تطور جملة ميكانيكية

تتعلمون في هذه الوحدة

- كيف تم توحيد الميكانيك الفلكية والميكانيك الأرضية .
- توظيف القوانين الثلاثة لنيوتن و مفهوم التسارع .
- تفسير بواسطة القانون الثاني لنيوتن أو بواسطة الطاقة ، حركة قذائف وحركة الكواكب أو الأقمار الاصطناعية .
- تفسير بواسطة قوانين كيبلر حركة الكواكب أو الأقمار الاصطناعية .
- تفسير حركة جسم صلب ، خاضع لعدة قوى ، بواسطة الطاقة أو القانون الثاني لنيوتن .
- تفسير ، بواسطة معادلة تفاضلية ، حركة جسم صلب في الهواء وخاضع لإحتكاك .
- حدود ميكانيك نيوتن .

(1642 - 1642 م) Newton

(1630 - 1571) Kepler

ما تعرفت عليه سابقا :

- وصف ودراسة حركة جملة في مرجع معين وفهم كيف يمكن تغيير حركتها .
- تحديد وتمثيل شعاع السرعة اللحظي v
- تحديد وتمثيل تغير شعاع السرعة Δv في الحركات المستقيمة والحركات المنحنية .
- التمييز بين الحركة الإنسحابية والحركة الدورانية .
- تحليل القوى المؤثرة في جملة بتوظيف مخطط أجسام متأثرة .
- تحديد تحول طاقة ما عن طريق العمل :

ـــ حالة عمل قوة ثابتة خلال انتقال مستقيم

$$W_{AB}(F) = F . AB \cos (A,B)$$

- مبدأ انحفاظ الطاقة : الطاقة لا تستحدث ولا تزول ، إذا اكتسبت جملة ما طاقة أو فقدتها ، فإنها بالضرورة قد أخذتها من جملة أو جمل أخرى أو قدمتها لها .
- إنجاز حصيلة طاقوية بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة
- تفسير بعض الحركات باستعمال كل من مبدأ العطالة و مبدأ الفعلين المتبادلين .
- استعمال قانون الجذب العام .

تطور جملة ميكانيكية

مقاربة تاريخية لميكانيك نيوتن

من بين الأفعال المتبادلة الأساسية الأربعة (الكهرومغناطيسية ، الجاذبية ، النووية القوية والنووية الضعيفة) ، تحتل قوة الجذب أقدم مكانة في التاريخ .

منذ الفيزياء الأكثر حسية لأرسطو إلى غاية الفيزياء النسبية وتنبؤات آنشتاين ، كان لفهم حركات الأجسام والفعل الجاذبي أثر كبير على الفكر تمخضت عنه ثلاث ثورات على الأقل ، فلقد شهد تاريخ الميكانيك تطورا في المفاهيم والنظاريات ، أبرز التحولات فيها كانت الإنتقال من النظام المركزي الأرضي لأرسطو إلى النظام المركزي الشمسي لكوبرنيك وتفسير غاليلي ونيوتن للحركات . نقدم لمحة موجزة عن هذا التاريخ العظيم :

Aristotle (384 - 322 ق.م)

1ــ نظام أرسطو Aristote (384 - 322 ق.م) :

ينقسم إلى عالم تحت قمري ، وعالم فلكي مثالي ، أي عالم الأجرام ، خاضع إلى قوانين مختلفة تماما عن القوانين الأرضية . أعتمد في تفسيره للحركات على النظام الجيومركزي (géocentrigue) :

الأرض هي المركز الهندسي للكون . كان وصفه مبنيا أساسا على الحدس ، عكس ما هو في العلم الحديث وهذا ما أعطاه قوة الديمومة .

Ptolémée (140 م)

2ــ نموذج بطليموس Ptolémée (140 م) :

الوصف الدقيق والكمي لحركة الأجرام ، الذي قا به العالم بطليموس (Ptolémée) المدون في كتابة الماجستي (almageste) المشهور أعطى دعما لنظام أرسطو . اقترح هذا الأخير نظاما لحركة الأجرام مبنيا على فلك التدوير (epicycle) ، الدائرة الصغيرة التي يرسمها الجرم حول نفسه وهو يدور حول الأرض في الدائرة الكبيرة .

Copernic (1473 - 543 م)

3ــ كوبرنيك Copernic (1473 - 1543 م) :

أثار نظام بطليموس عدة إشكاليات ، وبقيت تساؤلات كثيرة مطروحة حول حركة بعض الكواكب (مثل : لماذا لا يلاحظ عطارد والزهرة إلا في بداية ونهاية الليل ، بينما يلاحظ طوال الليل كل من المريخ ، زحل والمشتري) . كل هذا دفع بكوبرنيك إلى البحث على نظام آخر يسمح بشرح حركة الكواكب . وضع عندها فرضية النظام الهيليومركزي (héliocentrigue) .

Kepler (1630 - 1571)

4ــ كبلر (1571 - 1630) :

عملا بالنظام الهيليومركزي و بمساعدة تيكويراهي ، حاول كبلر تحديد مسارات الكواكب بدقة . لم يتقبل ظاهرة انحراف الكواكب عن الدائرة المثالية التي كان يجدها في حساباته الرياضية و أصبح يشكك في فكرة الحركة الدائرية المنتظمة . وبفعل إتقانه ودقته ، نشر سنة 1609 قانونين :

(1) : ترسم الكواكب مدارات إهليلجية لا دائرية .

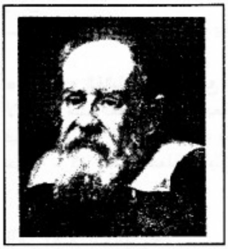
(2) : سرعتها ليست ثابتة .

عوض كبلر 48 دائرة متداخلة لكوبرنيك بسبعة إهليلجات بسيطة (كل واحدة خاصة بكوكب) .

وضع بعدها قانونه الثالث (3): النسبة بين مربع دور حركة الكوكب ومكعب المسافة بينه

والشمس ثابتة عند كل كواكب النظام الشمسي . كان لهذه القوانين الثلاثة دور أساسي في تطور الميكانيك .

5ـ غاليلي Galilée (1564 - 1642 م) :


Galilée (1564 - 1642 م)

كان غاليلي من إتباع نظام كوبرنيك . كانت له شكوك حول المدارات الإهليلجية لكبلر .
صنع منظارا بعدستين فتمكن من اكتشاف الأقمار الرئيسية للمشتري و مشاهدة النجوم ،
و بمراقبة أطوار كوكب الزهرة قدم غاليلي البرهان القاطع الذي ينفد كليا نظرية مركزية الأرض .
فقام غاليلي ، سنة 1632 ، بنشر أشهر كتاب له ، «الحوار حول أكبرالنظامين المسيرين للعالم » .
درس غاليلي ميكانيكية وديناميكية الأجسام في حالة الحركة وخاصة منها حركة القذائف وشرحه للسقوط الحر . وبين أن التسارع ثابت في حقل الجاذبية الأرضية ، فوضع قانون العطالة .
كما أنه فتح النقاش حول مسألة النسبية في الحركة .

6ـ نيوتن Newton (1642 - 1642 م) :

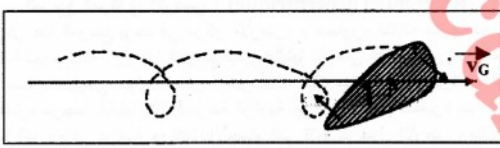

Newton (1642 - 1642 م)

اعتمادا على أفكار كوبرنيك ، ملاحظات تيكو براهي ، القوانين التجريبية لكبلر وقوانين الحركة لغاليلي ، طرح نيوتن نظرية على الحركات . لقد استطاع ربط القوى المطبقة على جسم بتسارعه .
كان نيوتن السباق في فهم أن التفاحة التي تسقط من شجرة والقمر الذي يدور حول الأرض يخضعان لنفس القانون فقدم قانون التجاذب الكوني . يفترض هذا القانون تزامن الفعلين المتبادلين .
فاستطاع نيوتن التوحيد بين الميكانيك الأرضية والفلكية .
الميكانيك الفلكية هي إذا تطبيق ميكانيك نيوتن عبر المبدأ الأساسي للتحريك ونتائجه :
(القوانين الثلاثة لنيوتن) .

تذكير ببعض المفاهيم الأساسية

مركز العطالة

عندما يكون جسم صلب معزولا أو شبه معزول في معلم غاليلي و يتحرك بحركة كيفية (الشكل المرفق)، فإنه توجد نقطة (G) ، و هي نقطة وحيدة من هذا الجسم ، حركتها حركة مستقيمة ، ندعوها بمركز عطالة ذلك الجسم الصلب.



ملاحظة : سنتعرف فيما بعد بالمعالم الغاليلية.

توضيح :

ـ جسم صلب معزول : جسم لا يخضع لقوى خارجية .

ـ جسم صلب شبه معزول : جسم يخضع لقوى خارجية، لكن محصلتها معدومة.

• تحديد مركز العطالة :

إذا كان للجسم الصلب المتجانس مركز تناظري ، فإن مركز عطالة الجسم يكون منطبقا مع مركز تناظره .

ـ حالة جملة مادية صلبة مكونة من عدة أجزاء :

إذا كانت جملة صلبة كتلتها m ، تتألف من عدة أجزاء نعتبرها نقطا مادية ، كتلها على التوالي : m_1 ، m_2 ، .... ، m_n ، و مراكز عطالتها G_1 ، G_2 .... ، G_n ، فإن مركز عطالة الجملة (G) ينطبق مع مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقط والمعرف كما يلي : $\overrightarrow{OG}\,(m_1 + m_2 + m_3 \,. \ldots + m_n) = \; m_1\,\overrightarrow{OG_1} + m_2\,\overrightarrow{OG_2} \; + \ldots\ldots + m_n\,\overrightarrow{OG_n}$

إذا كانت m كتلة الجملة حيث : $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ ،

تصبح العلاقة السابقة : $m\,\overrightarrow{OG} = \Sigma\, m_i\,\overrightarrow{OG_i} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OG} = \Sigma\, m_i\,\overrightarrow{OG_i} / m$

و هي علاقة تعرف النقطة (G)، التي تسمى مركز العطالة، كذلك مركز كتلة الجملة، الذي ينطبق عموما مع مركز ثقل الجملة.

مفهوم النقطة المادية :

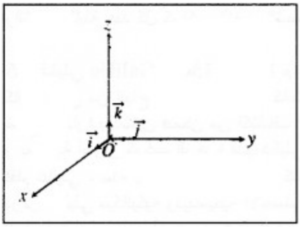
الجسم الصلب : هو الجملة التي لا يتغير شكلها أثناء قيامها بحركة ، أي أن المسافة بين نقطتين كيفيتين من هذه الجملة تبقى ثابتة أثناء الحركة .
النقطة المادية : يمكن اعتبار الجملة نقطة مادية إذا كانت أبعادها مهملة أمام أبعاد المرجع الذي تدرس الحركة بالنسبة إليه .

