سلسلة الرياضيات بالفيديو

هذا الكتاب مرفق بقرص تعليمي

المعاصر

محمد قداري

المغني في الرياضيات

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية

- أنشطة وتطبيقات محلولة بالفيديو .
- ملخصات هامة للدروس .
- 412 تمرين ومسألة محلولة .
- وضعيات إدماجية متنوعة و هادفة .
- تمارين ومسائل من بكالوريات أجنبية .
- الحلول المفصلة لمواضيع البكالوريا (المنهاج الجديد) .

BAC

وفق - البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية
- التوزيع السنوي المعتمد وطنيا

المعاصرة

تم تحميل الكتاب من موقع الدراسة الجزائري

www.eddirasa.com

المحور الخامس

الدوال اللوغرتمية

ما يجب أن يعرف

الدالة اللوغريتمية النيبيرية

1. الدالة اللوغرتمية النيبيرية :

اللوغاريتم النيبيري لعدد :

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$. يسمى هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز " $\ln a$ ".

لدينا : $b = \ln a$ و $e^b = a$ تكافئ $b = \ln a$

تعريف الدالة " ln " :

نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز " ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $x = e^y$ تعني $y = \ln x$.

ونقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " ln " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " exp ".

2) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$.

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^x) = x$.

4) بما أن $e^0 = 1$ فإن $\ln 1 = 0$ وبما أن $e^1 = e$ فإن $\ln e = 1$.

5) حساب بعض الصور :

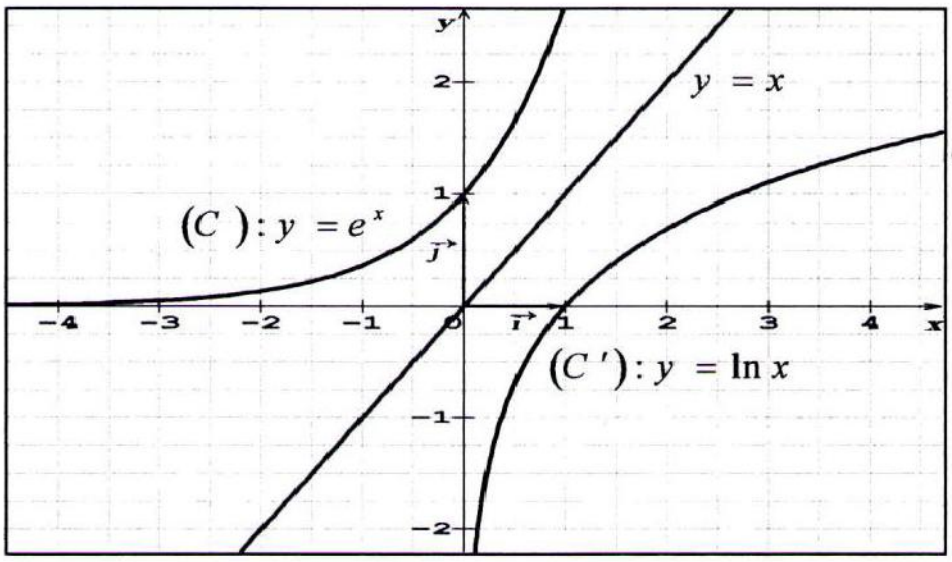
exp ←

y	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2
x	-1	0	1	2

→ ln

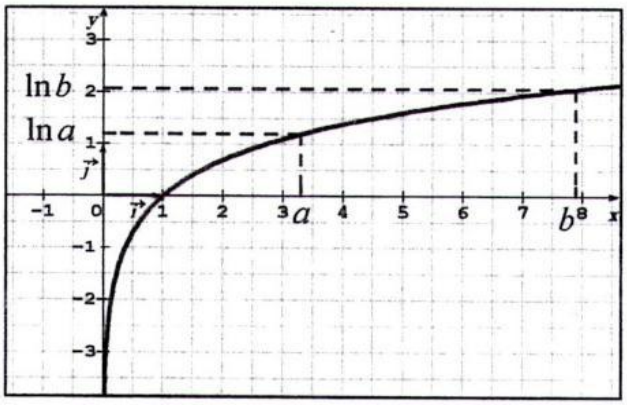
موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

خاصية: في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$



2 . اتجاه تغير الدالة " ln " :

خاصية: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.



نتائج: من أجل كل عددين a و b من $]0;+\infty[$:

1) $\ln a = \ln b$ يعني $a = b$.

2) $\ln a < \ln b$ يعني $a < b$.

3) $\ln a > 0$ يعني $a > 1$.

و $\ln a < 0$ يعني $0 < a < 1$.

كما أن $\ln 1 = 0$.

وبالتالي إشارة $\ln x$ هي كما في الجدول الموالي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

3 . حل معادلات و متراجحات بأشكال لوغرتمية :

نتائج : من أجل كل عبارتين جبريتين $u(x)$ و $v(x)$ ومن اتجاه تغير الدالة اللوغرتمية نستنتج القواعد التالية :

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

- $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ تكافئ $u(x) = v(x)$.
- $\ln[u(x)] > \ln[v(x)]$ تكافئ $u(x) > v(x)$.
- $\ln[u(x)] \geq 0$ تكافئ $u(x) \geq 1$ ، • $\ln[u(x)] \leq 0$ تكافئ $0 < u(x) \leq 1$.

الخاصية الأساسية و نتائجها

1. الخاصية الأساسية :

خاصية :من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

2 . نتائج :

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad \text{و} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b .$$

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما هكذا :من أجل كل أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ،.... a_n من $]0;+\infty[$: $\ln(a_1 a_2 .. a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n$.

نتيجة2: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ،

$\ln(a^n) = n \ln a$.

نتيجة3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$: $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$.

دراسة الدالة اللوغريتمية النيبيرية

1. النهايات :

مبرهنة: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و (2) $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} \ln x = -\infty$

2 . الاستمرارية و الاشتقاقية :

مبرهنة: الدالة $\ln$ مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3. جدول تغيرات الدالة $\ln$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$		$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- المنحني (C) الممثل للدالة $\ln$ يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1 = 0$.

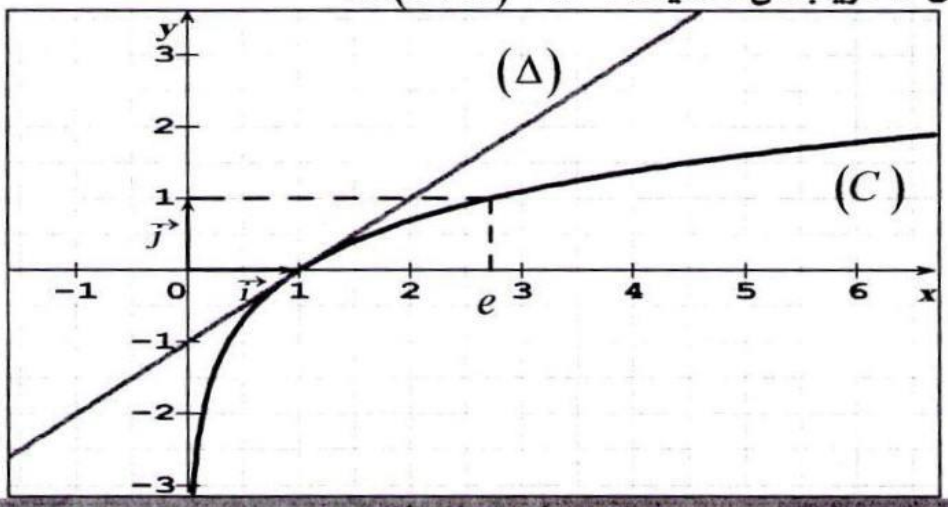
إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta): y = x-1$.

- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \ln'(1) = 1$

إذن : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ أو $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

نتيجة: الدالة $h \mapsto h$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $h \mapsto \ln(1+h)$ بجوار 0 .

أي من أجل h قريب من 0 لدينا: $\ln(1+h) \approx h$



دراسة الدالة $\ln ou$

1. النهايات:

لدراسة نهاية دالة $\ln ou$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة . بمعنى ، لحساب

النهاية : $\lim_{x\to a}\ln[u(x)]$ نتبع ما يلي :

إذا كان $\lim_{x\to a}u(x)=b$ و $\lim_{X\to b}\ln X=c$ فإن $\lim_{x\to a}\ln[u(x)]=c$.

حيث : a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

2 . اتجاه التغير: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln ou$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

3. المشتقة : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln ou$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I : $(\ln ou)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

دالة اللوغريتم العشري

1 . دالة اللوغريتم العشري:

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز " log " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

ملاحظة: $\log 1=0$ و $\log 10=1$.

2 . خواص :

خاصية1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $\log(ab)=\log a+\log b$.

نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة " ln " تبقى محققة من قبل الدالة " log " ومنه:

1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log a-\log b$.

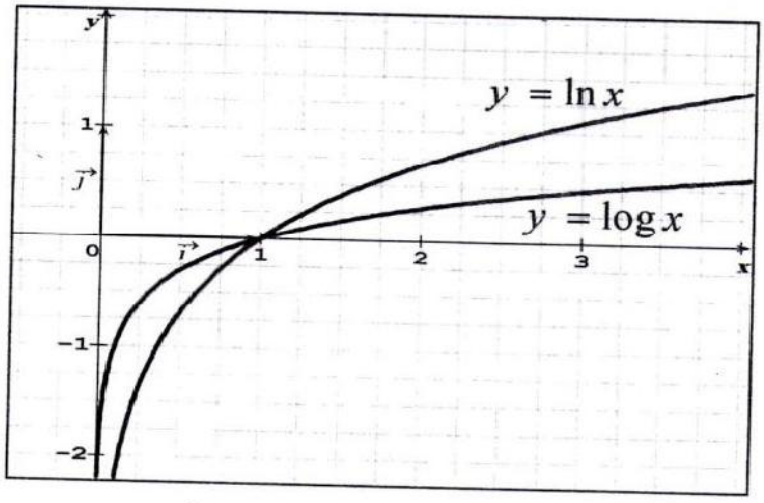
2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n :

$\log(a^n)=n\log a$.

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n : $\log(10^n)=n$ ، لأن $\log 10=1$.

خاصية2: الدالة " log " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n\le x\le 10^{n+1}$ فإن $n\le\log x\le n+1$



تمارين محلولة

تمرين 01

جد مجموعة تعريف كل دالة من الدالتين :

1) $f(x)=\ln(x-1)$. 2) $g(x)=\ln(x^2)$.

الحل

1) تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x-1>0$ أي $x>1$ و منه مجموعة تعريف f هي $]1;+\infty[$.

2) تكون g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ أي $x\neq 0$ و منه مجموعة تعريف g هي $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

تمرين 02

عين حسب قيم x إشارة $\ln(x-3)$ على المجال $]3;+\infty[$.

الحل

- $\ln(x-3)=0$ يعني $x-3=1$ أي $x=4$.
- $\ln(x-3)<0$ يعني $0<x-3<1$ أي $3<x<4$.
- $\ln(x-3)>0$ يعني $x-3>1$ أي $x>4$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

و منه إشارة $\ln(x-3)$ هي ملخصة في الجدول التالي:

x	3		4		$+\infty$
$\ln(x-3)$	‖	-	0	+	

تمرين 03

حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلات و المتراجحات التالية :

$\ln x+2=0$ (1) ، $\ln x-3<0$ (2)

$\ln(x+1)=2$ (3) ، $\ln(x-1)\geq -3$ (4)

الحل

1) مجموعة تعريف المعادلة (1) هي $D=]0;+\infty[$. ولدينا :

(1) تعني $\ln x=-2$ أي $\ln x=\ln e^{-2}$ أي $x=e^{-2}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\{e^{-2}\}$

2)مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]0;+\infty[$. ولدينا :

(2) تعني $\ln x<3$ أي $\ln x<\ln e^3$ أي $x<e^3$ و منه مجموعة الحلول هي :

$S=]0;e^3[$ أي $S=]-\infty;e^3[\cap]0;+\infty[$

3) مجموعة تعريف المعادلة (3) هي $D=]-1;+\infty[$. ولدينا :

(3) تعني $x+1=e^2$ أي $x=e^2-1$ ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{e^2-1\}$

4) مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]1;+\infty[$. ولدينا :

(4) تعني $x-1>e^{-3}$ أي $x>1+e^{-3}$ ومنه مجموعة الحلول هي $S=]1+e^{-3};+\infty[$

تمرين 04

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

1) بسط الأعداد التالية :

$a=\ln e^2$ ، $b=\ln e^{-3}$ ، $c=e^{\ln 6}$ ، $d=e^{\ln 2+\ln 3}$.

