سلسلة الرياضيات بالفيديو

هذا الكتاب مرفق بقرص تعليمي

المعاصر

محمد قداري

المغني في الرياضيات

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية

- أنشطة وتطبيقات محلولة بالفيديو .
- ملخصات هامة للدروس .
- 412 تمرين ومسألة محلولة .
- وضعيات إدماجية متنوعة و هادفة .
- تمارين ومسائل من بكالوريات أجنبية .
- الحلول المفصلة لمواضيع البكالوريا (المنهاج الجديد) .

BAC

المعاصرة

وفق - البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية
- التوزيع السنوي المعتمد وطنيا

المحور الحادي عشر

المتتاليات العددية

ما يجب أن يعرف

تذكير حول المتتاليات العددية

1. تعريف :متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى ، العدد $u(n)$.

2. اتجاه تغير متتالية عددية:

متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب) .

متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب) .

متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$. وينتج من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 : $u_{n+1} = u_n = ... = u_{n_0}$. (أي جميع الحدود متساوية وتساوي الحد الأول)

متتالية رتيبة: إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب)نقول أن المتتالية رتيبة(رتيبة تماما على الترتيب) .

خاصية : لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذاكانت الدالة f متزايدة تكون المتتالية (u_n) متزايدة ، و إذاكانت الدالة f متناقصة تكون المتتالية (u_n) متناقصة .

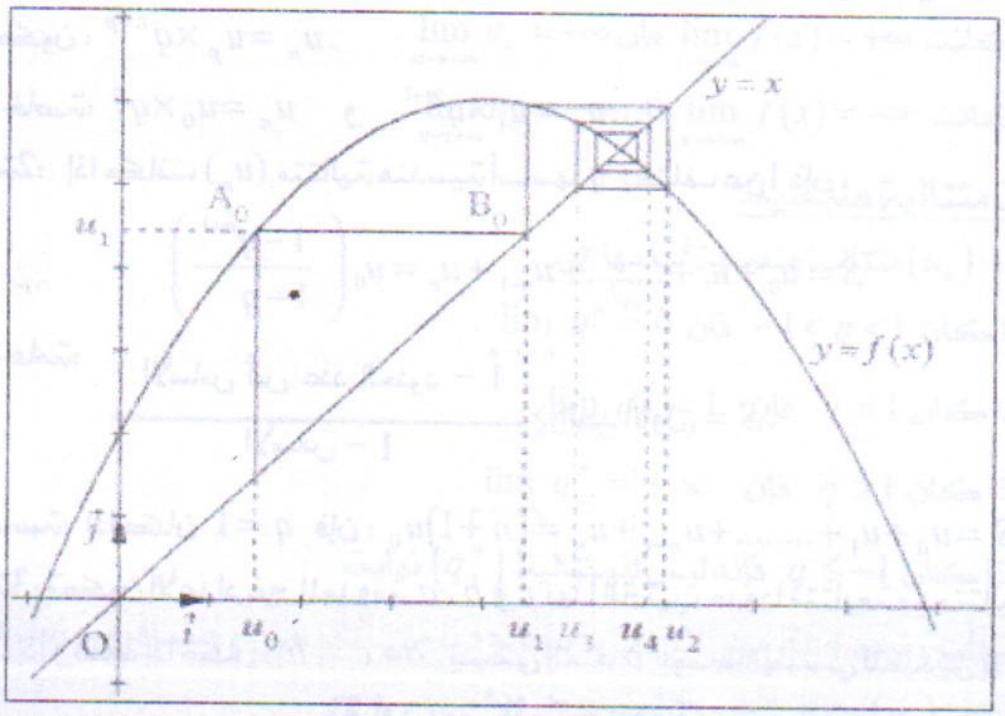
ملاحظة: عكس الخاصية غير صحيح .

التمثيل البياني لمتتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

في معلم للمستوي يتم تمثيل حدود المتتالية (u_n) وفقا للبرنامج التالي:

- ننشئ (C) المنحني الممثل للدالة f و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.
- ننشئ u_0 عل محور الفواصل .
- ننشئ النقطة A_0 من المنحني (C) ذات الفاصلة u_0 .
- ننشئ النقطة B_0 من المستقيم (Δ) ذات نفس ترتيب النقطة A_0 .
- ننشئ على محور الفواصل u_1 فاصلة النقطة B_0 .
- بنفس الأنساق السابقة نعيد نفس العمل بدءا من u_1 لإنشاء u_2 و هكذا لإنشاء u_3 ، u_4 ،....

(أنظر الشكل الموالي)



المتتالية الحسابية- المتتالية الهندسية

1. المتتالية الحسابية :

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي)

إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$.

خاصية1: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p يكون : $u_n = u_p + (n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n-1)r$.

خاصية2: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

بصفة عامة:

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$$

خاصية3: تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c .

2. المتتالية الهندسية :

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)

إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

خاصية1: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p يكون: $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

خاصية2: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

بصفة عامة:

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{\text{الأساس أس عدد الحدود} - 1}{\text{الأساس} - 1}.$$

حالة خاصة: إذا كان $q = 1$ فإن: $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$.

خاصية3: تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

تقارب متتالية عددية

1. نهاية متتالية عددية:

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة. و نكتب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)، في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة. و إذا لم تكن المتتالية (u_n) متقاربة نقول إنها متباعدة.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي، إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

ملاحظة: العكس غير صحيح.

تعاريف: (u_n) متتالية عددية.

- القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أن كل مفتوح $]\alpha, +\infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة. و نكتب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $]-\infty, \alpha[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة. و نكتب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال

من الشكل $[\alpha,+\infty[$ و α عدد حقيقي.

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

2.نهاية متتالية هندسية:

مبرهنة: (u_n) متتالية هندسية أساسها q.

(1) إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

(2) إذا كان $q=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$.

(3) إذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

(4) إذا كان $q\le -1$ فإنه ليس للمتتالية (q^n) نهاية.

متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل، متتالية محدودة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى.
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\ge B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل.
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.

مبرهنة:
- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

الاستدلال بالتراجع

مبدأ الاستدلال بالتراجع:

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

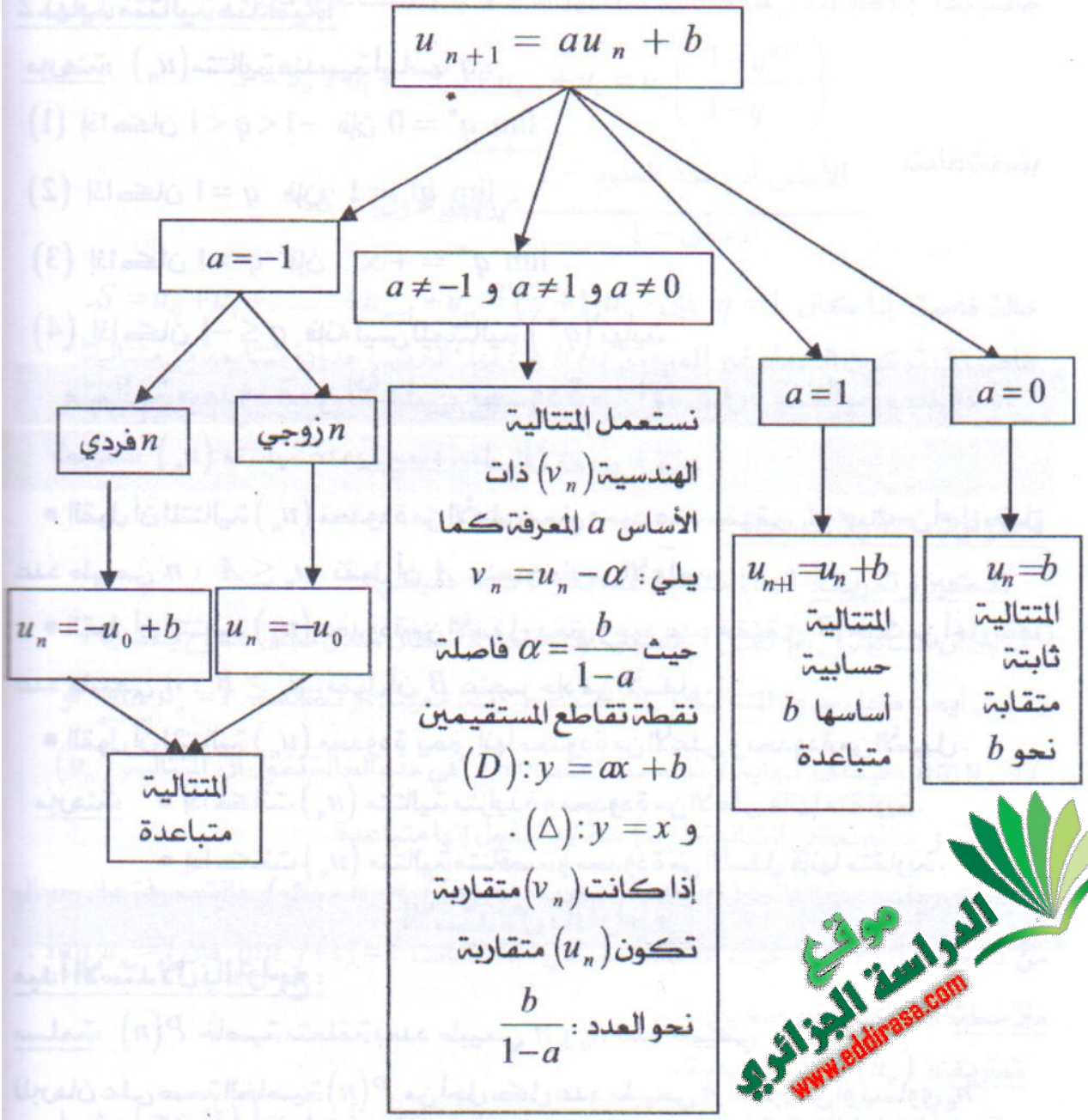
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$

المخطط الموالي يلخص طبيعة المتتاليات (u_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية من الشكل :

$u_{n+1} = au_n + b$. حيث a و b عددان حقيقيان .



متتاليتان متجاورتان

تعريف: تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

مبرهنة: إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تمارين محلولة

تمرين 01

(u_n) متتالية معرفة على N بـ: $u_n = \frac{6}{1+e^{-n}}$.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاثة المقترحة مع التبرير في كل حالة:

1. المتتالية (u_n) : ج1) متزايدة تماما . ج2) متناقصة تماما . ج3) ليست رتيبة.

2. المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد: ج1) 0 . ج2) 1 . ج3) 6.

3. $u_n > 5,999$ ابتداءا من : ج1) $n=1$. ج2) $n=9$. ج3) $n=8$.

الحل

1. ج1) متزايدة تماما :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = f(n)$. حيث f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي:

$f(x) = \frac{6}{1+e^{-x}}$. الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ ولدينا :

$$f'(x) = 6\frac{-\left(-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2} = \frac{6e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$ ، إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2. ج3) 6 :

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right) = 1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

3. ج2) $n=11$:

لدينا : $u_n > 5,999$ تكافئ $\frac{6}{1+e^{-n}} > 5,999$ أي $n > ln\left(\frac{5,999}{0,001}\right) \approx 8,69$

أي $n \geq 9$.

تمرين 02

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1. المتتالية (u_n) المعرفة على N بـ: $u_n = \frac{n^3-n}{5}$ متناقصة.

2. المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\left(\frac{e}{3}\right)^n$ متناقصة.

3. المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n=n-4ln(n)$ متزايدة تماما ابتداءا من رتبة معينة.

4. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\frac{e^n-n}{2^n+1}$ ، لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{e}{2}$.

5. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\frac{ln(4n)}{ln(3n)}$ ، لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$.

الحل

1. خطأ: من اجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{5}-\frac{n^3-n}{5}=\frac{3n^2+3n}{5}\geq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

2. صحيح: من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{e}{3}\right)^n}=\frac{e}{3}<1$

ومنه $v_{n+1}\leq v_n$ ، إذن المتتالية (v_n) متناقصة.

3. صحيح: لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-4ln\,x$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $w_n=f(n)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=1-\frac{4}{x}=\frac{x-4}{x}$.

إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $x-4$. ومنه على $]0;4]$ الدالة f متناقصة تماما و على $[4;+\infty[$ متزايدة تماما ، إذن المتتالية (w_n) متزايدة تماما ابتداءا من الرتبة 4.

4. خطأ: من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=\frac{e^n\left(1-\frac{n}{e^n}\right)}{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}=\left(\frac{e}{2}\right)^n\frac{1-\frac{n}{e^n}}{1+\frac{1}{2^n}}$

بما أن $\frac{e}{2}>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n=+\infty$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ ومنه:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

5. **صحيح**: من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا : $v_n = \dfrac{ln(n)+ln4}{ln(n)+ln3}$.

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = f(n)$ حيث f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ :

$f(x) = \dfrac{ln\,x + ln\,4}{ln\,x + ln\,3}$. بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \cancel{\dfrac{ln\,x}{ln\,x}}\left(\dfrac{1+\dfrac{l\,n\,4}{ln\,x}}{1+\dfrac{ln\,3}{ln\,x}}\right) = 1$ فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

تمرين 03

جدول التغيرات المقابل هو لدالة f .

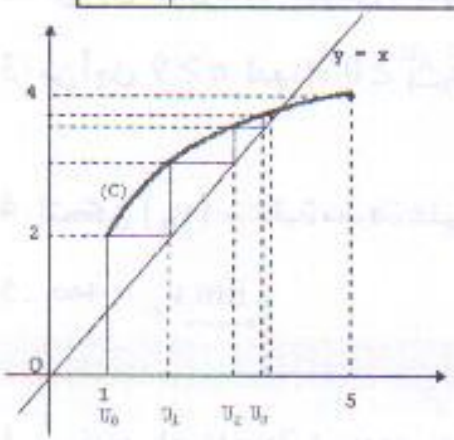
x	1	5
$f(x)$	2 ↗	4

(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1 \le u_n \le 5$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \le u_{n+1}$.
3. ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f على المجال $[1;5]$

الشكل المقابل يمثل التمثيل البياني للمتتالية المرفقة (u_n)



الحل

1. **صحيح**: نبين ذلك بالتراجع . نضع $p(n)$: " $1 \le u_n \le 5$ "

* المرحلة 1: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 1$ و $1 \le 1 \le 5$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $1 \le u_n \le 5$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي :

$1 \le u_{n+1} \le 5$. لدينا : $1 \le u_n \le 5$ وبما أن f متزايدة على المجال $[1;5]$ فإن :

$f(1) \le f(u_n) \le f(5)$ أي $2 \le u_{n+1} \le 4$ ومنه : $1 \le u_{n+1} \le 5$.

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1 \le u_n \le 5$.

2. **صحيح**: $u_n \le u_{n+1}$ تعني ان (u_n) متزايدة .

نبين ذلك بالتراجع . نضع $p(n)$: " $u_n \le u_{n+1}$ "

* المرحلة 1: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$

بالفعل: $u_1 \ge u_0$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \leq u_{n+1}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. لدينا : $u_n \leq u_{n+1}$ وبما أن f متزايدة على المجال $[1;5]$ فإن : $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \leq u_{n+1}$.

3. صحيح : نلاحظ ان حدود المتتالية (u_n) تنشئ على محور الفواصل ابتداءا من الحد الأول $u_0 = 1$ وباستعمال المنحني (C) و المستقيم الذي معادلته : $y = x$.

تمرين 04

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_4 = 0$ و $u_6 = -1$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1. أساس المتتالية (u_n) هو $r = -\frac{1}{2}$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = \frac{3-n}{2}$.