المرجع والمعلم :

لا يمكن دراسة حركة جملة مادية دون تحديد مرجع لذلك . إن المرجع جسم صلب يرتبط دوما بمعلمين :

– معلم فضائي $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ ، مختار بحيث يكون وصف الحركة أبسط ما يمكن .

ــ معلم للزمن . مبدأ الأزمنة يختار عادة بحيث يتطابق مع لحظة بداية الحركة



● **المراجع الغاليلية : المراجع العطالية**

لا يطبق مبدأ العطالة إلا في بعض المراجع التي تدعى بالمراجع الغاليلية .
قبل حل مسألة في الميكانيك ، يجب التأكد من أن المرجع المختار لدراسة حركة مركز عطالة جملة غاليلي .

المراجع الغاليلية

تذكير بمبدأ العطالة :

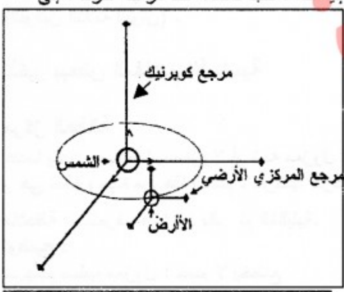
نص المبدأ : في مرجع غاليلي، إن لمركز عطالة جسم صلب معزول أو شبه معزول حركة منتظمة إذا كان متحركا ، و يبقى ساكنا إذا وجد ساكنا . يعرف هذا المبدأ ، كذلك ، بالقانون الأول لنيوتن .

تعريف : نسمي مرجعا غاليليا كل مرجع يتحقق فيه مبدأ العطالة.

ملاحظة : كل مرجع في إزاحة مستقيمة منتظمة، بالنسبة لمرجع غاليلي هو كذلك مرجع غاليلي .

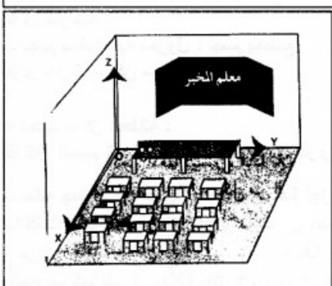
أمثلة للمراجع الغاليلية :

نعرف أن طبيعة حركة جسم تتعلق بالجسم المرجعي الذي تتم هذه الحركة بالنسبة إليه لذا ، نلجأ دائما، عند دراسة حركة، إلى اعتبار مرجع تنسب إليه الحركة :

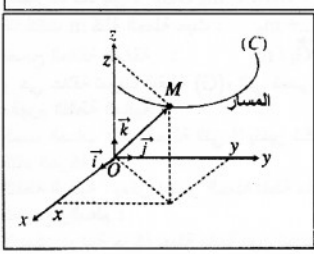


a ــ المرجع الهيليومركزي (Référentiel Héliocentrique)
مرجع كوبرنيك :
مركز هذا المرجع ينطبق مع مركز النظام الشمسي ، و محاوره الثلاثة متجهة نحو ثلاث نجوم ثابتة جد بعيدة . و يعتبر هذا المرجع أفضل مرجع غاليلي، حيث يستعمل في الدراسة الدقيقة لحركة الكواكب والمذنبات ...

b ــ المرجع المركزي الأرضي : (Référentiel géocentrique)
مركز هذا المرجع يوجد في مركز الأرض، و محاوره الثلاثة متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة . إن هذا المرجع ليس غاليليا بالمعنى الدقيق لكون مبدأ معلمه له مسار اهليليجي حول الشمس ، غير أنه ، أثناء مدة زمنية قصيرة ، يمكن اعتباره مرجعا غاليليا لأن السرعة الزاوية لمركز الأرض صغيرة جدا . يعتمد هذا المرجع في دراسة حركات الأجسام التي تتحرك حول الأرض ، مثل الأقمار الإصطناعية ...

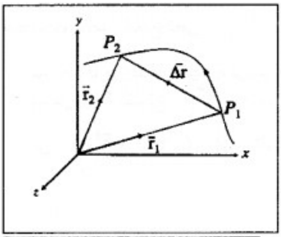


c ــ المرجع الأرضي : (Référentiel terrestre) مرجع مرتبط بالأرض ، و ليس غاليليا بالمعنى الدقيق لكون الأرض تدور حول نفسها، غير أنه بالنسبة للتجارب التي لا تدوم وقتا طويلا مقارنة مع مدة دوران الأرض حول نفسها و والتي لا تستلزم دقة كبيرة ، يمكن اعتبار المرجع الأرضي مرجعا غاليليا .
و هو الذي نستعمله لدراسة معظم الحركات التي تتم على الأرض .



● **شعاع الموضع :** يكتب في الفضاء شعاع الموضع $\vec{r}$ لجسم إحداثياته الكارتيزية

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad : (x , y , z)$$

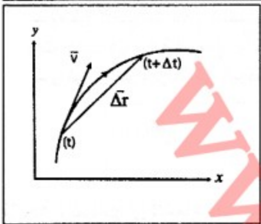


• **شعاع الإنتقال :**
إذا انتقل الجسم من النقطة P_1 شعاع موضعها $\vec{r_1}$ إلى النقطة P_2 شعاع موضعها $\vec{r_2}$ ،
يعبر عن الإنتقال بالتغير في شعاع الموضع : $\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k}$

• **شعاع السرعة المتوسطة :** هو النسبة بين شعاع الإنتقال والمجال الزمني الموافق له :.

$$\vec{v}_{moy} = \vec{\Delta r} / \Delta t$$

لشعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_{moy}$ نفس جهة $\vec{\Delta r}$ فهي موجهة حسب قاطع القوس لدائرة مسار الحركة ، كلما نقص Δt كلما اقترب القاطع من المستقيم المماس وتصبح $\vec{\Delta r}$ مماسية للمسار.



• **شعاع السرعة اللحظي :** شعاع السرعة اللحظي هو : $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\Delta r} / \Delta t$
أو $\vec{v} = \vec{dr}/dt = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$ مع $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$
حامل شعاع السرعة $\vec{v}$ مماسي للمسار وجهته هي جهة الحركة .

• **قيمة السرعة**
المخطط $y(x)$ لا يمثل بيان الموضع بدلالة الزمن و منه لا يمكن حساب قيمة السرعة v الموافقة للسرعة اللحظية عن طريق ميل المماس . قيمة السرعة في معلم كارتيزي هي :

$$v = \sqrt{v^2_x + v^2_y + v^2_z}$$

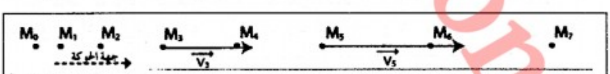
• **مفهوم التسارع**
• **مفهوم التسارع الوسطي :** في حركة مستوية ، الشعاع $\vec{\Delta v}/\Delta t$ هو شعاع التسارع اللحظي : $\vec{a_m} = \vec{\Delta v}/\Delta t$.

• **تمثيل شعاع التسارع : يمكن أن نمثل شعاع التسارع $\vec{a_m} = \vec{\Delta v}/\Delta t$ بطريقتين :**
ــ الطريقة 1 : انطلاقا من المسار أي بعد تمثيل شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta v}$
ــ الطريقة 2 : انطلاقا من محصلة القوى الخارجية المؤثرة على المتحرك التي نتطرق إليها لحقا .

الطريقة 1 : انطلاقا من المسار أي بعد تمثيل شعاع تغير السرعة Δv

ــ تحديد شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta v}$
لتحديد شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta v}$ عمليا نستعين بالتسجيل الممثل في الشكل التالي :

ثم نتبع الخطوات الآتية :
ــ نعين الموضع الذي نريد تحديد عنده الشعاع $\vec{\Delta v_4}$ و ليكن في مثالنا هذا الموضع M_4
ــ نمثل شعاعي السرعة اللحظية $\vec{v_3}$ و $\vec{v_5}$ في الموضعين M_3 و M_5 المجاورين للموضع M_4 باتباع خطوات تمثيل شعاع السرعة اللحظية .

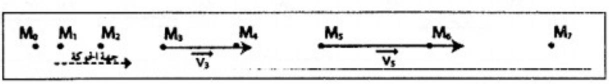


ــ نعرف شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta v_4}$ في الموضع M_4 بالفرق بين الشعاعين $\vec{v_3}$ و $\vec{v_5}$ أي :

$$\vec{\Delta v_4} = \vec{v_5} - \vec{v_3}$$

• **تحديد خصائص شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta v}$**
لتحديد خصائص شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta v}$ نلجأ إلى تمثيله أولا و هذا باعتبار الحالتين :

أ ــ حالة تزايد السرعة (الحركة متسارعة) :
نأخذ كمثال الموضع M_4 في التسجيل السابق فيكون حينئذ (v_5 أكبر من v_3)

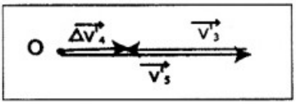


لتحديد خصائص شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{V}_4$ في الموضع M_4 نلجأ إلى تمثيله متبعا الخطوات التالية :

ــ انطلاقا من نقطة كيفية **o** نرسم الشعاع $\vec{V'}_5$ المساير للشعاع $\vec{V}_5$ أي : ($\vec{V'}_5 = \vec{V}_5$)

ــ من نهاية الشعاع $\vec{V'}_5$ نرسم شعاعا $\vec{V'}_3$ مساويا للشعاع $\vec{V}_3$ و معاكسا له في الإتجاه ،

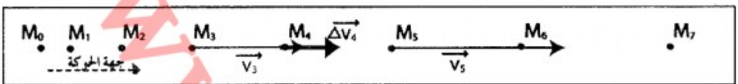
أي : ($\vec{V'}_3 = \vec{V}_3$ -) أنظر الشكل.



ــ بعملية الجمع الشعاعي نحصل على الشعاع : $\Delta\vec{V'}_4 = \vec{V'}_5 + \vec{V'}_3 = \vec{V}_5 - \vec{V}_3$

حيث بدايته هي بداية الشعاع $\vec{V'}_5$ (النقطة **o**) ، و نهايته هي نهاية الشعاع $\vec{V'}_3$.

ــ و في الأخير، نرسم في الموضع M_4 الشعاع $\Delta\vec{V}_4$ المساير للشعاع $\Delta\vec{V'}_4$.



