دراسة ظواهر كهربائية

الكفــاءات المستهدفــة :

تتعلمون في هذه الوحدة :

ثنائي القطب RC

- خصائص مكثفة
- شحن وتفريغ مكثفة
- الطاقة المخزنة في مكثفة

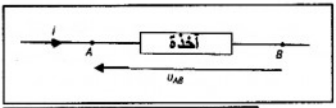
ثنائي القطب RL

- خصائص وشيعة
- تصرف وشيعة في جزء من دارة
- الطاقة المخزنة في وشيعة

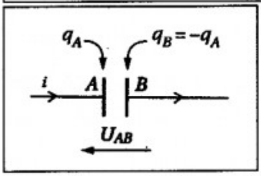
ما تعرفت عليه سابقا

- التيار الكهربائي المستمر : هو كل تيار كهربائي شدته ثابتة و لا يتعلق بالزمن .
- التيار الكهربائي المتناوب : هو كل تيار كهربائي شدته متغيرة بدلالة الزمن .
- جهاز GBF : مولد منخفض التواترات يقدم إشارات مختلفة على شكل : توتر جيبي ، توتر مثلثي ، توتر مربعي .
- قانون جمع التوترات في حالة دارة تسلسلية : $U_{AB} = U_{AD} + U_{DC} + U_{CB}$
- قانون جمع الشدات في حالة دارة تفرعية : $I = I_1 + I_2 + I_3$
- قانون أوم بين طرفي ناقل أومي هو : $U_R = R . I$
- استطاعة التحويل الكهربائي $P = E/\Delta t$ وتقدر بالواط (W)
- المكثفة : تتميز بسعتها C وتقدر بالفاراد (F) ، وتعمل على تخزين الكهرباء والطاقة .
- العلاقة بين التوتر بين طرفي المكثفة وسعتها والشحنة الكهربائية التي تحملها هي : $Q = C . U$
- شحن وتفريغ مكثفة .
- **ثابت الزمن** : ثابت الزمن لثنائي القطب RC هو الزمن اللازم لتشحن المكثفة بنسبة 63% من شحنتها العظمى ، رمزه (τ) .

مفهوم الإصطلاح آخذة

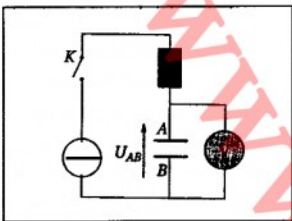


في حالة الإصطلاح آخذة ، الشدة i و التوتر u تمثل بأسهم متعاكسة في الإتجاه .
في العنصر الكهربائي المعتبر آخذة ، التيار ينزل الكمونات . إذا كان AB ثنائي قطب آخذة يكون : $u = u_{AB} > 0$ أي $V_A > V_B$. التيار الكهربائي ينتقل من A نحو B و $i > 0$. في هذا الإصطلاح ، قيم التوتر و الشدة لهما نفس الإشارة من أجل الآخذة و لهما إشارتين متعاكستين بالنسبة للمولد . و العكس بالنسبة للأسهم .
في حالة مكثفة أصطلاحا آخذة . انظر الشكل .



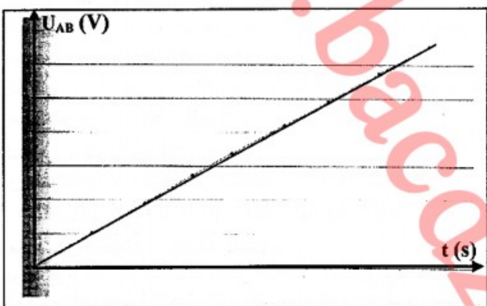
علاقة شحنة المكثفة بتوتر الشحن (سعة المكثفة)

نحقق التركيب الموضح في الشكل المقابل :
للتوصل إلى العلاقة التي تربط التوتر بشحنة المكثفة يجب تثبيت شدة التيار و من أجل ذلك نستخدم مولد مثالي للتيار . في هذه الدارة ثبتت شدة التيار عند القيمة : $i = 15,0\ \mu A$.
عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K و في نفس اللحظة نشغل الكرونومتر .
نسجل قيمة التوتر U_{AB} عند أزمنة مختلفة ، ندون النتائج في الجدول التالي :



t(s)	0	0,67	1,25	1,77	2,20	2,76	3,23	3,78	4,32
U_{AB}(V)	0	2,04	3,79	5,44	6,73	8,41	9,82	11,5	13,1
q (µC)									

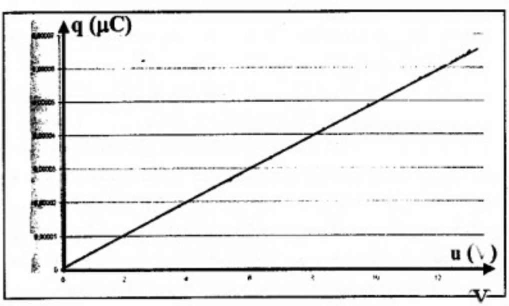
1ـ ارسم المنحنى $U_{AB} = f(t)$.
ـ نعتمد على سلم مناسب و نرسم المنحنى $U_{AB} = f(t)$ فنحصل على الشكل المقابل .



2ـ ماذا تلاحظ ؟
ـ المنحنى عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $U_{AB} = a\,.\,t$. حيث a هو معامل توجيه المستقيم . إذن التوتر بين طرفي المكثفة دالة خطية للزمن .
3ـ علما أن من أجل قيمة ثابتة للشدة i لدينا : $q = i\,.\,t$.
اكمل الجدول السابق .
ـ اكمال الجدول .

t(s)	0	0,67	1,25	1,77	2,20	2,76	3,23	3,78	4,32
U_{AB}(V)	0	2,04	3,79	5,44	6,73	8,41	9,82	11,5	13,1
q (µC)	**0**	**10,1**	**18,8**	**26,6**	**33,0**	**41,4**	**48,5**	**56,7**	**64,8**

4ـ ارسم المنحنى $q = f(u)$.
ـ نعتمد على سلم مناسب و نرسم المنحنى $q = f(t)$ فنحصل على الشكل المقابل .



5ـ ماذا تلاحظ ؟ استنتج العلاقة بين q و u .
ـ المنحنى عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $q = b\,.\,u$. حيث b هو معامل توجيه المستقيم . إذن شحنة المكثفة دالة خطية للتوتر .
ما قيمة معامل توجيه المستقيم الناتج ؟
ـ قيمة معامل توجيه المستقيم هي : $b = 5,0\,.\,10^{-6}$.

6ـ اكتب العبارة التي تربط الشحنة بالتوتر .
ـ كتابة العبارة التي تربط الشحنة بالتوتر : معامل توجيه هذا المستقيم قيمته توافق مقدار يميز المكثفة يدعى بسعة المكثفة و رمزها : C و حدتها : Farad. إذن سعة المكثفة المستخدمة في هذا التركيب هي : $C = 5,0\,.\,10^{-6}$ Farad .
و منه العبارة التي تربط الشحنة بالتوتر هي : $q = C\,.\,u$.

سعة المكثفة C

ــ لكل مكثفة ميزة خاصة بها تدعى السعة ، وهي إمكانية المكثفة على تخزين الشحنة الكهربائية ، تتعلق بأبعادها و طبيعة العازل حيث تكون سعة المكثفة أكبر كلما خزنت شحنة أكثر تحت نفس التوتر الكهربائي .

وحدة السعة في النظام العالمي للوحدات (SI) هي الفاراد (F) ، وحدة الشحنة Q : الكولون (C) ، وحدة التوتر U_{AB} : الفولط (V) . أجزاء الفاراد هي : ــ ميكرو فاراد (µ F) : حيث $1\ \mu F = 10^{-6}F$ ــ نانو فاراد (µ F) : حيث $1\ nF = 10^{-9}F$

ــ بيكو فاراد (µ F) : حيث $1pF = 10^{-12}F$.

علاقة التوتر بشدة التيار (تيار متغير)

في حالة التيارات الكهربائية المتغيرة ، الشدة ، التوتر و شحنة المكثفة هي مقادير تتعلق بالزمن t . حيث نتعامل معها كقيم لحظية $i(t)$ ، $u(t)$ و $q(t)$.

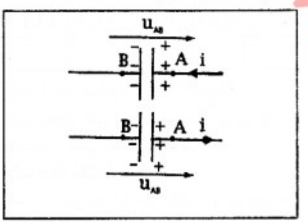
القوانين الرئيسية المستعملة في التيار المستمر (قانون جمع التوترات ، قانون الشدات و قانون أوم) تبقى صالحة ولكن بأخذها كقيم لحظية $i(t)$ ، $u(t)$ و $q(t)$.

ــ العبارة التي تربط الشحنة بالتوتر

مهما كانت حالة شحنة المكثفة ، التوتر بين طرفيها يتناسب طردا مع الشحنة التي يحملها لبوساها . $\mathbf{q(t) = C \cdot u(t)}$.

ــ العبارة التي تربط التيار بالشحنة

في حالة التيارات المتغيرة ، شدة التيار ليس تدفق ثابت للشحنات كما ذكرنا سابقا . نعرف القيمة اللحظية $i(t)$ للشدة عند اللحظة t على أنها مساوية لمشتقة الشحنة $q(t)$ عند هذه اللحظة t .



و منه العبارة التي تربط التيار بالشحنة : $\mathbf{i = dq/dt}$

حيث i تقدر بالأمبير (A) و q بالكولون (C) و t بالثانية (s) .

إذا كان $i > 0$ فإن $dq_A/dt > 0$ لذا تتزايد q_A في حالة شحن المكثفة باعتبارها اصطلاحا آخذة . $\mathbf{i = +dq/dt}$

إذا كان $i < 0$ فإن $dq_A/dt < 0$ لذا تتناقص q_A في حالة تفريغ المكثفة باعتبارها اصطلاحا مولد . $\mathbf{i = - dq/dt}$.

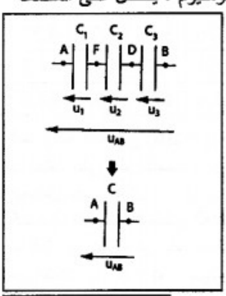
ــ العبارة التي تربط التيار بالتوتر

إن العلاقة بين (i) شدة التيار الكهربائي ، و (C) سعة المكثفة ، و (u_{AB}) التوتر الكهربائي بين لبوسي المكثفة هي :

$I(t) = dq_A/dt = d(C \cdot u_{AB})/dt = C \cdot du_{AB}/dt$ و منه : $\mathbf{I(t) = C \cdot du_{AB}/dt}$.

من أشكال المكثفات ، المكثفة المستوية

يوجد نوع آخر من المكثفات يدعى المكثفات الإلكتروكيميائية (المكثفات المستقطبة) ، وهي مكثفات تستعمل مع التيار المستمر ، نحصل عليها بعملية التحليل الكهربائي لملح كلور المونيوم باستعمال مساري (الكترودات) ، من الألومنيوم ، يتشكل على المصعد طبقة رقيقة عازلة من الألومين ، تتحمل هذه المكثفات توترات عالية ، سعاتها كبيرة جدا ، لكن إذا وصلت بشكل غير صحيح (عدم مراعاة توصيل قطبيها بالمولد) يتم إتلافها بسبب إتلاف طبقة الألومين .



تجميع المكثفات

1ــ على التسلسل : لدينا ثلاث مكثفات موصولة على التسلسل في الشكل المقابل ، بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب : $U_{AB} = U_1 + U_2 + U_3$

$Q/C = Q_1/C_1 + Q_2/C_2 + Q_3/C_3$

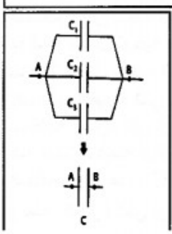
على التسلسل تكون الشحنة متساوية : $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$

و منه : $\mathbf{1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3}$

يمكن تعميم ذلك على عدة مكثفات مهما كان عددها .

• **نتيجة : جمع المكثفات على التسلسل : ــ يجعل السعة المكافئة ضعيفة .**

ــ يسمح باستخدام توتر أعلى من التوتر الذي تتحمله كل مكثفة على حدة .



2ــ **على التفرع :** لدينا ثلاث مكثفات موصولة على التفرع ، كما هو في الشكل المقابل .

على التفرع ، شحنة المكثفة المكافئة = مجموع شحنات المكثفات : $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

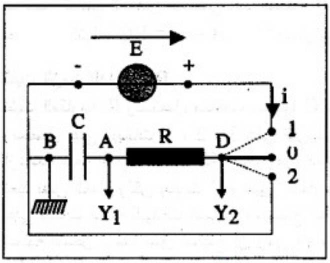
$U_{AB}C = U_{AB}\,C_1 + U_{AB}\,C_2 + U_{AB}\,C_3$ و منه : $\mathbf{C = C_1 + C_2 + C_3}$

يمكن تعميم ذلك على عدة مكثفات مهما كان عددها .

نتيجة : جمع المكثفات على الفرع : ــ يجعل السعة المكافئة كبيرة .

ــ يسمح باستخدام توتر ضعيف للحصول على شحنة كبيرة لا توفرها كل مكثفة على حدة .

استجابة ثنائي القطب RC لسلم التوتر



تطور التوتر الكهربائي بين طرفي مكثفة

نشـــاط :

التجهيز التجريبي : حقق الدارة المكونة من العناصر التالية :

ـــ مولد توتر ثابت $E = 12\ V$.

ـــ مكثفة سعتها $C = 15{,}5\ \mu F$.

ـــ مقاومة $R = 10\ K\Omega$.

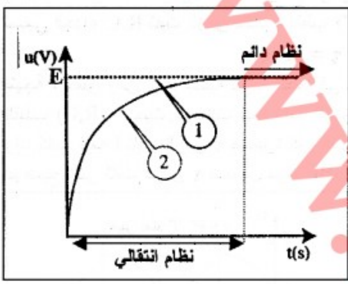
ـــ راسم اهتزازات بذاكرة . ـــ أسلاك توصيل . ـــ بادلة .

1. خلال شحن المكثفة

ضع البادلة في الوضع (1) يظهر على شاشة راسم الإهتزازات بيانين (1) و (2) كما في الشكل المقابل .

1ـــ مالمقصود بـــ RC ؟

ـــ ثنائي القطب الذي يحتوي على التسلسل مقاومة R و مكثفة C يدعى بثنائي القطب RC .



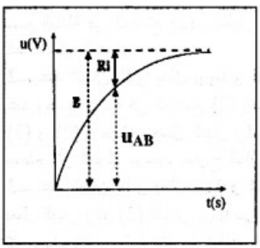
2ـــ حدد البيان الذي يمثل u_{DB} و كيف يتطور. بماذا تدعى الظاهرة الملاحظة ؟

عند وضع البادلة في الوضع (1) يظهر على شاشة راسم الاهتزازات البيانين (1) و (2) . حيث : يمثل البيان رقم (1) التوتر u_{DB} بين طرفي المولد وهو ثابت و يساوي E . بحيث بعد غلق القاطعة مباشرة التوتر u_{DB} بين طرفي المولد ينتقل آنيا و فجأة من القيمة الإبتدائية 0 إلى القيم E (القوة المحركة الكهربائية للمولد) و التي يثبت عندها . نقول في هذه الحالة أن ثناي القطب RC خاضع لسلم توتر .

سلم التوتر : في سلم التوتر ، ينتقل التوتر الذي كان في البداية معدوم لحظيا إلى قيمة أخرى معينة يحافظ عليها .

3ـــ حدد البيان الذي يمثل u_{AB} و كيف يتطور ؟

يمثل البيان رقم (2) التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة حيث يتطور هذا التوتر تدريجيا خلال عملية الشحن **(نظام انتقالي)** حتى يصل إلى قيمة $u_{AB} = E$ ، ثابتة عند نهاية عملية الشحن **(نظام دائم)** .



4ـــ هل عملية الشحن تتم آنيا ؟

إن عملية شحن المكثفة لا تتم آنيا ، يمكن أن نبين ذلك كم يلي :

لدينا $q_A = C \cdot u_{AB}$ ، و C مقدار ثابت . بما أن u_{AB} يتطور تدريجيا ، إذا q_A يتطور تدريجيا .

ـــ منحنى التطور الزمني للشحنة q_A مماثل لمنحنى التطور الزمني للتوتر u_{AB} بتعويض فقط E بـــ CE .

5ـــ كيف تتوقع أن تتغير شدة التيار الكهربائي خلال الشحن ؟

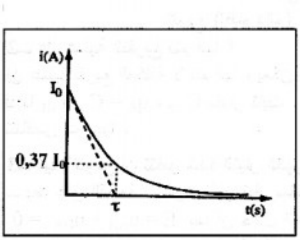
ـــ بعد غلق القاطعة مباشرة يظهر تيار موجب في الدارة . حسب قانون جمع التوترات : $E = u_{AB} + u_{DA} = Cte$ بما أن خلال الشحن تزداد u_{AB} إذن يجب أن تتناقص u_{DA} التوتر بين طرفي المقاومة حتى يبقى المجموع ثابت . و حسب قانون أوم $u_{DA} = R\,i$

إذن الشدة i هي التي سوف تتناقص بنفس الكيفية التي تزداد بها u_{AB} .

الشدة i لهذا التيار تتناقص تدريجيا إلى أن تنعدم في نهاية الشحن $i = 0$.

ملاحظة : يمكن حساب شدة التيار الكهربائي المار بالدارة في كل لحظة خلال الشحن كما يلي : $u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$

و منه : $E = Ri_{AB} + u_{AB}$ $i_{AB} = (E - u_{AB}) / R$

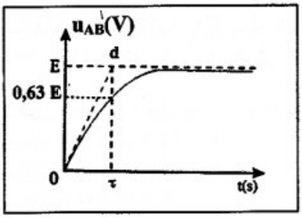


6ـــ ارسم المماس للبيان $i = f(t)$. عند المبدأ ، واستنتج فاصلة نقطة تقاطعه مع محور الأزمنة . قارن النتيجة مع الجداء RC . ماذا تلاحظ ؟

ـــ نقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ مع محور الأزمنة ،

حيث فاصلتها : $t = \tau = RC$. كما نجد ترتيبها يساوي : $i = f(\tau) = 0{,}37\ I_0$.

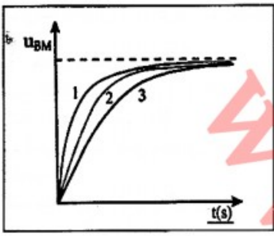
7ـــ أرسم المماس للبيان $u_{AB} = f(t)$. عند المبدأ ، واستنتج فاصلة نقطة تقاطعه مع محور الأزمنة . قارن النتيجة مع الجداء RC . ماذا تلاحظ ؟



ــ نقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ مع محور الأزمنة ،
حيث فاصلتها : $t = \tau = RC$. كما نجد ترتيبها يساوي : $u_{AB} = f(\tau) = 0,63\ E$.

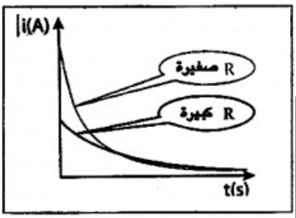
ثابت الزمن للدارة RC :

نثبت المقاومة R ونستعمل مكثفات سعاتها C ، 2C ، 3C . ونقوم بشحن كل مكثفة ونحصل على البيانات 1 ، 2 ، 3 على الترتيب (الشكل المرافق) . نلاحظ أنه كلما ازدادت سعة المكثفة المستعملة ازداد زمن إتمام عملية الشحن .
نعيد نفس العمل ولكن بتثبيت C وتغيير المقاومة فمن أجل R ، 2R ، 3R ، نحصل

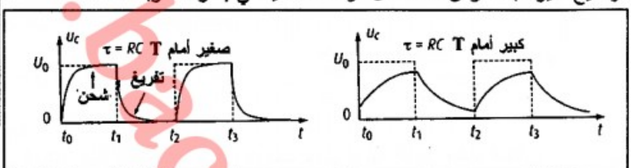


على بيانات ممثلة للبيانات السابقة ، نستنتج أنه كلما ازدادت المقاومة ازداد زمن إتمام عملية الشحن . مما سبق نستنتج أن زمن إتمام عملية الشحن يزداد كلما ازداد الجداء R.C وهذا الجداء متجانس مع الزمن حيث :
تحليل الأبعاد لــ τ يعطي : $[\tau] = [RC] = [u/I] . [q/u] = [I . t]/ [I] = t = T$
و منه نقول أن ثابت الزمن τ متجانس مع الزمن أي له نفس وحدة الزمن .
نسمي الجداء R.C ثابت الزمن لثنائي القطب (R,C) رمزه τ وحدته الثانية .

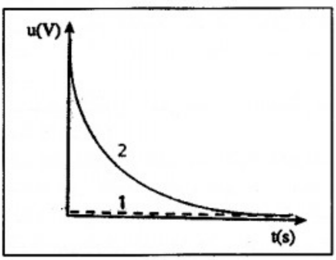
$$\tau = R.C$$



نتيجة : يتعلق زمن إتمام عملية تفريغ مكثفة في مقاومة بقيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب (R,C) ، حيث إذا كانت قيمة ثابت الزمن τ كبيرة كان التفريغ بطيئا ،
وإذا كانت قيمة ا ثابت الزمن τ صغيرة كان التفريغ سريعا .
لتوضيح تأثير ثابت الزمن τ نستعمل مولد GBF يعطي إشارات مربعة :



2 . خلال تفريغ المكثفة



ضع البادلة في الوضع (2) . يظهر على شاشة راسم الإهتزازات بيانيا (1) و (2) كما الشكل المقابل .

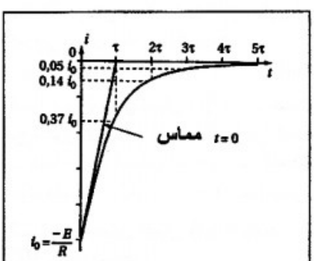
2ــ حدد البيان الذي يمثل u_{DB} و كيف يتطور ؟

عند وضع البادلة في الوضع (2) يظهر على شاشة راسم الاهتزازات البيانين (1) و (2) . حيث : يمثل البيان رقم (1) التوتر u_{DB} بين طرفي المولد وهو منعدم لأن المولد موجود خارج الدارة .

3ــ حدد البيان الذي يمثل u_{AB} و كيف يتطور ؟

يمثل البيان رقم (2) التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة حيث يتناقص هذا التوتر تدريجيا خلال عملية التفريغ **(نظام انتقالي)** حتى يصل إلى قيمة معدومة $u_{AB} = 0$ ثابتة عند نهاية عملية التفريغ **(نظام دائم)** .

2ــ هل عملية التفريغ تتم آنيا ؟



إن عملية تفريغ المكثفة لا تتم آنيا ، يمكن أن نبين ذلك كم يلي :
لدينا $q_A = C . u_{AB}$ ، و C مقدار ثابت . بما أن u_{AB} يتناقص تدريجيا ، إذن q_A تتناقص تدريجيا .

3ــ كيف تتوقع أن تتغير شدة التيار الكهربائي خلال التفريغ ؟

ــ بعد غلق القطعة مباشرة يظهر تيار سالب في الدارة . حسب قانون جمع التوترات : $E = u_{AB} + u_{DA} = 0$ بما أن خلال التفريغ u_{AB} تتناقص إذن يجب أن تتناقص u_{DA} (التوتر بين طرفي المقاومة) بالقيمة المطلقة . و حسب قانون أوم $u_{DA} = R\,i$
إذن الشدة i هي التي سوف تتناقص بنفس الكيفية التي تتناقص بها u_{AB} .
الشدة i لهذا التيار تتناقص تدريجيا بالقيمة المطلقة إلى أن تنعدم في نهاية التفريغ $i = 0$.

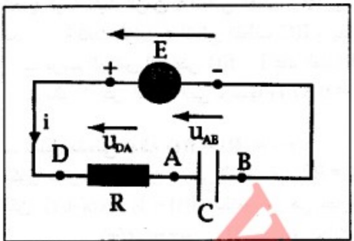
ملاحظة 1 : لدراسة تطور شدة التيار ، يجب ربط راسم الإهتزاز بين طرفي المقاومة ، فنشاهد عندئذ التوتر $u_R = R \cdot i$ الذي يمكن أن يمثل الشدة بالتقريب حسب R .

ملاحظة 2 : يمكن حساب شدة التيار الكهربائي المار بالدارة في كل لحظة خلال التفريغ كما يلي :

$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$ ، $0 = Ri_{AB} + u_{AB}$ و منه : $i_{AB} = - u_{AB}/R$

الدراسة النظرية :

1ـ حالة شحن المكثفة :



a ـ عبارة التوتر بين طرفي المكثفة

في الدارة الكهربائية المبينة في الشكل المقابل و بتطبيق قانون جمع التوترات ، نكتب : $u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$

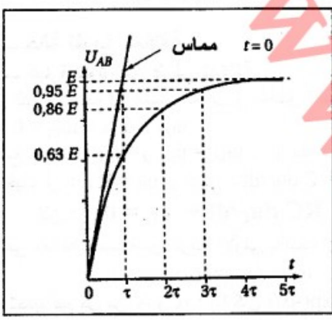
$E = Ri_{AB} + u_{AB}$ (نأخذ $U_{AB} = u_C$)

لكن $i(t) = dq/dt = C\, du_{(t)}/dt$ و منه : $E = RC\, du_C/dt + u_C$

$$u_C + RC\, du_C/dt = E$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، تقبل حلا من الشكل :

$$u_C = A \exp(-t/\tau) + B$$



ـ تحديد عبارة كل من A ، B و τ : حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $u_C = A \exp(-t/\tau) + B$ ،

إذن : $du_C/dt = - A/\tau \exp(-t/\tau)$ نعوض عن u_C و du_C/dt في المعادلة التفاضلية : $A \exp(-t/\tau) + B + R C [- A/\tau \exp(-t/\tau)] = E$

و منه : $[A - R C A/\tau] \exp(-t/\tau) + B = E$. الحل المقترح

يحقق المعادلة إذا كان : $A = RCA/\tau$ أي : $\tau = RC$ و $B = E$.

نحدد قيمة E من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $u_C(t = 0) = 0$

ومنه : $A \exp(0) + B = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow A = - B$

فيصبح إذن لدينا : $u_C(t) = E [1 - \exp(-t/\tau)]$ مع : $\tau = RC$

حالات خاصة : من أجل $t = 0$ نجد $u(0) = 0$ و منه : $du(t)/dt = E/RC$

من أجل $t = \tau$ نجد : $u(\tau) = 0{,}63\, E$

ـ التحقق من أن : $u_C(t = \tau) = 0{,}63\, E$:

عبارة u_C تسمح بالتحقق من أن : $u_C(t = \tau) = E [1 - \exp(-t/\tau)] = E [1 - \exp(-1)] = 0{,}63\, E$

نتيجة : من عبارة التوتر بين طرفي المكثفة نستنتج أن منحناه البياني عبارة عن منحنى دالة أسية متزايدة و يوافق تماما ما حصلنا علية تجريبيا . و من خلاله نجد أن التوتر التوتر بين طرفي المكثفة لاتحدث له تغيرات فجائية فهو دالة مستمرة بالنسبة للزمن .

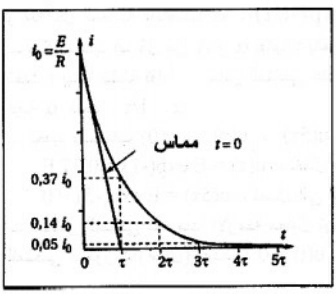
دلالة ثابت الزمن τ : τ هو الزمن الآزم لتشحين المكثفة بنسبة 63 % بينما الزمن $t_{1/2}$ هو زمن نصف الشحن أي الزمن الآزم لتشحين المكثفة بنسبة 50 % و منه نستنتج أن $t_{1/2}$ يكون أقل من τ .

ملاحظة : من خلال المنحنى نلاحظ أن زمن انتهاء الشحن هو $t = 5\tau$.

تحديد قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC بيانيا انطلاقا من المنحنى $U_{AB} = f(t)$:

نحدد قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC و يمكن الحصول عليه بثلاث طرق :

ـ برسم المماس للمنحنى $U_{AB} = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته $U_{AB} = E$ في نقطة تكون فاصلتها هي τ .



ـ بالبحث عن النقطة التي ترتيبها $U_{AB} = 0{,}63\, E$ حيث فاصلتها هي ثابت الزمن τ . (الطريقة الأكثر دقة) .

ـ بقياس معامل توجيه المماس للمنحنى $U_{AB} = f(t)$ عند المبدأ :

من أجل $t = \tau$ لدينا :

$$U_{AB}(t = \tau) = E [1 - \exp(-t/\tau)] = E [1 - \exp(-1)] = 0{,}63\, E$$

و منه : $(dU_{AB}/dt)_{t=0} = [+E/\tau \exp(-t/\tau)]_{t=0} = +E/\tau$.

b ـ عبارة شدة التيار

7ـ كتابة عبارة الشدة i بدلالة U_{AB} ، E و R : من العبارة : $R\, i + U_{AB} = E$

نجد : $i = (E - U_{AB}) / R$. بالعبارة $U_{AB}(t) = E[1 - \exp(-t/\tau)]$

نجد : $i(t) = E/R \exp(-t/\tau)$ و منه : $\mathbf{i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)}$ حيث $I_0 = E/R$. الثابت I_0 هي الشدة الإبتدائية $(t = 0)$
لأن $i(0) = I_0 \exp(0) = I_0$

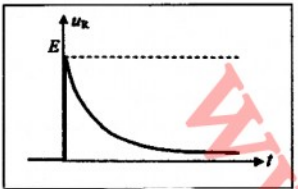
ــ الشدة : $i(t) = E/R \exp(-t/\tau)$ متناقصة ، إذن التوتر $R\,i$ بين طرفي المقاومة متناقص ، منحنى شدة التيار هو منحنى دالة أسية متناقصة . إذن شدة التيارتتناقص انطلاقا من القيمة العظمى E/R و بشكل أسي إلى أن تنعدم عند اللحظة $t = 5\,\tau = 25\ s$ بالتقريب . **حالات خاصة** : من أجل $t = 0$ نجد : $i(0) = I_0$ ، من أجل $t = \tau$ نجد : $i(\tau) = 0{,}37\ I_0$

تحديد قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC بيانيا انطلاقا من البيان $i = f(t)$:

نحدد قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC و يمكن الحصول عليه بطريقتين :

ــ برسم المماس للمنحنى $i = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته $i = 0$ في نقطة تكون هي τ .

ــ بالبحث عن النقطة التي ترتيبها $i = 0{,}37\ I_0$ حيث فاصلتها هي ثابت الزمن τ .



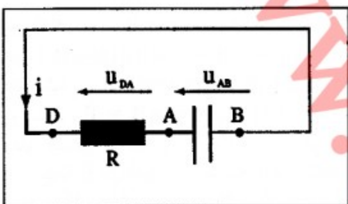
ــ تمثيل منحنى الدالة $u_R = Ri = f(t)$:

تكون عبارة التوتر بين طرفي المقاومة : $u_R = Ri$

لكن $i(t) = I_0\ \exp(-t/\tau)$.بالتعويض في عبارة التوتر u_R نجد أن :

$$\mathbf{u_R = RI_0\ \exp(-t/\tau)} \quad \text{حيث :} \quad \mathbf{E = RI_0}\ .$$

أو : $$\mathbf{u_R = E\ \exp(-t/\tau)}$$



2ــ حالة تفريغ المكثفة

a ــ عبارة التوتر بين طرفي المكثفة

في الدارة المبينة في الشكل المقابل و بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب :

$$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB} = 0$$

نضع : $u_{AB} = u_C$ و $u_{DA} = u_R$. و منه : $u_C + u_R = 0$

و حيث أن : $u_R = R\,i$ و لدينا $i = dq/dt = d(C\,.\,u_C)/dt = C\,du_C/dt$

إذن : $$\mathbf{RC\,du_C/dt + u_C = 0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة ل u_C تقبل حلا من الشكل :

$$u_C = A\,.\,\exp(-\alpha t)$$

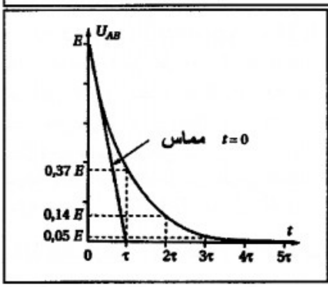
ــ تحديد قيم كل من A و α : إذا كان $u_C = A\,.\,\exp(-\alpha t)$ هو حل للمعادلة التفاضلية فإن u_C يحقق المعادلة .

نعوض u_C و du_C/dt في المعادلة حيث : $u_C = A\,.\,\exp(-\alpha t)$

و $du_C/dt = -\,\alpha\,A\,.\,\exp(-\alpha t)$. نعوض في المعادلة :

$RC\,(-\,\alpha\,A\,.\,\exp(-\alpha t) + A\,.\,\exp(-\alpha t) = 0$ و منه :

$$-\,\alpha\,ARC\,\exp(-\alpha\,t) + A\,\exp\,(-\alpha t) = 0$$



هذه المعادلة محققة إذا كان $A - \alpha\,ARC = 0$ أي من أجل $A = \alpha\,ARC$.

و منه : $\alpha = 1/RC$ و منه : $1/\alpha = RC$. إذن : $1/\alpha$ هو ثابت الزمن τ للدارة .

الشروط الإبتدائية تسمح بتحديد قيمة A . فعلا عند اللحظة : $t = 0$ نجد $u_C = E$ (مكثفة ابتدائيا مشحونة تحت توتر E)

إذن : $u_C\,(t) = A\,\exp(-t/RC) = E$. عند $t = 0$ نجد : $A\,\exp(0) = 1$ إذن : $u_C\,(t = 0) = A = E$

إذن يكون لدينا : $A = E$. A يمثل التوتر الإبتدائي بين طرفي المكثفة .

و منه حل المعادلة التفاضلية هو : $\mathbf{u_C = E\ \exp(-t/\tau)}$.

ــ يمكن تحديد قيم كل من A و α بيانيا : بالقراءة على البيان نحدد : $E = A$ (قيمة u_C عند الحظة $t = 0$) .

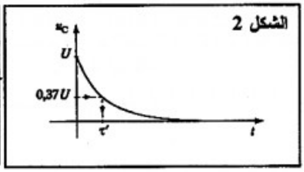
تحدد τ بيانيا بنقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ مع المماس للمنحنى عند ∞ حيث فاصلتها : $t = \tau$ و منه نحسب قيمة α فنجد : $\alpha = 1/\tau$.

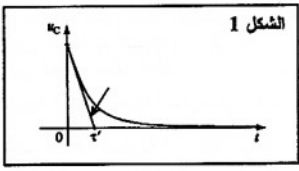
ــ تحديد بالحساب $u(0)$ ، $u(\tau)$ ، $u(5\tau)$: $u(0) = E\,\exp(0) = E$ ، التوتر في البداية هو E . أي التوتر غير منقطع .

$u(\tau) = E\,\exp(-1) = 0{,}37\,E$ ، خلال طور التفريغ ، عند اللحظة $t = \tau$ التوتر نقص بـــ 63 % .

$u(5\tau) = E\,\exp(-5) = 0$ ، نصل إلى النظام الدائم ، عند اللحظة $t = 5\tau$.

ــ المماس للمنحنى عند مبدأ الأزمنة معامل توجيهه du/dt . إذن معادلته : $u = -\,E/\tau\,.\,t + E$. يقطع الخط المقارب الأفقي للمنحنى (محور الفواصل) عندما : $u(t) = 0$ أي : $-\,E/\tau\,.\,t + E = 0$ أي عندما $t = \tau$.





إذن هذه النقطة A فاصلتها فعلا هي : τ .

ــ تحديد قيمة ثابت الزمن لدارة التفريغ :

يمكن تحديد τ' بثلاث طرق :

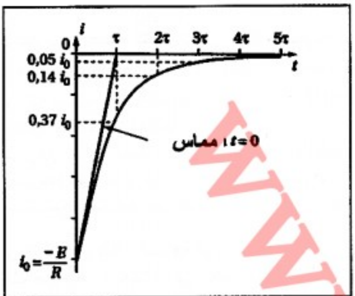
1ــ نستخدم المنحنى و المماس لهذا المنحنى عند اللحظة $t = 0$. انظر الشكل 1 .

2ــ نستخدم الخاصية :

$u_C(t = \tau') = 0{,}37\ U$. انظر الشكل 2 .

3ــ بقياس معامل توجيه المماس للمنحنى عند المبدأ : من أجل $t = \tau'$ لدينا : : $= E \exp(-1) = 0{,}37\ E$ $u_C(t = \tau') =$

$u(t) = E \exp(-t/\tau')$. و منه : $(du_C/dt)_{t=0} = [- E/\tau' \exp(-t/\tau')]_{t=0} = - E/\tau'$.



b ــ عبارة شدة التيار

fــ كتابة عبارة الشدة i للتيار بدلالة الزمن :

$$i(t) = dq/dt = C\ du_C/dt = - (CE/\tau) \exp(-t/\tau) = - E/R \exp(-t/\tau)$$

حيث : $E/R = I_0$. $\quad$ $\mathbf{i(t) = - I_0 \exp(-t/\tau)}$

حالات خاصة .

من أجل $= 0$ نجد أن : $i(0) = - I_0$

من أجل $t = \tau$ نجد أن : $i(\tau) = - 0{,}37\ I_0$

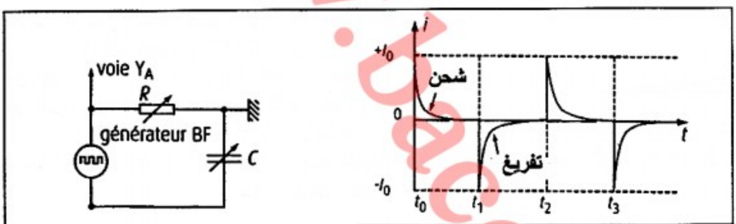
ــ المماس للبيان عند المبدأ يقطع محور الأزمنة عند $t = \tau$:

المماس للمنحنى عند مبدأ الأزمنة معامل توجيهه di/dt .

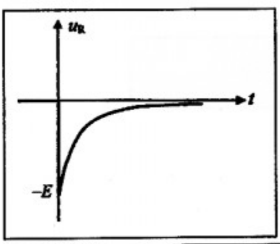
لدينا $i(t) = - I_0 e^{-t/\tau}$. إذن : معادلة المماس للبيان من الشكل : $i(t) = at + b$

حيث : $a = di/dt = I_0/\tau \cdot e^{-t/\tau}$. عند $t = 0$ يكون $b = - I_0$ و $a = I_0/\tau$

و منه : $i(t) = I_0/\tau\ t - I_0$. عند التقاطع مع محور الأزمنة يكون : $i(t) = 0$ أي : $0 = I_0/\tau\ t - I_0$ و منه : $t = \tau$



ملاحظة : لمشاهدة تطور شدة التيار خلال الشحن أو التفريغ ، يجب ربط راسم الإهتزاز بين طرفي المقاومة ، فنشاهد عندئذ التوتر $u_R = R \cdot i$ الذي يمكن أن يمثل الشدة بالتقريب حسب R .

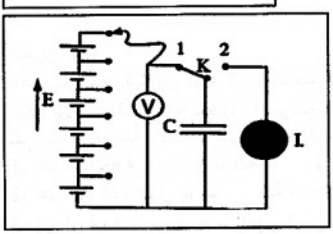


ــ تمثيل منحنى الدالة $u_R = Ri = f(t)$:

تكون عبارة التوتر بين طرفي المقاومة : $u_R = Ri$

لكن $i(t) = I_0\ [1 - \exp(-t/\tau)]$. بالتعويض في عبارة التوتر u_R نجد أن :

$$\mathbf{u_R = - RI_0\ \exp(-t/\tau)} \quad \text{أو :} \quad \mathbf{u_R = - E \exp(-t/\tau)}$$

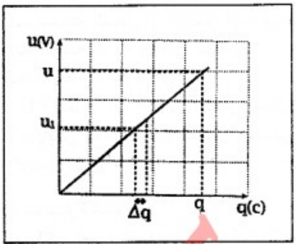


الطاقة المخزنة في مكثفة

العوامل المؤثرة على الطاقة المخزنة في مكثفة :

لتحديد العوامل المؤثرة على الطاقة المخزنة في مكثفة خلال شحنها ، نحقق دارة كهربائية كما في الشكل المقابل . لدراسة تأثير توتر الشحن على الطاقة المخزنة في المكثفة ، نستعمل مكثفة سعتها $1\ 000\ \mu F$ ، ثم نشحنها باستعمال مجموعة الأعمدة الست التي لكل منها قوة محركة كهربائية (1,5 V) و نقرأ قيمة توتر الشحن على مقياس الفولط ، ثم نفرغها في المصباح ، ونتابع توهجه . نعيد التجربة عدة مرات بحذف عمود واحد في كل مرة . نلاحظ زيادة توهج المصباح كلما ازداد توتر الشحن ، نستنتج أن الطاقة التي تخزنها مكثفة خلال شحنها تزداد كلما ازداد توتر الشحن .

أما لدراسة تأثير السعة ، فنثبت توتر الشحن وليكن (4,5 V) و نستعمل مكثفات سعاتها متزايدة و لتكن (100 µF , 2 200 µF) ثم نكرر الخطوات السابقة و نراقب شدة توهج المصباح . فنلاحظ تزايد شدة توهجه كلما ازدادت سعة المكثفة ، نستنتج أن الطاقة التي تخزنها مكثفة خلال شحنها تزداد كلما ازدادت سعة المكثفة .



نتيجة : تتعلق الطاقة المخزنة في مكثفة بسعتها و توتر الشحن .

تعيين الطاقة المخزنة في مكثفة بيانيا :

لاحظنا عند شحن مكثفة أنه كلما ازدادت شحنتها ازداد التوتر الكهربائي بين طرفيها:

$$u(t) = q(t)/C$$

تذكر : التوتر بـــ (V) هو الطاقة المنجزة بـــ (J) لكل وحدة شحنة عنصرية بـــ (C) .

عندما تتغير شحنة المكثفة بمقدار Δq تخزن المكثفة طاقة عنصرية :

$$\Delta E_{(C)} = u_1 \, \Delta q$$

وعند نهاية عملية الشحن تكون الطاقة المخزنة في المكثفة تساوي مجموع الطاقات العنصرية $E_{(C)} = \sum u_1 \, \Delta q$ ، تساوي قيمة هذه الطاقة مساحة المثلث المحصور تحت البيان المبين في الشكل .