2) أكتب الأعداد التالية على أبسط شكل ممكن :

$a=\ln 14-\ln 7$ ، $b=\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{2}{5}$ ، $c=\frac{\ln 100}{\ln 10}$ ، $d=\ln 8-\ln 12+\ln 15$

$e=\ln 10000+\ln 0,01$ ، $f=\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)+\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

الحل

1) نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x=\ln e^x$ ومنه :

$a=\ln e^2=2\ln e=2$ و $b=\ln e^{-3}=-3\ln e=-3$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $x=e^{\ln x}$ ومنه : $c=e^{\ln 6}=6$

2) بتطبيق الخاصية الأساسية للدالة $\ln$ ونتائجها نجد أن :

$a=\ln 14-\ln 7=\ln\frac{14}{7}=\ln 2$ ، $b=\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{2}{5}=\ln\left(\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}\right)=\ln 1=0$

$c=\frac{\ln 100}{\ln 10}=\frac{\ln 10^2}{\ln 10}=\frac{2\ln 10}{\ln 10}=2$ ،

$d=\ln 8-\ln 12+\ln 15=\ln\frac{8}{12}+\ln 15=\ln\left(\frac{8}{12}\times 15\right)=\ln 10$

$e=\ln 10000+\ln 0,01=\ln 10^4+\ln 10^{-2}=\ln\left(10^4\times 10^{-2}\right)=\ln 10^2=2\ln 10$

$=2\left[\ln\left(2\times 5\right)\right]=2\ln 2+2\ln 5$

$f=\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)+\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)=\ln\left[\left(3-2\sqrt{2}\right)\times\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]=\ln\left(3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)=\ln 1=0$

تمرين 05

بسط العبارات التالية :

$A = \ln 2 + \ln\frac{1}{2} - \ln(e^{-2})$ ، $B = \ln(3^2) + \ln 3 - \ln\sqrt{3}$ ، $C = \frac{\ln(e^{-2})}{\ln(e^{-1})} - \ln 2e$ ،

$D = \ln 125 - \ln 81 - \ln\frac{3}{5} + 2\ln\sqrt{243}$ ، $E = \ln[(\sqrt{2}-1)^{142}] + \ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]$.

الحل

- $A = \ln 2 + \ln\frac{1}{2} - \ln(e^{-2}) = \ln 2 - \ln 2 - (-2\ln e) = 2$
- $B = \ln(3^2) + \ln 3 - \ln\sqrt{3} = 2\ln 3 + \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{5}{2}\ln 3$
- $C = \frac{\ln(e^{-2})}{\ln(e^{-1})} - \ln 2e = \frac{-2\ln e}{-\ln e} - (\ln 2 + \ln e) = 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2$
- $D = \ln 125 - \ln 81 - \ln\frac{3}{5} + 2\ln\sqrt{243} = \ln(5^3) - \ln(3^4) - (\ln 3 - \ln 5) + 2\frac{1}{2}\ln(3^5)$

$= 3\ln 5 - 4\ln 3 - \ln 3 + \ln 5 + 5\ln 3 = 4\ln 5$

- $E = \ln[(\sqrt{2}-1)^{142}] + \ln[(\sqrt{2}+1)^{142}] = 142\ln(\sqrt{2}-1) + 142\ln(\sqrt{2}+1)$

$= 142[\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1)] = 142\ln(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 142\ln 1 = 0$

تمرين 06

ليكن (T) مماس المنحنى (C) الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ عند النقطة $A(e;1)$.

1) عين معادلة للمماس (T).

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{e}x$.

احسب $f(e)$.

3) استنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس (T).

الحل

1) معادلة (T) هي: $y = \frac{1}{e}(x-e) + 1$ و منه $(T): y = \frac{1}{e}x$

2) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$.

بما أن $x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e - x$ وهكذا:

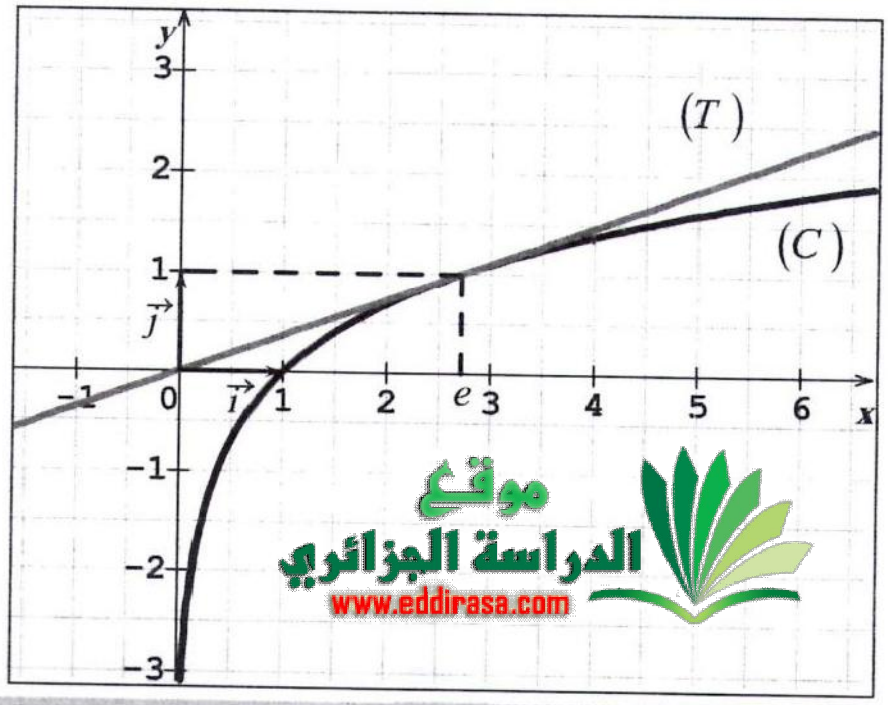
$f'(x) \geq 0$ من أجل $0 < x \leq e$ و $f'(x) < 0$ من أجل $x > e$.

$f(e) = 0$ هي القيمة الحدية العظمى للدالة f على $]0;+\infty[$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		0	

3) من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x) \leq 0$ أي من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$\ln(x) \leq \frac{1}{e}x$. نستنتج إذن أن المنحنى (C) يقع تحت المماس (T) على المجال $]0;+\infty[$.



تمرين 07

في كل مما يلي اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاثة المقترحة .

1 . التمثيل البياني للدالة اللوغرتمية يقبل مماسا معامل توجيهه 3 عند النقطة A ذات الإحداثيين: ج1) $(1;0)$ ، ج2) $(3;\ln e^3)$ ، ج3) $\left(\frac{1}{3};-\ln 3\right)$.

2 . نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)$ ، لدينا:

ج1) $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ، ج2) $f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ ، ج3) $f(x)=\ln(x^2+x)$.

3 . المماس لمنحنى الدالة اللوغرتمية عند النقطة ذات الفاصلة e يمر من :

ج1) النقطة $A(e;e)$ ، ج2) مبدأ المعلم ، ج3) النقطة $B(1;0)$.

الحل

1 . ج3) $\left(\frac{1}{3};-\ln 3\right)$:

التبرير: من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $\ln'(x)=3$ تكافئ $\frac{1}{x}=3$، أي: $x=\frac{1}{3}$

ولدينا: $\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$.

2. ج1) $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$:

التبرير: من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

3. ج2) مبدأ المعلم:

التبرير: معادلة المماس لمنحنى الدالة اللوغرتمية عند النقطة ذات الفاصلة e هي:

$y=\ln'(e)(x-e)+\ln(e)$، لدينا: $\ln(e)=1$ و $\ln'(e)=\frac{1}{e}$، إذن:

$y=\frac{1}{e}(x-e)+e$، أي: $y=\frac{1}{e}x$ هي معادلة لهذا المماس الذي يمر من المبدأ.

تمرين 08

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2X^2+4X-16=0$.

2) استنتج، في $\mathbb{R}$، حلول المعادلة: $2(\ln x)^2+4\ln x-16=0$.

3) استنتج، في $\mathbb{R}$، حلول المعادلة: $2\ln(x^2)+4\ln x-16=0$.

الحل

1) المعادلة: $2X^2+4X-16=0$ من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=16-4\times2\times(-16)=144$

تقبل حلين متمايزين: $X_1=\frac{-4-12}{4}=-4$، $X_2=\frac{-4+12}{4}=2$

2) من أجل كل $x>0$ نضع: $X=\ln x$، وبالتالي: $2(\ln x)^2+4\ln x-16=0$ تكافئ

$2X^2+4X-16=0$، فحسب السؤال 1) نجد: $X_1=-4$، $X_2=2$.

$X_1=-4$ تكافئ $\ln x_1=-4$، أي: $x_1=e^{-4}$.

$X_2=2$ تكافئ $\ln x_2=2$، أي: $x_2=e^2$.

إذن المعادلة $2(\ln x)^2+4\ln x-16=0$ تقبل حلين هما: $x_1=e^{-4}$، $x_2=e^2$.

3) من أجل كل $x>0$ لدينا:

$2\ln\left(x^2\right)+4\ln x-16=0$ تكافئ $4\ln x+4\ln x-16=0$، أي: $8\ln x=16$، أي:

$\ln x=2$، أي: $x=e^2$.

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا $x=e^2$.

تمرين 09

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة:

1) $f(x)=(\ln x)^2-6\ln x+5$.

2) $f(x)=2x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

3) $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

1) $f(x)=(\ln x)^2-6\ln x+5$.

لدينا : $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-6\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x-6}{x}$

2) $f(x)=2x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

لدينا : $f(x)=2x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=2x+\ln(x+1)-\ln x$ ومنه :

$$f'(x)=2+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{2x(x+1)+x-x-1}{x(x+1)}=\frac{2x^2+2x-1}{x(x+1)}$$

3) $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$.

لدينا : $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$ ، ومنه :

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{x-2x\ln x}{x^4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1-2\ln x}{x^3}$$
$$=\frac{1-2\ln x-x}{x^3}$$

تمرين 10

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x-1)$.

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفها.

الحل

• لدينا $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 1}}(x-1)=0^+$ وبما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 1}}\ln(x-1)=-\infty$

إذن : $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 1}}f(x)=-\infty$

• لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ وبما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تمرين 11

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

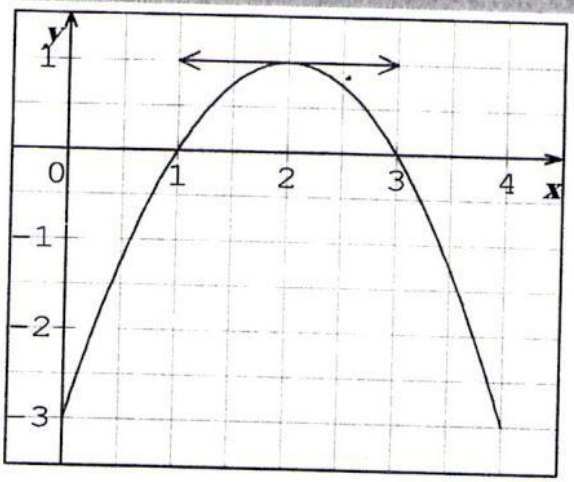
أدرس اتجاه تغير الدالة f.