نتيجة : نستنتج أن للشعاع تغير السرعة $\Delta\vec{V}$ في الحركة المتسارعة ، الخصائص التالية :

ــ بدايته هي النقطة المعتبرة مثل M_4

ــ حامله منطبق على المسار (مثل $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_5$)

ــ جهته هي جهة الحركة

ــ طويلته هي الفرق بين طويلتي الشعاعين $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_5$

$$||\Delta\vec{V}_4|| = ||\vec{V}_5|| - ||\vec{V}_3||$$

نتيجة : نستنتج أن شعاع التسارع $\vec{a}_{M4}$ في الحركة المتسارعة الخصائص التالية :

ــ بدايته هي النقطة المعتبرة مثل M_4

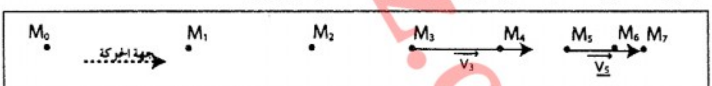
ــ حامله منطبق على المسار (مثل $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_5$)

ــ جهته هي جهة الحركة

ــ طويلته هي : $a_{M4} = ||\Delta\vec{V}_4|| / (t_5 - t_3) = ||\Delta\vec{V}_4|| / (\Delta t)$

ب ــ حالة تناقص السرعة (الحركة متباطئة)

نأخذ كمثال الموضع M_4 في التسجيل الآتي فيكون حينئذ (v_5 أصغر من v_3)

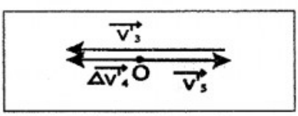


لتحديد خصائص شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{V}_4$ في الموضع M_4 نلجأ إلى تمثيله متبعا الخطوات التالية :

ــ انطلاقا من نقطة كيفية **o** نرسم الشعاع $\vec{V'}_5$ المساير للشعاع $\vec{V}_5$ أي : ($\vec{V'}_5 = \vec{V}_5$)

ــ من نهاية الشعاع $\vec{V'}_5$ نرسم شعاعا $\vec{V'}_3$ مساويا للشعاع $\vec{V}_3$ و معاكسا له في الإتجاه ،

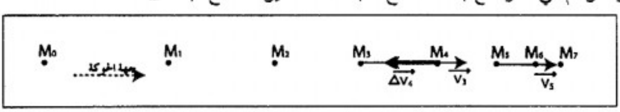
أي : ($\vec{V'}_3 = -\vec{V}_3$) أنظر الشكل.



ــ بعملية الجمع الشعاعي نحصل على الشعاع : $\Delta\vec{V'}_4 = \vec{V'}_5 + \vec{V'}_3 = \vec{V}_5 - \vec{V}_3$

حيث بدايته هي بداية الشعاع $\vec{V'}_5$ (النقطة **o**) ، و نهايته هي نهاية الشعاع $\vec{V'}_3$.

ــ و في الأخير، نرسم في الموضع M_4 الشعاع $\Delta\vec{V}_4$ المساير للشعاع $\Delta\vec{V'}_4$.



نتيجة : نستنتج أن للشعاع تغير السرعة $\Delta\vec{V}$ في الحركة المتباطئة ، الخصائص التالية :

ــ بدايته هي النقطة المعتبرة (مثل M_4).
ــ حامله منطبق على المسار (مثل $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_5$).
ــ جهته هي عكس جهة الحركة
ــ طويلته هي الفرق بين طويلتي الشعاعين $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_5$.

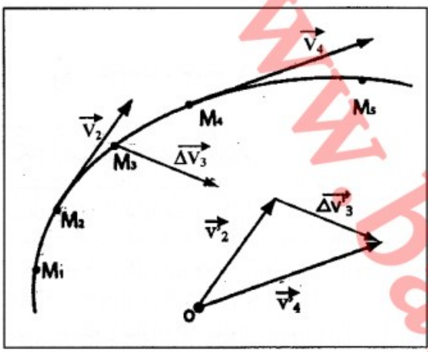
$$||\Delta\vec{V}_4|| = ||\vec{V}_3|| - ||\vec{V}_5||$$

نتيجة : نستنتج أن شعاع التسارع $\vec{a}_m$ في الحركة المتباطئة ، الخصائص التالية :

ــ بدايته هي النقطة المعتبرة (مثل M_4).
ــ حامله منطبق على المسار (مثل $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_5$).
ــ جهته هي عكس جهة الحركة
ــ طويلته هي : $a_{M4} = ||\Delta\vec{V}_4|| / (t_5 - t_3) = ||\Delta\vec{V}_4|| / (\Delta t)$

ملاحظة

في الحركة المنحنية أو الدائرية نحدد شعاع التسارع كما يلي :



ــ تمثيل شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{V}$ في الحركة المنحنية :

$$\Delta\vec{V}_3 = \vec{V}_4 - \vec{V}_2$$

ــ نختار نقطة كيفية O خارج التسجيل
ــ انطلاقا من هذه النقطة O نرسم شعاعا $\vec{V}'_2$ مسايرا للشعاع $\vec{V}_2$
ــ انطلاقا من هذه النقطة O نرسم شعاعا $\vec{V}'_4$ مسايرا للشعاع $\vec{V}_4$
ــ نرسم الشعاع $\Delta\vec{V}'_3$ ، بحيث تكون بدايته في نهاية $\vec{V}'_2$
و نهايته في نهاية $\vec{V}'_4$ بهذا الترتيب ، $\Delta\vec{V}'_3 = \vec{V}'_4 - \vec{V}'_2$
ــ بما أن $\vec{V}'_2$ و $\vec{V}'_4$ يسايران $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_4$ على الترتيب ،
فإن $\Delta\vec{V}'_3$ يساير $\Delta\vec{V}_3$.
ــ تكون إذا خصائص الشعاع $\Delta\vec{V}_3$ هي :
ــ بدايته : الموضع المعتبر M_3
ــ حامله : موازي لحامل $\Delta\vec{V}'_3$
ــ جهته : هي جهة $\Delta\vec{V}'_3$
ــ قيمته : تساوي طويلة $\Delta\vec{V}'_3$ المقاسة بيانيا على الرسم باعتماد سلم تمثيل السرعات.

نتيجة : تكون إذا خصائص الشعاع $\vec{a}_{M3}$ هي :
ــ بدايته : الموضع المعتبر M_3
ــ حامله : موازي لحامل $\Delta\vec{V}'_3$
ــ جهته : هي جهة $\Delta\vec{V}'_3$
ــ قيمته : تساوي طويلة : $a_{M3} = ||\Delta\vec{V}'_3|| / (t_4 - t_2) = ||\Delta\vec{V}_3|| / (\Delta t)$ و نمثله باعتماد سلم تمثيل التسارع.

• **مفهوم التسارع اللحظي :** في مرجع معين وفي لحظة معينة t و من أجل مدة زمنية Δt صغيرة بجوار t ، تمثل النسبة $\Delta\vec{v}_G / \Delta t$ شعاع التسارع مركز عطالة الجملة . ونعتبر عنه بالعلاقة : $\vec{a}_G = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{v}_G / \Delta t$ أو $\vec{a}_G = d\vec{v}_G / dt$
حيث $d\vec{v}_G / dt$ يمثل مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن في اللحظة t . وحدة التسارع هي إذا : m/s^2

• **احداثيات شعاع التسارع في المعلم الكارتيزي :**
ــ في المعلم الكارتيزي ، عبارة شعاع التسارع اللحظي هي : $\vec{a} = d\vec{v}/dt = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$
مع $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$, $a_z = dv_z/dt$.

• **وحدة شعاع التسارع :** وحدة شعاع التسارع هي إذا : m/s^2
ــ عامة ، لا يمكن تحديد a مباشرة من خلال المسار ، لأننا بحاجة لمعرفة تغير كل مركبة للسرعة بدلالة الفضاء والزمن .
ــ ثبات قيمة السرعة لا يعني بالضرورة انعدام التسارع إلا في الحركات المستقيمة .

تطبيقات على الحركات المستقيمة

• **الحركة المستقيمة المنتظمة**

تكون حركة نقطة ما مستقيمة منتظمة إذا كان شعاع سرعتها ثابتا . ينتج عن ذلك : $v = Cte \Rightarrow a = dv/dt = 0$

• الموضع (فاصلة المتحرك)

إن موضع المتحرك هو بحيث يكون في كل لحظة : $v = dx/dt = Cte$ حيث x : هي إذن دالة أصلية لـــ v :

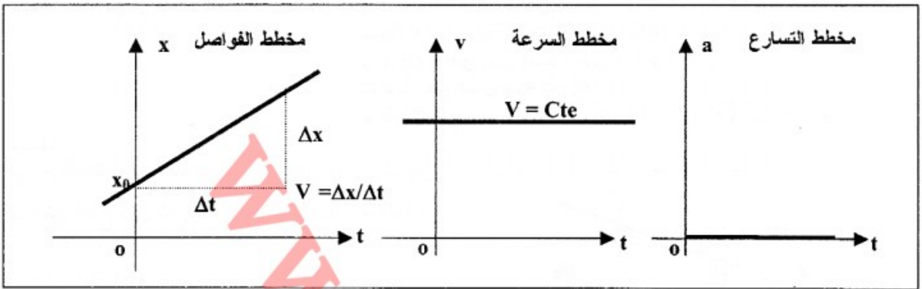
و منه : $x = v\,t + b$ الثابت b (ثابت التكامل) يمثل قيمة x في الزمن $t = 0$ ولتكن x_0 ،

و تسمى **الفاصلة الإبتدائية** . تبعا لذلك : $x = v\,t + x_0$

إن الفاصلة x للمتحرك دالة من الدرجة الأولى في الزمن .

خلاصة : في الحركة المستقيمة المنتظمة لدينا : $a = 0$ ، $v = Cte$ ، $x = v\,t + x_0$.

المنحنيات $a = f(t)$ ، $v = g(t)$ و $x = h(t)$ تسمى على الترتيب بمخططات التسارعات ، السرع والفواصل .



الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

باستخدام تعريف التسارع : $dv/dt = a = F/m$. بما أن F ثابتة إذن التسارع كذلك ثابت خلال الحركة .

نكامل بالنسبة للزمن فنحصل على : $v = a\,t + k$. السرعة الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v = v_0$ إذن : $k = v_0$

و منه : $v = a\,t + k = a\,t + v_0$ و منه نحصل على المعادلة الزمنية للسرعة : $v = a\,t + v_0$.

