سلسلة الرياضيات بالفيديو

هذا الكتاب مرفق بقرص تعليمي

المعاصر

محمد قداري

المغني في الرياضيات

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية

- أنشطة وتطبيقات محلولة بالفيديو .
- ملخصات هامة للدروس .
- 412 تمرين ومسألة محلولة .
- وضعيات إدماجية متنوعة و هادفة .
- تمارين ومسائل من بكالوريات أجنبية .
- الحلول المفصلة لمواضيع البكالوريا (المنهاج الجديد) .

BAC

المعاصرة

وفق - البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية
- التوزيع السنوي المعتمد وطنيا

المحور الثاني عشر

الدوال الأصلية

تم تحميل الكتاب من موقع الدراسة الجزائري

www.eddirasa.com

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

ما يجب أن يعرف

الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال :

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f. من أجل كل x من I لدينا : $F'(x)=f(x)$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة :

خواص: * إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.

* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال: $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

3. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير:

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

حساب الدوال الأصلية

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$

$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$ $a \in \mathbb{R}^*$ ، $b \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$ $a \in \mathbb{R}^*$ ، $b \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
e^{ax+b} $a \in \mathbb{R}^*$ ، $b \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x + c$	$]0;+\infty[$
$a \in \mathbb{R}$ ، $\ln(x-a)$	$(x-a)\ln(x-a)-x+c$	$]a;+\infty[$

2. خواص: u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$(n \in \mathbb{N}^*)$ $u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x) \neq 0$
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})$ $\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

المعادلات التفاضلية

1. المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=F(x)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2. المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=G(x)+c_1x+c_2$. مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

3. المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=-\omega^2 y$

مبرهنة: إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

تمارين محلولة

تمرين 01

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك :

1) دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{3x^3-2}{2x^2}$ هي الدالة F المعرفة بـ: $F(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{x}$.

2) f دالة موجبة على مجال D و F دالتها الأصلية على هذا المجال، إذن: F متزايدة تماما على D.

3) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث إشارة $f(x)$ معطاة بـ:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

إذا كانت F دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f فإن $F(\alpha)$ قيمة حدية صغرى لـ F على $\mathbb{R}$.

4) الدالتان F و G المعرفتان على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ و $G(x)=x+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ دالتان أصليتان لنفس الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

5) f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x-2}$، الدالة f تقبل دالة أصلية F على المجال $]0;+\infty[$ منحناها يمر من النقطة: $A(3;0)$.

الحل

1) صحيح:

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{3}{4}\times 2x-\frac{1}{x^2}=\frac{3x}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{3x^3-2}{2x^2}=f(x)$$

طريقة أخرى: نعين دالة أصلية للدالة f.

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\frac{3x^3-2}{2x^2}=\frac{3x^3}{2x^2}+\frac{-2}{2x^2}=\frac{3x}{2}-\frac{1}{x^2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{3}{2}\times\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

2) صحيح:

F دالة أصلية للدالة f، ومنه من أجل كل x من D : $F'(x)=f(x)$، وبالتالي

موقع الدراسة الجزائري www.eddirasa.com

إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ على D. بما أن f موجبة على D، فإن: F متزايدة تماما على D.

3) خطأ:

F دالة أصلية للدالة f، ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $F'(x)=f(x)$، وبالتالي إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$. من جدول إشارة $f(x)$ يكون جدول تغيرات الدالة F كما يلي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$F(\alpha)$	$\searrow$	

وبالتالي $F(\alpha)$ قيمة حدية كبرى لـ F على $\mathbb{R}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

4) خطأ:

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$F(x)-G(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}-x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=-x$$

ومنه: $F(x)-G(x)=-x$، أي: $F(x)=G(x)-x$، إذن الدالتان F و G لا تختلفان بثابت حقيقي.

5) صحيح:

من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\frac{1}{x-2}=\frac{(x-2)'}{x-2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\ln(x-2)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]2;+\infty[$.

ولدينا: $F(3)=\ln(3-2)=\ln 1=0$.