و منه نستنتج عبارة الطاقة : $\mathbf{E_{(C)} = 1/2\ q\ .\ u\ = 1/2\ u^2(t)\ .\ C}$ حيث : $u(v)$ ، $q(c)$ ، $E_{(C)}\ (J)$

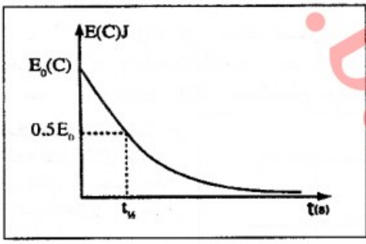
بعض استعمالات المكثفة :

ـــ رفع التوتر اللحظي الذي تحتاجه الدارة الكهربائية .

ـــ زيادة شدة التيار في مقطع معين من الدارة .

ـــ ترشيح التيارات غير المرغوب فيها في الدارة وإزالة التشويش .

زمن تناقص طاقة المكثفة إلى النصف ($t_{1/2}$) :



تتناقص الطاقة المخزنة في مكثفة خلال تفريغها ، فما هو الزمن اللازم لتنقص إلى نصف قيمتها الإبتدائية ؟ $E_{(C)} = 1/2\ u^2(t)\ .\ C$

لدينا عبارة التوتر بين طرفي المكثفة خلال التفريغ هي : $u(t) = E\ e^{-t/\tau}$

نعوض في عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة خلال التفريغ فنجد :

$$E_{(C)} = 1/2\ C\ .\ E^2 \exp(-2t/\tau)$$

من أجل $t = 0$ نجد : $E_{0(C)} = 1/2\ \ C\ .\ E^2$ ،

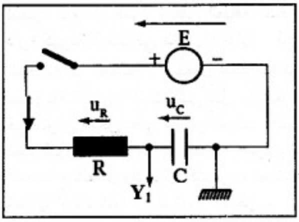
من أجل : $t = t_{1/2}$ لدينا : $E_{(C)} = 1/2\ E_{0(C)}$

$$1/2\ C\ .\ E^2 \exp\left[-(2\ t_{1/2})\ /\tau\right] = 1/2\ (1/2\ C\ .\ E^2)$$

و منه : $\exp\left[-(2\ t_{1/2})\ /\tau\right]\ = 1/2$. بأخذ اللوغاريتم النيبيري للطرفين نجد : $- 2t_{1/2}/\tau = - \ln 2$

و منه : $\mathbf{t_{1/2} = \tau/2\ .\ \ln 2}$.

تمـــارين الكتاب المدرسي



<u>التمرين ـــ 1</u>

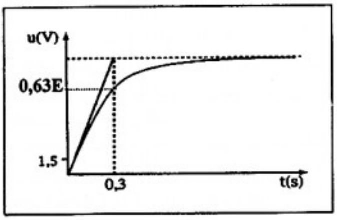
تتألف دارة كهربائية من مولد للتوتر الثابت E = 12,00 V ، مقاومة R = 320 kΩ ، مكثفة سعتها C ، راسم اهتزازات و قاطعة . نقوم بغلق القاطعة لكي نشحن المكثفة . نشاهد على شاشة راسم الإهتزازات البيان التالي :

1. عبر في لحظة t عن u بدلالة R , i , E .

2. عبر عن شدة التيار i_0 عند اللحظة t = 0 بدلالة E , R ثم أوجد قيمته العددية .

3. إلى أي قيمة ينتهي i عندما ينتهي الزمن t إلى ∞ ؟ علل .

4. إذا كانت المعادلة التفاضلية للدارة RC هي : $du/dt + 1/RC\ u - E/RC = 0$



أثبت أن حلها من الشكل التالي : $u(t) = E(1 - e^{-t/RC})$

5. اوجد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ و استنتج قيمة C .

6. اوجد قيمة u_C من أجل $t = \tau$ بيانيا و حسابيا .

7. احسب الطاقة المخزنة في المكثفة عند نهاية شحنها .

الحـل ـ 1

1. التعبير عن u بدلالة R , i , E : حسب قانون جمع التوترات :
$E = u(t) + u_R$ و منه : $E = u(t) + Ri$ و منه : $u(t) = E - Ri$

2. التعبير عن i_0 بدلالة E , R : عند $t = 0$ ، $u(0) = 0$
و منه $i(0) = E/R$. $i(0) = 12/(320 \times 10^3) = 0{,}04 \times 10^{-3}\ A$

3. عندما $t \to \infty$ فإن $u(t) \to E$ هذا يعني أن المكثفة مشحونة كليا وعندها لا يمر تيار مستمر في الدارة إذن : $i = 0$.

4. $u(t) = E - E\,e^{-t/RC}$. نشتق الطرفين بالنسبة للزمن : $du/dt = 0 + E/RC\,e^{-t/RC}$ نعوض في المعادلة التفاضلية :
$$du/dt + 1/RC\,u - E/RC = 0$$
$$E/RC\,e^{-t/RC} + 1/RC\,E(1 - e^{-t/RC}) = E/RC\,e^{-t/RC} + E/RC - E/RC\,e^{-t/RC} - E/RC = 0$$
بما أن : $u(t) = E(1 - e^{-t/RC})$ يحقق المعادلة التفاضلية فهو حل لها .

5. من البيان نجد : $\tau = 0{,}3\ s$ لكن $\tau = RC$ إذن : $C = \tau/R$ أي : $C = 0{,}94\ \mu F$

6. $t = \tau$ و منه : $u(t) = 0{,}63E$ و منه : $u(\tau) = 7{,}56\ V$

7. حساب الطاقة المخزنة في المكثفة عند نهاية شحنها : عند نهاية الشحن يكون : $u_C = E$.
$$E(c) = 1/2\ u_C^2 C = 1/2\ E^2 C = 1/2 \times 12^2 \times 0{,}94 \times 10^{-6} = 67{,}68 \times 10^{-6}\ J$$

التمرين ـ 2

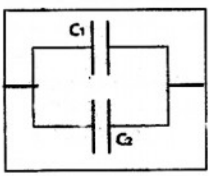
مكثفة سعتها C_1 ، تخزن كمية من الكهرباء قدرها $Q = 3 \times 10^{-5} C$ عندما تشحن تحت توتر قدره $u_1 = 6\ V$ و مكثفة أخرى سعتها $C_2 = 1\ \mu F$ تختزن نفس الكمية من الكهرباء عندما تشحن تحت توتر u_2 . أحسب C_1 و u_2 .

الحـل ـ 2

حساب C_1 : $Q = C_1 . u_1 \Rightarrow C_1 = Q/u_1 = (3 . 10^{-5})/6 = 0{,}5 . 10^{-5}\ F = 5\ \mu F$.

حساب u_2 : $Q = C_2 . u_2 \Rightarrow u_2 = Q/C_2 = (3 . 10^{-5})/(1 . 10^{-6}) = 3 . 10^{+1}\ V = 30\ V$.

التمرين ـ 3



نشحن مكثفة سعتها $C_1 = 2\ \mu F$ تحت توتر $E = 100\ V$ ثم نربطها مع مكثفة غير مشحونة سعتها $C_2 = 0{,}5\ \mu F$ كما في الشكل المقابل :

1. عين الشحنة الإبتدائية للمكثفة C_1 .

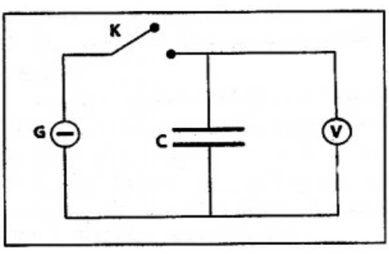
2. احسب التوتر بين لبوسي كل مكثفة بعد ربطهما و الوصول إلى النظام الدائم .

الحـل ـ 3

1. حساب Q_0 : $Q_0 = C_1 . u = C_1 . E = (1 . 10^{-6}) . 100 = 2 . 10^{-4}\ C$.

2. حساب التوتر بين لبوسي كل مكثفة بعد ربطهما : المكثفة (1) تخزن شحنة : $Q_0 = C_1 . E$. هذه الشحنة سوف توزع على المكثفتين Q_1 و Q_2 و التوتر u بين طرفي كل منهما هو نفسه . المكثفة الثانية سعتها $C_2 = C_1/4$ و منه :
$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 u + C_1/4\,u = 5/4\,C_1 u = C_1 E$ و منه : $5/4\,u = E$ و منه : $u = 80\ V$.

التمرين ـ 4



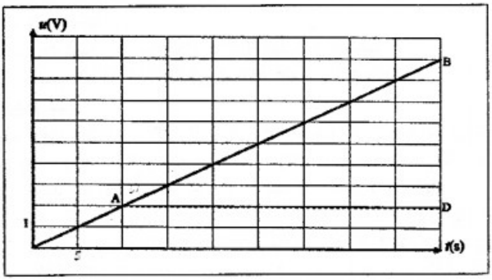
نحقق الدارة التالية بهدف قياس سعة مكثفة . نستعمل مولدا يغذي الدارة بتيار ثابت الشدة $I = 20\ \mu A$ يسمح بشحن المكثفة ببطء ، نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ ونسجل قيم التوتر بين طرفي المكثفة في أزمنة مختلفة نحصل على النتائج المدونة في الجدول التالي :

t(s)	0	5	15	25	35	45
u(v)	0	0,98	2,95	4,97	6,95	9

1. اكتب العلاقة التي تربط بين u و t . 2. ارسم البيان $u = f(t)$ و استعن به لحساب سعة المكثفة .

الحـل ـ 4

1. كتابة العلاقة التي تربط بين u و t : لدينا علاقة الشحنة بالتيار : $q = I . t$. و علاقة الشحنة بالتوتر : $q = C . u$



و منه : $I . t = C . u \Rightarrow u = (I/C) . t$

2. رسم البيان $u = f(t)$. انظر الشكل المقابل .

ـ نعتمد على سلم مناسب و نرسم المنحنى $u = f(t)$ فنحصل على الشكل المقابل .

ـ المنحنى عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $u = a . t$. حيث a هو معامل توجيه المستقيم (الميل) قيمته : $a = BD/AD = (7)/(7 . 5) = 0,2\ V/s$

و منه : $u = 0,2 . t$. بالمطابقة : $I/C = 0,2$.

و منه : $C = I / 0,2 = (20 . 10^{-6}) / 0,2 = 100\ \mu F$.

التمرين ـ5

مكثفتان موصولتان على التسلسل ، الأولى سعتها $C_1 = 1\ \mu F$ و الثانية سعتها $C_2 = 2\ \mu F$ نطبق بين طرفيهما توترا $u = 300\ V$. 1. احسب سعة المكثفة المكافئة .

2. احسب u_1 و u_2 التوترين الكهربائيين بين طرفي المكثفتين C_1 و C_2 على الترتيب . 3. احسب شحنة كل من المكثفتين.

الحل ـ5

1. حساب سعة المكثفة المكافئة : بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب : $U = U_1 + U_2$

$Q/C = Q_1/C_1 + Q_2/C_2$ لكن : $Q_1 = Q_2 = Q$ و منه : $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ و منه : $C = 0,67\ \mu F$.

2. حساب u_1 و u_2 : لدينا : $Q_1 = Q_2 = Q$ أي : $Q_1 = Q$

و منه : $C_1 . u_1 = C . u \Rightarrow u_1 = (C . u)/C_1 = (0,67 . 10^{-6} . 300)/(1 . 10^{-6}) = 200\ V$

و كذلك لدينا : $Q_1 = Q$ و منه : $C_2 . u_2 = C . u \Rightarrow u_2 = (C . u)/C_2 = (0,67 . 10^{-6} . 300)/(2 . 10^{-6}) = 100\ V$

3. حساب شحنة كل من المكثفتين : $Q_1 = Q_2 = Q = C . u = 0,67 . 10^{-6} . 300 = 200\ \mu C$

التمرين ـ6

لدينا مجموعة مكثفات متماثلة سعة كل منها $C_1 = 0,1\ mF$

1. عين طريقة تجميع عدد من هذه المكثفات للحصول على مكثفة مكافئة سعتها $5\ mF$. 2. حدد عدد المكثفات المستعملة

3. نشحن مجموعة المكثفات المستعملة تحت توتر $u = 40\ V$

a. ما هي شحنة المكثفة المكافئة ؟ b. ما هي شحنة كل مكثفة ؟

الحل ـ6

1. تعيين طريقة التجميع : على التفرغ لأن $C_{eq} > C_1$. 2. تحديد عدد المكثفات المستعملة : $n = C_{eq}/C_1 = 50$

3. a. شحنة المكثفة المكافئة : $q_{eq} = 5 \times 10^{-3} \times 40 = 0,2\ C$

b. شحنة كل مكثفة : $q = 0,1 \times 10^{-3} \times 40 = 4 . 10^{-3}\ C$

التمرين ـ7

مكثفة سعتها $C = 3,2\ mF$ ، تشحن بمولد يعطي تيارا شدته ثابتة $I_0 = 0,2\ mA$.

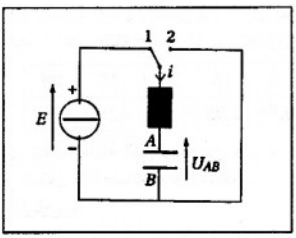
1. هل يمكن إفراغ هذه المكثفة تماما ؟ كيف ؟ 2. عند اللحظة $t = 0$ تكون المكثفة فارغة .

a. ما هي العلاقة بين I_0 و dq/dt ؟

b. احسب شحنة كل لبوس والتوتر الكهربائي u بين اللبوسين بعد مرور 4 دقائق على بداية الشحن .

3. إذا علمت أن التوتر الأعظم بين لبوسي المكثفة لا يتجاوز $40\ V$. أحسب الزمن الأعظم للشحن t_{max} .

الحل ـ7



1. نعم يمكن إفراغ هذه المكثفة تماما : و هذا بوضعها في التركيب الموضح في الشكل المقابل على التسلسل مع مقاومة R . توضع القاطعة لمدة طويلة في الوضعية 2 ثم ، عند اللحظة $t = 0$ ، ننقلها إلى الوضعية 1 و في نفس اللحظة نبدأ في تسجيل قيم التوتر U_{AB} لمتابعة تطور التوتر U_{AB} مع مرور الزمن بين طرفي المكثفة .

ـ الهدف من ترك القاطعة لمدة طويلة في الوضعية 2 قبل تسجيل القيم هو : للتأكد أن المكثفة قد فرغت تماما أي كلية .

a. العلاقة بين I و q : من التعريف عبارة شدة التيار هي : $\Delta q/\Delta t = I = dq/dt$.

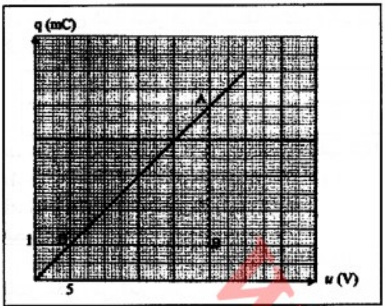
b. حساب شحنة كل لبوس والتوتر الكهربائي u بين اللبوسين بعد مرور 4 دقائق على بداية الشحن : $q = I_0 . t = 0,2 . 10^{-3} . 4 . 60 = 4,8 . 10^{-2}\ C$

والتوتر الكهربائي u بين اللبوسين : $u = q/C = (48 . 10^{-3})/(3,2 . 10^{-3}) = 15\ V$.

3. حساب الزمن الأعظم للشحن t_{max} :

$q_{max} = I_0 . t_{max} \Rightarrow t_{max} = q_{max} / I_0 = (C . u_{max}) / I_0 = (3,2 . 10^{-3} . 40) / (0;2 . 10^{-3}) = 640 \ s$.

التمرين ــ8



عند اللحظة $t = 0$ ، نبدأ بشحن مكثفة بمولد يعطي تيارا شدته ثابتة $I_0 = 15 \ \mu A$. يمثل البيان التالي تغيرات شحنة المكثفة بدلالة التوتر الكهربائي بين طرفيها. 1. استعن بالبيان لحساب سعة المكثفة .

2. ما هي اللحظة t_1 التي يبلغ عندها التوتر بين طرفي المكثفة 15 V ؟

3. عند لحظة t_2 يكون التوتر بين طرفي المكثفة 30 V ،

ما هي العلاقة بين t_1 و t_2 ؟

الحــل ــ8

1. الإستعانة بالبيان لحساب سعة المكثفة :

ــ المنحنى عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل : $q = b . u$. حيث b هو معامل توجيه المستقيم . إذن شحنة المكثفة دالة خطية للتوتر

ــ قيمة معامل توجيه المستقيم قيمته : $b = BA/DB = (4 . 10^{-3})/(5 . 4) = 2 . 10^{-4}$ ، و منه : $q = 2 . 10^{-4} . u$.

و لدينا : $q = C . u$. بالمطابقة : $C = 2 . 10^{-4} \ F$.

2. اللحظة t_1 التي يبلغ عندها التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة 15 V : $t_1 = 200 \ s$. و توافق : $q_1 = 3 . 10^{-3} \ C$.

$q_1 = I_0 . t_1 \Rightarrow t_1 = q_1 / I_0 = (3 . 10^{-3}) / (15 . 10^{-6}) = 200 \ s$.

3. عند لحظة t_2 يكون التوتر بين طرفي المكثفة 30 V ، العلاقة بين t_1 و t_2 : $q_2 / q_1 = t_2 / t_1 = 2$ منه : $t_2 = 2 \ t_1$

$q_2 = I_0 . t_2 \Rightarrow t_2 = q_2 / I_0 = (C . u_2) / I_0 = (2 . 10^{-4} . 15) / (30 . 10^{-6}) = 100 \ s$.

التمرين ــ 9

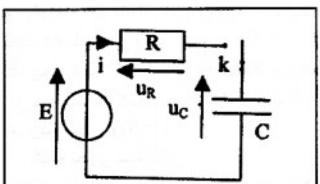
1. حقق دارة كهربائية تسمح بشحن مكثفة تحت توتر ثابت بوجود مقاومة R و اذكر عناصر الدارة .

2. بين بسهم اتجاه التيار على الدارة . 3. حدد بأسهم التوترات بين طرفي كل عنصر.

4. توصل إلى المعادلة التفاضلية لثنائي القطب RC . 5. حدد الطرق الأربع لتحديد ثابت الزمن τ .

6. إذا كانت قيمة $\tau = 3 \ s$ ، $R = 6 \ k\Omega$. أحسب C .

الحــل ــ9



الشكل 1

1. تحقيق دارة كهربائية تسمح بشحن مكثفة تحت توتر ثابت بوجود مقاومة R :

عناصر الدارة : مولد توتر ثابت ، مقاومة ، مكثفة ، قاطعة .

2. اتجاه التيار على الدارة : انظر الشكل .

3. تحديد بأسهم التوترات بين طرفي كل عنصر : انظر الشكل .

4ــ كتابة عبارة المعادلة التفاضلية : المعادلة التفاضلية التي تعطي تغيرات التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة : لدينا : $E = u_C + u_R$. و حيث أن : $u_R = R \ i$

و $i = dq/dt \Rightarrow u_R = R \ dq/dt$ و كذلك لدينا :

$q = C \ u_C \Rightarrow u_R = R \ C \ du_C/dt$ ، إذن : $u_C + RC \ du_C/dt = E$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة إلى u_C .

5. الطرق الأربع لتحديد ثابت الزمن τ : نحدد ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC و يمكن الحصول عليه بثلاث طرق :

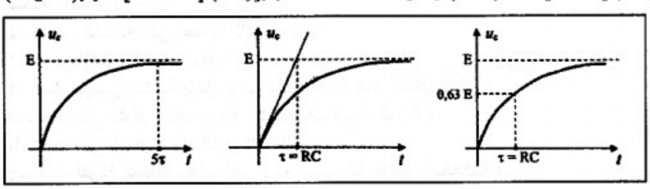
aــ برسم المماس للمنحنى $u_C = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته $u_C = E$ في نقطة تكون فاصلتها هي τ

bــ بالبحث عن النقطة التي ترتيبها $u_C = 0,63 \ E$ حيث فاصلتها هي ثابت الزمن τ . (الطريقة الأكثر دقة) .

cــ بقياس معامل توجيه المماس للمنحنى $u_C = f(t)$ عند المبدأ : من أجل $t = \tau$ لدينا :

$u_C \ (t = \tau) = E \ [1 - \exp(-t/\tau)\ ] = E \ [1 - \exp(-1)\ ] = 0,63 \ E$ و منه : $(du_C /dt)_{t=0} = [+E/\tau \ \exp(-t/\tau)]_{t=0} = +E/\tau$

dــ عند نهاين الشحن نجد : $t = 5 \ \tau$



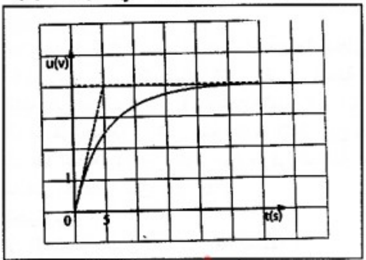
6. حساب C : نستنتج C انطلاقا من العلاقة $\tau = RC = 3 \ s$.

و منه نحصل على سعة المكثفة :

$C = \tau/R = 3/(6 . 10^3) = 500 \ \mu F$

التمرين ــ 10

نشحن بواسطة مولد $(E , r = 0)$ مكثفة مربوطة على التسلسل مع مقاومة $R = 20\ k\Omega$. يمثل البيان التالي تغيرات التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة خلال الزمن .



1. عبر عن شدة التيار في كل لحظة بدلالة (u , R , E) .

2. اكمل الجدول التالي :

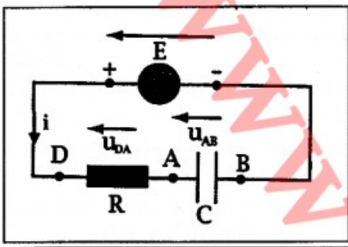
t(s)	0	5	10	15	20	25
i(A)						

a. عين بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب (RC)

b. اوجد قيمة C . c. ارسم البيان $i = f(t)$.

d. كيف تتطور شدة التيار ؟

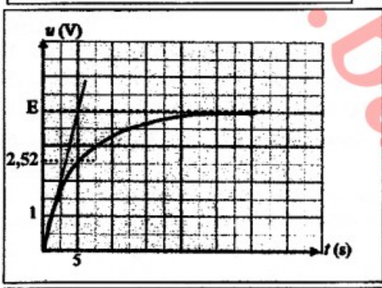
الحــل ــ10



1. التعبير عن شدة التيار في كل لحظة بدلالة (u , R , E) : يمكن حساب شدة التيار الكهربائي المار بالدارة في كل لحظة خلال الشحن كما يلي :

$u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$ ، $E = Ri_{AB} + u_{AB}$ و منه : $i_{AB} = (E - u_{AB}) / R$

2. اكمال الجدول : يمثل البيان التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة حيث يتطور هذا التوتر تدريجيا خلال عملية الشحن (نظام انتقالي) حتى يصل إلى قيمة ثابتة $u_{AB} = E = 4\ V$ ، عند نهاية عملية الشحن (نظام دائم) .نحدد u_{AB} عند كل لحظة من المنحنى ثم نحسب : $i_{AB} = (4 - u_{AB}) / (20 . 10^{+3})$.



t(s)	0	5	10	15	20	25
u_{AB}(V)	0	1	3,4	3,7	3,9	4
$I . 10^{-4}$(A)	2,00	0,75	0,31	0,12	0,06	0,00

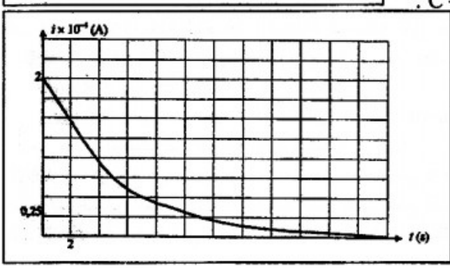
a. تعيين بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب (RC) :

ــ برسم المماس للمنحنى $u_C = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم ذو المعادلة $u_C = E$ في نقطة تكون فاصلتها هي $\tau = 5\ s$.

ــ بالبحث عن النقطة التي ترتيبها $u_C = 0{,}63\ E = 0{,}63 . 4 = 2{,}52\ V$ حيث فاصلتها هي ثابت الزمن $\tau = 5\ s$. (الطريقة الأكثر دقة) .

b. إيجاد قيمة C : نستنتج C انطلاقا من العلاقة $\tau = RC = 5\ s$.

و منه سعة المكثفة : $C = \tau/R = 5/(20 . 10^3) = 2{,}5 . 10^{-4}\ F$.



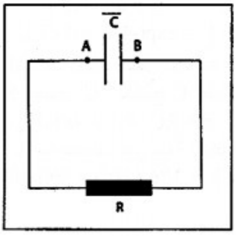
c. رسم البيان $i = f(t)$:

d. كيفية تطور شدة التيار :

منحنى شدة التيار هو منحنى دالة أسية متناقصة . إذن شدة التيار تتناقص انطلاقا من القيمة العظمى $E/R = 2 . 10^{-4}\ A$ و بشكل أسي إلى أن تنعدم عند اللحظة $t = 5\ \tau = 25\ s$ بالتقريب .

التمرين ــ 11

مكثفة مشحونة بواسطة مولد يعطي توترا ثابتا E ، لبوساها A ، B . يحمل اللبوس A شحنة $q_A = -1{,}2\ mC$



1. ما هي الشحنة التي يحملها اللبوس B ؟

2. ما هي إشارة التوتر u_{AB} ؟

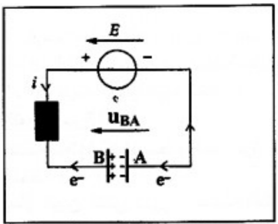
3. نصل لبوسي المكثفة بناقل أومي مقاومته R كما بالشكل التالي :

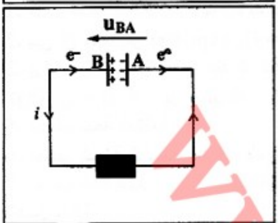
aــ حدد على الشكل اتجاه حركة الالكترونات في المقاومة .

bــ حدد على الشكل اتجاه التيار الإنتقالي .

cــ أثناء تفريغ المكثفة يعطى تغير $\ln u_{AB}$ بدلالة الزمن t بالعلاقة :

$\ln u_{AB} = - 50t + 1{,}61$ ، أوجد كلا من ثابت الزمن τ و E .

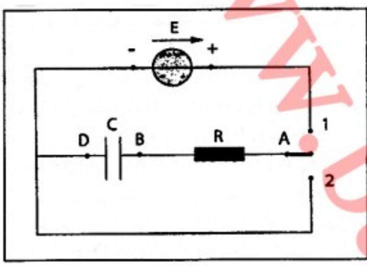




الحـل –11

1. الشحنة التي يحملها اللبوس B : $q_B = - q_A = + 1,2\ m\,C$
2. إشارة التوتر u_{AB} : $u_{AB} < 0$. في العنصر الكهربائي المعتبر آخذة ، التيار ينزل الكمونات . إذا كان AB ثنائي قطب آخذة يكون : $u = u_{BA} > 0$ إذن $u_{AB} < 0$.
التيار الكهربائي ينتقل من B نحو A و $i > 0$ في هذا الإصطلاح .
3. a– تحديد على الشكل اتجاه حركة الالكترونات في المقاومة : انظر الشكل .
b– تحديد على الشكل اتجاه التيار الإنتقالي : انظر الشكل .
c– أثناء تفريغ المكثفة يعطى تغير $\ln u_{AB}$ بدلالة الزمن t بالعلاقة :
$\ln u_{AB} = - 50\,t + 1,61$ ، إيجاد كلا من ثابت الزمن τ و E :
– عند $t = 0$ ، $u_{AB} = E$ نعوض في العلاقة : $\ln u_{AB} = - 50(0) + 1,61 = 1,61$.
بالمطابقة : $1,61 = \ln E$. و منه : $E = 5\ V$.
– عند $t = \tau$ ، $u_{AB} = 0,37\,E = 0,37 \,.\, 5 = 1,85$ نعوض في العلاقة :
$\ln 1,85 = - 50(\tau) + 1,61 = 0,615 \Rightarrow \tau = (0,615 - 1,61)/-50 = 0,02\ s$.

التمرين – 12



تتألف دارة كهربائية من مولد للتوتر الثابت $E = 6\ V$ و مكثفة فارغة سعتها $C = 0,1\ \mu F$ و مقاومة $R = 100\ k\Omega$ كما بالشكل .

1. عند اللحظة $t = 0$ نضع البادلة في الوضع 1 فتبدأ عملية شحن المكثفة .

a. استعمل قانون أوم و قانون جمع التوترات لكتابة المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $u_{BD} = u(t)$.

a. تحقق أن حل هذه المعادلة من الشكل : $u(t) = E + A\exp(-bt)$ باختيار صحيح لـ b . c. بين أن $A = - E$ ثم أوجد قيمة τ .

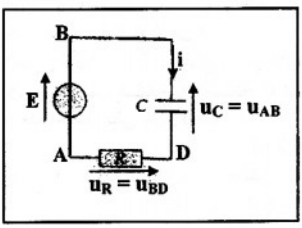
2. اكمل الجدول التالي :

t(s)	0	τ	5 τ
u_{BD}(v)			

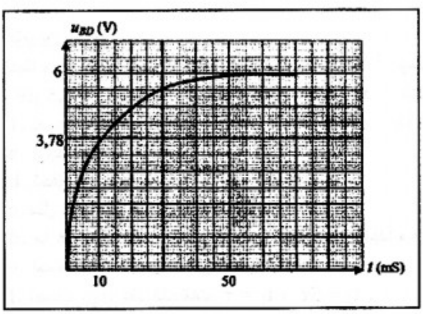
3. ارسم البيان $u_{BD} = u(t)$. 4. نضع البادلة في الوضع 2 لتفريغ المكثفة .

a. إلى أين تذهب الطاقة المخزنة في المكثفة ؟ b. ما هي القيمة العددية لهذه الطاقة ؟

الحـل –12



1–a – المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C : دارة الشحن موضحة في الشكل المقابل . لدينا إذن : $E = u_{BA} = u_{BD} + u_{DA} = u_C + u_R$.
و حيث أن : $u_R = R\,i$ و $i = dq/dt \Rightarrow u_R = R\,dq/dt$ و كذلك لدينا :
$q = C\,u_C \Rightarrow u_R = R\,C\,du_C/dt$ إذن : $u_C + R\,C\,du_C/dt = E$
b. التحقق أن حل هذه المعادلة من الشكل : $u(t) = E + A\exp(-bt)$.
– $u(t) = E + A\exp(-bt)$ إذن : $du_C/dt = - b\,a\exp(-bt)$.
و بما أن هذه العبارة هي حل للمعادلة التفاضلية فيمكن أن نكتب :
$E = E + A\exp(-bt) - RC\,b\,A\exp(-bt) \Leftrightarrow E - E = A\exp(-bt)\,[1 - RC\,b]$.



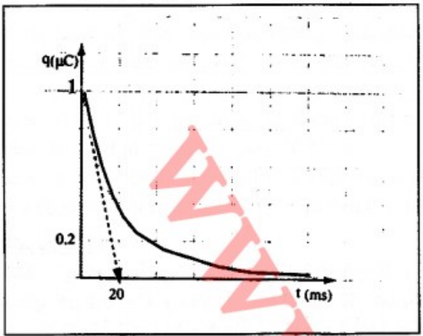
أفصلنا الحدود التي تتعلق بالزمن عن الحدود المتعلقة به . هذه المعادلة صالحة لكل قيم t . إذن طرفي هذه المعادلة معدومين
أي : $E - E = 0$ و $1 - RC\,b = 0$ و منه : $b = 1/RC$.
نحدد قيمة A من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$
لدينا $u(0) = E + A\exp(-b\,.0)$: $u_C(t = 0) = 0$ ومنه :
$A\exp(0) + E = 0 \Leftrightarrow A + E = 0 \Leftrightarrow A = - E$
فيصبح إذن لدينا : $u_C(t) = E\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ مع :
$\tau = RC = 100 \,.\, 10^3 \,.\, 0,1 \,.\, 10^{-6} = 0,01\ s$
2. اكمال الجدول التالي : نعوض عن τ في المعادلة و نحسب u_{BD} .

t(s)	0	τ	5 τ
u_C (v)	0,00	3,78	6,00

3. ارسم البيان $u_{BD} = u(t)$: انظر الشكل المقابل .
4. a. الطاقة المخزنة في المكثفة تضيع في المقاومات على شكل حرارة بفعل جول .
4. b. القيمة العددية لهذه الطاقة : $E_{(C)} = 1/2\ C\ E^2 = 1,8 \times 10^{-6}\ J$

التمرين ــ 13

مكثفة سعتها C تم شحنها تحت توتر ثابت $(E = 5,0\ V)$. ثم أعيد تفريغها في ناقل أومي مقاومته $(R = 10^5 \Omega)$ و ذلك عند اللحظة $t = 0$.



يمثل البيان التالي تطورات شحنة المكثفة أثناء تفريغها .

1. اكتب المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $q_{(t)}$ خلال التفريغ .

2. بين أن حلها هو $q_{(t)} = Q_0 \exp(-t/\tau)$

3. برهن أن المماس للبيان عند المبدأ يقطع محور الأزمنة عند نقطة توافق $(t = \tau)$. 4. عين بيانيا ثابت الزمن .

5. احسب سعة المكثفة C .

6. احسب شحنة المكثفة عند اللحظتين $t = 0$ ، $t = 5\tau$.

7. احسب شدة التيار عند نفس اللحظتين السابقتين .

الحـل ــ13

1. كتابة المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $q_{(t)}$ خلال التفريغ :

لدينا : $0 = u_C + R\,i$ و بما أن : $i = dq/dt$ و $u = q/C$

نحصل على المعادلة التي تحققها $q(t)$: $R\, dq/dt + q/C = 0$

2. بيان أن حلها هو : $q_{(t)} = Q_0 \exp(-t/\tau)$: بالتعويض عن $q(t)$ و dq/dt في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$- R\, Q_0 / \tau \exp(-t/\tau) + Q_0/C \,.\, \exp(-t/\tau)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(-t/\tau)\ [Q_0/C - R\, Q_0/\tau] = 0$$

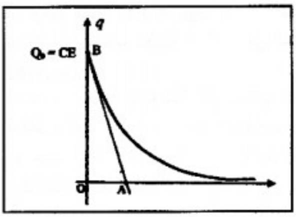
بالتعويض عن $\tau = RC$ نجد $[Q_0/C - R\, Q_0/\tau] = 0$ إذن بالفعل $q_{(t)} = Q_0 \exp(-t/\tau)$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

3. البرهان أن المماس للبيان عند المبدأ يقطع محور الأزمنة عند نقطة توافق $(t = \tau)$:

المماس للمنحنى عند مبدأ الأزمنة معامل توجيهه dq/dt .

لدينا $q(t) = Q_0\, e^{-t/\tau}$ إذن : معادلة المماس للبيان من الشكل : $q(t) = at + b$

حيث : $a = dq/dt = - Q_0/\tau \,.\, e^{-t/\tau}$. عند $t = 0$ يكون $b = Q_0$ و $a = - Q_0/\tau$



و منه : $q(t) = - Q_0/\tau\ t + Q_0$. عند التقاطع مع محور الأزمنة يكون : $q(t) = 0$

أي : $0 = - Q_0/\tau \,.\, t - Q_0$ و منه : $t = \tau$

4. تعيين بيانيا ثابت الزمن :

المماس للبيان عند المبدأ يقطع محور الأزمنة عند نقطة توافق $(t = \tau = 0,0\,2\ s)$.

5. حساب سعة المكثفة C : نستنتج C انطلاقا من العلاقة $\tau = RC = 0,02\ s$.

و منه نحصل على سعة المكثفة :

$$C = \tau/R = 0,02/(1 \,.\, 10^5) = 0,2\ \mu F$$

6. حساب شحنة المكثفة عند اللحظتين $t = 0$ ، $t = 5\tau$: $q(0) = Q_0 = 1 \times 10^{-6}\ C$ ،

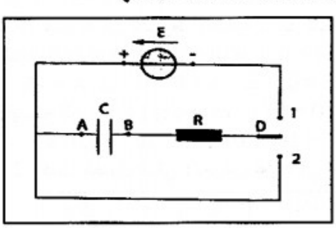
$$q(5\tau) = Q_0 \exp(-5) = 1 \times 10^{-6} \times 6,7 \times 10^{-3} = 6,7 \times 10^{-9}\ C$$

7. حساب شدة التيار عند نفس اللحظتين السابقتين : $i(0) = - dq_A/dt = + Q_0/\tau \exp(0) = Q_0/\tau = 0,5 \times 10^{-4}\ A$

$$i(5\tau) = Q_0/\tau \exp(-5) = 3,35 \times 10^{-7}\ A$$

التمرين ــ 14

لدينا مولد لتوتر ثابت $E = 100\ V$ مقاومته الداخلية مهملة ، ناقل أومي مقاومته $R = 10\ k\,\Omega$ ، مكثفة سعتها $C = 0,5\ \mu F$ ، بادلة ، أسلاك توصيل . نحقق الدارة التالية :



1. نضع البادلة في الوضع (1) عند اللحظة $t = 0$ فتبدأ عملية شحن المكثفة .

a. اوجد المعادلة التفاضلية للدارة $u_{AB} = f(t)$.

b. تحقق أن حلها هو : $u_{AB} = E(1 - e^{-t/RC})$.

c. مثل كيفيا تغيرات u_{AB} بدلالة الزمن .

d. ما هي دلالة نقطة تقاطع المماس للبيان عند المبدأ مع المستقيم $u_{AB} = E$.

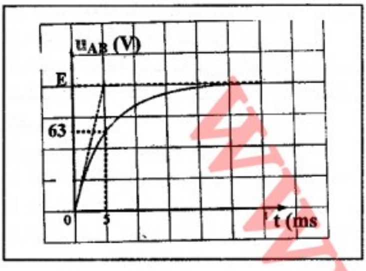
e. احسب ثابت الزمن لثنائي القطب RC .

f. احسب u_{AB} عند اللحظات $t_1 = \tau$ ، $t_2 = 5\tau$.

2. نضع البادلة في الوضع (2) عند اللحظة $t = 0$. a. اوجد المعادلة التفاضلية للدارة $u_{AB} = f(t)$.
b. احسب u_{AB} من أجل $t_1 = 0$ ، $t_2 = \tau$ ، $t_3 = 5\tau$ ، $t \to \infty$. c. مثل تغيرات u_{AB} بدلالة الزمن .

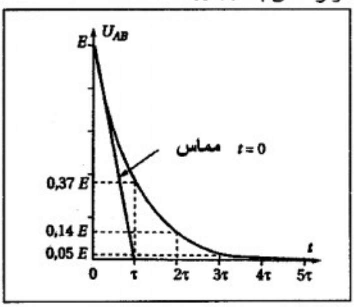
الحــل ــ14

a. إيجاد المعادلة التفاضلية للدارة $u_{AB} = f(t)$: بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_G = u_C + u_R$ و لدينا : $E = u_C + R\,i$ و
بما أن : $i = dq/dt = d(C\,.\,u)/dt = C\,du/dt$ نحصل على المعادلة التي تحققها $u(t)$: $E = R\,C\,du/dt + u$
b- تحقيق أن $u(t) = E\,[1 - \exp(-t/RC)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية : نحسب : $du/dt = E/\tau\,\exp(-t/RC)$ و بالتعويض عن $u(t)$ و du/dt في المعادلة التفاضلية نحصل على : $R\,C\,E/\tau\,\exp(-t/RC) + E[1 - \exp(-t/RC)] = E$.
بالفعل $u = E\,[1 - \exp(-t/RC)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية .



c. تمثيل كيفيا تغيرات u_{AB} بدلالة الزمن : انظر الشكل .
d. دلالة نقطة تقاطع المماس للبيان عند المبدأ مع المستقيم $u_{AB} = E$.
نقطة التقاطع هذه ، فاصلتها تمثل ثابت الزمن لثنائي القطب RC .
e. حساب ثابت الزمن لثنائي القطب RC :
$\tau = RC = 10\,.\,10^3\,.\,0{,}5\,.\,10^{-6} = 5{,}0\ s$.
f. حساب u_{AB} عند اللحظات $t_1 = \tau$ ، $t_2 = 5\tau$:
$u(\tau) = E\,[1 - \exp(-\tau/\tau)] = 100\,[1 - \exp(-1)] = 63\ V$
$u(5\tau) = E\,[1 - \exp(-5\tau/\tau)] = 100\,[1 - \exp(-5)] = 100\ V$
2. a. إيجاد المعادلة التفاضلية للدارة $u_{AB} = f(t)$:

في الدارة المبينة سابقا ، و من قانون جمع التوترات نكتب : $u_C + u_R = 0$ وحيث أن : $u_R = R\,i$ و لدينا : $i = dq/dt = d(C\,.\,u_C)/dt = C\,du_C/dt$ ، إذن : $RC\,du_C/dt + u_C = 0$
و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة ل u_C تقبل حلا من الشكل : $u_C = E\ \exp(-t/\tau)$
b. حساب u_{AB} من أجل $t_1 = 0$ ، $t_2 = \tau$ ، $t_3 = 5\tau$ ، $t \to \infty$.
ـ تحديد بالحساب $u(0)$ ، $u(\tau)$ ، $u(5\tau)$: $u(0) = E\exp(0) = E$ ،
التوتر في البداية هو E . أي التوتر غير منقطع .
$u(\tau) = E\exp(-1) = 0{,}37\,E$ ، خلال طور التفريغ ، عند اللحظة $t = \tau$ التوتر نقص بـــ 63 % .



$u(5\tau) = E\exp(-5) \approx 0$ ، نصل إلى النظام الدائم ، عند اللحظة $t = 5\tau$.
$u(\infty) = E\exp(-\infty) = 0$ ، نصل إلى النظام الدائم ، بعد اللحظة $t = 5\tau$.
c. تمثيل تغيرات u_{AB} بدلالة الزمن : انظر الشكل المرافق .

التمرين ــ 15

مكثفة سعتها 2mF تختزن طاقة كهربائية قدرها 1,5 J .
1. احسب الشحنة الكهربائية الموجودة على كل لبوس .
2. احسب التوتر الكهربائي بين لبوسيها .