الحل

نلاحظ أن $f=\ln ou$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $u(x)=\frac{1}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

تمرين 12



لتكن u دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;4]$ الشكل التالي هو التمثيل البياني للدالة u في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

المنحني يشمل النقط التي إحداثياتها $(3;-0)$ ، $(0;1)$ ، $(1;2)$ ، $(3;0)$ و $(4;-3)$ ويقبل في النقطة التي فاصلتها 2 مماسا يوازي محور الفواصل.

1) بدون تبرير :

أ/ شكل جدول تغيرات الدالة u ، مبينا إشارة u' .

ب / شكل جدولا تبين فيه إشارة الدالة u على $[0;4]$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f=\ln ou$ (مركب الدالة u متبوعة بالدالة $\ln$)

مبررا إجابتك ، اذكر إن كانت الخواص التالية صحيحة أو خاطئة :

أ/ f معرفة على $[0;4]$.

ب / f موجبة تماما على مجموعة تعريفها.

جـ / $f'(2)=0$.

د / المستقيم الذي معادلته : $x=1$ مقارب لمنحني الدالة f.

الحل

1) أ / جدول تغيرات الدالة u بإشارة u' :

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

x	0		2		4
$u'(x)$		+	0	−	
$u(x)$		↗	1	↘	
	−3				−3

ب / جدول إشارة الدالة u على $[0;4]$:

x	0		1		3		4
$u(x)$		−	0	+	0	−	

2) أ / خطأ : f معرفة معناه : $u(x)>0$ ، لكن : $u(x)>0$ من أجل $x \in]1;3[$ ، إذن :

f معرفة على المجال $]1;3[$.

ب / خطأ : من أجل $x \in]1;3[$ لدينا : $0<u(x)<1$ ، ومنه : $\ln[u(x)]<0$ ، إذن :

f سالبة تماما على المجال $]1;3[$.

جـ / صحيح : من أجل $x \in]1;3[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ، ومنه : $f'(2)=\dfrac{u'(2)}{u(2)}=\dfrac{0}{1}=0$.

د / صحيح : لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} u(x)=0^+$ و $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}} \ln X=-\infty$ ، ومنه : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} (\ln ou)(x)=-\infty$ ،

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=-\infty$ ، وبالتالي المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لمنحنى الدالة f

بجوار $-\infty$.

تمرين 13

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $f(x)=-(\ln x)^2+\ln x+2$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C) .

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أحسب $f'(x)$ ، حيث f' الدالة المشتقة للدالة f .

4) عين إشارة $f'(x)$.

5) أكتب جدول تغيرات الدالة f .

6) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ وفسر النتيجة هندسيا .

7) أنشئ المنحنى (C) .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

1) نعلم أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ كما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x)^2 = +\infty$ ومنه :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[-(\ln x)^2 + \ln x + 2\right] = -\infty$ ، وعليه المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

2) نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ كما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$ وبالتالي لدينا حالة عدم تعيين من الشكل : $(\infty - \infty)$ ، من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$f(x) = \ln x(-\ln x + 1) + 2$ ، وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\ln x + 1) = -\infty$

نجد هكذا : $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln x(-\ln x + 1) + 2] = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = -2(\ln x)' \ln x + (\ln x)' + 0$

ولكون: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ نجد هكذا : $f'(x) = -2\dfrac{1}{x}\ln x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2\ln x + 1}{x}$

4) إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة البسط $-2\ln x + 1$ لكون المقام $x > 0$.

- $-2\ln x + 1 = 0$ يكافئ $\ln x = \dfrac{1}{2}$ ، أي $x = e^{\frac{1}{2}}$ أي $x = \sqrt{e}$.
- $-2\ln x + 1 < 0$ يكافئ $\ln x > \dfrac{1}{2}$ ، أي $x > e^{\frac{1}{2}}$ أي $x > \sqrt{e}$.
- $-2\ln x + 1 > 0$ يكافئ $\ln x < \dfrac{1}{2}$ ، أي $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ أي $0 < x < \sqrt{e}$.

ومنه :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$-2\ln x + 1$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

5) جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\sqrt{e})$	↘	$-\infty$

حيث : $f\left(\sqrt{e}\right)=-\left(\ln\sqrt{e}\right)^2+\ln\sqrt{e}+2=\frac{9}{4}$ ، لأن : $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$.

6) المعادلة $f(x)=0$ تكافئ : $-\left(\ln x\right)^2+\ln x+2=0$.

بوضع : $y=\ln x$ مع $x>0$ نحصل على المعادلة $-y^2+y+2=0$ وهي من الدرجة الثانية تقبل حلين متمايزين هما : -1 و 2 .

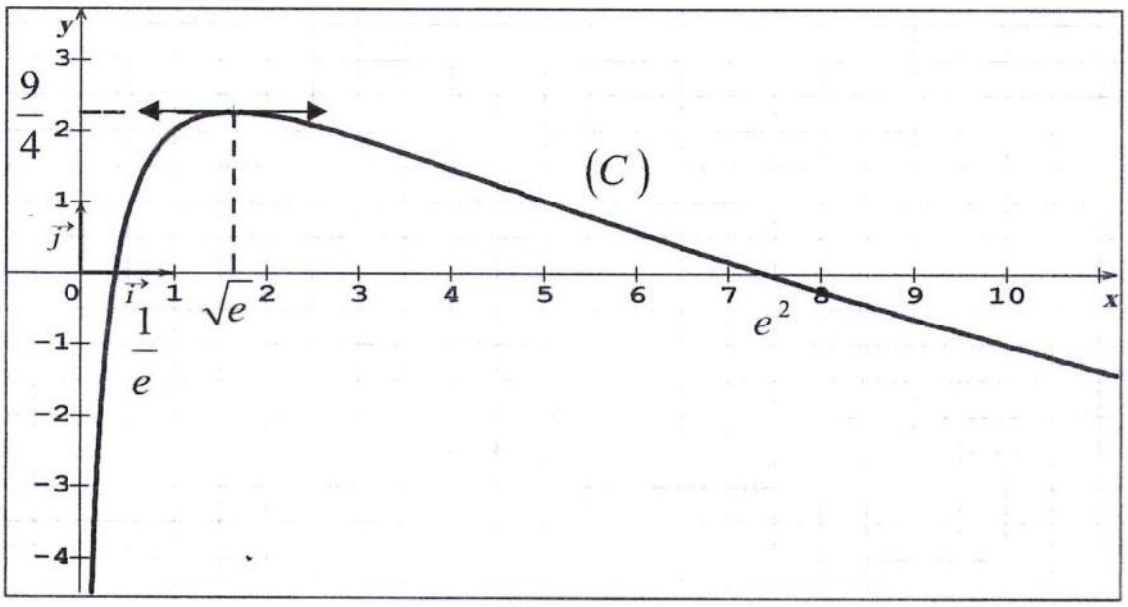
من أجل $y=-1$ نجد $\ln x=-1$ أي $x=e^{-1}$ أي $x=\frac{1}{e}$.

من أجل $y=2$ نجد $\ln x=2$ أي $x=e^2$.

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين هما $\frac{1}{e}$ و e^2 ،

وهندسيا المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين ذواتا الفاصلتين $\frac{1}{e}$ و e^2 .

7) المنحنى (C) :



تمرين 14

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;2]$ كما يلي : $f(x)=2x^2-3-\ln x$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(الوحدة $5cm$ على محور الفواصل و $2cm$ على محور التراتيب)

1) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C) .

2) أحسب $f'(x)$ ، حيث f' الدالة المشتقة للدالة f .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3) عين إشارة $f'(x)$.

4) أكتب جدول تغيرات الدالة f .

5) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

6) بين أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث :

$0<\alpha<0,25$ و $1,25<\beta<1,5$.

7) أنشئ (T) و (C).

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

1) لدينا : $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}(2x^2-3)=-3$. و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\ln x=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}(-\ln x)=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}f(x)=+\infty$. وهذا ما يدل أن المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

2) لدينا : $f'(x)=4x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{4x^2-1}{x}=\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x}$

3) إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $(2x-1)$ على المجال $]0;2]$ لأن $\dfrac{2x+1}{x}>0$ على المجال $]0;2]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

4) جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	$f(2)$

حيث : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{5}{2}$ و $f(2)=5-\ln 2$

5) كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

معادلة (T) هي من الشكل : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

حيث : $f(1)=-1$ و $f'(1)=3$ ومنه : $y=3(x-1)-1$ ، أي : $(T):y=3x-4$

6) ـ على المجال $]0;0,25[$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

و $f(0,25)\approx -1,488<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0;0,25[$.

ـ على المجال $]1,25;1,5[$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما وبما أن : $f(1,25)\approx -0,098<0$

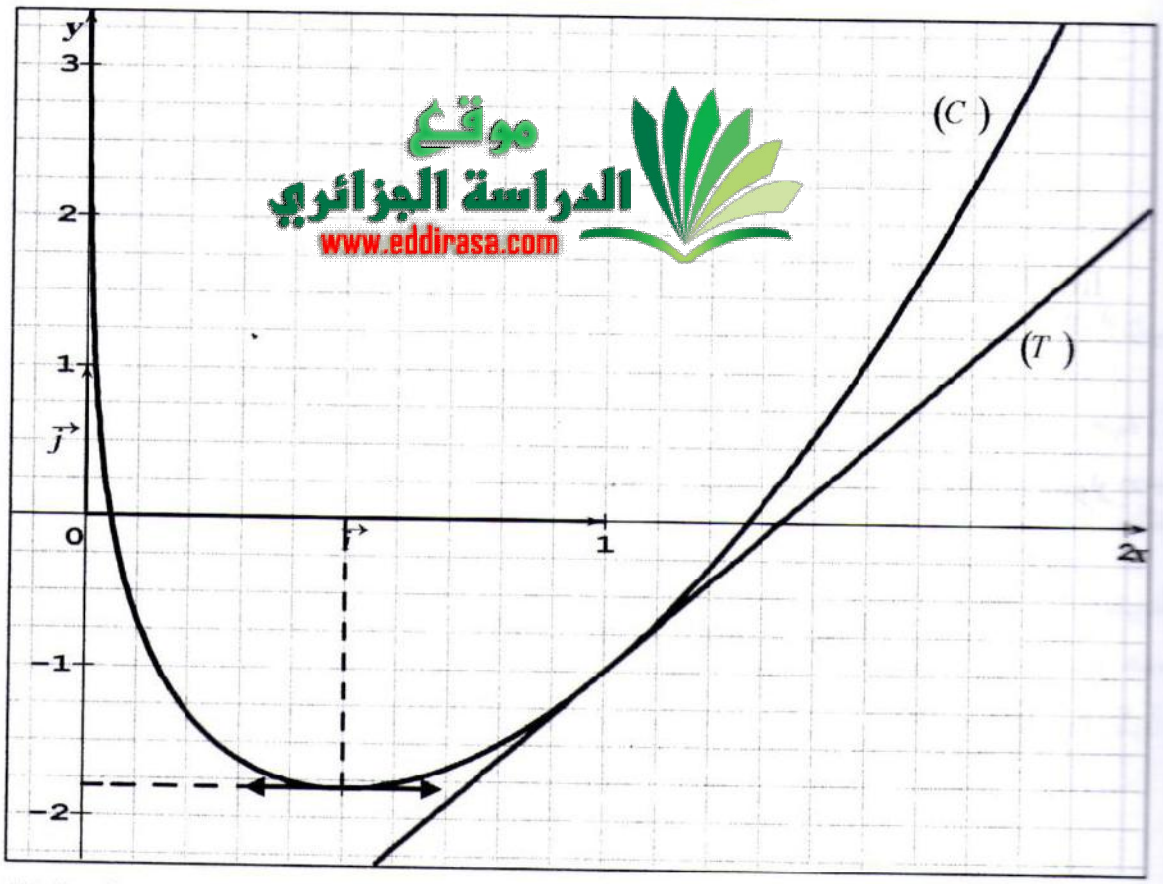
و $f(0,25)\approx 1,094>0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β ينتمي إلى المجال $]0;0,25[$. أي أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث :

$0<\alpha<0,25$ و $1,25<\beta<1,5$.