تمرين 02

عين دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}+2x$ ، $I=]0;+\infty[$ 2) $f(x)=3x^3-\frac{2}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$

3) $f(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}-3$ ، $I=]0;+\infty[$ 4) $f(x)=-3\sin x+2\cos x+1$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+2\sin(\pi+x)$ ، $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=x^2+2x-e^x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 7) $f(x)=2x+\ln x$ ، $I=]0;+\infty[$

8) $f(x)=x^2+\ln(x-1)$ ، $I=]1;+\infty[$

الحل

1) الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{1}{x}+x^2$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) الدالة F حيث: $F(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

3) الدالة F حيث: $F(x)=\frac{x^3}{3}+2\sqrt{x}-3x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

4) الدالة F حيث: $F(x)=3\cos x+2\sin x+x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

5) الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(\pi+x)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

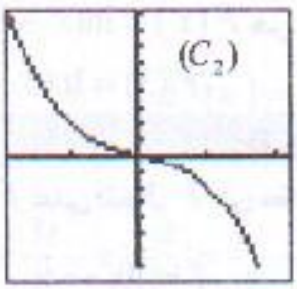
6) الدالة F حيث: $F(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

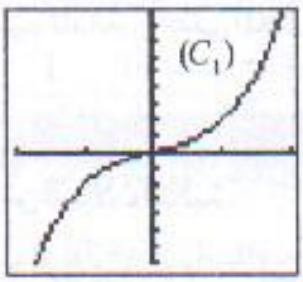
7) الدالة F حيث: $F(x)=x^2+x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

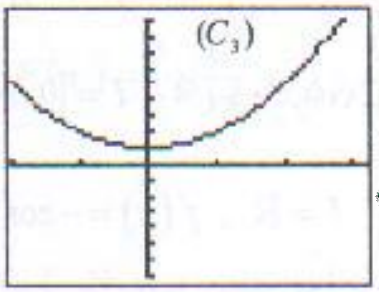
8) الدالة F حيث: $F(x)=\frac{x^3}{3}+(x-1)\ln(x-1)-x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-1-x^2$. أحد المنحنيات التالية (C_1) ، (C_2) و (C_3) هو منحني بياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، عينه مع التبرير.







موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

لتكن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

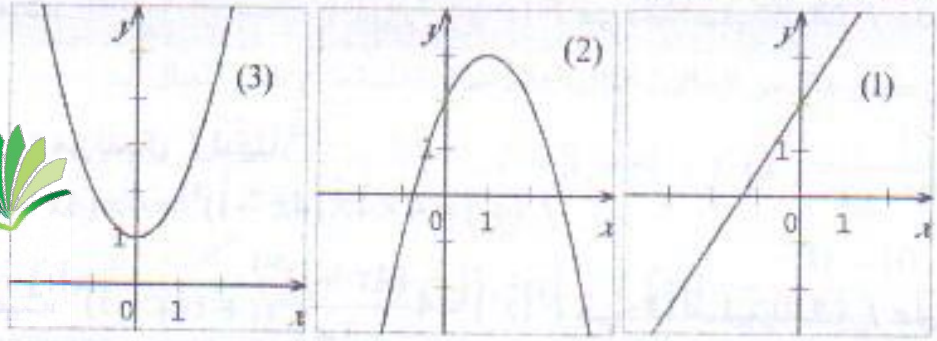
$F'(x)=f(x)$ ، وبالتالي إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ ، على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=-1-x^2=-(1+x^2)<0$ ، ومنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)<0$ ، وبالتالي الدالة F متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

إذن: (C_2) هو منحني بياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

تمرين 04

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (1) و F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.أحد المنحنيين (2) أو (3) هو للدالة F ما هو؟ برر.



موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)=f(x)$ ، وبالتالي إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ ، على $\mathbb{R}$.

من المنحني (1) نلاحظ أن: $f(x)\le 0$ من أجل $x\in]-\infty;\alpha]$ ، و: $f(x)\ge 0$ من أجل $x\in[\alpha;+\infty[$ ، حيث α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-2;-1[$ ، وبالتالي تكون الدالة F متناقصة تماما ثم متزايدة تماما ، إذن: المنحني (3) هو للدالة F .

تمرين 05

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I :

1) $f(x)=(4x^3+1)(x^4+x+2)$ ، $I=\mathbb{R}$. 2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ، $I=]0;+\infty[$.

3) $f(x)=3(3x+4)^4$ ، $I=\mathbb{R}$. 4) $f(x)=(2x+7)^6$ ، $I=\mathbb{R}$.

5) $f(x)=16(4x-1)^3$ ، $I=\mathbb{R}$. 6) $f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5$ ، $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4$ ، $I=]0;+\infty[$. 8) $f(x)=xe^{-x^2}$ ، $I=\mathbb{R}$.