لتحديد الموضع نكامل من جديد عبارة السرعة فنحصل على : $x = 1/2\,a\,.\,t^2 + v_0\,t + k$

عند $t = 0$ لدينا : $x = x_0$ إذن : $k = x_0$ و منه نحصل على المعادلة الزمنية للحركة : $x = 1/2\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$

بعض خصائص الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

a ــ إذا كان شعاع التسارع له نفس إتجاه السرعة أو الحركة ،

$\vec{a}$ و $\vec{v}$ يكون لهما نفس الإتجاه ($a\,.\,v > 0$) ، تزداد طويلة شعاع السرعة . **الحركة متسارعة بانتظام.**

b ــ إذا كان شعاع التسارع له عكس إتجاه السرعة أو الحركة ،

$\vec{a}$ و $\vec{v}$ يكون ليس لهما نفس الإتجاه ($a\,.\,v < 0$)، تتناقص طويلة شعاع السرعة . **الحركة متباطئة بانتظام .**

c. بحذف المتغير t بين المعادلتين : $x = 1/2\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$ ، $v = a\,t + v_0$

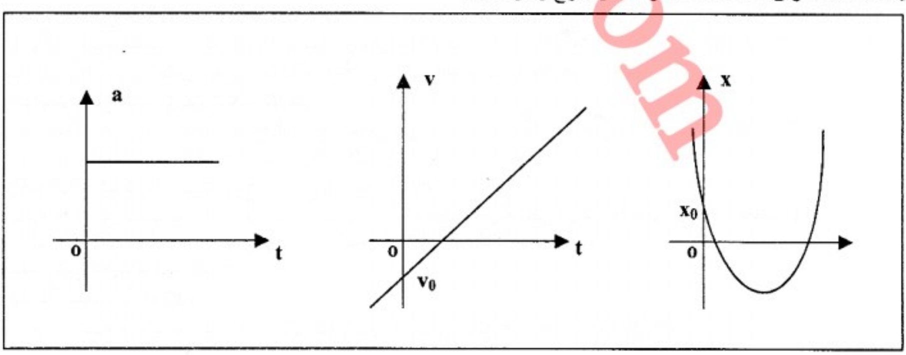
نجد : $$\mathbf{v^2 - v_0^2 = 2\,a(x - x_0)}$$

d ــ أثناء حركة متغيرة بانتظام تسارعها a ، فإن المسافات المقطوعة خلال مجالات زمنية متعاقبة متساوية و مساوية لـــ θ،

تشكل متتالية حسابية أساسها : $r = a\,\theta^2$

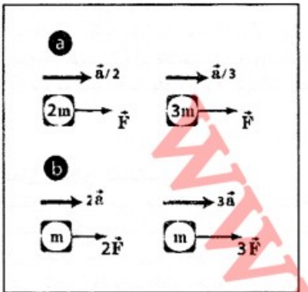
المخططات :

يمثل الشكل المرفق مخططات التسارعات والسرع والفواصل .



القوانين الثلاثة لنيوتن

القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة) : سبق و أن أشرنا إليه في السنة الأولى ثانوي
اعتمادا على أعمال غاليلي والفيلسوف الفرنسي ريني ديكارت ، وضع نيوتن قانونه الأول ، المعروف بمبدأ العطالة :
في المعالم العطالية أو الغاليلية :
"يحافظ كل جسم على سكونه أو حركته المستقيمة المنتظمة إذا لم تتدخل قوة لتغير حالته الحركية" .
يدخل هذا القانون خاصية تدعى العطالة : العطالة تمثل المقاومة التي تبديها الجملة لكل تغير في حالتها الحركية .



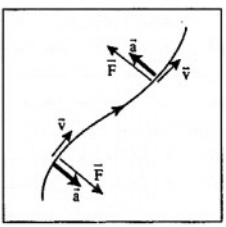
القانون الثاني لنيوتن : المبدأ الأساسي للتحريك

حسب القانون الأول لنيوتن ، القوة المؤثرة على جملة ما تولد تسارعا .
لتحديد كيف يرتبط التسارع بالقوة و بكتلة الجسم ، نقوم بتغييرهاذين المقدارين ، كلا على حدة . إذا بقيت الكتلة ثابتة وتغيرت القوة ، نلاحظ أن a تتناسب مع F .
وإذا بقيت القوة ثابتة وتغيرت الكتلة ، نجد أن التسارع a متناسب عكسيا مع الكتلة m .
إذا تبين هذه النتائج أن التسارع a يتناسب طردا مع F/m . نستنتج إذا أن :
$F = k\,m\,a$ ، حيث k هو ثابت التناسب .
في النظام الدولي للوحدات SI ، تولد قوة شدتها 1 N مطبقة على كتلة قيمتها 1 kg تسارعا قيمته $1 m/s^2$ ، إذا $k = 1$ أي : $1 N = 1 kg.m/s^2$
عندما تؤثر عدة قوى على جملة ميكانيكية ما ، يجب حساب المجموع الشعاعي للقوى الخارجية ، يكتب القانون الثاني لنيوتن كما يلي : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,.\,\vec{a}_G$

نص القانون الثاني لنيوتن :
في معلم غاليلي ، المجموع الشعاعي $\Sigma \vec{F}_{ext}$ للقوى الخارجية المطبقة على جملة مادية ، يساوي في كل لحظة ، جداء كتلتها في شعاع تسارع مركز عطالتها : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,.\,\vec{a}_G$

تعطى المركبات الثلاث للمعادلة الشعاعية في المعلم الكارتيزي : $\Sigma \vec{F}_z = m\,.\,\vec{a}_z$ ، $\Sigma \vec{F}_y = m\,.\,\vec{a}_y$, $\Sigma \vec{F}_x = m\,.\,\vec{a}_x$

إن توجه مسار الحركة ، الذي هو نفسه جهة شعاع السرعة لحركة مركز عطالة جملة مادية ، لا يتطابق عامة مع حامل محصلة القوى المؤثرة عليها . لكن شعاع تغير السرعة $\Delta \vec{v}$ و منه شعاع التسارع يكون دوما متعلقا بمحصلة القوى . نلاحظ كذلك بأنه يجب أن يقاس التسارع بالنسبة لمرجع عطالي ، يعني بالنسبة للمرجع نفسه أين يكون القانون الأول لنيوتن مطبقا .



توضيحات :
ـ بما أن a_G هو تسارع مركز عطالة الجملة ، يمكن أن ندعو العلاقة : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,.\,\vec{a}_G$ بنظرية مركز العطالة.
ـ إذا اعتبرت الجملة المادية كنقطة مادية، تسمح العلاقة السابقة بتحديد كلي لحركة هذه النقطة.
ـ تسمح هذه العلاقة بتحديد حركة نقطة واحدة من الجملة وهي مركز عطالتها ولا تسمح وحدها بدراسة الحركة بشكل كامل .
ـ تسمح نظرية مركز العطالة بتحديد حركة المجموعة للجسم الصلب لكنها لا تحدد الحركة الدورانية له حول مركز عطالة G.

- **تطبيق في حالة القوة الثابتة**

إذا خضعت جملة مادية بين لحظتين t_1 و t_2 إلى تأثيرات بحيث يكون المجموع الشعاعي $\Sigma \vec{F}_{ext}$ للقوى الخارجية المطبقة عليها ثابتا ، فإن شعاع تسارع مركز عطالتها $\vec{a}_G$ في معلم غاليلي يكون ثابتا خلال هذه المدة الزمنية $(t_2 - t_1)$. تكون حركة مركز العطالة متغيرة بانتظام (متسارعة أو متباطئة) . لتكن t_0 اللحظة الإبتدائية و t لحظة ما من الحركة . بما أن التسارع ثابت ، فالتسارع اللحظي هو التسارع الوسطي نفسه ، يمكن إذا كتابة : $\mathbf{a_G = (v_G(t) - v_G(t_0)) / (t - t_0)}$
هذه العبارة تسمح لنا بتحديد السرعة في اللحظة t انطلاقا من معرفة a_G و $v_G(t_0)$.

القانون الثالث لنيوتن

إن القوة تنمذج التأثير المتبادل بين جملتين ماديتين لأنه غير ممكن التحدث عن قوة جسم ، فنشير إلى القوة بواسطة دليلين يرمزان للجملتين المتفاعلتين . F_{AB} تشير إلى القوة المطبقة على الجملة A من طرف الجملة B .
عندما نطبق دفعا على جدار ، نحس بتأثير قوة معاكسة . كلما دفعنا الجدار ، كلما زادت مقاوته الحائط . في الواقع ، القوة المطبقة من طرف الحائط علينا مساوية تماما في القيمة ومعاكسة في الجهة للقوة التي نطبقها عليه . يوضح هذا المثال القانون الثالث لنيوتن المتعلق بالفعلين المتبادلين الذي نكتبه كما يلي :

• نص مبدأ الفعلين المتبادلين (Principe des Actions Réciproques)

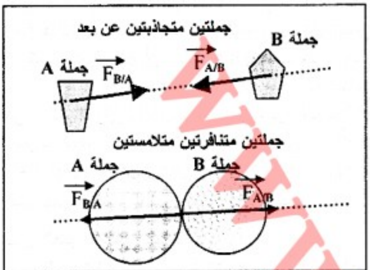
" إذا أثرت جملة A على جملة B بقوة $\vec{F}_{A/B}$ فإن الجملة B تؤثر على الجملة A بقوة $\vec{F}_{B/A}$ ، تساويها في الشدة ، لها نفس الحامل و تعاكسها في الجهة " .

ماذا يعني هذا المبدأ و كيف نطبقه و نستغله ؟

ــ هذا المبدأ ، مثل المبدأ الأول لنيوتن "مبدأ العطالة" ، يعتبر قانون أساسيا في علم الميكانيك ، لا يطلب البرهان عليه بل يشترط احترامه في كل دراسة .

ــ نعتمده ، كما فعلنا مع المبدأ الأول ، كوسيلة لكشف القوتين المتبادلتين بين جملتين مختلفتين .

استعملنا المبدأ الأول للكشف عن وجود قوة مطبقة على جملة واحدة A إذا كانت حالتها الحركية متغيرة و حسب هذا المبدأ الثالث **إذا تأثرت الجملة A بقوة $\vec{F}_{B/A}$ فهنالك حتما جملة ثانية B سبب هذا التأثير وهي أيضا متأثرة بقوة $\vec{F}_{A/B}$ من طرف الجملة A**



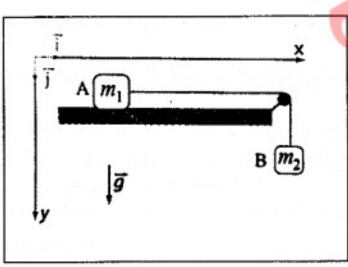
حيث : $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

تمثيل الفعلين المتبادلين :

يستلزم تطبيق هذا المبدأ احترام هذه العلاقة ، أي عند تمثيل هاتين القوتين يجب أن يكون الشعاعين $\vec{F}_{A/B}$ و $\vec{F}_{B/A}$ ممثلين على نفس الحامل ، في جهتين متعاكستين و بنفس الطويلة و تكون نقطة تطبيق $\vec{F}_{A/B}$ على الجملة B بينما نقطة تطبيق $\vec{F}_{B/A}$ على الجملة A . كما هو موضح في الشكل المرافق .

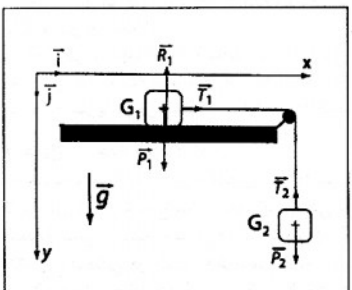
في الميكانيك النيوتونية ، يكون التأثير المبادل بين الجمل متزامنا ، أي أن الفعلين المتبادلين يطبقان على الجملتين في آن واحد .

تطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة على مستوي



يتحرك جسم (A) كتلة m_1 ومركز عطالته G_1 إبتداء من السكون على مستوى أفقي بتأثير السقوط الشاقولي لجسم (B) كتلته m_2 ومركز عطالته G_2 .
الجسمان مربوطان بخيط مهمل الكتلة وغير قابل للإمتطاط ، ويمر على بكرة ثابتة مهملة الكتلة ، وبإمكان الدوران دون احتكاك حول محور أفقي ثابت .

ــ الجملة المادية موضوع الدراسة مكونة من جزءين (A و B)
- مرجع الدراسة : المرجع السطحي الأرضي الذي يمكن اعتباره غاليلي
- تمثيل القوى الخارجية المطبقة على جزءي الجملة A و B .
ــ القوى المطبقة على A : الثقل $\vec{P_1}$ ، توتر الخيط $\vec{T_1}$ ، فعل المستوى $\vec{R}$.
ــ القوى المطبقة على B : الثقل $\vec{P_2}$ ، توتر الخيط $\vec{T_2}$



في غياب الإحتكاك ، ينمذج فعل المستوي على (A) بقوة عمودية لسطح التلامس وموجهة نحو الجسم .
تنمذج أفعال الخيط على الجسمين بقوتين تدعيان التوترين : يمثل توتر الخيط بشعاع له اتجاه الخيط وموجه من الجسم نحو الخيط .
بما أن الخيط غير قابل للامتطاط ، فإن انتقالي G_1 و G_2 يكونان متساويين خلال المدة الزمنية نفسها ، ومنه تكون سرعتا G_1 و G_2 متساويتين في كل لحظة ، وبالتالي لــ G_1 و G_2 التسارع نفسه : $\vec{a_1} = a(t)\,\vec{i}$, $\vec{a_2} = a(t)\,\vec{j}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة كل جزء : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$.

الجزء (A) : $m_1\vec{g} + \vec{R} + \vec{T_1} = m_1\vec{a_1}$

بالإسقاط على المحور Ox نحصل على : (1) $m_1 g - R = 0$

بالإسقاط على المحور Oy نحصل على : (2) $T_1 = m_1 a$

الجزء (B) : $m_2\vec{g} + \vec{T_2} = m_2\vec{a_2}$ بالإسقاط على المحور Oy نحصل على : (3) $m_2 g - T_2 = m_2 a$

بما أن البكرة والخيط مهملا الكتلة ، فإن $T_1 = T_2 = T$ وعليه : (4) $T = m_1 a$ ، (5) $-T = m_2 a - m_2 g$

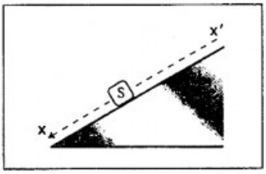
بجمع (3) و (4) نحصل على : $m_1 a + m_2 a = m_2 g$ و منه نستنتج إذا : $\mathbf{a = m_2/(m_1 + m_2)\,.\,g}$

نتيجة : كلا من تسارع G_1 و G_2 ثابت خلال الزمن ، إذا G_1 و G_2 لهما حركة مستقيمة متسارعة بانتظام .

استخراج توتر الخيط : باستبدال قيمة a في المعادلة (2) نجد : $\mathbf{T = (m_1\,.\,m_2)/(m_1 + m_2)\,.\,g}$

ملاحظة في حالة احتواء الجملة على 3 أجزاء ، نستعمل الطريقة نفسها لتحديد التسارع :

$$a = (m_2 - m_1) / (m + m_1 + m_2) . g$$

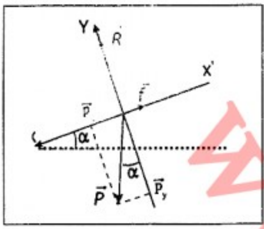


تطبيق على حركة مركز عطالة جسم صلب على مستوي مائل :

يتحرك جسم صلب كتلة m ومركز عطالته G ابتداءا من السكون على طول خط الميل الأعظم لمستوي مائل يصنع مع الأفق زاوية α . نفرض أن قوى الإحتكاك تكافئ قوة ثابتة f توازي المستوي وتعاكس جهة الحركة .

يمكن اتباع الخطوات السابقة نفسها في المسوي الأفقي لتحديد تسارع مركز عطالة الجسم الصلب :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم الصلب : $\Sigma \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a}$. نجد : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a}$



تحليل المعادلة الشعاعية في المعلم المختار يعطي : x'x : $P_x - f = m a$ (1)

y'y : $R - P_y = 0$ (2)

نستخرج من المعادلة (1) تسارع مركز عطالة الجسم الصلب : $a = g \sin \alpha - f / m$

ملاحظة : في غياب الإحتكاكات ($f = 0$) ، يكون التسارع : $a = g \sin \alpha$

حركة الكواكب و الأقمار الإطناعية

1ــ شرح حركة كوكب أو قمر اصطناعي

ــ لماذا لا يسقط القمر على الأرض ؟

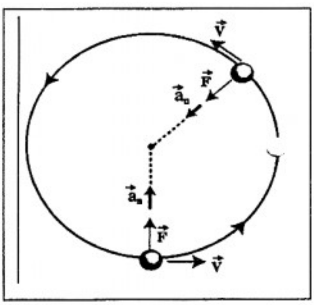
أول من فسر دوران القمر حول الأرض العالم إسحاق نيوتن (Isaac Newton) ، الذي بنى نظرية الجذب العام من ملاحظاته الحركة الكواكب واعتمادا على أعمال أسلافه غاليلي Gallilée و كيبلر Kepler . إذا يحكى أن الفكرة التي سمحت له بربط حركة الأجسام على الأرض بحركة الكواكب هو سقوط تفاحة من شجرة كان جالسا بجوارها. (ابحث عن تفاصيل أسطورة تفاحة نيوتن في الانترنت) . يقال أن نيوتن تساءل عن سبب سقوط التفاحة على الأرض وعدم سقوط القمر عليها.

فوصل إلى نتيجة أن التفاحة تسقط من ارتفاع معين بدون سرعة ابتدائية ، فتكون حركتها مستقيمة متسارعة نحو الأرض ، تحت تأثير قوة جذب الأرض لها ، أما القمر فهو أيضا يخضع لقوة جذب الأرض و لكنه متحرك بسرعة معينة فهو في حالة سقوط دائم نحو الأرض مثل التفاحة ، لكن سرعته العمودية على منحى شعاع القوة تكسبه حركة دائرية منتظمة.

الحركة الدائرية المنتظمة : Mouvement Circulaire Uniforme

تكون جملة مادية في حركة دائرية منتظمة إذا كانت سرعتها الابتدائية غير معدومة وإذا كانت خاضعة لقوة جاذبة مركزية (قوة عمودية على شعاع السرعة) .

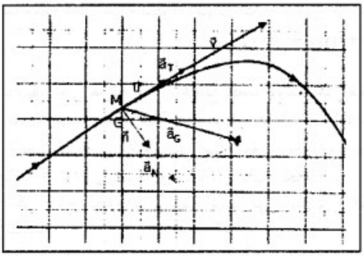
ــ نقول عن حركة جسم أنها دائرية منتظمة إذا كان مسارها دائريا و سرعة المتحرك ثابتة القيمة ومتغيرة المنحى خلال الحركة، أي أن شعاع السرعة $\overrightarrow{V}$ ، في الحركة الدائرية المنتظمة ، يحافظ على قيمته و يتغير منحاه وجهته في كل لحظة.



مواصفات شعاع السرعة و شعاع القوة في الحركة الدائرية المنتظمة

إن شعاع القوة $\overrightarrow{F}$ يكون في كل لحظة عموديا على شعاع السرعة $\overrightarrow{V}$ و موجها نحو التقعر الداخلي للمسار. أي أن شعاع القوة يكون عموديا على المماس للمسار في كل نقطة و في كل لحظة ، أي أنه منطبق في كل لحظة على نصف قطر الدائرة و متجها نحو مركزها (لأن نصف قطر دائرة عمودي على المماس).

• احداثيات شعاع التسارع في معلم فريني

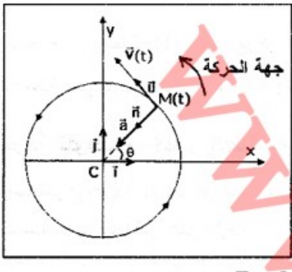


نعتمد على معلم فريني لدراسة بعض الحركات المستوية ، المنحنية منها أو الدائرية حيث أساس هذا المعلم غير مرتبط بالمرجع .

معلم فريني $(M, \vec{u}, \vec{n})$ هو معلم متعامد و متجانس ، مبدؤه ينطبق على مركز عطالة الجملة المتحركة ، له محورين أحدهما مماسي للمسار و موجه في جهة الحركة ، شعاع وحدته $\vec{u}$ و المحور الثاني عمودي على المحور المماسي و موجه نحو المركز أي إلى داخل انحناء المسار ، شعاع وحدته $\vec{n}$.

شعاع التسارع $\vec{a}_G$ في معلم فريني تكون له مركبتين أحدهما مماسية $a_T = dv/dt$ و أخرى ناظمية : $a_N = v^2/r$ حيث r هو نصف قطر انحناء المسار .

ــ العبارات الحرفية لــ $\vec{a}_T$ و $\vec{a}_N$ بدلالة السرعة v : شعاع التسارع يمكن أن يحلل على الشكل التالي : $\vec{a}_G = dv/dt\ \vec{u} + v^2/r\ \vec{n}$ أي : $a_T = dv/dt$ و $a_N = v^2/r$.



• احداثيات شعاع التسارع في الحركة الدائرية المنتظمة

شعاع التسارع يمكن أن يحلل على الشكل التالي :

$\vec{a} = dv/dt\ \vec{u} + v^2/r\ \vec{n}$ أي : $a_T = dv/dt$ و $a_N = v^2/r$.

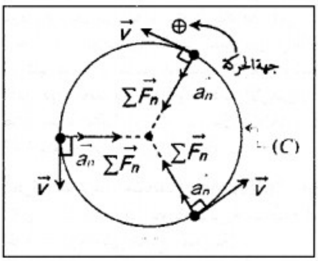
ــ المركبة التي تمثل التسارع الشعاعي $\vec{a}$ للجملة المتحركة في الأساس $(\vec{u}, \vec{n})$ هي التسارع الناظمي $a_N = a = v^2/r$ حيث التسارع مركزي لأن $dv/dt = 0$

باعتبار السرعة ثابتة ومنه $\mathbf{a = v^2/r}$ حيث **r** هو نصف قطر انحناء المسار .