7) إنشاء (T) و (C).

(T) :

x	0	1
y	-4	-1



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 15

I) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-x^2+ax+b\ln(x+1)$
عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحني الممثل للدالة g يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين ذواتا الفاصلتين 0 و $\frac{3}{2}$.

II) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x^2+5x-5\ln(x+1)$
وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) أدرس نهاية الدالة f عند -1 ثم عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا عند -1.
2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3) بين أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α من المجال $[2,4;2,5]$.
4) أرسم (C).

الحل

I) المنحني الممثل للدالة g يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين ذواتا الفاصلتين 0 و $\frac{3}{2}$ معناه $g'(0)=0$ و $g'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ حيث: $g'(x)=-2x+a+\frac{b}{x+1}$

ومنه:

$$\begin{cases} g'(0)=0 \\ g'\left(\frac{3}{2}\right)=0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a+b=0 \\ -3+a+\frac{2b}{5}=0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a=5 \\ b=-5 \end{cases}.$$

ومنه: $g(x)=-x^2+5x-5\ln(x+1)$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

II) 1) • نهاية الدالة f عند -1:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}}(-x^2+5x)=-6$، ومن جهة $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}}(x+1)=0^+$ وبما أن $\lim\limits_{X\to 0^+}\ln X=-\infty$

فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}}\ln(x+1)=-\infty$ ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}}\left[-x^2+5x-5\ln(x+1)\right]=+\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}}f(x)=+\infty$. ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له $x=-1$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$

• نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+5x)=-\infty$، ومن جهة $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ وبما أن

$\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(x+1)=-\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^2+5x-5\ln(x+1)\right]=-\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2) لدينا : $f'(x) = -2x + 5 - \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x(-2x+3)}{x+1}$

بما أن $x + 1 > 0$ على المجال $]-1;+\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $x(-2x+3)$ الموضحة في الجدول التالي :

x	-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x(-2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

وبالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↘	$-\infty$

حيث : $f(0) = 0$ و $f\left(\frac{3}{2}\right) = -5\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{21}{4}$

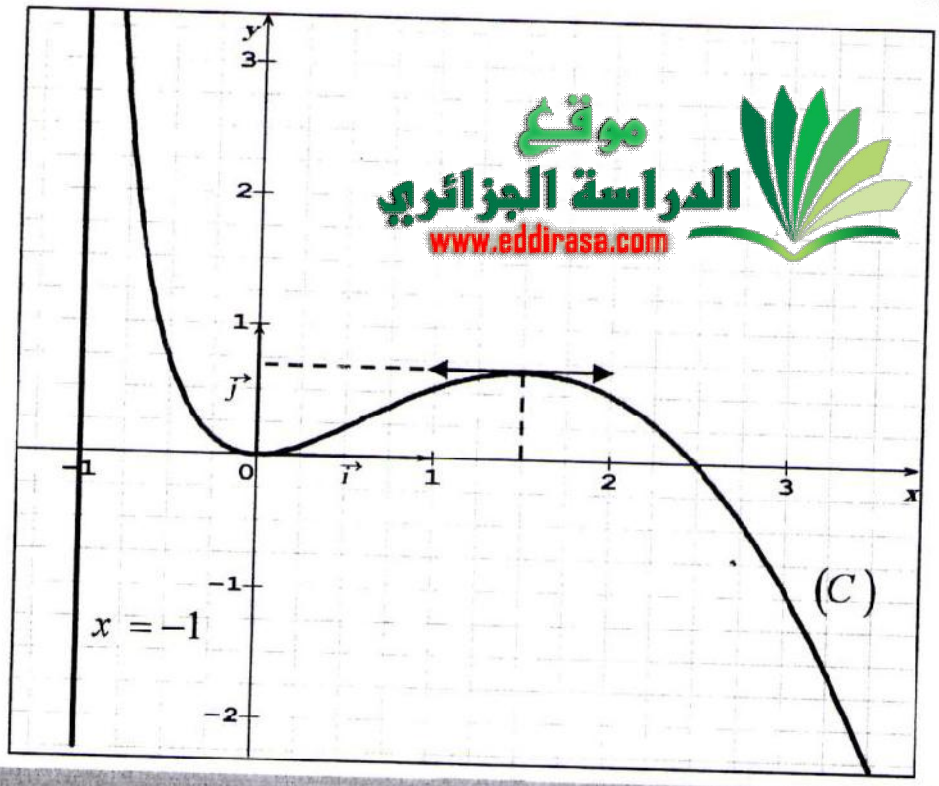
3) نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[2,4;2,5]$.

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[2,4;2,5]$ لأن : $[2,4;2,5] \subset \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

ولدينا : $f(2,4) \approx 0,121 > 0$ و $f(2,5) \approx -0,013 < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[2,4;2,5]$. أي أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α من المجال $[2,4;2,5]$.

4) رسم (C) :



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 16

f دالة معرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\ln(x^2-2x)$.

وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$) .

1) أ / أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة التعريف مبينا المستقيمات المقاربة .

ب / أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $x=1$ محور تناظر لـ (C) .

3) عين نقاط تقاطع (C) مع محور الفواصل .

4) أرسم (C) و (Δ) في نفس المعلم .

الحل

1) أ / • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x)=+\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2-2x)=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-2x)=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x \to 0^{<}} f(x)$: لدينا: $\lim\limits_{x \to 0^{<}} (x^2 - 2x) = 0^+$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X \to 0^{>}} \ln X = -\infty$ فإن:

$\lim\limits_{x \to 0^{<}} \ln(x^2 - 2x) = -\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x \to 0^{<}} f(x) = -\infty$ ، ونستنتج ان المستقيم الذي معادلة

له: $x = 0$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

• $\lim\limits_{x \to 2^{>}} f(x)$: لدينا: $\lim\limits_{x \to 2^{>}} (x^2 - 2x) = 0^+$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X \to 0^{>}} \ln X = -\infty$ فإن:

$\lim\limits_{x \to 2^{>}} \ln(x^2 - 2x) = -\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x \to 2^{>}} f(x) = -\infty$ ، ونستنتج ان المستقيم الذي معادلة

له: $x = 2$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

ب/ الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ ، $]2;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{x^2 - 2x} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $x - 1$ لأن المقام $x^2 - 2x$ موجب تماما على مجموعة تعريف

الدالة f ، بالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		‖				‖		↗ $+\infty$
		$-\infty$	‖				‖	$-\infty$	

(الجزء المظلل غير وارد في مجموعة التعريف)

2) من أجل $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ ، فإن $x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ ولدينا: $(2 \times 1 - x) \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

$$f(2-x) = \ln\left[(2-x)^2 - 2(2-x)\right] = \ln(4 - 4x + x^2 - 4 + 2x)$$

$$= \ln(x^2 - 2x) = f(x)$$

ومنه: المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x = 1$ محور تناظر لـ (C) .

3) نحل في المجموعة $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ معناه : $\ln(x^2 - 2x) = 0$ ، أي : $\ln(x^2 - 2x) = \ln 1$ ، أي: $x^2 - 2x = 1$ ، أي:

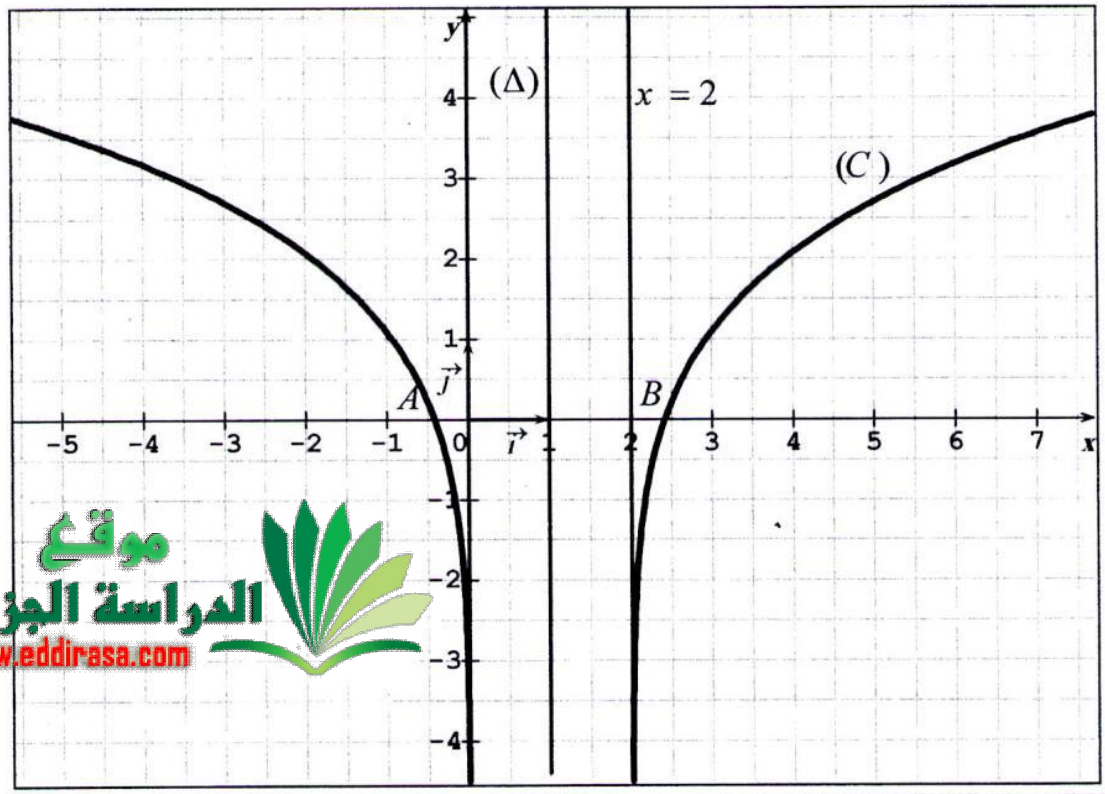
$x^2 - 2x - 1 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta = 8 > 0$ تقبل حلين متمايزين

هما: $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ ، $x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

إذن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(1-\sqrt{2};0)$ ، $B(1+\sqrt{2};0)$

4) الرسم:

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 17

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1;1[$ كما يلي : $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

وليكن (C) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(الوحدة $2cm$).

1) بين أن f دالة فردية.

2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أرسم (C) .

الحل

1) المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة إلى 0 ولدينا:

$f(-x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln\left(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\right)=-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$ ، إذن f دالة فردية

ويكفي دراستها على أحد المجالين $]-1;0]$ ، $[0;1[$ ، نختار المجال $[0;1[$.

2) • لدينا: $f(0)=\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right)=\ln 1=0$

• لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{0^+}=+\infty$ وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ ، فإن:

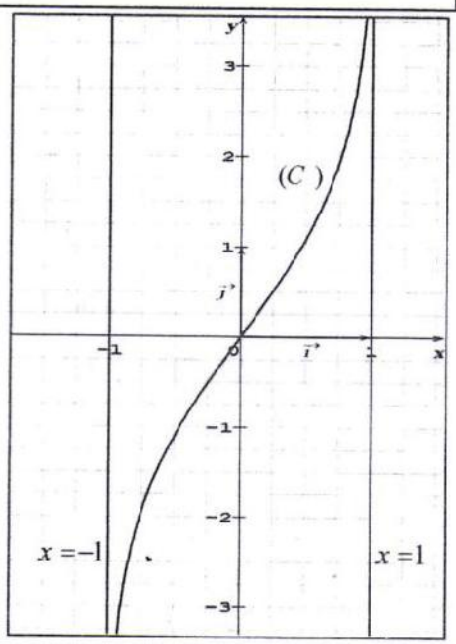
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}f(x)=+\infty$. ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له $x=1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

• الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;1[$ ولدينا: $f'(x)=\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{2}{(1-x)(1+x)}>0$ ، ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;1[$ ،ويكون جدول تغيراتها

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

3) نرسم المنحنى (C) على المجال $]0;1[$ ، ثم نتم الرسم على المجال $]-1;1[$ باستخدام التناظر بالنسبة إلى المبدأ O لكون الدالة f دالة فردية .