الحــل ــ15

1. حساب الشحنة الكهربائية الموجودة على كل لبوس :
$E(c) = 1/2\ q^2/C = 1{,}5 \ \Rightarrow\ q = 0{,}077\ C$.
2. حساب التوتر الكهربائي بين لبوسيها : $u(t) = q(t)/C = 0{,}077/0{,}002 = 38{,}5\ V$

التمرين ــ 16

مكثفة قيمة شحنتها الإبتدائية 4 mC تم شحنها تحت توتر 12 V . 1. احسب الطاقة الكهربائية التي تخزنها .
2. كم تصبح طاقتها المخزنة لو ضاعفنا سعتها ؟ 3. نفرغ المكثفة بناقل أومي مقاومته R ، عبر عن الطاقة المخزنة في المكثفة بدلالة Q_0 , C , t , τ . 4. اوجد قيمة هذه الطاقة من أجل $t = \tau$.

الحــل ــ16

1. الطاقة التي تخزنها : $E(c) = 1/2\ C\,.\,u^2$: $E_{(c)} = 1/2\ q\,.\,u = 24\,.\,10^{-3}\ J$. 2. تصبح طاقتها لو ضاعفنا سعتها :
$E'(c) = 1/2\ C'\,.\,u^2 = 1/2\ (2C)\,.\,u^2 = 2\ (1/2\ C\,.\,u^2) = 2\ E_{(c)} = 48\,.\,10^{-3}\ J$.
3. التعبير عن الطاقة المخزنة في المكثفة بدلالة Q_0 , C , t , τ : تتناقص الطاقة المخزنة في مكثفة خلال تفريغها ، لدينا عبارة الشحنة خلال التفريغ هي : $q(t) = Q_0\,e^{-t/\tau}$ و منه : $q^2(t) = Q_0^2\exp(-2t/\tau)$ ، نعوض في عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة خلال التفريغ فنجد : $E(c) = 1/2\ q^2/C = 1/2\,.\,Q_0^2/C\ \exp(-2t/\tau)$
4. إيجاد قيمة هذه الطاقة من أجل $t = \tau$: من أجل $t = 0$ نجد : $E_{0(C)} = 1/2\,.\,Q_0^2/C = 24\,.\,10^{-3}\ J$ ،

تمــــارين نماذج للبكالوريا

مراقبات مستمرة ، فروض و اختبارات

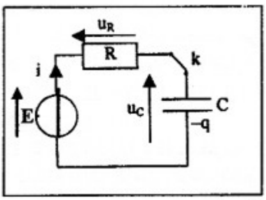
BAC

التمرين ـــ1

مكثفة سعتها $C = 6,5\ nF$ موصولة على التسلسل مع مولد توتر ثابت $E = 15\ V$ ، ناقل أومي $R = 100\ \Omega$ و قاطعة K .
في البداية المكثفة كانت فارغة . عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة .
a– اعط عبارة ثابت الزمن τ لثنائي القطب (R ,C) . b– بطريقة تحليل الأبعاد ، حدد وحدة τ .
c– ما هو زمن الوصول للنظام الدائم ؟

الحــل ـــ 1

a– عبارة ثابت الزمن τ لثنائي القطب (R ,C) هي $\tau = RC$ حيث وحدة R هي Ω و وحدة C هي F و وحدة τ هي s .
b– بطريقة تحليل الأبعاد ، حدد وحدة τ : $[\tau] = [RC] = [(U/I)] . [(Q/U)] = [T]$.
لأن : $U = RI$ و $Q = C U$ و $I = Q/T$. إذن الثابت τ يجانس الزمن و منه وحدته هي الثانية أي : s .
c– زمن الوصول للنظام الدائم : نصل للنظام الدائم عندما تكون المكثفة مشحونة تماما . و المدة الزمنية لطور تشحين المكثفة هي : $t = 5\ \tau = 5\ RC = 3,25 . 10^{-6}\ s$.



التمرين ـــ2

اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها u و كذا المعادلة التفاضلية التي تحققها q .

الحــل ـــ 2

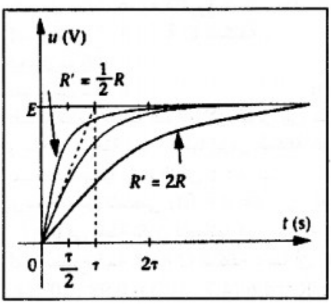
ـــ كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها u : $u_G = u_C + u_R$ و لدينا : $E = u_C + R\,i$
و بما أن : $i = dq/dt = d(C . u)/dt = C\ du/dt$ نحصل على المعادلة المقترحة :

$$E = RC\ du/dt + u$$

ـــ كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها q : بالتعويض عن u بـــ q/C في المعادلة التفاضلية نكتب :
$E = RC\ d(q/C)/dt + q/C$ و منه نحصل على : $E = R\ dq/dt + q/C$.

التمرين ـــ3

a– اعط عبارة ثابت الزمن τ لدارة (R , C) . خاضعة لسلم التوتر E
b– مثل $u = f(t)$. c– ماذا نلاحظ عندما نستبدل R بـــ $R' = 2R$ ؟
d– ماذا نلاحظ عندما نستبدل R بـــ $R' = R/2$ ؟



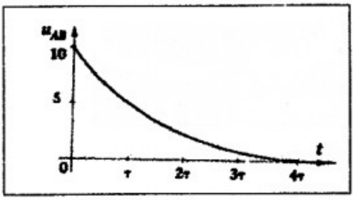
الحــل ـــ 3

a– عبارة ثابت الزمن τ لدارة (R , C) هي $\tau = RC$ حيث وحدة R هي Ω
و وحدة C هي F و وحدة τ هي s .
b– تمثيل $u = f(t)$: انظر الشكل المقابل .
c– عندما نستبدل R بـــ $R' = 2R$ ، نلاحظ أن الزمن يصبح : $\tau' = 2\ \tau$.
المكثفة تشحن ببطئ .
d– عندما نستبدل R بـــ $R' = R/2$ نلاحظ أن الزمن يصبح : $\tau' = \tau /2$.
المكثفة تشحن بسرعة أكبر.

التمرين ـــ 4

مكثفة سعتها $C = 47\ \mu F$ تفرغ في دارة ذات مقاومة $R = 2,0\ k\Omega$.
عند اللحظة $t = 0\ s$ ، التوتر بين طرفي المكثفة هو $u_{AB}(t = 0) = 10\ v$.
a– احسب الطاقة E_{con} المخزنة في المكثفة . b– اعط عبارة ثابت الزمن τ ثم اوجد قيمته .
c– مثل التوتر u_{AB} بدلالة الزمن . d– متى يمكننا اعتبار المكثفة فارغة ؟

الحــل ـــ 4



a_ حساب الطاقة E_{con} المختزنة في المكثفة :

$E_{cond} = 1/2\ C\ U_{AB}^2 = 1/2 . 47 . 10^{-6} . 10^2 = 2,4 . 10^{-3}$ J J

b_ عبارة ثابت الزمن τ ثم يجاد قيمته :

$\tau = RC = 2,0 . 10^3 . 47 . 10^{-6} = 9,4 . 10^{-2}$ s

c_ تمثيل التوتر u_{AB} بدلالة الزمن الموافق لتفريغ المكثفة : انظر الشكل .

d_ نصل إلى النظام الدائم عندما تفرغ المكثفة تماما ، و هذا خلال مدة زمنية $\Delta t = 5\ \tau = 5 . 9,4 . 10^{-2} = 0,47$ s .

التمرين _5

نشحن مكثفة سعتها C = 50 µF في دارة ذات مقاومة R . نسجل التوتر u بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن .

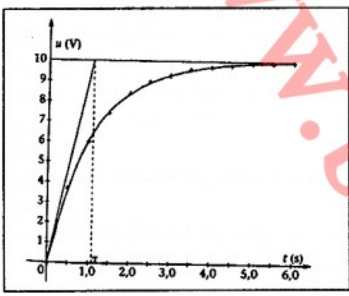
ندون النتائج في الجدول التالي :

u (V)	0	3,7	6,0	7,4	8,4	9,0	9,3	9,6	9,7	9,8	9,9	9,9	10
t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0

a_ مثل شكل المنحنى الممثل لـ u = f(t) .

السلم : على محور التراتيب : 1 cm يمثل 1,0 v ، على محور الفواصل : 1 cm يمثل 0,5 s .

b_ حدد بيانيا ثابت الزمن τ . c_ استنتج قيمة المقاومة R للدارة .



الحل _ 5

a_ تمثيل شكل المنحنى الممثل لـ u = f(t) : انظر الشكل المرفق .

b_ تحديد بيانيا ثابت الزمن τ : يمكننا تحديد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ :

برسم المماس للمنحنى u = f(t) عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته u = E في نقطة تكون فاصلتها هي $t = \tau = 1,1$ s .

c_ استنتاج قيمة المقاومة R للدارة : بما أن τ = RC نجد :

$R = \tau/C = 1,1/(50 . 10^{-6}) = 22 . 10^3\ \Omega$.

التمرين _6

نفرغ مكثفة في دارة ذات مقاومة R = 4,7 kΩ . نسجل التوتر u بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن . نرتب القيم المسجلة في الجدول التالي :

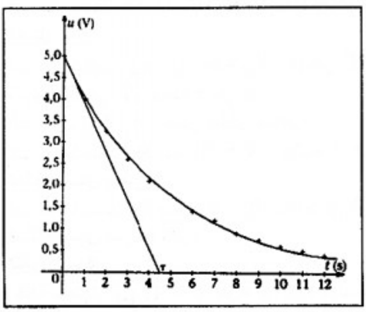
u(V)	5,0	4,0	3,3	2,6	2,1	1,7	1,4	1,2	0,91	0,71	0,60	0,48	0,39
t(s)	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0

a_ مثل شكل المنحنى الممثل لـ u = f(t) .

السلم : على محور التراتيب : 1 cm يمثل 0,5 v ، على محور الفواصل : 1 cm يمثل 1,0 s .

b_ هل انتهت عملية التفريغ ؟ c_ حدد بيانيا ثابت الزمن τ .

d_ استنتج قيمة السعة C للمكثفة .



الحل _ 6

a_ تمثيل شكل المنحنى الممثل لـ u = f(t) : انظر الشكل المرافق .

b_ لم تنتهي عملية التفريغ لأن التوتر بين طرفي المكثفة لم ينعدم بعد ، و منه q الشحنة التي يحملها لبوس المكثفة غير منعدمة .

c_ تحديد بيانيا ثابت الزمن τ : يمكننا تحديد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ :

برسم المماس للمنحنى u = f(t) عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته u = 0 في نقطة تكون فاصلتها هي $t = \tau = 4,6$ s .

d_ استنتاج قيمة السعة C للمكثفة : بما أن τ = RC نجد :

$C = \tau/R = 4,6/(4,7 . 10^3) = 0,98 . 10^{-3}\ \Omega$.

التمرين _7

مكثفة سعتها C = 50 µF شحنت تحت توتر E = 5,0 v . نصل هذه المكثفة بمكثفة أخرى سعتها C فارغة في البداية .

a_ ما هو التوتر بين طرفي المكثفات في النظام الدائم ؟ b_ نفس السؤال إذا كانت المكثفة الثانية سعتها C' = 2 C .

الحل _ 7

a_ التوتر بين طرفي المكثفات في النظام الدائم : المكثفة (1) تخزن شحنة : Q = C E . هذه شحنة سوف توزع على المكثفتين

Q_1 و Q_2 و التوتر u بين طرفي كل منهما هو نفسه . لدينا إذن : $Q = Q_1 + Q_2 = C\,u + C\,u = 2\,C\,u = C\,E$

و منه : $2\,u = E$ و منه : $u = 2{,}5\ V$.

b– بنفس الطريقة إذا كانت المكثفة الثانية سعتها $C' = 2\,C$: : $Q = Q_1 + Q_2 = C\,u + 2\,C\,u = 3\,C\,u = C\,E$

و منه : $3\,u = E$ و منه : $u = 1{,}67\ V$.

التمرين –8

مكثفة فارغة سعتها $C = 100\ \mu F$ توصل على التسلسل مع مولد قوته المحركة الكهربائيه $E = 5{,}0\ V$ ، قاطعة K و ناقل أومي مقاومته $R = 220\ \Omega$. a – ارسم مخطط الدارة ، بإعتبار القاطعة مفتوحة .

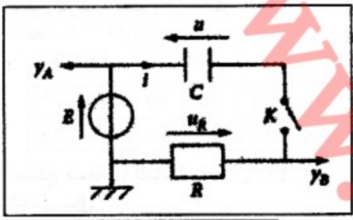
b– حدد التوصلات الازمة لمشاهدة التوتر بين طرفي المولد (المدخل A)و التوتر u بين طرفي الناقل الأمي (المدخلB)على الشاشة راسم الإهتزاز المزود بمذكرة .

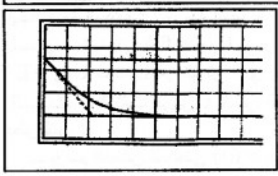
c– عند لحظة $t = 0$ نغلق القاطعة . بتطبيق قانون جمع التوترات ، أكتب المعادلة التفاضلية المحققة بـ $q(t)$.

d– نضع $\tau = R\,C$. تحقق أن $q(t) = EC\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

e– استنتج عبارة $i(t)$. احسب $i(0)$ و $i(5\tau)$. f– مثل شاشة راسم الإهتزاز المهبطي محددا العيارات المختارة .

الحـل – 8





a– رسم مخطط الدارة ، باعتبار القاطعة مفتوحة : انظر الشكل المرافق .

b– تحديد التوصلات الازمة لمشاهدة التوترات : انظر الشكل المرافق .

c– كتابة المعادلة التفاضلية المحققة بـ $q(t)$: لدينا : $E = u_C + R\,i$

و بما أن : $i = dq/dt$ و $u = q/C$

نحصل على المعادلة التي تحققها $q(t)$: $E = R\,dq/dt + q/C$

d– تحقيق : بالتعويض عن $q(t)$ و dq/dt في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$E/R\,\exp(-t/\tau) + 1/RC \cdot EC[1 - \exp(-t/\tau)] = E/R$$

بالفعل $q(t) = EC\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

e– استنتاج عبارة $i(t)$ و حساب $i(0)$ و $i(5\tau)$: لدينا :

$i(t) = dq/dt = E/R\,\exp(-t/\tau)$ إذن $i(0) = E/R\,\exp(0)$

و $i(5\tau) = E/R\,\exp(-5)$. أي : $i(0) = 23\ mA$ و $i(5\tau) = 0\ mA$.

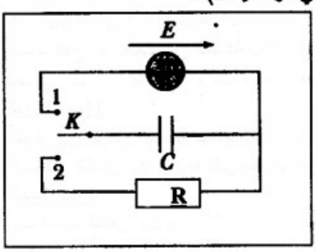
f– تمثيل شاشة راسم الإهتزاز المهبطي: نحسب ثابت الزمن : $\tau = R\,C = 22\ ms$

و $U_R(0) = E = 5\ V$. نختار السلم التالي : قاعدة الزمن : $k_B = 10\ ms$ لكل تدريجة

و $k_v = 2\ V$ لكل تدريجة ، بالنسبة للمدخلين .

التمرين –9

مكثفة سعتها C ، فارغة تشحن بواسطة مولد قوته المحركة الكهربائية E (القاطعة في الوضعية 1) .



1– دراسة شحن مكثفة

a– ما هو التوتر بين طرفي المكثفة ، في نهاية الشحن ؟

b– حدد على الشكل ، الشحن q و -q التي يحملها لبوسي المكثفة .

c– ما هي الطاقة المختزنة في المكثفة ؟

2– دراسة تفريغ مكثفة

عند $t = 0$ ، نضع القاطعة في الوضعية 2 .

a– مثل على الشكل التيار i و التوتر u بين طرفي المكثفة (إصطلاحا آخذة) .

ما هي إشارة u ؟ b– اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها u

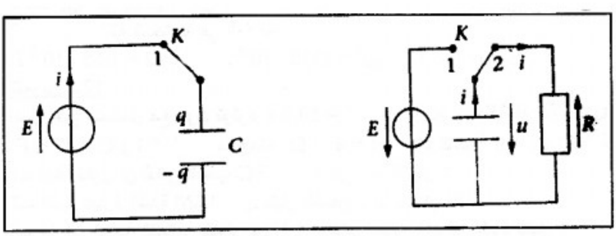
c– نضع $\tau = R\,C$. تحقق أن $u(t) = E\,\exp(-t/\tau)$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

d– حدد بالحساب $u(0)$، $u(\tau)$ ، $u(5\tau)$. علق .

e– حدد بالحساب ترتيب النقطة A .

نقطة تقاطع المماس للمنحنى عند المبدأ

مع الخط المقارب الأفقي . علق .



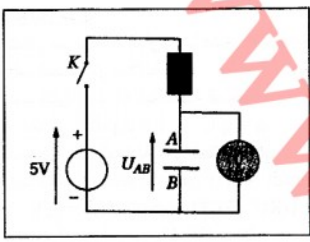
الحـل – 9

1 – a – التوتر بين طرفي المكثفة في نهاية الشحن : في نهاية الشحن ، $u = E$.

b– وضع على الشكل ، الشحن q و -q التي يحملها لبوسي المكثفة : انظر الشكل

المرافق .c ــ الطاقة المختزنة في المكثفة : $E_c = 1/2 . C E^2$.
2 ــ a ــ التمثيل على الشكل التيار i و التوتر u بين طرفي المكثفة :
التوتر u سالب لأن $u + R i = 0$ و $R i > 0$. انظر الشكل المرفق .
b ــ كتابة المعادلة التفاضلية المحققة التي يحققها u : لدينا $u + R i = 0$ و منه $u + RC\, du/dt = 0$.
c ــ التحقيق : نضع $\tau = R C$. نحسب $du/dt = - E/\tau \exp(-t/\tau)$. و بالتعويض عن $u(t)$ و du/dt في المعادلة التفاضلية نحصل على : $E \exp(-t/\tau) - RC\, E/\tau \exp(-t/\tau) = 0$. بالفعل $u(t) = E \exp(-t/\tau)$ هي حل للمعادلة التفاضلية .
d ــ تحديد بالحساب $u(0)$ ، $u(\tau)$ ، $u(5\tau)$: $u(0) = E \exp(0) = E$ ، التوتر في البداية هو E . أي التوتر غير منقطع .
$u(\tau) = E \exp(-1) = 0,37 E$ ، خلال طور التفريغ ، عند اللحظة $t = \tau$ التوتر نقص بـ 63 % .
$u(5\tau) = E \exp(-5) = 0$ ، نصل إلى النظام الدائم ، عند اللحظة $t = 5\tau$.
e ــ المماس للمنحنى عند مبدأ الأزمنة معامل توجيهه du/dt . إذن معادلته : $u = - E/\tau . t + E$. يقطع الخط المقارب الأفقي للمنحنى (محور الفواصل) عندما : $u(t) = 0$ أي : $- E/\tau . t + E = 0$ أي عندما $t = \tau$. $u = E$
إذن هذه النقطة A فاصلتها فعلا هي : τ .

التمرين ــ10

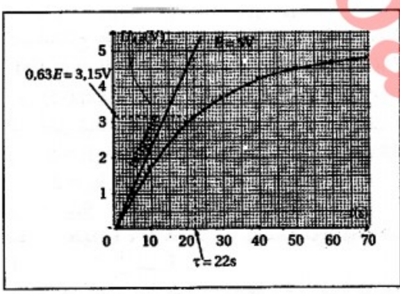


نحقق التركيب المبين في الشكل . عند اللحظة t = 0 نغلق القاطعة K و في نفس اللحظة نشغل الكرونومتر . نسجل قيمة التوتر U_{AB} عند أزمنة مختلفة ، ندون النتائج في الجدول التالي :

t(s)	0	5	10	20	30	40	50	60	70
U_{AB}(V)	0	1,0	1,8	3,0	3,7	4,2	4,5	4,7	4,8

استنتج السعة C للمكثفة علما أن $R = 10\ k\Omega$.

الحــل ــ10



إيجاد سعة المكثفة : الطريقة المقترحة تتمثل في اتباع الخطوات التالية :
1ــ نرسم المنحنى $U_{AB} = f(t)$ ثم نرسم المستقيم الذي معادلته $U_{AB} = E$ حيث E هو التوتر الذي يعطيه المولد .
2ــ نحدد قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC و يمكن الحصول عليه بطريقتين :
ــ برسم المماس للمنحنى $U_{AB} = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته $U_{AB} = E$ في نقطة تكون فاصلتها هي τ .
ــ بالبحث عن النقطة التي ترتيبها $U_{AB} = 0,63 E$ حيث فاصلتها هي ثابت الزمن τ . (الطريقة الأكثر دقة) .
3ــ نستنتج C انطلاقا من العلاقة $\tau = RC$. ت . ع : بالطريقتين
نحصل على : $\tau = 22\ s$ و منه نحصل على سعة المكثفة . $C = \tau/R = 22/(10 . 10^3) = 22 . 10^{-4}\ F = 2,2\ mF$.

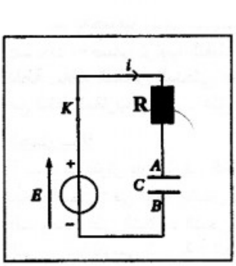
التمرين ــ11

التوتر بين طرفي المكثفة سعتها $C = 330\ \mu F$ هو $U_{AB} = 10,0\ V$.
1ــ حدد الشحن q_A و q_B التي يحملها لبوسي المكثفة A و B . 2ــ حدد الطاقة المختزنة في المكثفة .

الحــل ــ11

1ــ تحديد الشحن q_A و q_B التي يحملها لبوسي المكثفة A و B : الشحنة q_A التي يحملها لبوس المكثفة A هي : $q_A = C . U_{AB} = 330 . 10^{-6} . 10,0 = 3,30 . 10^{-3}\ C$
الشحنة q_B التي يحملها لبوس المكثفة B هي : $q_A = - q_B = - 3,30 . 10^{-3}\ C$
2ــ تحديد الطاقة المختزنة في المكثفة :
. $E_{con} = 1/2 .C. U_{AB}^2 = (330 . 10^{-6} . 10,0^2)/2 = 1,65 . 10^{-2}\ J$

التمرين ــ12

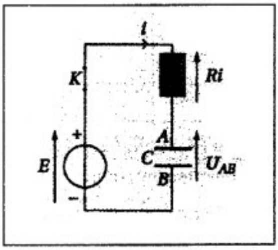


نصل على التسلسل مع مولد توتره $U = 10,0\ v$ ، قاطعة K ، مكثفة فارغة سعتها $C = 47\ n F$ و ناقل أومي مقاومته $R = 470\ \Omega$. عند اللحظة t = 0 ، القاطعة مغلوقة .
1ــ لماذا نقول أن ثنائي القطب RC خاضع إلى سلم التوتر ؟
2ــ اكتب عبارة الشدة الإبتدائية i_0 لتيار الشحن . أحسب قيمته .
3ــ ما هي القيمة النهائية للتوتر U_{AB} ؟ إستنتج القيمة النهائية لشدة التيار ؟

4ــ ما هي قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC ؟

5ــ ما هي قيمة التوتر U_{AB} عند اللحظة $t = \tau$ ؟ استنتج قيمة شدة التيار عند نفس اللحظة .

الحـل ــ12



1ــ عند غلق القاطعة K التوتر المطبق بين طرفي ثنائي القطب RC تنتقل فجأة قيمته من 0 إلى القيمة $E = 10{,}0$ V . و لهذا نقول أن ثنائي القطب RC خاضع إلى سلم التوتر

2ــ كتابة عبارة الشدة الإبتدائية i_0 لتيار الشحن و حساب قيمته : عبارة قانون جمع التوترات تكتب : $R\,i + U_{AB} = E$. عند اللحظة $t = 0$ المكثفة فارغة ، إذن $U_{AB} = 0$ و منه الشدة الابتدائية تصبح :

$$i_0 = E/R = 10{,}0/470 = 0{,}0213 \text{ A} = 21{,}3 \text{ mA} .$$

3ــ إيجاد القيمة النهائية للتوتر U_{AB} و إستنتاج القيمة النهائية لشدة التيار : في نهاية الشحن $R\,i + U_{AB} = E$ إذن : $i = 0$.

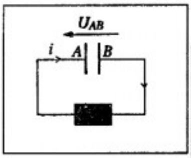
4ــ قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC : من التعريف : $U_{AB} = E = 470 . 47 . 10^{-9} = 2{,}2 . 10^{-5}$ s $= 22$ µs .

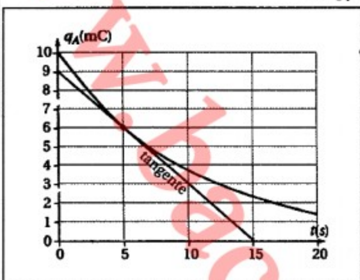
5ــ قيمة التوتر U_{AB} عند اللحظة $t = \tau$ و استنتاج قيمة شدة التيار عند نفس اللحظة : عند اللحظة $t = \tau$ ، المكثفة مشحونة بنسبة 63 % . أي : $U_{AB} = 0{,}63$ E . العبارة $R\,i + U_{AB} = E$ تصبح إذن $R\,i = 0{,}37$ E

و أخيرا $i = 0{,}37\ E/R = 0{,}37\ i_0 = 7{,}9$ mA .

التمرين ــ13

مكثفة سعتها C ، في البداية مشحونة موصولة إلى مقاومة $R = 100$ kΩ ، تطور قيمة الشحنة q_A للبوس A يمثله المنحنى في الشكل المقابل .





1ــ أعط عبارة الشدة i للتيار بدلالة الشحنة q_A .

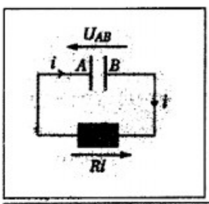
2ــ بشرح الطريقة ، حدد بيانيا قيمة الشدة i عند اللحظة $t = 5$ s . ماذا تعني إشارة i ؟

3ــ حدد قيمة الشحنة q_A و U_{AB} عند اللحظة $t = 5$ s . استنتج قيمة السعة C .

4ــ حدد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC . أعد حساب قيمة السعة C .

5ــ خلال عملية التفريغ ، ماذا تصبح الطاقة المختزنة في المكثفة ؟

الحـل ــ 13



1ــ عبارة الشدة i للتيار بدلالة الشحنة q_A : من التعريف عبارة شدة التيار هي : $i = dq_A/dt$.

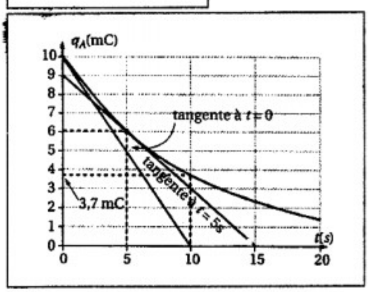
2ــ تحديد بيانيا قيمة الشدة i عند اللحظة $t = 5$ s : بيانيا ، المشتقة $i = dq_A/dt$ هي معامل توجيه المماس للمنحنى عند نقطة فاصلتها $t = 5$ s و يمر على النقاط ذات الإحداثيات : (5 s , 6mC) ، (15 s , 0) ، إذن الشدة عند هذه اللحظة تصبح : $i = (6 . 10^{-3} - 0)/(5 - 15) = - 6 . 10^{-4}$ A

نلاحظ أن الشدة i سالبة . هذا يعني أن تيار التفريغ جهته معاكسة للجهة المختارة على الشكل .

3ــ تحديد قيمة الشحنة q_A و U_{AB} عند اللحظة $t = 5$ s و استنتاج قيمة السعة C : حسب المنحنى ، عند $t = 5$ s شحنة اللبوس A هي $q_A = 6 . 10^{-3}$ C . بالإضافة :

$R\,i + U_{AB} = 0$ أي $U_{AB} = - R\,i$

و لدينا : $U_{AB} = - 10^5 .(-6 . 10^{-4}) = 60$ V .



تكون سعة المكثفة هي : $C = qA/ U_{AB} = (6 . 10^{-3})/60 = 10^{-4}$ F .

أو $C = 100$ µF .

4ــ تحديد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC : يمكن تحديد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC بطريقتين :

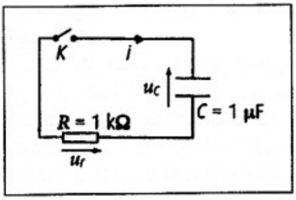
ــ برسم المماس للمنحنى $U_{AB} = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته $U_{AB} = E$ في نقطة تكون فاصلتها هي τ .

ــ الشحنة الإبتدائية للمكثفة هي 10 mC . إذن خلال مدة زمنية τ الشحنة تنقص بــ 63 % أي $q_A = 3{,}7$ mC . يكفي إذن البحث عن النقطة التي ترتيبها $q_A = 3{,}7$ mC حيث فاصلتها هي ثابت الزمن τ . (الطريقة الأكثر دقة) .

بالطريقتين البيانيتين نحصل على : $\tau = 10$ s و منه نستنتج سعة المكثفة : . $C = \tau/R = 10/10^5 = 10^{-4}$ F $= 100$ µF.

5ـ خلال طور التفريغ ، تتحول الطاقة المختزنة في المكثفة إلى المقاومة على شكل حرارة في أي بفعل جول .

التمرين ــ 14



نعتبر الدارة المبينة في الشكل المقابل . عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة K .

ندعو $u_C(t)$ التوتر بين طرفي المكثفة ، ابتدائيا مشحونة . عبارة هذا التوتر هي :

$$u_C(t) = 10\exp(-t/RC)$$

1ـ اكتب عبارة الشدة $i(t)$ للتيار في الدارة من أجل $t > 0$.

2ـ احسب الطاقة $E(t_1)$ المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t_1 = 2\ ms$.

3ـ اكتب عبارة $u_R(t)$ التوتر بين طرفي المقاومة R .

الحــل ــ 14

1ـ كتابة عبارة الشدة $i(t)$ للتيار في الدارة من أجل $t > 0$: شدة التيار في المكثفة تتناسب طردا مع مشتقة التوتر بين طرفيها : $i(t) = C\ du_C/dt$. ثابت التناسب هو سعتها C . و منه :

$$i(t) = C\ du_C/dt = -10/R \exp(-t/RC) = -10/10^3 \exp[-t/(10^3 \cdot 10^{-6})] .$$

و أخيرا : $i(t) = -0{,}01\exp(-1000\ t)$.

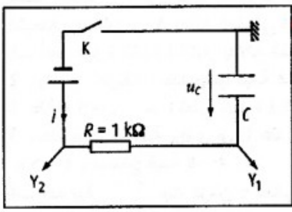
2ـ حساب الطاقة $E(t_1)$ المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t_1 = 2\ ms$:

$$E(t_1) = 1/2 \cdot C\,[u_C(t_1)]^2 = 1/2 \cdot 10^{-6}\,[10\exp(-(2 \cdot 10^{-3})/(10^3 \cdot 10^{-6})]^2 = 9 \cdot 10^{-7}\ J .$$

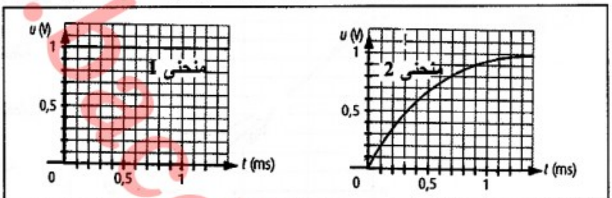
3ـ كتابة عبارة $u_R(t)$ التوتر بين طرفي المقاومة R : حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R(t) + u_C(t) = 0 \Rightarrow u_R(t) = -10\exp(-t/RC) .$$

التمرين ــ15



نعتبر الدارة المبينة في الشكل المقابل . المكثفة ابتدائيا فارغة . عند اللحظة $t_0 = 0$ ، نغلق القاطعة K . نصل مدخلي جهاز راسم الإهتزاز المهبطي كما في الشكل المقابل .

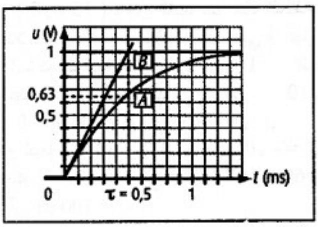


1ـ اذكر لماذا احدى المنحنيين لا يمكن أن يمثل تغيرات : $u_C(t)$.

2ـ باستخدام المنحنى الآخر ، أوجد بيانيا ثابت الزمن τ ثم استنتج قيمة السعة C للمكثفة .

الحــل ــ15

1ـ المنحنى 1 لا يمكن أن يمثل تغيرات التوتر $u_C(t)$ لأنه حدث فيه إنقطاع عند اللحظة $t_0 = 0$ (مثل هنا بقطعة مستقيمة شاقولية) . بالفعل نعرف أن التوتر بين طرفي المكثفة لا يمكن أن يحدث له إنقطاع .



2ـ نستعمل إذن المنحنى 2 . خلال المدة الزمنية τ نعلم أن التشحين وصلت نسبته إلى القيمة 63 % . أي أن التوتر و كانه يؤول إلى 1 V . τ هو إذن فاصلة النقطة A للمنحنى التي ترتيبها 0,63 V . بيانيا نجد القيمة $\tau = 0{,}5\ ms$.

الطريقة 2 : طريقة المماسات : ــ برسم المماس للمنحنى $u = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته $u = E$ في نقطة تكون فاصلتها هي τ .

بما أن $\tau = RC$ نستنتج أن : $C = \tau/R = (0{,}5 \cdot 10^{-3})/10^3 = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ F$.

التمرين ــ16

نعتبر الدراة الكهربائية أين يوصل فيها على التسلسل : مولد تيار مستمر ($I = 0{,}2\ mA$) ، مكثفة سعتها $C = 400\ \mu F$ ، قاطعة K و مقاومة $R = 1\ k\Omega$. المكثفة ابتدائيا فارغة ، نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$.

1ـ اوجد قيم التوترات : $u_C(0)$، $u_R(0)$ و $u_G(0)$ على الترتيب بين طرفي المكثفة ، المقاومة و المولد و هذا عند اللحظة $t = 0$

2ـ نوقف الشحن خلال $t_1 = 10\ s$. احسب عند هذه اللحظة :

aـ الشحنة $q(t_1)$ للمكثفة . bـ التوتر $u_C(t_1)$. cـ الطاقة $E(t_1)$ المخزنة في المكثفة .

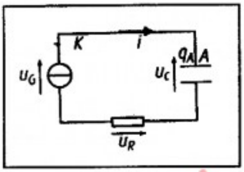
3ـ نذكر أن الإستطاعة المنتبذة بفعل جول في المقاومة R المار فيها تيار I ثابت هي $P = R \cdot I^2$.

aـ احسب الطاقة E' الناتجة من المقاومة من اللحظة $t = 0$ إلى اللحظة t_1 .

b— احسب النسبة r للطاقة $E(t_1)$ المخزنة في المكثفة على الطاقة الكلية E_{tot} التي يقدمها المولد من اللحظة $t = 0$ إلى اللحظة t_1 . هل المردود جيد عند تخزين الطاقة التي يقدمها المولد في المكثفة ؟

c— ماذا يحدث فيزيائيا ، إذا تركنا مولد مثالي يعطي تيار بشكل مستمر في دارة كهربائية ؟

الحـل —16



1— إيجاد قيم التوترات : نرسم شكل الدارة المدروسة . عند اللحظة الإبتدائية ، المكثفة غير مشحونة : $q_A(0) = 0$.

و منه $q_A(0) = 0 = C\, u_C(0)$. إذن $u_C(0) = 0$. بعد غلق القاطعة مباشرة : $i(t) = I$. حسب قانون أوم $u_R(0) = RI = 10^3 \,.\, 0{,}2 \,.\, 10^{-3} = 0{,}2\ V$.

لإيجاد قيمة $u_G(0)$ نطبق قانون جمع التوترات :

$$u_G(0) - u_C(0) - u_R(0) = 0 \Rightarrow u_G(0) = u_C(0) + u_R(0) = 0 + 0{,}2 = 0{,}2\ V$$

2— a— إيجاد الشحنة $q(t_1)$ للمكثفة عند هذه اللحظة $t_1 = 10\ s$: الشحنة المطلوبة هي الشحنة التي يحملها اللبوس A على الشكل . نحسب كمية الكهرباء التي تصل إلى A من اللحظة $t_0 = 0\ s$ إلى اللحظة $t_1 = 10\ s$:

$q_A(t_1) = I\,(t_1 - t_0) = 0{,}2 \,.\, 10^{-3} \,.\, 10 = 2 \,.\, 10^{-3}\ C$.

b— إيجاد التوتر $u_C(t_1)$: $q_A(t_1) = C \,.\, u_C(t_1)$. لدينا $u_C(t_1) = q_A(t_1)/C$.

و منه : $u_C(t_1) = 0{,}002/(400 \,.\, 10^{-6}) = 5\ V$.

c— الطاقة $E(t_1)$ المخزنة في المكثفة : $E(t_1) = 1/2 \,.\, C\,[u_C(t_1)]^2 = 1/2 \,.\, 400 \,.\, 10^{-6} \,.\, (5)^2 = 5 \,.\, 10^{-3}\ J$.

3— a— حساب الطاقة 'E الناتجة من المقاومة من اللحظة $t = 0$ إلى اللحظة t_1 :

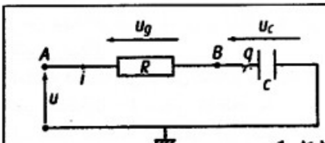
$$E' = P \,.\, \Delta t = R \,.\, I^2\,(t_1 - t_0) = 10^3 \,.\, (0{,}2 \,.\, 10^{-3})^2 \,.\, 10 = 4 \,.\, 10^{-4}\ J$$

b— حساب النسبة r للطاقة $E(t_1)$ المخزنة في المكثفة على الطاقة الكلية E_{tot} التي يقدمها المولد :

$r = E(t_1)/E' = E(t_1)/[\,E(t_1) + E'\,] = (5 \,.\, 10^{-3})/(5 \,.\, 10^{-3} + 0{,}4 \,.\, 10^{-3}) = 0{,}93$. أي % 93 من الطاقة التي يقدمها المولد تخزن في المكثفة . من هذه النسبة يمكن أن نقول أن المردود مقبول .

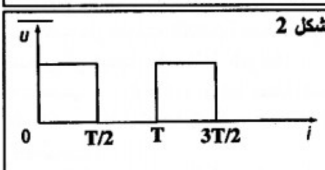
c— خلال مدة زمنية ، التوتر يزداد باستمرار بين طرفي المكثفة و في الأخير يمكن للتيار الكهربائي أن يعبر على العازل بين لبوسي المكثفة مما يؤدي إلى تخريبها أي إفساد المكثفة .

التمرين —17



الشكل 1

الشكل 2



1— ثنائي قطب RC خاضع لتوتر u . لتكن u_R و u_C التوترات بين الناقل الأومي R و المكثفة التي سعتها C . q هي شحنة المكثفة عند اللحظة t .

a— اثبت أن u_C يحقق المعادلة التفاضلية :

$$RC\, du_C/dt + u_C = u \qquad (1)$$

b— حسب هذه المعادلة ، ما هي وحدة الثابت $\tau = RC$ ؟

2— التوتر u يعطيه مولد GBF . يعطي إشارة مربعة ، دوره $T > 10\,\tau$. سعته $U = 6\ V$ انظر الشكل 2 . عند اللحظة $t = 0$ المكثفة فارغة .

a— نعتبر الحالة أين : $0 < t < T/2$.

— بين أن $u_C(t) = U\,[1 - \exp(-t/\tau)\,]$ يحقق المعادلة التفاضلية (1) كما يحقق الشرط الإبتدائي $q(0) = 0$. اوصف باختصار تغيرات $u_C(t)$.

ما هي القيمة العملية لـ $u_C(T/2)$ ؟

b— نعتبر الآن الحالة أين : $T/2 < t < T$. اوصف باختصار تغيرات $u_C(t)$. ما هي القيمة العملية لــ $u_C(t)$ ؟

3— نريد مشاهدة تغيرات $u_C(t)$ على جهاز راسم الإهتزاز المهبطي آخذا السلم التالي : قاعدة الزمن : $b = 200\ \mu s/div$ ، الحساسية الشاقولية للمدخل المستعمل هي : $k = 2\ V/div$. خصائص ثنائي القطب هي $R = 1\ k\Omega$ و $C = 50\ nF$. تواتر المولد هو : $N = 1\ kHz$. بين أن الشرط $T > 10\,\tau$ محقق (محترم) . مثل مظهر التوتر المشاهد على الشاشة . (10 div x 10 div) .

الحـل —17

1— a— اثبت أن u_C يحقق المعادلة التفاضلية : $RC\, du_C/dt + u_C = u \quad (1)$:

التوتر بين طرفي المقاومة من الشكل : $u_R = R\,i$. قانون جمع التوترات يسمح بكتابة : $R\,i + u_C = u$

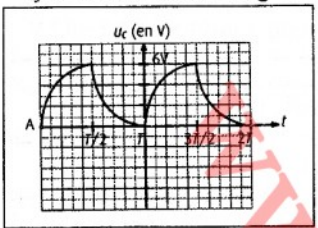
مع $i = +C\, du_C/dt$ نحصل على المعادلة التفاضلية : $RC\, du_C/dt + u_C = u \quad (1)$

b— إيجاد وحدة الثابت $\tau = RC$ ، حسب هذه المعادلة : باستخدام طريقة تحليل الأبعاد للمعادلة التفاضلية نبين أن :

$$u = RC\, du_C/dt + u_C$$

$$[u] = [U] = [RC\, du_C/dt] = [RC] \,.\, [du_C/dt] = [RC] \,.\, [U]/[T] \Rightarrow [RC] = [T] \Rightarrow [\tau] = [RC] = [T]$$

2ـ a ـ تبيان أن $u_C(t) = U[1 - \exp(-t/\tau)]$ يحقق المعادلة التفاضلية (1) كما يحقق الشرط الإبتدائي $q(0) = 0$:
من أجل $0 < t < T/2$ لدينا : $u = U$. بالتعويض عن $u_C(t)$ بـ $U[1 - \exp(-t/\tau)]$ و عن u بـ U في المعادلة التفاضلية نحصل على : $RC.d(U[1 - \exp(-t/\tau)]) + U[1 - \exp(-t/\tau)] = U$
أي : $RC . U/RC\ \exp(-t/RC) + U - U\exp(-t/RC)] = U$ و منه نحصل على :
$U\exp(-t/RC) + U - U\exp(-t/RC)] = U$ و منه : $U = U$. إذن : $u_C(t) = U[1 - \exp(-t/\tau)]$
يحقق المعادلة (1) . إضافة إلى ذلك : $q(t) = C . u_C(t)$ ، إذن $q(0) = C . U[1 - \exp(-t/\tau)] = C . U[1 - 1] = 0$
إذن عبارة $u_C(t)$ موافقة تماما للمعطيات . التوتر $u_C(t)$ يتغير حسب قانون أسي متزايد . منحناه ينطلق من المبدأ ليؤول إلى الخط المقارب الأفقي الذي معادلته : $y = U$. و بما أن $T > 10\tau$ إذن $T/2 > 5\tau$ و منه نستنتج أن عملية التشحين قد أكملت أي انتهت عند اللحظة $t = T/2$ أين : $u_C(T/2) = U = 6$ V



b ـ من أجل $T/2 < t < T$ لدينا : $u = 0$. نلاحظ عملية تفريغ المكثفة عبر المقاومة R . التوتر $u_C(t)$ يتغير حسب قانون أسي متناقص . منحناه ينطلق من النقطة التي ترتيبها $(T/2 ; U)$ ليؤول إلى محور الفواصل .
لنفس الأسباب 2ـ a ـ ، من اللحظة $t = T/2$ إلى اللحظة $t = T$ المكثفة تتفرغ كليا أي $u_C(T) = 0$ V .
3ـ نحسب : $10\tau = 10 RC = 0,5 . 10^{-3}$ s و بعد ذلك نحسب :
$T = 1/N = 10^{-3}$ s فنجد : $T = 10\tau$. و منه نحصل على المنحنى المطلوب .