9) $f(x)=e^x(e^x+2)^3$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=(4x^3+1)(x^4+x+2)=(x^4+x+2)'(x^4+x+2)$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{(x^4+x+2)^2}{2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x=(\ln' x)\times\ln x$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

3) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=3(3x+4)^4=(3x+4)'(3x+4)^4$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{(3x+4)^{4+1}}{4+1}=\frac{(3x+4)^5}{5}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

4) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=4\times4\times(4x-1)^3=4\times(4x-1)'\times(4x-1)^3$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=4\frac{(4x-1)^{3+1}}{3+1}=(4x-1)^4$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

5) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=(2x+7)^6=\frac{1}{2}\times(2x+7)'\times(2x+7)^6$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(2x+7)^{6+1}}{6+1}=\frac{(2x+7)^7}{14}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

6) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5=(3x^2-2x+3)'\times(3x^2-2x+3)^5$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{(3x^2-2x+3)^{5+1}}{5+1}=\frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

7) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4=-\left[-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4\right]=-\left(1+\frac{1}{x}\right)'\times\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4+1}}{4+1}=-\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}{5}$ هي دالة أصلية للدالة f على

المجال I .

8) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=xe^{-x^2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-x^2)'\times e^{-x^2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

9) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=e^x(e^x+2)^3=(e^x+2)'(e^x+2)^3$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{(e^x+2)^{3+1}}{3+1}=\frac{(e^x+2)^4}{4}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

تمرين 06

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ ، $I=]1;+\infty[$. 2) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^3}$ ، $I=]3;+\infty[$. 4) $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^4}$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}$ ، ومنه: الدالة F حيث:

$F(x)=-\frac{1}{x-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

3) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$ ، ومنه: الدالة F حيث:

$F(x)=-\frac{1}{x^2+x+1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$f(x)=\frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^3}=2\times\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^3}=2\times\frac{(x^2-5x+6)'}{(x^2-5x+6)^3}$ ، ومنه:

الدالة F حيث: $F(x)=2\times\left[-\frac{1}{(3-1)(x^2+x+1)^{3-1}}\right]=-\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

4) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^4}$ ، ومنه:

الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{1}{(4-1)(e^x+1)^{4-1}}=-\frac{1}{3(e^x+1)^3}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 07

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ، $I=]0;+\infty[$ 3) $f(x)=\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$ ، $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=e^{2x+3}$ ، $I=\mathbb{R}$ 4) $f(x)=3^x-2^x$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=-\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-e^{\frac{1}{x}}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) الدالة F حيث: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

(أنظر جدول الدوال الأصلية لدوال مألوفة)

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}=-\frac{1}{2}(2x-1)e^{x^2-x-3}=-\frac{1}{2}(x^2-x-3)'e^{x^2-x-3}$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{1}{2}e^{x^2-x-3}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

4) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=3^x-2^x=e^{x\ln 3}-e^{x\ln 2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}=\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{2^x}{\ln 2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 08

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f المعرفة و الموجبة تماما على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ، $I=]-2;+\infty[$ 3) $f(x)=\frac{-2e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ، $I=]1;+\infty[$ 4) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0;\pi[$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)'}{x+2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\ln(x+2)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

3) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{-2e^x}{e^x+1}=(-2)\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-2\ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

4) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin' x}{\sin x}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\ln(\sin x)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 09

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ، $I=]1;+\infty[$ 2) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$ ، $I=]2;+\infty[$.

3) $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$ 4) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ، $I=]1;+\infty[$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{(x-1)'}{\sqrt{x-1}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=2\sqrt{x-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{(x^2-4)'}{\sqrt{x^2-4}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=2\sqrt{x^2-4}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

3) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=2\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}=2\frac{(e^x-1)'}{\sqrt{e^x-1}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=2\times2\sqrt{e^x-1}=4\sqrt{e^x-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

4) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln x}}=\frac{\ln' x}{\sqrt{\ln x}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=2\sqrt{\ln x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 10

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ يكون:

$$f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}$$

2) استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;1[$ والتي تأخذ القيمة 6 من أجل القيمة $\frac{1}{2}$.

الحل

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ لدينا:

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+bx^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{ax^2-2ax+a+bx^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$$

$$=f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a+b=0\\-2a=2\\a=-1\end{cases}$، ومنه: $\begin{cases}-1+b=0\\a=-1\end{cases}$، ومنه: $a=-1$، $b=1$، وبالتالي:

$$f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ لدينا:

$f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\left(\frac{1}{x}\right)'+\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}$، ومنه مجموعة الدوال الأصلية للدالة f

على المجال $]0;1[$ هي الدوال: $x\to\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+k$، حيث k ثابت حقيقي.

الدالة F تحقق: $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+k$ و $F\left(\frac{1}{2}\right)=6$.