تمرين 18

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ و

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$ على محور و الفواصل و $0,5cm$ على محور التراتيب)

1) أدرس نهاية الدالة f عند 1 ثم عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا عند 1 .

2) بين أنه من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $f'(x)=-\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$ ثم استنتج اتجاه تغير f على $]1;+\infty[$ وشكل جدول تغيراتها.

3) أ / بين أن المستقيم (D) الذي معادلته له $y=-x+4$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

ب / أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (D) .

4) عين إحداثيي النقطة A من المنحنى (C) بحيث (Δ) المماس لـ (C) في A معامل توجيهه يساوي $-\dfrac{5}{3}$. ثم أكتب معادلة لـ (Δ).

5) بين أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[4,4;4,5]$.

6) أنشئ (D) ، (Δ) و (C) في نفس المعلم.

الحل

1) • $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$: لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(-x+4)=3$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ ،

وبما أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$

نستخلص أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[-x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]=+\infty$. إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$

ونستنتج ان المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+4)=-\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=1$ ، وبما أن : $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=0$.

نستخلص أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2) من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=-1+\frac{\dfrac{1\times(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2}}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}=-1+\frac{1\times(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}$$

$$= -1 + \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-(x-1)(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$$

x	1	$+\infty$
x^2+1	+	
$x+1$	+	
$x-1$	0 +	
$f'(x)$	−	

نستنتج أن من أجل $x > 1$ يكون : $f'(x) < 0$. إذن f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

- جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3) أ / إثبات أن المستقيم (D) الذي معادلة له $y = -x+4$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

لدينا من أجل $x > 1$: $f(x) - y = f(x) - (-x+4) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

وجدنا سابقا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+4)] = 0$

إذن :المستقيم (D) الذي معادلة له $y = -x+4$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

ب / لدراسة الوضع النسبي لـ (C) و (D) ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$ أي إشارة : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$. لأجل ذلك نقارن العدد $\frac{x+1}{x-1}$ بالعدد 1 من أجل $x > 1$.

لدينا من أجل $x > 1$: $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1} > 0$ ومنه : $\frac{x+1}{x-1} > 1$ ومنه : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$.

إذن : $f(x) - y > 0$. وبالتالي : (C) يقع تحت (D) على المجال $]1;+\infty[$.

4) لتعيين إحداثيي النقطة A من المنحنى (C) بحيث (Δ) المماس لـ (C) في A معامل توجيهه يساوي $-\frac{5}{3}$. نحل في المجال $]1;+\infty[$ المعادلة : $f'(x) = -\frac{5}{3}$.

$f'(x) = -\frac{5}{3}$ تكافئ $-\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = -\frac{5}{3}$ ، أي : $\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{3}$

أي : $\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{5}{3}=0$ ، أي : $\frac{3(x^2+1)-5(x-1)(x+1)}{3(x-1)(x+1)}=0$ ،

أي : $\frac{8-2x^2}{3(x-1)(x+1)}=0$ ، أي : $\frac{2(4-x^2)}{3(x-1)(x+1)}=0$ ، ومنه : $2(4-x^2)=0$

ومنه : $x=2$ أو $x=-2$ (مرفوض) ، إذن : $x=2$ فاصلة النقطة A ويكون ترتيبها :

$f(2)=-2+4+\ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right)$ ، أي : $f(2)=2+\ln 3$. إذن : $A(2;2+\ln 3)$.

ـ كتابة معادلة لـ (Δ) : معادلة (Δ) من الشكل : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ ، أي :

$y=-\frac{5}{3}(x-2)+2+\ln 3$ ، أي : $(\Delta): y=-\frac{5}{3}x+\frac{16}{3}+\ln 3$.

5) اثبات أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[4,4;4,5]$.

ـ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما . وبحاسبة نجد على المجال $[4,4;4,5]$:

$f(4,4)\approx 0,0626>0$ و $f(4,5)\approx -0,0480<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[4,4;4,5]$.

أي أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[4,4;4,5]$.

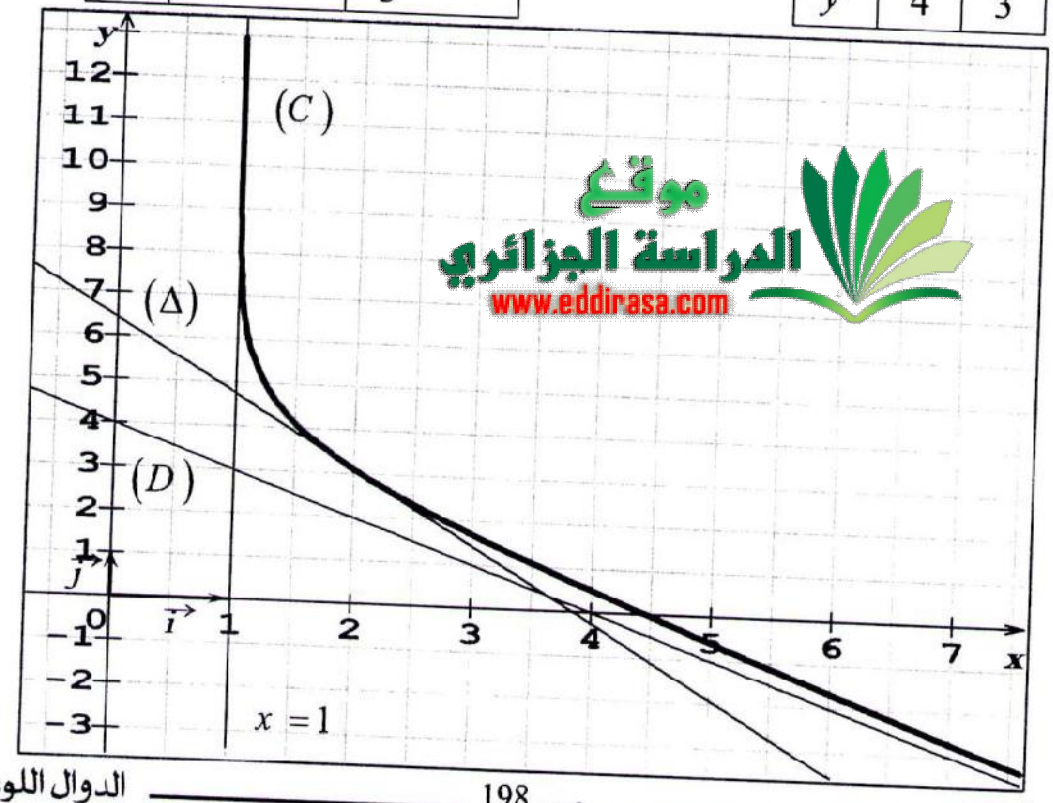
6) رسم : (D) ، (Δ) و (C) في نفس المعلم :

(Δ) :

x	0	1
y	$\frac{16}{3}+\ln 3$	$\frac{11}{3}+\ln 3$

(D) :

x	0	1
y	4	3



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 19

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\ln(e^x+4)$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$) .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

1) أ / أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و فسر النتيجة هندسيا .

ب / أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

جـ / عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ / بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=x+\ln(1+4e^{-x})$.

ب / استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

جـ / أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أرسم (C) ، (Δ) و (T) في نفس المعلم.

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=\frac{1}{5}x+m\ln 5$.

الحل

1) أ / لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+4)=4$ و $\lim\limits_{X\to 4}\ln X=\ln 4$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln 4$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته : $y=\ln 4$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

ب / لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+4)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

جـ / f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=\frac{(e^x+4)'}{e^x+4}=\frac{e^x}{e^x+4}>0$ ، ومنه : f متزايدة تماما $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\ln 4$	↗	$+\infty$

2) أ / من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا:

$$x+\ln(1+4e^{-x})=\ln e^x+\ln(1+4e^{-x})=\ln\left[e^x\times(1+4e^{-x})\right]=\ln(e^x+4)=f(x)$$

ب / من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $f(x)-x=\ln(1+4e^{-x})$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+4e^{-x})=1$ و $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=\ln 1=0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+4e^{-x})=0$ ، وبالتالي:

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ، إذن المستقيم: $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ):

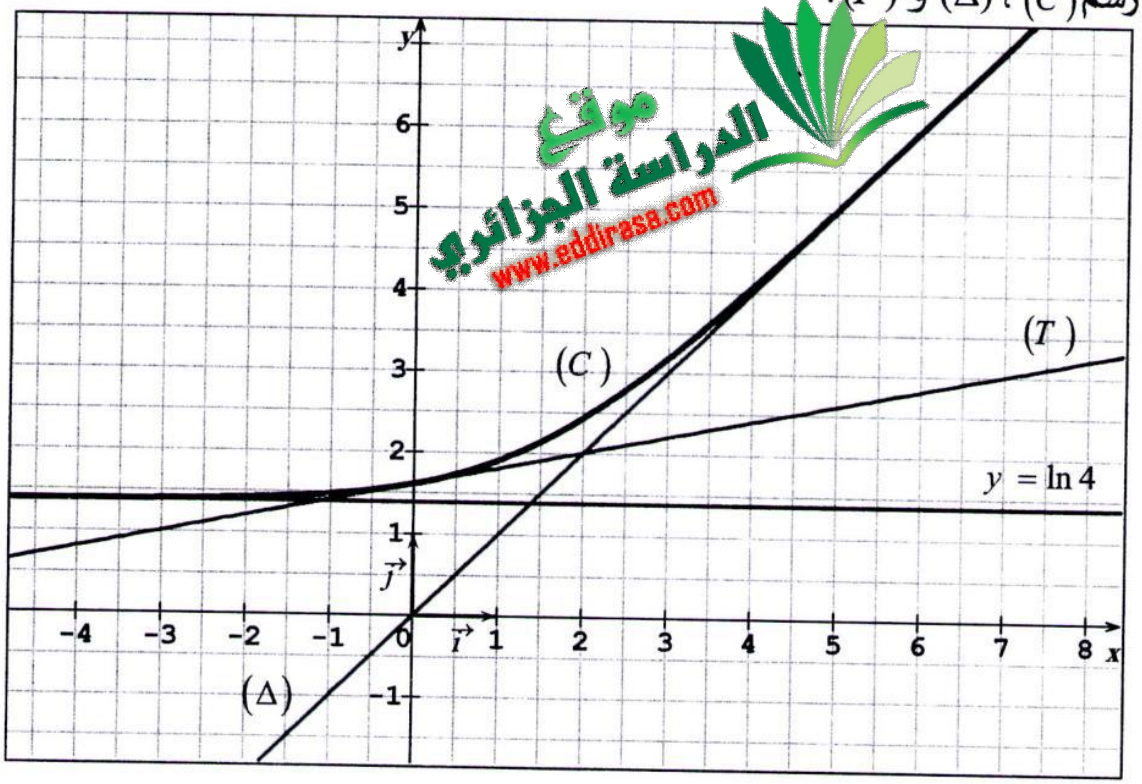
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا: $1+4e^{-x}>1$ ، ومنه: $\ln(1+4e^{-x})>0$ ،

إذن: $f(x)-x>0$ ، وبالتالي (C) يقع فوق (Δ) على $\mathbb{R}$.

3) معادلة (T) هي من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، حيث:

$f(0)=\ln(e^0+4)=\ln 5$ و $f'(0)=\dfrac{e^0}{e^0+4}=\dfrac{1}{5}$ ، ومنه: $y=\dfrac{1}{5}x+\ln 5$ هي معادلة لـ (T).

4) رسم (C) ، (Δ) و (T):



5) المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{5}x+m\ln 5 \ldots(*)$

نعتبر (Δ_m) المستقيم الذي معادلة له: $y=\dfrac{1}{5}x+m\ln 5$ ، إذن: حلول المعادلة $(*)$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (T_m) ، ونلاحظ أن (T_m) و (T) متوازيان لأن لهما نفس الميل $\dfrac{1}{5}$ ، وبالتالي المناقشة تتم كما يلي:

- إذا كان: $m\ln 5<\ln 5$ ، أي: $m<1$ فإن: (T_m) لا يقطع (C) وبالتالي المعادلة $(*)$ لا تقبل حلولا.
- إذا كان: $m\ln 5=\ln 5$ ، أي: $m=1$ فإن: (T_1) هو المماس (T) وبالتالي المعادلة $(*)$ تقبل

حلا وحيدا .

