ ، $x=\{0;3\}$.

- جدول إشارة $f'(x)$ على D_f :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- ومنه جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

(2

أ) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، وَ d ، بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$$:

لدينا : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+d}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+cx+d}{(x-1)^2}$

$$=\frac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+cx+d}{(x-1)^2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b+c)x+(b+d)}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ نجد : $a=1$ ، وَ $\begin{cases} a=1 \\ b-2(1)=-4 \end{cases}$ ، ومنه $b=-2$

و بالمطابقة كذلك نجد $\begin{cases} a-2b+c=8 \\ b+d=-4 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} 1-2(-2)+c=8 \\ (-2)+d=-4 \end{cases}$ ، أي أن $c=3$ وَ $d=-2$

إذن : $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=3$ ، وَ $d=-2$ ، أي أن $f(x)=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$.

ب) لدينا $f(x)=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ ، و معادلة المستقيم $(D): y=x-2$:

ومنه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\left(x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{x}\right]=0$

إذن : نستنتج أنّ المستقيم $(D): y=x-2$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى (C_f) في جوار $-\infty$ وَ $+\infty$.

ج) تحديد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) ، حيث النقطة A نقطة تقاطع (C_f) وَ (D) :

لدينا $f(x)-y=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ ، ومنه $(x-1)^2>0$ ، وَ $3x-2=0$ ، أي أن $x=\frac{2}{3}$ ،

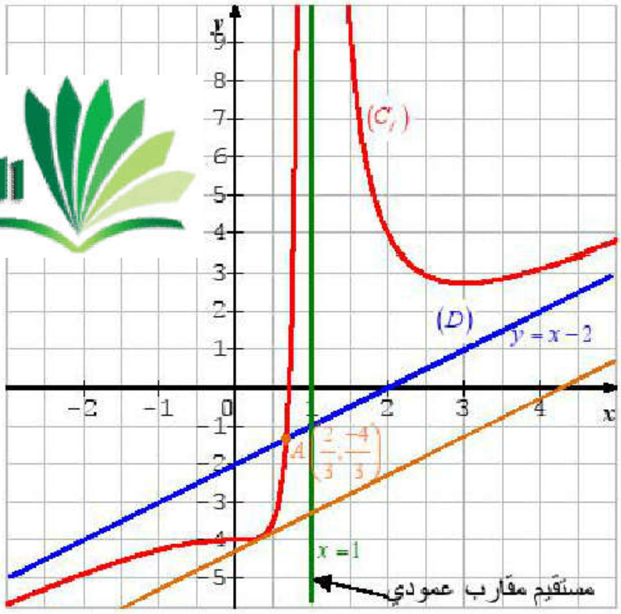
ومنه توجد نقطة تقاطع وحيدة و هي $A\left(\frac{2}{3};f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ ، ومنه $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$

إذن : لمّا $x \in \left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ ، $f(x)-y<0$ ، ومنه (C_f) يقع أسفل (D) .

و لمّا $x \in \left]\frac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$ ، $f(x)-y>0$ ، ومنه (C_f) يقع فوق (D) .

و لمّا $x=\frac{2}{3}$ ، (C_f) يتقاطع مع (D) في نقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$.

3) رسم (C_f) وَ (D) : (حيث تؤخذ الوحدة $1cm$ على (Ox) وَ $0,5cm$ على (Oy)) :



4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α على المجال $]-\infty;1[$:

من جدول التغيرات لدينا الدالة f رتيبة (متزايدة تمامًا) على المجال $]-\infty;1[$

- نتحقق أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)<0<\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$:

لدينا $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=+\infty$ ، وَ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، ومنه $-\infty<0<+\infty$ ، و هذا محقق.

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α على المجال $]-\infty;1[$.

- لدينا من منحنى الدالة f ، $\frac{2}{3}<\alpha<1$ ، أي $0,66<\alpha<1$.

5) الاستنتاج بيانيًا عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ ، حيث m وسيط حقيقي :

المعادلة $f(x)=x+m$ بيانيًا تعني نقط تقاطع $y=x+m$ مع (C_f)، وبما أنّ m وسيط حقيقي فهو متغير

إذن: لمّا $m\geq 0$ نجد $y=x+m$ و هذه معادلة لمستقيم يقطع (C_f) في نقطتين متمايزتين ويكون موازي للمستقيم المقارب $(D): y=x-2$ ، لأنه لهما نفس الميل (معامل التوجيه) الذي يساوي 1 .

