الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام

و التكنولوجي

كتاب الأستاذ

المؤلفون:	**محمد فاتح مراد**	**مفتش التربية و التكوين**
	جمال تاوريرت	**مفتش التربية و التكوين**
	محمد قورين	**مفتش التربية و التكوين**
	عبد الحفيظ فلاح	**أستاذ التعليم الثانوي**
	عبد المؤمن موس	**أستاذ التعليم الثانوي**
	غريسي بلجيلالي	**أستاذ التعليم الثانوي**

كتاب الأستاذ

شعبة:

- **تسيير و اقتصاد**

الباب الأول

المتتاليات العددية

الأنشطة

<u>النشاط الأول</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثاني</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة مفهوم المتتالية المحدودة.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتالية المحدودة و المتتالية الرتيبة " و يتم إنجازه ضمن أفواج كما يتم استعمال جهاز الداتاشو.

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثالث</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة مبدأ الاستدلال بالتراجع.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبدأ الاستدلال بالتراجع " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو.

<u>الحل:</u> يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

<u>النشاط الرابع</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> نمذجة وضعية و مقاربة المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ " و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

<u>النمو الديموغرافي</u>

<u>تصحيح:</u> /

الهدف: توظيف المتتاليتين الهندسية و الحسابية في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تطور نسبة الزبناء

تصحيح: الزبائن عوض الزبناء

الهدف: توظيف المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تخمين عبارة الحد العام لمتتالية ثم اثباتها

تصحيح: /

الهدف: التخمين ثم الإثبات باستعمال الاستدلال بالتراجع أو باستعمال متتالية مساعدة.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - تذكير حول المتتاليات العددية .

4 ليكن n عددا طبيعيا : $v_{n+1}-v_n=(3u_{n+1}-1)-(3u_n-1)$

معناه $v_{n+1}-v_n=3u_{n+1}-3u_n=3(u_{n+1}-u_n)$ ومعناه $v_{n+1}-v_n=3r$ إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $3r$.

ليكن n عددا طبيعيا : $w_{n+1}-w_n=(u_{2n+2}+3)-(u_{2n}+3)=u_{2n+2}-u_{2n}$

لدينا : $u_{2n+2}=u_{2n}+(2n+2-2n)r=2r$ إذن $w_{n+1}-w_n=u_{2n}+2r-u_{2n}=2r$ ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $2r$.

3 - اتجاه تغيّر ورتابة متتالية .

15 1) لدينا $u_n=\dfrac{1-n^2}{n}=\dfrac{1}{n}-n$ و $u_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}-n-1$ ومنه

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-n-1-\dfrac{1}{n}+n=\dfrac{-1}{n(n+1)}-1$.

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ $n(n+1)>0$, ومنه $\dfrac{-1}{n(n+1)}<0$ أي $\dfrac{-1}{n(n+1)}-1<-1$ إذن $\dfrac{-1}{n(n+1)}-1<0$

وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $u_{n+1} - u_n < 0$. ينتج من هذا أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$ ومنه $u_n = f(n)$.

لدينا $f(x) = \frac{1}{x} - x$ ومنه الدالة f هي مجموع دالتين ، التآلفية $x \mapsto -x$ والدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ وكلتا هما متناقصتين تماما على $]0;+\infty[$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

16 1) لدينا $u_n = \frac{-2n^2+3n+1}{n} = -2n+3+\frac{1}{n}$ و $u_{n+1} = -2n-2+3+\frac{1}{n+1}$ ومنه

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - 2 = \frac{-1}{n(n+1)} - 2$.

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $n(n+1) > 0$, ومنه $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$ أي $\frac{-1}{n(n+1)} - 2 < -2$ إذن $\frac{-1}{n(n+1)} - 2 < 0$

وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $u_{n+1} - u_n < 0$. ينتج من هذا أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $f(x) = \frac{-2x^2+3x+1}{x}$ ومنه $u_n = f(n)$.

لدينا $f(x) = (-2x+3) + \frac{1}{x}$ ومنه الدالة f هي مجموع دالتين ، التآلفية $x \mapsto -2x+3$ والدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ وكلتا هما متناقصتين تماما على $]0;+\infty[$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

17

استعمال التعريف : ليكن n عددا طبيعيا ,

$$u_{n+1} - u_n = -3(n+1)^2 - 3(n+1) + 3n^2 + 3n = -6n - 6 = -6(n+1)$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

استعمال الدالة المرفقة: نعتبر الدالة $f : x \mapsto -3x^2 - 3x + \frac{5}{4}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = -6x - 3$ من اجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $f'(x) < 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

18 1) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{4^n} = \frac{4n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^2$

2) من أجل كل $n \geq 1$ فإن $n + n \geq n+1$ معناه $2n \geq n+1$ أي $\frac{2n}{n+1} \geq 1$ ويكافئ $\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 \geq 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن المتتالية (u_n) متزايدة .

تمارين للتّعـمّـق

1 ــ تذكير حول المتتاليات العددية .

38 1) لدينا $u_1 = 500$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_{n+1} = u_n + 50$ ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 50$.

ومنه $u_n = u_1 + (n-1)r$ وبالتالي : $u_n = 50n + 450$.

2) المبلغ الموضوع في أول ديسمبر 2007 هو u_n حيث $n=8\times12=96$ أي u_{96}

و $u_{96}=50\times96+450=5250\,DA$

3) المبلغ المجموع إلى غاية 31 ديسمبر 2007 هو $S=u_1+u_2+...+u_{96}=\frac{96}{2}(u_1+u_{96})$

ومنه $S=48(500+5250)=276000\,\text{DA}$.

39 نضع $u_1=5000$ الكمية التي تباع في اليوم الأول والكمية المخفضة في اليوم هي r .

$u_{n+1}=u_n-r$ ومنه (u_n) هي متتالية حسابية حدها الأول $u_1=5000$ وأساسها $-r$.

الكمية التي تباع في اليوم العاشر هي u_{10} .

لدينا $32000=u_1+u_2+...+u_{10}$ معناه $32000=\frac{10}{2}(u_1+u_{10})$

بما أن $u_{10}=u_1+9(-r)$ فإن $32000=5(2u_1-9r)$

وبالتالي $r=\frac{10000-6400}{9}=400\,L$.

40 1) لدينا (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0=45,4$ وأساسها r حيث $v_{12}=52,6$, الوحدة مليون نسمة .

$v_{12}=v_0+12r$ ومنه $r=\frac{v_{12}-v_0}{12}=\frac{52,6-45,4}{12}=0,6$ إذن كل سنة يتزايد عدد السكان بِـــ $0,6$ مليون نسمة

2) في عام 2020 عدد السكان هو v_{30} مقدرا بالمليون نسمة ؛ $v_{30}=v_0+30r=45,4+30\times0,6=63,4$

ومنه عدد السكان في عام 2020 هو $63,4$ مليون نسمة .

41 1) لدينا $u_1=9000$, $u_2=u_1+0,03u_1=1,03u_1=9270\,DA$

2) من أجل n عدد طبيعي لدينا : $u_{n+1}=u_n+0,03u_n=1,03u_n$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,03$.

3) $u_{10}=u_1q^9=9000\times(1,03)^9\simeq11742.96\,\text{DA}$

4) $S=12(u_1+u_2+...+u_{10})=12\times u_1\frac{q^{10}-1}{q-1}$ أي $S=12\times9000\frac{(1,03)^{10}-1}{0,03}$ ونجد

$S\simeq1238098.97\,\text{DA}$.

42 1) $p_1=p_0+0,05p_0=1,05p_0$ ؛ $p_2=p_1+0,05p_1=1,05p_1=(1,05)^2\,p_0$

$p_{n+1}=p_n+0,05p_n=1,05p_n$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي n , إذن (p_n) هي متتالية هندسية أساسها $1,05$

ومنه : $p_n=(1,05)^n\,p_0$.

$p_n\geq2p_0$ معناه $(1,05)^n\,p_0\geq2p_0$ ومعناه $(1,05)^n\geq2$ (لأن $p_0>0$)

أي $\ln(1,05)^n\geq\ln2$ ويكافئ $n\ln(1,05)\geq\ln2$ ومعناه $n\geq\frac{\ln2}{\ln(1,05)}$ بحساب نجد $\frac{\ln2}{\ln(1,05)}\simeq14.2$ ومنه

$n\geq15$ ، إذن بعد 15 يصبح سعر البضاعة أكثر من $2p_0$.

43 1) $u_1=u_0-0,02u_0=0,98u_0=515,48$

$u_2=u_1-0,02u_1=0,98u_1=505,17$

2) $u_{n+1}=u_n-0,02u_n=0,98u_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=0,98u_n$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $0,98$

ومنه $u_n=u_0(0,98)^n=526\times(0,98)^n$.

3) $u_{10}=526\times(0,98)^{10}=429.78$.

4) $u_n\leq\frac{u_0}{2}$ معناه $526\times(0,98)^n\leq\frac{526}{2}$ ومعناه $(0,98)^n\leq 0,5$ ويكافئ $\ln(0,98)^n\leq\ln 0,5$

ويكافئ $n\ln(0,98)\leq\ln 0,5$ بما أن $\ln(0,98)<0$ فإن $n\geq\frac{\ln 0,5}{\ln(0,98)}$ أي $n\geq 34.3$

ومنه ابتداء من سنة 2035 (أي $n=35$) يكون عدد السكان أقل من النصف .

5) $u_{310}=526\times(0,98)^{310}=1.002$ ، $u_{311}=526\times(0,98)^{311}=0.98$. في عام 2311 تكون القرية فارغة من السكان .

44 1) أ) $u_2=u_1+150=5150\,DA$.

ب)من أجل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1}=u_n+150$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 150

ومنه $u_n=u_1+(n-1)150=150n+4850$ ، $u_8=150\times 8+4850=9600\,DA$.

ت) $S=u_1+u_2+...+u_8=\frac{8}{2}(u_1+u_8)=58400\,DA$.

2) أ) $v_2=v_1+0,03v_1=1,03v_1=5150\,DA$.

ب) من أجل n عدد طبيعي لدينا: $v_{n+1}=v_n+0,03v_n=1,03v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $1,03$

ومنه $v_n=v_1(1,03)^{n-1}=5000(1,03)^{n-1}$ ، $v_8=5000(1,03)^7=6149.37\,\text{DA}$.

ت) $T=v_1+v_2+...+v_8=v_1\frac{(1,03)^8-1}{1,03-1}=44461,68\,DA$.

3) العقد الثاني أقل تكلفة إذن عمر يختار هذا العقد .

الباب الثاني

الاستمرارية و النهايات

الأنشطة

<u>النشاط الأول</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة المفهوم الحدسي للاستمرارية.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المفهوم الحدسي للاستمرارية " و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثاني</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> التمهيد لمبرهنة القيم المتوسطة.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستمرارية و المعادلات " .

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثالث</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> التذكير بالمستقيمات المقاربة.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المستقيمات المقاربة " و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> بسيط.

<u>النشاط الرابع</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> التعرف بيانيا على المستقيمات المقاربة.

<u>توجيهات:</u> <u>:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المستقيمات المقاربة " و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الخامس</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة مفهوم نهاية دالة مركبة.

<u>توجيهات:</u> <u>:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مفهوم دالة مركبة – النهاية بالمقارنة " و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> بسيط

الأعمال الموجهة

تحديد حلول المعادلة $f(x)=k$

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

على نهج عمر الخيام

تصحيح: /

الهدف: توظيف مبرهنة القيم المتوسطة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

وجود مستقيم مقارب

تصحيح: /

الهدف: التخمين ثم الإثبات باستعمال تعريف المستقيم المقارب المائل.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الاستمرارية

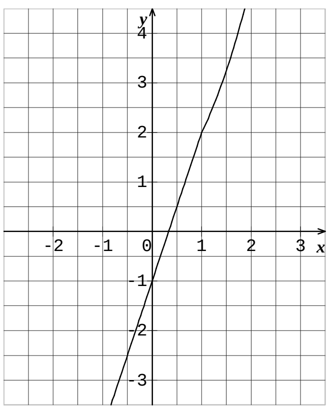
6

$$(m\in\mathbb{R})\quad \begin{cases} f(x)=3x+m\ ;\ x\in\,]-\infty;1[\\ f(x)=x^2+1\ \ ;\ \ x\in[1;+\infty[\end{cases}$$

1) نعم الدالة f مستمرة على $[1;+\infty[$، نعم الدالة f مستمرة على $]-\infty;1[$

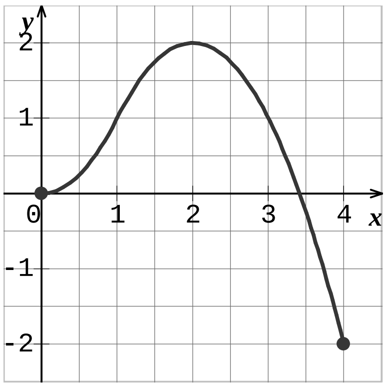
2) لكي يختار العدد m بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$، يجب أن تكون مستمرة عند 1 أي $3+m=2$ و بالتالي $m=-1$

3) رسم المنحني الممثل للدالة f :



2 - الاستمرارية و المعادلات

9 1) أ) جدول التغيرات



x	0		2		4
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

ب) نعم الدالة f مستمرة على المجال $[0;4]$.

2) أ) على المجال $[2;4]$ المعادلة $f(x)=\dfrac{3}{2}$ تقبل حلا واحدا.

ب) بقراءة بيانية نلاحظ أن حل المعادلة $f(x)=\dfrac{3}{2}$ هو بالتقريب $0,7$.

10 1) $f(x)=2x^3+2x+3$. الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=6x^2+2$

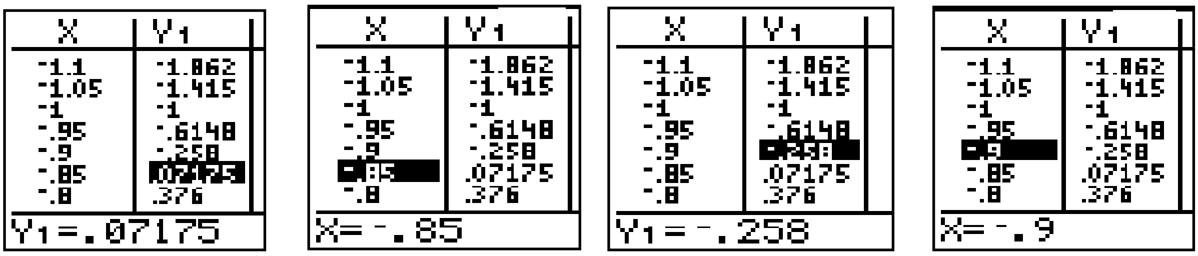
من اجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)>0$

f مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا واحدا α . $f(-1)=-1$ و $f(0)=3$ و بالتالي $\alpha\in\,]-1;0[$

2) نستعمل جدول القيم في الحاسبة فنلاحظ أن :

$f(-0,9)\approx-0,258$ و $f(-0,85)\approx 0,7175$



23 لتكن $P(x)$ دالة كثير حدود . بما أن درجته فردية فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$

أو $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=-\infty$ ، الدالة P مستمرة على $\mathbb{R}$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $P(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$.

24 لتكن الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ : $g(x)=f(x)-x$

الدالة g مستمرة على $[0;1]$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $[0;1]$

$g(0)=f(0)$ و $g(1)=f(1)-1$.