دور الحركة الدائرية المنتظمة

الدور هو المدة اللازمة لإنجاز دورة واحدة أي قطع مسافة قيمتها $2\pi r$ ومنه : $T = 2\pi r/v$

نستطيع استعمال هذه المعادلة لإعطاء عبارة جديدة للسرعة $v = 2\pi r / T$ ، وتعويضها في المعادلة السابقة للحصول على عبارة مربع الدور بدلالة التسارع الناظمي : $\mathbf{T^2 = 4\pi^2 r / a_n}$



شروط الحصول على حركة دائرية منتظمة :

الشرطان الأساسيان للحصول على على حركة دائرية منتظمة هي :

نعتبر جسما صلبا كتلته m ، و حركة مركز عطالته دائرية منتظمة في معلم غاليلي .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على حركة هذا الجسم : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$.

بحيث أن $\Sigma F_{ext} = F$ مجموع القوى المطبقة على الجسم الصلب .

للحصول على حركة دائرية منتظمة يجب أن يكون شعاع التسارع $\vec{a}_G$ لمركز عطالة الجسم جاذبي مركزي و ثابت و شدته تساوي : $\mathbf{a = v^2/r}$ و بالتالي يجب أن تكون $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}$ كذالك مركزية جاذبية مركزية و شدتها تساوي : $\mathbf{F = m\,v^2/r}$

قانون نيوتن للتجاذب الكوني

نص القانون :

يحدث بين جسمين نقطيين A و B كتلتهما m_A و m_B و تفصل بينهما مسافة $AB = r$ ، تجاذب كوني قوتاه هما : $\vec{F}_{A/B}$ و $\vec{F}_{B/A}$ بحيث يكون أن : $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G \cdot m_A \cdot m_B / r^2 \cdot \vec{u}_{AB}$. حيث : $\vec{u}_{AB}$ شعاع وحدة موجه من A نحو B

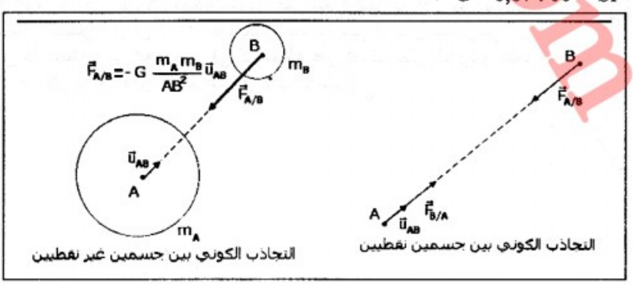
و G : ثابت التجاذب الكوني : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI .

ملاحظة :

يطبق هذا القانون كذلك على الأجسام غير نقطية في الحالتين التاليتين :

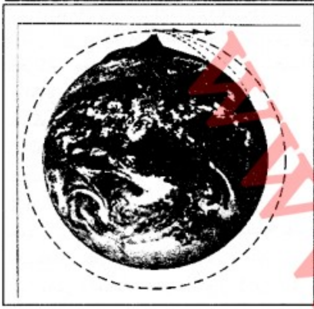
1ــ أجسام ذات تماثل كروي لتوزيع الكتلة .

2ــ أجسام لها أبعاد مهملة أمام المسافة الفاصلة بينهما .



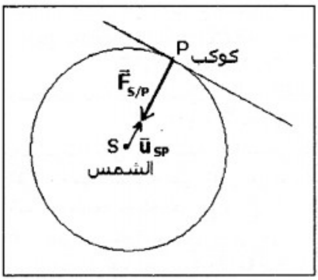
تفسير حركة الكواكب والأقمار الاصطناعية باستعمال القانون الثاني لنيوتن

تشكل مدارات الأقمار الاصطناعية مثالا مهما للحركة الدائرية . إن نيوتن هو أول من وصف العلاقة بين المسارات ذات المدة القصير والحركة المدارية.
تصور مدفعا موجود على قمة جبل عال ، يقذف كريات بسرعات ابتدائية مماسية لسطح الأرض . إذا أخذت الكرية سرعة إبتدائية ضعيفة ، تأخذ مسار قطع مكافئ (لو أهملنا مقاومة الهواء) . من أجل سرعة إبتدائية أكبر ، تذهب بعيدا قبل أن تسقط . اتجاه التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية متغير على طول المسار . الشكل العام للمسار يكون إهليليجيا .



إذا كانت السرعة الإبتدائية كافية ، تستطيع الكرية القيام بدورة حول الأرض (والعودة إلى نقطة البداية) . فهي في مدار حولها . وبالرغم من أن الكرية في سقوط حر دائم انطلاقا من مسارها الابتدائي المستقيم ، تطابق انحناء الأرض مع انحناء المدار يمنع إذا سقوط القمر الإصطناعي على الأرض .
يصلح الإستدلال الأخير في المدارات الدائرية فقط ، التي تشكل حالة خاصة من المدارات الإهليليجية . إذا فرضنا بأن كتلة الجسم المركزي (الشمس مثلا) هي أكبر بكثير من كتلة الجسم في المدار (كوكب) ، يمكننا اعتبار الجسم المركزي ساكنا .
نهمل في دراساتنا قوى الاحتكاك الناتجة عن جو الأرض ، في حالة الأقمار الإصطناعية الأرضية ذات المدارات المنخفضة .

1ـ تطبيق القانون الثاني لنيوتن لدراسة الحركة المدارية للكواكب



نختار كمرجع لدراسة حركة كوكب حول الشمس المرجع المركزي الشمسي (المرجع الهيليومركزي (Référentiel Héliocentrique) أو مرجع كوبرنيك .
و نبين أن حركة هذا الكوكب حول الشمس هي حركة منتظمة و نحدد مميزات هذه الحركة . نعتبركوكبا كتلته M_P مركز عطالته P في حركة حول الشمس ذات كتلة M_P و مركزها S .
1 aـ القوى الخارجية المطبقة على الكوكب : القوة الوحيدة المطبقة على الكوكب هي قوة الجذب المطبقة من قبل الشمس . نعتبر أن القوة الوحيدة الجاذبة المطبقة على الكوكب مصدرها الشمس فقط .
bـ تمثيل على مخطط الشمس ، الكوكب و القوى(القوة) الخارجية المطبقة على الكوكب : انظر الشكل .
cـ العبارة الشعاعية لهذه القوى (القوة) : $\vec{F}_{S/P} = - G . M_P . M_S/r^2 . \vec{u}_{SP}$. $\vec{u}_{SP}$ شعاع وحدة موجه من S نحو P .
2ـ aـ التعبير عن التسارع الشعاعي $\vec{a}$: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب ، في مرجع Héliocentrique ، المعتبر غاليلي نحصل على :

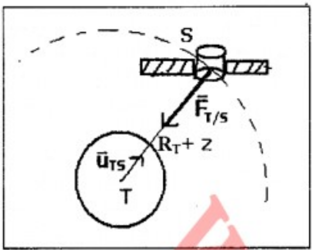
$$\Sigma \vec{F}_{ext} = M_P \vec{a} = - G . M_P . M_S/r^2 . \vec{u}_{SP}$$ و منه : $$\vec{a} = - G . M_S / r^2 . \vec{u}_{SP}$$

bـ العبارات الحرفية لـ $\vec{a}_t$ و $\vec{a}_n$ بدلالة السرعة $\vec{v}$ للكوكب : شعاع التسارع يمكن أن يحلل على الشكل التالي :
$\vec{a} = dv/dt \, \vec{t} + v^2/ r \, \vec{n}$ أي : $a_t = dv/dt$ و $a_n = v^2/ r$.
cـ المركبة التي تمثل التسارع الشعاعي $\vec{a}$ للكوكب في الأساس $(\vec{t}, \vec{n})$ هي التسارع الناظمي $a_n = a = v^2/ r$ حسب 1 aـ حيث القوة الوحيدة المطبقة على الكوكب هي قوة الجذب المطبقة من قبل الشمس . حيث التسارع مركزي أي $dv/dt = 0$.
3ـ aـ طبيعة حركة الكوكب : بما أن $dv/dt = 0$ أي السرعة ثابتة فإن حركة الكوكب دائرية منتظمة .
bـ عبارة سرعة الكوكب على مداره حول الشمس : $v^2/ r \, \vec{n} = - v^2/ r \, \vec{u} = - G . M_S / r^2 . \vec{u} \Rightarrow v^2 = GM_S/r$
و منه سرعة الكوكب هي : $v = \sqrt{GM_S/r}$.
ــ في مرجع (الهيليومركزي (Référentiel Héliocentrique) تكون حركة كوكب حول الشمس دائرية منتظمة و مسار مركز عطالته دائرة شعاعها r ، بشرط أن تحقق سرعته العلاقة التالية : $v = \sqrt{GM_S/r}$.
3ـ عبارة الدور T لحركة الكوكب حول الشمس بدلالة السرعة v و نصف القطر r للمدار :
لدينا : $v = 2\pi r/T$ و منه $T = 2 \pi r/v$.
ــ تبيان أننا يمكن أن نكتب العبارة : $T = (2 \pi r^{3/2})/\sqrt{(G M_S)}$: نعوض عن v في عبارة T فنجد :
$T = 2 \pi r/\sqrt{G . M_S/r}$ و منه : $T = 2 \pi /\sqrt{r^3 /(G M_S)}$ أو : $T = (2 \pi r^{3/2})/\sqrt{(G M_S)}$

ـ اعادة صياغة عبارة الدور : $T = 2\pi r/v = 2\pi r/\sqrt{GM_S/r} = 2\pi r^{3/2}/\sqrt{GM_S} \Rightarrow T^2/r^3 = 4\pi^2/GM_S$.

هذه العبارة $T^2/r^3 = 4\pi^2/GM_S = k$ تدعى بعبارة القانون الثالث لكيلر أين نلاحظ فيها أن النسبة $T^2/r^3 = k$ دائما ثابتة ولا تتعلق بكتلة الكوكب المدروس .

2ـ تفسير حركة الأقمار الإصطناعية حول الأرض

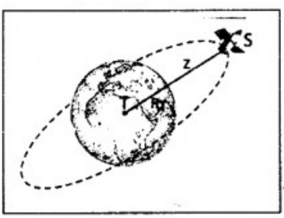


ـ نسمي قمرا كل جسم في حركة مدارية حول كوكب فمثلا القمر (La Lune) هو قمر طبيعي حول الأرض و هناك أقمار أخرى اصطناعية تدور حول الأرض .
نختار مثال لهذه الدراسة حركة قمر اصطناعي S حول الأرض .
نختار كمرجع لدراسة حركة قمر حول الأرض **المرجع المركزي الأرضي : (Référentiel géocentrique)** .
و نبين أن حركة هذا القمر حول الأرض هي حركة منتظمة و نحدد مميزات هذه الحركة . نعتبرقمرا كتلته M_S مركز عطالته S في حركة حول الأرض ذات كتلة M_T و مركزها T.