$F\left(\frac{1}{2}\right)=6$ تكافئ: $\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{2}-1}+k=6$ ، أي: $k=2$ ، إذن: $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+2$

تمرين 11

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{6e^x}{e^{2x}-1}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{ae^x}{e^x-1}+\frac{be^x}{e^x+1}$$

2) استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$\frac{ae^x}{e^x-1}+\frac{be^x}{e^x+1}=\frac{ae^x(e^x+1)+be^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)}=\frac{ae^{2x}+ae^x+be^{2x}-be^x}{(e^x)^2-1^2}$$

$$=\frac{(a+b)e^{2x}+(a-b)e^x}{(e^x)^2-1^2}=f(x)=\frac{6e^x}{e^{2x}-1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a+b=0\\a-b=6\end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases}a=-b\\-b-b=6\end{cases}$ ، ومنه: $a=3$ ، $b=-3$. وبالتالي:

$$f(x)=\frac{3e^x}{e^x-1}-\frac{3e^x}{e^x+1}$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\frac{3(e^x-1)'}{e^x-1}-\frac{3(e^x+1)'}{e^x+1}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=3\ln(e^x-1)-3\ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$. ولدينا: $F(x)=3\left[\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)\right]=3\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x-1}\right)$

تمرين 12

حل المعادلة التفاضلية: $y'=\frac{2}{x^2}+x$ ، حيث: $y(1)=0$.

الحل

$y'=\frac{2}{x^2}+x$ تعني: $y=-\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}+k$ ، حيث k ثابت حقيقي.

بما أن: $y(0)=1$ فإن: $-\frac{2}{1}+\frac{1^2}{2}+k=0$ ، ومنه: $k=\frac{3}{2}$. وبالتالي الحل المطلوب هو:

$y=-\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$.

تمرين 13

حل المعادلة التفاضلية: $y''=e^{3x+1}$ ، حيث: $y(-1)=0$ و $y'(0)=0$.

الحل

لدينا : $y''=e^{3x+1}$ ، ومنه: $y'=\frac{1}{3}e^{3x+1}+c_1$ ، ومنه: $y=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}e^{3x+1}+c_1x+c_2$

إذن: $y=\frac{1}{9}e^{3x+1}+c_1x+c_2$ ، حيث c_1 و c_2 ثابتان حقيقيان .

بما أن: $y'(0)=0$ فإن: $\frac{1}{3}e^{3\times0+1}+c_1=0$ ، ومنه: $c_1=-\frac{e}{3}$

وبما أن: $y(-1)=0$ ، فإن: $\frac{1}{9}e^{3(-1)+1}-c_1+c_2=0$ ، ومنه: $\frac{1}{9}e^{-2}+\frac{e}{3}+c_2=0$ ، ومنه:

$c_2=-\frac{1}{9}e^{-2}-\frac{e}{3}$ وبالتالي الحل المطلوب هو: $y=\frac{1}{9}e^{3x+1}-\frac{e}{3}x-\frac{1}{9}e^{-2}-\frac{e}{3}$

تمرين 14

1) حل المعادلة التفاضلية : $9y''+4y=0...(E)$.

2) عين الحال الخاص f للمعادلة (E) و الذي يحقق ما يلي: المنحني الممثل للدالة f يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{3}\right)$ ويقبل عند النقطة A مماسا معامل توجيهه: $-\frac{2}{3}$.

3) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

4) حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة: $f(x)=0$.

الحل

1)لدينا: (E) تكافئ $y''+\frac{4}{9}y=0$ ، أي: $y''+\left(\frac{2}{3}\right)^2y=0$ ، ومنه:

$y=c_1\sin\frac{2}{3}x+c_2\cos\frac{2}{3}x$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) الدالة f تحقق: $f(x)=c_1\sin\frac{2}{3}x+c_2\cos\frac{2}{3}x$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ و $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ تكافئ $c_1\sin\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}\right)+c_2\cos\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ ، أي:

$c_1\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+c_2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ ، أي: $c_1\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}c_2=\sqrt{3}$ ، أي: $\sqrt{3}c_1+c_2=2\sqrt{3}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=\frac{2}{3}c_1\cos\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}c_2\sin\frac{2}{3}x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$ تكافئ $\frac{2}{3}c_1\cos\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3}c_2\sin\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$ ، أي:

$c_1\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-c_2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$ ، أي: $\frac{1}{2}c_1-\frac{\sqrt{3}}{2}c_2=-1$ ، أي: $c_1-\sqrt{3}c_2=-2$.