$g(0)\geq 0$ و $g(1)\leq 0$ لأن $f(x)\in[0;1]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[0;1]$.

3 - تتمات على النهايات

34 $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{5x+3}{2x-2}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{5x+3}{2x-2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\dfrac{-2x+1}{3-x}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\dfrac{-2x+1}{3-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{x^2-3}{x+2} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} \frac{x^2-3}{x+2} = -\infty$

، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{5-2x^2}{x^2-4} = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{5-2x^2}{x^2-4} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{(2x-1)^2} = +\infty$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+6)}{(x+1)} = \frac{7}{2}$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = -\infty$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x+6}{x^2+x-2} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to -2} \frac{3}{(x-1)} = -1$$

4 - المستقيمات المقاربة

36 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2) أ) من أجل كل $x \in]1;+\infty[$: $f(x) = -x+3+\frac{2}{x-1}$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(-x+3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$.نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=-x+3$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

3) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{-x^2+4x-1}{x-1} = +\infty$.

تفسير النتيجة هندسيا : المنحني (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x=1$ كمستقيم مقارب .

44 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)-(x-2) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-(x-2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2} = 0$ ،

3) ندرس حسب قيم x إشارة $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

4) يكفي أخذ $n=33$

45 لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{2}{(x-1)^2}$$

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{2}{(x-1)^2} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{(x-1)^2} = 0$

إذن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ معادلته $y=x$

2) $f(x)-x = -\frac{2}{(x-1)^2}$ و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 ، $-\frac{2}{(x-1)^2} < 0$

إذن المنحني (C) أسفل المستقيم Δ.

5 - الدالة المركبة

51 1) الدالة u متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$. $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} u(x)=+\infty$

2) الدالة u متناقصة تماما على $]1;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} u(x)=+\infty$

52 تصويب: نفس أسئلة التمرين 51:

1) الدالة u متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$

2) الدالة u متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} u(x)=-\infty$

53 2) أ) الدالة h معرفة إذا كان $(x\in\mathbb{R})$ و $\left((1-x^2)\in\mathbb{R}\right)$ أي $D_h=\mathbb{R}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

54 1) $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

56 1) $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\in\mathbb{R}^*) \text{ و } (g(x)>0)\right\}$ ، $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\in\mathbb{R}^*) \text{ و } (x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[)\right\}$

إذن $D_h=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} h(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.

58 $\lim\limits_{x\to-\infty} (f\circ f)(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\circ f)(x)=+\infty$

59 $\lim\limits_{x\to+\infty} (g\circ f)(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} (g\circ f)(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\circ g)(x)=-\infty$.

62 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=1$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \sqrt{\frac{2x}{1-x}}=+\infty$

الباب الثالث

الاشتقاقية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تذكير حول المشتقات.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الإشتقاقية – تذكير ". و يتم ضمن أفواج.

الحل: يكفي تعيين معامل التوجيه ثم تطبيق المبرهنات حول المشتقات.

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة دالة "

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مشتقة دالة مركبة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " اشتقاق دالة مركبة دالتين " و يتم ضمن أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

استعمال دالة مساعدة

تصحيح: /

الهدف: استعمال دالة مساعدة لدراسة تغيرات دالة معطاة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط.

دراسة دالة ناطقة

تصحيح: /

الهدف: التذكير بمنهجية دراسة اتجاه تغير دالة وكذا البحث عن المستقيمات المقاربة .

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مربع، مكعب، مقلوب و الجذر التربيعي لدالة

تصحيح: /

الهدف: استنتاج تغيرات الدوال مربع، مكعب، مقلوب و الجذر التربيعي لدالة.

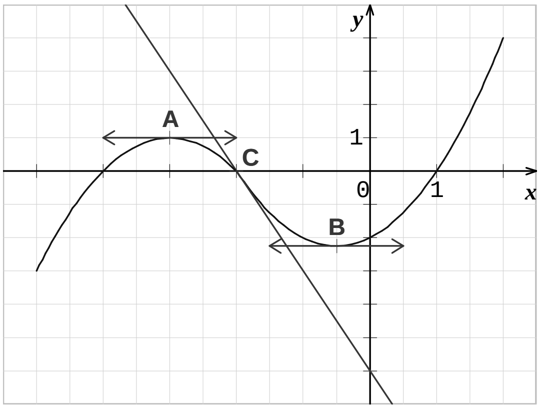
توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الاشتقاقية



5 1. مجموعة تعريف الدالة f هي $[-5;2]$

2. جدول تغيرات الدالة f :

x	-5		-3		$-\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-3	↗	1	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	4

3. $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ، $f'(-3)=0$ ، $f'(-2)=\frac{-6-0}{0-(-2)}=-3$

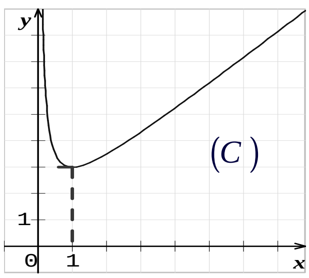
عين بقراءة بيانية العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\frac{1}{2}$، -3 و -2 علما أن ترتيب النقطة B هو $-\frac{9}{4}$.

4. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة A هي $y=1$. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة B هي $y=-\frac{9}{4}$. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة C هي $y=-3x-6$.

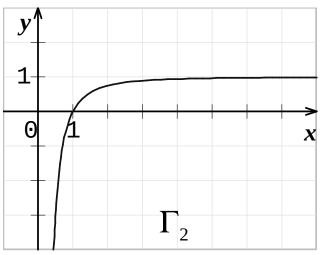
5. لا توجد مماسات أخرى موازية للمماس عند النقطة C.

2 - دراسة دالة

28

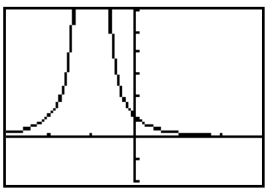


منحني الدالة f



منحني الدالة f'

32 1. تصويب:الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ : $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0

.2 الدالة f_1 متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ($f_1=-2f$)

الدالة f_2 متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ($f_2=2-f$)

3 - اشتقاق دالة مركب دالتين

58 1) $g=\sqrt{f}$.الدالة g معرفة على $[-2;0]\cup[2;3]$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]\cup[2;3]$ لدينا: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

x	-2		-1		0		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	|		|	$+$	
$g(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	0		0	↗	3

2) $g=f^2$. الدالة g معرفة على $[-2;3]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;3]$ لدينا:

$g'(x)=2f'(x)f(x)$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

x	-2		-1		0		1		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↗	4	↘	0	↗	4	↘	0	↗	9

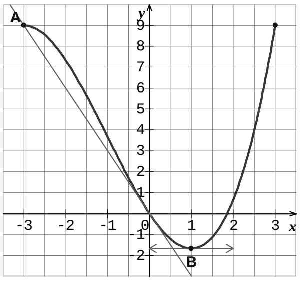
3) $g=\dfrac{1}{f}$. الدالة g معرفة على $[-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3]$.

و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3]$: $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

x	-2		-1		0		1		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$g(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{1}{3}$

تمارين للتعمق

62 1. معامل توجيه المستقيم (OA) هو -3 $\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{9}{-3} = -3$



2. أ- باستعمال الشروط التالية : $f(-3)=9$ و $f'(0)=-3$ و $f(0)=0$

و $f'(1)=0$ نجد : $a=\frac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$

ب- $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$ و منه $f'(x)=x^2+2x-3$

$f'(x)=0$ إذا كان $(x=1)$ أو $(x=-3)$. $f'(x)<0$ إذا كان $x \in]-3;1[$

و $f'(x)>0$ إذا كان $x \in]1;3]$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[1;3]$ و متناقصة تماما على $[-3;1]$.

مسائل

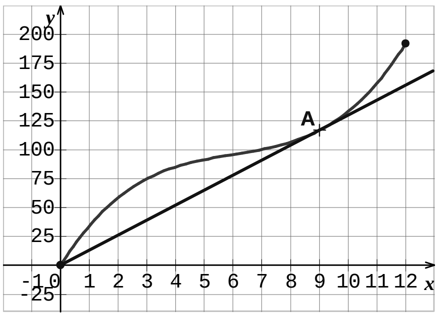
71 1) أ) $C_M(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{q^2}{3}-6q+40$

ب) دالة الكلفة المتوسطة هي الاقتصار على المجال $[0;12]$ لدالة كثير حدود من الدرجة الثانية يأخذ قيمته الحدية الصغرى عند $q_0=-\frac{-6}{2\times\frac{1}{3}}=9$.إذن الكلفة المتوسطة للإنتاج تكون صغرى عند إنتاج 9000 وحدة .

2) أ) من أجل $q\in[0;12]$: $C_m(q)=C'(q)=q^2-12q+40$

ب) $C_M(9)=\frac{9^2}{3}-6\times9+40=13$ و $C_m(9)=9^2-12\times9+40=13$

إذن من أجل إنتاج 9000 وحدة تكون الكلفة الهامشية تساوي الكلفة المتوسطة.



3) عين معادلة للمماس T للمنحني (Γ) عند النقطة A التي فاصلتها 9 :

$y=C'(9)(q-9)+C(9)=13q$

إذن المماس T للمنحني (Γ) عند النقطة A هو المستقيم (OA)

4) أ) تكون المؤسسة رابحة من أجل إنتاج q حيث $B(q)>0$

أي من أجل $q\in]0;12]$: $-\frac{1}{3}q^3+2q^2+21q>0$

$-\frac{1}{3}q^3+2q^2+21q>0$ تكافئ $-\frac{1}{3}q^2+2q+21>0$ لأن q موجب تماما

$-\frac{1}{3}q^2+2q+21>0$ من اجل $q\in\left]0;3+6\sqrt{2}\right]$ ، $3+6\sqrt{2}\simeq 11,485$

و بالتالي تكون المؤسسة رابحة من أجل إنتاج أقل من 11485 و حدة

ب) عين عدد الوحدات التي تصنع حتى يكون الربح أعظميا ؟

من أجل $q\in]0;12]$ $B'(q)=-q^2+4q+21$. $B'(q)=0$ يكافئ $(q=7)$ أو $(q=-3)$

q	0		7		12
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$		$\searrow$		$\nearrow$	

الدالة B تقبل قيمة حدية عظمى من أجل $q=7$ و هذه القيمة هي $B(7)=-\frac{7^3}{3}+2\times7^2+21\times7=\frac{392}{3}$

يكون الربح أعظميا إذا كان $130666\ DA$ و يكون أعظميا من أجل إنتاج 7000 وحدة .

الباب الرابع

الدوال الأصلية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الدوال الأصلية ". " الدالة الأصلية لدالة على مجال ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تقديم مفهوم الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا "

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا "

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

من الكلفة الهامشية إلى الكلفة الإجمالية

من الكلفة الهامشية إلى الكلفة المتوسطة

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

دوال الرضا و الرغبة

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدوال الأصلية في المجال الاقتصادي.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدوال الأصلية

1 .1 $f'(x)=\dfrac{2x^2+3-4x(x+5)}{(2x^2+3)^2}=\dfrac{-2x^2-20x+3}{(2x^2+3)^2}$

.2 من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-g(x)$ و منه $g(x)=-f'(x)$

نستنتج أن الدالة الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي $-f$ أي الدالة $x\mapsto -\dfrac{x+5}{2x^2+3}$ أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

22 f دالة معرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=-3x+4-\dfrac{1}{x^2}$

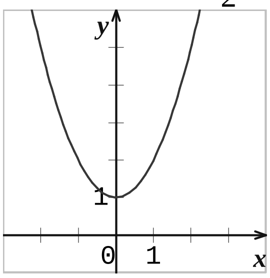
.1 دالة أصلية للدالة f على $]-\infty;0[$ هي $x\mapsto -\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{x}$

.2 مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]-\infty;0[$ هي الدوال من الشكل $x\mapsto -\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{x}+k$

حيث k ثابت حقيقي

.3 $F(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{x}+k$ و $F(-1)=5$

$F(-1)=5$ تعني $-\dfrac{3}{2}-4-1+k=5$ و منه $k=\dfrac{23}{2}$ و بالتالي $F(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{23}{2}$



25 منحني الدالة F هو المنحني المبين في الشكل المقابل لأن $F'(x)=f(x)$

بما أن f دالة تآلفية فإن الدالة F تكون دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

و بما أن f متزايدة على $\mathbb{R}$ فهي تكون سالبة في مجال ثم موجبة في مجال آخر

و بالتالي F تكون متناقصة في مجال ثم متزايدة في مجال آخر.

2 - حساب الدوال الأصلية

39 أ) $f(x)=(2x+5)^3$ ، دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x\mapsto \dfrac{1}{8}\times(2x+5)^4$

ب) $f(x)=(2-7x)^4$ ، دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x\mapsto -\dfrac{1}{35}\times(2-7x)^5$

ج) $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}x-4\right)^5$ ، دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x\mapsto \dfrac{3}{12}\left(\dfrac{2}{3}x-4\right)^6$

47 تصويب : الدوال الأصلية ليست كلها على المجال $]0;+\infty[$

أ) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ ، دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ هي الدالة $x\mapsto -\dfrac{1}{2(2x+1)}$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{(3x-2)^3}$ ، دالة أصلية للدالة f على $\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ هي الدالة $x\mapsto \dfrac{-1}{6(3x-2)^2}$

ج) $f(x)=\frac{1}{(1-6x)^4}$ ، دالة أصلية للدالة f على $\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$ هي الدالة $x\mapsto \frac{1}{18}\times\frac{1}{(1-6x)^3}$

تمارين للتعمق

58 f دالة معرفة على $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ بـــ: $f(x)=\sqrt{2x+3}$ ، $F(x)=(ax+b)\sqrt{2x+3}$

الدالة F أصلية للدالة f على $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ معناه $F'(x)=f(x)$

$$F'(x)=a\sqrt{2x+3}+(ax+b)\times\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}=a\sqrt{2x+3}+\frac{ax+b}{\sqrt{2x+3}}=\frac{a(2x+3)+ax+b}{\sqrt{2x+3}}$$

$F'(x)=\frac{3ax+3a+b}{\sqrt{2x+3}}$ و $f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{2x+3}}$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ $F'(x)=f(x)$ معناه $3ax+3a+b=2x+3$

أي $\left(a=\frac{2}{3}\right)$ و $(b=1)$ و بالتالي $F(x)=\left(\frac{2}{3}x+1\right)\sqrt{2x+3}$

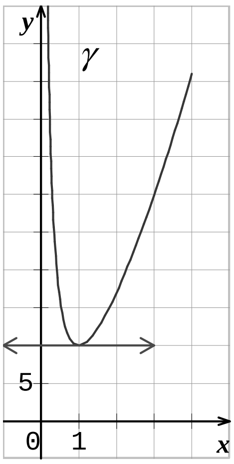
59 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـــ: $f(x)=\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\times\frac{9}{(x+1)^2}$

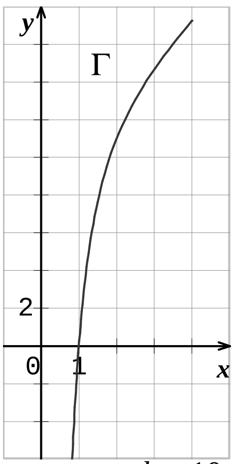
1.بوضع $u(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ ، $u'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}$

2. $f(x)=3\times\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\times\frac{3}{(x+1)^2}$ و منه $f(x)=3u(x)u'(x)$

و بالتالي دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}^+$ هي $F:x\mapsto\frac{3}{2}u^2(x)$ أي $F:x\mapsto\frac{3}{2}\times\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2$

62 الدالة " الكلفة الهامشية" C_m موجبة على المجال $[1;4]$ و سالبة على $[0;1]$ و بالتالي الدالة " الكلفة الإجمالية " C تكون متزايدة تماما على $[1;4]$ و متناقصة تماما على $]0;1]$.