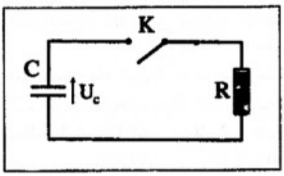
التمرين ـ 18

مكثفة ابتدائيا مشحونة تحت توتر 10 V ، تفرغ في مقاومة قيمتها R = 47 kΩ . خلال مدة زمنية t = 5,0 s ، التوتر بين طرفي المكثفة يصبح قيمته U = 1,0 V . ما هي قيمة سعة المكثفة ؟

الحل ـ 18

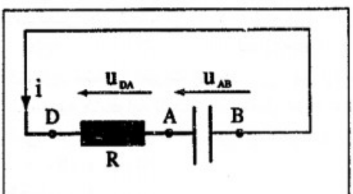
قانون التطور الزمني للتوتر بين طرفي المكثفة يعطى بالعلاقة التالية : $U(t) = U_0\exp(-t/\tau)$ ، أين $U_0 = 10$ V و τ هو ثابت الزمن للدارة $\tau = RC$. نريد معرفة قيمة C و نعرف قيمة R . إذن يجب تحديد τ أولا . من أجل ذلك نكتب :
$U(t = 5) = 1,0 = U_0\exp(-5/\tau)$ إذن $\ln 1,0 = 0 = \ln 10 - 5/\tau$ أي : $\tau = 5/\ln 10 = 2,17$ s
و من جهة أخرى نعرف أن : $\tau = RC$ إذن : $C = \tau/R = 2,17/(47 . 10^3) = 4,6 . 10^{-5} = 46\ \mu F$

التمرين ـ 19



المكثفة الممثلة في الشكل المقابل سعتها C ، ابتدائيا مشحونة تحت توتر E = 5 V .
عند اللحظة t = 0 ، نغلق القاطعة K .
1ـ اكتب المعادلة التفاضلية الي يحقق التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة مع إظهار ثابت الزمن τ للجملة و كذا تحديد وحدتها .
2ـ اكتب حل المعادلة التفاضلية السابقة مع الأخذ بعين الإعتبار الشرط الإبتدائي المعطى في البداية . 3ـ نأخذ C = 100 µF و R = 1 kΩ .
a ـ احسب τ ، $i(t = 0)$ و كذا الطاقة المختزنة E_C في المكثفة عند t = 0 .
b ـ احسب معامل توجيه المماس عند t = 0 للمنحنى $u_C(t)$. مع حساب المقدار الأخير بإجراء حسابات بسيطة .

الحل ـ 19



1ـ كتابة المعادلة التفاضلية الي يحقق التوتر $u_C(t)$: بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب : $u_C + u_R = 0$ نضع : $\tau = RC$.
و حيث أن : $u_R = R i$ و لدينا $i = dq/dt = d(C . u_C)/dt = C\, du_C/dt$:
إذن : $du_C/dt + u_C/\tau = 0$
ـ وحدة τ : باستخدام طريقة تحليل الأبعاد للمعادلة التفاضلية نبين أن :
$\tau\, du_C/dt + u_C = 0$ و منه : $\tau\, du_C/dt = -u_C$
$[u_C] = [U] = [\tau\, du_C/dt] = [\tau] . [du_C/dt] = [\tau] . [U] / [T]$,
$\Rightarrow [\tau] = [T] \Rightarrow [\tau] = [RC] = [T]$.
2ـ كتابة حل المعادلة التفاضلية السابقة : المعادلة تقبل حلا من الشكل : $u_C = A . \exp(-\alpha t)$:
ـ تحديد قيم كل من A و α . إذا كان $u_C = A . \exp(-\alpha t)$ هو حل للمعادلة التفاضلية فإن u_C يحقق المعادلة .
نعوض عن u_C و du_C/dt في المعادلة حيث : $u_C = A . \exp(-\alpha t)$ و $du_C/dt = -\alpha A . \exp(-\alpha t)$.
$\tau(-\alpha A . \exp(-\alpha t) + A . \exp(-\alpha t) = 0$ و منه : $-\alpha A\tau\exp(-\alpha t) + A\exp(-\alpha t) = 0$

هذه المعادلة محققة إذا كان $A - \alpha A\tau = 0$ أي من أجل $A = \alpha A\tau$ و منه : $\alpha = 1/\tau$ إذن : $1/\alpha$ هو ثابت الزمن τ
الشروط الإبتدائية تسمح بتحديد قيمة A . فعلا عند اللحظة : $t = 0$ نجد $u_C = E$ (مكثفة ابتدائيا مشحونة تحت توتر E)
إذن : $u_C(t) = A\exp(-t/\tau) = E$. عند $t = 0$ نجد : $A\exp(0) = 1$ إذن : $u_C(t=0) = A = E$
إذن يكون لدينا : $A = E$. و منه حل المعادلة التفاضلية هو : $u_C = E\ \exp(-t/\tau)$.
3ـ a ـ حساب τ : $\tau = RC = 1 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 5\ s$
3ـ a ـ حساب $i(t=0)$: $i(t=0) = u_C(t=0)/R = E/R = 5/10^{-3} = 5\ mA$.
3ـ a ـ حساب الطاقة المختزنة E_C : $1/2\ C\,E^2 = 1/2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 5^2 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ J = 1{,}25\ mJ$
3ـ b ـ حساب معامل توجيه المماس عند $t = 0$ للمنحنى $u_C(t)$: المماس للمنحنى عند مبدأ الأزمنة معامل توجيهه du/dt .
إذن معادلته : $(du_C/dt)_{t=0} = [- E/\tau\ \exp(-t/\tau)]_{t=0} = - E/\tau = - 5/0{,}1 = - 50\ V/s$.

التمرين ــ20

نقوم بتشحين مكثفة سعتها $C = 50\ \mu F$ تحت توتر $U = 35\ V$. نقوم بنزعها من دارة التشحين و نضعها في دارة أخرى حيث نوصل لبوسيها إلى لبوسي مكثفة أخرى سعتها $C' = 3\ C$ ابتدائيا فارغة و معزولة . عندها تأخذ المكثفتين على ترتيب الشحنتين q و 'q تحت توتر مشترك 'U .

1ـ احسب q و 'q وكذا التوتر 'U .

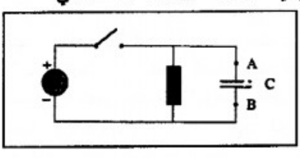
2ـ ما هي الطاقة الإبتدائية للجملة المؤلفة من المكثفتين قبل التوصيل بين لبوسيها ؟ بعد التوصيل بين لبوسيها ؟
علق على النتيجة ثم اشرح لماذا يجب أن نتوقع حصول نقصان في طاقة الجملة عند التوصيل بين لبوسيها .

الحــل ــ 20

a. حساب q و 'q : الشحنة الإبتدائية $Q = C \cdot U$ تتوزع على المكثفتين حسب سعتيهما :
$Q = q + q' = C \cdot U' + 3\,C \cdot U' = 4\,C \cdot U' = C \cdot U$ $U' = U/4 = 35/4 = 8{,}75\ V$.
و منه : $q = C \cdot U' = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}75 = 4{,}4 \cdot 10^{-4}\ C$ و $q' = 3\,C \cdot U' = 3 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}75 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ C$.
2ـ حساب الطاقة الإبتدائية للجملة المؤلفة من المكثفتين قبل التوصيل بين لبوسيها : هي طاقة المكثفة الأولى هي :
$E_{(c)} = 1/2\ Q \cdot U^2 = 3{,}1 \cdot 10^{-2}\ J$.
ـ حساب الطاقة للجملة المؤلفة من المكثفتين بعد التوصيل بين لبوسيها :
هي طاقة المكثفة الأولى هي : $E_{(f)} = 1/2\ C \cdot U'^2 + 1/2 \cdot 3\,C \cdot U'^2 = E_{(i)}/4 = 7{,}7 \cdot 10^{-3}\ J$.
التعليق : نلاحظ أن الطاقة النهائية قد نقصت بمقدار : $\Delta E = E_{(f)} - E_{(i)} = 1/2\ C \cdot E \cdot (-C')/(C + C')$. عملية التوزيع الطاقوي بين المكثفتين يؤدي ضياع جزء منها يظهر على شكل حرارة في أسلاك التوصيل . كما نلاحظ أن هذا النقص في الطاقة لا يتعلق بمقاومة الدارة .

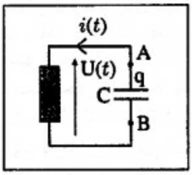
التمرين ــ21

نعتبر الدارة المبينة في الشكل المقابل . المولد مصدر مثالي لتوتر قوته المحركة الكهربائية $E = 10\ V$ سعة المكثفة هي $C = 10\ \mu F$. نفرض في البداية أن القاطعة كانت مغلقة لزمن طويل .



1ـ ما هي إذن قيمة التوتر U_{AB} ؟
2ـ ما هي قيمة الشحنة q_0 للمكثفة ؟
3ـ عند اللحظة $t = 0$ نفتح القاطعة . ماذا يحدث عندئذ ؟
4ـ اكتب المعادلة التفاضلية التي تنظم التطور الزمني للشحنة q للمكثفة
5ـ بين أن هذه المعادلة التفاضلية تقبل حل من الشكل $q(t) = A \cdot \exp(-\alpha t)$.
عبر عن ثوابت التكامل A و α بدلالة R ، C و q_0 .
6ـ اعط العبارة الحرفية للتوتر U_{AB} من أجل كل $t > 0$.
7ـ ما هي قيمة المقاومة الواجب أخذها من أجل أن يأخذ التوتر U_{AB} القيمة 3 V خلال 15 s ؟

الحــل ــ 21



1ـ قيمة التوتر U_{AB} : النقطة A موصولة للقطب الموجب للمولد و النقطة B موصولة للقطب السالب له و منه : $U_{AB} = E$
2ـ قيمة الشحنة q_0 للمكثفة : $q_0 = C \cdot U_{AB} = C \cdot E = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 100\ \mu C$.
3ـ عند اللحظة $t = 0$ نفتح القاطعة : الدارة تصبح كما يلي : انظر الشكل . نلاحظ تفريغ المكثفة .
4ـ كتابة المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $q_{(t)}$ خلال التفريغ :
لدينا : $0 = U_{AB} + R\,i$ و بما أن : $i = dq/dt$ و $U_{AB} = q/C$
نحصل على المعادلة التي تحققها $q(t)$: $R\ dq/dt + q/C = 0$
5ـ هذه المعادلة التفاضلية تقبل حل من الشكل $q(t) = A \cdot \exp(-\alpha t)$: بالتعويض عن $q(t)$ و dq/dt في المعادلة التفاضلية

نحصل على : $- R A\alpha \exp(-\alpha t) + A/C \exp(-\alpha t) = 0 \Rightarrow A \exp(-\alpha t)\ [1/C - R\alpha] = 0$.

بالتعويض عن $\tau = RC$ نجد $[1/C - R\alpha] = 0 \Rightarrow \alpha = 1/RC$. نحدد A من الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ لدينا : $q(t = 0) = q_0$. و منه : $q(t = 0) = A . \exp(0) = q_0 \Rightarrow A = q_0$.

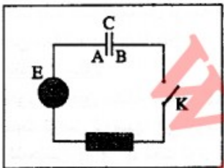
إذن بالفعل $q_{(t)} = q_0 \exp(-t/ RC)$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

6ــ العبارة الحرفية للتوتر U_{AB} : لدينا : $U_{AB}(t) = q(t)/C = q_0/C \exp(-t/ RC) = E \exp(-t/ RC)$.

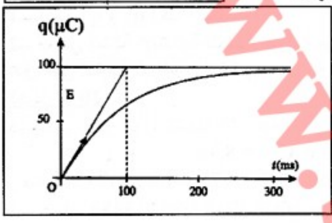
7ــ قيمة المقاومة الواجب أخذها من أجل أن يأخذ التوتر U_{AB} القيمة 3 V خلال 15 s : نعوض في عبارة التوتر :

$$3 = 10 \exp(-15/ RC) \Rightarrow R = 1{,}25 . 10^6\ \Omega$$

التمرين ــ22



نعتبر الدارة المبينة في الشكل المقابل . المكثفة ابتدائيا فارغة ، سعتها $C = 10\ \mu F$. مولد توتر مستمر مقاومته الداخلية مهملة . عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة . الشحنة التي يحملها اللبوس A للمكثفة ممثلة على الشكل المرفق . كما يوضح الشكل مماس المنحنى $q_{A(t)}$ عند اللحظة $t = 0$.



1ــ ما هي القيمة الحدية للتشحين ؟ استنتج القيمة القوة المحركة الكهربائية E للمولد .

2ــ اعط عبارة $q_{A(t)}$ بدلالة K ، C و E مع إظهار ثابت الزمن τ للدارة .

3ــ ما هي إحداثيات نقطة تقاطع المماس عند المبدأ للمنحنى $q_{A(t)}$ و خطه المقارب الأفقي ؟ استنتج قيمة τ للدارة المدروسة .

4ــ ما هي قيمة المقاومة R ؟

الحــل ــ 22

1ــ القيمة الحدية للتشحين : $q_L = 100\ C$.

ــ استنتاج القيمة القوة المحركة الكهربائية E للمولد :

$$E = \lim_{t \to \infty} U_{AB}(t) = q_L/C = 10^{-4}/10^{-5} = 10\ V .$$

2ــ عبارة $q_{A(t)}$ بدلالة R ، C و E مع إظهار ثابت الزمن τ للدارة .

بتطبيق قانون جمع التوترات : $E = U_{AB}(t) + R\, i$ و بما أن : $i = dq/dt = d(C . u)/dt = C\, dU_{AB}(t)/dt$

نحصل على المعادلة التي تحققها $U_{AB}(t)$: $E = R C\, dU_{AB}(t)/dt + U_{AB}(t)$. لدينا : $q(t) = C\, U_{AB}(t)$. و منه : $E = R\, dq(t)/dt + q(t)/C$ و منه : $E/R = dq(t)/dt + q(t)/\tau$. حيث : $\tau = RC$.

تحقيق أن $U_{AB}(t) = E [1 - \exp(-t/RC)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية : نحسب : $d\, U_{AB}(t)/dt = E/\tau \exp(-t/RC)$ و بالتعويض عن $U_{AB}(t)$ و $d\, U_{AB}(t)/dt$ في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$\tau\, E/\tau \exp(-t/\tau) + E[1 - \exp(-t/\tau)] = E$. بالفعل $U_{AB}(t) = E [1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

لدينا : $q(t) = C\, U_{AB}(t)$. و منه : $q(t) = C\, E [1 - \exp(-t/\tau)] = q_L [1 - \exp(-t/\tau)]$

3ــ احداثيات نقطة تقاطع المماس عند المبدأ للمنحنى $q_{A(t)}$ و خطه المقارب الأفقي :

المماس للمنحنى عند مبدأ الأزمنة معامل توجيهه dq/dt .

لدينا $q(t) = q_L [1 - \exp(-t/\tau)]$ إذن : معادلة المماس للبيان من الشكل : $q(t) = a\, t + b$

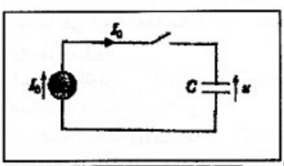
حيث : $a = dq/dt = q_L/\tau . e^{-t/\tau}$. عند $t = 0$ يكون $b = 0$ و $a = q_L/\tau$ و منه : $q(t) = q_L/\tau . t$.

عند التقاطع مع الخط المقارب الأفقي يكون : $q(t) = q_L$ ، أي : $q_L = q_L/\tau . t$ و منه : $t = \tau$

ــ استنتاج قيمة τ للدارة المدروسة : من البيان نجد : $t = \tau = 100\ ms$.

4ــ قيمة المقاومة R : $R = \tau/C = 0{,}1/10^{-5} = 10^4\ \Omega = 10\ k\Omega$.

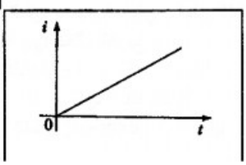
التمرين ــ23



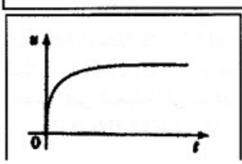
نحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل و المكونة من مولد تيار كهربائي ، قاطعة و مكثفة . المكثفة إبتدائيا فارغة .

عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة . اجب بصحيح أم خاطئ على الإقتراحات التالية :

aــ المنحنى $i = f(t)$ يكون كالتالي :



bــ شكل المنحنى $u = f(t)$ يعطى بالمنحنى التالي :



cــ التوتر بين طرفي المكثفة يتناسب طردا مع الزمن .

dــ السعة C للمكثفة تزداد .

eــ الشحنة q ، التي يحملها كل لبوس ، تتناسب طردا مع I_0 .

الحــل ـــ 23

a‒ خاطئ : لأن مولد التيار ليس كما مولد التوتر إذ يعطي تيار شدته دائما ثابتة و هذا عكس ما نلاحظه في المنحنى المعطى .

b‒ خاطئ : لأن المنحنى $u = f(t)$ يحقق العبارة التالية : $u = q/C = (I_0 . t)/C = I_0/C . t$

و هذه العبارة من الشكل $u = K . t$ حيث منحناها يكون خط مستقيم يمر من المبدأ و هذا عكس ما نلاحظه في المنحنى المعطى

c‒ صحيح : لأن $u = f(t)$ يحقق العبارة التالية : $u = q/C = (I_0 . t)/C = I_0/C . t$

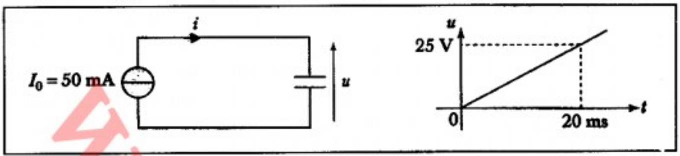
و هذه العبارة من الشكل $u = a . x$ حيث نلاحظ أن التوتر بين طرفي المكثفة يتناسب طردا مع الزمن .

d‒ خاطئ : لأن السعة C مقدار ثابت يميز المكثفة و لا يتغير مع الزمن . فقط الشحنة و التوتر هما الذان يتغيران مع الزمن .

e‒ صحيح : لأن الشحنة q ، التي يحملها كل لبوس ، تحقق العبارة التالية : $q = I_0 . t$ و منه : q تتناسب طردا مع I_0 .

التمرين ـــ24

تحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل ثم نرسم المنحنى الممثل لتغيرات التوتر u بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن .



حدد الإقتراحات الصحيحة والخاطئة مما يلي :

a‒ المولد يعطي تيار ثابت . b‒ التوتر بين طرفي المكثفة يتناسب طردا مع الزمن .

c‒ الشدة I_0 و الشحنة q التي يحملها اللبوس تربطهما العلاقة التالية : $q = I_0 . \Delta t$.

d‒ عند اللحظة $t = 20$ ms ، المكثفة تحمل شحنة $q = 1,0$ mC . e‒ سعة المكثفة هي $C = 40$ mF .

الحــل ـــ 24

a‒ صحيح : لأن المولد المستعمل في التجربة هو مولد تيار ثابت إذن التيار الذي يعطيه هو تيار شدته دائما ثابتة .

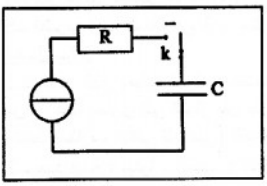
b‒ صحيح : التحليل البياني يسمح بالتأكد من أن التوتر بين طرفي المكثفة يتناسب طردا مع الزمن لأن المنحنى $u = f(t)$ يحقق العبارة التالية : $u = a . x$ و منه : التوتر بين طرفي المكثفة يتناسب طردا مع الزمن .

c‒ صحيح : العبارة $i = dq/dt$ صالحة في حالة شدة التيار ثابتة . الشدة I_0 و الشحنة q التي يحملها اللبوس تربطهما العلاقة التالية : $q = I_0 . \Delta t$

d‒ صحيح : عند اللحظة $t = 20$ ms ، نجد : $q = I_0 . \Delta t = 50 . 10^{-3} . 20 . 10^{-3} = 1,0$ mC

e‒ خاطئ : من التعريف $u = q/C$ نحسب سعة المكثفة : $C = q/u = (1,0 . 10^{-3})/25 = 40$ mF

التمرين ـــ25



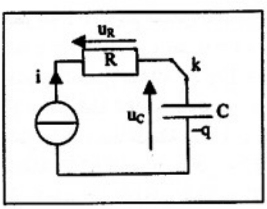
نشحن مكثفة بواسطة مولد تيار كهربائي . عند اللحظة $t = 0$ نضع القاطعة في الوضعية 1 . 1‒ أعد رسم المخطط المقابل مبرزا فيه :

a‒ جهة التيار . b‒ اللبوس الذي يحمل الشحنة الموجبة .

c‒ التوتر u_C بين طرفي المكثفة . d‒ التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي .

2‒ ما هي العلاقة التي تربط شدة التيار بالشحنة ؟

الحــل ـــ 25



a‒ جهة التيار : التيار يخرج من اللبوس الذي يحمل الشحنة السالبة .

b‒ اللبوس الذي يحمل الشحنة الموجبة . انظر الشكل .

c‒ تمثيل التوتر u_C بين طرفي المكثفة . انظر الشكل .

d‒ تمثيل التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي . انظر الشكل .

2‒ العلاقة التي تربط شدة التيار بالشحنة : $i = dq/dt$

التمرين ـــ26

نشحن مكثفة بواسطة مولد التيار شدته 0,01 mA ثابتة .

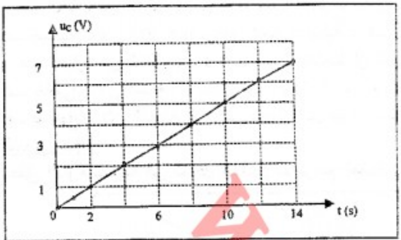
عند اللحظة $t = 0$ ، المكثفة فارغة ، نغلق القاطعة K .

نسجل بدلالة الزمن التوتر u_C بين طرفي المكثفة انطلاقا من هذه اللحظة نحصل على النتائج التالية :

t (s)	0	1	2	4	6	8	10	12	14
u_C (V)	0	0,5	1	2,1	2,9	3,95	5	6,1	7

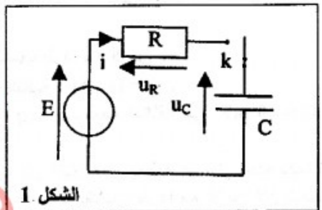
1ـ ما هو الجهاز المستعمل لقياس u_C ؟ كيف نربطه ؟ 2ـ ارسم المنحنى $u_C = f(t)$.
3ـ استنتج قيمة السعة C . 4ـ عند اللحظة $t = 10\ s$ ، ما هي قيم الشحنة التي يحملها كل لبوس ؟
5ـ ما هي الطاقة المختزنة عند اللحظة $t = 12\ s$.

الحل ـ 26

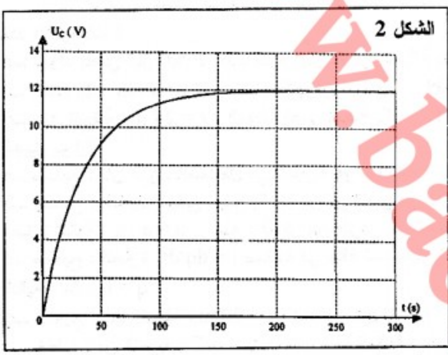


1ـ الجهاز المستعمل لقياس u_C : هو الفولط متر و يربط على التفرع بين طرفي المكثفة .
2ـ رسم المنحنى $u_C = f(t)$: انظر الشكل .
3ـ استنتاج قيمة السعة C : المكثفة شحنت بتيار ثابت ، يمكن أن نكتب :
$Q = I\,t$ و $Q = C\,U$ و منه : $U = I/C\,.\,t$
و هي معادلة خط مستقيم مائل يمر من المبدأ من الشكل : $y = a\,x$.
معامل توجيه هذا المستقيم a يساوي إلى $a = \tan\alpha = 0{,}5\ V/s$.
و منه $C = I/a = (0{,}01\ .\ 10^{-3})/0{,}5 = 2\ .\ 10^{-5}\ F$.
4ـ قيمة الشحنة التي يحملها كل لبوس عند اللحظة $t = 10\ s$: $Q = C\,U = 20\ .\ 10^{-6}\ .\ 5 = 1\ .\ 10^{-4}\ C$. اللبوس الموجب (يدخل منه التيار) يحمل الشحنة $q = 1\ .\ 10^{-4}\ C$. اللبوس السالب (يخرج منه التيار) يحمل الشحنة $q = -1\ .\ 10^{-4}\ C$.
5ـ الطاقة المختزنة عند اللحظة $t = 12\ s$: $E = 1/2\ C\,U^2 = 1/2\ .\ 20\ .\ 10^{-6}\ .\ 6^2 = 3{,}6\ .\ 10^{-4}\ J$.

التمرين ـ 27



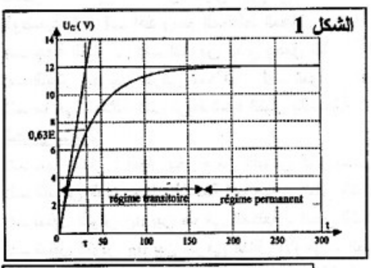
الشكل 1



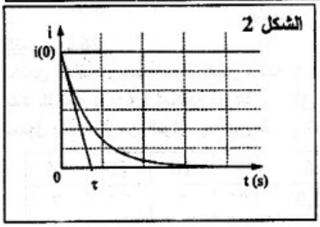
الشكل 2

نعتبر الدارة الكهربائية الموضحة في الشكل 1 . نربط طرفي المكثفة بجهاز معلوماتي يسمح بإعطاء منحنى الشكل 2 (عند $t = 0$ ، $u_C = 0$) .
1ـ ما هو التوتر الذي يعطيه المولد ؟
2ـ حدد قيمة τ بيانيا .
3ـ حدد على المنحنى النظامين الإنتقالي و الدائم .
4ـ مثل مظهر منحنى الدالة $i = f(t)$ ، محددا قيمة الشدة عند $t = 0^+$.
5ـ نضرب قيمة السعة في 3 ، مثل المظهر الجديد للمنحنى السابق .

الحل ـ 27



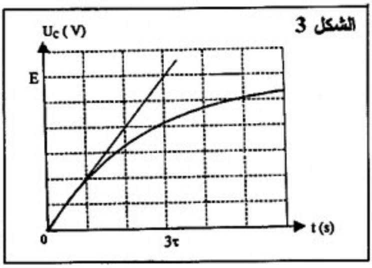
الشكل 1



الشكل 2

1ـ التوتر الذي يعطيه المولد : عندما تكون المكثفة مشحونة تماما فإن التوتر بين طرفيها يساوي إلى التوتر بين طرفي المولد . نقرأ على المنحنى (الخط المقارب الأفقي للمنحنى) القيمة : $E = 12\ V$.
2ـ حدد قيمة τ بيانيا : لتحديد τ هناك طريقتين و هما :
الطريقة 1 : نرسم المماس للمنحنى عند المبدأ . يقطع الخط المقارب عند $t = \tau$. بالفعل ، عند $t = 0$ ، $(du_C/dt) = E/\tau$
المماس للمنحنى معادلته $u = E/\tau\ .\ t$ يقطع الخط المقارب عند النقطة $u = E$ ، نقطة التقاطع هذه توافق $t = \tau = 33\ s$.
الطريقة 2 : عند اللحظة $t = \tau$ ، $u_C = 0{,}63\ E$ على المنحنى نقرأ فاصلة النقطة $u_C = 0{,}63\ E$ توافق $t = \tau = 33\ s$.
3ـ تحديد على المنحنى النظامين الإنتقالي و الدائم : النظام الإنتقالي يوافق المدة الزمنية للتشحين $5\tau = 165\ s$ بعدها يبدأ النظام الدائم الذي عنده تنعدم شدة التيار في الدارة . انظر الشكل 1 .
4ـ تمثيل مظهر منحنى الدالة $i = f(t)$ ، محددا قيمة الشدة عند $t = 0^+$:
لدينا : $i(t) = E/R\ \exp(-t/\tau)$. عند $t = 0^+$ ، $i(0) = E/R$.
و منه مظهرمنحنى الدالة $i = f(t)$ يكون دالة أسية متناقصة . انظر الشكل 2 .

5ــ تمثيل المظهر الجديد للمنحنى السابق : إذا ضربنا قيمة السعة في 3 ، فإن ثابت الزمن كذلك يضرب في 3 و منه :
المظهر الجديد للمنحنى . انظر الشكل 3 .



التمرين ــ28

نحقق الدارة الكهربائية الموضحة في الشكل المقابل . نضع القاطعة في الوضعية 1 لمدة 30 s .

1ــ هل يمكننا إعتبار المكثفة مشحونة تماما ؟

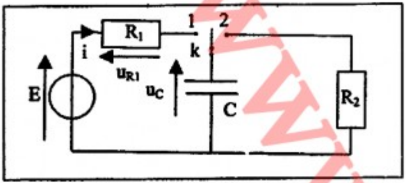
تعطى : $R_1 = 100\ k\Omega$, $C = 40\ \mu f$, $E = 12\ V$.

عند اللحظة $t = 30\ s$ ، نضع القاطعة في الوضعية 2 .

2ــ اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C .

اعط حل لهذه المعادلة . 3ــ مثل مظهر المنحنى $u_C = f(t)$.

4ــ مثل مظهر المنحنى $i = f(t)$. 5ــ علما أن ثابت الزمن يساوي 0,88 s . استنتج قيمة R_2 .



الحــل ــ 28

1ــ نعم ، يمكننا إعتبار المكثفة مشحونة تماما : المكثفة مشحونة تماما عند : $t = 5\tau = 5 R_1 C = 20\ s$. بما أن $t < 30\ s$

إذن المكثفة مشحونة تماما .

2ــ كتابة المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C و إيجاد حل لهذه المعادلة :

حسب قانون جمع التوترات : $u_{R2} + u_C = 0$

أي : $R_2\, i + u_C = 0$. و حيث أن : $i = C\, du_C/dt$

(المكثفة اصطلاحا آخذة) و منه : $1/RC\ u_C + du_C/dt = 0$.

حل المعادلة : $u_C(t) = E \exp(-t/\tau)$.

3ــ تمثيل مظهر المنحنى $u_C = f(\ )$: انظر الشكل 2 .

4ــ تمثيل مظهر المنحنى $i = f(t)$: قبل تمثيله يجب تحديد معادلته أولا :

لدينا $i = dq/dt = C\, du_C/dt$ و حيث أن : $u_C(t) = E \exp(-t/\tau)$

إذن : $i = C . (-1/RC)\, E \exp(-t/\tau) = -E/R \exp(-t/\tau)$.

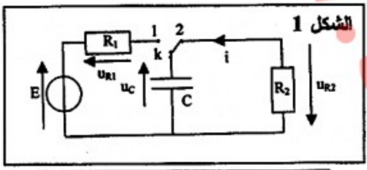
عبارة التيار من الشكل : $i = -I_0\, E \exp(-t/\tau)$ و منه : $I_0 = E/R$.

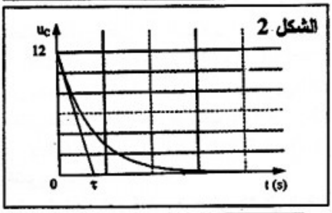
شدة التيار سالبة و هذا ما يدل الإتجاه المعاكس الموضح على الشكل 3 .

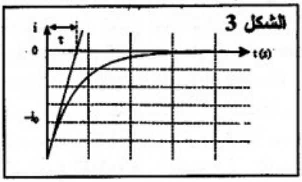
شدة التيار هي مقدار جبري أي يمكن أن تكون موجبة أو سالبة .

5ــ استنتاج قيمة R_2 :

$\tau = R_2 C \Rightarrow R_2 = \tau/C = 0,88/(40 . 10^{-6}) = 22 . 10^3\ \Omega$ s .







التمرين ــ29

نعتبر تركيب الدارة الموضح في الشكل المقابل . عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K ، المكثفة فارغة تماما .($E = 9\ V$)

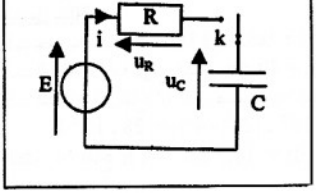
بواسطة جهاز معلوماتي ، نسجل تطور التوتر u_C بدلالة الزمن .

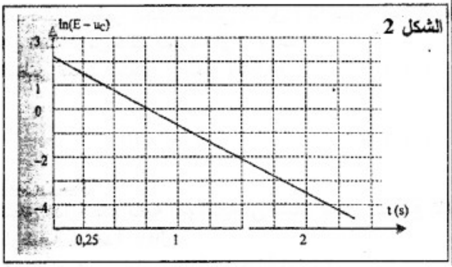
1ــ اكتب عبارة المعادلة التفاضلية .

2ــ استنتج العلاقة بين du_C/dt و R ، C ، E و u_C .

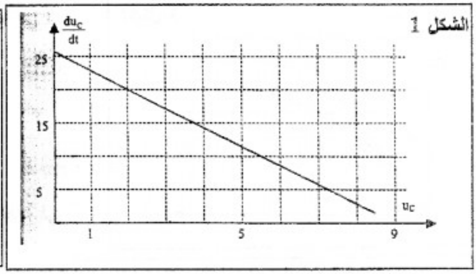
3ــ اكتب العلاقة بين $\ln(E - u_C)$ و $\ln E$ ، t ، R و C .

4ــ بواسطة برمجية ، نرسم المنحنيات $du_C/dt = f(u_C)$ (انظر الشكل 1) و $\ln(E - u_C) = f(t)$ (أنظر الشكل 2) انطلاقا من هذه المنحنيات حدد ثابت الزمن للدارة .





الشكل 2



الشكل 1

الحـل ــ 29

1ــ كتابة عبارة المعادلة التفاضلية : المعادلة التفاضلية التي تعطي تغيرات التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة :

لدينا : $E = u_C + u_R$. و حيث أن : $u_R = R\,i$ و $u_R = R\,dq/dt \Rightarrow i = dq/dt$

و كذلك لدينا : $q = C\,u_C \Rightarrow u_R = R\,C\,du_C/dt$ إذن : $u_C + RC\,du_C/dt = E \quad (1)$

2ــ استنتاج العلاقة بين du_C/dt و R ، C ، E و u_C : من المعادلة السابقة نجد :

$$u_C + RC\,du_C/dt = E \Rightarrow E/RC = RC\,du_C/dt + u_C \Rightarrow du_C/dt = u_C/(RC) - E/RC \quad (2)$$

3ــ كتابة العلاقة بين $\ln(E - u_C)$ و $\ln E$ ، t ، R و C : للحصول على هذه العلاقة ننطلق من عبارة حل المعادلة التفاضلية و هي : $u_C = E\,[(1 - \exp(-t/RC)]$. نطرح هذه المعادلة من E ثم نكتبها على الشكل :

$$E - u_C = E - E\,[(1 - \exp(-t/RC)] \Rightarrow E - u_C = E - E + E\exp(-t/RC)]$$

$$E - u_C = E\exp(-t/RC)] \Rightarrow \ln(E - u_C) = \ln E\exp(-t/RC)] = \ln E + \ln\exp(-t/RC)] \text{ .}$$

و منه : $\ln(E - u_C) = \ln E - t/RC \quad (3)$.

4ــ تحديد ثابت الزمن للدارة : من منحنى الشكل 1 نجد : معامل توجيه المنحنى : $-1/RC = -1/\tau$ (حسب المعادلة (2)).

نختار نقطتين على هذا المستقيم : $A(2\,;\,20)$, $B(7{,}25\,;\,5)$

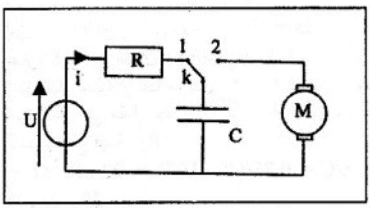
و $\Delta[du_C/dt] / \Delta uC = (20 - 5)/(2 - 7{,}25) = -2{,}86\ 1/s$ = المعامل و منه : $\tau = 1/2{,}86 = 0{,}35\ s$.

من منحنى الشكل 2 نجد : معامل توجيه المنحنى : $-1/RC = -1/\tau$ (حسب المعادلة (3)).

نختار نقطتين على هذا المستقيم : $A(0{,}42\,;\,1)$, $B(2\,;\,-3{,}5)$

و $\Delta[\ln(E - u_C)] / \Delta t = [1 - (-3{,}5)]/(0{,}42 - 2) = -2{,}86\ 1/s$ = المعامل و منه : $\tau = 1/2{,}86 = 0{,}35\ s$.

التمرين ــ30



نعتبر تركيب الدارة الموضح في الشكل المقابل . نضع القاطعة K في الوضعية 1 و ننتظر المدة اللآزمة لإتمام الشحن . المحرك M يسمح برفع كتلة $m = 25\ g$ على إرتفاع $h = 40\ cm$.

تعطى : $C = 100\ \mu F$, $R = 1\ k\Omega$, $U = 24\ V$, $g = 10\ m/s^2$

1ــ احسب الطاقة المختزنة في المكثفة .

2ــ ما هي الطاقة الآزمة لرفع الكتلة مسافة $h = 40\ cm$ ؟

3ــ نضع القاطعة في الوضعية 2 . المحرك يتوقف عندما يأخذ التوتر بين طرفي المكثفة القيمة $u_C = 4\ V$. استنتج الإرتفاع 'h الذي صعدت به الكتلة .

الحـل ــ30

1ــ حساب الطاقة المختزنة في المكثفة : $E = 1/2\,C\,U^2 = 1/2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 24^2 = 29 \cdot 10^{-3}\ J$.

2ــ الطاقة الآزمة لرفع الكتلة $h = 40\ cm$: توافق الطاقة الكامنة الثقلية : $E_{pp} = m\,g\,h = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0{,}4 = 0{,}1\ J$

3ــ استنتاج الإرتفاع 'h الذي صعدت به الكتلة : الطاقة التي قدمتها المكثفة :

$E' = 1/2\,C\,(Ui^2 - U_f^2) = 1/2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot (24^2 - 4^2) = 28 \cdot 10^{-3}\ J$. و تساوي الطاقة الكامنة الآزمة لرفع الكتلة الإرتفاع 'h : $E' = m\,g\,h' \Rightarrow h' = E'/mg = 0{,}028/(25 \cdot 10^{-3} \cdot 10) = 11{,}2\ cm$

تمـــارين نماذج للبكالوريا
وضعية ادماجية
BAC

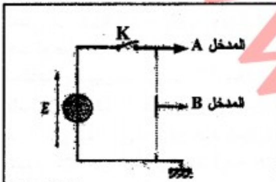
التمرين ــ1

مولد مثالي ذو توتر ثابت E يغذي مكثفة سعتها C ، موصولة على التسلسل مع ناقل أومي مقاومته R . المكثفة في البداية فارغة . نريد مشاهدة ، بواسطة راسم إهتزاز مهبطي رقمي ، التوتر بين طرفي المولد على المدخل A و التوتر بين طرفي المكثفة على المدخل B و هذا بعد غلق القاطعة .

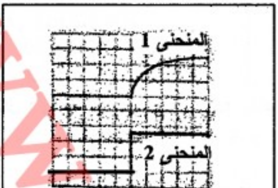
1ــ اكمل مخطط التركيب الموضح على الشكل 1 و هذا بتمثيل رموز ثنائيي الأقطاب (المكثفة و الناقل الأومي) و كذا أسهم التوترات المشاهدة على كل مدخل .

شاشة راسم الإهتزاز المهبطي ممثلة على الشكل 2 . ضبطت الحساسيات على راسم الإهتزاز كالتالي :

الحساسية العمودية : 2V / div قاعدة الزمن 0,5 ms / dv .



الشكل 1



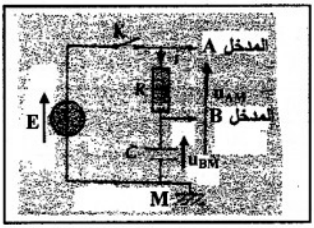
الشكل 2

2ــ ما هو المدخل الموافق لكل منحنى ؟
برر إجابتك .

3ــ بالإستعانة بالشكل المرفق حدد قيمة التوتر E الذي يعطيها المولد .

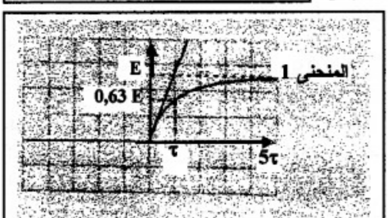
4ــ حدد على المنحنى الموافق للشكل 2 قيمة τ .

الحـل ــ1



1ــ التوتر بين طرفي المكثفة مدروس على المدخل B ، المكثفة إذن موضوعة بين المدخل B و القطب السالب للجهاز . المقاومة إذن بين المدخل A و المدخل B .
التوتر المشاهد على أي مدخل هو التوتر بين طرفي النقطة الموصولة إلى هذا المدخلو القطب السالب M . نشاهد إذن على المدخل A ، u_{AM} و على المدخل B هو u_{BM} .

2ــ عندما تكون الدارة مفتوحة ، $u_{AM} = 0$ و عندما تكون مغلوقة ، $u_{AM} = E$
إذن المنحنى 2 يوافق المدخل A أي التوتر بين طرفي الدارة RC . عند غلق الدارة ، المكثفة تشحن تدريجيا إلى أن تصل إلى قيمة عظمى ، إذن المنحنى 1 يوافق المدخل B للجهاز أي التوتر بين طرفي المكثفة u_{BM} .