3. من أجل $n \geq 9$ لدينا : $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \geq 0$.

4. لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \frac{1}{n} e^{u_n}$ ، لدينا : $v_n = e^2 \frac{e^{\frac{n}{2}}}{n}$

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

الحل

1. صحيح : لدينا : $u_6 = u_4 + 2r$ ومنه : $r = \frac{u_6 - u_4}{2} = -\frac{1}{2}$.

2. خطأ : الحد الأول للمتتالية (u_n) هو $u_0 = u_4 - 4r = 0 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ ، ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$ ، إذن: $u_n = 2 + n\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4-n}{2}$.

3. خطأ : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$.

وبما أن : $u_{n-1} = \frac{4-(n-1)}{2} = \frac{5-n}{2}$ ، نجد:

$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \frac{n}{2}\left(2 + \frac{5-n}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{9-n}{2}\right)$ ، ومنه من أجل $n \geq 9$ يكون :

$u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}\leq 0$.

4. **صحيح**: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n=\frac{1}{n}e^{u_n}=\frac{1}{n}e^{\frac{4-n}{2}}=\frac{1}{n}e^{2-\frac{n}{2}}=e^2\frac{e^{\frac{-n}{2}}}{n}$.

5. **خطأ**: لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ و $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{u_n}\right)=0$ ولدينا

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ، إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

تمرين 05

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول: $u_1=2$ و أساسها $q=\frac{1}{3}$. لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\ln(u_n)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا: $u_n=\frac{2}{3^{n+1}}$.

2. (v_n) متتالية حسابية أساسها: $r=-\ln 3$.

3. لدينا: $u_1+u_2+\ldots+u_n=3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

4. لدينا: $v_1+v_2+\ldots+v_n=n\ln 2-\frac{n(n-1)}{2}\ln 3$.

5. لدينا: $u_1\times u_2\times\ldots\times u_n=\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

الحل

1. **خطأ**: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $u_n=u_1q^{n-1}$ ومنه: $u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{3^{n-1}}$.

2. **صحيح**: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n$ و $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})$ ومنه

$v_{n+1}=\ln\left(\frac{1}{3}u_n\right)$ ، لكن: $v_{n+1}=\ln\frac{1}{3}+\ln(u_n)=\ln(u_n)-\ln 3$ ومنه:

$v_{n+1}=v_n-\ln 3$. إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\ln 3$.

3. **خطأ**: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n = u_1\times\frac{1-q^n}{1-q}=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

4. **صحيح**: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $S=v_1+v_2+\ldots+v_n$ ومنه: $S=\frac{n}{2}(v_1+v_n)$

وبما أن: $v_1=ln(u_1)=ln2$ و $v_n=v_1+(n-1)r=ln2-(n-1)ln3$ فإن:

$v_1+v_n=2ln2-(n-1)ln3$ ومنه: $S=nln2-\frac{n(n-1)}{2}ln3$

يمكن تبسيط العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$S=ln\left(2^n\right)-ln\left(3^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)=ln\left[\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}\right].$$

5. من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $S=v_1+v_2+\ldots+v_n$ ومنه:

$S=ln(u_1)+\ldots+ln(u_n)$ ومنه: $S=ln(u_1\times u_2\times\ldots\times u_n)$. إذن:

$u_1\times u_2\times\ldots\times u_n=e^S$ ، وبالتالي: $u_1\times u_2\times\ldots\times u_n=\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

تمرين 06

نعتبر الأعداد المركبة z_n المعرفة بـ: $z_0=1$ ومن أجل من أجل كل عدد طبيعي n:

$z_{n+1}=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_n$. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

وحدة الطول $1cm$ ، نرمز بـ M_n إلى النقطة ذات اللاحقة z_n .

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1. $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
2. $z_3=-8$.
3. المتتالية (d_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $d_n=M_nM_{n+1}$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول $\sqrt{3}$.
4. L طول الخط المنكسر المؤلف من النقاط: $M_0;\ M_1;\ldots;M_n$ يساوي:

$\sqrt{3}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\ cm$.

5. L أكبر من أو يساوي $1Km$ من أجل: $n\geq 16$.

الحل

1. **خطأ**: $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. **صحيح**: لدينا : $z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_0=1+i\sqrt{3}=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

و: $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_1=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\times 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}=4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

و: $z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_2=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\times 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}=8\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}=8\,e^{i\pi}=8(-1)=-8$

3. **صحيح**: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $d_{n+1}=M_{n+1}M_{n+2}=\left|z_{n+2}-z_{n+1}\right|$

ومنه : $d_{n+1}=\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)z_{n+1}-\left(1+i\sqrt{3}\right)z_n\right|=\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(z_{n+1}-z_n\right)\right|$ ومنه :

$d_{n+1}=\left|1+i\sqrt{3}\right|\times\left|z_{n+1}-z_n\right|=2\,M_nM_{n+1}$ ، إذن : $d_{n+1}=2\,d_n$. وبالتالي :

المتتالية (d_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $d_n=M_nM_{n+1}$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول هو :

$$d_0=M_0M_1=\left|z_1-z_0\right|=\left|1+i\sqrt{3}-1\right|=\left|i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$$

4. **خطأ**: بالسنتمتر لدينا :

$L=M_0M_1+M_1M_2+\ldots+M_{n-1}M_n=d_0+d_1+\ldots+d_{n-1}$ ، لكن :

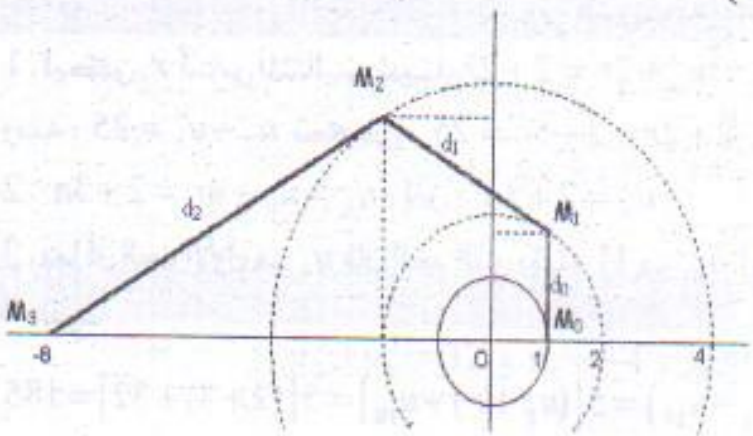
$L=d_0\frac{1-q^n}{1-q}=\sqrt{3}\frac{1-2^n}{1-2}=\sqrt{3}\left(2^n-1\right)$.

5. **صحيح**: L أكبر من أو يساوي $1Km$ معناه : $L\geq 10^5$ ، ومنه : $\sqrt{3}\left(2^n-1\right)\geq 10^5$

أي : $2^n\geq\frac{10^5}{\sqrt{3}}+1$ ومنه : $\ln\left(2^n\right)\geq\ln\left(\frac{10^5}{\sqrt{3}}+1\right)$ ، ومنه : $n\ln 2\geq\ln\left(\frac{10^5}{\sqrt{3}}+1\right)$ ، ومنه :

$$n\geq\frac{\ln\left(\frac{10^5}{\sqrt{3}}+1\right)}{\ln 2}$$

إذن : L أكبر من أو يساوي $1Km$ من أجل : $n\geq 16$.



تمرين 07

1. برهن بالتراجع على أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$$

2. استنتج قيمة المجموع: $S=1+3+5+...+101$

الحل

1. نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

* المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $1=(0+1)^2=1$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$$1+3+5+...+(2(n+1)+1)=((n+1)+1)^2=(n+2)^2.$$

لدينا : $1+3+5+...+2n+1+(2(n+1)+1)=(1+3+5+...+2n+1)+2n+3$

$$=(n+1)^2+2n+3=n^2+4n+4$$

$$=(n+2)^2$$

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

2. لدينا :

$$S=1+3+5+...+101=1+3+...+(2\times50+1)=(50+1)^2=(51)^2=2601$$

تمرين 08

(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0=2$

وبالعلاقة: $u_2+u_5=25$.