2. $C_m(q)=aq+b-\frac{12}{q^2}$

المنحني Γ يقبل عند النقطة $A(2;11)$ مماسا معامل توجيهه 5 معناه أن

$C_m(2)=11$ و $C_m'(2)=5$

$C_m'(q)=a+\frac{24}{q^3}$

$C_m'(2)=5$ و منه $a+\frac{24}{8}=5$ ومنه $a=2$

$C_m(2)=11$ و منه $2a+b-3=11$ و منه $2a+b=14$ و منه $b=10$

3. $C_m(q)=2q+10-\frac{12}{q^2}$

الباب الخامس

الحساب التكاملي

الأنشطة

<u>النشاط الأول</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> تخمين العلاقة بين مساحة حيز تحت منحن و الدالة الأصلية.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تكامل دالة ".

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثاني</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة مفهوم الدالة الأصلية.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " القيمة المتوسطة ... ".

<u>الحل:</u> بسيط

الأعمال الموجهة

<u>مساحة حيز محدد بمنحنيين</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> استنباط طريقة لحساب مساحة حيز محدد بمنحنيين.

<u>توجيهات:</u> يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

<u>الحل:</u> بسيط

<u>حصر تكامل</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> توظيف خواص التكاملات.

<u>توجيهات:</u> يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

<u>الحل:</u> بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - تكامل دالة

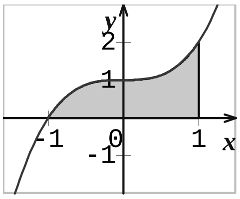
4 .1 $\int_0^3 (2x+3)dx = \left[x^2+3x\right]_0^2 = 10$

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) = 3 \quad (2$$

$$\int_{-5}^{5} (4-x)dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{5} = \left[20-\frac{25}{2}\right] - \left[-20-\frac{25}{2}\right] = 40 \quad (3$$

$$\int_{0}^{2} (1-x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3} \quad (4$$

9 $f(x) = x^3+1$.



.1 f موجبة على $]-1;+\infty[$ سالبة على $]-\infty;-1]$.

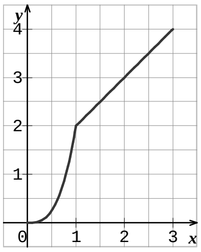
.2 احسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

$$S = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^3+1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{4}+1\right] - \left[\frac{1}{4}-1\right] = 2$$

.3 $S = 2\times1\times0,5cm^2 = 1cm^2$

2 - خواص التكامل

26 التمثيل البياني لتالي هو لدالة f معرفة مستمرة على $[0;3]$ كما يلي:

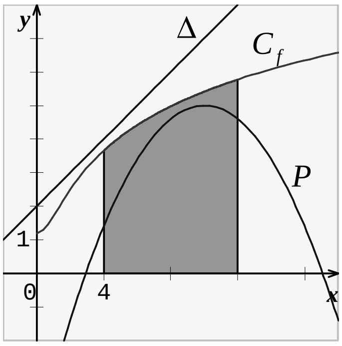


من أجل $x\in[0;1]$ ، $f(x) = x^3$

من أجل $x\in[1;3]$ ، $f(x) = x+1$

.1 احسب $\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}$

$$\int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{1}^{3} (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{1}^{3} = \left[\frac{9}{2}+3\right] - \left[\frac{1}{2}+1\right] = 6$$



.2 $\int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{4}+6 = \frac{25}{4}$

28 .1 تصويب: باستعمال الشكل بين أن: $-\frac{1}{10}x^2+2x-5 \le f(x) \le \frac{1}{2}x+2$

بقراءة بيانية المنحني C_f يقع أسفل Δ و أعلى P في المجال $[4;12]$،

نستنتج أن : $-\frac{1}{10}x^2+2x-5 \le f(x) \le \frac{1}{2}x+2$

.2على المجال $[4;12]$، المنحني C_f أعلى محور الفواصل، إذن: $A = \int_{4}^{12} f(x)dx$

بما أن $-\frac{1}{10}x^2+2x-5 \le f(x) \le \frac{1}{2}x+2$ فإن: $\int_{4}^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx \le \int_{4}^{12} f(x)dx \le \int_{4}^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$

دالة أصلية للدالة g المعرفة بـــ $g(x) = -\frac{1}{10}x^2+2x-5$ هي الدالة G المعرفة بـــ: $G(x) = -\frac{1}{30}x^3+x^2-5x$

دالة أصلية للدالة h المعرفة بـــ $h(x) = \frac{1}{2}x+2$ هي الدالة H المعرفة بـــ: $H(x) = \frac{1}{4}x^2+2x$

$$\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx=G(12)-G(4)=\frac{792}{30}-\left(-\frac{184}{30}\right)=\frac{976}{30}$$

$$\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=H(12)-H(4)=60-12=48$$

إذن: $\frac{976}{30}\le A\le 48$

3 - القيمة المتوسطة

31 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+1}{2x^2}$

.1 $$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\frac{x^2+1}{2x^2}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right]_1^4=\left[2-\frac{1}{8}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]=\frac{15}{8}$$

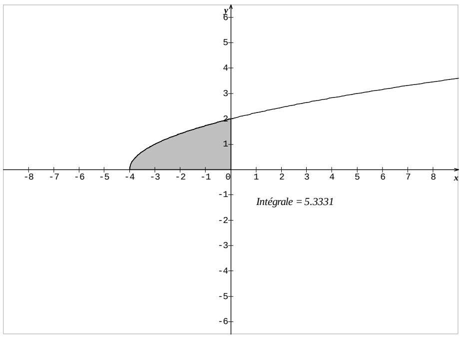
.2 القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;4]$ هي $\mu=\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)dx=\frac{1}{3}\times\frac{15}{8}=\frac{15}{24}$.

تمارين للتعمق

42 تصويب: 1.ادرس تغيرات الدالة f على $]-4;+\infty[$ (يمكن استنتج تغيرات f انطلاقا من الدالة " الجذر التربيعي " بدلا من الدالة " مربع ").

الدالة f متزايدة تماما على $]-4;+\infty[$

.2 رسم المنحني



.3 $h(x)=\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}$

و منه $$h'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+4}+(x+4)\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)$$

و منه $$h'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\sqrt{x+4}\right)$$

و منه $$h'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x+4}\right)=\sqrt{x+4}=f(x)$$

.4 مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محوري الإحداثيات هي:

$$\int_{-4}^0 f(x)dx=\left[h(x)\right]_{-4}^0=h(0)-h(-4)=\frac{16}{3}$$

46 (1 $$I_1=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^3}=\left[-\frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}\right]_0^1=-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

.2 ليكن $I_2=\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

$$I_1+I_2=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx+\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\frac{x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$I_1+I_2=\int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\times\int_0^1\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\left[\frac{-1}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$I_1+I_2=\frac{1}{4}$ و $I_1=\frac{3}{16}$ ومنه $I_2=\frac{3}{4}-I_1=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$

3. تصويب: استنتج حصرا للتكامل $\int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

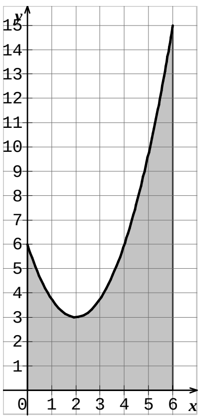
على المجال $[0;1]$، $x\ge x^2\ge x^3$.

$x^3\le x^2\le x$ و منه $\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}\le\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}\le\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}$

و منه $\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx\le\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx\le\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx$ أي $\frac{1}{16}\le\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx\le\frac{3}{16}$

مسائل

55 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;6]$ كما يلي: $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+6$



1. $S=\int_0^6 f(x)dx=\int_0^6\left(\frac{3}{4}x^2-3x+6\right)dx$

دالة أصلية F للدالة f على $[0;6]$ معرفة بـــ: $F(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$

$$S=\left[\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_0^6=\frac{1}{4}\times6^3-\frac{3}{2}\times6^2+6^2=36(u.a)$$

2.مساحة المستطيل $OHMK$ تساوي $OH\times HM$

من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، $OH=x$.من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، (C_f) يقع أعلى محور الفواصل.إذن الترتيب $f(x)$ للنقطة M من (C_f) موجب أو معدوم

و منه $HM=f(x)$ و منه $R(x)=OH\times HM=x\times f(x)=\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x$.

3.أ- $R(x)=S$ معناه $\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x=36$ أي $\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x-36=0$

ب- $g'(x)=\frac{9}{4}x^2-6x+6$ ، $\Delta=-18$ ، $\Delta<0$ و منه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، $g'(x)>0$

x	0 $\qquad\qquad$ 6
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-36 \nearrow 54$

على المجال $[0;6]$ ، g قابلة للاشتقاق ومتزايدة تماما و 0 ينتمي إلى المجال $[-36;54]$إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α على $[0;6]$.باستعمال الحاسبة البيانية، نجد $g(4,555)\approx-0,034$ و $g(4,56)\approx0,93$.

الباب السادس

دالة اللوغاريتم النيبيري

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " دالة اللوغاريتم النيبيري ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: استنتاج الخواص الأولى و التعامل مع اللوغاريتمات و قيمها التقريبية.

توجيهات: يقدم النشاط بعد تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: تخمين الخواص الجبرية اللوغاريتم النيبيري و يتوج بتقديم الفقرة " الخواص الجبرية ".

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات الدالة اللوغاريتم النيبيري .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة الدالة اللوغاريتم النيبيري " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دالة اللوغاريتم العشري

تصحيح: /

الهدف: تعريف و دراسة خواص الدالة اللوغاريتم العشري.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة متتالية تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ دالة اللوغاريتم النيبيري

5 3) مجموعة التعريف هي: $D=]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

من أجل x من D، $\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=0$ يعني $\frac{2x-1}{x+1}=1$ أي $x=2$ و منه مجموعة الحلول هي $\{2\}$.

6 مجموعة التعريف هي: $D=]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{3}{2}\right[$

3) $\ln(2x^2)>\ln(6-4x)$ يعني $2x^2>6-4x$ أي $x^2+2x-3>0$

$x^2+2x-3>0$ يعني $x\in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$ و منه مجموعة الحلول هي $D\cap(]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[)$

أي مجموعة الحلول هي $]-\infty;-3[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right[$

2 ـ الخواص الجبرية

11 • $A=1$ • $B=\frac{5}{2}$ • $C=2\ln 2-1$ • $D=-3$

12 • $A=\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$ • $B=\ln 20000$ • $C=\ln(100000)$

13 • $A=\ln\left(\frac{ac^2}{b}\right)$ • $B=\ln a\sqrt{ab}$ • $C=\ln\left(\frac{(a+1)\sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{b}}\right)$

24 د) $21000(1+0,035)^n \geq 30000$ تعني $n \geq \dfrac{\ln\left(\dfrac{10}{7}\right)}{\ln(1,035)}$ و $\dfrac{\ln\left(\dfrac{10}{7}\right)}{\ln(1,035)} \approx 10,37$

أصغر عدد طبيعي n حيث $21000(1+0,035)^n \geq 30000$ هو $n = 11$

3 - دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري

37 أ) $f(x) = 2x^2 + \ln x$ معرفة على $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x^2 + \ln x = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2 + \ln x = +\infty$

ب) $f(x) = -1 + 2\ln x - (\ln x)^2$ معرفة على $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} -1 + 2\ln x - (\ln x)^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} -1 + 2\ln x - (\ln x)^2 = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x\left(\dfrac{-1}{\ln x} + 2 - \ln x\right) = -\infty$

4 - دراسة الدالة $\ln o\, u$

65 نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$

1. من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{x-2+x+1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2} = f(x)$.

2. دالة أصلية للدالة f على $]2;+\infty[$ هي الدالة F المعرفة بـــ: $x \mapsto \ln(x+1) + \ln(x-2)$

5 - دالة اللوغاريتم العشري

73 1) $\log x = 5$ تعني $\dfrac{\ln x}{\ln 10} = 5$ و منه $\ln x = 5\ln 10$ أي $x = e^{5\ln 10}$

تمارين للتعمق

82 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

نضع من اجل كل عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ $u(x) = \ln x$ و $v(x) = x^2$. على المجال $]0;+\infty[$ ، $v \neq 0$ و الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

على المجال $]0;+\infty[$ ، إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $1-2\ln x$

$1-2\ln x > 0$ معناه $x < e^{\frac{1}{2}}$ ، $1-2\ln x < 0$ معناه $x > e^{\frac{1}{2}}$ ، $1-2\ln x = 0$ معناه $x = e^{\frac{1}{2}}$

إذن على المجال $\left]0;\sqrt{e}\right[$ ، f' موجبة تماما ومنه f متزايدة تماما على $\left]0;\sqrt{e}\right[$ و على المجال $\left]\sqrt{e};+\infty\right[$ f' سالبة تماما ومنه f متناقصة تماما على $\left]\sqrt{e};+\infty\right[$. إذن لدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $f\left(\sqrt{e}\right)$ عند $x = \sqrt{e}$.

$f\left(\sqrt{e}\right) = \dfrac{\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2} = \dfrac{1}{2e}$

ب- من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، إشارة $f(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x$

إذا كان $x > 1$ فإن $f(x) > 0$ ، إذا كان $0 < x < 1$ فإن $f(x) < 0$ و إذا كان $x = 1$ فإن $f(x) = 0$

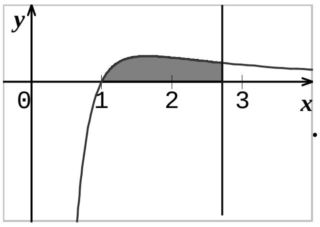
2.لتكن F دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ حيث $F(e)=\frac{2e-2}{e}$ و $F(\sqrt{e})=2-\frac{3}{\sqrt{e}}$

أ- لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F'(x)=f(x)$

نستنتج أنه على المجال $]0;1]$: $F'(x)\le 0$ ومنه F متناقصة تماما على $]0;1]$.

و على المجال $[1;+\infty[$: $F'(x)\ge 0$ ومنه F متزايدة تماما على $[1;+\infty[$. و هذه النتائج تتوافق مع التمثيل البياني المعطى.

ب- $F'(\sqrt{e})=f(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{2e}$



جـ- $A=\int_1^e f(x)\,dx=F(e)-F(1)=\frac{2e-2}{e}-1=\frac{e-2}{e}(u.a)$

د-من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F(x)=G(x)+k$ حيث k ثابت حقيقي .

لدينا: $F(e)=G(e)+k$ و منه $\frac{2e-2}{e}=\frac{-1-\ln e}{e}+k$ و منه $k=2$

إذن من أجل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F(x)=\frac{-1-\ln x}{x}+2$.