وبالتالي نحل الجملة: $\begin{cases}\sqrt{3}c_1+c_2=2\sqrt{3}\\ c_1-\sqrt{3}c_2=-2\end{cases}$ ، وبحل هذه الجملة نجد: $c_1=1$ و $c_2=\sqrt{3}$.

ومنه: $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$

3) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=2\left[\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2}{3}x\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(\frac{2}{3}x\right)\times\frac{1}{2}\right]=\sqrt{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)+\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$=\sin\left(\frac{2}{3}x\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)=f(x)$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

4) $f(x)=0$ تكافئ: $2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ، ومنه: $\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ، ومنه:

$\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ، أي: $x=\pi+\frac{3\pi k}{2}$ ، وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$S=\left\{\pi+\frac{3\pi k}{2}\right\}$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين 15

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+2)e^x$.

عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$F(x)=(ax+b)e^x$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل

F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ومنه: $F'(x)=f(x)$. لدينا:

$$F'(x)=(ax+b)'\times e^x+(ax+b)\times\left(e^x\right)'=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$$

$F'(x)=f(x)$ معناه: $(ax+a+b)e^x=(x+2)e^x$، ومنه: $ax+a+b=x+2$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=2\end{cases}$، ومنه: $\begin{cases}a=1\\1+b=2\end{cases}$، ومنه: $a=1$ ، $b=1$. وبالتالي:

$F(x)=(x+1)e^x$.

تمرين 16

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$.

1) أحسب الدالة المشتقة الثانية f'' للدالة f .

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$.

3) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين ولدينا:

$$f'(x)=(2x^2-7x+5)'\times e^x+(2x^2-7x+5)\times\left(e^x\right)'$$

$$=(4x-7)e^x+(2x^2-7x+5)e^x=(2x^2-7x+5+4x-7)e^x=(2x^2-3x-2)e^x$$

ومنه: $f'(x)=(2x^2-3x-2)e^x$.

ولدينا: $f''(x)=(2x^2-3x-2)'\times e^x+(2x^2-3x-2)\times\left(e^x\right)'$

$$=(4x-3)e^x+(2x^2-3x-2)e^x=(2x^2-3x-2+4x-3)e^x=(2x^2+x-5)e^x$$

ومنه: $f''(x)=(2x^2+x-5)e^x$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$4e^x+2f'(x)-f''(x)=4e^x+2(2x^2-3x-2)e^x-(2x^2+x-5)e^x$$

$$=(4+4x^2-6x-4-2x^2-x+5)e^x=(2x^2-7x+5)e^x=f(x)$$

3) بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$ ، فإن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=4e^x+2f(x)-f'(x)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ،

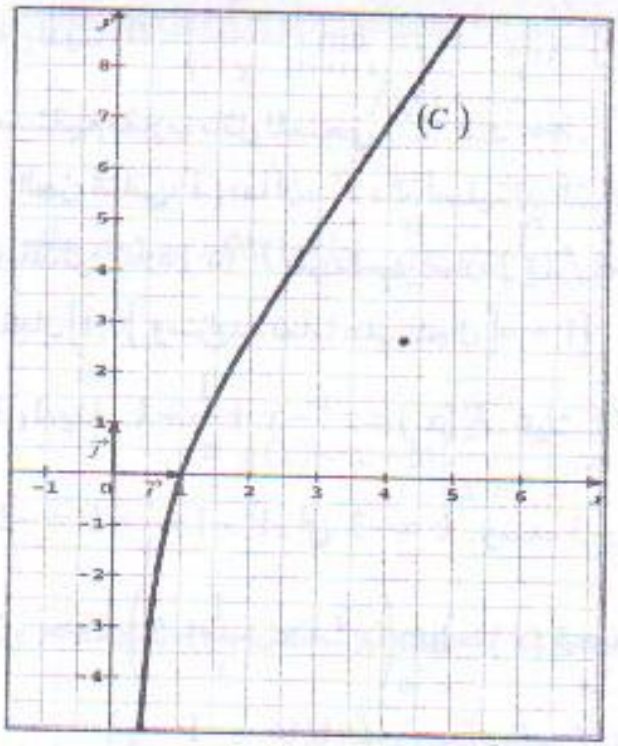
ومنه: $F(x)=4e^x+2(2x^2-7x+5)e^x-(2x^2-3x-2)e^x$

$$=(4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^x=(2x^2-11x+16)e^x$$

إذن: $F(x)=(2x^2-11x+16)e^x$

تمرين 17

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-1-\frac{1}{x^2}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل الموالي).



الجزء الأول

1) أ / باستعمال المنحني (C) ضع تخمينا حول اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب / أثبت صحة هذا التخمين.