1. عين أساس المتتالية الحسابية (u_n).

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3. أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11.

4. أحسب المجموع: $S=u_1+u_2+...+u_{10}$.

الحل

1. ليكن r أساس المتتالية، لدينا $u_2=u_0+2r=2+2r$ و $u_5=u_0+5r=2+5r$،

ومنه: $u_2+u_5=25$ تكافئ: $2+2r+2+5r=25$، ومنه: $r=3$.

2. $u_n=u_0+nr=2+3n$، إذن: $u_n=2+3n$.

3. بما أن الحد الأول هو u_0 فإن الحد الذي رتبته 11 هو u_{10}، ولدينا: $u_{10}=2+3\times10=32$.

4. لدينا :

$$S=u_1+u_2+...+u_{10}=\frac{10}{2}(u_1+u_{10})=5[(u_0+r)+u_{10}]=5[(2+3)+32]=185$$

تمرين 09

(u_n) متتالية حسابية حيث : $(I)...\begin{cases} u_0+u_3=6 \\ u_2+u_5=22 \end{cases}$

1. أوجد الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية.
2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n .
3. هل العدد 2013 هو حد من حدود المتتالية ؟
4. ماهي قيمة ورتبة الحد الذي نبدء منه حتى يكون مجموع 20 حدا متتابعا من هذه المتتالية مساويا 1100 ؟.
5. أحسب بدلالة n الجداء : $P_n=2011^1\times2011^5\times2011^9\times...\times2011^{4n+1}$.

الحل

1. لدينا : $u_2=u_0+2r$ و $u_3=u_0+3r$ و $u_5=u_0+5r$ ، بالتعويض في الجملة (I)

نجد : $\begin{cases} 2u_0+3r=6 \\ 2u_0+7r=22 \end{cases}$ ، بحل الجملة الأخيرة نجد : $r=4$ و $u_0=-3$.

2. لدينا : $u_n=u_0+nr=4n-3$ ، إذن : $u_n=4n-3$.

3. $u_n=2013$ تكافئ $4n-3=2013$ ، أي $n=504$. ومنه : $u_{504}=2013$

إذن : العدد 2013 هو حد من حدود المتتالية وهو الحد u_{504} .

4. نرمز بـ u_m إلى الحد الذي نبدء منه ، فيكون الحد العشرون u_{m+19} .

لدينا : $u_m+u_{m+1}+...+u_{m+19}=\frac{20}{2}(u_m+u_{m+19})=10(u_m+u_{m+19})=1100$

لكن : $u_m=4m-3$ و $u_{m+19}=4(m+19)-3=4m+73$ ، ومنه :

$10(u_m+u_{m+19})=1100$ تكافئ $4m-3+4m+73=110$ ، ومنه : $m=5$.

إذن الحد الذي نبدء منه هو u_5 وقيمته : $u_5=4\times5-3=17$.

5. لدينا : $P_n=2011^1\times2011^5\times2011^9\times...\times2011^{4n+1}=2011^{(1+5+9+...+4n+1)}$

لكن : $1+5+9+...+4n+1$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حدا من حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 4 و حدها الأخير $4n+1$ ، ومنه :

$1+5+9+...+4n+1=\frac{n+1}{2}(1+4n+1)=(n+1)(2n+1)$.

ملاحظة : $1+5+9+...+4n+1=u_1+u_2+...+u_{n+1}$.

ومنه : $P_n=2011^{(n+1)(2n+1)}$.

تمرين 10

(u_n) متتالية حسابية متزايدة حدها الأول : $u_1=-4$ و $u_2^2+u_3^2=37$.

1. أوجد r أساس هذه المتتالية.

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3. هل يوجد حد من حدود المتتالية يساوي 486 ؟ ماهي رتبته ؟

4. احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

5. أوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 282$.

الحل

1. ليكن r أساس هذه المتتالية. ومنه: $u_2 = u_1 + r = -4 + r$ و $u_3 = u_1 + 2r = -4 + 2r$

ومنه: $u_2^2 + u_3^2 = 37$ تكافئ $(-4+r)^2 + (-4+2r)^2 = 37$ أي $5r^2 - 24r - 5 = 0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 676 تقبل حلين متمايزين هما: 5 و $-\frac{1}{5}$.

لكن (u_n) متتالية حسابية متزايدة ومنه: $r > 0$، إذن: $r = 5$.

2. لدينا: $u_n = u_1 + (n-1)r$، ومنه: $u_n = 5n - 9$.

3. $u_n = 486$ تكافئ $5n - 9 = 486$، أي $n = 99$. ومنه: $u_{99} = 486$

إذن: يوجد حد من حدود المتتالية يساوي 486 وهو الحد ذو الرتبة 99.

4. لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(-4 + 5n - 9) = \frac{n(5n-13)}{2}$

إذن: $S_n = \frac{n(5n-13)}{2}$.

5. $S_n = 282$ تكافئ $\frac{n(5n-13)}{2} = 282$، أي: $5n^2 - 13n - 564 = 0$. وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 11449 تقبل حلين متمايزين هما: 12 و $-\frac{47}{5}$. لكن n عدد طبيعي ومنه: $n = 12$.

تمرين 11

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و $(I)...\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 6 \end{cases}$

1. عين الحدود v_1، v_2 و v_3 للمتتالية وأساسها.

2. أحسب الحد العام v_n بدلالة n.

3. عبر بدلالة n عن المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

4. عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = -21$.

الحل

1. v_2 هو الوسط الحسابي للحدين v_1 و v_3 ومنه: $v_1 + v_3 = 2v_2$، ومنه: $v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4}$

تكافئ $3v_2=\frac{3}{4}$ ومنه : $v_2=\frac{1}{4}$. نعوض $v_2=\frac{1}{4}$ في الجملة : (I) نجد الجملة :

$\begin{cases} v_1+v_3=\frac{1}{2} \\ v_1-v_3=5 \end{cases}$ ، وبحل هذه الجملة الأخيرة نجد : $v_1=\frac{11}{4}$ و $v_3=-\frac{9}{4}$.

ليكن r أساس المتتالية ، لدينا : $r=u_2-u_1=u_3-u_2=-\frac{5}{2}$ ، أي : $r=-\frac{5}{2}$.

2 . لدينا : $v_n=v_1+(n-1)r$ ، ومنه : $v_n=\frac{11}{4}+(n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$ ، أي : $v_n=-\frac{5}{2}n+\frac{11}{4}$.

3 . لدينا : $S_n=v_1+v_2+...+v_n=\frac{n}{2}(v_1+v_n)=\frac{n}{2}\left(\frac{11}{4}-\frac{5}{2}n+\frac{21}{4}\right)=\frac{n}{2}\left(8-\frac{5}{2}n\right)$.

4 . $S_n=-21$ تكافئ $\frac{n}{2}\left(8-\frac{5}{2}n\right)=-21$ ، أي : $-5n^2+16n+84=0$. وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 1936 تقبل حلين متمايزين هما : 6 و $-\frac{14}{5}$. لكن n عدد طبيعي ومنه : $n=6$.

تمرين 12

(u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 و u_2 يساوي 38.

1 . احسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2 .

2 . احسب الحد العام u_n بدلالة n .

3 . احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$.

ثم استنتج المجموع S_5 (يعطى S_5 على شكل كسر غير قابل للاختزال)

الحل

1 . لدينا : $u_0+u_1+u_2=38$ ، لكن : $u_1=u_0\times q=u_0\times\frac{3}{2}$ و $u_2=u_0\times q^2=u_0\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$ ،

ومنه : $u_0+u_1+u_2=38$ تكافئ : $u_0+u_0\times\frac{3}{2}+u_0\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=38$ ، أي : $\frac{19}{4}u_0=38$

ومنه : $u_0=8$. وينتج : $u_1=8\times\frac{3}{2}=12$ و $u_2=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=18$.