مسائل

90 $C_T(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{9}{2}\ln(x+1)$

الجزء A : دالة مساعدة: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;5]$ بـ : $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)$

.1 $f'(x)=x+\frac{9x}{(x+1)^2}-\frac{9}{x+1}=\frac{x(x+1)^2+9-9(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^3+2x^2-8x}{(x+1)^2}=\frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$

.2 إشارة $f'(x)$

x	0		2		5
$f'(x)$	0	−	0	+	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;2]$ و متزايدة تماما على المجال $[2;5]$

x	0		2		5
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$6-9\ln 3$	↗	$20-9\ln 6$

.3على المجال $]0;2]$ ،f قابلة للاشتقاق و متناقصة و $f(2)<0$.إذن المعادلة $f(x)=0$ ليس لها حل على المجال $]0;2]$.

على المجال $[2;5]$ ، f قابلة للاشتقاق و متزايدة تماما و $f(2)\simeq -1,89$ و $f(5)\simeq 3,87$ و 0 ينتمي إلى $[f(2);f(5)]$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]0;5]$.

4.باستعمال الحاسبة البيانية $f(3)\approx -1,2$ ، $f(4)\approx 0,7$ ، إذن $3<\alpha<4$

$f(3,6)\approx -0,2$ ، $f(3,7)\approx 0,002$ إذن $3<\alpha<4$ ، إذن $3,6<\alpha<3,7$

$f(3,699)\approx -0,0001$ ، $f(3,7)\approx 0,002$ إذن $3<\alpha<4$ ، إذن $3,699<\alpha<3,7$

5. إشارة $f(x)$

x	0 α 5
$f(x)$	0 $-$ 0 $+$

الجزءB : دراسة الكلفة المتوسطة C_M : $C_M(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{2}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

1. $$C'_M(x)=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times x-\ln(x+1)}{x^2}\right]=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$$

$$\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]=\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)}{2x^2}=\frac{f(x)}{2x^2}$$ ، إذن $C'_M(x)=\dfrac{f(x)}{2x^2}$

x	0 α 5
$C_M'(x)$	$-$ 0 $+$
$C_M(x)$	$\searrow$ $\nearrow$

2. $C'_M(x)$ لها نفس إشارة $f(x)$

على $]0;\alpha]$ ، $f(x)$ موجبة و منه $C'_M(x)$ موجبة ومنه C_M متزايدة.

3.على $]0;5[$ ،مشتقة الكلفة المتوسطة تنعدم مغيرة إشارتها (سالبة ثم موجبة)إذن الكلفة المتوسطة تقبل قيمة حدية صغرى و تأخذها عند α.و بما أن $3,699<\alpha<3,7$.

الإنتاج يضمن كلفة متوسطة صغرى بين 3699 طن و 3700 طن لأن x مقدر بآلاف الأطنان.

الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ مقدرة بملايين الدنانير ، $C_M(3,699)\approx 2,80717$ و $C_M(3,7)\approx 2,80717$

إذن الكلفة المتوسطة تقدر بـــ 2807,17دينار للطن.

الباب السابع

الدالة الأسية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم الفقرة " الدالة الأسية ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تخمين خواص الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الخواص الجبرية "

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: التعرف على الدالة الأسية كحل لمعادلة تفاضلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الخواص الجبرية.

الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

دوال الكلفة و الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة دالة تتضمن الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة السية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة متتالية تتضمن الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدالة الأسية

9 1) $e^{x+3} \geq -2$. من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{x+3} > 0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $\mathbb{R}$

10 4) $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) > 1$. مجموعة التعريف هي $D =]1;+\infty[$

$\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) > 1$ تعني $\frac{1}{x-1} > e$ و منه $\frac{1-ex+e}{x-1} > 0$ إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $\left]1;1+\frac{1}{e}\right[$

2 - الخواص الجبرية

16 1. $t^2 - 2t - 3 = 0$ تعني $(t=-1)$ أو $(t=3)$

2. أ- بوضع $t = e^x$: المعادلة $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ تصبح $t^2 - 2t - 3 = 0$

المعادلة $e^x = -1$ ليس لها حل لأن $e^x > 0$

$e^x = 3$ يعني $x = \ln 3$. إذن مجموعة حلول المعادلة $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ هي $S = \{\ln 3\}$

ب) $e^x - 2 - 3e^{-x} = 0$ يعني $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ (بضرب طرفي المعادلة في e^x).و هي نفس المعادلة السابقة.

3 - دراسة الدالة الأسية

44 f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x}$

1.أ- $f'(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$. من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$، $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

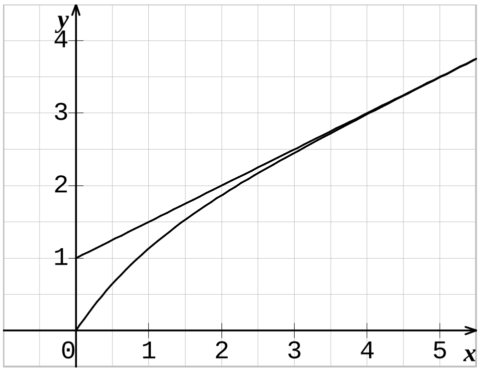
ب- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

2. أ- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0$

نستنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم يقبل مستقيما مقاربا D عند $+\infty$ معادلة $y = \frac{1}{2}x + 1$

ب- $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -e^{-x}$ و $-e^{-x} < 0$. إذن المنحني (C) يقع أسفل المستقيم D.

3. رسم المستقيم D و المحني (C) : (انظر الشكل الموالي)



4 - دراسة الدالة $\exp\circ u$

53 .1 g و f لهما نفس اتجاه التغير .إذن g متزايدة على $]-\infty;2]$ و متناقصة على $[2;+\infty[$.

.2 القيمة الحدية المحلية هي $g(2)=e^{f(2)}=e^{\ln 4}=4$

.3 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و بالتركيب $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ ،

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و بالتركيب $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ ،

و منه المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني الممثل للدالة g عند $+\infty$ و محور الفواصل مقارب عند $-\infty$.

.4 جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	1 ↗	$\ln 4$	↘ 1

تمارين للتعمق

65 .1 من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x(2e^x+a)$

.2 أ- من جدول التغيرات لدينا: $f'(0)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$

و بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$ فإن $b=-3$ ،زيادة على ذلك $f'(0)=2+a$ ، إذن $a=-2$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=e^x(e^x-2)-3$

ب- $f(0)=-4$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

جـ-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

.1احسب $f'(x)$ بدلالة a .

.2ا- عين a و b مستعينا بالمعلومات المتوفرة في جدول التغيرات.

ب- احسب $f(0)$ و عين نهاية f عند $+\infty$

جـ- أنقل ثم أكمل جدول التغيرات.

3. $f(x)=0$ تعني $\left(e^x\right)^2-2e^x-3=0$ و منه $\left(e^x+1\right)\left(e^x-3\right)=0$

$e^x+1=0$ ليس لها حل ، $e^x-3=0$ تعني $x=\ln 3$ و بالتالي مجموعة الحلول هي $S=\{\ln 3\}$

التفسير الهندسي: المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\ln 3$

4. أ) مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq -4$ هي $S=\mathbb{R}$

ب) مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$ هي $S=\left]-\infty;\ln 3\right]$

مسائل

75 الجزء A :

1. لتكن h الدالة المعرفة على $[0;5]$ بـــ: $h(x)=f(x)-g(x)$

أ- $h'(x)=f'(x)-g'(x)=-0,7e^{-0,7x+2,1}-0,5$

ب- إشارة $h'(x)$: من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$ لدينا: $e^{-0,7x+2,1}>0$ و منه $-0,7e^{-0,7x+2,1}<0$

و منه $-0,7e^{-0,7x+2,1}-0,5<-0,5<0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$، $h'(x)$ سالبة تماما و منه الدالة h متناقصة تماما على $[0;5]$.

جـــ- الدالة h قابلة للاشتقاق و رتيبة تماما على $[0;5]$ و $h(0)=f(0)-g(0)=e^{2,1}-0,7\approx 7,47$

و $h(5)=f(5)-g(5)=e^{-1,4}-3,2\approx -2,95$

أي $h(0)>0$ و $h(5)<0$ و 0 ينتمي إلى $\left[h(5);h(0)\right]$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $[0;5]$ بحيث $h(\alpha)=0$

الحاسبة البيانية تعطينا قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α ، $\alpha\approx 2,172$

د-فاصلة إحداثيات نقطة التقاطع F لـــ (C_f) و (C_g) تحقق $f(x)=g(x)$ أي $h(x)=0$

في السؤال السابق وجدنا أن حل المعادلة $h(x)=0$ هو α، إذن النقطة F فاصلتها α، ترتيب F هو $g(\alpha)$.

نعلم أن $2,171\,5<\alpha<2,172\,5$ و أن الدالة g متزايدة تماما على $[0;5]$ ،

إذن $g(2,171\,5)<g(\alpha)<g(2,172\,5)$.

القيمة المقربة للترتيب $g(\alpha)$ للنقطة F هي $1,79$.

2. أ- مساحة المستطيل $OCFE$ هي : $A=OE\times OC=\alpha\times f(\alpha)$

ومنه $A\approx 2,17\times 1,79$ أي $A\approx 3,88(u.a)$

ب-على المجال $[0;\alpha]$ المنحني البياني (C_f) يقع أعلى محور الفواصل ، إذن التكامل $\int_0^\alpha f(x)\,dx$ يساوي مساحة جزء المستوي المحدد بـــ (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\alpha$

جـــ- دالة أصلية للدالة f على $[0;\alpha]$ هي الدالة γ المعرفة بـــ $\gamma(x)=\dfrac{-1}{0,7}e^{-0,7x+2,1}+k$ حيث k ثابت حقيقي

إذن $\int_0^\alpha f(x)\,dx=\left[\gamma(x)\right]_0^\alpha=\gamma(\alpha)-\gamma(0)=\dfrac{-1}{0,7}\left[f(\alpha)-f(0)\right]=\dfrac{-1}{0,7}\left[f(\alpha)-e^{2,1}\right]$

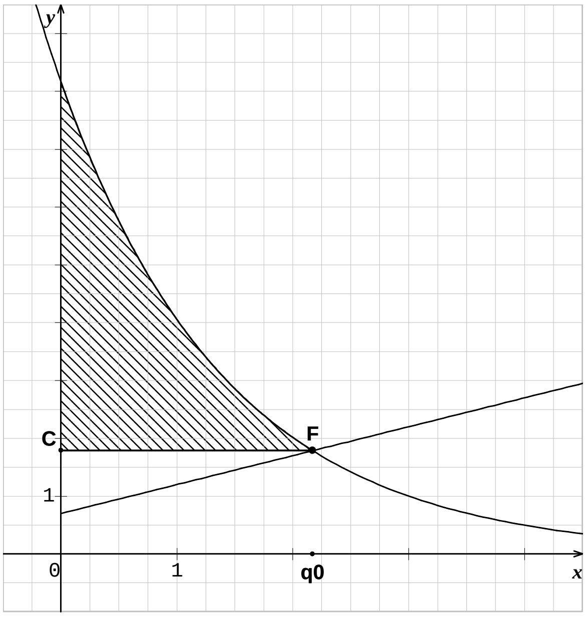
$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \approx \frac{-1}{0,7}[1,79-8,17]$ أي $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \approx 9,11$

الجزءB :

<u>**تصويب**</u>**:** $f(q_0)=g(q_0)$

$f(q_0)=g(q_0)$ ، إذن حسب الجزء A q_0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=g(x)$

أي هو الحل الوحيد للمعادلة $h(x)=0$ ، $q_0=\alpha$



العدد $p_0=f(q_0)=f(\alpha)=g(\alpha)$ ،

$q_0=\alpha$ و $p_0=f(\alpha)=g(\alpha)$

القيم المقربة لــ q_0 و p_0 هي $q_0 \approx 2,172$ و $p_0 \approx 1,79$

2.أ- العددان q_0 و p_0 هما على الترتيب فاصلة و ترتيب النقطة F.النقطة E احداثياها $(q_0;0)$ و النقطة C احداثياها $(0;p_0)$.

ليكن Δ الحيز الذي مساحته $\int_0^{q_0} f(x)\,dx - p_0\times q_0$

نلاحظ أن $\int_0^{q_0} f(x)\,dx=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ و نلاحظ أيضا أن

$p_0\times q_0=\alpha\times f(\alpha)$ و هي مساحة المستطيل $OCFE$

إذن الحيز Δ هو الجزء من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، القطعة المستقيمة $[CF]$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\alpha=q_0$

ب- $\int_0^{q_0} f(x)\,dx - p_0\times q_0=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx-\alpha f(\alpha)=\frac{-1}{0,7}\left[f(\alpha)-e^{2,1}\right]-\alpha f(\alpha)$

و نجد حسب ما سبق $\int_0^{q_0} f(x)\,dx - p_0\times q_0 \approx 9,11-3,88$ أي $\int_0^{q_0} f(x)\,dx - p_0\times q_0 \approx 5,23$

فائض الإنتاج يرتفع إلى 5,23 آلاف دينار.

الباب الثامن

التزايد المقارن

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتم ذات أساس كيفي.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " دالة اللوغاريتم لأساس a ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: التمهيد لقوى عدد حقيقي موجب تماما.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " قوى عدد حقيقي موجب تماما "

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: التمهيد للدالة الجذر النوني.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الجذر النوني" .