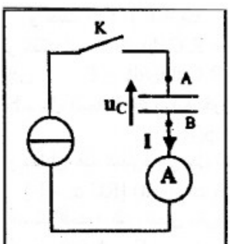
3ــ المنحنى 2 يوافق لــ E و يقيس 2,5 تدريجة . بما أن الحساسية الشاقولية هي 2 v / div يكون لدينا : $E = 2,5 . 2 = 5$ v

4ــ هناك ثلاث طرق ممكنة لتحديد τ و هما :

الطريقة 1 : عند اللحظة $t = τ$ ، $u_C = 0,63 E = 3,2$ V و هذا ما يوافق 1,6 تدريجة هذه القيمة يصل إليها المنحنى 1 خلال زمن ممثل بـــ 1 تدريجة أفقية أي ما يوافق 0,5 ms .

الطريقة 2 : نرسم المماس للمنحنى عند المبدأ . يقطع الخط المقارب عند $t = τ$. نقطة التقاطع هذه توافق 1 تدريجة أفقيا إذن عند $τ = 0,5$ ms .

الطريقة 3 : النظام الدائم يوصل إليه خلال 5 τ ، ما يوافق على الشكل وعلى المدخل B 5 تدريجة أفقية و لكن τ يوافق مدة 1 تدريجة أي 0,5 ms .



التمرين ــ2

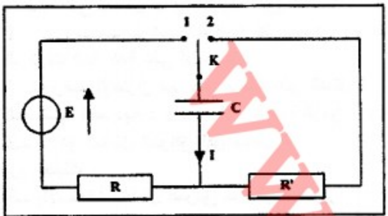
الجزء 1 :

تحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل و المتكونة من مولد للتيار ، مكثفة ، أمبيرمتر و قاطعة . المكثفة في البداية فارغة . عند اللحظة $t = 0$ s ، نغلق القاطعة K فيشير عندئذ

الأمبيرمتر إلى قيمة ثابتة لشدة التيار $I = 12\ \mu A$. كمبيوتر (غير ممثل على الشكل) يسجل عند مجالات زمنية منتظمة التوتر u_{AB} بين طرفي مكثفة بحيث نلخص هذه النتائج في الجدول التالي :

t(s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
u_{AB}(V)	0,00	1,32	2,64	4,00	5,35	6,70	7,99	9,20	10,6

1ــ اكتب العلاقة التي تسمح بحساب الشحنة q للمكثفة بدلالة شدة التيار I .
احسب q عند كل لحظة . ثم احسب q عند اللحظة $t = 3,0\ s$.
2ــ مثل المنحنى الذي يعطي الشحنة q للمكثفة بدلالة u_{AB} .
3ــ حدد ، انطلاقا من المنحنى ، قيمة السعة C للمكثفة .
4ــ القيمة المعطاة من طرف صانع المكثفة هي $C = 4,7\ \mu F$ بتقريب 10% . هل النتيجة الحاصلة توافق تقريب القيمة المعطاة من طرف الصانع ؟



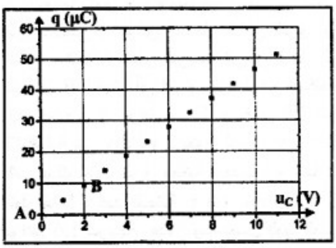
الجزء 2

ندرس الآن شحن و تفريغ المكثفة عبر ناقل أومي . من أجل ذلك نحقق التركيب المقابل . المكثفة ابتدائيا فارغة .
عند اللحظة $t = 0$ ، نضع القاطعة في الوضعية 1 .
تعطى : $R = 2,2\ k\Omega$, $C = 4,7\ \mu F$, $R' = 10\ k\Omega$
aــ توصل إلى المعادلة التفاضلية : $u_C + RC\ du_C/dt = E$ التي تحققها u_C بين طرفي المكثفة خلال مرحلة الشحن .
bــ حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $u_C = A\,[1 - \exp(-\alpha t)]$ بأخذ بعين الإعتبار الشرط الإبتدائي بالنسبة لشحن المكثفة و بالتحقق من أن هذه العبارة هي حل للمعادلة التفاضلية ، اعط A و α بدلالة E ن R و C .
cــ انطلاقا من المنحنى حدد قيمة E .
dــ باستخدام طريقة التحليل البعدي للمعادلة التفاضلية بين أن : $\tau = RC$.

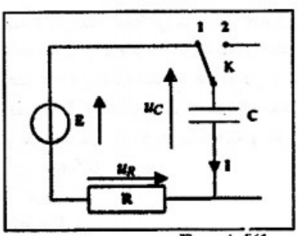
الحــل ــ2

1ــ نعلم أن $i = dq/dt$. و حيث أن i ثابت ، و منه نجد : $q = I\,t \Rightarrow I = q/t$.
ــ حساب q عند اللحظة $t = 3,0\ s$: $q = I\,t = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 3,0 = 3,6 \cdot 10^{-5}\ C$

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
q (µC)	0,00	6	12	18	24	30	36	42	48



2ــ رسم المنحنى : أنظر الشكل المقابل .
3ــ المنحنى $q = f(u_C)$ مستقيم يمر من المبدأ إذن : $q = a\,.\,u_C$ أين a هو معامل توجيه المستقيم . لتحديد a ، نأخذ نقطتين $A(0\ ;\ 0)$ و $B(4\ ;\ 19 \cdot 10^{-6})$ من المستقيم و نحسب :
$u = (q_B - q_A)/[u_{C(B)} - u_{C(A)}] = (19 \cdot 10^{-6} - 0)/(4 - 0) = 4,75 \cdot 10^{-6}\ F$
و حيث أن $q = C\,.\,u_C$ إذن : $a = C = 4,75 \cdot 10^{-6}\ F$.
4ــ نحصل إذن على $4,75 \cdot 10^{-6}\ F < C < 5,17 \cdot 10^{-6}\ F$.
القيمة الناتجة توافق تقريب القيمة المعطاة من قبل الصانع .



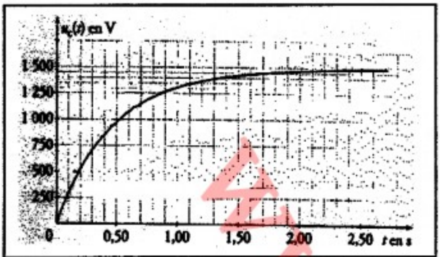
الجزء 2

aــ التوصل إلى المعادلة التفاضلية : لدينا : $E = u_C + u_R$.
و حيث أن : $u_R = R\,i$ و $i = dq/dt \Rightarrow u_R = R\,dq/dt$
و كذلك لدينا : $q = C\,u_C \Rightarrow u_R = R\,C\,du_C/dt$
إذن : $u_C + R\,C\,du_C/dt = E$
bــ حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $u_C = A\,[1 - \exp(-\alpha t)]$ إذن :
$du_C/dt = \alpha\,A\,\exp(-\alpha t)$.
و بما أن هذه العبارة هي حل للمعادلة التفاضلية فيمكن أن نكتب :
$E = A\,[(1 - \exp(-\alpha t)] + RC\,A\alpha\,\exp(-\alpha t) \Leftrightarrow E - A = A\,\exp(-\alpha t)\,[RC\,\alpha - 1]$.
أفصلنا الحدود التي تتعلق بالزمن عن الحدود المتعلقة به . هذه المعادلة صالحة لكل قيم t . إذن طرفي هذه المعادلة معدومين
أي : $E - A = 0$ و منه : $A = E$ و $RC\,\alpha - 1$ و منه : $\alpha = 1/RC$.

c ـ انطلاقا من المنحنى حدد قيمة E : $u_C = E\,[1 - \exp(-\alpha t)]$. في هذه العبارة ، عندما تؤول t إلى ∞ فإن u_C تؤول إلى E
و نلاحظ في المنحنى أن u_C تؤول إلى 5,0V و منه : E = 5,0V .
d ـ باستخدام طريقة التحليل البعدي للمعادلة التفاضلية نبين أن : $\tau = RC$:

$$E = RC\, du_C/dt + u_C$$
$$[E] = [U] = [RC\, du_C/dt] = [RC]\,.\,[du_C/dt] = [RC]\,.\,[U] / [T],$$
$$\Rightarrow [RC] = [T] \Rightarrow \mathbf{[\tau] = [RC] = [T]}\ .$$

التمرين ـ3

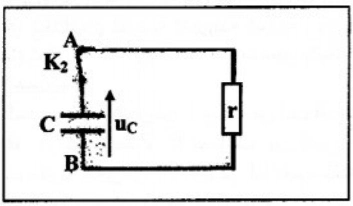


سعة مكثفة هي C = 470 μF . خلال عملية تشحين المكثفة ، ابتدائيا فارغة ، حصلنا على المنحنى الممثل في الشكل المقابل . التوتر الذي يعطيه المولد هو E = 1500 V .
1ـ بالإستعانة بهذا المنحنى ، حدد ، بالطريقة التي تختارها ، ثابت الزمن τ للدارة ، خلال نفس المرحلة .
2ـ ما هي القيمة العظمى W_{max} للطاقة التي يمكن للمكثفة أن تخزنها .
3ـ إذا اعتبرنا مكثفة تكون مشحونة تماما عندما يصل التوتر بين طرفيها نسبة 97% من قيمة التوتر الأعظمي ، ما هي المدة الزمنية Δt اللآزمة لتصبح المكثفة مشحونة ؟ 3ـ قارن هذه المدة الزمنية بالقيمة المعتادة أي 5τ .

الحـل ـ3

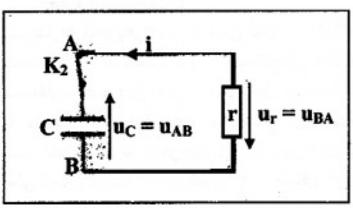
1ـ لتحديد ثابت الزمن للدارة ، يمكن أن نستخدم طريقتين :
الطريقة 1 : نرسم مماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ فيقطع الخط المقارب الأفقي $u_C = E$ عند $t = \tau$.
الطريقة 2 : نعرف أنه عند اللحظة $t = \tau$ قيمة $u_C = 0{,}63E = 945$ V ، نقرأ إذن على المنحنى القيمة $\tau = 0{,}5$ s .
2ـ نعلم أن $W_C = 1/2\, C\, u_C^2$ إذن $W_{max} = 1/2\, C\, E^2 = 529$ J .
3ـ نعتبر أن المكثفة مشحونة عندما : $u_C = 0{,}97\, E = 1455$ V و هذا ما يوافق $\Delta t = 1{,}6$ s .
4ـ $\Delta t < 5\tau$ (من رتبة 2,5 s) وهذا عادي لأنه خلال 5τ المكثفة تشحن بنسبة 99% .

التمرين ـ4



مكثفة إبتدائيا مشحونة تحت توتر E . ندرس عملية تفريغها في الدارة الموضحة في الشكل المقابل .
1ـ حدد جهة التيار I في الدارة من أجل أن تكون u_C اصطلاحا آخذة . حدد على الشكل التوتر u_r .
2ـ بين أن المعادلة التفاضلية لتفريغ المكثفة في ناقل أومي مقاومته r هي من الشكل : $du_C/dt + 1/rC\, u_C = 0$.
3ـ تحقق أن حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $u_C(t) = U_0 \exp(-t/\tau')$ و أعط عبارة U_0 و τ' بدلالة المقادير البارامترية E ، r و C . 4ـ استنتج عبارة i(t) .

الحـل ـ4



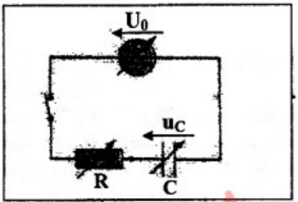
1ـ باعتبار المكثفة إصطلاحا آخذة ، i و u_C يكونان متعاكسين في الجهة .
نفس الشيئ بالنسبة u_r في إتجاه معاكس لـ i و هذا ما يوضحه الشكل المقابل .
2ـ لدينا $u_{AA} = 0 = u_{AB} + u_{BA} = u_C + u_r$ ، و حيث أن $u_r = r\, i$
و $i = dq/dt \Rightarrow u_r = r\, dq/dt$
و كذلك لدينا : $q = C\, u_C \Rightarrow u_r = r\, C\, du_C/dt$
إذن : $u_C + r\, C\, du_C/dt = 0 \Leftrightarrow 1/rC\, u_C + du_C/dt = 0$
3ـ للتحقق إذا كان $u_C(t) = U_0 \exp(-t/\tau')$ هي حل للمعادلة التفاضلية ،
نحسب مشتقتها : $du_C/dt = -1/\tau'\,.\,U_0 \exp(-t/\tau')$
أين : $0 = 1/rC\, U_0 \exp(-t/\tau') + [-1/\tau'\,.\,U_0 \exp(-t/\tau')] = U_0 \exp(-t/\tau')\,[1/rC - 1/\tau'] = 0$.
هذه العبارة صالحة لكل قيم t . و حيث أن U_0 مختلفة عن 0 و الدالة الأسية دائما موجبة إذن :
$[1/rC - 1/\tau'] = 0 \Leftrightarrow \tau' = rC$. لتحديد U_0 ، نستخدم الشروط الإبتدائية ،

عند اللحظة $t = 0$ ، $u_C(t = 0) = E = U_0 \exp(-0/\tau') = U_0$ إذن $E = U_0$. و منه $u_C(t) = E \exp(-t/rC)$.

4ـ $i = dq/dt = C\, du_C/dt$ و حيث أن : $u_C(t) = E \exp(-t/rC)$

إذن : $i = C\,.\,(-1/rC)\, E \exp(-t/rC) = -E/r \exp(-t/rC)$.

التمرين 5



ليكن ثنائي القطب RC مكون من مكثفة سعتها C متغيرة و ناقل أومي مقاومته R متغيرة . ندرس عملية شحن المكثفة عبر الناقل الأومي . من أجل ذلك نحقق التركيب الموضح في الشكل المقابل . المولد يعطي بين طرفيه توتر U_0 ثابت يمكن تغيير قيمته نستخدم خلال التجربة الكمبيوتر لتسجيل تغيرات التوتر u_C بين طرفي المكثفة مع مرور الزمن . عند كل تجربة جديدة نقوم بتغيير شرط واحد من شروط التجربة . الجدول التالي يلخص الشروط التجريبية لهذه الدراسة .

التجربة 4	التجربة 3	التجربة 2	التجربة 1	التجربة
$R = 20\ k\Omega$	$R = 10\ k\Omega$	$R = 20\ k\Omega$	$R = 20\ k\Omega$	المقادير المميزة للجملة
$C = 12{,}5\ \mu F$	$C = 31\ \mu F$	$C = 31\ \mu F$	$C = 31\ \mu F$	
				الشروط الإبتدائية $U_C(t_0 = 0) = 0\ V$
$U_0 = 4{,}25\ V$	$U_0 = 4{,}25\ V$	$U_0 = 5{,}00\ V$	$U_0 = 4{,}25\ V$	العوامل الخارجية للجملة
$\tau_4 = 0{,}25\ s$	$\tau_3 = 0{,}31\ s$	$\tau_2 = 0{,}62\ s$	$\tau_1 = 0{,}62\ s$	الزمن المميز τ

1ـ إنطلاقا من معطيات الجدول ، مع تبرير الإجابات ، حدد :

ـ هل المقادير المميزة للجملة لها تأثير على قيمة الزمن المميز τ ؟

ـ هل الشروط الخارجية لها تأثير على الزمن المميز τ ؟

2ـ عدة عبارات للزمن المميز τ للثنائي القطب RC مقترحة أسفلها :

$\tau = U_0 R C$ (1) , $\tau = U_0 /(R C)$ (2) , $\tau = R /C$ (3) , $\tau = C/ R$ (4) , $\tau = R C$ (5) , $\tau = \sqrt{R}\, C$ (6)

a) إنطلاقا من الدراسة التجريبية السابقة ، بين أنه توجد عبارة وحيدة مناسبة للزمن المميز τ .

b) تحقق من ذلك بالإعتماد على ما سبق بإثبات أن للجداء RC أبعاد زمن .

الحل 5

1ـ ـ بمقارنة التجربتين 1 و 3 ، من أجل قيم متماثلة لـ C و U_0 نلاحظ أنه : بازدياد R تزداد τ ، إذن τ يتناسب طردا مع R . و كما نلاحظ أن R تتضاعف بين التجربة 3 و التجربة 1 كما تضاعفت τ . و منه نستنتج أن : $\tau = k R$:

ـ بمقارنة التجربتين 1 و 4 ، من أجل قيم متماثلة لـ R و U_0 نلاحظ أنه بازدياد C تزداد τ ، إذن τ يتناسب طردا مع C . و أيضا من التجربتين نلاحظ أنه بتضاعف C تضاعفت τ و منه نستنتج أن τ تتناسب طردا مع C أي : $\tau = k' C$

ـ و أخيرا بمقارنة التجربتين 1 و 2 ، من أجل قيم متماثلة لـ R و C نلاحظ أن قيم τ متماثلة و منه العوامل الخارجية لا تؤثر على قيمة τ و منه الزمن المميز τ مستقل عن توتر المولد U_0 .

2ـ العبارة المناسبة لـ τ

ـ بمقارنة التجربتين 1 و 3 ، من أجل قيم متماثلة لـ C و U_0 نلاحظ أنه بازدياد R تزداد τ و أيضا من التجربتين نلاحظ أنه بتضاعف R تضاعفت τ و منه نستنتج أن τ تتناسب طردا مع R أي : **$\tau = k R$ إذن العبارتين 4 و 6 مرفوضتين .**

ـ بمقارنة التجربتين 1 و 4 ، من أجل قيم متماثلة لـ R و U_0 نلاحظ أنه بازدياد C تزداد τ و أيضا من التجربتين نلاحظ أنه بتضاعف C تضاعفت τ و منه نستنتج أن τ تتناسب طردا مع C أي : **$\tau = k' C$ إذن العبارة 3 مرفوضة .**

ـ و أخيرا بمقارنة التجربتين 1 و 2 ، من أجل قيم متماثلة لـ R و C نلاحظ أن قيم τ متماثلة و منه العوامل الخارجية لا تؤثر على قيمة τ و منه الزمن المميز τ مستقل عن توتر المولد U_0 . **إذن العبارتين 1 و 2 مرفوضتين .**

a) ـ العبارة الوحيدة المتبقية المحققة للتجارب السابقة هي : **$\tau = R C$**

b) التحقيق من ذلك بالإعتماد على ما سبق بإثبات أن للجداء RC أبعاد زمن :

$[RC] = [R]\,[C]$.

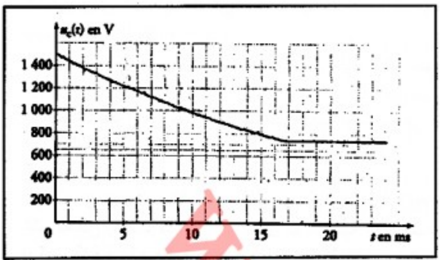
$U_R = R\,.\,I \Rightarrow [R] = [U] / [I]$,

$U_C = q / C \Rightarrow [C] = [Q] / [U]$

$[RC] = [U] / [I] . [Q] / [U] = [Q] / [I] .$ $\quad i = dq / dt \Rightarrow [I] = [Q] / [T]$

$[RC] = [Q] / [([Q] / [T])] = [T] .$ $\quad [\tau] = [RC] = [T] .$

التمرين ـ6



نشاهد عملية تفريغ جزئي لمكثفة سعتها $C = 470\ \mu F$ في مقاومة $R = 50\ \Omega$. نتوقف عن التفريغ عندما تكون الطاقة الكهربائية المقدمة هي $W = 400\ J$. $u(t) = A \exp(-t/RC)$

1ـ حدد القيم العددية لـ A و RC . مع ذكر الوحدات .

2ـ عبر عن الشدة i إنطلاقا من عبارة u_C .

3ـ عند أي لحظة تكون شدة التيار عظمى بالقيمة المطلقة ؟ أحسب القيمة المطلقة لهذه الشدة . هل هذه القيمة تتعلق بسعة المكثفة ؟

4ـ حدد بيانيا اللحظة t_1 التي، عندها ، التفريغ الجزئي للمكثفة قد توقف . أحسب قيمة التوتر $u_C(t_1)$ عند هذه اللحظة . تحقق بيانيا من هذه القيمة .

5ـ بالإعتماد على تغير طاقة المكثفة بين الحظتين t_0 و t_1 ، أعد حساب قيمة التوتر $u_C(t_1)$.

الحل ـ6

1ـ تحديد القيم العددية لـ A و RC مع ذكر الوحدات :

عند اللحظة $t = 0$ ، $u_C = 1500\ V$ و منه : $RC = 470 . 10^{-6} . 50 = 23{,}5 . 10^{-3}\ s$.

2ـ التعبير عن الشدة i إنطلاقا من عبارة u_C :

$$i = dq/dt = d(Cu_C)/dt = C\, du_C/dt = C\, d/dt\, [E \exp(-t/RC)] = - A/R \exp(-t/RC)$$

3ـ اللحظة أين تكون شدة التيار عظمى بالقيمة المطلقة : $|i| = | - A/R \exp(-t/RC) | = A/R \exp(-t/RC)$. تكون شدة التيار عظمى بالقيمة المطلقة عند اللحظة $t = 0$ و قيمتها : $i = A/R = 30\ A$. هذه القيمة مستقلة عن C .

4ـ تحديد اللحظة t_1 التي عندها ، التفريغ الجزئي للمكثفة قد توقف : حسب المنحنى التفريغ يتوقف عند اللحظة $t_1 = 16{,}5\ ms$.

ـ حساب قيمة التوتر $u_C(t_1)$ عند هذه اللحظة : $u_C(t_1) = A \exp(-t_1/RC) = 743\ V$.

ـ التحقق بيانيا من هذه القيمة : على المنحنى نقرأ : عند اللحظة t_1 ، $u_C(t_1) = 740\ V$.

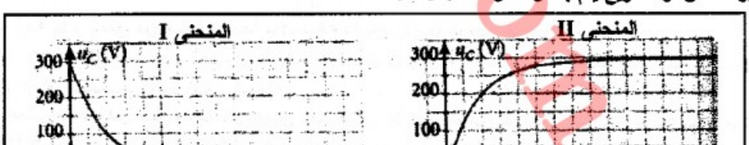
5ـ حساب قيمة التوتر $u_C(t_1)$ بالإعتماد على تغير طاقة المكثفة بين الحظتين t_0 و t_1 : خلال التفريغ ، طاقة المكثفة تتناقص . و منه التغير في طاقة المكثفة يكون سالب و يوافق معاكس الطاقة المقدمة إذن :

$$\Delta E_C = E^f_C - E^i_C = E_C(t_1) - E_C(t_0) = 1/2\, C\, u_C^2(t_1) - 1/2\, C\, u_C^2(t_0) = - W .$$

إذن : $1/2\, C\, u_C^2(t_1) = 1/2\, C\, u_C^2(t_0) - W \Leftrightarrow u_C^2(t_1) = u_C^2(t_0) - 2/C . W \Leftrightarrow u_C(t_1) = 740\ V$.

التمرين ـ7

نحقق عملية شحن مكثفة ، سعتها $C = 100\ \mu F$ ، في دارة كهربائية أولى تحتوي على مقاومة R ثم نفرغها في دارة ثانية تحتوي على مقاومة r و التي تسبب إشتعال وماض (Flash) آلة تصوير . الإستطاعة المتوسطة P الداخلة في هذه العملية خلال تبادل الطاقة ΔE خلال مدة زمنية Δt تعطى بالعلاقة التالية : $P = | \Delta E | / \Delta t$ حيث ΔE بالجول ، Δt بالثواني و P بالواط ، نعتبر الشحن أو التفريغ يتم بشكل كامل عند $t = 5\ \tau$.



1ـ ما هي قيمة التوتر الأعظمي بين طرفي المكثفة ؟ 2ـ استنتج الطاقة العظمى المختزنة في المكثفة .

3ـ مستعينا بالمنحنيات ، حدد قيم τ خلال عملية الشحن و التفريغ .

4ـ احسب الإستطاعة المتوسطة خلال كل طور . ما هي الفائدة العملية من الفرق الملاحظ ؟

5ـ استنتج ، لماذا يجب أن تكون المقاومة r صغيرة أمام المقاومة R .

الحل ـ7

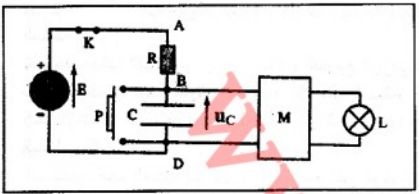
1ـ قيمة التوتر الأعظمي بين طرفي المكثفة : نقرأ على المنحنى قيمة التوتر الأعظمي فنجدها : 300 V .

2ـ استنتاج الطاقة العظمى المختزنة في المكثفة : $E_{Cmax} = 1/2\, C\, u_{Cmax}^2 = 0{,}5 . 100 . 10^{-6} . 300^2 = 4{,}5\ J$.

3ــ تحديد قيم τ خلال عملية الشحن و التفريغ ، مستعينا بالمنحنيات : التفريغ يوافق المنحنى I لأن u_C يتناقص مع مرور الزمن باستخدام طريقة المماسات أو من قياس $0,37\ u_{Cmax}$ نحصل على :- $\tau = 0,1\ ms$.
الشحن يوافق المنحنى II لأن u_C يتزايد مع مرور الزمن . باستخدام طريقة المماسات أو من قياس $0,63\ u_{Cmax}$ نحصل على : $\tau = 3\ ms$.

4ــ حساب الإستطاعة المتوسطة خلال كل طور : في طور التفريغ : $|P| = |\Delta E/5\ \tau| = 4,5/(0,5\ .\ 10^{-3}) = 9,0\ .\ 10^{3}\ W$.
في طور الشحن : $|P| = |\Delta E/5\ \tau| = 4,5/(3\ .\ 5) = 0,3\ W$.
الإستطاعة تكون في طور التفريغ أكبر بكثير مما هي في طور الشحن ، هذا ما يسمح بالحصول على استطاعة معتبرة خلال تفريغ المكثفة لإشعال الوماض للآلة التصوير مثل ا.

التمرين ــ8



الهدف من هذه المسألة هو دراسة مبدأ عمل مؤقتة (Minuterie) التي تسمح بإطفاء مصباح آليا خلال مدة زمنية t_0 ، قابلة للتغيير .
تركيب الدارة الكهربائية موضح في الشكل المقابل . تتكون الدارة من مولد توتر مستمر $E = 30\ V$ ، و زر ضاغط P الذي يلعب دور القاطعة (الدارة مغلقة عند الضغط على الزر) و مركب إلكتروني M الذي يسمح بإشعال مصباح L عندما تكون قيمة التوتر بين طرفي المكثفة أصغر من قيمة معينة حدية . هذه القيمة الحدية هي مميزة المركب الإلكتروني M نرمز لها بــ U_L (في كل المسألة نثبت قيمة U_L عند القيمة (20V)) .
المركب الإلكتروني M تغذيه دارة كهربائية أخرى (غير ممثلة على الشكل) و التي تعطيه الطاقة اللآزمة لإشتعال المصباح . و منه نقبل أن المركب الإلكتروني M لا يؤثر على إشتغال الدارة RC أي أن التوتر بين طرفي المكثفة هو نفسه بحضور أو بغياب المركب الإلكتروني M في الدارة .
عند اللحظة $t = 0\ s$ ، المكثفة فارغة ، نغلق القاطعة K . الزر الضاغط P نتركه لحاله (أنظر الشكل) أي غير مضغوط .

1ــ نريد مشاهدة تغيرات التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن بواسطة راسم إهتزاز مهبطي ذو ذاكرة ، حدد على الشكل السابق التوصيلات اللآزم تحقيقها (المدخل 1 و القطب السالب).

2ــ بين أن المعادلة التفاضلية التي تعطي تغيرات التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن هي من الشكل :
$$u_C(t) + RC\ du_C(t)/dt = E \quad ......\ (1)$$

3ــa ــ بالتحقق من أن الدالة الزمنية $A\ [(1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية ، بين أن $A = E$ و أن $\tau = RC$.
bــ ماهي قيمة u_C في النظام الدائم ؟
cــ ما هو الإسم المصطلح المعطى للثابت τ ؟ باستخدام طريقة تحليل الأبعاد ، أعط وحدة الثابت τ .

4ــ التمثيل البياني للدالة $u_C(t)$ معطى في الوثيقة 1 . حدد على الشكل ، بدون تبرير ، التوتر E ، الثابت τ و النظامين الدائم و الإنتقالي .

5ــ احسب قيمة الثابت τ من أجل $R = 100\ k\Omega$ و $C = 200\ \mu F$.

6ــa ــ أعط العبارة الحرفية للحظة t_0 التي عندها التوتر بين طرفي المكثفة يصل إلى القيمة الحدية U_L بدلالة U_L ، E و τ (t_0 هي مدة إشتعال المصباح).
bــ احسب قيمة t_0 و تحقق من صحة النتيجة بالإستعانة بالبيان $u_C(t)$ المعطى في الوثيقة 1 .
cــ ثبتنا U_L عند $20\ V$ من أجل الحصول على مدة الإشتعال t_0 مجاورة لــ τ . اشرح لماذا اختيار قيمة لــ t_0 أكبر بكثير من τ ، يكون غير مناسب لتركيب الدارة السابقة .

7ــ ما هو العامل أو العوامل البارامترية التي يمكن تغييرها في التركيب السابق للحصول على مدة إشتعال أكبر مما سبق (لا نغير المولد)؟ 8ــ نضغط على الزر الضاغط . ما قيمة التوتر بين طرفي المكثفة ؟ قارنها بالقيمة U_L . ماذا يحدث للمصباح في الحالات التالية : aــ إذا كان المصباح مشتعل . bــ إذا كان المصباح منطفئ

الحــل ــ8

1ــ تحديد التوصيلات اللآزم تحقيقها (المدخل 1) على الشكل السابق : لمشاهدة التوتر $u_C = u_{BD}$ على المدخل 1 للجهاز ، يجب توصيل المدخل y_1 عند B و القطب السالب عند D .
2ــ المعادلة التفاضلية التي تعطي تغيرات التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة : لدينا : $E = u_{AD} = u_{AB} + u_{BD} = u_C + u_R$.
و حيث أن : $u_R = R\,i$ و $i = dq/dt \Rightarrow u_R = R\ dq/dt$
و كذلك لدينا : $q = C\,u_C \Rightarrow u_R = R\,C\ du_C/dt$ إذن : $u_C + RC\ du_C/dt = E$
3ــa ــ للتحقق من أن الدالة الزمنية $A\ [(1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية ، نحسب $du_C/dt = A\ .1/\tau\ \exp(-t/\tau)$ ، ثم نعوض عن الحدين في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$. E = RC . 1/\tau \exp(-t/\tau) + A [(1 - \exp(-t/\tau)] \Rightarrow E - A = A \exp(-t/\tau) (RC/\tau - 1)$

لدينا حدود مستقلة عن الزمن و التي يجب أن تتساوى مع الحدود الأخرى المرتبطة بالزمن و هذا لايتحقق إلا إذا كان الحدين معدومين : $E - A = 0$ و منه : $E = A$ و $RC/\tau - 1$ و منه : $\tau = RC$.

b– قيمة u_C في النظام الدائم : في النظام الدائم ، u_C يكون ثابت و منه : $du_C/dt = 0$ و منه حسب المعادلة التفاضلية :
$. E = u_C = 30\ V$

c– الإسم المصطلح المعطى للثابت τ و وحدته : الإسم هو : ثابت الزمن و هي مميزة تطور الجملة الكهربائية . و هناك طريقتين لتحديد وحدته :

الطريقة 1 : انطلاقا من الجداء RC :

$[RC] = [R] [C].$
$U_R = R . I \Rightarrow [R] = [U] / [I]$,
$U_C = q / C \Rightarrow [C] = [Q] / [U]$
$[RC] = [U] / [I] . [Q] / [U] = [Q] / [I] . \qquad i = dq / dt \Rightarrow [I] = [Q] / [T]$
$[RC] = [Q] / [([Q] / [T])] = [T] . \qquad \mathbf{[\tau] = [RC] = [T]} .$

الطريقة 2 : انطلاقا من طريقة تحليل الأبعاد للمعادلة التفاضلية $u_C + RC\, du_C/dt = E$:

$E = RC\, du_C/dt + u_C$
$[E] = [U] = [RC\, du_C/dt] = [RC] . [du_C/dt] = [RC] . [U] / [T]$
$\Rightarrow [RC] = [T] \Rightarrow \mathbf{[\tau] = [RC] = [T]} .$

4– تحديد التوتر E ، الثابت τ و النظامين الدائم و الإنتقالي : التوتر E يوافق الخط المقارب الأفقي للمنحنى $u_C(t)$ و قيمته $30\ V$. لتحديد قيمة τ هناك طريقتين :

الطريقة 1 : برسم المماس للمنحنى عند المبدأ الذي يقطع الخط المقارب الأفقي للمنحنى $u_C(t)$ في نقطة فاصلتها : $t = \tau = 20\ s$.

الطريقة 2 : بقياس القيمة ، عند $t = \tau$ ، $u_C(\tau) = 0{,}63\ E = 19\ V$ فنقرأ على الشكل القيمة $t = \tau = 20\ s$. نصل إلى النظام الدائم عندما : $t > 5\tau$. أما النظام الإنتقالي فهو يوافق : $0 < t < 5\ \tau$.

5– حساب قيمة الثابت τ من أجل $R = 100\ k\Omega$ و $C = 200\ \mu F$: $\tau = RC = 100 . 10^3 . 200 . 10^{-6} = 20\ s$

6–a– العبارة الحرفية للحظة t_0 التي عندها التوتر بين طرفي المكثفة يصل إلى القيمة الحدية U_L :

$u_C(t_0) = U_L \Leftrightarrow E[1 - \exp(-t_0/\tau)] = U_L \Leftrightarrow 1 - \exp(-t_0/\tau) = U_L/E \Leftrightarrow \exp(-t_0/\tau) = 1 - U_L/E$
$\Leftrightarrow -t_0/\tau = \ln [1 - U_L/E] \Leftrightarrow t_0 = - \tau \ln (1 - U_L/E) = - \tau \ln [(E - U_L)/E] = \mathbf{\tau \ln [E/(E - U_L)]}$

b – حساب قيمة t_0 و التحقق من صحة النتيجة بالإستعانة بالبيان $u_C(t)$ المعطى في الوثيقة 1 :
$. t_0 = \tau \ln [E/(E - U_L)] = 20 . \ln [30/(30 - 20)] = 20 . \ln 3 = 22{,}0\ s$

على المنحنى نقرأ : من أجل $u_C = 20\ V$, نجد $t = 22\ s$ نلاحظ أن النتائج متناسقة .

c– اختيار قيمة لـ t_0 أكبر بكثير من τ ، يكون غير مناسب لتركيب الدارة السابقة : لو نختار $t >>> \tau$ تكون قيمة U_L قريبة من قيمة E . و منه المقارنة بين التوتر E و U_L تكون صعبة الإجراء . و منه المؤقتة لا تعطي قيمة لـ t_0 معقولة . و منه اشتغال المؤقتة غير نفعي .

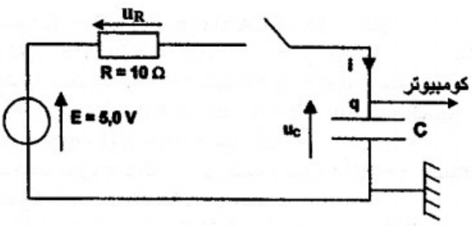
7– العامل أو العوامل البارامترية التي يمكن تغييرها في التركيب السابق للحصول على مدة إشتعال أكبر مما سبق : المصباح يبقى مشتعل ما دام $U_L < E$. يمكننا إذن تكبير قيمة U_L و لكن بشكل معقول حتى لا نرجع للحالة المذكورة سابقا . و إضافة لذلك ، U_L هو التوتر الأعظمي بين طرفي المكثفة . و بالتالي إذا أردنا الحصول على مدة إشتعال أكبر للمصباح ، يجب أن تكون مدة الشحن أطول و من أجل تحقيق ذلك ، يجب تكبير ثابت الزمن المميز للمكثفة τ . بما أن $\tau = RC$ فإننا نكبر إما R أو C .

8– قيمة التوتر بين طرفي المكثفة و مقارنتها بالقيمة U_L بعد الضغط على الزر الضاغط : عند الضغط على الزر الضاغط يصبح التوتر بين طرفي المكثفة معدوم $u_C = 0$. و منه : $u_C < U_L$ إذن المصباح يشتعل عند الضغط على الزر الضاغط. يحدث للمصباح في الحالات التالية :

a– إذا كان المصباح مشتعل يبقى مشتعلا . b– إذا كان المصباح منطفئ فإنه يشتعل بعد الضغط على الزر الضاغط .

التمرين –9

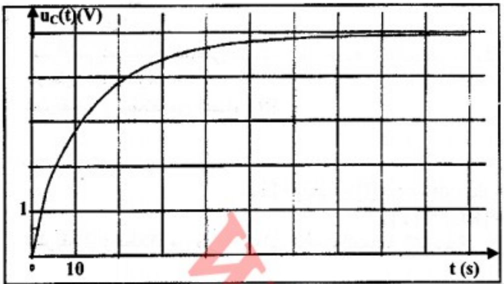
الهدف من هذا التمرين هو دراسة مركب يدعى Super Condensateur و يتعلق الأمر بمكثفات ذات سعات كبيرة من رتب تتعدى ملايين الفاراد . يمكن اعتبارها مركبات تصنف بين المكثفات و الأعمدة الكهروكيميائية .



الجزء 1 : تشحين مكثفة بواسطة منبع توتر ثابت

لدينا مكثفة كتب عليها (1 F) . للتحقق من قيمة هذه السعة التي وضعها عليها صانع المكثفة ، نحقق التركيب

الموضح في الشكل المقابل . ثنائي القطب RC يغذى بمولد توتره $E = 5,0\ V$. الجهة الموجبة للتيار و التوترات موضحة على الشكل . نصل المكثفة السابقة بجهاز كومبيوتر . عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة و نأخذ قيمة التوتر بين طرفي المكثفة . نحصل على المنحنى الموضح في الشكل المقابل . باستعمال قانون جمع التوترات توصل إلى العلاقة بين



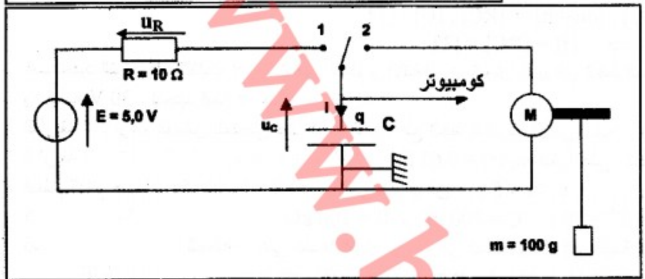
$u_C(t)$ و مشتقتها $du_C(t)/dt$ بالنسبة للزمن (معادلة التفاضلية التي تحققها $(u_C(t)$) .

a‍ـ تحقق أن $u_C(t) = E\ [(1 - \exp(-t/\tau)\ ]$ هو حل للمعادلة التفاضلية السابقة ثم تحقق من الشرط الإبتدائي : $u_C = 0$ عند اللحظة $t = 0$.

b‍ـ حدد عبارة τ بدلالة المقادير المميزة للدارة .

c‍ـ إنطلاقا من المنحنى المعطى و بالطريقة التي تختارها بنفسك حدد قيمة السعة C للمكثفة المدروسة . قارن النتيجة مع القيمة المعطاة من طرف الصانع .

الجزء 2 : إسترجاع الطاقة و تفريغ المكثفة بالتيار الثابت



نعتبر في بقية التمرين أن قيمة السعة C هي : $C = 1,0\ F$. نعتبر التركيب الموضح في الشكل المقابل .

M هو محرك يدور محور الذي بدوره ملفوف حوله خيط الذي يثبت في نهايته جسم كتلته $m = 100\ g$.

a‍ـ عند اللحظة $t = 0$ نضع البادلة في الوضعية 2 . المكثفة تتفرغ و المحرك يشتغل فيدور المحور فيصعد الجسم إرتفاع $h = 3,10\ m$ خلال مدة زمنية قدرها $18\ s$.

عند اللحظة $t = 0$ (بداية إشتغال المحرك)، $u_C(0) = 4,9\ V$ و عند اللحظة $t = 18\ s$ (توقف المحرك) ، $u_C(18) = 1,5\ V$. تسجيل $u_C(t)$ من طرف الكومبيوتر يعطي المنحنى الممثل بخط مستقيم معادلته : $u_C(t) = at + b$ حيث : $a < 0$ و $b > 0$

. احسب القيمة العددية لـــ a و b .

b‍ـ حدد عبارة الشحنة اللحظية $q(t)$ للمكثفة بدلالة الزمن . استنتج قيمة شدة التيار i . ما رأيك من إشارة التيار i ؟

c‍ـ احسب على الترتيب :

ــ الطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t = 0$. ــ الطاقة المتبقية عند اللحظة $t = 18\ s$. ــ الطاقة التي تخلت عنها المكثفة

ــ الطاقة الميكانيكية (الكامنة) التي استقبلها الجسم . نأخذ : $g = 9,8\ m/s^2$. ــ مردود التركيب .