ـ تكون حركة القمر حول دائرية منتظمة عندما عندما يتحقق الشرطان :
ـ القوة المطبقة من طرف الأرض T ذات الكتلة M_T و الشعاع R_T على القمر الإصطناعي S ($\vec{F}_{T/S}$) جاذبية و مركزية .
ـ شدة $F_{T/S}$ ثابتة و تحقق العلاقة $F_{T/S} = m\, v^2/r$ أي أن التسارع يكون ثابت و مركزي $a = v^2/r$.
1 aـ القوى الخارجية المطبقة على القمر : القوة الوحيدة المطبقة على القمر هي قوة الجذب المطبقة من قبل الأرض . نعتبر أن القوة الوحيدة الجاذبة المطبقة على القمر مصدرها الأرض فقط .
bـ تمثيل على مخطط الأرض ، القمر و القوى(القوة) الخارجية المطبقة على القمر : انظر الشكل .
cـ العبارة الشعاعية لهذه القوى (القوة) : $\vec{F}_{T/S} = -\,G\,.\,M_T\,.\,M_S/r^2\,.\,\vec{u}_{TS}$. $\vec{u}_{TS}$ شعاع وحدة موجه من T نحو S .
2ـ aـ التعبير عن التسارع الشعاعي $\vec{a}$: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القمر ، في مرجع مركزي أرضي (Référentiel géocentrique) ، المعتبر غاليلي نحصل على :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = M_S\,\vec{a} = -\,G\,.\,M_T\,.\,M_S/r^2\,.\,\vec{u}_{TS}$$ و منه : $$\vec{a} = -\,G\,.\,M_T/r^2\,.\,\vec{u}_{TS}$$

bـ العبارات الحرفية لـ $\vec{a}_t$ و $\vec{a}_n$ بدلالة السرعة $\vec{v}$ للقمر : شعاع التسارع يمكن أن يحلل على الشكل التالي : $\vec{a} = dv/dt\ \vec{t} + v^2/r\ \vec{n}$ أي : $a_t = dv/dt$ و $a_n = v^2/r$.
cـ المركبة التي تمثل التسارع الشعاعي $\vec{a}$ للقمر في الأساس $(\vec{t}, \vec{n})$ هي التسارع الناظمي $a_n = a = v^2/r$ حسب 1 aـ حيث القوة الوحيدة المطبقة على القمر هي قوة الجذب المطبقة من قبل الأرض . و منه التسارع مركزي أي $dv/dt = 0$.
3ـ aـ طبيعة حركة القمر : بما أن $dv/dt = 0$ أي السرعة ثابتة فإن حركة القمر دائرية منتظمة .
bـ عبارة سرعة القمر على مداره حول الأرض : $v^2/r\ \vec{n} = -\,v^2/r\ \vec{u} = -\,G\,.\,M_T/r^2\,.\,\vec{u} \Rightarrow v^2 = GM_T/r$
و منه سرعة القمر هي : $\mathbf{v = \sqrt{GM_T/r}}$. حيث M_T : يمثل كتلة الأرض ، r : يمثل البعد بين مركز القمر الإصطناعي و مركز الأرض ، z : يمثل البعد بين مركز القمر الاصطناعي و سطح الأرض .
و G : ثابت التجاذب الكوني : $G = 6{,}67\,.\,10^{-11}$ SI .
ـ في مرجع (جيومركزي (Référentiel géocentrique) تكون حركة القمر حول الأرض دائرية منتظمة و مسار مركز عطالته دائرة شعاعها r ، بشرط أن تحقق سرعته العلاقة التالية : $v = \sqrt{GM_T/(R_T + z)}$. حيث : $r = R_T + z$
3ـ عبارة الدور T لحركة القمر حول الأرض بدلالة السرعة v و نصف القطر r للمدار :
لدينا : $v = 2\pi r/T$ و منه $T = 2\,\pi r/v$.
ـ تبيان أننا يمكن أن نكتب العبارة : $T = (2\,\pi\, r^{3/2})/\sqrt{(G\,M_T)}$: نعوض عن v في عبارة T فنجد : $T = 2\,\pi r/\sqrt{G\,.\,M_T/r}$ و منه : $T = 2\,\pi\,\sqrt{r^3/(G\,M_T)}$ أو : $T = (2\,\pi\, r^{3/2})/\sqrt{(G\,M_T)}$
ـ اعادة صياغة عبارة الدور : $T = 2\pi r/v = 2\pi r/\sqrt{GM_T/r} = 2\pi r^{3/2}/\sqrt{GM_T} \Rightarrow T^2/r^3 = 4\pi^2/GM_T$.
إذن عبارة الدور هي : $T = 2\,\pi\,\sqrt{(R_T + z)^3/(G\,M_T)}$ حيث : $r = R_T + z$

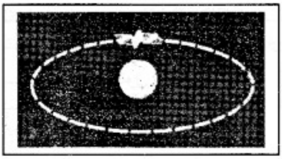


حيث M_T : يمثل كتلة الأرض ، R_T : يمثل نصف قطر الأرض ،
z : يمثل البعد بين مركز القمر الاصطناعي و سطح الأرض . و G : ثابت التجاذب الكوني : $G = 6{,}67\,.\,10^{-11}$ SI .

ملاحظة : السرعة v و الدور المداري T لدوران قمر اصطناعي لا يتلقان بكتلته بل يتعلقان بارتفاعه z بالنسبة لسطح الأرض .
ملاحظة : إن كتلة الكواكب أو الأقمار الإصطناعية لا تؤثر على السرعة المدارية والدور .

القمر جيومستقر

قمر جيو مستقر يكون ساكنا في المرجع الأرضي معنى ذلك أن القمر يبدو ثابتا بالنسبة لملاحظ ساكن موجود على سطح الأرض .
الشروط التي تتوفر لكي يكون القمر الإصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض هي : في المرجع المركزي الأرضي ، تدور الأرض حول محورها القطبي ، يساوي الدور T_0 لهذا الدوران الخاص يوما فلكيا (24 ساعة) . لكي يكون القمر الإصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض يجب :



- أن تكون حركته دائرية منتظمة في مستوي خط الإستواء للأرض .
- أن يدور في نفس جهة دوران الأرض حول محور قطبيها .
- مدار القمر يكون في مستوي خط الإستواء للأرض .
- أن يكون دوره مساويا إلى دور دوران الأرض حول محور قطبيها T_0 .

ملاحظة : بمعرفة قيمة الدور T للقمر يمكن تحديد ارتفاعه z عن سطح الأرض :

$$T = 2\pi\sqrt{(R_T + z)^3/(G\,M_T)} \Rightarrow z = [(T^2\,G\,M_T)/(4\,\pi^2)]^{1/3} - R_T$$

كيف يتم وضع قمر اصطناعي في مداره حول الأرض ؟

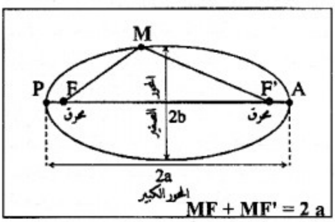
لوضع قمر اصطناعي في مداره حول الأرض يجب إعطاؤه سرعة كافية تخول له حركة دائرية منتظمة حول الأرض .
تتم هذه العملية بواسطة مركبة فضائية و التي تقوم بدور مزدوج :

- حمل القمر الإصطناعي إلى ارتفاع يفوق حوالي 200 km حيث الغلاف الجوي الأرضي تقريبا منعدم .
- منح القمر افصطناعي سرعة تجعله يبقى في مداره hgدائري حول الأرض بحيث يكون شعاع السرعة الإبتدائية عمودية على شعاع موضع القمر و شدته تحقق العلاقة : $v = \sqrt{GM_T/(R_T + z)}$ حيث M_T : يمثل كتلة الأرض ، R_T : يمثل نصف قطر الأرض ، z : يمثل البعد بين مركز القمر الاصطناعي و سطح الأرض .
و G : ثابت التجاذب الكوني : $G = 6{,}67\,.\,10^{-11}$ SI .
- نعتبر أن القمر الإصطناعي خاضعا لقوة التجاذب الأرضي فقط و نهمل الإحتكاكات المتعلقة بالجو .

قوانين كيبلر Kepler

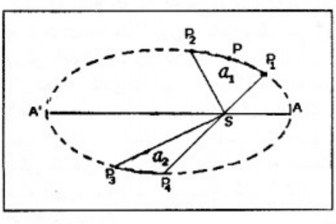
المرجع الغاليلي الملائم لدراسة حركة الكواكب حول الشمس هو المرجع المركزي الشمسي (المرجع الهيليومركزي (Référentiel Héliocentrique) أو مرجع كوبرنيك . لدراسة حركة الكواكب حول الشمس نربط معلم متعامد و متجانس $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بالمرجع المركزي الشمسي حيث مركزه الشمس و محاوره الثلاثة موجهة نحو ثلاث نجوم جد بعيدة يمكن اعتبارها ثابتة .

القانون الأول لكيبلر أو قانون المدارات الإهليليجية



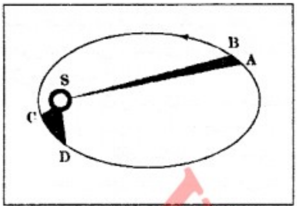
هذا القانون يحدد بدقة طبيعة مسارات مراكز عطالة الكواكب خلال حركتها .
نص القانون : مسار مركز عطالة كوكب ، في المرجع المركزي الشمسي ، إهليلجي ، يمثل مركز الشمس إحدى محرقيه .
الإهليليج هو منحنى مستوي يكون فيه دائما مجموع المسافتين من نقطة منه إلى المحرقين F و F' ثابتا : MF + MF' = 2 a
الدائرة هي حالة خاصة من اهليليج حيث يتطابق فيها المحرقان في المركز . أقصر مسافة تسمى المحور الصغير طولها 2b ؛ أطول مسافة تسمى المحور الكبير طولها 2a . نسمي نقطة المدار الأقرب من الشمس (الموجودة عند النقطة F) نقطة الرأس الأقرب (périhélie) الممثلة بالنقطة P ؛ ونسمي النقطة الأبعد بنقطة الرأس الأبعد (aphélie) الممثلة بالنقطة A .

القانون الثاني لكيبلر أو قانون المساحات :



نعتبر كوكبا مركز عطالته P في حركة حول الشمس مركزه S . خلال مجال زمني معين $\Delta t = t_2 - t_1$ ينتقل P من الموضع P_1 إلى الموضع P_2 أي أن خلال هذا الإنتقال يمسح المسقيم SP مساحة a_1 و هي المحصورة بين $[SP_1]$ و $[SP_2]$ و المقطع P_1P_2 لمسار P . و خلال نفس المجال الزمني المعين الأخر $\Delta t = t_4 - t_3$ ينتقل P من الموضع P_3 إلى الموضع P_4 أي أن خلال هذا الإنتقال يمسح المسقيم SP مساحة a_2 و هي المحصورة بين $[SP_3]$ و $[SP_4]$ و المقطع P_3P_4 لمسار P .
حسب **كيبلر** ، هاتين المساحتين الممسوحتين في نفس المدة الزمنية تكونان متساويتين .

نص القنون : إن القطعة المستقيمة الرابطة بين مركز الشمس ومركز عطالة الكوكب ، تمسح مساحات متساوية خلال مجالات زمنية متساوية .