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقارنة كل من $\ln x$ و e^x مع x^n .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " التزايد المقارن " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

نموذج ديموغرافي

تصحيح: /

الهدف: توظيف قوى عدد حقيقي موجب تماما.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

فاتورة الهاتف

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدلالة الأسية و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة دالة لوغاريتمية

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مسائل استمثال

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مقارنة الأعداد n^{n+1} **و** $(n+1)^n$

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الدوال $x \mapsto x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدوال الأسية و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - دالة اللوغاريتم للأساس a

5 1 . مجموعة التعريف هي $D =]0;+\infty[$

$\log_3(2x+5)+\log_3\left(\frac{1}{x}\right)=3$ تعني $\frac{\ln(2x+5)}{\ln 3}+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln 3}=3$ و منه $\ln(2x+5)-\ln(x)=3\ln 3$

و منه $\ln\left(\frac{2x+5}{x}\right)=\ln 27$ و منه $\left(x=\frac{1}{5}\right)$.إذن مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$

2. مجموعة التعريف : $D =]-\infty;0[\,]1;+\infty[$

$\log_3\left(\frac{x}{x-1}\right)>1$ تعني $\frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\ln 3}>1$ و منه $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>\ln 3$ أي $\frac{x}{x-1}-3>0$

أي $x\in]-\infty;1[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. إذن مجموعة الحلول هي $S=]-\infty;0[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

2 - قوى عدد حقيقي موجب تماما

27 1) مجموعة التعريف هي $\mathbb{R}$

$2^{2x+1}-10.2^x+12=0$ تعني $2\left(2^x\right)^2-10.2^x+12=0$ ومنه $\left(2^x\right)^2-5.2^x+6=0$

بوضع $X=2^x$ يكون لدينا $X^2-5X+6=0$

المعادلة $X^2-5X+6=0$ تقبل حلين هما $(X_1=2)$ و $(X_2=3)$

$(X=2)$ يعني $2^x=2$ و منه $x=1$

$(X=3)$ يعني $2^x=3$ و منه $x=\frac{\ln 3}{\ln 2}$.إذن مجموعة الحلول هي $S=\left\{1,\frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$

2) $2^{2x+1}-10.2^x+12>0$ تعني $X^2-5X+6>0$ مع $X=2^x$

$X^2-5X+6>0$ تعني $(X-2)(X-3)>0$

$(X-2)(X-3)>0$ تعني $\left(2^x-2\right)\left(2^x-3\right)>0$

x	$-\infty$		1		$\frac{\ln 3}{\ln 2}$		$+\infty$
2^x-2		$-$	0	$+$		$+$	
2^x-3		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(2^x-2\right)\left(2^x-3\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن مجموعة الحلول هي $S=]-\infty;1[\cup\left]\frac{\ln 3}{\ln 2};+\infty\right[$

3 - دراسة الدوال $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto \sqrt[n]{x}$

53

1.معامل التناسب الإجمالي من 1980 إلى 1990 هو $k=\dfrac{972}{800}$

$$x=\left(\frac{972}{800}\right)^{\frac{1}{10}}-1\approx 0,0196$$

2. $x=\left(\dfrac{1230}{1050}\right)^{\frac{1}{3}}-1\approx 0,0541$

إذا بقي هذا التزايد على ما هو عليه ، عدد الطلاب عام 2007 هو $1230000\times(1,0541)^7\approx 1778598$

4 - التزايد المقارن

67 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{e^x}=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{1-x}=0$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2-x+1)e^{2x+1}=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x-1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-3)e^{3x-1}=0$

تمارين للتعمق

78 تصويب : لتكن الدالة f دالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بـــ : $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$

المجموعة $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر أي $x\in\mathbb{R}^*$ إذا وفقط إذا كان $-x\in\mathbb{R}^*$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x)=\dfrac{5^{-x}}{5^{-2x}-1}=\dfrac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\dfrac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}=-\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=-f(x)$

إذن الدالة f فردية ، و بالتالي مبدأ المعلم O هو مركز تناظر للمنحني (C)

2. أ- f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ ،

$$f'(x)=-\frac{5^x\ln 5\times\left(5^{2x}-1\right)-2\times 5^{2x}\ln 5\times 5^x}{\left(5^{2x}-1\right)^2}=-\frac{5^x\ln 5\times\left(5^{2x}+1\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

ب- بما أن $5^x>0$ فمن الواضح أن $f'(x)<0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ و على $]0;+\infty[$

3. أ- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}2x=0^+$ و $\lim\limits_{X\xrightarrow{>}0}5^X=1^+$ ومنه حسب نهاية مركب دالتين $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}5^{2x}=1^+$

و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(5^{2x}-1\right)=0^+$ و بالتالي $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=+\infty$

التفسير الهندسي: المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$

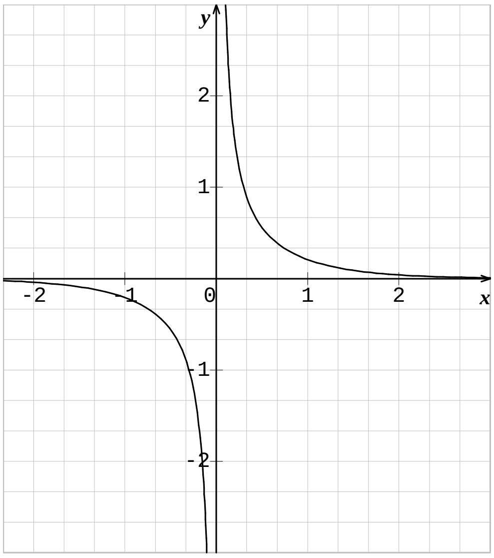
ب- من أجل كل $x>0$ ، $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=\dfrac{5^x}{5^{2x}\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}=\dfrac{1}{5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}5^X=+\infty$ ومنه حسب نهاية مركب دالتين $\lim\limits_{x\to+\infty}5^{2x}=+\infty$

و نستنتج أن $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}=0$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ و هذا يبين أن المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$

الدالة f فردية ، لدينا $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$



4. تصويب حل المعادلتين $f(x)=\frac{2}{3}$ و $f(x)=-\frac{2}{3}$

بوضع $X=5^x$ ، $f(x)=\frac{2}{3}$ تعني $\frac{X}{X^2-1}=\frac{2}{3}$

و منه $2X^2-3X-2=0$

حلي المعادلة $2X^2-3X-2=0$ هما $X_1=-\frac{1}{2}$ و $X_2=2$.

الحل السالب مرفوض لأن $X>0$

$f(x)=\frac{2}{3}$ تعني $5^x=2$ و منه $x=\frac{\ln 2}{\ln 5}$

بما أن الدالة f فردية فإن $f(x)=-\frac{2}{3}$ تعني $x=-\frac{\ln 2}{\ln 5}$

5. رسم المنحني (C) (انظر الشكل المقابل)

مسائل

83 لتكن C_m الدالة المعرفة على $[0;6]$ بـــ : $C_m(q)=0{,}8+4(1-2q)e^{-2q}$

الدالة $q\mapsto -2q$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ و الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $q\mapsto e^{-2q}$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$. $q\mapsto 4(1-2q)$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$.إذن C_m قابلة للاشتقاق على $[0;6]$

من أجل كل q من $[0;6]$ $C_m'(q)=-8e^{-2q}(1+1-2q)$ أي $C_m'(q)=16e^{-2q}(q-1)$

من أجل كل q من $[0;6]$ $e^{-2q}>0$ و منه إشارة $C_m'(q)$ هي من نفس إشارة $q-1$ و نستنتج أن:

$C_m'(q)<0$ إذا وفقط إذا كان $0\le q<1$

$C_m'(q)>0$ إذا وفقط إذا كان $1<q\le 6$

$C_m'(q)=0$ إذا وفقط إذا كان $q=1$

C_m متناقصة تماما على $[0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;6]$.

q	0		1		6
$C_m'(q)$		$-$	0	$+$	
C_m	$C_m(0)$	$\searrow$	$C_m(1)$	$\nearrow$	$C_m(6)$

لدينا $C_m(0)=4{,}8$ ، $C_m(1)\approx 0{,}26$ و $C_m(6)\approx 0{,}8$

C_m تقبل عند 1 قيمة حدية صغرى موجبة تماما إذن C_m موجبة تماما على المجال $[0;6]$

2. g قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0;6]$.

من أجل كل q من $[0;6]$: $g'(q)=4e^{-2q}+4q(-2)e^{-2q}=4(1-2q)e^{-2q}$

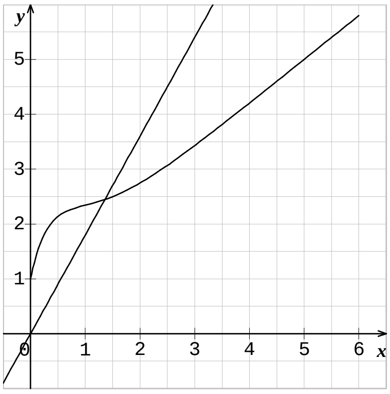
ب- C_T هي دالة أصلية للدالة C_m على $[0;6]$ إذن $C'_T = C_m$

بما أن $C_m(q) = 0,8 + g'(q)$ فإن من أجل كل q من $[0;6]$ $C_T(q) = 0,8q + g(q) + k$ حيث k ثابت حقيقي

بما أن $C_T(0) = 1$ فإن $C_T(0) = g(0) + k = k$ و منه $k = 1$

إذن : $C_T(q) = 0,8q + 4qe^{2q} + 1$

3.أ- الدالة C_T هي دالة أصلية للدالة C_m على $[0;6]$ ، و سابقا رأينا أن C_m موجبة تماما على المجال $[0;6]$ ، إذن الدالة C_T متزايدة تماما على $[0;6]$.



q	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 6
$C_T'(q)$	$+$
C_T	$1 \nearrow C_T(6)$

ب- التمثيل البياني للدالة " الكلفة الإجمالية " (انظر الشكل)

II . تصويب : ثمن البيع لهذا السائل هو 1,80 للتر الواحد

المصنع ينتج يوميا q آلاف لتر و الكمية المنتجة تباع كلها، إذن الدخل اليومي هو $1,80q$

1. أ- تمثيل دالة الدخل اليومي (انظر الشكل)

ب- الفائدة $B(q)$ تساوي قيمة الداخل منزوع منها الكلفة الإجمالية أي $B(q) = 1,80q - C_T(q)$

و منه $B(q) = 1,80q - 0,8q - 4qe^{-2q} - 1 = q - 1 - 4qe^{-2q}$

2.لتكن الدالة h المعرفة على $[0;6]$ بـــ : $h(q) = 1,8 - C_m(q)$

أ- من أجل كل q من $[0;6]$، $h'(q) = -C'_m(q)$ و نستنتج جدول تغيرات h كما يلي:

x	0 $\qquad\qquad$ 1 $\qquad\qquad$ 6
$h'(q)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
$h(q)$	$-3 \nearrow h(1) \searrow 1$

ب-h قابلة للاشتقاق و متزايدة على $[0;1]$ و $h(0) < 0$ و $h(1) \approx 1,54$

إذن المعادلة $h(q) = 0$ تقبل حلا واحدا α على $[0;1]$

جـــ- h متزايدة تماما على $[0;1]$ إذن إذا كان $0 \le q < \alpha$ فإن $h(q) < h(\alpha)$ أي $h(q) < 0$

و إذا كان $\alpha < q \le 1$ فإن $0 < h(q)$

إذا كان q ينتمي إلى $[1;6]$ فإن $h(q) > 0$

خلاصة: $h(q) < 0$ إذا وفقط إذا كان $q \in [0;\alpha[$

$h(q) > 0$ إذا وفقط إذا كان $q \in]\alpha;6[$ ، $h(q) = 0$ إذا وفقط إذا كان $q = \alpha$

3. $B'(q) = h(q)$ ومنه $B'(q)$ و $h(q)$ لهما نفس الإشارة

إذن الدالة B متناقصة تماما على $[0;\alpha]$ و متزايدة تماما على $]\alpha;6[$

ب- $\alpha \approx 0,28$ ، $B(\alpha) \approx -1,36$.

الباب التاسع

الإحصاء

الأنشطة

النشاط الأول :

– تعريف سلسلة احصائية لمتغيرين عددين .

– تمثيل سلسلة احصائية لمتغيرين عددين بسحابة نقط .

– إنشاء مستقيم تعديل خطي .

النشاط الثاني :

– تمثيل سلسلة احصائية لمتغيرين عددين بسحابة نقط .

– إنشاء مستقيم تعديل خطي .

الأعمال الموجهة

الأعمال الموجهة (1)

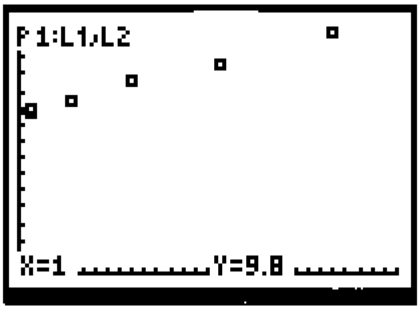
ا) تعديل بقطع مكافئ :

اتبع الخطوات الواردة و ذلك باستعمال الحاسبة البيانية TI83+ (يمكن استعمال آلات حاسبة بيانية أخرى)

الأعمال الموجهة (2) :

حتما ستظهر لك هذه الصور (لا تنس أن تعدل معلم الشاشة بالنقر على 

)



السؤال 3 يطلب سحابة النقط $(z_i ; y_i)$

التمارين

1 **1)** أ) $y_i = x_i - 100$ ، $\overline{y} = 3,5$ **إذن** $\overline{x} = 103,5$

ب) $y_i = x_i - 23600$ ، $\overline{y} = 15$ **إذن** $\overline{x} = 23615$

ج) $y_i = 10000 x_i$ ، $\overline{y} = 56,5$ **إذن** $\overline{x} = 0,00565$

د) $y_i = x_i - 10$ ، $\overline{y} = 2,5$ **إذن** $\overline{x} = 12,5$

16 **1)** $y = 0,175x + 0,973$

2) أ) $0,175 \times 10 = 1,75$ **إذن التزايد المتوسط هو** $0,75$ **سنة خلال 10 سنوات**

ب) في سنة 2005 ، $x=15$ إذن $0,175\times 15+0,973\simeq 3,598$

و منه $80+3,6=83,6$ إذن متوسط العمر سنة 2005 هو $83,6$ سنة .

ج) بحل المتراجحة $0,75x+0,973\succ 5$ ينتج $x\succ \frac{4,027}{0,175}\simeq 23,01$

الجواب بعد 24 سنة أي سنة 2014

3) حسب التعديل ، في سنة 2004 متوسط العمر هو $83,6$

و بالتالي يوجد خطأ بنسبة 5 % فقط .

17 1) **معادلة مستقيم الإنحدار :**

بعد حساب قيم x_i و y_i نحسب $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=0$ ، $\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}=-2,8$

و $a=\frac{\sum x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum x_i^2-n\overline{x}^2}$

و بالتالي المعادلة المطلوبة هي $y-\overline{y}=a(x-\overline{x})$ أي $y=13,5x-2,8$

2) معامل التمدد k :

نعوض قيم كل من x و y في المعادلة السابقة نجد $100l-100566=13,5\frac{\theta-30}{10}-2,8$

و منه $l=13,5.10^{-3}\theta+1005,227$

نعلم أن عبارة l من الشكل $l=l_0(1+k\theta)$ حيث l_0 طول القضيب تحت درجة حرارة 0^0c

أي $l_0=1005,227$ و منه $l=l_0\left(1+\frac{13,5.10^{-3}}{1005,227}\theta\right)$ أي $K\simeq 1,3.10^{-5}mm/^0C$

الباب العاشر

الاحتمالات

الأنشطة

النشاط الأول :

– تعيين قانون احتمال مرفق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.

– حساب احتمال حادثة علما بحدوث حادثة أخرى و بناء شجرة متوازنة .

– استعمال أشجار متوازنة أو دستور الإحتمالات الكلية لحساب احتمالات و حل مشكلات .

– حساب الأمل الرياضياتي و التباين و الإنحراف المعياري المرفقة بقانون احتمال .

النشاط الثاني :

– حساب احتمال حادثة علما بحدوث حادثة أخرى و بناء شجرة متوازنة .

– استعمال أشجار متوازنة أو دستور الإحتمالات الكلية لحساب احتمالات و حل مشكلات .

النشاط الثالث :

– حساب احتمال حادثة علما بحدوث حادثة أخرى و بناء شجرة متوازنة .

– استعمال أشجار متوازنة أو دستور الإحتمالات الكلية لحساب احتمالات و حل مشكلات .

– تعريف قانون برنولي و قانون ثنائي الحد و استعمالهما لحساب احتمالات حوادث .

النشاط الرابع :

– قياس تلاؤم مع قانون منتظم .