2) بقراءة بيانية حدد إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ / باستعمال المنحني (C) ضع تخمينا حول نهاية f عند 0.

ب / أثبت صحة هذا التخمين.

4) بين أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

الجزء الثاني

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ بحيث : $F(1)=-2$.

1) استنتج من الجزء الأول اتجاه تغير الدالة F على المجال $]0;+\infty[$.

2) عين عبارة $F(x)$ بدلالة x.

3) أدرس نهايتي الدالة F عند 0 و عند $+\infty$.

4) شكل جدول تغيرات الدالة F .

5) أرسم في معلم متعامد و متجانس (Γ) التمثيل البياني للدالة F .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

الجزء الأول 1) أ / نخمن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

الاثبات: الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=(2x-1)'-\left(\frac{1}{x^2}\right)'=2-\left(\frac{-2}{x^3}\right)=2+\frac{2}{x^3}>0$$ ، ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) إشارة $f(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3) نخمن أن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=-\infty$.

الاثبات: لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(2x-1)=-1$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(2x-1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=-\infty$.

4) لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$ ومنه: $(\Delta): y=2x-1$

مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$.

الجزء الثاني: 1) بما أن: F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ فإن: $F'(x)=f(x)$ ،

وبالتالي إشارة $F'(x)$ هي نفسها إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ، ومنه: F متناقصة على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

2) لدينا: $F(x)=x^2-x+\frac{1}{x}+k$ ، حيث k ثابت حقيقي ، وبما أن: $F(1)=-2$ فإن:

$1^2-1+\frac{1}{1}+k=-2$ ، أي: $k=-3$ ، ومنه: $F(x)=x^2-x+\frac{1}{x}-3$.

3) $\lim_{x\overset{>}{\to}0}F(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(x^2-x+\frac{1}{x}-3\right)=+\infty$

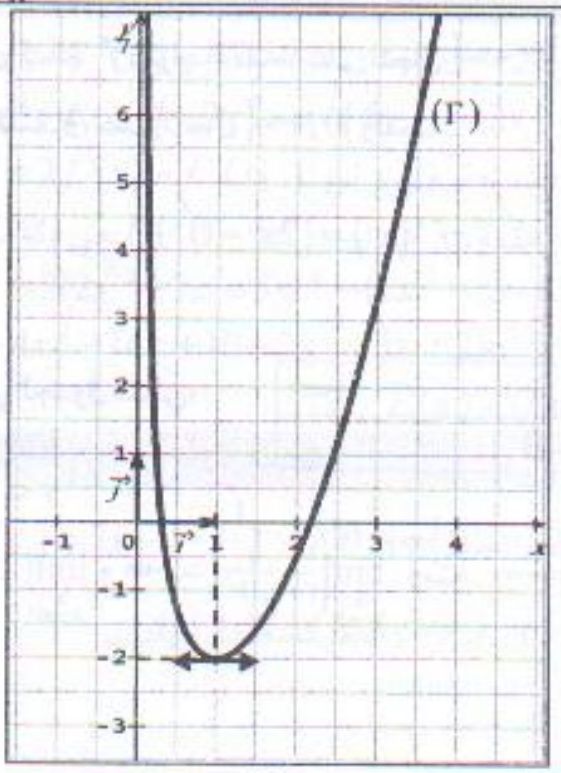
$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x+\frac{1}{x}-3\right)=+\infty$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

4) جدول تغيرات الدالة F :

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

5) رسم (Γ) :



تمرين 18

I. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

1) بين أن f زوجية ثم أدرس اتجاه تغيراتها.

2) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=1+\dfrac{\alpha}{x-2}+\dfrac{\beta}{x+2}$ ، حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

3) عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f.

II. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $g(x)=x+\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) بين أن g فردية ثم أدرس اتجاه تغيراتها.

2) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجالات مجموعة التعريف ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

3) بين أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

4) ارسم المنحني (C) .

5) أ/ احسب مشتقة الدالة h المعرفة من أجل كل $x\neq -a$ حيث:

$h(x)=(x+a)\ln|x+a|-x$ ، حيث a عدد حقيقي.

ب/ استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]2;+\infty[$.

الحل

I.1) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ، $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ولدينا:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^2}{x^2-4}=f(x)$ ، ومنه f دالة زوجية.