الحــل ــ9

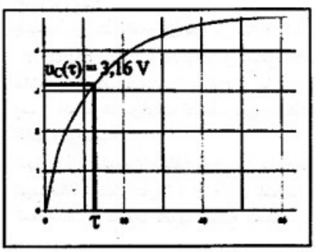
الجزء 1 : تشحين مكثفة بواسطة منبع توتر ثابت

كتابة المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C : $u_G = u_C + u_R$ حيث u_G هو التوتر بين طرفي المولد

و لدينا : $u_G = E$ و منه : $u_C + R\,i = E \iff u_C + Ri = E$

و لدينا : $i = dq/dt = d(C\,.\,u_C)/dt = C\,du_C/dt$ إذن : $u_C + RC\,du_C/dt = E$ و هي المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة لــ u_C . حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $u_C = A\ \exp(-t/\tau) + B$

c‍ـ تحديد عبارة كل من A ، B و τ : نحسب : $du_C/dt = -\,A/\tau\ \exp(-t/\tau)$ ، نعوض عن u_C و du_C/dt في المعادلة التفاضلية فنحصل على : $A\exp(-t/\tau) + B + RC \times [-\,A/\tau\ \exp(-t/\tau)] = E$



و منه : $[A - RCA/\tau]\exp(-t/\tau) + B = E$. الحل المقترح يحقق المعادلة

إذا كان : $A = RCA/\tau$ أي : $\tau = RC$ و $B = E$. نحدد قيمة E من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $u_C(t = 0) = 0$ و منه :

$A\exp(0) + B = 0 \iff A + B = 0 \iff A = -\,B$ فيصبح إذن لدينا :

$u_C(t) = E\ [1 - \exp(-t/\tau)\ ]$ مع : $\tau = RC$

b‍ـ تحديد عبارة τ بدلالة المقادير المميزة للدارة : $\tau = RC$. إنطلاقا من المنحنى نستنتج قيمة τ : عند اللحظة $t = \tau$ ، نجد :

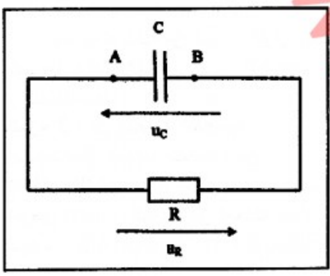
$u_C(\tau) = E\ [1 - \exp(-\tau/\tau)\ ] = 0,63\ E = 0,63\ .\ 5,0 = 3,16\ V$.

بالبحث عن النقطة التي ترتيبها $u_C(t) = 3,16$ V حيث فاصلتها هي ثابت الزمن τ . نجد : $\tau = 12$ s .
c– تحديد قيمة السعة C : لدينا : $\tau = 12$ s و $R = 10\ \Omega$ تكون إذن قيمة السعة : $C = \tau/R = 12/10 = 1,2$ F
المقارنة : نلاحظ أن القيمتين متقاربتين جدا. حيث الفارق في حدود 20 % .

الجزء 2 : إسترجاع الطاقة و تفريغ المكثفة بالتيار الثابت .
عند اللحظة $t = 0$ (بداية إشتغال المحرك)، $u_C(0) = 4,9$ V و عند اللحظة $t = 18$ s (توقف المحرك) ، $u_C(18) = 1,5$ V .
تسجيل $u_C(t)$ من طرف الكومبيوتر يعطي المنحنى الممثل بخط مستقيم معادلته : $u_C(t) = at + b$ حيث : $a < 0$ و $b > 0$
حساب القيمة العددية لــ a و b : $u_C(t) = at + b \Rightarrow u_C(0) = b = 4,9 \Rightarrow b = 4,9$ V
$u_C(18) = a \cdot 18 + 4,9 = 1,5 \Rightarrow a = (1,5 - 4,9)18 = -0,19$ V/s و أخيرا : $u_C(t) = -0,19\,t + 4,9$.
b– تحديد عبارة الشحنة اللحظية $q(t)$ للمكثفة بدلالة الزمن : لدينا : $q(t) = C \cdot u_C(t) = C \cdot (at + b) = -0,19\,t + 4,9$.
استنتاج قيمة شدة التيار i : $i = dq/dt = d(C \cdot u_C)/dt = C\, du_C/dt = C \cdot -0,19 = 1,2 \cdot (-0,19) = -0,19$ A
عندما نضع البادلة في الوضعية 2 ، المكثفة تتفرغ و بالتالي q تنقص إذن : $dq < 0$ و منه يكون إشارة i سالبة . خلال التفريغ الجهة الحقيقية للتيار هي الجهة المعاكسة للجهة المبينة على الشكل .

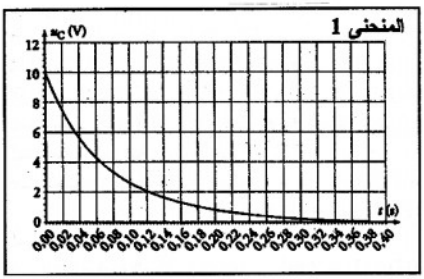
– الطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t = 0$: $E_{(0)} = 1/2\,.C.\,E^2 = (0,5 \cdot 1,0 \cdot 4,9^2) = 12$ J .
– الطاقة المتبقية عند اللحظة $t = 18$ s : $E_{(18)} = 1/2\,.C.\,u_C(18)^2 = (0,5 \cdot 1,0 \cdot 1,5^2) = 1,1$ J .
– الطاقة التي تخلت عنها المكثفة : $\Delta E = 1/2\,.C.\,E^2 - 1/2\,.C.\,u_C(18)^2 = 12 - 1,1 = 11$ J .
– الطاقة الميكانيكية (الكامنة) التي استقبلها الجسم : $E_{(p)} = m \cdot g \cdot h = 0,1 \cdot 9,8 \cdot 3,10 = 3,0$ J .
– مردود التركيب : $\eta = E_{(p)}/\Delta E = 3,038/10,88 = 0,28 = 28\ \%$.

التمرين –10



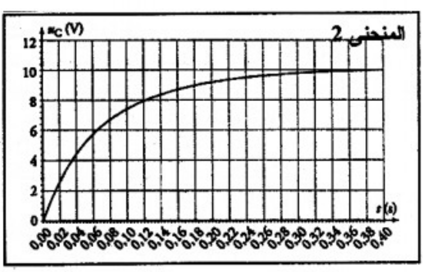
نعتبر الدارة المتكونة من ناقل أومي مقاومته R و مكثفة سعتها C . عند اللحظة $t = 0$ المكثفة مشحونة تحت توتر $U_0 = 10$ V .
نعتبر ما يلي : u_C التوتر بين طرفي المكثفة عند اللحظة t و u_R التوتر بين طرفي الناقل الأومي عند اللحظة t و i شدة التيار عند اللحظة t المعتبرة موجبة خلال شحن المكثفة و q_A شحنة اللبوس A عند اللحظة عند اللحظة t .

الجزء 1 : المعادلة التفاضلية خلال تفريغ المكثفة .
a– اوجد العلاقة التي تربط u_R و u_C .
b– اوجد العلاقة التي تربط الشحنة q_A للبوس A و التوتر u_C .
c– ما هي إشارة i ؟ توصل إلى العلاقة التي تربط الشدة i للتيار مع التوتر u_C .



d– بين أن المعادلة التفاضلية التي تنظم تطور التوتر u_C تكتب :
$\alpha\, u_C + du_C/dt = 0$ حيث α هو ثابت غير معدوم .
اعط عبارة α بدلالة R و C .

الجزء 2 : حل المعادلة التفاضلية
حل المعادلة التفاضلية من الشكل : $u_C = A \cdot \exp(-\beta t)$
حيث A و β ثابتين موجبين غير معدومين .
a– باستعمال المعادلة التفاضلية بين أن : $\beta = 1/RC$.

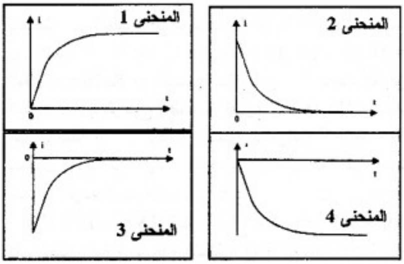


b– حدد قيمة A .
c– حدد من بين المنحنيين 1 و 2 في الشكل المقابل المنحنى الذي يمثل u_C . برر إجابتك .
d– اعط العبارة الحرفية لثابت الزمن τ .
e– بين بطريقة التحليل البعدي أن τ يجانس الزمن .
f– حدد على المنحنى المختار قيمة τ لثنائي القطب .
g– علما أن $R = 33\ \Omega$ استنتج قيمة السعة C للمكثفة .
الجزء 3 : شدة التيار
a– مستعينا بالنتائج السابقة بين أن : $i = -U_0/R \cdot \exp(-1/RC\ t)$
b– حدد قيمة I_0 لـ i عند اللحظة $t = 0$.
c– حدد من بين الأربع منحنيات التالية المنحنى الذي يمكن أن يمثل i . برر إجابتك .

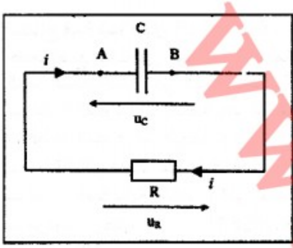
d- احسب قيمة i من أجل $t = 0,50\ s$.
e- حدد قيمة u_C عند نفس اللحظة .
f- هل المكثفة فارغة ؟ برر إجابتك .

الجزء 4 : الطاقة المخزنة في المكثفة

a- اكتب عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة للتركيب المدروس بدلالة السعة و التوتر u_C بين طرفيها ثم بدلالة السعة والشحنة q_A للبوس A
b- نستبدل المكثفة السابقة بمكثفة أخرى سعتها C' أكبر من C .
هذه المكثفة مشحونة تحت التوتر U_0 . قارن بين الطاقة المخزنة في هذه المكثفة الجديدة مع الطاقة المخزنة في المكثفة السابقة .



الحـل – 10

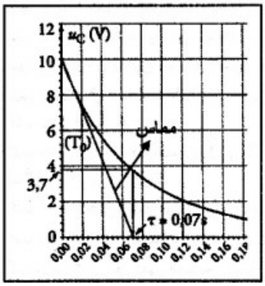


الجزء 1 : المعادلة التفاضلية خلال تفريغ المكثفة .

a- إيجاد العلاقة التي تربط u_R و u_C : حسب قانون جمع التوترات $u_C + u_R = 0$.
b- إيجاد العلاقة التي تربط الشحنة q_A للبوس A و التوتر u_C : $q_A = C\, u_C$
c- إشارة i : خلال التشحين اعتبرت الشدة موجبة و منه خلال التفريغ تكون الشدة سالبة $i = - dq/dt$.
- التوصل إلى العلاقة التي تربط الشدة i للتيار مع التوتر u_C : حسب قانون جمع التوترات لدينا : $u_C + u_R = 0$ و حيث أن :
$u_R = R\,i$ و لدينا : $i = dq/dt\ \ dt$ ، إذن : $1/RC\ u_C + du_C/dt = 0$
و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة إلى u_C .
d- عبارة α بدلالة R و C : $1/RC\ u_C + du_C/dt = 0$ معادلة تفاضلية من الشكل : $\alpha\, u_C + du_C/dt = 0$.
و المطابقة نجد : $\alpha = 1/RC$.

الجزء 2 : حل المعادلة التفاضلية

a- باستعمال المعادلة التفاضلية بين أن : $\beta = 1/RC$:
إذا كان $u_C = A\,.\,\exp(-\beta t)$ هو حل للمعادلة التفاضلية فإن u_C يحقق المعادلة .
نعوض $u_C(t)$ و du_C/dt في المعادلة حيث : $u_C = A\,.\,\exp(-\beta t)$ و $du_C/dt = -\beta\, A\,.\,\exp(-\beta t)$.
لدينا : $RC\,(-\alpha\, A\,.\,\exp(-\beta t) + A\,.\,\exp(-\beta t) = 0$ و $-\beta\, ARC \exp(-\beta\, t) + A \exp(-\beta t) = 0$ هذه المعادلة محققة
إذا كان $A - \beta\, ARC = 0$ أي من أجل $A = \beta\, ARC$ و منه : $\beta = 1/RC$.
b- حدد قيمة A :الشروط الإبتدائية تسمح بتحديد قيمة A . فعلا عند اللحظة : $t = 0$ نجد $u_C = E$ (المكثفة ابتدائيا مشحونة تحت توتر E) إذن : $u_C(t) = A \exp(-t/RC) = E$. عند $t = 0$ نجد : $A \exp(0) = 1$ إذن : $u_C(t = 0) = A = E$
إذن يكون لدينا : $A = E = 10\ V$. A يمثل التوتر الإبتدائي بين طرفي المكثفة .
c- المنحنى الذي يمثل u_C : خلال تفريغ المكثفة ، التوتر u_C يتناقص . إذن المنحنى الذي يمثل u_C هو : المنحنى 1 .
d- العبارة الحرفية لثابت الزمن τ : $\tau = RC$.
e- التحقيق أن ثابت الزمن τ يجانس الزمن : التحليل البعدي لـ τ يعطي :
$$[\tau] = [RC] = [u/I]\,.\,[q/u] = [I\,.\,t]/\,[I] = t = T$$
f- تحديد على المنحنى المختار قيمة τ لثنائي القطب :
g- استنتاج قيمة السعة C للمكثفة : $\tau = RC \;\Rightarrow C = \tau/R = (0,07)/(33) = 2\ mF$



الجزء 3 : شدة التيار

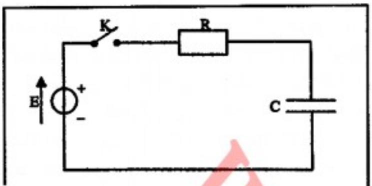
a- مستعينا بالنتائج السابقة نبين أن : $i = - U_0/R\,.\,\exp(-1/RC\ t)$:
لدينا : $i = dq/dt = d(C\,.\,u_C)/dt = C\, du_C/dt$: و لدينا : $u_C = U_0\,.\,\exp(-1/RC\ t)$.
و منه : $i = C\, du_C/dt = C\,.\,(-\,1/RC\,.\,U_0 \exp(-1/RC\ t)\,)$ و منه :
$i = - U_0/R\,.\,\exp(-1/RC\ t)$.
b- تحديد قيمة I_0 لـ i عند اللحظة $t = 0$:
$$i = - U_0/R\,.\,\exp(-1/RC\,.\,t) = - U_0/R\,.\,\exp(-1/RC\,.\,0) = - U_0/R = - 10/33 = - 0,30\ A\ .$$
d- حساب قيمة i من أجل $t = 0,50\ s$:
$$i = - U_0/R\,.\,\exp(-1/RC\,.\,t) = - 10/33\,.\,\exp(-1/(0,07\,.\,0,5) = - 0,2\ mA$$
e- تحديد قيمة u_C عند نفس اللحظة : $u_C\,(0,5) = 10 \exp(-0,5/0,07) = 8\ mV$
f- الزمن المنتهي أكبر بكثير من خمس مرات ثابت الزمن τ و منه نقول أن المكثفة قد تفرغت بشكل كامل .

الجزء 4 : الطاقة المخزنة في المكثفة

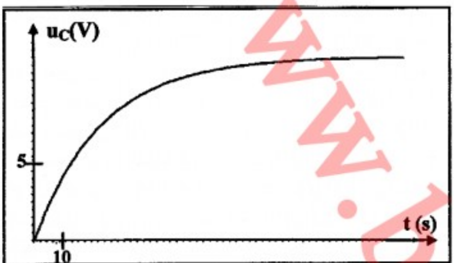
a– كتابة عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة للتركيب المدروس بدلالة السعة و التوتر u_C بين طرفيها : $E_{(c)} = 1/2\ C \cdot u^2$
ثم بدلالة السعة و الشحنة q_A للبوس A : $E_{(c)} = 1/2\ C \cdot u^2 = 1/2\ C \cdot (q/C)^2 = 1/2\ q^2/C$

b– المقارنة بين الطاقة المخزنة في هذه المكثفة الجديدة مع الطاقة المخزنة في المكثفة السابقة :
$E_{(c)} = 1/2\ C \cdot u^2$ و $E'_{(c)} = 1/2\ C' \cdot u^2$. علما أن 'C أكبر من C و منه : 'E أكبر من E .

التمرين –11



نحقق التركيب الدارة الموضح في الشكل المقابل متكونة من مولد مثالي قوته المحركة الكهربائية $E = 12{,}0\ V$ ، ناقل أومي مقاومته R ، مكثفة سعتها $C = 120\ \mu F$ و قاطعة K .
المكثفة ابتدائيا فارغة . عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K . نحصل على المنحنى الموضح في الشكل المقابل حيث يوجد سهم يمثل جهة مرور التيار i في الدارة ، هذه الجهة نعتبرها هي الجهة الموجبة . من جهة أخرى ندعو q شحنة لبوس المكثفة التي تشحن موجبة .



الجزء 1 :

a– باستعمال لإصطلاح آخذة مثل بواسطة أسهم على الشكل السابق التوترات u_C بين طرفي المكثفة و u_R بين طرفي الناقل الأومي . b– اعط عبارة u_R بدلالة i . c– اعط عبارة i بدلالة الشحنة q للمكثفة .

d– اعط العلاقة التي تربط q و u_C . e– استنتج عبارة i بدلالة السعة C و التوتر u_C .

f– بتطبيق قانون جمع التوترات توصل إلى العلاقة بين E ، u_R و u_C . g– توصل إلى المعادلة التفاضلية التي تحققها u_C

– $u_C = E\ [(1 - \exp(-t/\tau)]$ حيث $\tau = RC$ ، هي حل للمعادلة التفاضلية .

a– تحقق أن $u_C = E\ [(1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

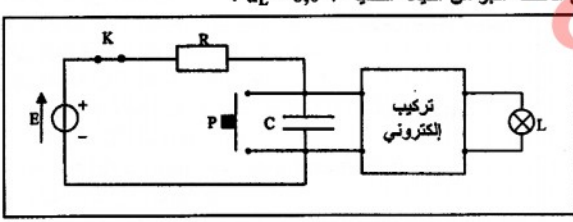
b– تحقق أن $u_C = E\ [(1 - \exp(-t/\tau)]$ تتفق مع الشرط الإبتدائي .

c– بطريقة التحليل البعدي تحقق أن $\tau = RC$ تجانس الزمن . حدد τ بيانيا مع شرح الطريقة المتبعة على المنحنى المرفق .

d– استنتج قيمة المقاومة R حيث قيمتها تعطى بالرقمين المعنويين .

الجزء 2 :

لثنائي القطب RC المدروس سابقا نضيف له تركيب إلكتروني الذي يتحكم في إشتعال مصباح :
– المصباح يشتعل عندما يكون التوتر u_C بين طرفي المكثفة أقل من قيمة حدية $u_L = 6{,}0\ V$.
– المصباح ينطفئ عندما يكون التوتر بين طرفي المكثفة أكبر من القيمة الحدية $u_L = 6{,}0\ V$.
تركيب الدارة موضح في الشكل الآتي .



نلاحظ في الشكل زر ضاغط P . عندما نضغط عليه فإنه يلامس لبوسي المكثفة فيلعب دور ناقل أومي بمقاومة معدومة . فهو يسبب تفريغ لحظي للمكثفة . و عندما نترك الزر لحاله (غير مضغوط) فإنه يلعب دور قاطعة مفتوحة .

a– المكثفة ابتدائيا مشحونة تحت توتر 12 V المصباح منطفئ . نضغط على الزر P . كيف يصبح التوتر بين طرفي المكثفة u_C خلال مرحلة التلامس ؟ هل يشتعل المصباح ؟ برر إجابتك .

b– كيف يتطور التوتر بين طرفي المكثفة مع مرور الزمن ؟

c– ثابت الزمن لثنائي القطب RC المستعمل هو $\tau = 25\ s$. كيف تتطور حالة المصباح بعد ترك الزر لحاله ؟

d– بالإستعانة بحل المعادلة التفاضلية المعطاة سابقا ، اعط العبارة الحرفية للحظة التي عندها التوتر بين طرفي المكثفة يصل إلى القيمة العظمى u_L بدلالة u_L ، E و τ .

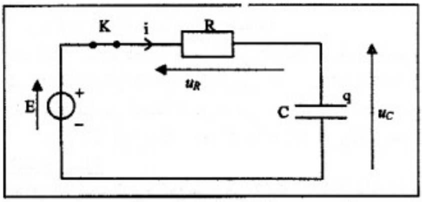
e– احسب قيمة t_L ، مدة اشتعال المصباح .

f– اعد حساب قيمة t_L بيانيا بالإستعانة بالمنحنى $u_C = f(t)$ المعطى . حدد بوضوح هذه المدة على المنحنى .

g– التوتر بين طرفي المولد F ثابت ، نريد أن نزيد من مدة اشتعال المصباح . ما هما المقدارين البارامترين للدارة الكهربائية في الشكل 1 الواجب ضبطهما ؟ حدد كيف يتم تغيرهما .

الحل ــ 11

الجزء 1 :



aــ انظر الشكل :

bــ عبارة u_R بدلالة i : $u_R = R \, . \, i$.

cــ عبارة i بدلالة الشحنة q للمكثفة : $i = dq/dt$.

dــ العلاقة التي تربط q و u_C : $q = C \, . \, u_C$.

eــ استنتاج عبارة i بدلالة السعة C و التوتر u_C : $i = dq/dt$ و u .

fــ بتطبيق قانون جمع التوترات توصل إلى العلاقة بين E ، u_R و u_C : حسب قانون جمع التوترات لدينا : $u_C + u_R = E$

و حيث أن : $u_R = R\,i$ و لدينا $i = dq/dt$ ، إذن : $u_C + RC\, du_C/dt = E$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة إلى u_C .

ــ $u_C = E\,[(1 - \exp(-t/\tau)\,]$ حيث $\tau = RC$ ، هي حل للمعادلة التفاضلية .

aــ التحقق أن $u_C = E\,[(1 - \exp(-t/\tau)\,]$ هي حل للمعادلة التفاضلية :

نحسب . $du/dt = E/\tau \exp(-t/\tau)$. و بالتعويض عن u_C و $d\,u_C/dt$ في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$RC\, E/\tau \exp(-t/\tau) + E[1 - \exp(-t/\tau)] = E$. بالفعل $u = E\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

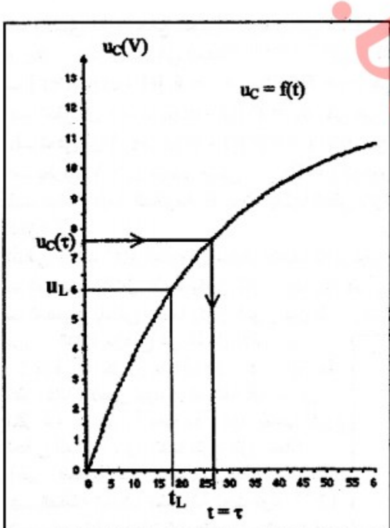
bــ تحقق أن $u_C = E\,[(1 - \exp(-t/\tau)\,]$ تتفق مع الشرط الإبتدائي : الشرط الإبتدائي هو $u_C(0) = 0$ المكثفة غير مشحونة ابتدائيا . لدينا : $u_C(0) = E\,[(1 - \exp(-0/\tau)\,] = 0$.

cــ التحقق أن $\tau = RC$ تجانس الزمن : $[\tau] = [RC] = [(U/I)]\,.\,[(Q/U)] = [T]$.

ــ بتحديد فاصلة النقطة التي ترتيبها 0,63 E . بالفعل عند $t = \tau$ التوتر بين طرفي المكثفة يساوي إلى 63% من قيمته العظمى E أي $0{,}63\,E$. $u_C(\tau) = E\,[(1 - \exp(-\tau/\tau)\,] = E\,[(1 - \exp(-1)\,] = 7{,}59\ V$. بالقراءة البيانية نجحد : $\tau = 27\ s$.

dــ استنتاج قيمة المقاومة R : $R = \tau/C = 27/(120 \,.\, 10^{-6}) = 2{,}25 \,.\, 10^5\ \Omega = 2{,}3 \,.\, 10^5\ \Omega$.

الجزء 2 :



aــ التوتر بين طرفي المكثفة u_C خلال مرحلة التلامس :

خلال مرحلة التلامس ، التوتر بين طرفي المكثفة يصبح معدوما لحظيا و منه يصبح التوتر بين طرفي المكثفة u_C أصغر من u_L و منه المصباح يشتعل .

bــ كيفية تطور التوتر بين طرفي المكثفة مع مرور الزمن : عندما نترك الزر لحاله ، المكثفة تشحن ، u_C يزداد أسيا من V إلى 12 V .

cــ ثابت الزمن لثنائي القطب RC المستعمل هو $\tau = 25\ s$. كيف تتطور حالة المصباح بعد ترك الزر لحاله : شحن المكثفة ليس لحظي ، المصباح يبقى مشتعل خلال مدة زمنية معينة ثن ينطفئ عندما يصل التوتر u_C إلى القيمة u_L .

dــ العبارة الحرفية للحظة التي عندها التوتر بين طرفي المكثفة يصل إلى القيمة العظمى u_L بدلالة u_L ، E و τ :

عند اللحظة $t = t_L$ لدينا : $u_C = u_L$

$$E\,[(1 - \exp(-t_L/\tau)\,] = u_L \Rightarrow 1 - \exp(-t_L/\tau) = u_L/E \,.$$

$$\Rightarrow t_L/\tau = -\ln(E - u_L)/E$$

$$(1 - u_L/E) = \exp(-t_L/\tau) \Rightarrow \ln(1 - u_L/E) = -t_L/\tau$$

$$\Rightarrow \ln(E - u_L)/E = -t_L/\tau$$

و منه : $t_L/\tau = \ln(E)/(E - u_L)$ و منه : $t_L = \tau \,.\, \ln(E)/(E - u_L)$.

eــ حساب قيمة t_L ، مدة اشتعال المصباح : $t_L = 25 \,.\, \ln(12)/(12 - 6{,}0) = 17\ s$.

fــ اعد حساب قيمة t_L بيانيا بالإستعانة بالمنحنى $u_C = f(t)$ المعطى . حدد بوضوح هذه المدة على المنحنى : انظر الشكل السابق

gــ نريد أن نزيد من مدة اشتعال المصباح : لزيادة مدة اشتعال المصباح ، يجب زيادة قيمة ثابت الزمن ، و حيث أن هذا الأخير يتعلق بالمقاومة و السعة ، إذن يجب الزيادة في قيمة المقاومة أو السعة .

التمرين ــ 12

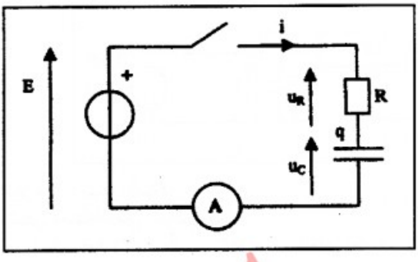
الوماض الإلكتروني للآلة التصوير مغذى بعمودين 1,5 V . دارة مهتزة ذات توتر منخفض تحول التيار المستمر إلى تيار متناوب . محول صغير أين وشيعته الأولية تشكل ذاتية الدارة المهتزة ترفع من قيمة التوتر ثم هذا التوتر يقوم بواسطة صمام . هذا التوتر المقوم يسمح بشحن مكثفة سعتها $C = 150\ \mu F$ بتقريب 10 % بتوتر قيمته $U = 330\ V$.

الجزء 1 : دراسة الوماض

a– اعط عبارة الطاقة الكهربائية E_e المخزنة في مكثفة هذا الوماض عندما يكون مشحون . احسب قيمتها العددية .

b– التفريغ السريع في مصباح ذو توهج يسمح بإعطاء اشعاع لمدة زمنية من رتبة ميلي ثانية . ماهي القيمة العددية للإستطاعة الكهربائية P_e المستهلكة خلال هذا الإشعاع ؟

c– ما هو السبب الذي يجعلنا نرفع التوتر بين طرفي المكثفة قبل تطبيقه و هذا بعد تقويمه .



الجزء 2 : الدراسة التجريبية للدارة RC .

للتحقق من قيمة السعة C للمكثفة ، قام طالب بتحقيق التركيب الموضح في الشكل المقابل . المقاومة R لها قيمة كبيرة و المولد ذو توتر مستمر قوته المحركة الكهربائية $E = 12\ V$.

عند اللحظة $t = 0$ ، يغلق الدارة و يسجل الشدات للتيار خلال كل عشرة ثواني فيحصل على الجدول التالي :

t (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
i (μA)	54,0	40,6	30,6	23,0	17,4	13,1	9,8	7,3	5,6	4,2

a– علما أن المكثفة فارغة عند اللحظة $t = 0$ ، حدد قيمة المقاومة R المستعملة في هذا التركيب .

b– ارسم على ورقة مليمترية المنحنى $i = f(t)$ انطلاقا من قيم الجدول السابق .

السلم : 2 cm من أجل 10 s على محور الفواصل ، 2 cm من أجل 10 μA على محور التراتيب .

c– شدة التيار الكهربائي خلال هذه التجربة تتناقص بدلالة الزمن حسب القانون التالي : $i(t) = I_0\ \exp(-t/\tau)$ حيث τ ثابت الزمن للدارة و I_0 قيمة الشدة عند اللحظة $t = 0$. – ما هي القيمة العددية للشدة $i(\tau)$ في الدارة عندما $t = \tau$ ؟

– اقرأ على المنحنى قيمة τ ثم استنتج قيمة السعة للمكثفة . – قارن هذه النتيجة مع القيمة المعطاة من طرف صانع المكثفة .

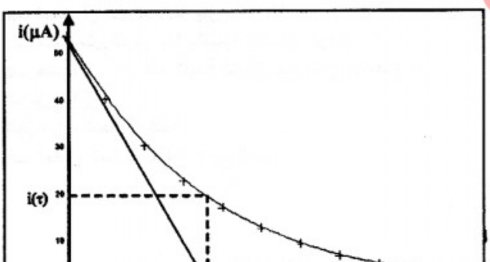
الحـل –12

الجزء 1 : دراسة الوماض

a– عبارة الطاقة الكهربائية E_e المخزنة في مكثفة الوماض : $E_e = 1/2C\ .\ U^2 = 1/2\ .\ 150\ .\ 10^{-6}\ .\ 330^2 = 8{,}17\ J$.

b– القيمة العددية للإستطاعة الكهربائية P_e المستهلكة خلال هذا الإشعاع : $P = E_e / \Delta t = 8\ kW$.

c– السبب الذي يجعلنا نرفع التوتر بين طرفي المكثفة قبل تطبيقه و هذا بعد تقويمه : كلما زاد التوتر ، زادت الطاقة المخزنة في المكثفة ، لأن E_e تتناسب طردا مع U^2 .



الجزء 2 : الدراسة التجريبية للدارة RC .

a– تحديد قيمة المقاومة R المستعملة في هذا التركيب :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $E = u_C(t) + u_R(t)$ و عند اللحظة $t = 0$ يكون لدينا : $E = u_C(0) + u_R(0)$ و لكن $u_C(0) = 0$ لأن المكثفة فارغة عند اللحظة $t = 0$.

و منه : $E = u_R$. و منه :

$$R = E / i(0) = 12/(54{,}0\ .\ 10^{-6}) = 222\ k\Omega$$

b– رسم على ورقة مليمترية المنحنى $i = f(t)$: انظر الشكل

– القيمة العددية للشدة $i(\tau)$ في الدارة عندما $t = \tau$:

عندما $t = \tau$ يكون لدينا :

$i(t) = I_0\ \exp(-1) = (54{,}0\ .\ 10^{-6})/e = 19{,}9\ \mu A$.

القراءة البيانية تعطي : $\tau = 36\ s$. $C = \tau/(R) = 36/(222\ .\ 103) = 162\ \mu F$

الإرتياب النسبي : $(162 - 150)/150 = 8\ \%$. القيمة المعطاة من طرف صانع المكثفة تتوافق مع النتيجة .

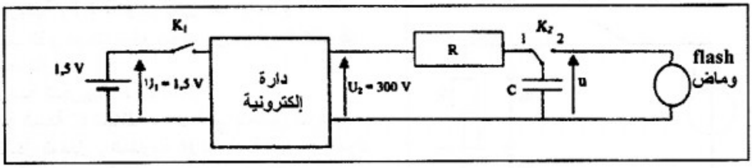
التمرين –13

نقترح دراسة مبدأ تشغيل وماض (flash) لآلة تصوير . للحصول على إشعاع ذو إستطاعة ضوئية كافية نستخدم وماض الذي يتطلب توتر كبير (على الأقل 250 V) من أجل أن يعطي إشعاع في وقت زمني صغير . لتخزين الطاقة الآزمة لتشغيل الوماض ، تستخدم مكثفة سعتها C . هذه المكثفة تشحن بواسطة دارة إلكترونية مغذاة بواسطة عمود . نوضح مبدأ الإشتغال بواسطة المخطط التالي : – التغذية تكون بواسطة عمود توتر مستمر $U_1 = 1{,}50\ V$.

– دارة إلكترونية تسمح برفع التوتر U_1 إلى توتر مستمر $U_2 = 300\ V$.

ـ ناقل أومي مقاومته $1,0\ k\Omega$ يسمح بشحن مكثفة التي سعتها $C = 150\ \mu F$ بوضع القاطعة K_2 في الوضعية 1 و غلق القاطعة K_1 .

ـ وماض (flash) يبدأ التشغيل (عندما تشحن المكثفة) بوضع القاطعة K_2 في الوضعية 2 .



الجزء 1 : شحن المكثفة

نشحن المكثفة بغلق القاطعة K_1 .

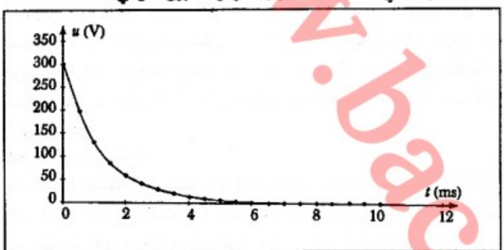
a ـ نعطي عبارة ثابت الزمن $\tau = RC$. تحقق بطريقة التحليل البعدي تجانس هذه العبارة مع الزمن .

b ـ احسب عدديا τ . c ـ احسب الطاقة المخزنة E في المكثفة عند نهاية الشحن بتوتر U_2 .

d ـ برر فائدة شحن المكثفة بتوتر عالي جدا 300 V بالإستعانة بحساب الطاقة 'E التي تخزنها المكثفة لو شحنت مباشرة بواسطة العمود (التوتر U_1) .

الجزء 2 : تفريغ المكثفة

بوضع القاطعة K_2 في الوضعية 2 يتنبه الوماض بفضل الطاقة المخزنة في المكثفة . نسجل التوتر u بين طرفي المكثفة . نحصل على المنحنى المقابل :



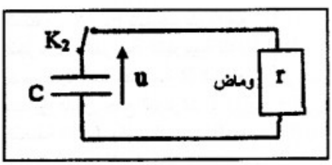
a ـ حدد بيانيا ثابت الزمن 'τ الموافق للتفريغ معطيا الطريقة المستعملة .

b ـ قارن بين ثابتي الزمن للشحن و التفريغ .

c ـ هل النتيجة تتوافق مع شروط اشتعال الوماض ؟

ـ نمثل الوماض بناقل أومي مقاومته r .

انطلاقا من الدارة الكهربائية الموضحة في الشكل المقابل بين أن المعادلة التفاضلية لتفريغ المكثفة عبر الناقل الأومي تكون من الشكل : $1/rC\ u + du/dt = 0$



a ـ تحقق أن حل المعادلة يكون من الشكل : $u = U_0 \exp(-t/\tau')$.

b ـ ماذا يمثل التوتر U_0 بالنسبة لإشتغال الوماض ؟

c ـ حدد U_0 . هل هذه القيمة تتوافق مع إنتاج الإشعاع ؟

الحل ـ 13

الجزء 1 : شحن المكثفة

a ـ تجانس العبارة $RC = \tau$ مع الزمن :

$[RC] = [R]\,[C]$. :

$U_R = R \cdot I \Rightarrow [R] = [U] / [I]$,

$U_C = q / C \Rightarrow [C] = [Q] / [U]$

$[RC] = [U] / [I] \cdot [Q] / [U] = [Q] / [I]$. $i = dq / dt \Rightarrow [I] = [Q] / [T]$

$[RC] = [Q] / [([Q] / [T])] = [T]$. $[\tau] = [RC] = [T]$.

b ـ حساب عدديا τ : $\tau = RC = 1,00 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 10^{-6} = 0,15\ s$.

c ـ حساب الطاقة المخزنة E في المكثفة عند نهاية الشحن بتوتر U_2 :

$$E_{cond} = 1/2\ C\ U_2^2 = 1/2 \cdot 150 \cdot 10^{-6} \cdot 300^2 = 6,75\ J$$

d ـ تبرير فائدة شحن المكثفة بتوتر عالي جدا 300 V : لو تشحن المكثفة بعمود قوته المحركة الكهربائية $U_0 \cong 1,5\ V$:

الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E'_{cond} = 1/2\ C\ U^2 = 1/2 \cdot 150 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5^2 = 1,69 \cdot 10^{-4}\ J$

هذه الطاقة غير كافية لبعث الإشعاع للوماض .

ـ المقارنة : $E_{cond} / E'_{cond} = 40000$ تكون الطاقة المخزنة في حالة 300 V أكبر بـ 40000 مرة في حالة 1,5 V .

تكون الطاقة المخزنة في حالة 300 V كافية لبعث الإشعاع للوماض .

الجزء 2 : تفريغ المكثفة

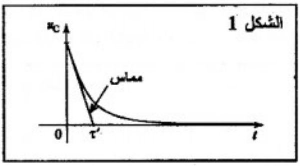
a ـ تحديد بيانيا ثابت الزمن 'τ الموافق للتفريغ :

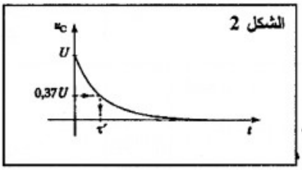
يمكن تحديد τ' بطريقتين :

1ــ نستخدم المنحنى و المماس لهذا المنحنى عند اللحظة $t = 0$. انظر الشكل 1 .

2ــ نستخدم الخاصية $u_C(t = \tau) = 0,37\ U_2$. انظر الشكل 2 .

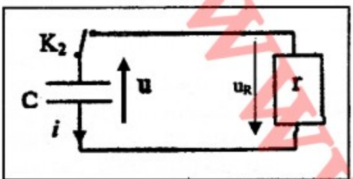
نجد على الشكل أن $\tau' = 1,5\ ms$.





هذه القيمة صغيرة جدا بمقارنتها بــ τ . حيث تسترجع الطاقة في زمن صغير جدا و هذا ما يسمح بإشعال الوماض في مدة زمنية قصيرة و هذا هو مبدأ عمل الوماض في آلة التصوير .

b– المقارنة بين ثابتي الزمن للشحن و التفريغ : $\tau' = 1,5\ ms$ و $\tau = 150\ ms$. زمن شحن المكثفة يكون من زمن تفريغها بـ 100 مرة . التفريغ النهائي يكون خلال مدة $t = 5\ \tau'$ أي زمن صغير جدا . إذن كل طاقة المكثفة تحرر في زمن صغير جدا . و هذا ما يسمح بإحداث الإشعاع .



ــ تبيان أن المعادلة التفاضلية لتفريغ المكثفة تكون من الشكل :

$1/rC\ u + du/dt = 0$:

بتطبيق قانون جمع التوترات ، خلال طور التفريغ نجد : $u + r\,i = 0$

و منه : $u + rC\ du/dt = 0$

و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $1/rC\ u + du/dt = 0$

a– التحقق أن حل المعادلة يكون من الشكل : $u = U_0 \exp(-t/\tau')$.

حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة إلى u_C من الشكل : $u = A \,.\, \exp(-\alpha t)$

c– تحديد قيم كل من A و α : إذا كان $u = A \,.\, \exp(-\alpha t)$ هو حل للمعادلة التفاضلية فإن u_C يجب أن يحقق المعادلة .

نعوض عن u و du/dt في المعادلة حيث : $u = A \,.\, \exp(-\alpha t)$ و $du/dt = -\,\alpha\, A \,.\, \exp(-\alpha t)$.

لدينا : $rC\,(-\,\alpha\, A \,.\, \exp(-\alpha t) + A \,.\, \exp(-\alpha t) = 0$ و $-\,\alpha\, ArC \exp(-\alpha\, t) + A \exp(-\alpha t) = 0$ هذه المعادلة محققة

إذا كان $A - \alpha\, ArC = 0$ أي من أجل $A = \alpha\, ArC$ و منه : $\alpha = 1/rC$ و منه : $1/\alpha = rC$

إذن : $1/\alpha$ هو ثابت الزمن τ للدارة .

الشروط الإبتدائية تسمح بتحديد قيمة A . فعلا عند اللحظة : $t = 0$ نجد $u = U_0$ (مكثفة ابتدائيا مشحونة تحت توتر U_0)

إذن : $u = A \exp(-t/rC) = U_0$. عند $t = 0$ نجد : $A \exp(0) = 1$ إذن : $u\,(t = 0) = A = U_0$

إذن يكون لدينا : $A = U_0$. A يمثل التوتر الإبتدائي بين طرفي المكثفة .

إذن حل المعادلة يكون من الشكل : $u = U_0 \exp(-t/\tau')$ حيث : $\tau' = rC$.

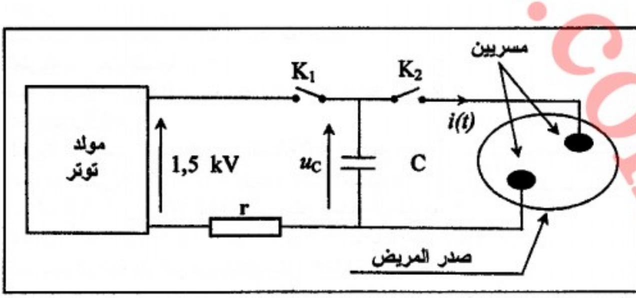
b– التوتر U_0 يمثل القيمة العظمى للتوتر u . هو التوتر عند لحظة بدأ التفريغ .

c– تحديد U_0 : حسب المنحنى ، $u\,(0) = U_0 = 300\ V$. هذه القيمة أكبر من $250\ V$ ، إذن تمكن من احداث الإشعاع أي اشتغال الوماض .

التمرين ــ14

Le défibrillateur cardiaque هو جهاز يستعمل في قطاع الصحة و بالضبط في مصلحة الإستعجلات . فهو يسمح بتطبيق صدم كهربائي على صدر المريض حيث الألياف العضلية للقلب تنقبض بشكل غير منتظم .

Le défibrillateur cardiaque يمكن تمثيله بشكل مبسط بالمخطط الموضح في الشكل المقابل .



سعة المكثفة هي $C = 470\ \mu F$.

صدر المريض نمثله بناقل أومي مقاومته $R = 50\ \Omega$.

الجزء A

عند البدأ في تشغيل الجهاز،الممرض يحصل على تشحين المكثفة (ابتدائيا فارغة) و هذا بغلق القاطعة K_1(K_2 تكون مفتوحة).

a– اختر من بين المنحنيين ، المنحنى الموافق لهذه العملية . برر إجابتك .

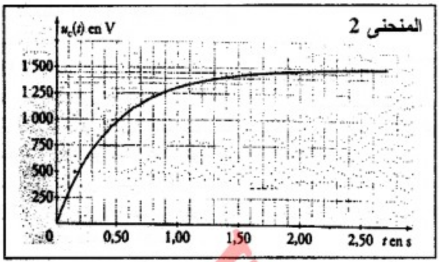
b– حدد ثابت الزمن إنطلاقا من هذا المنحنى مع شرح الطريقة المتبعة .