- إذا كان : $m \ln 5 > \ln 5$ ، أي: $m > 1$ فإن: (T_m) يقطع (C) في نقطتين متمايزتين وبالتالي المعادلة (*) تقبل حلين متمايزين .

تمرين 20

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 2 + 5\ln x$ ،

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

1) أ / أحسب النهاية : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

ب / أحسب النهاية : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[9;9,5]$.

4) أرسم المنحنى (C)

الحل

1) أ / لدينا: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2}{2} - 6x + 2\right) = 2$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} 5\ln x = -\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب / لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - 6x + 2\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} 5\ln x = +\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2x}{2} - 6 + \frac{5}{x} = x - 6 + \frac{5}{x} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $x^2 - 6x + 5$ الذي يقبل جذرين متمايزين هما: 1 و 5 ، نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		1		5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↗	$f(1)$	↘	$f(5)$	↗	$+\infty$ / $-\infty$

حيث: $f(1) = \frac{1}{2} - 6 + 2 + 5\ln 1 = -\frac{7}{2} = -3,5$

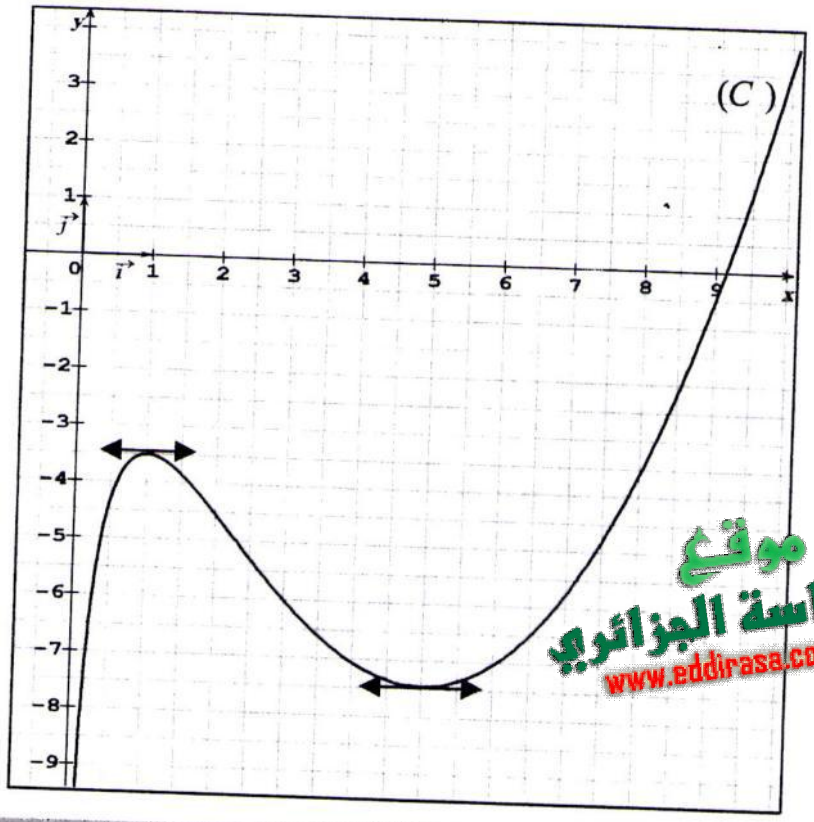
و: $f(5)=\frac{25}{2}-30+2+5\ln 5=-\frac{31}{2}+5\ln 5\approx 23,54$

3) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[9;9,5]$.

لدينا: $]5;+\infty[\supset[9;9,5]$ ومنه: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[9;9,5]$

وبما أن: $f(9)\approx -0,51<0$ و $f(9,5)\approx 1,38>0$، فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[9;9,5]$.

4) الرسم:



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 21

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(2x)-\ln(x+1)$، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة lcm)

1) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x)=\ln 2+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2) أ/ أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$، وفسر النتيجة بيانيا.

ب/ أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، وفسر النتيجة بيانيا.

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين A نقطة تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل.

5) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة 1.

6) أرسم (T) و المنحنى (C) .

7) عين العدد الحقيقي α بحيث المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي المستقيم الذي معادلة له: $y = x$.

الحل

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x) = \ln 2 + \ln x - \ln(x+1) = \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2) أ / لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 0^+$ وبما أن: $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln X = -\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب / لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 1$ وبما أن: $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$ ، فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = \ln 2$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} > 0$$ ، ومنه : f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$

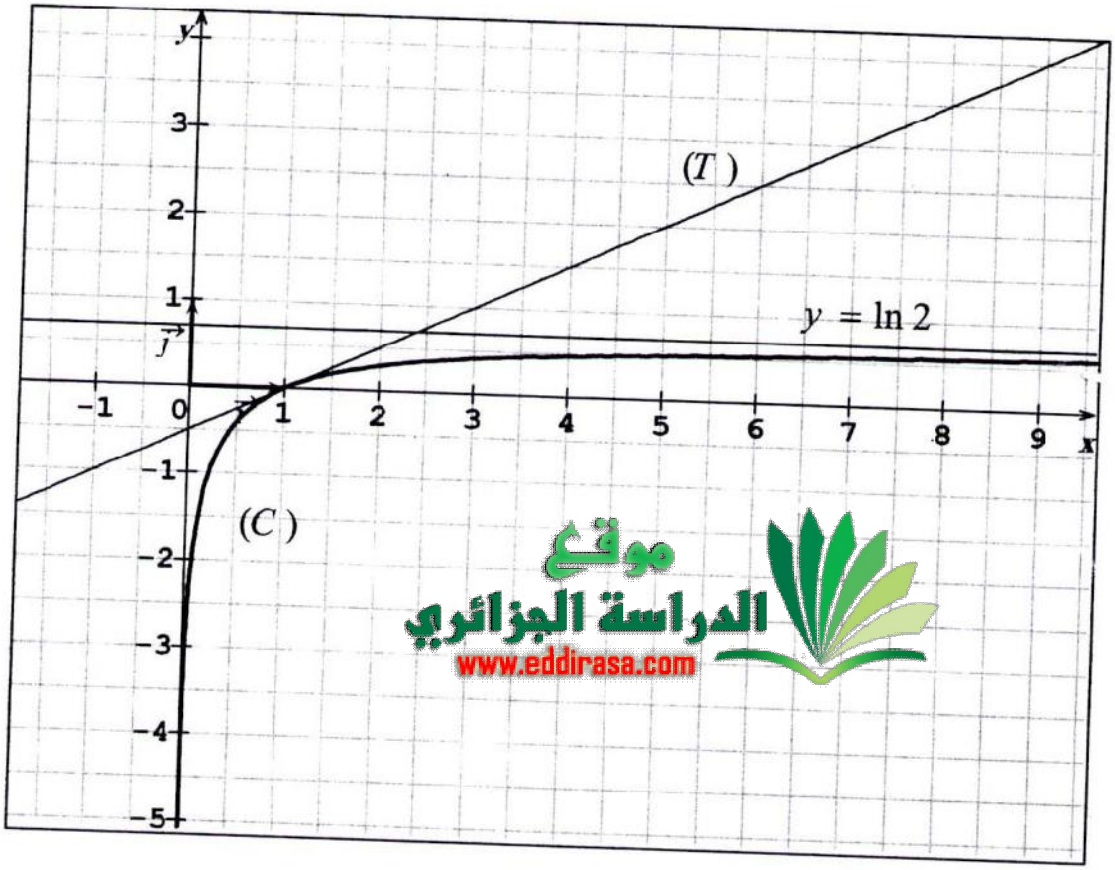
4) $f(x) = 0$ معناه $\ln(2x) - \ln(x+1) = 0$ ، أي: $\ln(2x) = \ln(x+1)$ ، أي: $2x = x+1$

أي: $x = 1$ ، ولدينا: $f(1) = \ln(2) - \ln(2) = 0$ ، ومنه: $A(1;0)$.

5) معادلة (T) هي من الشكل: $y = f'(x)(x-1) + f(1)$

لدينا: $f'(1) = \frac{1}{2}$ ، ومنه: $y = \frac{1}{2}(x-1) + 0$. إذن: $(T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

6) الرسم:



7) بما أن معامل توجيه المستقيم الذي معادلة له: $y = x$ هو 1 فإن العدد α هو حل المعادلة $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{1}{x(x+1)} = 1$ ، أي: $x(x+1) = 1$ ، أي: $x^2 + x - 1 = 0$ ، هذه الأخير معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta = 5$ تقبل حلين متمايزين هما:

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ، لكن $\alpha \in]0;+\infty[$ ، ومنه: $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

تمرين 22

f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة lcm)

1) أدرس استمرارية الدالة f عند العدد 0 .

2) أ / أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) .$$

ب / أحسب $g(0)$ ثم استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$:

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

$\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3}$.

جـ / بطريقة مماثلة بين أنه إذا كان $x \ge 0$ فإن : $\ln(1+x) \ge x - \frac{x^2}{2}$.

د / تحقق أنه إذا كان $x > 0$ فإن : $-\frac{1}{2} \le \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

هـ / استنتج أن f قابلة للإشتقاق عند العدد 0 ، و أن : $f'(0) = -\frac{1}{2}$

3) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$.

أ / أدرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارتها على المجال $]0;+\infty[$.

ب / بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

جـ / أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها . (نقبل أن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

4) أرسم المنحنى (C) .

الحل

1) لدينا : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$ ، ومنه : f مستمرة عند العدد 0 من اليمين . (تذكير : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$)

2) أ / الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2\right) = \frac{1 - 1 - x + x + x^2 - x^2 - x^3}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x} \le 0$$

ومنه g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب / لدينا : $g(0) = \ln(1+0) - \left(0 - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3}\right) = 0$ ، وبما أن متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$. نستنتج أن : من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $g(x) \le g(0)$ ، أي $g(x) \le 0$ ، ومنه : $\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \le 0$ ، إذن :

$$\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

جـ / نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $k(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

الدالة k تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$k'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \ge 0$$

ومنه k متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا: $k(0) = \ln(1+0) - 0 + \frac{0^2}{2} = 0$ ، وبما أن k متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نستنتج أن: من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $k(x) \ge k(0)$ ، أي: $k(x) \ge 0$ ، ومنه:

$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \ge 0$ ، إذن: $\ln(1+x) \ge x - \frac{x^2}{2}$

د / لدينا حسب ما سبق : $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

ومن أجل $x > 0$ نجد: $-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) - x \le -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ، ومنه:

$$\frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{x^2} \le \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{x^2}{2x^2}$$ ، ومنه: $-\frac{1}{2} \le \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

هـ / لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

وبما أن: $-\frac{1}{2} \le \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

نستنتج حسب مبرهنة النهايات بالحصر أن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

إذن: f قابلة للإشتقاق عند العدد 0 من اليمين ولدينا : $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$

3) أ / الدالة h تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} \le 0$ ، إذن : h متناقصة تماما على

المجال $]0;+\infty[$ ، ومن جهة لدينا: $h(0)=\frac{0}{0+1}-\ln(1+0)=0$ ، ومنه: $h(x)\le h(0)$ ،

أي: $h(x)\le 0$.

ب / من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}\times x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}\le 0$.

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جـ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، نستنتج ان المستقيم الذي معادلة له

$y=0$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

ويكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	1	$\searrow$ 0

4) رسم (C) :

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 23

f دالة معرفة المجال $]3;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(x+1)\ln(x-3)$.

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $0,5cm$)

1) تحقق أنه من أجل $x>3$ لدينا : $f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+\ln(x-3)$.

2) أ / أحسب $f''(x)$ حيث f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f' .