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$ ، إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-8x$ و الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و متزايدة على المجالين على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;0[$

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا:

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

$$1+\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+\alpha(x+2)+\beta(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-4+(\alpha+\beta)x+2\alpha-2\beta-4}{(x-2)(x+2)}=f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\2\alpha-2\beta-4=0\end{cases}$ ، أي: $\begin{cases}\beta=-\alpha\\2\alpha-2\beta-4=0\end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases}\beta=-\alpha\\4\alpha=4\end{cases}$ ، ومنه:

$\alpha=1$ ، $\beta=-1$ ، إذن: $f(x)=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3.) من الكتابة $f(x)=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ تكون مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي:

$F(x)=x+\ln|x-2|-\ln|x+2|=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+k$ ، k ثابت حقيقي

II. 1.) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ، $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ولدينا:

$$g(-x)=-x+\ln\left|\frac{-x-2}{-x+2}\right|=-x+\ln\left|\frac{-(x+2)}{-(x-2)}\right|=-x+\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$$

$$=-x+\ln\left|\frac{1}{\frac{x-2}{x+2}}\right|=-x-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=-\left(x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)=-g(x)$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا:

$g(x)=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=x+\ln|x-2|-\ln|x+2|$ ، ومنه: $g'(x)=f(x)$

وبالتالي إشارة $g'(x)$ هي نفسها إشارة $f(x)$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2		$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	
x^2-4		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	

ومنه: $g'(x)$ تنعدم عند 0 ، تكون موجبة على $]-\infty;-2[$ و $]2;+\infty[$ وسالبة على $]-2;0[$ و $]0;2[$. إذن: g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-2;0[$ و $]0;2[$.

2) ـ لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=1$ ، وبما أن: $\lim_{X\to1}\ln X=0$ ، فإن: $\lim_{x\to-\infty}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=0$ ، ومنه:

$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)=-\infty$. إذن: $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

ولكون g دالة فردية نستنتج أن: $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

ـ لدينا: $\lim_{x\to2}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=0^+$ ، وبما أن: $\lim_{X\overset{>}{\to}0}\ln X=-\infty$ ، فإن: $\lim_{x\to2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=-\infty$ ، ومنه:

$\lim_{x\to2}\left(x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)=-\infty$. إذن: $\lim_{x\to2}g(x)=-\infty$. ولكون g دالة فردية نستنتج أن:

$\lim_{x\to-2}g(x)=+\infty$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

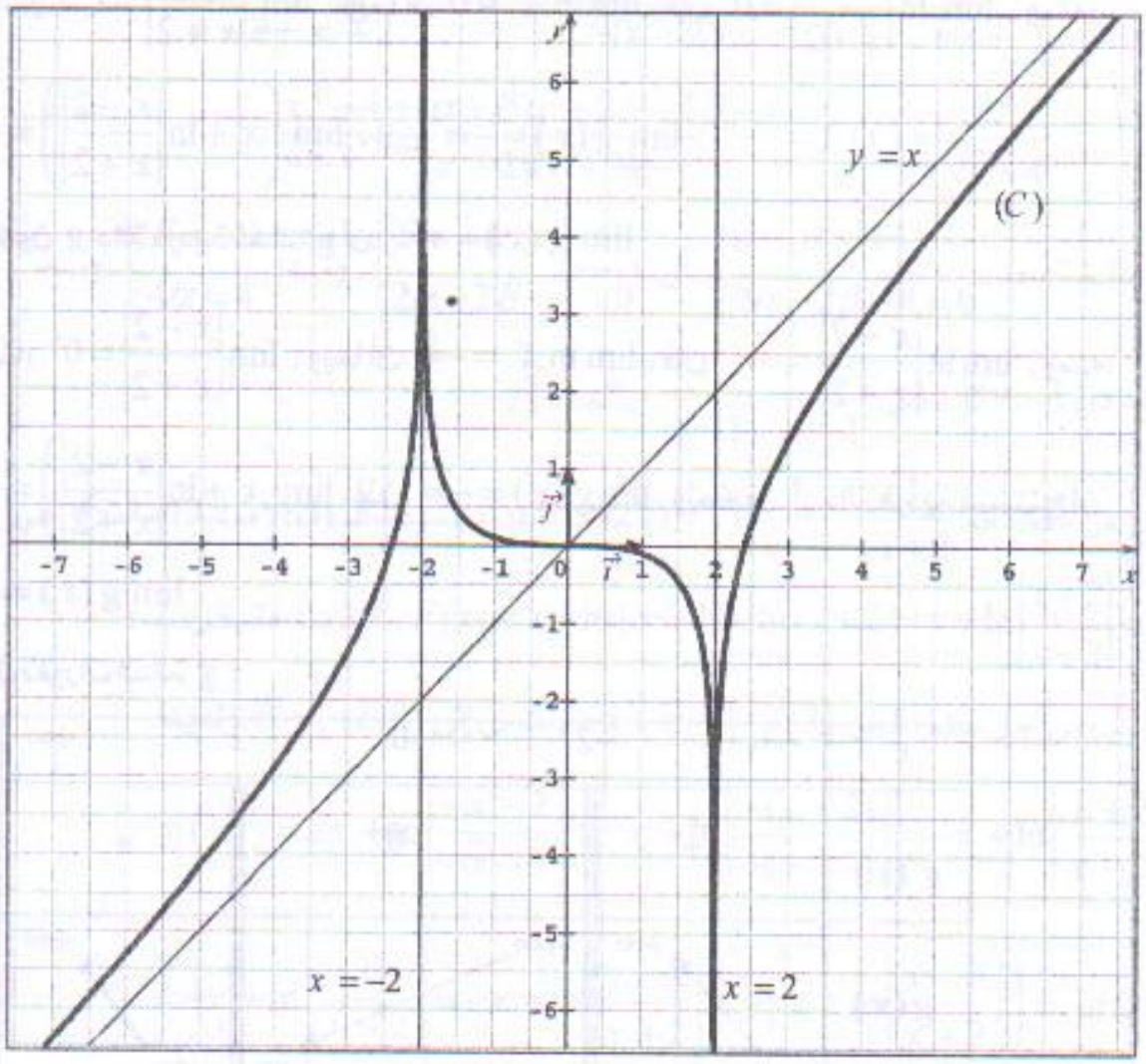
3) لدينا : $g(x)-x=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-x=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ ،