إذن : $u_0=8$ ، $u_1=12$ ، $u_2=18$.

2 . لدينا : $u_n=u_0\times q^n=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ، إذن : $u_n=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

3. لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \times \frac{q^n - 1}{q-1} = 8 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 24\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right]$.

ومنه: $S_5 = 24\left[\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1\right] = 24 \times \frac{65}{16} = \frac{195}{2}$.

تمرين 13

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة بحدها الأول u_0 و الأساس q وبحيث:

$8u_6 = 125u_9$.

1. أحسب الأساس q.

2. أحسب بدلالة u_0 و n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

3. عين u_0 بحيث: $\lim_{n \to +\infty} S_n = 150$.

4. نفرض $u_0 = 90$، عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق $u_n \leq 10^{-3}$.

الحل

1. لدينا: $u_6 = u_0 \times q^6$ و $u_9 = u_0 \times q^9$، ومنه: $8u_6 = 125u_9$ تكافئ:

$8u_0 \times q^6 = 125u_0 \times q^9$، أي $q^3 = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$، إذن: $q = \frac{2}{5}$.

2. لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}u_0\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

إذن: $S_n = \frac{5}{3}u_0\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$.

3. بما أن $-1 < \frac{2}{5} < 1$ فإن: $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$، ومنه: $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{5}{3}u_0$.

إذن: $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{5}{3}u_0$ تكافئ $\frac{5}{3}u_0 = 150$، ومنه: $u_0 = 90$.

4. لدينا: $u_n = u_0 \times q^n = 90 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$، ومنه: $u_n \leq 10^{-3}$ تكافئ: $90 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-3}$

أي: $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \frac{10^{-3}}{90}$، أي: $\ln\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \ln\left(\frac{10^{-3}}{90}\right)$، أي: $n\ln\left(\frac{2}{5}\right) \leq \ln\left(\frac{10^{-3}}{90}\right)$، أي:

$n \geq \dfrac{\ln\left(\dfrac{10^{-3}}{90}\right)}{\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)} \approx 12,44$ ، إذن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق $u_n \leq 10^{-3}$ هي 13.

تمرين 14

1. أ/ حل، في $\mathbb{R}$، المعادلة التفاضلية $y' = -2y \ldots (E)$.

ب/ عين f الحل الخاص للمعادلة (E) الذي يحقق $f(0) = 1$.

2. (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = f(n)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ أدرس تقارب المتتالية (u_n).

جـ/ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$، ثم $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

د/ أحسب بدلالة n الجداء: $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$. ثم عين العدد الطبيعي n الذي يحقق: $P_n = e^{-12}$.

الحل

1. أ) حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال: $x \mapsto ce^{-2x}$، حيث c ثابت حقيقي.

ب) لدينا: $f(x) = ce^{-2x}$ وبما أن $f(0) = 1$ فإن: $ce^{-2\times 0} = 1$، أي $c = 1$،

إذن: $f(x) = e^{-2x}$.

2. لدينا: $u_n = f(n)$ تكافئ $u_n = e^{-2n}$.

أ) لدينا: $u_{n+1} = e^{-2(n+1)} = e^{-2} \times e^{-2n} = e^{-2} \times u_n$، ومنه: (u_n) هندسية أساسها e^{-2} وحدها الأول $u_0 = e^{-2\times 0} = 1$.

ب) لدينا: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n} = 0$، ومنه: (u_n) متقاربة نحو العدد: 0.

جـ) لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = e^{-2} \times \dfrac{1-(e^{-2})^n}{1-e^{-2}} = \dfrac{e^{-2}}{1-e^{-2}} \times (1-e^{-2n})$

لدينا: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{e^{-2}}{1-e^{-2}}$ لأن: $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-e^{-2n}) = 1$.

د) لدينا: $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = e^{-2\times 1} \times e^{-2\times 2} \times e^{-2\times 3} \times \ldots \times e^{-2\times n}$

$$= (e^{-2})^1 \times (e^{-2})^2 \times (e^{-2})^3 \times \ldots \times (e^{-2})^n = \left(e^{-2}\right)^{(1+2+3+\ldots+n)}$$

لكن: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، لأن المجموع: $1+2+3+...+n$ يمثل مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول 1 والحد الأخير في هذا المجموع هو n .

ومنه: $P_n=\left(e^{-2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ، ومنه: $P_n=e^{-n^2-n}$.

$P_n=e^{-12}$ تكافئ $e^{-n^2-n}=e^{-12}$ ، أي $-n^2-n=12$ ، أي $n^2+n-12=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 49 تقبل حلين متمايزين هما 3 و -4 (مرفوض)

إذن: $n=3$ ، أي $P_3=e^{-12}$.

تمرين 15

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ و $u_{n+1}=3u_n-6$.

من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-3$.

1ـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، ثم عين أساسها و حدها الأول.

2ـ احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3ـ احسب بدلالة n المجموع: $S=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$ ، ثم استنتج بدلالة n المجموع: $S'=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$.

الحل

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-3=3u_n-9=3(u_n-3)=3v_n$.

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 .

و حدها الأول $v_0=u_0-3=-2$

2. عبارة الحد العام لـ (v_n): $v_n=v_0\times q^n=-2\times 3^n$

3. عبارة الحد العام لـ (u_n): $u_n=v_n+3=-2\times 3^n+3$

4. المجموع S:

$S=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-2\times\frac{1-3^{n+1}}{1-3}=1-3^{n+1}$ ، إذن: $S=1-3^{n+1}$

استنتاج بدلالة n المجموع S' :

$S'=u_0+u_1+u_2+.....+u_n=(v_0+3)+(v_1+3)+(v_2+3).....+(v_n+3)$ ، إذن

$S'=S+3(n+1)$ ، ومنه: $S'=-3^{n+1}+4+3n$.

تمرين 16

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ) نفرض $\alpha=3$

1. أحسب u_1، u_2 و u_3. ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك.

2. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n :

بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

4. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ) نفرض $\alpha = 6$. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل

أ) $\alpha = 3$ ومنه $u_0 = 3$

1. نجد بعد الحساب: $u_1 = 3$ ، $u_2 = 3$ و $u_3 = 3$. يظهر أن المتتالية (u_n) ثابتة.

لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3$.

* المرحلة 1: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 3$.

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n = 3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي: $u_{n+1} = 3$.

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ ومنه $u_{n+1} = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. إذن (u_n) ثابتة.

2. نعم المتتالية (u_n) متقاربة و تتقارب نحو العدد 3.

ب) $\alpha = 2$ ومنه $u_0 = 2$

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$ ومنه

$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = -1$ $(v_0 = u_0 - 3)$.

2. لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ وبما أن $u_n = v_n + 3$ فإن

$u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

3. بما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$. نستنتج أن (u_n) متقاربة وتتقارب نحو العدد 3.

4. نلاحظ أن $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$. بما أن $\frac{1}{3} > 0$ و $u_1 - u_0 > 0$ $\left(u_1 - u_0 = \frac{2}{3}\right)$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ) $\alpha = 6$ ومنه $u_0 = 6$.

بما أن $\frac{1}{3} > 0$ و $u_1 - u_0 < 0$ $(u_1 - u_0 = -2)$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

تمرين 17

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = \alpha(u_n - 2)$.

حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

1. عين العدد α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + 4$.

أ) عين العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها.

ب) من أجل قيمة α المحصل عليها في السؤال أ) أحسب بدلالة n كل من المجموعين:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n \quad \text{و} \quad T_n = (v_0)^3 + (v_1)^3 + (v_2)^3 + \dots + (v_n)^3$$

الحل

1. (u_n) متتالية ثابتة معناه: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n = u_0$.

$u_{n+1} = u_n = u_0$ تكافئ: $u_0 = \alpha(u_0 - 2)$، أي $1 = \alpha(1-2)$، أي: $\alpha = -1$.