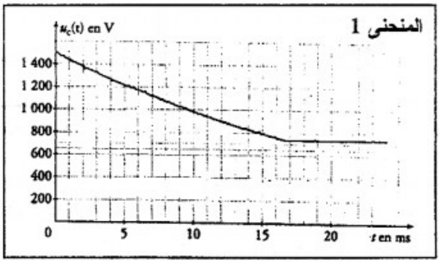
c– ماهي القيمة العظمى W_{max} للطاقة التي يمكن للمكثفة أن تخزنها ؟

d– إذا اعتبارنا أن المكثفة يمكن إعتبارها مشحونة عندما يصل التوتر بين طرفيها إلى 97% من التوتر الأعظمي ،

ما هي المدة الزمنية Δt التي من خلالها تكون المكثفة مشحونة ؟

e ــ قارن هذه القيمة مع القيمة المعتادة 5τ .





الجزء B

عندما تكون المكثفة مشحونة ، الممرض يمكن أن يحدث الصدم الكهربائي و ذلك بتوصيل المكثفة إلى المسريين الموضوعيين على صدر المريض . حيث يختار مستوى طاقة الصدم الكهربائي المطبق على المريض و كمثال $W = 400\ J$. عند اللحظة الإبتدائية ، الممرض يغلق القاطعة K_2 (K_1 مفتوحة) هذا ما ينتج عنه التفريغ الجزئي للمكثفة . عملية التفريغ تتوقف ذاتيا عندما تعطى المكثفة كمية الطاقة المختارة . خلال تطبيق الصدم الكهربائي ، التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة يتغير حسب العبارة التالية : $u_C(t) = A\exp(-t/RC)$. a ــ حدد القيم العددية لــ A و RC ، مع ذكر الوحدات .

b ــ ما هي العلاقة التي تربط شدة التيار $i(t)$ للتفريغ و الشحنة الكهربائية $q(t)$ التي يحملها اللبوس الموجب للمكثفة ؟

c ــ ما هي العلاقة التي تربط التوتر $u_C(t)$ و الشحنة الكهربائية $q(t)$ ؟

d ــ استنتج أن عبارة $i(t)$ تكون من الشكل : $i(t) = B\exp(-t/RC)$. عبر عن B بدلالة الثوابت A ، R و C .

e ــ عند أي لحظة تكون شدة التيار أعظمية ؟ أحسب القيمة المطلقة لهذه الشدة . هل هذه القيمة تتعلق بسعة المكثفة ؟

الجزء C

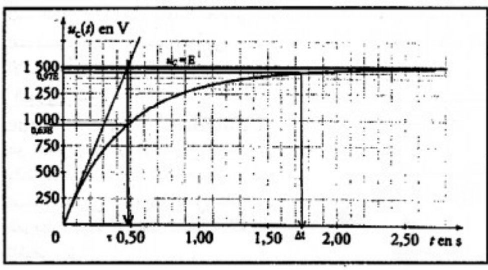
تفريغ المكثفة يتوقف عندما تعطى المكثفة الطاقة الكهربائية المختارة ($W = 400\ J$) .

a ــ حدد بيانيا باستعمال إحدى المنحنيات المعطاة اللحظة t_1 التي عندها التفريغ الجزئي للمكثفة قد توقف . احسب قيمة التوتر $u_C(t_1)$ عند هذه اللحظة . تحقق بيانيا من هذه القيمة .

b ــ بالإعتماد على تغير طاقة المكثفة بين الحظتين t_0 و t_1 ، أعد حساب قيمة التوتر $u_C(t_1)$

الحــل ــ14

الجزء A



a ــ اختيار من بين المنحنيين ، المنحنى الموافق لهذه العملية : الموافق لهذه العملية هو المنحنى 2 .

b ــ تحديد ثابت الزمن انطلاقا من هذا المنحنى :

الطريقة 1 : عند اللحظة $t = \tau$ ، قيمة $u_C = 0{,}63E = 945\ V$ ، نقرأ إذن على المنحنى القيمة التقريبية $\tau = 0{,}5\ s$.

الطريقة 2 : المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ يقطع الخط المقارب الأفقي $u_C = E = 1500V$ عند نقطة فاصلتها $t = \tau$

c ــ القيمة العظمى W_{max} للطاقة التي يمكن للمكثفة أن تخزنها :

نعلم أن $W_C = 1/2\ C\,u_C^2$ إذن $W_{max} = 1/2\ C\,E^2 = 529\ J$.

d ــ المدة الزمنية Δt التي من خلالها تكون المكثفة مشحونة :

نعتبر أن المكثفة مشحونة عندما : $u_C = 0{;}97\ E = 1455\ V$ و هذا ما يوافق بيانيا على المنحنى $\Delta t = 1{,}6\ s$.

e ــ مقارنة هذه القيمة مع القيمة المعتادة 5τ :

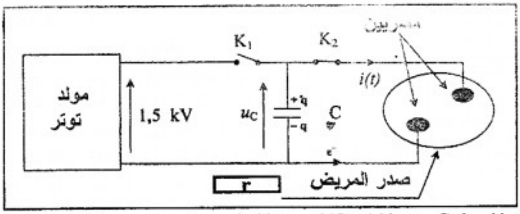
$\Delta t < 5\tau$ (من رتبة $2{,}5\ s$) وهذا مقبول لأنه خلال 5τ المكثفة تشحن بنسبة 99% .

الجزء B

a ــ تحديد القيم العددية لــ A و RC : عند اللحظة $t = 0$ ، $(0) = A\exp(-0) = u_{Cmax} \Rightarrow A = u_{Cmax} = 1500\ V$

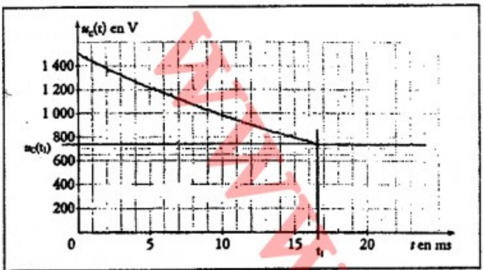
و منه : $RC = 470 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 23{,}5 \cdot 10^{-3}\ s$.

b ــ العلاقة التي تربط شدة التيار $i(t)$ للتفريغ و الشحنة الكهربائية $q(t)$ التي يحملها اللبوس الموجب للمكثفة :



خلال التفريغ ، q تتناقص و منه : $dq < 0$
، إذن $i > 0$ أي التيار ينتقل في الجهة الموضحة على الشكل المرفق . و منه : $i(t) = - dq/dt$.
c– العلاقة التي تربط التوتر $u_C(t)$ و الشحنة الكهربائية $q(t)$: $u_C(t) = q(t)/C$.
d– استنتاج أن عبارة $i(t)$ تكون من الشكل :
$i(t) = B \exp(-t/ RC)$:
و منه : $i = - dq/dt = - d(Cu_C)/dt = - C\, du_C/dt = - C\, d/dt\, [B \exp(-t/RC)] = +A/R \exp(-t/RC)$. $B = A/R$.
e– اللحظة أين تكون شدة التيار عظمى بالقيمة المطلقة : $|i| = |\ A/R \exp(-t/RC)\ | = A/R \exp(-t/RC)$. تكون شدة التيار عظمى بالقيمة المطلقة عند اللحظة $t = 0$ و قيمتها : $i = A/R = 30$ A . هذه القيمة مستقلة عن C .

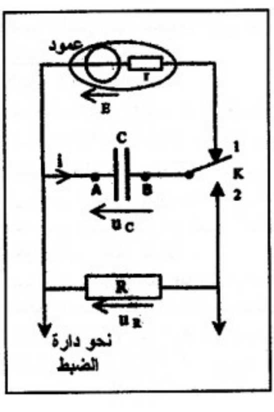
الجزء C



a– تحديد بيانيا اللحظة t_1 التي عندها التفريغ الجزئي قد توقف :
حسب المنحنى ، التفريغ يتوقف عند اللحظة $t_1 = 16,5$ ms .
– حساب قيمة التوتر $u_C(t_1)$ عند هذه اللحظة :
$u_C(t_1) = A \exp(-t_1/RC) = 743$ V .
b– بالإعتماد على تغير طاقة المكثفة بين الحظتين t_0 و t_1 ، نحسب قيمة التوتر $u_C(t_1)$: خلال التفريغ ، طاقة المكثفة تتناقص ، و منه التغير في طاقة المكثفة يكون سالب و يوافق معاكس الطاقة المقدمة إذن :
$\Delta E_C = E^f_C - E^i_C = E_C(t_1) - E_C(t_0) = 1/2\, C\, u_C^2(t_1) - 1/2\, C\, u_C^2(t_0) = - W$.
إذن : $1/2\, C\, u_C^2(t_1) = 1/2\, C\, u_C^2(t_0) - W \Leftrightarrow u_C^2(t_1) = u_C^2(t_0) - 2/C \cdot W \Leftrightarrow u_C(t_1) = 740$ V .

التمرين –15

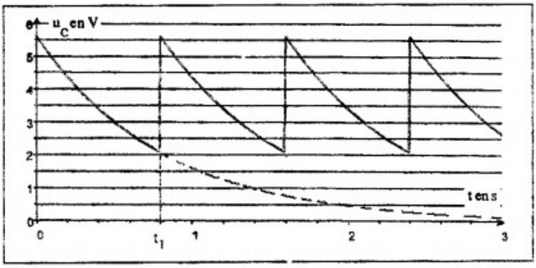
قلبنا ينقبض بأكثر من 100 ألف مرة في اليوم . يدق 24 ساعة على 24 ساعة خلال حياتنا و هذابفضل عضو طبيعي يدعى : le nœud sinusal . عندما هذا العضو لا يقوم بدوره بشكل صحيح ، طب الجراحة يسمح بتعويضه بغرس جهاز إصطناعيداخل القفص الصدري للمريض الذي يجبر العضلة القلبية على الدق بانتظام حيث يبعث لها اشارات كهربائية عن طريق مسريين . هذا الجهاز يوضع في صنذوق صغير عرضه 5 cm و سمكه 6 mm و كتلته 30 g . هذا الجهاز (يدعى Pacemaker) هو مولد إشارات يمكن نمذجته بدارة كهربائية الممثلة في الشكل المقابل و التي تحتوي على مكثفة سعتها C = 470 nF و ناقل أومي مقاومتهR و عمود خاص و قاطعة K . العمود الخاص الذي يظهر في الشكل يمكن نمذجته بمقاومة صغيرة جدا r و مولد توتر مثالي قوته E . عندما تكون القاطعة في الوضعية .



1 ، المكثفة تشحن لحظيا ثم عندما توضع القاطعة في الوضعية 2 المكثفة تفرغ تدريجيا عبر الناقل الأومي R إلى أن تصل إلى قيمة حدية ، عند هذه اللحظة ، الدارة تبعث إشارة كهربائية إلى القلب عن طريق المسريين فنحصل عندئذ على دقة القلب . عند نهاية العملية الأخيرة ، ترجع القاطعة من جديد إلى الوضعية 1 فتشحن المكثفة و هكذا . نحصل على منحنى التوتر بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن .

الجزء 1 : شحن المكثفة

a– عندما تكون القاطعة في الوضعية 1 تشحن المكثفة بشكل لحظي ، لماذا؟
b– للحصول على تسجيل التطور الزمني للتوتر u_C نستعمل كومبيوتر ، أعد رسم تركيب الدارة محددا أقطاب توصيل الكومبيوتر .
c– على المنحنى 1 حدد الجزء أو الأجزاء الموافقة للتوتر u_C خلال شحن المكثفة . برر هذا الإختيار .
d– نعتبر أن المكثفة مشحونة . ما هي قيمة شدة التيار المار في الدارة ؟
e– القوة المحركة الكهربائية هي E هي قيمة التوتر بين طرفي العمود عندما لا يعطي التيار . إنطلاقا من التسجيل $u_C = f(t)$



اعط قيمة E .

الجزء 2 : تفريغ المكثفة

باحترام الإتجاهات الإصطلاحية في الدارة :

a ــ حدد إشارة الشدة i للتيار خلال التفريغ .

b ــ اكتب العلاقة بين الشدة i للتيار و التوتر u_R .

c ــ اكتب العلاقة بين الشحنة q للبوس A للمكثفة و التوتر u_C . d ــ اكتب العلاقة بين الشدة i و الشحنة q .

e ــ اكتب العلاقة بين التوترات u_R و u_C خلال التفريغ .

f ــ استنتج أن المعادلة التفاضلية خلال التفريغ التي يحققها التوتر u_C تكون من الشكل : $1/\tau \cdot u_C + du_C/dt = 0$

g ــ اعط العبارة الحرفية لثابت الزمن τ ثمبين أن له وحدة زمن . h ــ حدد بيانيا قيمة τ مع شرح الطريقة المتبعة .

i ــ استنتج قيمة R .

الجزء 3 : العلاقة بين تفريغ المكثفة و دقات القلب

a ــ عند اللحظة t_1 ، تعطي الدارة إشارة كهربائية فتتفرغ المكثفة جزئيا . ما هي العبارة الحرفية للتوتر u_C بين طرفي المكثفة عند هذه اللحظة .

b ــ بيانيا قيمة هذا التوتر هي 2,1 V . هل توافق قيمة E التي حصلنا عليها في السؤال السابق .

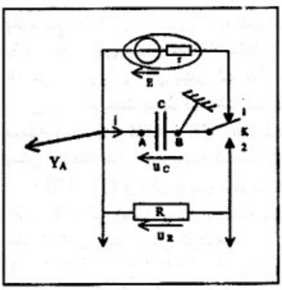
c ــ علما أن حل المعادلة التفاضلية السابقة يكون من الشكل : $u_C(t) = E\exp(-t/\tau)$. بين أن $t_1 = \tau$.

d ــ استنتج المدة الزمنية Δt التي تفصل بين إشارتين كهربائيتين متتاليتين . e ــ ما هي عندئذ عدد دقات القلب في كل دقيقة

الجزء 4 : تخزين الطاقة : الوماض (flash) الإلكتروني

الطاقة المتحررة في مدة زمنية صغيرة جدا لإشعاع الوماض (flash) هي مخزنة مسبقا في مكثفة ذات سعة كبيرة ، مشحونة بواسطة أربعة أعمدة على التسلسل و التي تكافئ مولد قوته U = 6 V . هذه الأعمدة تحتوي على طاقة كلية E = 18 kJ عندما تكون جديدة . نقبل أن نصف هذه الطاقة يتحول إلى المكثفة ، بعدها يجب أن تستبدل هذه الأعمدة .

طريقة استعمال الوماض (flash 5400 HS) الإلكتروني مغذى بأربعة أعمدة	
مدة الشحن بعد كل إشعاع	عدد الإشعاعات
من 0,2 s إلى 11 s	من 100 إلى 3500 إشعاع



a ــ باستخدام المعطيات ، احسب قيمة الطاقة المتحررة من أجل إشعاع ذو شدة ضوئية و مدة زمنية أعظمية .

b ــ استنتج السعة C للمكثفة المشحونة تحت توتر ثابت U = 6 V .

c ــ باستخدام المعطيات ، أعط رتبة ثابت الزمن لدارة الشحن .

d ــ استنتج رتبة المقاومة التي عبرها شحنت المكثفة .

الحل ــ15

الجزء 1 : شحن المكثفة

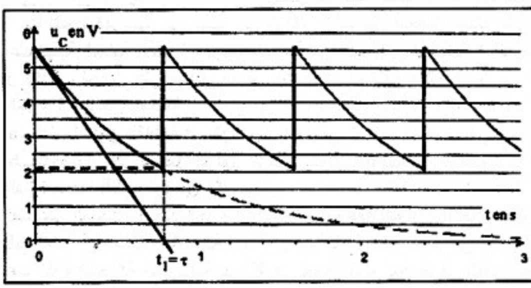
a ــ عندما تكون القاطعة في الوضعية 1 تشحن المكثفة بشكل لحظي : تشحن المكثفة بنسبة 99 % خلال مدة زمنية 5 τ . في هذا الجزء من الدارة $\tau = r.C$. سعة المكثفة قيمتها ضعيفة جدا C = 470 nF ، و كذلك قيمة المقاومة صغيرة جدا ، و منه تكون τ قريبة من الصفر 0 . و منه تشحن المكثفة لحظيا .

b ــ رسم تركيب الدارة و تحديد أقطاب توصيل الكومبيوتر : انظر الشكل .

c ــ تحديد الأجزاء الموافقة للتوتر u_C خلال شحن المكثفة : عندما تكون المكثفة مشحونة ، لا يمر أي تيار و منه : i = 0 A . نقرأ على المنحنى 1 : $u_{Cmax} = 5{,}7\ V = E$.

d ــ قيمة شدة التيار المار في الدارة : i = 0 A

e ــ اعط قيمة E : $u_{Cmax} = 5{,}7\ V = E$



الجزء 2 : تفريغ المكثفة

a ــ تحديد إشارة الشدة i للتيار خلال التفريغ :

إشارة شدة i للتيار خلال التفريغ سالبة .

b ـــ كتابة العلاقة بين الشدة i للتيار و التوتر u_R : حسب قانون أوم : $u_R = - R . i$.

c ـــ كتابة العلاقة بين الشحنة q للبوس A للمكثفة و التوتر u_C : $q = C . u_C$.

d ـــ كتابة العلاقة بين الشدة i و الشحنة q : $i = dq/dt$.

e ـــ كتابة العلاقة بين التوترين u_R و u_C خلال التفريغ : خلال التفريغ و حسب قانون جمع التوترات : $u_R = u_C$.

f ـــ استنتاج أن المعادلة التفاضلية خلال التفريغ : عبارة i بدلالة السعة C و التوتر u_C : $i = dq/dt$ و $q = C . u$

و منه : $i = d(C .u)/dt = C\, du/dt$. و حسب قانون جمع التوترات لدينا : $u_C + u_R = 0$ و حيث أن : $u_C = - R i$

إذن : $u_C + RC\, du_C/dt = 0$. بوضع $\tau = RC$ ، نحصل على : $1/\tau . u_C + du_C/dt = 0$.

g ـــ تجانس العبارة الحرفية لثابت الزمن τ مع الزمن :

$[RC] = [R]\,[C]$:

$U_R = R . I \Rightarrow [R] = [U] / [I]$,

$U_C = q / C \Rightarrow [C] = [Q] / [U]$

$[RC] = [U] / [I] . [Q] / [U] = [Q] / [I]$. $i = dq / dt \Rightarrow [I] = [Q] / [T]$

$[RC] = [Q] / [([Q]/ [T])] = [T]$. $[\tau] = [RC] = [T]$.

h ـــ تحديد بيانيا قيمة τ مع شرح الطريقة المتبعة :

الطريقة 1 : عند اللحظة $t = \tau$ ، قيمة $u_C = 0,37\, E = 2,1\, V$ ، نقرأ إذن على المنحنى القيمة التقريبية $\tau = 0,8\, s$.

الطريقة 2 : المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ يقطع الخط المقارب الأفقي $u_C = 0$ عند اللحظة $t = \tau = 0,8\, s$.

i ـــ استنتاج قيمة R : $R = \tau/C = 0,8/(470 . 10^{-9}) = 1,7\, M\Omega$.

الجزء 3 : العلاقة بين تفريغ المكثفة و دقات القلب

a ـــ العبارة الحرفية للتوتر u_C بين طرفي المكثفة عند اللحظة t_1 : المعطيات تشير إلى أن الإشارة تنشأ عندما : $u_{limite} = E/e$.

إذن : $E = u_C . e = 2,1 . e = 5,7\, V$

b ـــ بيانيا قيمة هذا التوتر هي 2,1 V . نعم توافق قيمة E التي حصلنا عليها في السؤال السابق .

c ـــ تبيان أن $t_1 = \tau$: لدينا : $u_C(t) = E \exp(-t/\tau)$ و : $u_C(t_1) = u_{limite} = E/e = E \exp(-1) = E \exp(-t_1/\tau)$.

و بالمطابقة نجد : $t_1 = \tau \Rightarrow t_1/\tau = 1$.

d ـــ استنتاج المدة الزمنية Δt التي تفصل بين إشارتين كهربائيتين متتاليتين : المدة الزمنية Δt التي تفصل بين إشارتين كهربائيتين متتاليتين يجب أن تكون قريبة من τ (τ هي المدة الأزمة لكي تصل u_C إلى القيمة $u_{limite} + l_0$ و هي مدة جد صغيرة لتشحين المكثفة) .

e ـــ عدد دقات القلب في كل دقيقة عندئذ : في كل $\tau = 0,8\, s$ تحدث دقة واحدة

و في كل 60 s تحدث N دقة و منه : $N = 60/0,8 = 75$ دقة .

الجزء 4 : تخزين الطاقة : الوماض (flash) الإلكتروني

a ـــ حساب قيمة الطاقة المتحررة من أجل إشعاع ذو شدة ضوئية و مدة زمنية أعظمية : الأعمدة تسمح بالحصول على 100 إشعاع لمدة و شدة أعظميتين . الطاقة الكلية للأعمدة هي 18 kJ . نصف هذه الطاقة ينتج 100 إشعاع . إذن طاقة الإشعاع الواحد هي : $E_1 = E/(2 . 100) = 90\, J$.

b ـــ استنتاج السعة C للمكثفة المشحونة تحت توتر ثابت $U = 6\, V$: $C = 5\, F \Leftarrow E_1 = 1/2\, C . U^2$

c ـــ اعطاء رتبة ثابت الزمن لدارة الشحن : التشحين يدوم 11 s و منه : $5\tau = 11$ و منه : $\tau = 2,2\, s$.

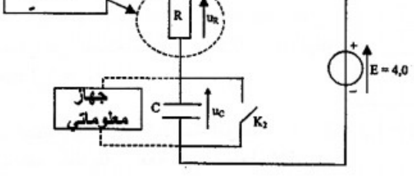
d ـــ استنتاج رتبة المقاومة التي عبرها شحنت المكثفة : $\tau = RC \Rightarrow R = \tau/C = 2,2/5 = 0,44\, \Omega$

التمرين ـــ16

يمكن أن نشكل مقياس حراري بواسطة ثنائي القطب (R , C) على التسلسل . من أجل ذلك نحقق الدارة المبينة في الشكل 1 . المكثفة سعتها $C = 1,0\, \mu F$. الناقل الأومي عبارة عن مقاومة حرارية أي مقاومته تتعلق بدرجة حرارته .

نضع المقاومة في حاوية أين الحرارة الداخلية تساوي θ . جهاز معلوماتي يسمح بتسجيل تطور التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن .

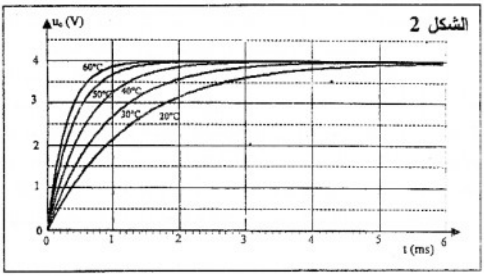
الشكل 1



البرتوكول التجريبي :

نريد رسم منحنى تطور قيمة المقاومة الحرارية بدلالة درجة الحرارة . من أجل ذلك نحقق البروتوكول التالي : المكثفة ابتدائيا فارغة و القاطعات K_1 و K_2 مفتوحة . عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K_1 و نسجل تطور التوتر u_C حتى نهاية شحن المكثفة . ثم نفتح القاطعة K_1 و نغلق القاطعة K_2 : المكثفة تفرغ تماما . و

الشكل 2



أخيرا نفتح القاطعة K_2 . نغير درجات الحرارة للحاوية و في كل مرة نعيد البروتوكول السابق فنحصل على المنحنى الموضح في الشكل 2 .

1ــ اكتب العلاقة بين التوتر E بين طرفي المولد ، التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي و التوتر u_C بين طرفي المكثفة .

2ــ حدد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_C خلال طور الشحن . 3 ــ حل هذه المعادلة يكون من الشكل :

. $u_C = A + B\exp(-t/\tau)$

aــ انطلاقا من الشروط النهائية للشحن ، حدد A . b ــ انطلاقا من الشروط الإبتدائية للشحن ، حدد B .

cــ استنتج عبارة u_C . 4ــ عبارة ثابت الزمن τ لثنائي القطب (R, C) هي : $\tau = RC$.

aــ بين بطريقة تحليل الأبعاد أن هذه العبارة متجانسة .

bــ حدد بيانيا قيمة τ ثابت الزمن الموافق لدرجة الحرارة $\theta_1 = 20\ °C$ مع الشرح .

cــ استنتج قيمة R_1 للمقاومة الموافقة . dــ بنفس الطريقة المتبعة اكمل الجدول التالي :

درجة الحرارة θ (°C)	$\theta_1 = 20$	25	30	35	40	45	50	55	60
ثابت الزمن τ (ms)	$\tau_1 =$	[redacted]		[redacted]		[redacted]		[redacted]	
المقاومة R (kΩ)	$R_1 =$	1,07		0,74		0,49		0,34	

eــ ارسم منحنى $R = f(\theta)$ باختيار السلم التالي : محور الفواصل : كل 1 cm توافق 5 °C .
محور التراتيب : كل 1 cm توافق 0,1 kΩ .

5ــ نحاول تجريب المقياس انحراري بوضعه في حاوية درجة حرارتها الداخلية θ نريد تحديدها . نقيس قيمة المقاومة الحرارية بواسطة الأوم ــ متر فنحصل على : $R = 0,5\ k\Omega$. مستعينا بالمنحنى السابق ، حدد درجة حرارة الحاوية .

الحــل ــ 16

1ــ كتابة العلاقة بين التوتر E و u_R و u_C : حسب قانون جمع التوترات : $E = u_R + u_R \Rightarrow E - u_R + u_R = 0$.

2ــ تحديد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_C خلال طور الشحن : لدينا : $E = u_C + u_R$.

و حيث أن : $u_R = R\,i$ و $i = dq/dt \Rightarrow u_R = R\,dq/dt$

و كذلك لدينا : $q = C\,u_C \Rightarrow u_R = R\,C\,du_C/dt$ إذن : $u_C + RC\,du_C/dt = E$

حل هذه المعادلة يكون من الشكل : $u_C = A + B\exp(-t/\tau)$.

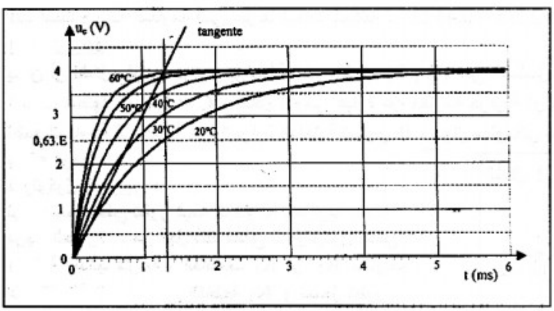
3ــa ــ تحديد A انطلاقا من الشروط النهائية للشحن : عندما في نهاية الشحن أي : $t \to \infty$ ، التوتر $u_C = E$.

$u_C = A + B\exp(-\infty/RC) \Rightarrow u_C = A$ و منه : $A = E$.

bــ تحديد B انطلاقا من الشروط الإبتدائية للشحن : عند اللحظة $t = 0$ المكثفة فارغة ، إذن : $u_C = 0$

حيث : $0 = E + B\exp(-0/RC) = E + B$ و منه : $B = -E$.

cــ استنتاج عبارة u_C : حل المعادلة التفاضلية من الشكل : $u_C = E - E\exp(-t/RC)$ و منه : $u_C = E(1 - \exp(-t/RC))$.



bــ حدد بيانيا قيمة τ ثابت الزمن الموافق لدرجة الحرارة $\theta_1 = 20\ °C$ مع الشرح : هناك طريقتين و هما :

الطريقة 1 : نرسم المماس للمنحنى عند المبدأ (t = 0) و سوف يقطع الخط المقارب الأفقي عند نقطة فاصلتها $t = \tau_1 = 1,3\ ms$ الطريقة 2 :

عند اللحظة $t = \tau_1$

$u_C = 0,63\ E = 0,63 . 4 = 2,5\ V$. على المنحنى نقرأ فاصلة النقطة $u_C = 0,63\ E$ توافق $t = \tau_1 = 1,3\ ms$.

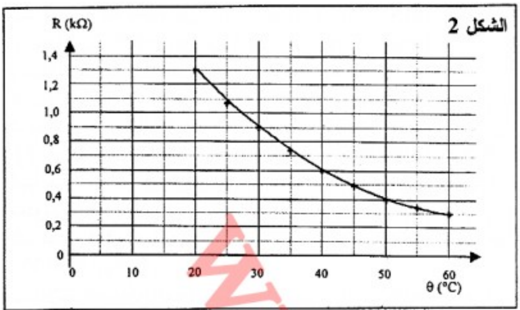
cــ استنتاج قيمة R_1 للمقاومة الموافقة : $R_1 = \tau_1/C = (1,3 . 10^{-3}) / (1,0 . 10^{-6}) = 1,3\ k\Omega$.

dــ بنفس الطريقة المتبعة نكمل الجدول التالي :

θ (°C) درجة الحرارة	$\theta_1 = 20$	25	30	35	40	45	50	55	60
τ (ms) ثابت الزمن	$\tau_1 = 1,3$	[redacted]	0,9	[redacted]	0,6	[redacted]	0,4	[redacted]	0,3
R (kΩ) المقاومة	$R_1 =$	1,07	0,9	0,74	0,6	0,49	0,4	0,34	0,3

e ـ رسم المنحنى $R = f(\theta)$ لم يحترم السلم المعطى . انظر الشكل 2 .

5ـ تحديد درجة حرارة الحاوية ، مستعينا بالمنحنى السابق : القراءة على المنحنى تعطي القيمة : $\theta = 44,5$ °C .

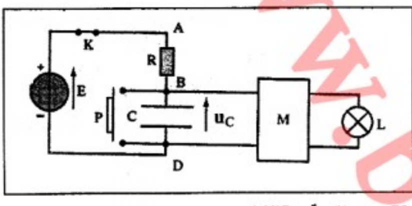


الشكل 2

التمرين ـ 17

مبدأ عمل مؤقتة

الهدف من هذه المسألة هو دراسة مبدأ عمل مؤقتة (Minuterie) التي تسمح بإطفاء مصباح آليا خلال مدة زمنية t_0 ، قابلة للتغيير . تركيب الدارة الكهربائية موضح في الشكل المقابل . تتكون الدارة من مولد توتر مستمر $E = 30$ V ، و زر ضاغط P الذي يلعب دور القاطعة (الدارة مغلقة عند الضغط على الزر) و مركب إلكتروني M الذي يسمح بإشعال مصباح L عندما تكون قيمة التوتر بين طرفي المكثفة أصغر من قيمة معينة حدية . هذه القيمة الحدية هي مميزة المركب الإلكتروني M نرمز لها بـ U_L (في كل المسألة نثبت قيمة U_L عند القيمة (20V) .



المركب الإلكتروني M تغذيه دارة كهربائية أخرى (غير ممثلة على الشكل) و التي تعطيه الطاقة اللآزمة لإشتعال المصباح . و منه نقبل أن المركب الإلكتروني M لا يؤثر على إشتغال الدارة RC أي أن التوتر بين طرفي المكثفة هو نفسه بحضور أو بغياب المركب الإلكتروني M في الدارة .

الجزء I : دراسة الدارة RC

عند اللحظة $t = 0$ s ، المكثفه فارغة ، نغلق القاطعة K . الزر الضاغط P نتركه لحاله (أنظر الشكل) أي غير مضغوط .

1ـ نريد مشاهدة تغيرات التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن بواسطة راسم إهتزاز مهبطي ذو ذاكرة ، حدد على الشكل السابق التوصيلات اللآزم تحقيقها (المدخل 1 و القطب السالب).

2ـ بين أن المعادلة التفاضلية التي تعطي تغيرات التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن هي من الشكل :

$$u_C(t) + RC\, du_C(t)/dt = E \quad ...... (1)$$

3ـ a. بالتحقق من أن الدالة الزمنية $A\,[(1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية ، بين أن $A = E$ و أن $\tau = RC$.

b ـ ماهي قيمة u_C في النظام الدائم ؟

c ـ ما هو الإسم المصطلح المعطى للثابت τ ؟ باستخدام طريقة تحليل الأبعاد ، أعط وحدة الثابت τ .

4ـ التمثيل البياني للدالة $u_C(t)$ معطى في الوثيقة 1 . حدد على الشكل ، التوتر E ، الثابت τ و النظامين الدائم و الإنتقالي .

5ـ احسب قيمة الثابت τ من أجل $R = 100$ kΩ و $C = 200$ µF .

6ـ a ـ أعط العبارة الحرفية للحظة t_0 التي عندها التوتر بين طرفي المكثفة يصل إلى القيمة الحدية U_L بدلالة U_L ، E و τ (t_0 هي مدة إشتعال المصباح).

b ـ احسب قيمة t_0 و تحقق من صحة النتيجة بالإستعانة بالبيان $u_C(t)$ المعطى في الوثيقة 1 .

c ـ ثبتنا U_L عند 20 V من أجل الحصول على مدة الإشتعال t_0 مجاورة لـ τ . اشرح لماذا اختيار قيمة لـ t_0 أكبر بكثير من τ ، يكون غير مناسب لتركيب الدارة السابقة .

7ـ ما هو العامل أو العوامل البارامترية التي يمكن تغييرها في التركيب السابق للحصول على مدة إشتعال أكبر مما سبق (لا نغير المولد)؟

8ـ نضغط على الزر الضاغط . ما قيمة التوتر بين طرفي المكثفة ؟ قارنها بالقيمة U_L . ماذا يحدث للمصباح في الحالات التالية : a ـ إذا كان المصباح مشتعل . b ـ إذا كان المصباح منطفئ

الحـل ـ 17

الجزء 1 : دراسة الدارة RC

1ـ تحديد التوصيلات اللأزم تحقيقها (المدخل 1) على الشكل السابق : لمشاهدة التوتر $u_C = u_{BD}$ على المدخل 1 للجهاز ، يجب توصيل المدخل y_1 عند B و القطب السالب عند D .

2ـ المعادلة التفاضلية التي تعطي تغيرات التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة : لدينا : $E = u_{AD} = u_{AB} + u_{BD} = u_C + u_R$.

و حيث أن : $u_R = R\,i$ و $i = dq/dt \Rightarrow u_R = R\,dq/dt$

و كذلك لدينا : $q = C\,u_C \Rightarrow u_R = R\,C\,du_C/dt$ إذن : $u_C + RC\,du_C/dt = E$

3ـ a ـ للتحقق من أن الدالة الزمنية $A\,[(1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية ، نحسب $du_C/dt = A\,.1/\tau\,\exp(-t/\tau)$ ثم نعوض عن الحدين في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$E = RC\,.\,A/\tau\,\exp(-t/\tau) + A\,[(1 - \exp(-t/\tau)\,] \Rightarrow E - A = A\,\exp(-t/\tau)\,[RC/\tau - 1]$.

لدينا حدود مستقلة عن الزمن و التي يجب أن تتساوى مع الحدود الأخرى المرتبطة بالزمن و هذا لا يتحقق إلا إذا كان الحدين معدومين : $E - A = 0$ و منه : $E = A$ و $RC/\tau - 1 = 0$ و منه : $\tau = RC$.

b ـ قيمة u_C في النظام الدائم : في النظام الدائم ، u_C يكون ثابت و منه : $du_C/dt = 0$ و منه حسب المعادلة التفاضلية : $E = u_C = 30\ V$.

c ـ الإسم المصطلح المعطى للثابت τ و وحدته : الإسم هو : ثابت الزمن و هي مميزة تطور الجملة الكهربائية . و هناك طريقتين لتحديد وحدته : الطريقة 1 : انطلاقا من الجداء RC : $[RC] = [R]\,[C]$.

$U_R = R\,.\,I \Rightarrow [R] = [U]\,/\,[I]$, $U_C = q\,/C \Rightarrow [C] = [Q]\,/\,[U]$

$[RC] = [U]\,/\,[I]\,.\,[Q]\,/[U] = [Q]\,/[I]$. $i = dq\,/\,dt \Rightarrow [I] = [Q]\,/\,[T]$

$[RC] = [Q]\,/\,[([Q]/\,[T])] = [T]$. $\mathbf{[\tau] = [RC] = [T]}$.

الطريقة 2 : انطلاقا من طريقة تحليل الأبعاد للمعادلة التفاضلية $u_C + RC\,du_C/dt = E$:

$E = RC\,du_C/dt + u_C$

$[E] = [U] = [RC\,du_C/dt] = [RC]\,.\,[du_C/dt] = [RC]\,.\,[U]\,/\,[T]$

$\Rightarrow [RC] = [T] \Rightarrow \mathbf{[\tau] = [RC] = [T]}$.

4ـ تحديد التوتر E ، الثابت τ و النظامين الدائم و الإنتقالي : التوتر E يوافق الخط المقارب الأفقي للمنحنى $u_C(t)$ و قيمته 30 V . لتحديد قيمة τ هناك طريقتين : الطريقة 1 : برسم المماس للمنحنى عند المبدأ الذي يقطع الخط المقارب الأفقي للمنحنى $u_C(t)$ في نقطة فاصلتها : $t = \tau = 20\ s$. الطريقة 2 : بقياس القيمة ، عند $t = \tau$ ، $u_C(\tau) = 0{,}63\ E = 19\ V$ فنقرأ على الشكل القيمة $t = \tau = 20\ s$. نصل إلى النظام الدائم عندما : $t > 5\tau$. أما النظام الإنتقالي فهو يوافق : $0 < t < 5\,\tau$.

5ـ حساب قيمة الثابت τ من أجل $R = 100\ k\Omega$ و $C = 200\ \mu F$: $\tau = RC = 100\,.\,10^3\,.\,200\,.\,10^{-6} = 20\ s$

6ـ a ـ العبارة الحرفية للحظة t_0 التي عندها التوتر بين طرفي المكثفة يصل إلى القيمة الحدية U_L :

$$u_C(t_0) = U_L \Leftrightarrow E[1 - \exp(-t_0/\tau)] = U_L \Leftrightarrow 1 - \exp(-t_0/\tau) = U_L/E \Leftrightarrow \exp(-t_0/\tau) = 1 - U_L/E$$

$$\Leftrightarrow -t_0/\tau = \ln\,[1 - U_L/E] \Leftrightarrow t_0 = -\,\tau\,\ln\,(1 - U_L/E) = -\,\tau\,\ln\,[(E - U_L)/E\,] = \tau\,\ln\,[E/(E - U_L)]$$

b ـ حساب قيمة t_0 و التحقق من صحة النتيجة بالإستعانة بالبيان $u_C(t)$ المعطى في الوثيقة 1 :

$$t_0 = \tau\,\ln\,[E/(E - U_L)] = 20\,.\,\ln\,[30/(30 - 20)] = 20\,.\,\ln 3 = 22{,}0\ s$$.

على المنحنى نقرأ : من أجل $u_C = 20\ V$, نجد $t = 22\ s$ نلاحظ أن النتائج متناسقة .

c ـ اختيار قيمة لـ t_0 أكبر بكثير من τ ، يكون غير مناسب لتركيب الدارة السابقة : لو نختار $t >>> \tau$ تكون قيمة U_L قريبة من قيمة E . و منه المقارنة بين التوتر E و U_L تكون صعبة الإجراء . و منه المؤقتة لا تعطي قيمة لـ t_0 معقولة . و منه اشتغال المؤقتة غير نفعي .

7ـ العامل أو العوامل البارامترية التي يمكن تغييرها في التركيب السابق للحصول على مدة إشتعال أكبر مما سبق : المصباح يبقى مشتعل ما دام $U_L < E$. يمكننا إذن تكبير قيمة U_L و لكن بشكل معقول حتى لا نرجع للحالة المذكورة سابقا . و إضافة لذلك ، U_L هو التوتر الأعظمي بين طرفي المكثفة . و بالتالي إذا أردنا الحصول على مدة إشتعال أكبر للمصباح ، يجب أن تكون مدة الشحن أطول و من أجل تحقيق ذلك ، يجب تكبير ثابت الزمن المميز للمكثفة τ . بما أن $\tau = RC$ فإننا نكبر إما R أو C .

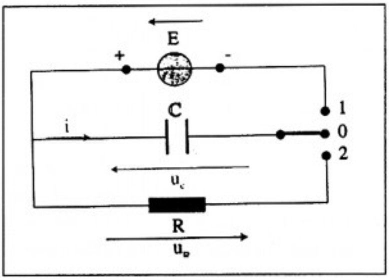
8ـ قيمة التوتر بين طرفي المكثفة و مقارنتها بالقيمة U_L بعد الضغط على الزر الضاغط : عند الضغط على الزر الضاغط يصبح التوتر بين طرفي المكثفة معدوم $u_C = 0$. و منه : $u_C < U_L$ إذن المصباح يشتعل عند الضغط على الزر الضاغط .

يحدث للمصباح في الحالات التالية :

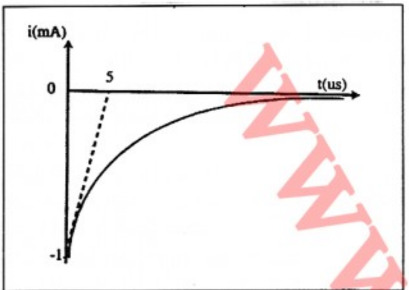
a ـ إذا كان المصباح مشتعل يبقى مشتعلا . b ـ إذا كان المصباح منطفئ فإنه يشتعل بعد الضغط على الزر الضاغط .