ولمّا $m=-2$ نجد $y=x-2$ و هذه معادلة (D) حيث يقطع (C_f) في نقطة وحيدة هي $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$ ،

أي يوجد حل وحيد هو $\frac{2}{3}$.

و لمّا $m<-2$ نجد $y=x-m$ و هذه معادلة لمستقيم يمكن أن يقطع (C_f) في نقطتين متمايزتين ، كما يمكن أن يكون مماسًا للمنحنى (C_f) في نقطة وحيدة . (كما في التمثيل البياني أعلاه) .

ويمكن كذلك أن لا يقطع (C_f) في أي نقطة لمّا تكون m أصغر تمامًا من فاصلة نقطة التماس .

إذن : عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ لا يزيد عن حلين مختلفين (هذا بيانيًا) .

- تعيين معادلة للمماس : (C_f) لدينا معادلة المماس هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

لدينا ميل المماس يساوي 1 ، ومنه $f'(x)=1$ أي أنّ $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=1$ ، ومنه $x^2(x-3)=(x-1)^3$

و هذا يكافئ $x^3-3x^2=x^3-3x^2+3x-1$ أي أنّ $3x=1$ ، ومنه $x=\frac{1}{3}$.

لدينا $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{27}-\frac{4}{9}+\frac{8}{3}-4}{\frac{4}{9}}=\frac{1-12+72-108}{27}\times\frac{9}{4}=\frac{-47}{27}\times\frac{9}{4}=\frac{-47}{12}$

ومنه معادلة المماس هي $y=1\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{47}{12}$ أي أنّ $y=x-\frac{17}{4}$.

إذن : $m=-\frac{17}{4}$ ، و هي فاصلة النقطة الوحيدة للتماس بين (C_f) والمماس ، أي المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا وحيدًا لمّا $m=-\frac{17}{4}$.

ولمّا $m<-\frac{17}{4}$ المعادلة لا تقبل أي حل (يكون المستقيم $y=x+m$ أسفل (C_f)) .

ولمّا $-\frac{17}{4}<m<-2$ المعادلة تقبل حلّين ، (المستقيم $y=x+m$ يقطع (C_f) في نقطتين متمايزتين) .

6) أ) إثبات أنّ فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة (E) التالية : $(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$:

فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ معناه حلول المعادلة $f(x)=x+m$:

لدينا $f(x)=x+m$ معناه $\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=x+m$ ، ومنه وبضرب الطرفين في الوسطين نجد $x^3-4x^2+8x-4=x+m(x-1)^2$ ، ومنه $x^3-4x^2+8x-4=(x+m)(x^2-2x+1)$ أي أنّ $x^3-4x^2+8x-4=x^3-2x^2+x+mx^2-2mx+m$ ، ومنه $-2x^2-mx^2+2mx+7x-m-4=0$ أي أنّ $-(m+2)x^2+(2m+7)x-m-4=0$ ، و منه $(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$ و هي المعادلة (E)

أي أنّ حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي نفسها حلول المعادلة (E) .

وبما أنّ حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ ، فإن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$

ب) إيجاد حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) :

لدينا مميز (E) هو $\Delta=(2m+7)^2-4((m+2)(m+4))=4m^2+28m+49-4m^2-16m-8m-32=4m+17$

- ومنه لمّا $m=-2$ نجد بالتعويض في المعادلة (E) أنّ $-(-4+7)x+4-2=0$ ، ومنه $-3x=-2$ أي $x=\frac{2}{3}$ ، و هي فاصلة النقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$.
- لمّا $-\frac{17}{4}<m<-2$ نجد أن $\Delta>0$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين
- لمّا $m<-\frac{17}{4}$ نجد أنّ $\Delta<0$ ومنه المعادلة لا تقبل حلول .
- لمّا $m=-\frac{17}{4}$ نجد أنّ $\Delta=0$ و منه المعادلة (E) تقبل حل مضاعف (وحيد) .

- إذن: عدد حلول المعادلة (E) لا يزيد عن حلين مختلفين .

حل المسألة 112 ص36 و 37 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ ، وَ (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) إثبات أنّ الدالة f فرديـة :

لدينا من أجل كل x وَ $-x$ من D_f ، $f(-x)=-x-\frac{x}{\sqrt{(-x)^2-4}}=-\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)=-f(x)$

ومنه نستنتج أنّ الدالة f فرديـة ، (أي أنّ مبدأ المعلم مركز تناظر المنحنى (C)) .

2) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ ، ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\<}}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=-2+\frac{-2}{0^+}=-2+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\>}}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=2+\frac{2}{0^+}=2+(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

3) إثبات أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

معناه $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$

أي أنّ (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

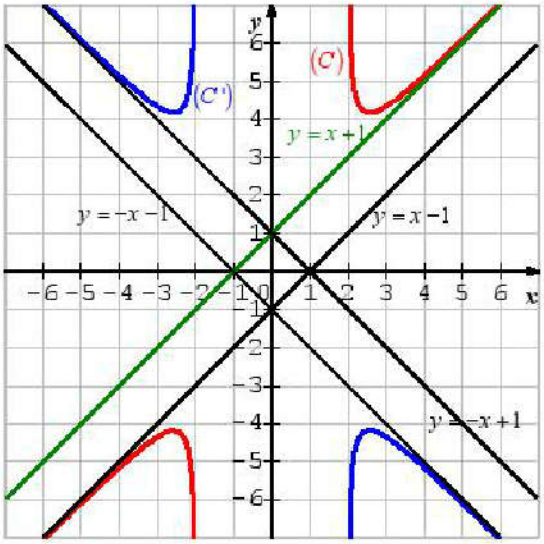
- تحديد وضعية (C) بالنسبة لـ(Δ) : لدينا $f(x)-y=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1$

ومنه لمّا $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1=0$ نجد $\sqrt{x^2-4}=x$ ، ومنه $x^2-4=x^2$ أي أنّ $-4=0$ و هذا مستحيل

و لدينا كذلك $\sqrt{x^2-4}\neq0$ أي أنّ $x^2\neq4$ ، ومنه $x\neq2$ وَ $x\neq-2$ أي أن $(C)\cap(\Delta)=\varnothing$

و منه لمّا $x\in]-\infty;-2[$ المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

ولمّا $x\in]2;+\infty[$ المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) .



4) استنتاج مستقيم مقارب مائل لـ(C) عند $-\infty$:

لدينا الدالة f فردية ، ومنه فإنها تقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر للمنحنى(C)، وبما أنّ $(\Delta): y=x+1$ مستقيم مقارب لها عند $+\infty$ فإنها تقبل أيضًا المستقيم $(\Delta'): y=x-1$ كمستقيم مقارب مائل عند $-\infty$

لأن $(\Delta'): y=x-1$ هو نظير $(\Delta): y=x+1$ بالنسبة للمبدأ.

5) تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى(C') ، حيث (C') منحنى الدالة g المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $g(x)=-f(x)$

هذا معناه أنّ (C') هو نظير (C) بالنسبة لمحور التراتيب ، ومنه فالمستقيمات المقاربة للمنحنى (C') تكون نظيرة للمستقيمات المقاربة للمنحنى(C)

أي أنّ المستقيمان $(\Gamma): y=-x+1$ وَ $(\Gamma): y=-x-1$ مقاربان للمنحنى (C') .

حل المسألة 113 ص 37 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$ ، وَ (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) أ) كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

لدينا من أجل كل $x\in D_f$، $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ;x+1\geq 0 \\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ;x+1<0 \end{cases}$ أي

و هذا يكافئ $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ;x\geq -1 \\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ;x<-1 \end{cases}$ ، أي $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ;x\in[-1;+\infty[\\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ;x\in]-\infty;-1[\end{cases}$

ب) دراسة نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ، ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x^3+x-x^2+1+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}[-x]=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-x+x^2-1+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$$

2) أ) حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها :

لدينا من أجل كل x من D_f الدالة المشتقة f' هي :

$$f'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[\\ -1+\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$

، أي :

$$f'(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[\\ -\left(1+\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) & ;x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$

- إشارة $f'(x)$:

لدينا على المجال $]-\infty;-1[$ ، $f'(x)=-\left(1+\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right)$ ، ومنه $f'(x)<0$.