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=1$ ، وبما أن: $\lim_{X\to1}\ln X=0$ ، فإن: $\lim_{x\to-\infty}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=0$ ، ومنه:

$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-x]=0$ وبنفس الكيفية نجد: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]=0$

إذن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

4) الرسم:



5) أ/ من أجل كل $x \neq -a$ لدينا :

$$h'(x) = (x+a)' \times \ln|x+a| + (x+a) \times \ln'|x+a| - (x)'$$

$$= \ln|x+a| + (x+a) \times \frac{1}{x+a} - 1 = \ln|x+a|$$

ومنه: $h'(x) = \ln|x+a|$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

ب/ نستنتج ان دالة أصلية للدالة g على $]2;+\infty[$ هي :

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-2)\ln|x-2| - (x+2)\ln|x+2|$$

تمرين 19

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1) بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$.

2) نفرض أن : $F(0) = 0$

عين معادلة للمماس (T) للمنحني (C) الممثل للدالة F عند النقطة O التي فاصلتها 0.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3) ادرس اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$.

4) ادرس إشارة F على $\mathbb{R}$.

5) احسب F'' المشتقة الثانية للدالة F على $\mathbb{R}$.

6) أ/ ادرس إشارة $F''(x)$.

ب/ استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس (T).

الحل

1) الدالة f هي مركب الدالة $x \to x^2+1$ المستمرة على $\mathbb{R}$ ، متبوعة بالدالة $x \to \sqrt{x}$ ، ومنه الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، فهي تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$.

2) معادلة (T) من الشكل: $y = F'(0)(x-0)+F(0)$ ، حيث: $F(0)=0$ وبما أن F دالة أصلية للدالة f فإنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)=f(x)$ ومنه:

$F'(0)=f(0)=\sqrt{0^2+1}=1$ ، إذن: $y=1(x-0)+0$ ، أي: $(T): y=x$

3) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)=f(x)>0$ ومنه الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4) بما أن الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $F(0)=0$ تكون إشارة $F(x)$ كما في الجدول الموالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F(x)$		$-$	0	$+$	

5) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)=f(x)$ ، ومنه: $F''(x)=f'(x)$ ، ومنه:

$$F''(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ ، إذن: $F''(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6) أ/ إشارة $F''(x)$ هي نفس إشارة x ، لأن: $\sqrt{x^2+1}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ومنه:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F''(x)$		$-$	0	$+$	

ب/ الدالة F'' تنعدم عند العدد 0 فاصلة النقطة O مغيرة إشارتها ومنه النقطة O هي نقطة انعطاف للمنحني (C) ، ومن إشارة $F''(x)$ نستنتج أن:

- على المجال $]-\infty;0[$: المنحني (C) يقع تحت المماس (T).
- على المجال $]0;+\infty[$: المنحني (C) يقع فوق المماس (T).
- المماس (T) يخترق المنحني (C) في النقطة O .