ب / استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]3;+\infty[$.

3) أ / أدرس نهايات f عند أطراف المجال $]3;+\infty[$.

ب / شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ/ عين نقطة تقاطع (C) مع محور الفواصل .

ب/ تأكد من وجود نقطة انعطاف للمنحني (C) .

جـ/ أرسم (C) .

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]3;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=(x+1)'\times\ln(x-3)+(x+1)\times\ln'(x-3)$$

$$=1\times\ln(x-3)+(x+1)\times\frac{1}{x-3}=\frac{x+1}{x-3}+\ln(x-3)$$

2) أ/ الدالة f' تقبل الاشتقاق على المجال $]3;+\infty[$ ولدينا:

$$f''(x)=\left(\frac{x+1}{x-3}\right)'+\ln'(x-3)=\frac{-4}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}=\frac{x-7}{(x-3)^2}$$

إشارة $f''(x)$ هي من إشارة $x-7$ على المجال $]3;+\infty[$ ، الموضحة في الجدول التالي:

x	3		7		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه: الدالة f' متناقصة تماما على المجال $]3;7]$ و متزايدة تماما على المجال $[7;+\infty[$.

ب/ نستنتج أن من اجل كل x من المجال $]3;+\infty[$: $f'(x)\geq f'(7)$ ، لكن:

$f'(7)=\frac{7+1}{7-3}+\ln(7-3)=4+\ln 4>0$ ، ومنه: $f'(x)>0$ وعليه f متزايدة تماما على المجال $]3;+\infty[$

3) ـ لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}(x-3)=0^+$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\overset{>}{\to}0}\ln X=-\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\ln(x-3)=-\infty$

وبما أن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}(x+1)=4>0$ ، فإن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}(x+1)\ln(x-3)=-\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}f(x)=-\infty$. نستنتج ان المستقيم الذي معادلة له: $x=3$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

ـ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-3)=+\infty$

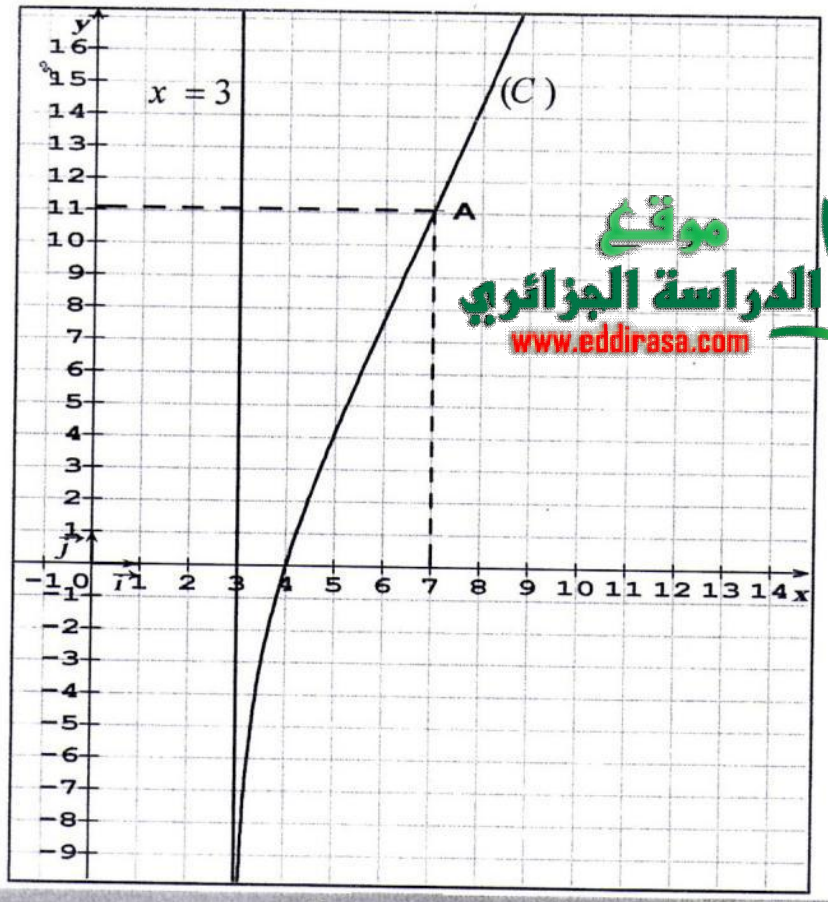
وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln(x-3)=+\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

x	3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

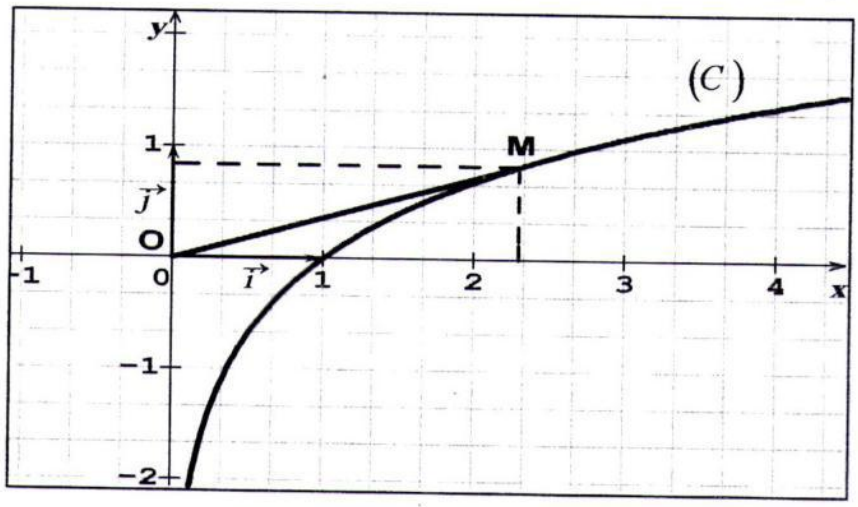
4) أ / نحل في المجال $]3;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$ ، لدينا: $f(x)=0$ معناه:
$(x+1)\ln(x-3)=0$ ، أي: $x+1=0$ أو $\ln(x-3)=0$ ، أي: $x=-1$ (مرفوض)
أو $x-3=1$ ومنه: $x=4$.إذن: (C) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيين $(4;0)$.
ب / من إشارة $f''(x)$ نلاحظ أن الدالة f' تنعدم عن العدد 7 مغيرة إشارتها إذن النقطة
$A(7;f(7))$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C).
حيث: $f(7)=(7+1)\ln(7-3)=8\ln 4=16\ln 2$
جـ / الرسم:



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 24

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$.
نهدف إلى تعيين (إن وجدت) نقط المنحني (C) الأقرب إلى O .



1) أحسب بدلالة x المسافة OM حيث M نقطة كيفية من (C) .

2) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+\ln x$.

أ / أدرس تغيرات الدالة g .

ب/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ثم برر أن : $\alpha \in]0,6;0,7[$.

جـ / حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x^2+(\ln x)^2$.

- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) حل المسألة المطروحة.

الحل

1) لدينا $M(x;y)$ حيث : $y=\ln x$ ومنه : $M(x;\ln x)$ ولدينا من جهة :

$OM=\sqrt{x^2+y^2}$ ومنه $OM=\sqrt{x^2+(\ln x)^2}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) أ / دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات :

لدينا : $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(x^2+\ln x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)=+\infty$

- اتجاه التغير :

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$.

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

- جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ب/ لدينا :

- الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وبما أن $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$.

بما أن $]0;+\infty[\supset]0,6;0,7[$ وبحاسبة نجد : $g(0,6)\approx -0,15<0$ و $g(0,7)\approx 0,13>0$ نستنتج أن $\alpha \in]0,6;0,7[$.

جـ / تحديد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3) دراسة تغيرات الدالة f :

- النهايات :

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2+(\ln x)^2\right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left[x^2+(\ln x)^2\right] = +\infty$$

- اتجاه التغير : الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x) = 2x + 2\times\frac{1}{x}\times\ln x = \frac{2}{x}\left(x^2+\ln x\right) \quad ، \quad f'(x) = \frac{2}{x}g(x) \quad : \text{أي}$$

لكون $\frac{2}{x} > 0$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) حل المسألة : نلاحظ أن : $OM = \sqrt{x^2+(\ln x)^2} = \sqrt{f(x)}$

الدالة f قيمة حدية صغرى هي $f(\alpha)$ ، ومنه أصغر مسافة OM هي $\sqrt{f(\alpha)}$.

حيث : $\alpha \in]0,6;0,7[$ وتكون أقرب نقطة M من المنحنى (C) إلى المبدأ O هي النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha;\ln\alpha)$.

تمرين 25

1) نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x - 3 + \ln x$$

أ / ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب / بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]2,20;2,21[$.

جـ / استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)$. وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$).

أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

جـ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د/ بين أن: $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ طوله 10^{-2} .

هـ/ أنشئ جدول تغيرات الدالة f.

و/ حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ ثم فسر ذلك بيانيا .

ي/ أنشئ (C).

الحل

1) أ/ الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$g'(x)=(x-3)'+\ln' x=1+\frac{1}{x}>0$ ، ومنه g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2,20;2,21[$ وبما أن:

$g(2,20)\approx -0,011<0$ و $g(2,21)\approx 0,002>0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]2,20;2,21[$ ، يحقق: $g(\alpha)=0$

جـ/ إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ موضحة في الجدول الموالي:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2) أ/ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'\times(-2+\ln x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times(-2+\ln x)'$$

$$=\frac{1}{x^2}\times(-2+\ln x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}=\frac{-2+\ln x}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{x-3+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ، كما يلي:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب / لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(-2+\ln x)=-\infty$ ،

ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)=+\infty$ ، ونستنتج أن المستقيم الذي معادلته له: $x=0$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

جـ / لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1>0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2+\ln x)=+\infty$ ،

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

د / لدينا: $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-2+\ln\alpha)$...(*) ، ومن جهة لدينا: $g(\alpha)=0$ ، أي:

$\alpha-3+\ln\alpha=0$ ، ومنه: $\ln\alpha=-\alpha+3$ ، بتعويض: $\ln\alpha=-\alpha+3$ في المساواة (*) نجد:

$$f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-2-\alpha+3)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\times(1-\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$ طوله 2×10^{-2} :

لدينا: $2,20<\alpha<2,21$ ومنه: $1,20<\alpha-1<1,21$ ومنه: $1,44<(\alpha-1)^2<1,46$.