ولدينا على المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ، $f'(x)=1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ ، ومنه لمّا $f'(x)\geq 0$ نجد $1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\geq 0$

ومنه $\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\leq 1$ ، أي $1+x^2\leq(x^2-1)^2$ ، ومنه $1+x^2\leq x^4-2x^2+1$ ، هذا يكافئ $x^4-3x^2\geq 0$

أي أنّ $x^2(x^2-3)\geq 0$ ، ومنه $x^2\geq 0$ أي $x=0$ ، وَ $x^2\geq 3$ أي $x=\sqrt{3}$ وَ $x=-\sqrt{3}$.

إذن لمّا $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;\sqrt{3}[$ نجد $f'(x)<0$ ، ومنه الدالة f متناقصة تمامًا على هذا المجال . لأنّ $x=-\sqrt{3}$ لاينتمي إلى المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

و لمّا $x\in]\sqrt{3};+\infty[$ نجد $f'(x)>0$ ، ومنه الدالة f متزايدة تمامًا على هذا المجال .

ب) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

3) أ) إثبات أنّ المستقيمين $(\Delta):y=x+1$ وَ $(\Delta'):y=-x-1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x-1+\dfrac{x}{x^2-1}-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

ومنه المستقيم $(\Delta'):y=-x-1$ مقارب مائل عند $-\infty$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+1+\dfrac{x}{x^2-1}-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

ومنه المستقيم $(\Delta):y=x+1$ مقارب مائل عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]1;+\infty[$ ، و بالنسبة إلى (Δ') على المجال $]-\infty;-1[$:

لدينا من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، $[f(x)-(\Delta)]=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}-(x+1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

ولدينا $\dfrac{x}{x^2-1}>0$ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، ومنه (C) يقع فوق (Δ) على المجال $]1;+\infty[$.

ولدينا كذلك من أجل كل $x \in]-\infty;-1[$ ، $[f(x)-(\Delta')] = -x-1+\frac{x}{x^2-1}-(-x-1) = \frac{x}{x^2-1}$

ومن أجل كل $x \in]-\infty;-1[$ لدينا $\frac{x}{x^2-1} < 0$ ، ومنه (C) يقع فوق (Δ') على المجال $]-\infty;-1[$.

4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا α على المجال $]-1;1[$:

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنّ $f(x)$ مستمرة و رتيبة تمامًا و تغير اشارتها على المجال $]-\infty;-1[$ ، ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدًا على المجال $]-1;1[$ حيث $f(\alpha)=0$.

إيجاد حصر للعدد α سعته 10^{-1} :

لدينا $\alpha \in]-1;1[$ وَ $f(0)=1$ ، لأن 0 هو منتصف المجال $]-1;1[$ ، ومنه الدالة f تغيّر إشارتها على المجال $]0;1[$ أي أنّ $\alpha \in]0;1[$.

و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ، لأن $\frac{1}{2}$ هو منتصف المجال $]0;1[$ ، ومنه الدالة f تغيّر إشارتها على المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$

أي أنّ $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

<u>إذن :</u> الحل الوحيد α للمعادلة $f(x)=0$ محصور بين $0,5$ وَ 1 .

<u>حل المسألة 114 ص 37 ج1 :</u>

نعتبر الدالتان f وَ g المعرفتان على المجموعة $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ وَ $g(x)=x-\sqrt{x^2-1}$ وَ C_f و C_g تمثيلاهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$:

1) أ) تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right] = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$$

ب) تعيين نهاية الدالة f عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\times\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right] = \frac{1}{-\infty} = 0$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (أي محور الفواصل) هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى C_f .

ج) إثبات أنّ المستقيم $(\Delta): y=2x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$:

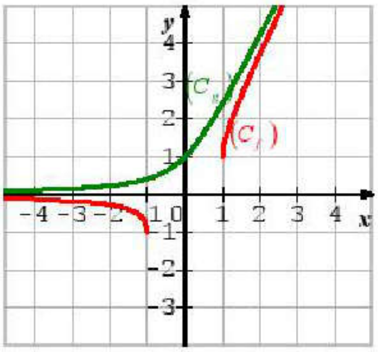
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\Delta)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right] = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

<u>إذن :</u> المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

2) أ) حساب $f(x)\times g(x)$ ، ثم استنتاج نهايات الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$f(x)\times g(x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=x^2-x^2+1=1$$



لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $f(x)\times g(x)=1$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty} f(x)\times \lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

ومنه نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

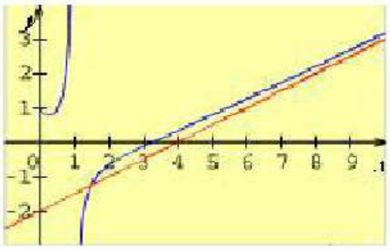
و لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)\times \lim_{x\to-\infty} g(x)=1$ ، ومنه نستنتج أنّ $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$.