الأعمال الموجهة

الأعمال الموجهة (1)

تتبع الخطوات المبينة في الكتاب علة الآلة الحاسبة البيانية TI83+

– خطأ مطبعي : الأسئلة الثلاثة الأخيرة غير معنية بهذا الموضوع

التمارين

1 1) يوجد 8 أحجار دومينو من الشكل | Z | Z | و $C_8^2 = 28$ من الشكل | X | Y |

و منه عدد الأحجار $8 + 28 = 36$

2) أ) $\frac{4+C_4^2}{36} = \frac{5}{18}$

ب) هذه الأحجار هي الأحجار السابقة بالإضافة الى الأحجار المشكلة من رقمين فرديين

و منه $\frac{5}{18} + \frac{C_4^2}{36} = \frac{4}{9}$

3) يوجد 8 أحجار مضاعفة . من أجل كل حجر مضاعف مثل

0	0

يوجد 7 أحجار عادية أحد رقميها هو الرقم الموجود على الحجر المضاعف

مثل { (7 ; 0) ; (6 ; 0) ; (5 ; 0) ; (4 ; 0) ; (3 ; 0) ; (2 ; 0) ; (1 ; 0) }

ينتج من هذا $8\times 7=56$ حالة ممكنة

الإحتمال المطلوب $\frac{4}{45}=\frac{56}{630}$ (و بالتالي التأكيد صحيح)

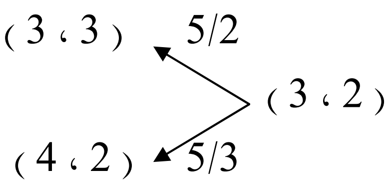
18 باتباع الخطوات الواردة في الدرس نجد :

$d^2\simeq 0{,}0173$ إذن $1000.d^2\simeq 17{,}3\prec d_9$

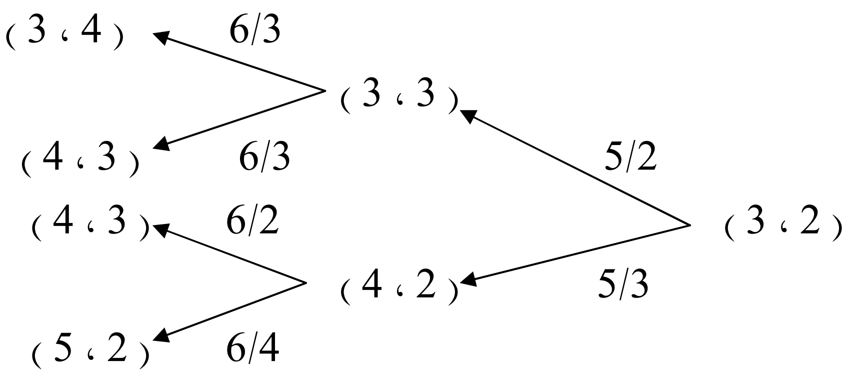
و بالتالي ، يمكن التأكيد بمجازفة بالخطأ مقدارها 10 % أن حجر النرد غير مزيف .

29 1) نمثل محتويات الصندوق بالثنائية (3 ، 2) التي تعني وجود كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء في الصندوق .

إحتمال سحب كرة سوداء في السحبة الأولى هو 5/2 . قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (3 ، 3) .
إحتمال سحب كرة بيضاء في السحبة الأولى هو 5/3 . قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (4 ، 2) .
نلخص العملية بالمخطط التالي :



بعد السحبة الثانية نحصل على :



2) أ) إذن (باستعمال المسارات المؤدية الى الثنائية (4 ، 3) لدينا

$$p(A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{5}$$

ب) و بنفس الطريقة نجد :

$$p(B)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$$

49 نضع R حدثة " نجاح تلميذ ما في البكالوريا " فيكون $p(R)=0{,}4$

1) $P_1=\left(1-p(R)\right)^5\simeq 0{,}078$

2) $p_2=C_5^1(0{,}4)(0{,}6)^4\simeq 0{,}052$

$p_3 = C_5^2 (0,4)^2 (0,6)^3 = 0,3456$ (3

$p_4 = 1 - p_1 - p_2 \simeq 0,78$ (4

$P_5 = (p(R))^5 = 0,01024$ (5

59 I) (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ و $U_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

II) 1) $a_1 = p(A_1) = \frac{1}{2}$ ، $r_1 = \frac{7}{12}$

(2 $r_n = p(A_n).p_{A_n}(R_n) + p(\overline{A_n}).p_{\overline{A}_n}(R_n)$

$$= \frac{1}{2} p_{A_n}(R_n) + \frac{2}{3} p(\overline{A_n})$$

$$= \frac{1}{2} a_n + \frac{2}{3}(1 - a_n)$$

$$= -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$$

(4 $a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

(5 $r_n = \frac{-1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5}$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \frac{3}{5}$

كتاب الأستاذ

الشعب:

- **آداب وفلسفة**
- **لغات أجنبية**

الباب الأول

القسمة الإقليدية
في مجموعة الأعداد الصحيحة

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: عدد تام عوض عدد كامل أو عدد مثالي.

عددان متحابان عوض عددان متراضيان.

الهدف: تعيين قواسم عدد طبيعي في مجموعة الأعداد الطبيعية تمهيدا لتعريف قواسم عدد صحيح في مجموعة الأعداد الصحيحة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ ".

الحل:

1. قواسم 28 هي 1؛ 2؛ 4؛ 7؛ 14؛ 28 و لدينا $28 = 14+7+4+2+1$. نستنتج أن 28 عددا تاما.
2. قواسم 220 هي 1؛ 2؛ 4؛ 5؛ 10؛ 11؛ 20؛ 22؛ 44؛ 55؛ 110 و 220.

لدينا: $284 = 110+55+44+22+20+11+10+5+4+2+1$.

قواسم 284 هي: ...

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: يهدف الجزء الأول إلى التمهيد الحدسي لمبرهنة القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ و يهدف الجزء الثاني إلى مقاربة تعريف الموافقة في $\mathbb{Z}$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الموافقات في $\mathbb{Z}$ ".

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: تخمين بعض خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$ " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الاستدلال بالتراجع.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستدلال بالتراجع " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

التشفير التآلفي

تصحيح: /

الهدف: تعريف التشفير التآلفي و استعماله لتشفير رسائل و فك أخرى مشفرة باستعمال المفتاح المناسب.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

يوم الأسبوع الذي يصادف تاريخا معينا

تصحيح: /

الهدف: تعيين يوم الأسبوع الذي يصادف تاريخا معينا.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تعيين بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على آخر

تصحيح: /

الهدف: تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة العدد الطبيعي a^n على b.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـــ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

1 الأعداد التي تكون قاسمة للعدد 204 هي :2 ، 3 ، 4 ، 6 ،12.

14
- $(x-2)(y-3)=xy-3x-2y+6$.
- $xy=3x+2y$ يعني $(x-2)(y-3)=6$. و منه لدينا عدة حالات:

الحالة الأولى: $x-2=1$ و $y-3=6$ أي $(x;y)=(3;9)$.

الحالة الثانية: $x-2=6$ و $y-3=1$ أي $(x;y)=(8;4)$.

الحالة الثالثة: $x-2=-1$ و $y-3=-6$ أي $(x;y)=(1;-3)$.

الحالة الرابعة: $x-2=-6$ و $y-3=3$ أي $(x;y)=(-4;2)$.

الحالة الخامسة: $x-2=2$ و $y-3=3$ أي $(x;y)=(4;6)$.

الحالة السادسة: $x-2=3$ و $y-3=2$ أي $(x;y)=(5;5)$.

الحالة السابعة: $x-2=-2$ و $y-3=-3$ أي $(x;y)=(0;0)$.

الحالة الثامنة: $x-2=-3$ و $y-3=-2$ أي $(x;y)=(-1;1)$.

2 ــ القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$.

16 جــ ــ $-118=7(-17)+1$ ومنه الباقي 1 والحاصل -17.

د ــ $-152=7(-22)+2$ ومنه الباقي 2 والحاصل -22.

17 $n=41k+5$ حيث $41k+5\leq 100$ أي $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ ومنه $n=5$ أو $n=46$ أو $n=87$.

3 ــ الموافقات في $\mathbb{Z}$.

25 برر صحة العبارات التالية :

أ ــ $45-3=42=7\times 6$ معناه $45\equiv 3[7]$.

ب ــ $152-2=150=3\times 20$ معناه $152\equiv 2[3]$.

جــ ــ $29+1=30=6\times 5$ معناه $29\equiv -1[6]$.

د ــ $137+3=140=28\times 5$ معناه $137\equiv -3[5]$.

و ــ $-13-2=-15=5(-3)$ معناه $-13\equiv 2[5]$.

هــ ــ $-17+7=-10=10(-1)$ معناه $-17\equiv -7[10]$.

26 نعتبر الموافقة (1) التالية $37\equiv x\ [4]$

2. العدد الطبيعي الأصغر تماما من 4 ويحقق (1) هو باقي القسمة الأقليدية لــ 37 على 4 وهو 1.

27 4 ، 13 ، 20 ، 27 .

29 $a\equiv 4[n]$ ؛ $b\equiv 14[n]$ و $c\equiv -34[n]$.

5 ــ خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

30 $140\equiv 8[12]$ إذن $n\equiv 8[12]$، ومنه باقي قسمة العدد n على 12 هو 8.

33 باقي قسمة العدد 67 على 11 هو 1.

لدينا $67\equiv 1[11]$ ومنه $67^{13}\equiv 1[11]$ إذن باقي قسمة العدد 67^{13} على 11 هو 1.

4 ــ الاستدلال بالتراجع .

35 نسمي $p(n)$ الخاصية $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$p(0)$ هي $0=\dfrac{0(0+1)}{2}$ وهذا صحيح

نفرض $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$.

$1+2+3+...+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل عدد طبيعي n ، $p(n)$

تمارين للتّعـمّق

1 ـ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

40 المسافة بين العمودين المتتاليين هي عدد طبيعي x حيث $2 < x < 5$
وبالتالي : إماّ $x = 3$ وإما $x = 4$. لدينا 4 لا يقسم 90 بينما 3 هو قاسم مشترك للعددين 90 و 156
ونأخذ قاسما مشتركا لأن كل زاوية القطعة يغرس عمود. إذن المسافة بين عموديين متتاليين هي $3m$.
محيط القطعة هو $2(90+156) = 492m$ ولدينا عدد الأعمدة هو نفس عدد الفراغات الموجودة بين عمودين متتاليين أي
$\frac{492}{3} = 164$

42 1) $\frac{n+2}{n-1} = \frac{n-1+3}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{3}{n-1} = 1 + \frac{3}{n-1}$
وبالتالي لكي يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا يكفي أن يكون $\frac{3}{n-1}$ عددا صحيحا ولهذا يجب أن يكون العدد $(n-1)$ قاسما للعدد 3.
قواسم العدد 3 هي -1 , -3 , 1 و 3 وبالتالي : $(n-1=-1)$, $(n-1=-3)$ ، $(n-1=1)$ أو $(n-1=3)$
معناه $(n=0)$, $(n=-2)$ ، $(n=2)$ أو $(n=4)$ وبما أن n عدد طبيعي فإن قيمه الممكنة هي : 0 ، 2 و 4 .
2) ليكن α و β عددين طبيعيين حيث : $a = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ ومنه $a^2 = 2^{2\alpha} \times 3^{2\beta}$ عدد قواسم a^2 هو
$(2\alpha+1)(2\beta+1)$ و عدد قواسم a هو $(\alpha+1)(\beta+1)$
ومن المعطيات لدينا : $(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1)$ معناه $4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 = 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3$
ومعناه $\alpha\beta - \alpha = \beta + 2$ يكافئ $\alpha(\beta-1) = \beta + 2$ أي $\alpha = \frac{\beta+2}{\beta-1}$. وحسب السؤال السابق ينتج أن $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases}$ أو
$\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$ ؛ إذن $a = 2^2 \times 3^4 = 324$ أو $a = 2^4 \times 3^2 = 144$.

2 ـ القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$.

49 ب ـ $a = -3475$ و $b = 53$. حاصل قسمة العدد a على b هو -66، لدينا $53k \le -3475 \le 53(k+1)$ ومنه
$k \le \frac{-3475}{53} = -65,56$ و $k \ge \frac{-3528}{53} = -66,56$ إذن $k = -66$، وبالتالي $-3498 \le -3475 \le -3445$

3 ـ الموافقات في $\mathbb{Z}$ وخواصها

61 أ ـ x عدد صحيح

$x \equiv$	0	1	2	3	4 [5]
$2x \equiv$	0	2	4	1	3 [5]

ب ـ $2x \equiv 3[5]$ معناه $x \equiv 4[5]$.

4 ـــ تشفير الكلمات .

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

65 نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x \mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x+3$ على 28 .

1) شفر الكلمة " **الجزائر**" هو" **ثهدصثثش** ".

2) ليكن y من المجموعة N ، $x+3 \equiv y\ [28]$ معناه $x \equiv y-3[28]$ ؛ إذا كان $y \geq 3$ فإن $x = y-3$ وإذا كان $y < 3$ فإن $x = y-3+28 = y+25$

3) حل تشفير: **تبضل**: يوسف ؛ **لثغوا ثهصاشثث**: فاطمة الزهراء ؛ **وذوز** : محمد.

5 ـــ الاستدلال بالتراجع .

70 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بِـــ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

المطلوب إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3$.

الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $u_0 = 3$.

نفرض أن $u_n = 3$ ولدينا $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} = \sqrt{9} = 3$

إذن حسب مبدأ التراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3$ أي المتتالية (u_n) ثابتة .

الباب الثاني

المتتاليات العددية

الأنشطة

<u>النشاط الأول</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> التذكير بتوليد متتالية معرفة بعلاقة تراجعية أو بعبارة الحد العام بدلالة n.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المتتاليات ".

<u>الحل:</u>

1. $u_{n+1} = 2u_n + 1$
2. $v_n = 3n - 5$

<u>النشاط الثاني</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرتين " المتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية " و " المتتالية الرتيبة"

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثالث</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> نمذجة وضعية و مقاربة المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ " و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

<u>النشاط الرابع</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> توظيف المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ " و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> بسيط

الأعمال الموجهة

<u>النمو الديموغرافي</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> توظيف المتتاليتين الهندسية و الحسابية في وضعيات لها دلالة.

<u>توجيهات:</u> يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تطور نسبة الزبناء

تصحيح: الزبائن عوض الزبناء

الهدف: توظيف المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تخمين عبارة الحد العام لمتتالية ثم اثباتها

تصحيح: /

الهدف: التخمين ثم الإثبات باستعمال الاستدلال بالتراجع أو باستعمال متتالية مساعدة.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ــ المتتاليات العددية

2 أ ــ $u(0) = 5$ ، $u(1) = 3$ و $u(2) = -3$.

ب ــ $u(13) = -333$ ، $u(50) = -4995$ و $u(100) = -19995$.

جـ ــ $u(n+1) = -2n^2 - 4n + 4$ ؛ $u(2n) = -4n^2 + 5$.

3 نعتبر المتتالية u المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 3 - 2u_n$.

$u_1 = -1$ ، $u_2 = 5$ و $u_3 = -7$. $u_{10} = 1025$.

2 ـ المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية .

5 $u_{13} = -32$.

$S = u_0 + u_1 + ... + u_{13} = 7(7 - 32) = -175$.

6 $u_{33} = 48$

$S = u_0 + u_1 + ... + u_{33} = 17(-1,5 + 48) = 790,5$.

3 ــ اتّجاه تغيّر ورتابة متتالية .

15 1) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{4^n} = \frac{4n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^2$

2) من أجل كل $n \geq 1$ فإن $n+n \geq n+1$ معناه $2n \geq n+1$ أي $\frac{2n}{n+1} \geq 1$ ويكافئ $\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 \geq 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن المتتالية (u_n) متزايدة .