2. أ) لدينا: $v_n = u_n + 4$، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \alpha(u_n - 2) + 4 = \alpha(u_n + 4) - 6\alpha + 4 = \alpha \times v_n - 6\alpha + 4$$

أي: $v_{n+1} = \alpha \times v_n - 6\alpha + 4$، وحتى تكون (v_n) متتالية هندسية يكفي أن يكون:

$-6\alpha + 4 = 0$، ومنه: $\alpha = \frac{2}{3}$. إذن: من أجل $\alpha = \frac{2}{3}$ تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

وحدها الأول: $v_0 = u_0 + 4 = 1 + 4 = 5$.

ب) من أجل $\alpha = \frac{2}{3}$ لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n = (v_0 - 4) + (v_1 - 4) + \dots + (v_n - 4)$

$$=(v_0+v_1+...+v_n)-4(n+1)=5\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-4(n+1)=15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-4(n+1)$$

ولدينا: $T_n=(v_0)^3+(v_1)^3+(v_2)^3+....+(v_n)^3=(v_0)^3+(v_0q)^3+(v_0q^2)^3+...+(v_0q^n)^3$

$$=(v_0)^3\left(1+q^3+q^{3\times2}+...+q^{3n}\right)$$

لكن: $1+q^3+q^{3\times2}+...+q^{3n}$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها $q^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

ومنه: $1+q^3+q^{3\times2}+...+q^{3n}=1\times\frac{1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{27}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]$ ، وبالتالي:

$$T_n=125\times\frac{27}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]=\frac{3375}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]$$

تمرين 18

بلغ تعداد سكان بلد 70000000 نسمة في سنة 1995 كما بلغت نسبة النمو الديموغرافي فيه 2% بين سنتي 1995 و 2000.

1. ما هو تعداد سكان هذا البلد سنة 2000؟
2. أ) هل يمكن توقع عدد سكان هذا البلد سنة 2010؟

ب) هل يمكن تعيين السنة التي يتعدى فيها عدد السكان 100000000 نسمة؟

الحل

1. ليكن u_0 عدد سكان هذا البلد سنة 1995 ، أي أن $u_0=70000000$

إذا كان عدد السكان ينمو بنسبة 2% كل سنة فإن $u_1=u_0+\frac{2u_0}{100}$

أي أنه في سنة 1996 يكون عدد السكان هو:

$$u_1=u_0\left(1+\frac{2}{100}\right)=u_0\left(\frac{102}{100}\right)$$

وفي سنة 1997 يكون عدد السكان هو u_2 حيث:

$$u_2=u_1+\frac{2u_1}{100}=u_1\left(1+\frac{2}{100}\right)=u_1\left(\frac{102}{100}\right)=u_0\left(\frac{102}{100}\right)^2$$

أما في سنة 2000 فيكون عدد السكان هو u_5 حيث:

$$u_5 = u_0\left(\frac{102}{100}\right)^5 > 77285656$$

2.أ) في سنة 2010 يكون عدد السكان هو u_{15} حيث:

$$u_{15} = u_0\left(\frac{102}{100}\right)^{15} > 94210783$$

ب) في السنة n يتعدى عدد السكان 100000000 إذا كان: $u_0\left(\frac{102}{100}\right)^n > 100000000$

يكفي البحث عن قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_0\left(\frac{102}{100}\right)^n > 10^6$

$u_0\left(\frac{102}{100}\right)^n > 10^6$ تكافئ $\left(\frac{102}{100}\right)^n > \frac{10^6}{u_0}$ أي $ln\left(\frac{102}{100}\right)^n > ln\frac{10^6}{u_0}$

أي $nln\left(\frac{102}{100}\right) > ln\frac{10^6}{u_0}$ ، أي $n > \frac{ln\frac{10^6}{u_0}}{ln\left(\frac{102}{100}\right)}$

وباستعمال آلة حاسبة نجد أن هذا الشرط يتحقق ابتداء من: $n = 19$.

تمرين 19

(v_n) متتالية حدها الأول v_0 موجب تماما وحيث من أجل كل عدد طبيعي n:

$v_{n+1} - v_n = 0,02v_n$.

1. أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها. ما هو اتجاه تغير هذه المتتالية؟

ب- عبر عن v_n بدلالة n و v_0.

2. نضع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

أ- أحسب S_n بدلالة n و v_0.

ب- أحسب $(1,02)^{35}$ ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n \geq 50v_0$.

3. بلغ عدد سكان بلد بـ 30 مليون نسمة يوم 1 جانفي 2000 ، نفرض أن عدد السكان يرتفع كل سنة بنسبة 2%.

- كم يبلغ عدد سكان هذا البلد يوم 1 جانفي 2020 ؟

الحل

1. أ- من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - v_n = 0,02v_n$

معناه $v_{n+1}=1,02v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,02$.

بما أن $q>1$ و v_0 موجب تماما فإن المتتالية (v_n) متزايدة تماما .

ب- لدينا $v_n=v_0q^n$ أي $v_n=v_0(1,02)^n$.

2.أ- $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\dfrac{q^n-1}{q-1}$

أي : $S_n=v_0\dfrac{(1,02)^n-1}{0,02}=50v_0\left[(1,02)^n-1\right]$.

ب- $(1,02)^{35}\approx 1,9998$.

$S_n\geq 50v_0$ معناه $50v_0\left[(1,02)^n-1\right]\geq 50v_0$ ومعناه $(1,02)^n-1\geq 1$ أي $(1,02)^n\geq 2$.

ولدينا $(1,02)^{36}\approx 2,0398$ إذن $n\geq 36$.

3. نفرض أن عدد السكان هو u_n في السنة n بما أنه يرتفع بنسبة 2% فإن

$u_{n+1}=u_n+\dfrac{2}{100}u_n$ أي $u_{n+1}=1,02u_n$ ومنه المتتالية (u_n) هي نفسها المتتالية (v_n).

في يوم 1 جانفي 2000 لدينا $v_0=30$ مقدرا بالمليون نسمة، وفي يوم 1 جانفي 2020

يكون v_{20} إذن $v_{20}=v_0(1,02)^{20}=30\times(1,02)^{20}$

أي $v_{20}\approx 44,578422$ بالمليون نسمة.

تمرين 20

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n}$.

1. أحسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 . (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

2. (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=\dfrac{n}{n+1}$.

أ) قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) والحدود الأربعة الأولى للمتتالية (w_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=w_n$

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

أ) بين أن: $v_1+v_2+v_3=-\ln 4$.

ب) ليكن S_n المجموع المعرف كما يلي: $S_n=v_1+v_2+...+v_n$

- أكتب S_n بدلالة n. ثم عين نهاية المجموع S_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

الحل

1. لدينا: $u_0=0$ ، $u_1=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$ ، $u_2=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ ، $u_3=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$.

2. أ) لدينا: $w_0=0$ ، $w_1=\frac{1}{2}$ ، $w_2=\frac{2}{3}$ ، $w_3=\frac{3}{4}$.

نلاحظ أن: $u_0=w_0$ ، $u_1=w_1$ ، $u_2=w_2$ ، $u_3=w_3$.

ب) نضع: $p(n)$ " من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=w_n$ ".

- المرحلة الأولى (الخاصية الإبتدائية): لدينا $u_0=w_0$ أي $p(0)$ محققة.

- المرحلة الثانية (الوراثة): نفرض صحة $p(n)$ أي $u_n=w_n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}=w_{n+1}$ ، أي نبين أن: $\frac{1}{2-u_n}=\frac{n+1}{n+2}$.

لدينا: $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-w_n}=\frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}$

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=w_n$.

3. أ) لدينا: $v_1=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $v_2=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ، $v_3=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

ومنه: بتطبيق الخاصية الأساسية للدالة اللوغرتمية: ($\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$)

نجد: $v_1+v_2+v_3=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ln 3-\ln 4=-\ln 4$

ب) لدينا: $S_n=v_1+v_2+...+v_n=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+...+\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n}{n+1}$

ومنه: $S_n=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+...+\ln(n-1)-\ln n+\ln n-\ln(n+1)$

إذن: $S_n=-\ln(n+1)$.