التمرين ـ 18

في الدارة التالية لدينا مولد توتر ثابت $E = 6{,}0\ V$ ، ناقل أومي مقاومته $R = 1{,}0\ k\Omega$ و مكثفة سعتها $C = 4{,}7\ \mu F$.



a. عند اللحظة $t = 0$ نضع البادلة عند الوضع 1 .
ما هي الظاهرة التي تحدث بالدارة ؟
b. كيف يتطور التوتر بين طرفي المكثفة ؟
c. عبر عن شحنة المكثفة في لحظة t بدلالة q_0 , R, C, t
d. احسب الشحنة العظمى للمكثفة .
e. في أي لحظة تصل قيمة شحنة المكثفة إلى نصف قيمتها العظمى ؟
f. نقلب البادلة إلى الوضع 2 ، ماذا يحدث للمكثفة ؟
g. باستخدام قانون جمع التوترات بين أن المعادلة التفاضلية للدارة هي : $u(t) + RC\, du/dt = 0$.
h. هل حل هذه المعادلة من الشكل $u(t) = E\,(1 - e^{-t/RC})$ ؟
i. يمثل البيان التالي تطور شدة التيار بدلالة الزمن .
1ــ عين بيانيا قيمة ثابت زمن الدارة .
2ــ عين اللحظة التي يكون عندها : $i = 0{,}2\, I_0$
3ــ ما هي قيمة التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة عندها ؟



الحــل ــ 18

a. الظاهرة التي تحدث بالدارة : تشحين المكثفة
b. كيفية تطور التوتر بين طرفي المكثفة : التوتر u_C بين طرفي المكثفة يتطور تدريجيا (رياضيا نقول أسيا) بشكل متزايد خلال عملية الشحن **(نظام انتقالي)** حتى يصل إلى قيمة $u_{AB} = E$ ، ثابتة عند نهاية عملية الشحن **(نظام دائم)** .

c. التعبير عن شحنة المكثفة في لحظة t بدلالة q_0 , R, C, t : إن عملية شحن المكثفة لا تتم آنيا ، يمكن أن نبين ذلك كم يلي :
لدينا $q_A = C \,.\, u_{AB}$ ، و C مقدار ثابت . بما أن u_{AB} يتطور تدريجيا ، إذا q_A يتطور تدريجيا .
ــ منحنى التطور الزمني للشحنة q_A مماثل لمنحنى التطور الزمني للتوتر u_{AB} بتعويض فقط E بــ CE .
المعادلة التفاضلية التي تحققها u_C تكتب على الشكل : $u_C + RC\, du_C/dt = E$. حيث : $u_C + u_R = E$
و لدينا : $u_R = R\, i$ و بما أن : $i = dq/dt = d(C \,.\, u_C)/dt = C\, du_C/dt$
نحصل على المعادلة المقترحة : $u_C + RC\, du_C/dt = E$ حل هذه المعادلة من الشكل : $u_C(t) = E\,[1 - \exp(-t/\tau)]$
و لدينا : $q(t) = C \,.\, u_C(t)$. و منه : $q\,(t) = C \,.E\,[1 - \exp(-t/\tau)]$. نضع $q_0 = C \,.\, E$ و $\tau = RC$
و منه نحصل على : $q(t) = q_0\,[1 - \exp(-t/RC)]$.

d. حساب الشحنة العظمى للمكثفة : عند نهاية الشحن يكون التوتر بين طرفي المكثفة يساوي إلى التوتر بين طرفي المولد أي : $u_C = E$ و منه الشحنة العظمى للمكثفة : $q_0 = C \,.\, E = 4{,}7 \,.\, 10^{-6} \,.\, 6 = 2{,}8 \,.\, 10^{-5}\ C$.

e. لحظة وصول قيمة شحنة المكثفة إلى نصف قيمتها العظمى : $q(t) = C \,.\, E\,[1 - \exp(-t/\tau)\,] = (C \,.\, E)/\,2$
$C \,.\, E\,[1 - \exp(-t/\tau)\,] = (C \,.\, E)/\,2 \Rightarrow 1 - \exp(-t/\tau) = 1/2 \Rightarrow \exp(-t/\tau) = 1/2$
إذن : $(-t/\tau) = \ln(0{,}5) \Rightarrow t = -\tau \,.\, \ln 0{,}5 = -RC \,.\, \ln 0{,}5 = -1000 \,.\, 4{,}7 \,.\, 10^{-6} \,.\, \ln 0{,}5 = 3{,}26 \,.\, 10^{-3}\ s$
f. نقلب البادلة إلى الوضع 2 : تفريغ المكثفة .
g. التوصل إلى المعادلة التفاضلية للدارة : المعادلة التفاضلية التي تحققها u_C تكتب على الشكل : $u_C + RC\, du_C/dt = 0$.
حيث : $u_C + u_R = 0$ و لدينا : $u_R = R\, i$ و بما أن : $i = dq/dt = d(C \,.\, u_C)/dt = C\, du_C/dt$
نحصل على المعادلة المقترحة : $u_C + RC\, du_C/dt = 0$
h. التحقق من حل هذه المعادلة من الشكل : $u(t) = E \exp(-t/\tau)$:
نحسب $du_C/dt = -E \,.1/\tau \exp(-t/\tau)$ ، ثم نعوض عن الحدين في المعادلة التفاضلية فنحصل على :
$0 = RC \,.\, (-E/\tau) \exp(-t/\tau) + E \exp(-t/\tau) \Rightarrow 0 = E \exp(-t/\tau)\,[1 - RC/\tau\,]$.
لدينا حدود مستقلة عن الزمن و التي يجب أن تتساوى مع الحدود الأخرى المرتبطة بالزمن و هذا لا يتحقق إلا إذا كان الحدين معدومين : $1 - RC/\tau = 0$ و منه $u(t) = E\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ هو حل هذه المعادلة و $\tau = RC$.

1ــ تعيين بيانيا قيمة ثابت زمن الدارة : نستخدم المنحنى و المماس لهذا المنحنى عند اللحظة $t = \tau = 5\ \mu s$.
2ــ تعيين اللحظة التي يكون عندها $i = 0{,}2\, I_0$: نكتب عبارة الشدة i للتيار بدلالة الزمن :
$i(t) = dq/dt = C\, du_C/dt = -(CE/\tau) \exp(-t/\tau) = -E/R \exp(-t/\tau)$
$i(t) = -I_0 \exp(-t/\tau)$ حيث : $E/R = I_0$.
$i\,(t) = -I_0 \exp(-t/\tau) = -0{,}2\, I_0 \Rightarrow \exp(-t/\tau) = 0{,}2$

إذن : $(-t/\tau) = \ln(0,2) \Rightarrow t = -\tau . \ln 0,2 = -RC . \ln 0,2 = -1000 . 4,7 . 10^{-6} . \ln 0,2 = 7,56 . 10^{-3}$ s

3– إيجاد قيمة التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة عندها : المعادلة التفاضلية لدارة التفريغ : $u_C + u_R = 0$ و حيث أن :
$u_R = R i$ و لدينا : $i = dq/dt = d(C . u_C)/dt = C\, du_C/dt$ ، إذن : $RC\, du_C/dt + u_C = 0$

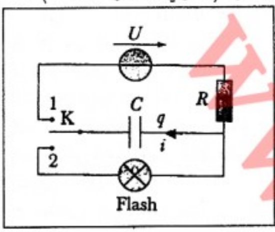
و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة ل u_C تقبل حلا من الشكل : $u_C = E \exp(-t/\tau)$

عند $t = 7,56 . 10^{-3}$ s نجد : $u_C = E \exp(-(7,56 . 10^{-3})/(0,005 . 10^{-3})) = E \exp(-1512)$

التمرين –19

مبدا عمل وماض (Flash)

على بطاقة معلومات لآلة التصوير (Appareil photographique jetable) ، يمكن أن نقرأ (حذاري ، خطر، لا تفكك) : (Attention , Danger , ne pas démonter) . هذا التحذير له علاقة بوجود مكثفة في العلبة . في هذا التمرين ندرس تشغيل وماض (Flash) لآلة التصوير دارة إلكترونية ، مغذاة بعمود قوته المحركة الكهربائية $U_0 = 1,5$ V ، تسمح برفع التوتر إلى $U = 300$ V . مكثفة سعتها $C = 150\ \mu F$ مشحونة عبر ناقل أومي مقاومته $R = 1,0\ k\Omega$ ، تحت توتر U ثم تفرغ هذه المكثفة في الوماض الذي مقاومته r . الشكل المقابل يوضح التركيب المستعمل للدارة .



الجزء A

نضع القاطعة في الوضعية 1

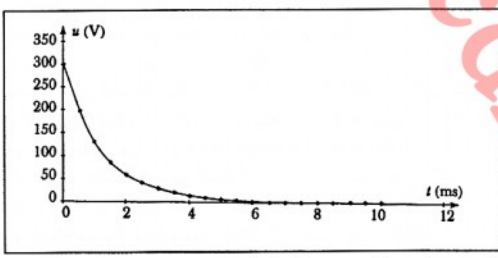
a– عبر عن ثابت الزمن τ لـدارة الشحن . حدد قيمته . ما هي المدة الزمنية التي من أجلها يمكن اعتبار المكثفة مشحونة بأكثر من 99% من قيمتها العظمى .

b– بواسطة تحليل الأبعاد تحقق أن ثابت الزمن τ متجانس مع الزمن أي له نفس وحدة الزمن .

c– ماهو شكل المنحنى الذي يعطي التوتر u بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن .

d– حدد قيمة الشدة i للتيار في الدارة عند بداية الشحن ثم عند نهاية الشحن .

e– احسب الطاقة E_{cond} المخزنة في المكثفة عند نهاية شحن . قارنها بالطاقة التي تختزن فيها لو تشحن بعمود قوته المحركة الكهربائية U_0 . ناقش النتيجة .



الجزء B

نحقق عملية تفريغ مكثفة التي من خلالها نقيس التوتر u بين طرفي المكثفة خلال أزمنة مختلفة فنحصل على المنحنى المبين في الشكل المقابل .

a– حدد قيمة ثابت الزمن 'τ لدارة التفريغ .حدد بوضوح الطريقة المستعملة . بماذا توحي لك هذه القيمة ؟

b– استنتج قيمة المقاومة r للوماض .

c– اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها u التوتر بين طرفي المكثفة . d– حل المعادلة يكون من الشكل : $u(t) = A \exp(-t/\tau')$. حدد قيمة A .

الحـل –19

الجزء A

a– عبارة ثابت الزمن τ لدارة الشحن و قيمته : من التعريف ثابت الزمن هو : $\tau = RC = 1,00 . 10^3 . 150 . 10^{-6} = 0,15$ s

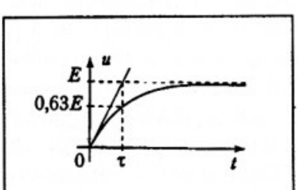
– المدة الزمنية التي من أجلها يمكن اعتبار المكثفة مشحونة بأكثر من 99% من قيمتها العظمى : نقبل بصورة عامة أن الزمن الأزم لتشحين المكثفة هو $t = 5\tau$ و منه : $t = 5 . 0,15 = 0,75$ s .

b– التحقيق أن ثابت الزمن τ يجانس الزمن : تحليل الأبعاد لـ τ يعطي : $[\tau] = [RC] = [u/I] . [q/u] = [I . t]/[I] = t = T$

و منه نقول أن ثابت الزمن τ متجانس مع الزمن أي له نفس وحدة الزمن .

c– شكل المنحنى الذي يعطي التوتر u بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن :

انظر الشكل المرفق .



d– تحديد قيمة الشدة i للتيار في الدارة عند بداية الشحن ثم عند نهاية الشحن :

عند بداية الشحن لدينا : $E = Ri + u$ و لكن التوتر بين طرفي المكثفة معدوم عند اللحظة $t = 0$ و منه : $i = E/R$ عند اللحظة $t = 0$. و في النظام الدائم (أي عند نهاية الشحن) تكون شدة التيار معدومة : $i = 0$.

e– حساب الطاقة E_{cond} المخزنة في المكثفة عند نهاية شحن و مقارنتها بالطاقة التي

تختزن فيها لو تشحن بعمود قوته المحركة الكهربائية U_0 : الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E_{cond} = 1/2\ C\ u^2$ و هذا من أجل كل قيمة للتوتر u عند اللحظة t .

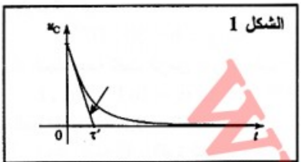
و في نهاية الشحن تكون $u = U = 300\ V$ و منه : $E_{cond} = 1/2\ C\ U^2 = 1/2 . 150 . 10^{-6} . 300^2 = 6{,}75\ J$

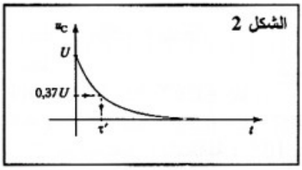
ــ لو تشحن المكثفة بعمود قوته المحركة الكهربائية $U_0 = 1{,}5\ V$: الطاقة المخزنة في المكثفة هي :

$$E'_{cond} = 1/2\ C\ U^2 = 1/2 . 150 . 10^{-6} . 1{,}5^2 = 1{,}69 . 10^{-4}\ J$$

ــ المقارنة : $E_{cond} / E'_{cond} = 40000$ تكون الطاقة المخزنة في حالة 300 V أكبر بـــ 40000 مرة في حالة 1,5 V .

الجزء B





aــ تحديد قيمة ثابت الزمن τ' لدارة التفريغ : يمكن تحديد τ' بطريقتين :

1ــ نستخدم المنحنى و المماس لهذا المنحنى عند اللحظة t = 0 . انظر الشكل 1 .

2ــ نستخدم الخاصية :

$u_C(t = \tau) = 0{,}37\ U$. انظر الشكل 2 .

نجد على الشكل أن $\tau' = 1{,}2\ ms$.

هذه القيمة صغيرة جدا بمقارنتها بـــ τ . حيث تسترجع الطاقة في زمن صغير جدا و هذا ما يسمح بإشعال الوماض في مدة زمنية قصيرة و هذا هو مبدأ عمل الوماض في آلة التصوير .

bــ استنتاج قيمة المقاومة r للوماض : من التعريف : $\tau' = rC \Rightarrow r = \tau'/C = (1{,}2 . 10^{-3})/(150 . 10^{-6}) = 8{,}0\ \Omega$

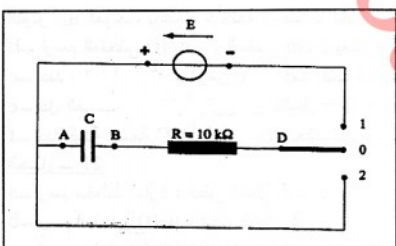
cــ كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها u (التوتر بين طرفي المكثفة) : بتطبيق قانون جمع التوترات ، خلال طور التفريغ نجد :

$u + ri = 0$ و منه : $u + rCdu/dt = 0$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $du/dt + 1/rC = 0$

dــ تحديد قيمة A : حل المعادلة يكون من الشكل : $u(t) = A\ \exp(-t/\tau')$. عند اللحظة $t = 0$ لدينا $u_C(t = 0) = U$

بالمطابقة بين المعادلتين نجد : $u_C(t = 0) = A \exp 0 = A = U$.

و منه : $A = U$



التمرين ــ 20

لدينا الدارة التالية : المكثفة ابتدائيا مشحونة .

1. أين يجب وضع القاطعة لتفريغ المكثفة ؟

2. صل الدارة براسم اهتزازات مهبطي للحصول على تغيرات $u_{AB} = u_C = f(t)$. مثل كيفيا هذا البيان .

3. ما هي العلاقة بين u_R , uc ؟

4. المعادلة التفاضلية أثناء تفريغ المكثفة هي من الشكل :

$$\alpha\ du(t)/dt + u(t) = 0$$

a. ماذا يمثل المعامل α ؟ ما هي وحدة قياسه ؟ علل

b. اختر الحل الصحيح لهذه المعادلة مما يلي :

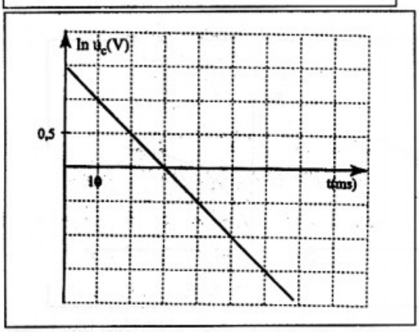
$$u(t) = E\ e^{-t/\alpha} \text{ ، } u(t) = E\ e^{-\alpha/t} \text{ ، } u(t) = E\ e^{-\alpha t}$$

c. يمثل البيان التالي تغيرات $\ln u_C$ بدلالة الزمن أي $\ln u_C = f(t)$

5. اكتب العبارة البيانية .

6. اوجد قيمة ثابت الزمن τ و احسب C .

7. اوجد قيمة E ، القوة المحركة الكهربائية للمولد المستعمل .



الحــل ــ 20

1. وضع القاطعة لتفريغ المكثفة : وضع القاطعة في 2 .

2. صل الدارة براسم اهتزازات مهبطي للحصول على تغيرات

$u_{AB} = u_C = f(t)$: لمشاهدة التوتر $u_C = f(t)$ على المدخل 1 للجهاز ، يجب توصيل المدخل y_1 عند A و القطب السالب عند B

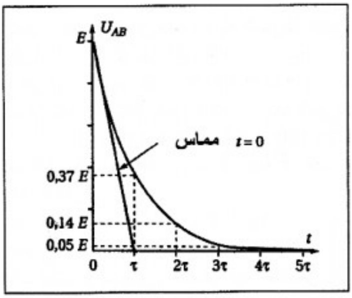
تمثيل كيفيا هذا البيان : انظر الشكل .

3. العلاقة بين u_R , u_C : التوتر u_{AB} بين طرفي المكثفة يتناقص تدريجيا خلال عملية التفريغ **(نظام انتقالي)** حتى يصل إلى قيمة معدومة $u_{AB} = 0$ ، ثابتة عند نهاية عملية التفريغ **(نظام دائم)** . حيث : $u_C + u_R = 0$

4. المعادلة التفاضلية أثناء تفريغ المكثفة هي من الشكل : $\alpha\ du(t)/dt + u(t) = 0$

a. المعامل α : $u_C + u_R = 0$ و لدينا : $u_R = R\ i$

و بما أن : $i = dq/dt = d(C . u_C)/dt = C\ du_C/dt$



نحصل على المعادلة التفاضلية : $u_C + RC\, du_C/dt = 0$ بالمطابقة :

$\alpha = RC$. إذن α يمثل ثابت الزمن τ للدارة .

b. اختيار الحل الصحيح لهذه المعادلة : $u(t) = E\, e^{-t/\alpha}$

5. كتابة العبارة البيانية للبيان $\ln u_C = f(t)$: البيان خط مستقيم مائل معادلته من الشكل : $\ln u_C = a \,.\, t + b$.

حيث a يمثل معامل توجيه المستقيم و قيمته :

$a = -1/(20 \,.\, 10^{-3}) = -50\ V/s$. و b نقطة تقاطع المستقيم مع محور الأزمنة و قيمته :

$b = 30 \,.\, 10^{-3} s$. و منه : $\ln u_C = -50 \,.\, t + 30 \,.\, 10^{-3}$

6. إيجاد قيمة ثابت الزمن τ و حساب C : لدينا :

$u_C = E\, e^{-t/\alpha} \Rightarrow \ln u_C = \ln E\, e^{-t/\alpha} \Rightarrow \ln u_C = \ln E - 1/\alpha \,.\, t$.

بالمطابقة : $1/\alpha = 50 \Rightarrow \alpha = 1/50 = 0{,}2$. و منه : $\alpha = RC = \tau = 0{,}2\ s$. و منه : $C = \tau/R = 20\ \mu F$.

7. إيجاد قيمة E ، القوة المحركة الكهربائية للمولد المستعمل : بالمطابقة : $\ln E = 30 \,.\, 10^{-3}$.

التمرين ــ 21

نصل على التسلسل عمود قونه المحركة الكهربائية $E = 4{,}5\ V$ و مقاومته الداخلية $r = 2\ \Omega$ مع مكثفة سعتها C و ناقل أومي مقاومته $R = 2\ \Omega$.عند مجالات زمنية متساوية نسجل التوتر u_C بين طرفي المكثفة و ندون النتائج في الجدول التالي :

t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$u_C(v)$	0	1,4	2,4	3,1	3,5	3,8	4,0	4,2	4,3	4,4	4,4	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5

a ــ ارسم مخطط الدارة مبرزا التوصيلات التي تسمح بقياس التوتر u_C . حدد جهة التيار i ، الشحنة q التي تحملها المكثفة و التوتر u_C الموجب باعتبار الـ كثفة اصطلاحا آخذة .

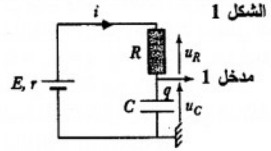
b ــ ارسم المنحنى $u_C(t)$. السلم : 1 cm يمثل 1 s و 1 cm يمثل 0,5 V .

c ــ حدد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ . d ــ اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C .

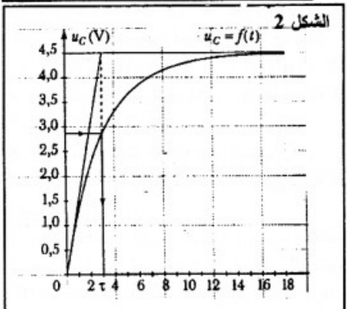
e ــ حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $u_C = A\ \exp(-t/\tau) + B$. حدد عبارة كل من A ، B و τ .

f ــ حدد قيمة السعة C للمكثفة . g ــ تحقق من أن $u_C\ (t = \tau) = 0{,}63\ E$.

الشكل 1



الشكل 2

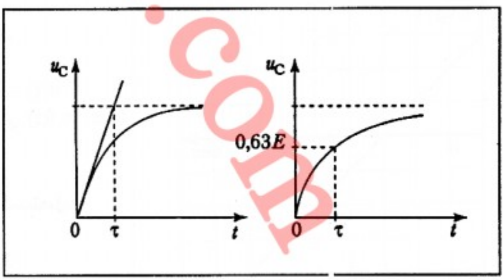


الحـل ــ 21

a ــ رسم مخطط الدارة : انظر الشكل 1 .

b ــ رسم المنحنى $u_C(t)$: انظر الشكل 2 .

c ــ تحديد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ :



تحدد τ بيانيا بنقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ مع المماس للمنحنى عند ∞ حيث فاصلتها : $t = \tau = 2{,}8\ s$.أو بفاصلة النقطة التي ترتيبها 0,63 E

d ــ كتابة المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C : $u_G = u_C + u_R$ حيث u_G هو التوتر بين طرفي المولد

و لدينا : $u_G = E - r\, i$ و منه : $u_C + (R + r)\, i = E \Leftrightarrow u_C + Ri = E - r\, i$

و لدينا : $i = dq/dt = d(C \,.\, u_C)/dt = C\, du_C/dt$ إذن : $u_C + (R + r)C\, du_C/dt = E$

و هي المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة لـــ u_C .

e ــ تحديد عبارة كل من A ، B و τ : حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $u_C = A\ \exp(-t/\tau) + B$

إذن : $du_C/dt = - A/\tau \exp(-t/\tau)$ نعوض عن u_C و du_C/dt في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$A \exp(-t/\tau) + B + (R + r) C \times [- A/\tau \exp(-t/\tau)] = E$ و منه : $[A - (R + r)CA/\tau] \exp(-t/\tau) + B = E$

الحل المقترح يحقق المعادلة إذا كان : $A = (R + r)CA/\tau$ أي : $\tau = (R + r)C$ و $B = E$

نحدد قيمة E من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $u_C(t = 0) = 0$

ومنه : $A \exp(0) + B = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow A = - B$

فيصبح إذن لدينا : $u_C(t) = E [1 - \exp(-t/\tau)]$ مع : $\tau = (R + r)C$

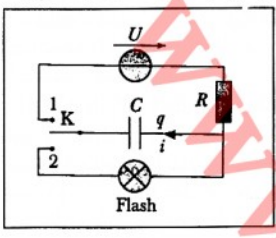
f– تحديد قيمة السعة C : لدينا : $\tau = 2,8$ s و $R + r = 10 + 2 = 12\ \Omega$ تكون إذن قيمة السعة : $C = \tau/(R + r) = 0,23$ F

g– التحقق من أن $u_C(t = \tau) = 0,63$ E :

عبارة u_C تسمح بالتحقق من أن : $u_C(t = \tau) = E [1 - \exp(-t/\tau)] = E [1 - \exp(-1)] = 0,63$ E

التمرين 22

على بطاقة معلومات للآلة التصوير (Appareil photographique jetable) ، يمكن أن نقرأ (حذاري ، خطر، لا تفكك) : (Attention , Danger , ne pas démonter) . هذا التحذير له علاقة بوجود مكثفة في العلبة . في هذا التمرين ندرس تشغيل وماض (Flash) للآلة التصوير jetable .



دارة إلكترونية ، مغذاة بعمود قوته المحركة الكهربائية $U_0 = 1,5$ V ، تسمح برفع التوتر إلى $U = 300$ V . مكثفة سعتها $C = 150\ \mu$F مشحونة عبر ناقل أومي مقاومته $R = 1,0$ kΩ ، تحت توتر U ثم تفرغ هذه المكثفة في الوماض الذي مقاومته r . الشكل المقابل يوضح التركيب المستعمل للدارة .

الجزء A

نضع القاطعة في الوضعية 1

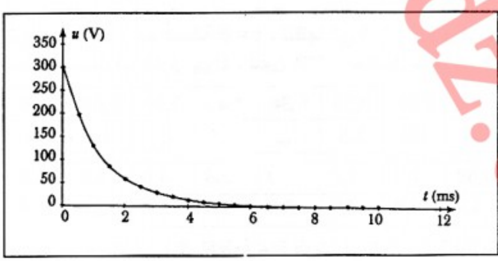
a– عبر عن ثابت الزمن τ لدارة الشحن . حدد قيمته . ما هي المدة الزمنية التي من أجلها يمكن اعتبار المكثفة مشحونة بأكثر من 99% من قيمتها العظمى .

b– بواسطة تحليل الأبعاد تحقق أن ثابت الزمن τ متجانس مع الزمن أي له نفس وحدة الزمن .

c– ماهو شكل المنحنى الذي يعطي التوتر u بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن .

d– حدد قيمة الشدة i للتيار في الدارة عند بداية الشحن ثم عند نهاية الشحن .

e– احسب الطاقة E_{cond} المخزنة في المكثفة عند نهاية شحن . قارنها بالطاقة التي تختزن فيها لو تشحن بعمود قوته المحركة الكهربائية U_0 . ناقش النتيجة .



الجزء B

نحقق عملية تفريغ مكثفة التي من خلالها نقيس التوتر u بين طرفي المكثفة خلال أزمنة مختلفة فنحصل على المنحنى المبين في الشكل المقابل .

a– حدد قيمة ثابت الزمن 'τ لدارة التفريغ .حدد بوضوح الطريقة المستعملة . بماذا توحي لك هذه القيمة ؟

b– استنتج قيمة المقاومة r للوماض .

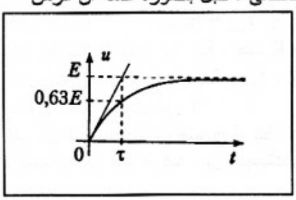
c– اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها u التوتر بين طرفي المكثفة . d– حل المعادلة يكون من الشكل : $u(t) = A \exp(-t/\tau')$. حدد قيمة A .

الحل – 22

الجزء A

a– عبارة ثابت الزمن τ لدارة الشحن و قيمته : من التعريف ثابت الزمن هو : $\tau = RC = 1,00 . 10^3 . 150 . 10^{-6} = 0,15$ s

– المدة الزمنية التي من أجلها يمكن اعتبار المكثفة مشحونة بأكثر من 99% من قيمتها العظمى : نقبل بصورة عامة أن الزمن الأزم لتشحين المكثفة هو $t = 5\tau$ و منه : $t = 5 . 0,15 = 0,75$ s .



b– التحقق أن ثابت الزمن τ يجانس الزمن : تحليل الأبعاد لـ τ يعطي :

$[\tau] = [RC] = [u/I] . [q/u] = [I . t]/ [I] = t = T$ و منه نقول أن ثابت الزمن τ متجانس مع الزمن أي له نفس وحدة الزمن

c– شكل المنحنى الذي يعطي التوتر u بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن :

انظر الشكل المرفق .

d– تحديد قيمة الشدة i للتيار في الدارة عند بداية الشحن ثم عند نهاية الشحن :

عند بداية الشحن لدينا : $E = R + u$ و لكن التوتر بين طرفي المكثفة معدوم عند اللحظة $t = 0$ و منه : $i = E/R$ عند اللحظة $t = 0$. و في النظام الدائم (أي عند نهاية الشحن) تكون شدة التيار معدومة : $i = 0$.

e— حساب الطاقة E_{cond} المخزنة في المكثفة عند نهاية شحن و مقارنتها بالطاقة التي تختزن فيها لو تشحن بعمود قوته المحركة الكهربائية U_0 : الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E_{cond} = 1/2\, C\, u^2$ و هذا من أجل كل قيمة للتوتر u عند اللحظة t .

و في نهاية الشحن تكون $u = U = 300\ V$ و منه : $E_{cond} = 1/2\, C\, U^2 = 1/2 . 150 . 10^{-6} . 300^2 = 6,75\ J$

— لو تشحن المكثفة بعمود قوته المحركة الكهربائية $U_0 = 1,5\ V$: الطاقة المخزنة في المكثفة هي :

$$E'_{cond} = 1/2\, C\, U^2 = 1/2 . 150 . 10^{-6} . 1,5^2 = 1,69 . 10^{-4}\ J$$

— المقارنة : $E_{cond} / E'_{cond} = 40000$ تكون الطاقة المخزنة في حالة 300 V أكبر بـ 40000 مرة في حالة 1.5 V .

الجزء B

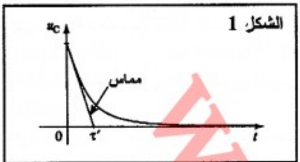
a— تحديد قيمة ثابت الزمن 'τ لدارة التفريغ : يمكن تحديد 'τ بطريقتين :

1— نستخدم المنحنى و المماس لهذا المنحنى عند اللحظة $t = 0$. انظر الشكل 1 .

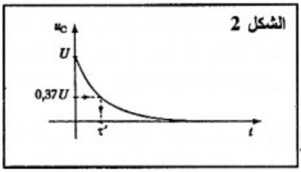
2— نستخدم الخاصية $u_C(t = \tau') = 0,37\ U$. انظر الشكل 2 .

نجد على الشكل أن $\tau' = 1,5\ ms$.

الشكل 1



الشكل 2



هذه القيمة صغيرة جدا بمقارنتها بـ τ . حيث تسترجع الطاقة في زمن صغير جدا و هذا ما يسمح بإشعال الوماض في مدة زمنية قصيرة و هذا هو مبدأ عمل الوماض في آلة التصوير .

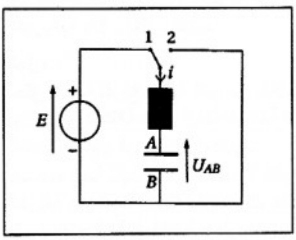
b— استنتاج قيمة المقاومة r للوماض : من التعريف : $\tau' = rC \Rightarrow r = \tau'/C = (1,2 . 10^{-3})/(150 . 10^{-6}) = 8,0\ \Omega$

c— كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها u (التوتر بين طرفي المكثفة) : بتطبيق قانون جمع التوترات ، خلال طور التفريغ نجد : $u + ri = 0$ و منه : $u + rC\,du/dt = 0$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $du/dt + 1/rC = 0$

d— تحديد قيمة A : حل المعادلة يكون من الشكل : $u(t) = A\ \exp(-t/\tau')$. عند اللحظة $t = 0$ لدينا $u_C(t = 0) = U$ بالمطابقة بين المعادلتين نجد : $u_C(t = 0) = A \exp 0 = A = U$. و منه : $A = U$

التمرين —23

التركيب الموضح في الشكل المقابل يسمح بمتابعة تطور التوتر U_{AB} مع مرور الزمن بين طرفي مكثفة سعتها C ، موصولة على التسلسل مع مقاومة $R = 100\ \Omega$. توضع القاطعة لمدة طويلة في الوضعية 2 ثم ، عند اللحظة $t = 0$ ، ننقلها إلى الوضعية 1 و في نفس اللحظة نبدأ في تسجيل قيم التوتر U_{AB} . ندون النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :



t (ms)	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
U_{AB}(V)	0,0	1,5	2,5	3,2	3,7	4,1	4,4	4,6
t (ms)	0,80	1,0	1,2	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
U_{AB}(V)	4,7	4,8	4,9	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0

1— ما هو الهدف من ترك القاطعة لمدة طويلة في الوضعية 2 قبل تسجيل القيم ؟

2— باحترام الإتجاهات المصطلحة الموضحة على الشكل بين أن U_{AB} يخضع لمعادلة تفاضلية من الشكل : $\tau\, dU_{AB}/dt + U_{AB} = E$. حدد الثابت τ .

3— ما هي الوحدة الدولية لـ dU_{AB}/dt ؟ استنتج وحدة τ مع تعليل تسمية (ثابت الزمن) المعطاة له .

4— حل المعادلة التفاضلية هو $U_{AB}(t)= E[1 - \exp(-t/\tau)] = 0,5$. أحسب $U_{AB}(\tau)/E$. استنتج تعريف الزمن τ .

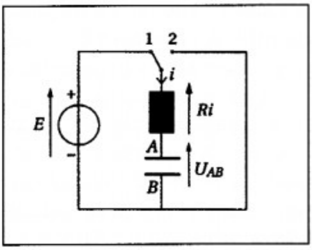
5— الزمن $t_{1/2}$ لنصف الشحن يكون بحيث : $U_{AB}(t_{1/2})/E = 0,5$. من بين الإقتراحات التالية حدد الصحيحة منها مع التعليل بدون حساب : $t_{1/2} = \tau \ln 2$; $t_{1/2} = \tau/\ln 2$; $t_{1/2} = \ln 2 /\tau$

6— إنطلاقا من القيم المسجلة ، حدد E و $t_{1/2}$. استنتج قيمة السعة C .

7— اكتب عبارة الشدة i بدلالة U_{AB} ، E و R . استنتج أن $i(t) = i_0 \exp(-t/\tau)$. ماذا يمثل الثابت i_0 ؟ ماهي قيمته ؟ كيف تتطور الشدة i خلال طور الشحن ؟

8— هل التصريح التالي صحيح أم خطأ : خلال طور شحن المكثفة ، شدة التيار المار في ثنائي القطب RC متناقصة و كذا بالنسبة للتوتر بين طرفيه . برر إجابتك .

الحـل ـ 23



1ـ الهدف من ترك القاطعة لمدة طويلة في الوضعية 2 قبل تسجيل القيم هو :
للتأكد أن المكثفة قد فرغت تماما أي كلية .

2ـ كتابة المعادلة التفاضلية : التوتر بين طرفي المقاومة من الشكل :
$u_R = R i$. قانون جمع التوترات يسمح بكتابة : $R i + U_{AB} = E$
مع $i = C\, dU_{AB}/dt$ نحصل على المعادلة التفاضلية : $RC\, dU_{AB}/dt + U_{AB} = E$
و يمكن كتابتها على الشكل : $\tau\, dU_{AB}/dt + U_{AB} = E$ حيث $\tau = RC$.
$\tau\, dU_{AB}/dt + U_{AB} = E$. حدد الثابت τ .

3ـ الوحدة الدولية لــ dU_{AB}/dt هي $V . s^{-1}$. في المعادلة التفاضلية ،
الحد $\tau\, dU_{AB}/dt$ يعبر عنه بالفولط V ، أي بنفس وحدة الحد U_{AB} الذي جمع معه .
و منه نستنتج أن وحدة τ هي الثانية s . إذن τ هو زمن و يساوي إلى الجداء RC . و لهذا السبب سمي الثابت τ بثابت الزمن .

4ـ حساب $U_{AB}(\tau)/E$ و استنتاج تعريف الزمن τ : من العبارة $U_{AB}(t)= E[1 - \exp(-t/\tau)]$ نجد :
$U_{AB}(\tau) / E = 1 - \exp(-\tau/\tau) = 1 - \exp(-1)$. و منه : $U_{AB}(\tau) / E = 0,63$. و منه نستنتج تعريف ثابت الزمن
τ و هو الزمن الآزم لتشحين المكثفة بنسبة 63 % .

5ـ τ هو الزمن الآزم لتشحين المكثفة بنسبة 63 % بينما الزمن $t_{1/2}$ هو زمن نصف الشحن أي الزمن الآزم لتشحين المكثفة بنسبة 50 % و منه نستنتج أن $t_{1/2}$ يكون أقل من τ . إذن الإقتراح الصحيح هو : $t_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,693\, \tau$.
$t_{1/2} = \ln 2 /\tau$ غير صحيح لأنه يؤدي إلى وحدة $t_{1/2}$ بـــ s^{-1} . $t_{1/2} = \tau \ln 2$ غير صحيح لأنه يؤدي إلى : $t_{1/2} > \tau$

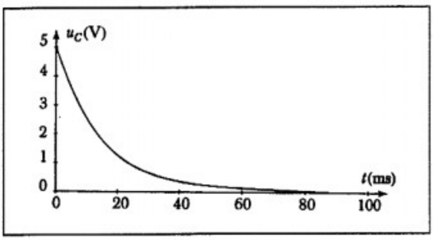
6ـ تحديد E و $t_{1/2}$ و استنتاج قيمة السعة C : في الجدول نلاحظ أن :
ـ القيمة الحدية لــ U_{AB} هي 5,0 V إذن : E = 5,0 V .
ـ قيمة U_{AB} تصل إلى $E/2 = 2,5$ V خلال زمن قدره 0,20 ms ، إذن : $t_{1/2} = 0,20$ ms .
العبارة $t_{1/2} = \tau \ln 2 = RC \ln 2$ تسمح بحساب :
$C = t1/2 / (R \ln 2) = (0,20 . 10^{-3})/(100 . 0,693) = 2,9 . 10^{-6} F = 2,9\ \mu F$.

7ـ كتابة عبارة الشدة i بدلالة U_{AB} ، E و R : من العبارة $R i + U_{AB} = E$ نجد : $i = (E - U_{AB}) / R$.
بالعبارة $U_{AB}(t) = E[1 - \exp(-t/\tau)]$ نجد : $i(t) = E/R \exp(-t/\tau)$ و منه : $i(t) = i_0 \exp(-t/\tau)$ حيث $i_0 = E/R$.
الثابت i_0 هي الشدة الإبتدائية $(t = 0)$ لأن $i(0) = i_0 \exp(0) = i_0$ و قيمتها :
$i_0 = E/R = 5,0 / 100 = 5,0 . 10^{-2} A = 50 mA$.

8ـ الشدة : $i(t) = E/R \exp(-t/\tau)$ متناقصة ، إذن التوتر R i بين طرفي المقاومة متناقص ، و لكن التوتر الكلي بين طرفي ثنائي القطب RC يبقى ثابت و قيمته 5,0 V لأن : $R i + U_{AB} = E$. و منه : التصريح خاطئ .

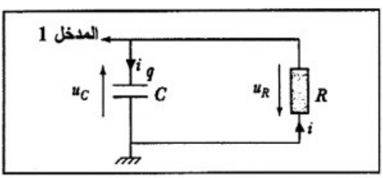
التمرين ـ24

مكثفة ، ابتدائيا مشحونة تحت توتر E ، تفرغ في ناقل أومي مقاومته $R = 1000\ \Omega$. نشاهد على شاشة راسم الإهتزاز منحنى التوتر u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن .



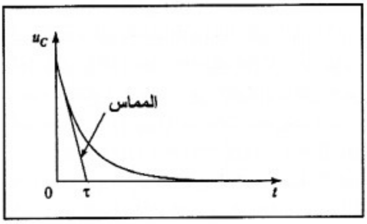
aـ ارسم مخطط تركيب الدارة مبرزا التوصيلات التي تسمح بمشاهدة التوتر u_C . حدد جهة التيار i ، الشحنة q التي تحملها المكثفة و اتجاهات أسهم التوترات u_R و u_C بحيث تكون موجبة باعتبارها اصطلاحا آخذة .
bـ اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها u_C .
cـ حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل $u_C = A . \exp(-\alpha t)$
حدد قيم كل من A و α . ماذا تمثل كل من A و $1/\alpha$ ؟
dـ باستعمال المنحنى البياني ، حدد قيم كل من A و α .
eـ حدد قيمة السعة C للمكثفة . fـ اكتب عبارة الشدة i للتيار بدلالة الزمن .

الحـل ـ24



aـ رسم مخطط تركيب الدارة : انظر الشكل المقابل .
bـ كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها u_C : حسب قانون جمع التوترات
لدينا : $u_C + u_R = 0$ و حيث أن :
$u_R = R i$ و لدينا : $i = dq/dt$
إذن : $u_C + RC\, du_C/dt = 0$
و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة إلى u_C .

c ــ تحديد قيم كل من A و α : إذا كان $u_C = A . exp(-\alpha t)$ هو حل للمعادلة التفاضلية فإن u_C يحقق المعادلة .
نعوض $u_C(t)$ و du_C/dt في المعادلة حيث : $u_C = A . exp(-\alpha t)$ و $du_C/dt = - \alpha A . exp(-\alpha t)$.
لدينا : $RC\ (- \alpha A . exp(-\alpha t) + A . exp(-\alpha t) = 0$ و $- \alpha ARC\ exp(-\alpha t) + A\ exp(-\alpha t) = 0$ هذه المعادلة
محققة إذا كان $A - \alpha ARC = 0$ أي من أجل $A = \alpha ARC$ و منه : $\alpha = 1/RC$ و منه : $1/\alpha = RC$
إذن : $1/\alpha$ هو ثابت الزمن τ للدارة .
الشروط الإبتدائية تسمح بتحديد قيمة A . فعلا عند اللحظة : $t = 0$ نجد $u_C = E$ (مكثفة ابتدائيا مشحونة تحت توتر E)
إذن : $u_C\ (t) = A\ exp(-t/RC) = E$. عند $t = 0$ نجد : $A\ exp(0) = 1$ إذن : $u_C\ (t = 0) = A = E$
إذن يكون لدينا : $A = E$. A يمثل التوتر الإبتدائي بين طرفي المكثفة .



d ــ تحديد قيم كل من A و α بيانيا : بالقراءة على البيان نحدد :
$E = 6,0\ V = A$ (قيمة u_C عند الحظة $t = 0$) .
تحدد τ بيانيا بنقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ مع المماس
للمنحنى عند ∞ حيث فاصلتها : $t = \tau = 14\ ms$.
و منه نحسب قيمة α فنجد : . $\alpha = 1/\tau = 1/(14 . 10^{-3}) = 71\ s^{-1}$

e ــ تحديد قيمة السعة C للمكثفة : من التعريف $\tau = RC$. لدينا إذن :
$C = \tau/R = (14 . 10^{-3})/1000 = 14\ \mu F$.

f ــ كتابة عبارة الشدة i للتيار بدلالة الزمن : $i(t) = dq/dt = C\ du_C/dt = - (CE/\tau)\ exp(-t/\tau) = - E/R\ exp(-t/\tau)$