16 1) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $2^n > 0$ و $n^2 > 0$ إذن $\frac{2^n}{n^2} > 0$ أي $u_n > 0$

2) نعتبر كثير الحدود $P(x) = x^2 - 2x - 1$ ، $\Delta' = 2$ ، $x' = 1 - \sqrt{2}$ ، $x'' = 1 + \sqrt{2}$.

$P(x) > 0$ معناه $x \in \left]-\infty ; 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2} ; +\infty\right[$ ؛

ومنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $n \in \left]1+\sqrt{2} ; +\infty\right[$ ومنه $P(n) > 0$.

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$.

إذا كان $n \geq 3$ فإن $n^2 - 2n - 1 > 0$ وهذا يعني أن $n^2 > 2n+1$ أي $n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1$ ومعناه $2n^2 > (n+1)^2$

ويكافئ $\frac{2n^2}{(n+1)^2} > 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ وبما أن كل الحدود موجبة فإن $u_{n+1} > u_n$.

وبالتالي ابتداء من $n = 3$ أي من الحد الثالث u_3 تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

4 ـ المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

19 أ ـ $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3 = 3v_n$.

ب ـ من السؤال أ ـ ينتج أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3.

21 2) **تصحيح** نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

أ ـ $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$ ب ـ $v_n = v_0 \times 3^n$ ؛ $v_n = v_0 \times 3^n - \frac{1}{2}$.

تمارين للتّعـمّـق

1 ـ المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية .

22 1) $r = \frac{v_8 - v_4}{4} = \frac{1}{2}$ ؛ $v_0 = v_4 - 4r = 3$.

2) أحسب $v_n = 3 + \frac{1}{2}n$ ؛ $3 + \frac{1}{2}n = 50$ معناه $n = 94$.

3) $S = v_6 + v_7 + ... + v_{94} = \frac{89}{2}(v_6 + v_{94})$ ؛ $S = \frac{89}{2}(2v_0 + 100r) = 2492$.

2 ـ اتّجاه تغيّر ورتابة متتالية .

31 1) $u_1 - 11{,}2$ ، $u_2 = -23{,}08$ و $u_3 = -33{,}77$.

2) $u_{n+1} - u_n = 0{,}9$ ، $u_{n+1} - u_n > 0$ أي (u_n) متزايدة تماما.

3 ـ المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

35 لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-1)$.

1) $3u_0=u_0-1$ معناه $u_0=-\frac{1}{2}$.

2) نضع $u_0=4$ و $v_n=2u_n+1$.

أ ـ $v_{n+1}=2u_{n+1}+1=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}v_n$. $v_0=9$.

ب ـ $v_n=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ؛ $u_n=\frac{1}{2}\left(9\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right)$.

مسـائل

42 1) أ) $u_2=u_1+150=5150\,DA$.

ب)من أجل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1}=u_n+150$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 150

ومنه $u_n=u_1+(n-1)150=150n+4850$ ، $u_8=150\times8+4850=9600\,DA$.

ت) $S=u_1+u_2+...+u_8=\frac{8}{2}(u_1+u_8)=58400\,DA$.

2) أ) $v_2=v_1+0,03v_1=1,03v_1=5150\,DA$.

ب) من أجل n عدد طبيعي لدينا: $v_{n+1}=v_n+0,03v_n=1,03v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $1,03$

ومنه $v_n=v_1(1,03)^{n-1}=5000(1,03)^{n-1}$ ، $v_8=5000(1,03)^7=6149.37\text{ DA}$.

ت) $T=v_1+v_2+...+v_8=v_1\frac{(1,03)^8-1}{1,03-1}=44461,68\,DA$.

3) العقد الثاني أقل تكلفة إذن عمر يختار هذا العقد .

الباب الثالث

اتجاه تغير دالة

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: التذكير بإشارة ثنائي الحدين و ثلاثي الحدود.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تذكير حول المعادلات و المتراجحات".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: دراسة اتجاه تغير دالة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " تذكير حول المشتقات ".

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

من جدول التغيرات إلى التمثيل البياني

تصحيح: /

الهدف: ربط جدول تغيرات بالمنحني المناسب.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

من التمثيل البياني إلى جدول التغيرات

تصحيح: /

الهدف: ربط منحن بجدول التغيرات المناسب.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - تذكير حول المعادلات و المتراجحات

1 دراسة حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

6

$(C_4)\rightarrow f$ و $(C_3)\rightarrow k$ ، $(C_2)\rightarrow g$ ، $(C_1)\rightarrow h$

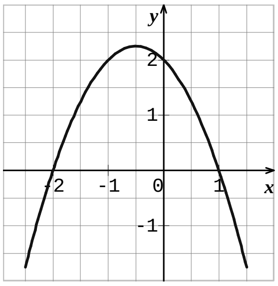
7

إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

9 f دالة معرفة على $[-2,5;2,5]$ حيث جدول تغيراتها هو التالي:

x	-2,5	-0,5	2,5
$f(x)$	↗	$\frac{9}{4}$	↘



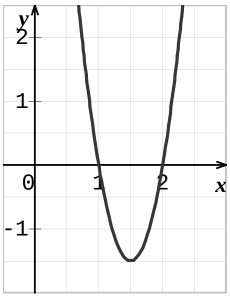
منحني الدالة f هو : (1)

10

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث تمثيلها البيني في معلم متعامد و متجانس هو التالي:

جدول تغيرات الدالة f هو

x	$-\infty$	1,5	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗



تذكير حول المشتقات

11

1) $f'(x)=-2$ 2) $f'(x)=-4x+3$ 3) $f'(x)=x^2+x-1$

12

1) $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ 2) $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ 3) $f'(x)=\frac{-40}{(4x-5)^2}$

13

1) $f'(3)=2$ و $f'(-2)=2$.   2) $f'(1)=-3$ و $f'(-\sqrt{2})=-3$

3) $f'(x)=2x$ ومنه $f'(-1)=-2$.   4) $f'(x)=3x^2$ ومنه $f'(0)=0$.

5) $f'(x)=2x+\frac{1}{2}$ ومنه $f'(2)=\frac{9}{2}$.

15 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x^2$

1) $f'(3)=2\times3=6$.

2) معادلة المماس Δ لمنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها0 هي $y=0$.

23 نسمي f الدالة المرفقة للمنحني (C). لمماس المنحني (C) عند النقطة A ، والذي يوازي المستقيم (Δ) معامل التوجيه $f'(2)=3$ هو نفس معامل توجيه (Δ) ولدينا $f(2)=4$ إذن معادلة المماس هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=3x-2$.

24 (C) منحن يشمل النقطة $A(-1\,;-3)$.

لمماس المنحني (C) عند النقطة A ، والذي شعاع توجيهه $\vec{i}$ ، معامل التوجيه معدوم وبالتالي معادلته $y=-3$.

26 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-5x+4$ و $(\mathcal{P})$ منحنيها الممثل في المعلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنا كثير حدود . $f'(x)=2x-5$.

2) معادلة لمماس المنحني $(\mathcal{P})$ عند نقطته $E(0\,;4)$ هي $y=-5x+4$

3) $f'(x)=\frac{1}{2}$ معناه $-5x+4=\frac{1}{2}$ أي $x=\frac{7}{10}$.

4) a عدد حقيقي . $y=(2a-5)x-a^2+4$.

5) $-a^2+4=0$ معناه $a=2$ أو $a=-2$.

30 1) $f(x)=x^2-x-6$ ؛ $f'(x)=2x-1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	

38 1. $f(0)=-1$ ، $f(1)=2$ و $f(2)=-1$. 2. $f'(0)=-2$ ، $f'(1)=0$ و $f'(2)=2$.

3. معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة B هي $y=-2x-1$

4. $f(0)=-1$ معناه $c=-1$ و $f'(0)=-2$ معناه $b=-2$.

$f(x)=x^2-2x-1$ ؛ $f(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})-1=3+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-1=0$

x	-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		3
$f(x)$		+	0	-	0	+	

5. الدالة f هي مشتقة دالة F على المجال $[-1;3]$.

x	-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		3
$F'(x)$		+	0	-	0	+	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

الباب الرابع

الدوال كثيرات الحدود

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهاية دالة كثير حدود من الدرجة الأولى عند مالانهاية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتم باستعمال جهاز الداتاشو و يتوج بتقديم فقرة " الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى ".

الحل: /

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهاية دالة كثير حدود من الدرجة الثانية عند مالانهاية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهاية دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة عند مالانهاية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

مسائل استمثال

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدوال كثيرات الحدود من الدرتين الثانية و الثالثة لدراسة وضعية استمثال.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الربط بين مساحة، دالة و منحن

تصحيح: /

الهدف: دراسة وضعية استمثال.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

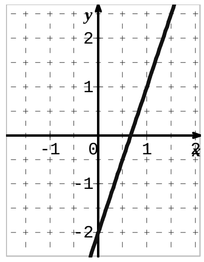
الحل: بسيط

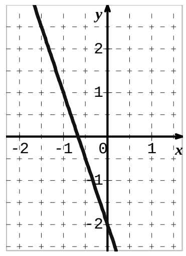
التمارين

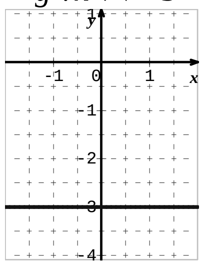
تمارين تطبيقية

1 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى .

1 $f : x \mapsto 3x - 2$ ؛ $g : x \mapsto -3x - 2$ ؛ $g : x \mapsto -3$







2 $g : x \mapsto -2x - 3$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-6	↘

$f : x \mapsto 2x - 3$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	1	↗

$g : x \mapsto -3x$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-7	↘

3 1) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	↗

2) إحداثيتا نقطة تقاطع منحني الدالة f مع محور الفواصل $(2;0)$.

إحداثيتا نقطة تقاطع منحني الدالة f مع محور التراتيب $(0;-1)$.

3) إذا كان $x \in]-\infty;2]$ فإن $f(x) \leq 0$ وإذا كان $x \in [2;+\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$

2 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية .

10 1.أ− $f(x) = g(x)$ معناه $2x^2 - 5x - 25 = 0$ ومعناه $x = -\dfrac{5}{2}$ أو $x = 5$.

ب− إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g) هي $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{65}{4}\right)$ ؛ $(5;20)$.

2.أ− إشارة $f(x) - g(x)$ حسب قيم x .

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		5		$+\infty$
$2x^2-5x-25$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب− إذا كان $x \in \left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup \left]5;+\infty\right[$ فإن (C_f) يقع فوق (C_g) وإذا كان $x \in \left]-\frac{5}{2};5\right[$ فإن (C_f) يقع تحت (C_g).

3 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة .

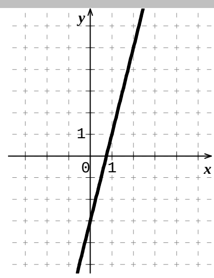
12 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ؛ في المجالين $]-\infty;-1]$ و $[2;+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما ؛ وفي المجال $[-1;2]$ الدالة f متناقصة تماما.

تمارين للتَّعــمّــق

1 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى .

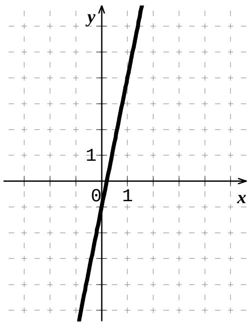
18 $f : x \mapsto 4x-3$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



22 $f : x \mapsto 5x-1$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 5x=-\infty$ ؛
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 5x=+\infty$ ؛ $f'(x)=5$ ؛
ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

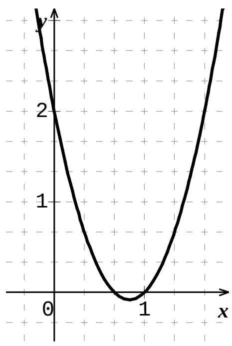


2 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية .

26 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3x^2-5x+2$. C_f منحنيها البياني .

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$.
2. $f'(x)=6x-5$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{12}$	$\nearrow$	$+\infty$



3. أكتب معادلة لمماس المنحني C_f.

$3x^2-5x+2=0$ معناه $x=1$ أو $x=\frac{2}{3}$ ، معادلة المماسين المنحني C_f : $y=x-1$ ؛ $y=-x-\frac{2}{3}$.

4. التمثيل البياني

3 ـــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة .

32 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=x^3-3x^2-5x+4$.

(C) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1) f معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

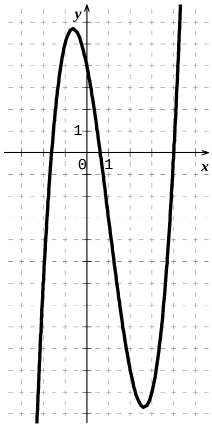
$f'(x)=3x^2-6x-5$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

2) $f''(x)=6x-6$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

3) رسم (C) .



مســـائـــل

36 نسمي X طول زجاجة الباب و x عرضها حيث $x>0$ ولدينا : $X\times x=20160\,cm^2$

أي : $X=\dfrac{20160}{x}$. نسمي f الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x ، مساحة الباب ؛ أي :

$f(x)=(X+42)(x+30)$ ومعناه $f(x)=\left(\dfrac{20160}{x}+42\right)(x+30)$ الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا :

$$f'(x)=\left(\frac{-20160}{x^2}\right)(x+30)+\left(\frac{20160}{x}+42\right)$$

أي : $$f'(x)=42\left(\frac{-480x-14400+480x+x^2}{x^2}\right)$$

ومعناه $$f'(x)=42\left(\frac{x^2-14400}{x^2}\right)$$

x	0		120		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	+	
$f(x)$	‖	$\searrow$	31500	$\nearrow$	

القيمة الحدية الصغر للدالة f (أصغر مساحة للباب) هي $31500\,cm^2$ وتبلغها عند $x=120$

إذن عرض الباب هو $x+30=150\,cm$ وطولها هو $X+42=\dfrac{20160}{x}+42=210\,cm$.

الباب الخامس

الدوال التناظرية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات دالة تناظرية عند إطراف مجموعة تعريفها و مقاربة مفهوم الخط المقارب.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " نهايات دالة تناظرية " ويتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات دالة تناظرية عند إطراف مجموعة تعريفها و مقاربة مفهوم الخط المقارب.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " نهايات دالة تناظرية " ويتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

التعرف على المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات

تصحيح: /

الهدف: اكتشاف كيف يمكن استخراج المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

المستقيم المقارب و قواسم عدد طبيعي

تصحيح: /

الهدف: تعيين نقط منحن التي إحداثياتها أعداد طبيعية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الربط بين دالة، جدول تغيرات و منحن

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال التناظرية.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

التمارين

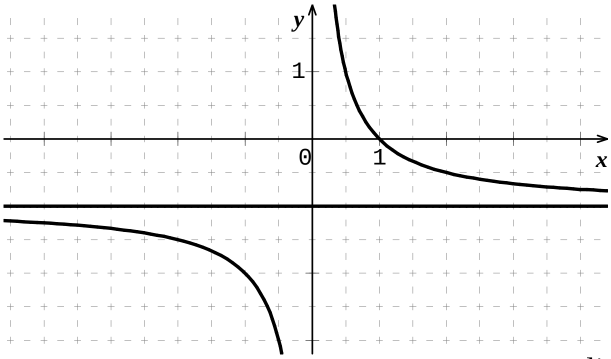
تمارين تطبيقية

1 - نهايات الدوال التناظرية

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1-x}{x}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني.