- واضح أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\infty$.

تمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=u_n+2n+3$

1. أدرس رتابة المتتالية (u_n).

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > n^2$.

ب/ ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

3. خمن عبارة u_n بدلالة n، ثم برهن صحة تخمينك الذي وضعته.

الحل

1. للمقارنة بين u_n و u_{n+1}، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n = 2n+3 > 0$ لأن $n \geq 0$.

إذن $u_{n+1} > u_n$، و بالتالي (u_n) متزايدة تماما.

2. نبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > n^2$.

- المرحلة الأولى (الخاصية الإبتدائية):من أجل $n=0$، $p(0)$ محققة لأن $u_0 = 1 > 0^2$.

- المرحلة الثانية (الوراثة): نفرض صحة $p(n)$ أي: $u_n > n^2$، و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $u_{n+1} > (n+1)^2$.

لدينا $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$، و لدينا فرضا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > n^2$،

نستنتج عندئذ أن: $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$، و تكتب هذه المتباينة هكذا:

$u_{n+1} > (n+1)^2 + 2$.

و بما أن $(n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$، نستنتج أن: $u_{n+1} > (n+1)^2$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > n^2$.

3. نعلم أن $u_0 = 1$، و باستعمال علاقة التراجع $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

نجد هكذا: $u_1 = 4$، $u_2 = 9$، $u_3 = 9$، $u_4 = 25$.

التخمين: الأعداد : 1 ، 4 ، 9 ، 16 ، 25 هي مربعات لأعداد طبيعية غير معدومة

($1 = 1^2$ ، $4 = 2^2$ ، $9 = 3^2$ ، $16 = 4^2$ ، $25 = 5^2$)،

و بالتالي يمكن أن نضع التخمين التالي: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = (n+1)^2$.

برهان صحة التخمين:

- المرحلة الأولى (الخاصية الإبتدائية): من أجل $n=0$، $p(0)$ محققة لأن $u_0 = 1 = (0+1)^2$.

- المرحلة الثانية (الوراثة): نفرض صحة $p(n)$ أي: $u_n = (n+1)^2$، و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $u_{n+1} = (n+2)^2$.

لدينا $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$، و لدينا فرضا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (n+1)^2$،

نستنتج عندئذ أن $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2n + 3$ أي $u_{n+1} = n^2 + 4n + 4$ أي $u_{n+1} = (n+2)^2$

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (n+1)^2$.

تمرين 22

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1. أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

- أحسب w_n بدلالة n.

2. أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.

3. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4. عين u_n و v_n بدلالة n.

5. استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

الحل

1. نحسب w_{n+1} بدلالة w_n.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12} w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = 11$. ومنه

$$w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

2. نحسب t_{n+1} بدلالة t_n.

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$

$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. و منه من أجل كل عدد طبيعي n :

$t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

3. لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - v_n) = -\frac{2}{3}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

لدينا: $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4. لدينا: $\begin{cases} u_n - v_n = 11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$

5. $-1 < \frac{1}{12} < 1$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = 4$.

تمرين 23

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$

1. أحسب الحدود: u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 . (يطلب كتابة هذه الحدود على الشكل 2^α).

2. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = ln(u_n) - ln4$.

أ/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية معينا أساسها وحدها الأول.

ب/ أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ/ أحسب: $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

د/ عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق: $u_n > 3,96$.

الحل

1. لدينا: $u_2^2 = 4u_1 = 4$ أي: $u_2 = 2$.

$u_3^2 = 4u_2 = 8$ أي: $u_3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2}$.

$u_4^2 = 4u_3 = 2^2\times2^{3/2} = 2^{7/2}$ إذن: $u_4 = 2^{7/4}$.

$u_5^2 = 4u_4 = 2^2\times2^{7/4} = 2^{15/4}$ إذن: $u_5 = 2^{15/8}$.

2. أ/ لدينا: $v_n = ln(u_n) - ln4 = ln\frac{u_n}{4}$ ومنه:

$$v_{n+1} = ln(u_{n+1}) - ln4 = ln(2u_n^{\frac{1}{2}}) - ln4 = ln2 + \frac{1}{2}lnu_n - ln4 = \frac{1}{2}lnu_n + ln2 - 2ln2$$

$$= \frac{1}{2}lnu_n - ln2 = \frac{1}{2}lnu_n - ln4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(lnu_n - ln4) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1 = ln(u_1) - ln4 = -ln4$

ب/ لدينا: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = -\ln 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{\ln 4}{2^{n-1}}$.

ومنه: $v_n = \ln\frac{u_n}{4}$ تكافئ $e^{v_n} = \frac{u_n}{4}$ أي $u_n = 4e^{v_n}$.

إذن: $u_n = 4e^{v_n} = 4e^{-\frac{\ln 4}{2^{n-1}}} = 4e^{-\frac{1}{2^{n-1}}\ln 4} = 4e^{\ln 4^{-\frac{1}{2^{n-1}}}} = 4\times 4^{-\frac{1}{2^{n-1}}} = 4^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}$

جـ/ لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0$ ، إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} = 4$.

د/ لدينا: $u_n > 3,96$ تكافئ $4^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} > 3,96$ أي $\ln 4^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} > \ln 3,96$ أي

$\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\ln 4 > \ln 3,96$ أي $1-\frac{1}{2^{n-1}} > \frac{\ln 3,96}{\ln 4}$ أي $-\frac{1}{2^{n-1}} > \frac{\ln 3,96}{\ln 4} - 1$ ، أي

$\frac{1}{2^{n-1}} < 1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}$ أي $2^{1-n} < 1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}$ أي $\ln 2^{1-n} < \ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)$ ، أي

$(1-n)\ln 2 < \ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)$ أي $1-n < \frac{\ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)}{\ln 2}$ ، أي

$n-1 > -\frac{\ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)}{\ln 2}$ أي $n > 1-\frac{\ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)}{\ln 2} \approx 8,1078$.

إذن: $u_n > 3,96$ من أجل $n \geq 9$.

تمرين 24

1. (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما وبحيث:

$\ln u_3 - \ln u_4 = -1$ و $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$.

أ) عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_1 .

ب) اكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب الجداء: $P_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$

2. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

جـ) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\ln S_n = 0$.

الحل

1. أ) ليكن q أساس المتتالية (u_n)، لدينا: $\ln u_3 - \ln u_4 = -1$

تكافئ $\ln\left(\frac{u_3}{u_4}\right) = -1$، ومنه: $\frac{u_3}{u_4} = e^{-1}$، أي: $\frac{u_4}{u_3} = e = q$.

ومن جهة: $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$ تكافئ: $\ln(u_3 \times u_4) = 5$، أي:

$u_3 \times u_4 = e^5$، أي: $(u_1 \times q^2) \times (u_1 \times q^3) = e^5$، أي: $u_1^2 \times e^5 = e^5$

أي: $u_1 = 1$ أو $u_1 = -1$ (مرفوض)، ومنه: $q = e$، $u_1 = 1$.

ب) $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$ ومنه: $u_n = e^{n-1}$.

ومنه: $P_n = \underbrace{u_1 \times u_2 \times ... \times u_n}_{n \text{ عامل}}$

$$P_n = u_1 \times (u_1 \times q) \times (u_1 \times q^2) \times (u_1 \times q^3) \times ... \times (u_1 \times q^{n-1})$$

$$= u_1^n \times q^{1+2+3+...+n-1} = u_1^n \times q^{\left[\frac{(n-1)}{2} \times (1+n-1)\right]} = e^{\left[\frac{n}{2}(n-1)\right]}$$

2. أ) $v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n = \ln(e^{(n+1)-1}) - 2\ln e^{(n-1)} = n - 2(n-1) = -n+2$

ومنه: $v_n = -n+2$، ولدينا: $v_{n+1} - v_n = -(n+1)+2-(-n+2) = -1$.