ب) التفسير الهندسي لهذه النتيجة هو أنّ المنحنيان C_f و C_g متقاربان عند $-\infty$ و $+\infty$.

اختيار من متعدد :

حل التمرين 115 ص38 ج1 :

تعيين الإجابة الصحيحة دون تبرير :



في الشكل الموالي لدينا الرسم البياني (C_f) لدالة f معرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x-1)}$ و المستقيم Δ الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x-2$:

1) أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ (C_f) **(خطأ)**

ب) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ (C_f) **(صحيح)**

ج) (C_f) لا يقبل مستقيمًا مقاربًا أفقيًا و لا عموديًا **(خطأ)**

2) من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+a+\dfrac{bx+c}{2(x-1)}$:

أ) $a=-2$ ، $b=2$ ، $c=-3$ **(خطأ)**

ب) $a=2$ ، $b=-2$ ، $c=-3$ **(خطأ)**

ج) $a=1$ ، $b=2$ ، $c=3$ **(خطأ)**

3) (C_f) يقبل مستقيم مقارب عند $+\infty$ معادلته .

أ) $y=\dfrac{1}{2}x+1$ **(خطأ)** ، ب) $y=\dfrac{1}{2}x+2$ **(خطأ)** ، ج) $y=\dfrac{1}{2}x-2$ **(صحيح)**

4) أ) (C_f) يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ **(صحيح)**

ب) (C_f) يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$ **(خطأ)**

ج) (C_f) لا يقطع المستقيم المقارب في أية نقطة **(خطأ)**

5) على المجال $[0;1[$ المعادلة $f(x)=1$ تقبل :

أ) حلا واحد **(خطأ)** ، ب) حلين متمايزين **(صحيح)** ، ج) ثلاثة حلول **(خطأ)**

حل التمرين 116 ص38 ج1 :

f معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-5}$:

1) $\lim\limits_{x\to5} f(x)=-\infty$ **(صحيح)** 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ **(خطأ)**

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{5\}$: $f(x)=3x+10+\dfrac{50}{x-5}$ **(صحيح)**

4) المستقيمان اللذان معادلتهما $x=5$ و $y=3x+10$ مقاربان لمنحنى الدالة f **(صحيح)** .

صحيح أم خاطئ :

حل التمرين 117 ص38 ج1 :

لدينا جدول تغيرات دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	$\Vert$	0	
$f(x)$	$1 \nearrow$	$2 \searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow 3 \searrow$	$-\infty$

و (C_f) منحنى الدالة f الممثل في معلم :

1) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ (C_f) **(خطأ)** (المستقيم الذي معادلته $x=1$ يقطع (C_f))
2) محور التراتيب مقارب لـ (C_f) **(صحيح)**
3) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع (C_f) في نقطة واحدة **(خطأ)** (هذا المستقيم يقطع (C_f) في 4 نقاط)
4) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في المجال $]0;+\infty[$ **(صحيح)**
5) على المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)\leq 3$ **(خطأ)** (الصحيح هو على المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)\leq 2$) .

حل التمرين 118 ص38 ج1 :

f دالة مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $]0;+\infty[$ ، إذن :

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ **(صحيح)** (لأنّ الدالة f متناقصة)

ب) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)<f(0)$ **(صحيح)**

ج) منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل على الأقل في نقطة **(صحيح)** (لأن 0 ينتمي لمجموعة التعريف)

حل التمرين 119 ص38 ج1 :

(C_f) هو المنحنى الممثل لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد و متجانس ، وَ (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=1-x$:

1) إذا كان (Δ) مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **(خطأ)**
2) إذا كان (Δ) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ فلا يوجد مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) **(صحيح)**
3) إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ فلا يمكن لـ (Δ) أن يكون مقاربًا لـ (C_f) **(صحيح)**
4) إذا كان (Δ) مقاربًا لـ (C_f) عند $+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=1$ **(صحيح)**

حل التمرين 120 ص38 ج1 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ **(خطأ)** (الصحيح هو $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$)
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=1$ **(خطأ)**
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=1$ **(صحيح)**
4) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$ **(صحيح)**