.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x}=-1$ ، المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$.

.2 $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$



x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ -1

2 f الدالة " مقلوب " معرفة على $\mathbb{R}^*$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ $\quad$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$ $\quad$ 4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$ $\quad$ 6) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$

8 f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

11 معادلتا لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني هما : $x=\frac{1}{2}$ و $y=1$

x	$-\infty$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	1 $\searrow$ $-\infty$ ‖ $+\infty$ $\searrow$ 1

2 - دراسة دالة تناظرية

13 1 ــ أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\frac{2}{x+2}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ ، المنحني يقبل مستقيما معادلته $y=2$.

ب- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=+\infty$ ، المنحني يقبل مستقيما معادلته $x=-2$.

جـ− $f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}$ ، من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ ، $f'(x)>0$.

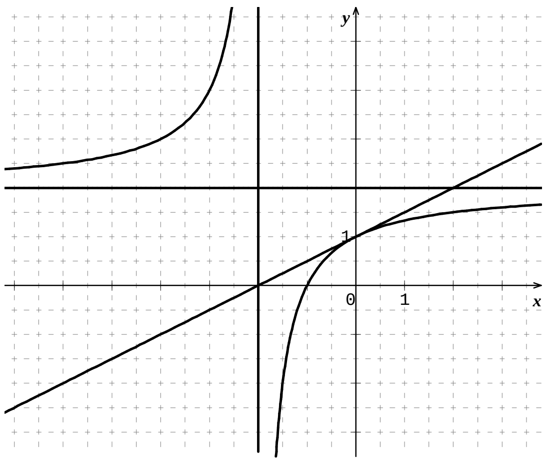
د− جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	2 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 2

2 ــ $(0;1)$ ؛ $(-1;0)$.

ــ $y=\frac{1}{2}x+1$.

ــ إنشاء المماس (Δ) والمنحني (C) .



18 1.**تصحيح** أدرس تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	-
$f(x)$	-1 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ -1

.معادلتا المستقيمين المقاربين للمنحني (C) : $x=1$ و $y=-1$.

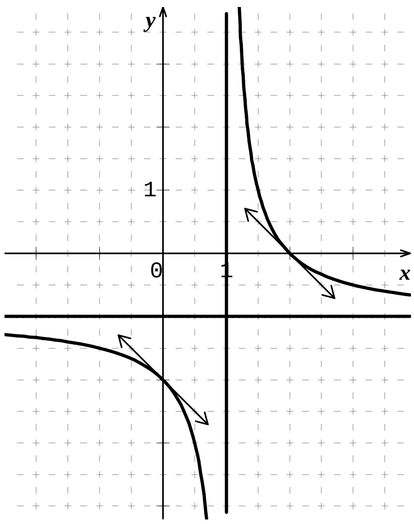
2.أ) $(0;-2)$ ؛ $(2;0)$.

ب) $f'(x)=-1$ معناه $\frac{-1}{(x-1)^2}=-1$

أي $(x-1)^2=1$ وهذا يعني أن $x=0$ أو $x=2$.

جـ) $y=-x-2$ ؛ $y=-x+2$.

3.الرسم.



تمارين للتعمق

23 أرفق بكل منحن من المنحنيات المبينة في الشكل دالة من الدوال التالية:

C_1 هو منحني الدالة f_6 ، C_2 هو منحني الدالة f_5 ، C_3 هو منحني الدالة f_2 ، C_4 هو منحني الدالة f_4 ،

C_5 هو منحني الدالة f_3 ، C_6 هو منحني الدالة f_1

25 **الطريقة البيانية:**

1.بين أن حل المعادلة $x^2 = \dfrac{4x-5}{x-2}$ يعني $x^2(x-2) = 4x-5$ أي $x^3-2x^2-4x+5=0$ حيث $(x \neq 2)$

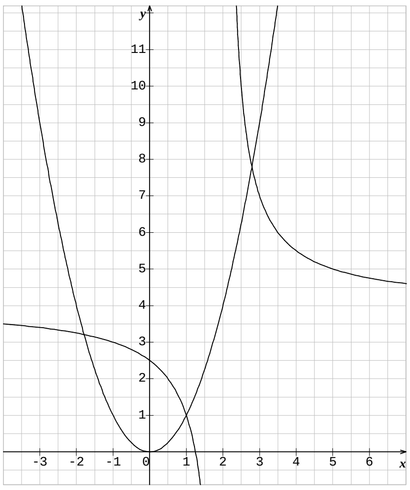
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـــ: $f(x) = \dfrac{5x-4}{x-2}$

أ- $f(x) = \dfrac{5x-10+6}{x-2} = \dfrac{5x-10}{x-2} + \dfrac{6}{x-2} = \dfrac{5(x-2)}{x-2} + \dfrac{6}{x-2} = 5 + \dfrac{6}{x-2}$

ب- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$ و متناقصة تماما على المجال $]2;+\infty[$.

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $g(x) = x^2$

رسم في نفس المعلم المنحني C_g الممثل للدالة g (انظر الشكل)



4.عدد حلول المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$ هو عدد نقط تقاطع المنحني C_g

مع المنحني (C) و هو ثلاثة حلول

الحل الأول $x_1 = 1$ ، الحل الثاني $x_2 \in \left]-2;-\dfrac{3}{2}\right[$ ، الحل الثالث $x_3 \in \left]\dfrac{5}{2};3\right[$

الطريقة الجبرية:

1.ننشر العبارة $(x-1)(x^2-x-5)$

2.نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = x^2-x-5$

أ- $h'(x) = 2x-1$. الدالة h متزايدة تماما على $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ و متناقصة تماما على $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$

ب- حل في المعادلة $h(x)=0$ تعني $x^2-x-5=0$

مميز كثير الحدود x^2-x-5 هو $\Delta = 21$ ، إذن المعادلة $x^2-x-5=0$ تقبل حلين هما $x' = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$

و $x'' = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

3. $x^3-2x^2-4x+5=0$ يعني $(x-1)(x^2-x-5)=0$ و منه $(x=1)$ أو $\left(x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$ أو $\left(x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

مسائل

28 ثمن بضاعة هو $120DA$.إذا عرف هذا الثمن ارتفاعا بنسبة 25% يكون ثمنه

$$120 + \left(120 \times \frac{25}{100}\right) = 120 + \frac{3000}{100} = 150$$

إذا عرف الثمن انخفاضا بنسبة غير معروفة $y\ \%$ ب حيث ثمن البضاعة هو من جديد $120DA$ فإن:

$120=150-\frac{150y}{100}$ و منه $\frac{1500-15y}{10}=120$ أي $1500-15y=1200$ أي $y=20$

2.بصفة عامة، ثمن P لبضاعة بالدينار يعرف ارتفاعا بنسبة $x\ \%$ يكون ثمنه $\frac{100P+Px}{100}=P+\left(P\times\frac{x}{100}\right)$

إذا عرف الثمن انخفاضا بنسبة $y\ \%$ ويعود إلى قيمته الأصلية P فإن:

$$\frac{100P+Px}{100}-\left(\frac{100P+Px}{100}\times\frac{y}{100}\right)=P \text{ أي } \frac{100+x}{100}-\left(\frac{100+x}{100}\times\frac{y}{100}\right)=1$$

$$\frac{100+x}{100}-\left(\frac{100+x}{100}\times\frac{y}{100}\right)=1 \text{ تعني } \left(\frac{100+x}{100}\times\frac{y}{100}\right)=\frac{100+x}{100}-1=\frac{x}{100}$$

$$\left(\frac{100+x}{100}\times\frac{y}{100}\right)=\frac{x}{100} \text{ تعني } \frac{y}{100}=\frac{x}{100}\times\frac{100}{100+x} \text{ ومنه } y=\frac{100x}{x+100}$$

3. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;100]$ بـــ: $f(x)=\frac{100x}{x+100}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الوحدة: $1cm$ من أجل 5 وحدات.

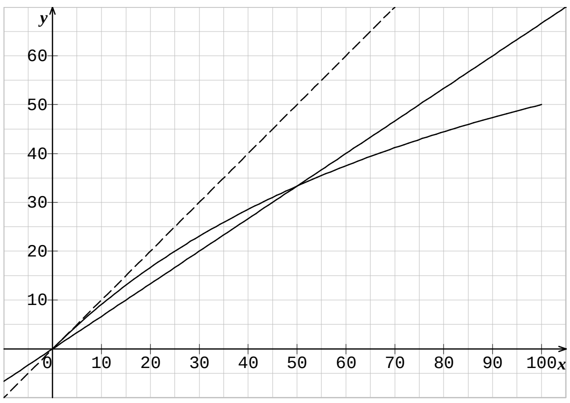
أ- $f(x)=\frac{100x+10000-10000}{x+100}=\frac{100(x+100)}{x+100}-\frac{10000}{x+100}=100-\frac{10000}{x+100}$

ب- الدالة f متزايدة تماما على $[0;100]$

x	0 $\qquad\qquad$ 100
$f(x)$	$0 \nearrow 50$

جـ- معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي : $y=1\times(x-0)+0$ أي $y=x$

د- رسم T و (C).



4. أ- $y=\frac{2}{3}x$ يعني $\frac{100x}{x+100}=\frac{2x}{3}$ و منه $2x(x+100)=300x$

أ- $2x(x+100)=300x$ يعني $2x(x-50)=0$ أي $(x=0)$ أو

- إذا كان $(x=0)$ فإن $(y=0)$

- إذا كان $(x=50)$ فإن $\left(y=\frac{100}{3}\right)$

ب- بيانيا منحني الدالة f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=\frac{2}{3}x$ في نقطتين احداثياتهما $(0;0)$ و $\left(50;\frac{100}{3}\right)$

الباب السادس

الاحتمالات

الأنشطة

النشاط الأول :

– إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة و ذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة

النشاط الثاني :

– إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة و ذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة

– قانون الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.

– الربط بين الوسط الحسابي و الأمل الرياضي و التباين التطبيقي و التباين النظري لسلسلة

النشاط الثالث :

– إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة و ذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة

– قانون الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.

– الربط بين الوسط الحسابي و الأمل الرياضي و التباين التطبيقي و التباين النظري لسلسلة

النشاط الرابع :

– حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر

النشاط الخامس :

– بناء شجرة الإمكانيات المرجحة .

– استعمال أشجار مرجحة للحصول على علاقة الاحتمالات الكلية .

– بناء شجرة الإمكانيات المرجحة و استعمالها في حالة تكرار تجارب متطابقة و مستقلة .

النشاط السادس :

– حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر

– التحقق من استقلال حادثتين

النشاط السابع :

– حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر

– التحقق من استقلال حادثتين

الأعمال الموجهة

الأعمال الموجهة (1)

I) 1– 0.0117 2– 0.0351 3– 0.4035 4– 0.3991

II) 1– 0.0005 2– 0.055 3– 0.1425 4– 0.0025

III) سلم التنقيط : العلوم الطبيعية (5) ، الرياضيات (4) ، الفيزياء (4) ، الأدب العربي (2) و الإجتماعيات (2) (يمكن أخذ أي سلم تنقيط آخر)

1– 0.3474 2– 0.0316 3– 0.0105

4) أ)

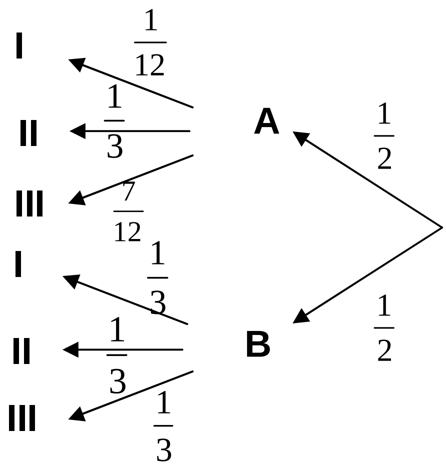
α	12	10	8	6	4	2	0
$\varphi(\alpha)$	0.0736	0.0947	0.1078	0.064	0.1964	0.0631	0.4

ب) $E(X) = 3.99$

الأعمال الموجهة (2) :

1) أ) 0.0006 ب) 0.1620 ج) 0.0486

2) أ)



إصابة المناطق

ب) $p(III) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 0.4583$

ج) (احتمال شرطي) $p_{III}(A) = \frac{p(A \cap III)}{p(III)} = 0.6364$

التمارين

6 عدد الحالات الكلية هو $2^6 = 64$

1) $P = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

2) نعلم أن P' " **احتمال أن يكون عدد مرات ظهور الوجه أكبر من عدد مرات ظهور الظهر** " **هو نفسه P''** " **إحتمال أن يكون عدد مرات ظهور الظهر أكبر من عدد مرات ظهور الوجه** " أي P' = P''

و منه لدينا P + P' + P'' = 1 و P' = P'' ينتج $P' = P'' = \frac{1-P}{2} = \frac{11}{32}$

3) نعتبر الحادثة M " عدد مرات ظهور الظهر مضاعف لعدد مرات ظهور الوجه "

$$P(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+20+15}{64} = \frac{9}{16}$$

4) قانوني الاحتمال يتبعان قانون ثنائي الحد و سيطاه 6 و $\frac{1}{2}$.

16 نعتبر قانون الاحتمال X المعرف كمايلي :

α	-1	2	3	4
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

2) أحسب $P(X=2)$ و $P(X\geq\frac{5}{2})$ و $P(X\prec 1)$

17 1) النتائج الممكنة هي : 20 ، 25 ، 30

α	20	25	30
$P(X=\alpha)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$

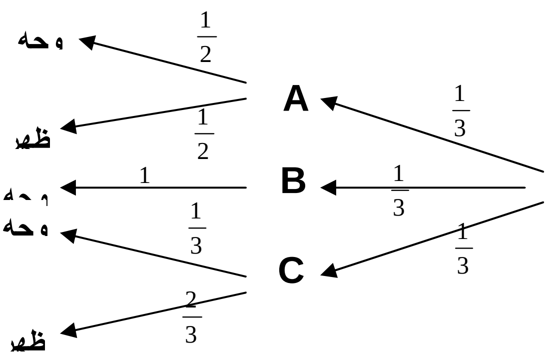
4) $E(X)=\frac{60+225+90}{15}=\frac{375}{15}=25$

5) $V(X)=\frac{3}{15}(20-25)^2+\frac{9}{15}(25-25)^2+\frac{3}{15}(30-25)^2=10$

6) $P(X\geq 25)=\frac{9}{15}+\frac{3}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

27 $P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{11}{18}$



28 $p(B_1)=\frac{5}{6}$ $\quad p(B_2/B_1)=\frac{9}{11}$ $\quad p(B_2\cap B_1)=p(B_2)\times p(B_2/B_1)=\frac{15}{22}$

34 هدف و مساحة :

α	1000	400	100	50
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

3) $E(X)=\frac{1000+1200+500+350}{16}=\frac{3050}{15}=\frac{610}{3}$

$$V(X)=\frac{1}{16}\left(1000-\frac{610}{3}\right)^2+\frac{3}{16}\left(400-\frac{610}{3}\right)^2+\frac{5}{16}\left(100-\frac{610}{3}\right)^2+\frac{7}{16}\left(50-\frac{610}{3}\right)^2$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\simeq 246.05$