ومنه: (v_n) حسابية أساسها: -1، وحدها الأول: $v_1 = -1+2 = 1$

ب) $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(1-n+2) = \frac{n}{2}(-n+3)$

جـ) $\ln S_n = 0$ تكافئ $\frac{n}{2}(-n+3) = 1$ أي: $n^2 - 3n + 2 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية

تقبل حلين: 1 و 2، إذن: $n = 1$ أو $n = 2$.

تمرين 25

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{4}$ و $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$.

1. احسب u_1 و u_2.

2. أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل.

3. أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$.

ب) استنتج أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

الحل

1. $u_1 = u_0^2 + \frac{u_0}{2} = \frac{3}{16}$ ، $u_2 = u_1^2 + \frac{u_1}{2} = \frac{33}{256}$.

2. أ) نضع $P(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$.

- الخاصية الابتدائية: $P(0)$: $0 < u_0 \leq \frac{1}{4}$ ، أي $0 < \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ محققة.

- الوراثة: نفرض صحة $P(n)$ أي $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$.

لدينا: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ ومنه: $0 < \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{8}$...(1) ، ولدينا: $0 < u_n^2 \leq \frac{1}{16}$...(2) ، بجمع (1) و (2) طرفا بطرف نجد: $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$.

ب) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{u_n}{2} - u_n = u_n\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

بما أن: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ فإن: $-\frac{1}{2} < u_n - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} < 0$ ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن (u_n) متناقصة تماما.

- طريقة أخرى: استعمال البرهان بالتراجع.

جـ) (u_n) محدودة من الأدنى ومتناقصة تماما فهي متقاربة.

3. أ) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = u_n^2 + \frac{u_n}{2} - \frac{3}{4}u_n = u_n\left(u_n - \frac{1}{4}\right)$.

وبما أن: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ فإن $u_n - \frac{1}{4} \leq 0$ ومنه $u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n \leq 0$.

- طريقة أخرى: استعمال البرهان بالتراجع.

ب) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$ ومنه:

$$u_n \le \frac{3}{4}u_{n-1}$$

$$u_{n-1} \le \frac{3}{4}u_{n-2}$$

$$u_{n-2} \le \frac{3}{4}u_{n-3}$$

.

.

$$u_2 \le \frac{3}{4}u_1$$

$$u_1 \le \frac{3}{4}u_0$$

بضرب المتباينات طرفا بطرف نجد :

$$u_n \times \cancel{u_{n-1}} \times \cancel{u_{n-2}} \times \ldots \times \cancel{u_2} \times \cancel{u_1} \le \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \cancel{u_{n-1}} \times \cancel{u_{n-2}} \times \ldots \times \cancel{u_1} \times u_0$$

ومنه: $u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$.

- طريقة أخرى : استعمال البرهان بالتراجع .

بما أن: $0 < u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (لأن: $-1 < \frac{3}{4} < 1$)

فحسب مبرهنة الحصر نجد: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

تمرين 26

1 . لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 5cm$).

أ) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ) أنشئ المنحني (C) .

د) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين .

هـ) حل المعادلة $f(x) = m$ في الحالتين : $m = 0$ و $m = \frac{1}{e}$.

2. (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$ حيث $0 < \alpha < 1$.

أ) أثبت بالتراجع أنه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 0$.

ب) أثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها .

3. (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = \ln u_n$.

أ) أثبت أنه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = w_n - w_{n+1}$.

ب) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ، أثبت أن : $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

جـ) استنتج $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

الحل

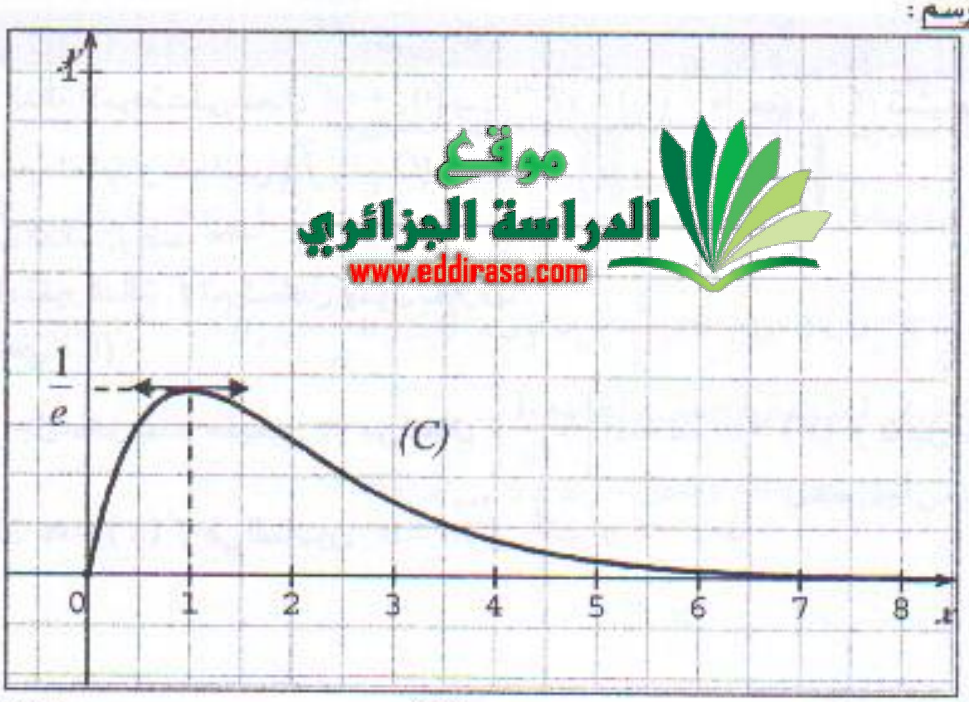
1. أ) لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} -Xe^{X} = 0$

ب) لدينا : $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

إن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $(1-x)$. فيكون جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

جـ) الرسم :



د) يظهر من البيان أن من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]0;\frac{1}{e}\right[$ المستقيم الذي معادلته $y=m$ يقطع المنحني (C) في نقطتين وبالتالي المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين .

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة ، من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]0;\frac{1}{e}\right[$:

الدالة f على المجال $]0;1[$ مستمرة ومتزايدة تماما .

الدالة f على المجال $]1;+\infty[$ مستمرة ومتناقصة تماما .

هـ) من جدول التغيرات نلاحظ أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو العدد 0 ،

و $f(x)=\frac{1}{e}$ تقبل حلا وحيدا هو العدد 1 .

2. $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=u_n e^{-u_n} \end{cases}$.

أ) نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

* المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0=\alpha>0$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n>0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1}>0$.

لدينا : $u_n>0$ و $e^{-u_n}>0$ ومنه $u_n e^{-u_n}$ أي $u_{n+1}>0$.

ب) لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n e^{-u_n}-u_n=u_n(e^{-u_n}-1)$. لكن :

$u_n>0$ ومنه : $-u_n<0$ ومنه $e^{-u_n}<1$ ومنه $e^{-u_n}-1<0$. إذن : $u_n(e^{-u_n}-1)<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$. وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ) المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الادنى بالعدد 0 فهي متقاربة ، لتكن l نهايتها .

إن l يحقق : $le^{-l}=l$ أي $(l-1)e^{-l}=0$ أي $l=0$ أو $l=1$ (مرفوض).

ومنه: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=0$

3. $w_n=\ln u_n$.

أ) لدينا : $u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$ تكافئ $\ln u_{n+1}=\ln u_n+\ln e^{-u_n}=\ln u_n-u_n$ أي

$w_{n+1}=w_n-u_n$ ومنه : $u_n=w_n-w_{n+1}$.

ب) لدينا :

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=w_0-\cancel{w_1}+\cancel{w_1}-\cancel{w_2}+...+\cancel{w_{n-1}}-\cancel{w_n}+\cancel{w_n}-w_{n+1}=w_0-w_{n+1}$$

جـ) لدينا : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n=+\infty$