ومنه: $\frac{1,44}{2,21}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{1,44}{2,20}$ ، أي: $0,65<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<0,66$ ، ومنه:

$-0,66<-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<-0,65$ ، إذن: $-0,66<f(\alpha)<-0,65$. وهو حصر لـ $f(\alpha)$ طوله 10^{-2} .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

هـ / جدول تغيرات الدالة f :

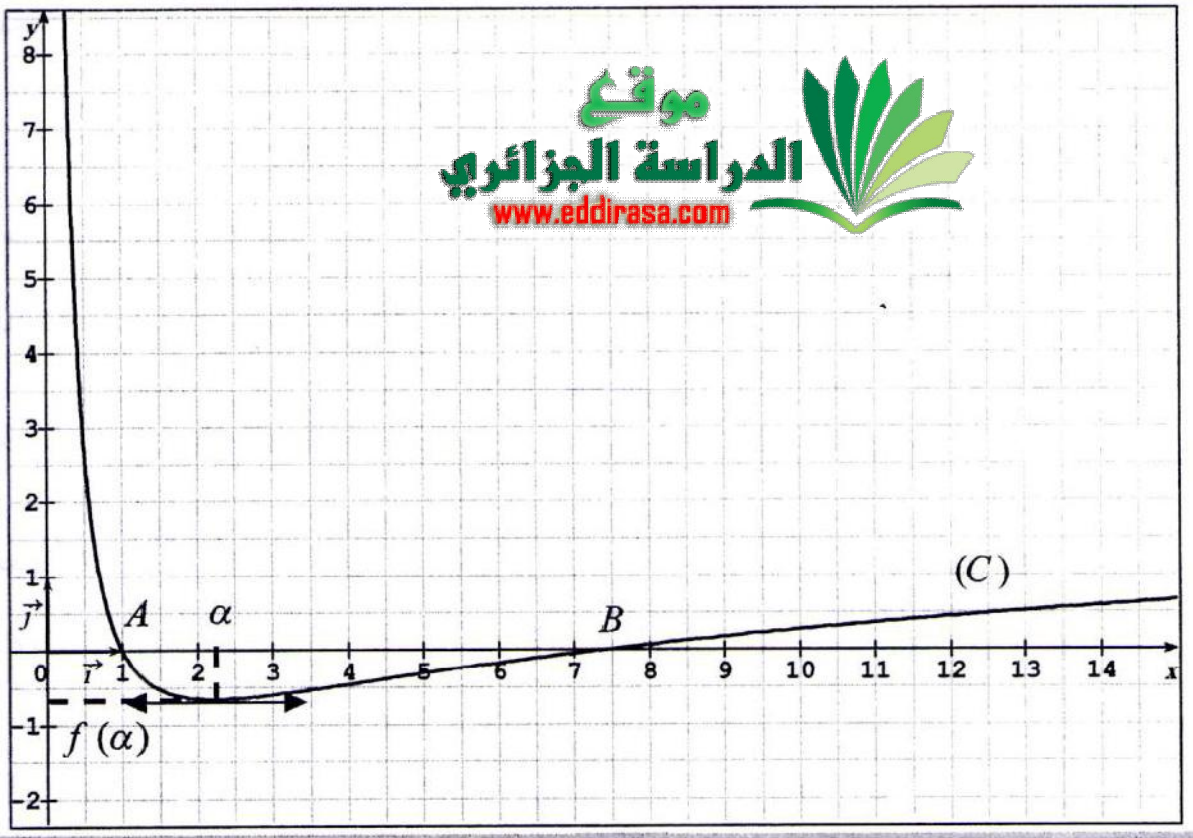
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

و / $f(x)=0$ معناه: $\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)=0$ ، ومنه: $1-\frac{1}{x}=0$ أو $-2+\ln x=0$

أي: $x=1$ أو $x=e^2$ ،

وهذا يعني أن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(1;0)$ ، $B(e^2;0)$.

ي / الرسم:



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمرين 26

حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$\log x=3$ (1) ، $\log x\le -2$ (2) ، $\log x>4$ (3)

الحل

1) تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x=3$ تعني $\log x=\log\left(10^3\right)$ أي $x=10^3$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\left\{10^3\right\}$.

2) تكون المتراجحة (2) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x\le -2$ تعني $\log x\le \log\left(10^{-2}\right)$ وبما أن الدالة $\log$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $0<x\le 10^{-2}$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\left]0;10^{-2}\right]$.

3) تكون المتراجحة (3) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x>4$ تعني $\log x>\log\left(10^4\right)$ وبما أن الدالة $\log$ متزايدة تماما على

المجال $]0;+\infty[$ فإن $x > 10^4$. إذن مجموعة الحلول هي: $]10^4;+\infty[$ $S =$.

تمرين 27

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

كم هو عدد أرقام العدد : 2007^{2008} ؟.

الحل

لدينا : $\log\left(2007^{2008}\right) = 2008\log(2007)$.

ثم بالحاسبة نجد : $2008\log(2007) = 6631,515124$ ومنه نحصل على الحصر التالي :

$6631 < \log\left(2007^{2008}\right) < 6632$. وبما أنه من اجل كل عدد صحيح نسبي n :

$n = \log 10^n$ فإن : $6631 = \log 10^{6631}$ و $6632 = \log 10^{6632}$.

ومنه: $6631 < \log\left(2007^{2008}\right) < 6632$ تعني $\log\left(10^{6631}\right) < \log\left(2007^{2008}\right) < \log\left(10^{6632}\right)$

أي : $10^{6631} < 2007^{2008} < 10^{6632}$ ، أي : $\underbrace{1000...00000}_{6631 \text{ صفرا}} < 2007^{2008} < \underbrace{1000...00000}_{6632 \text{ صفرا}}$

وبالتالي العدد 2007^{2008} يتألف من 6632 رقما .

تمرين 28

تقاس حمضية محلول بـ الـ PH حيث : $PH = -\log\left[H_3O^+\right]$ و $\left[H_3O^+\right]$ يمثل تركيز المحلول بأيونات H_3O^+ (عدد المولات في اللتر) .

- ملصقة على ماء معدني تدل $PH = 6,3$. أحسب تركيز أيونات H_3O^+ في هذا الماء .

الحل

لدينا : $PH = -\log\left[H_3O^+\right]$ ومنه : $6,3 = -\log\left[H_3O^+\right]$

أي : $-6,3 = \log\left[H_3O^+\right]$ ، أي : $\left[H_3O^+\right] = 10^{-6,3}\, moles$.

تمرين 29

الحجم M لزلزال شدته I يقاس على سلم "ريشتر" بـ : $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ حيث I_0 يمثل الشدة المرجعية .

- أحسب حجم زلزال 1971 في مدينة "لوس أنجلس" بالولايات المتحدة الأمريكية علما أن : $\left(I = 50,01\times 10^6 I_0\right)$.

الحل

لدينا : $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ومنه : $M = \log\left(\frac{50,01\times 10^6 I}{I_0}\right)$ ، أي :

$M = \log\left(50,01\times 10^{6}\right)$ ، ومنه : $M \approx 7,70$.

تمرين 30

الشدة l (الوحدة $décibels$) لصوة استطاعته p يعطى بـ : $l = 10\log\left(\frac{p}{p_0}\right)$ حيث

p_0 يمثل عتبة امكانية السمعية .

ـ أحسب الشدة لحوار سمعي عادي $\left(p = 10^5 p_0\right)$.

الحل

لدينا : $l = 10\log\left(\frac{p}{p_0}\right)$ ومنه : $l = 10\log\left(\frac{10^5 p_0}{p_0}\right)$ ، أي : $l = 10\log\left(10^5\right)$

ومنه : $l = 5\times 10\log(10) = 50$.

تمرين 31

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(x) = \dfrac{1+\log_{\frac{1}{2}}(x)}{x}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الوحدة lcm) .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

1) أ / أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

ب / أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا. (نقبل أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$)

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عين نقاط تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل.

4) أرسم (C).

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x) = \frac{1+\frac{\ln x}{\ln 2}}{x} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = \left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x\ln 2}\right)$$

1) أ / لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^{>}}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^{>}}\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = -\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to 0^{>}}\frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = -\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x) = -\infty$ ، ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له: $x = 0$ مقارب لـ (C)

بجوار $-\infty$.

ب / لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\ln 2}=0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x\ln 2}\right)=0$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، ونستنتج أن المستقيم الذي معادلته له: $y=0$ مقارب لـ (C) بجوار عند $+\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\left[\frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)\right]'=\left(\frac{1}{x}\right)'\times\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\times\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)'$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\times\left(\frac{1}{x\ln 2}\right)=\left(\frac{1}{x^2\ln 2}\right)\times(1-\ln 2-\ln x)$$

إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $1-\ln 2-\ln x$.

- $1-\ln 2-\ln x=0$ معناه: $\ln x=1-\ln 2$ ، أي: $x=\frac{e}{2}$. $x=e^{1-\ln 2}=e\times e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{e}{2}$
- $1-\ln 2-\ln x<0$ معناه: $\ln x>1-\ln 2$ ، أي: $x>\frac{e}{2}$.
- $1-\ln 2-\ln x>0$ معناه: $\ln x<1-\ln 2$ ، أي: $x<\frac{e}{2}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{e\ln 2}$	↘	0

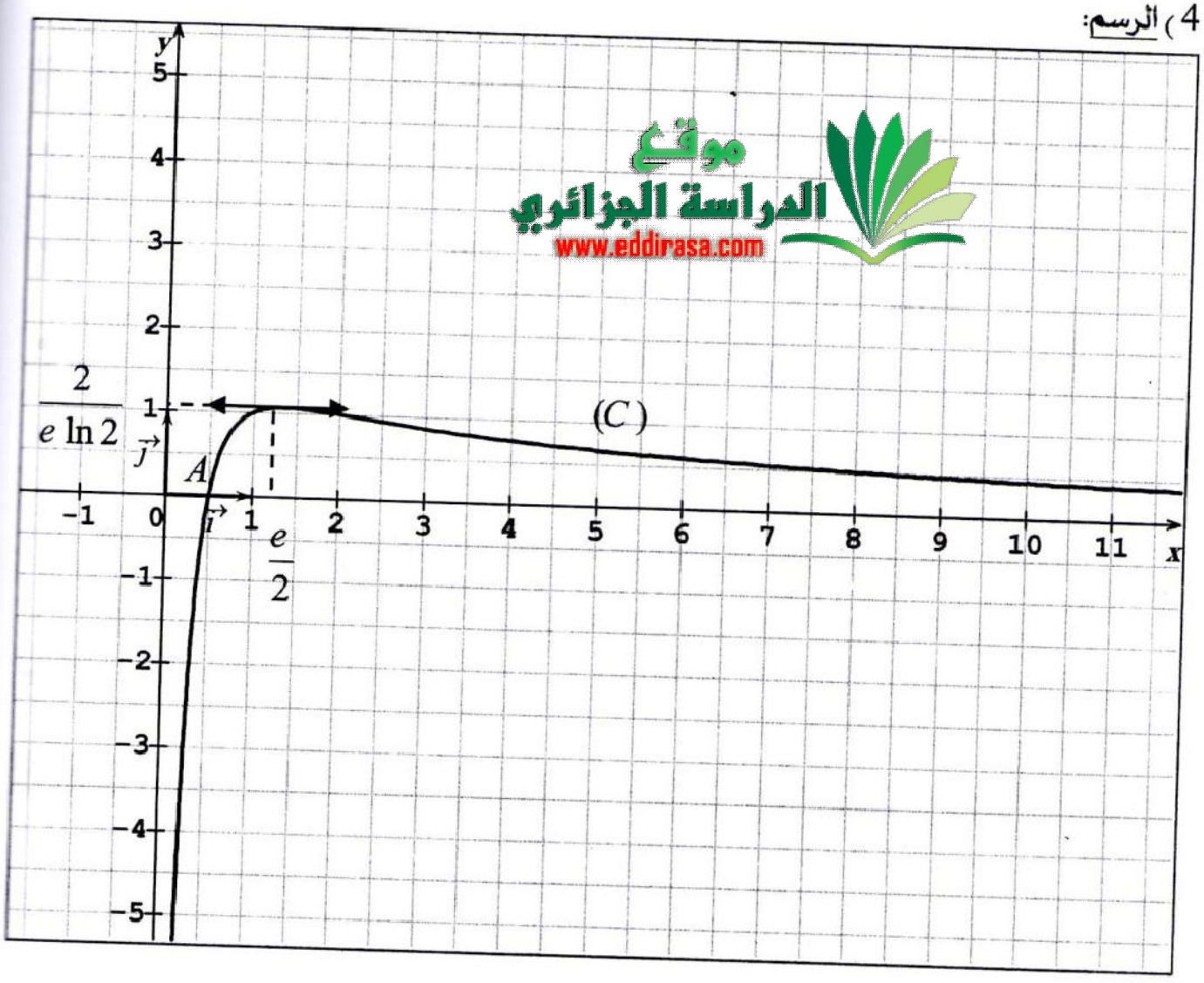
حيث: $f\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{\frac{e}{2}}\left(1+\frac{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}{\ln 2}\right)=\frac{2}{e}\left(1+\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right)=\frac{2}{e\ln 2}$

3) نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$.

$f(x)=0$ معناه: $\frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=0$، ومنه: $1+\frac{\ln x}{\ln 2}=0$، ومنه: $\ln x=-\ln 2=\ln\frac{1}{2}$

ومنه: $x=\frac{1}{2}$، إذن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $A\left(\frac{1}{2};0\right)$.

4) الرسم:



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com