توضيح : نفترض أن خلال مجال زمني معين ، ينتقل كوكب من النقطة A إلى النقطة B و ينتقل من C إلى D خلال مجال زمني آخر . حسب القانون الثاني **لكيبلر** ، المساحتان SAB وSCD متساويتان إذا كان المجالين الزمنيين متساويين . تتغير إذا قيمة سرعة الكوكب على مداره .

ــ يترجم هذا القانون ملاحظة كيبلر و التي تؤكد أن الكواكب تدور حول الشمس بسرعة غير ثابتة أي أنه تزداد سرعة الكوكب كلما اقترب من الشمس و تنقص عند ابتعاده عنها .

ــ تكون سرعة الكوكب عظمى عندما يكون مركز عطالته عند النقطة A الأقرب من مركز الشمس . و تكون سرعة الكوكب صغرى عندما يكون مركز عطالته عند النقطة 'A الأبعد من مركز الشمس .

القانون الثالث لكيبلر أو قانون الأدوار

الدورة الفلكية : هي حركة كوكب ما بين مرورين متتاليين لمركزه P من نفس النقطة من مداره حول الشمس .

الدور المداري : هي المدة الزمنية التي يستغرقها الكوكب لإنجاز دورة فلكية كاملة حول الشمس .
نص القانون : يتناسب مربع الدور المداري T طردا مع مكعب نصف المحور الكبير a للمدار الإهليليجي لمسار حركة الكوكب حول الشمس : $T^2 = k\,a^3$ و نعبر عن نص هذا القانون بالعبارة التالية : $\mathbf{T^2/a^3 = k}$
حيث T هو الدور المداري للكوكب و وحدته (s) . و a نصف طول المحور الكبير للمدار الإهليليجي لمسار الكوكب و وحدته (m) . و k : ثابت صالح لكل الكواكب أي هي نفسها بالنسبة لكل كواكب النظام الشمسي ومستقل عن كتلة الكواكب و هذا جد مهم في تطبيقات علم الفلك حيث يمكن تحديد مسار كوكب معين 'P من خلال معرفة مسار كوكب آخر P :

$$T^2/a^3 = k = T'^2/a'^3 \;\Rightarrow\; a' = a(T/T')^{2/3}$$

إذن معرفة قيمة a تسمح بتحديد قيمة 'a و منه مسار الكوكب 'P .

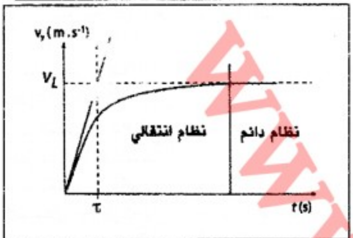
ــ بالنسبة للكواكب التي يمكن اعتبار مداراتها دائرية و شعاعها r نعبر عن نص هذا القانون : $\mathbf{T^2/r^3 = k}$
ــ يمكن تعميم قانون كيبلر حيث يمكن تطبيقه على حركة الأقمار الإصطناعية التي تدور حول كوكب ما . في هذه الحالة ، يشكل مركز الكوكب الذي تدور حوله الأقمار ، إحدى محارق المسار الإهليليجي للقمر . كما أنه يمكن اعتبار ثابت النسبة $T^2/r^3 = k$ في هذه الحالة هو نفسه بالنسبة لكل الأقمار التي تدور حول نفس الكوكب .
ــ في حالة الأقمار الإصطناعية التي تدور حول الأرض مثلا على نصف قطره r بالنسبة لمركز الأرض نجد :
بإدخال القانون الثالث لكبلر في عبارة الدور التي حصلنا عليها سابقا $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GM_T)}$ نجد :
$T = 2\pi\sqrt{r^3/(G M_T)}$ و منه : $T^2/r^3 = 4\pi^2/GM_T = k'$ حيث M_T هي كتلة الأرض و 'k ثابت يتعلق بكتلة الأرض و لا يتعلق بكتلة القمر المدروس .
ــ في حال أقمار ما تدور حول كوكب ما يكون ما :
بإدخال القانون الثالث لكبلر في عبارة الدور التي حصلنا عليها سابقا $T = 2\pi\sqrt{r^3/(G M_T)}$ نستبدل كتلة الأرض بكتلة الكوكب المعتبر و يصبح r هو نصف قطر مدار القمر المعتبر بالنسبة لمركز الكوكب :
$T = 2\pi\sqrt{r^3/(G M)}$ و منه : $T^2/r^3 = 4\pi^2/GM = k''$ حيث M هي كتلة الكوكب و "k ثابت يتعلق بكتلة الكوكب و لا يتعلق بكتلة القمر المدروس .

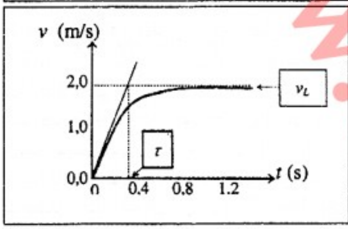
2ــ دراسة حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء

لو تركنا جسما خفيفا (ورقة مثلا) يسقط في الهواء ، نلاحظ أن الحركة معقدة (مسار غير مستقيم لمركز العطالة ، دوران حول مركز العطالة ، تشوه الشكل ...) . يظهر أن الهواء يؤثر على حركة الجسم :
إن تحليل التأثيرات التي تخضع لها الورقة في الهواء ، أثناء السقوط ، يبين أنها تخضع بالإضافة للثقل لقوى احتكاك من طرف الهواء . هل يمكن دائما نمذجة قوى الاحتكاك بواسطة قوة وحيدة ؟
بصفة عامة ، لا يمكن تمثيل الاحتكاك بقوة وحيدة $\vec{f}$ ذات اتجاه ثابت إلا إذا كانت حركة الجسم انسحابية مستقيمة .
يمكن التحقيق ، من خلال أمثلة متنوعة لأجسام خفيفة في حالة سقوط ، أن هذا غير حاصل على العموم ؛ وأكثر من ذلك ، ففي حالة الورقة ، تتم حركتها بتغير شكلها كذلك .
طرح الفرضيات :
لتحقيق نمذجة بسيطة للإحتكاك في الهواء ، نقوم بإنجاز تجربة ترتكز على سقوط أجسام متميزة ، اختيرات أشكالها بحيث نحصل على حركات شاقولية انسحابية .

التحقيق التجريبي : نستغل هذا النشاط لإجراء دراسة السقوط الحقيقي في الهواء .
قام أمين مع أستاذه بتسجيل حركة سقوط مجموعة أربع بالونات (وثيقة 18) مربوطة في ما بينها ومثقلة نوعا ما ، وذلك باستعمال آلة تصوير فيديو (Webcam) في مكان ملائم ، لا توجد فيه تيارات هوائية . عولج شريط الفيديو ببرنامج إعلام آلي مناسب ، حيث تم الحصول على النتائج المدونة في الجدول المقابل .

t (s)	0	0,08	0,12	0,16	0,20	0,28	0,32	0,58	0,66	0,80	1,00	1,20	1,40
v (m/s)	0,00	0,35	0,70	0,92	1,08	1,30	1,45	1,86	1,90	1,94	2,05	2,00	2,00





ـ ارسم منحنى السرعة $v = f(t)$ لحركة سقوط البالونات .
• ما هو شكل منحنى السرعة $v = f(t)$ المتحصل عليه ؟
• البيان : تطور سرعة البالونات بدلالة الزمن .
شكل البيان يبين وجود نظامين :

ـ **النظام الانتقالي :** هو نظام تكون فيه قيمة السرعة متزايدة بشكل سريع في البداية وأقل فأقل مع مرور الزمن . حركة البالونات متسارعة في هذه المرحلة .
ـ **النظام الدائم :** هو نظام تكون فيه قيمة السرعة ثابتة حيث تبلغ قيمتها الحدية في هذه المرحلة وتصبح حركة البالونات منتظمة .
• **السرعة الحدية :** نحصل على قيمة السرعة الحدية بالقراءة البيانية (قيمة الخط المقارب الأفقي للمنحنى) : $v_{lim} = 2,0$ m/s .
• **الزمن المميز τ :** الزمن المميز للسقوط هو الزمن الموافق للمرور من نظام لآخر . إنه فاصلة نقطة تقاطع الخط المقارب الأفقي مع مماس المنحنى المار بالمبدأ ، نرمز له بـ τ . في مثالنا $\tau = 0,32$ s .

ما هي إذا خصائص القوى التي تسمح بتفسير هذه الحركة ؟

القوى المؤثرة على الجسم الصلب :
لتحديد القوى ، نمثل مخطط أجسام متأثرة والذي يبين الأفعال المتبادلة بين الجسم الصلب والوسط الخارجي :
ـ قوة الثقل : ينمذج الثقل أو القوة الثقالية تأثير الأرض على الجسم . إنها قوة شاقولية ، متجهة نحو الأسفل . في مكان معين ، قيمتها متناسبة مع كتلة الجسم m : $\mathbf{P = m\,g}$
يتغير الثقل P مع تغير حقل الجاذبية g ، و يمكن اعتبار g ثابتا في فضاء ارتفاعه من رتبة الكيلومتر (km) .

ـ **دافعة أرخميدس :** كل جسم صلب مغمور كليا أو جزئيا في مائع (هواء أو سائل) يخضع لفعل ميكانيكي (قوى تماس ضاغطة على سطح الجسم المغمور يدعى مجموع هذه القوى بدافعة أرخميدس . مميزات دافعة أرخميدس : نقطة تأثيرها : مركز ثقل المائع المزاح . منحاها : يكون دائما شاقولي . جهتها : نحو الأعلى . شدتها : تساوي ثقل المائع المزاح : $\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g}$
حيث : ρ : الكتلة الحجمية للمائع kg/m^3 ، V : حجم الجسم الصلب m^3 ، g : تسارع الجاذبية m/s^2 ، Π شدة دافعة أرخميدس (N) .
ملاحظة : $\vec{\Pi} = -\vec{P}$ حيث P هو ثقل حجم المائع المزاح .
دافعة أرخميدس تساوي إلى ثقل حجم الهواء V المساوي لحجم الجسم المغمور :

$$\Pi = m_{fluide} \cdot g = \rho_{fluide} \cdot V \cdot g = \rho_{fluide} \cdot 4/3\, \pi\, r^3 \cdot g$$

شرح متى هذه القوة يمكن إهمالها أمام ثقل الجسم : حساب النسبة بين قوة الثقل و دافعة أرخميدس :
$P = m_s\, g = \mu\, V\, g$ حيث μ هي الكتلة الحجمية للجسم المغمور و $\Pi = m_{fluide} \cdot g = \rho_{fluide} \cdot V \cdot g$
و منه : $P/\Pi = (\mu)/(\rho_{fluide}) = k$. إذا كانت ρ_{fluide} أصغر بكثير من μ فإن دافعة أرخميدس تكون أصغر بكثير من قوة الثقل نستنتج أنه يمكن إهمالها أمام ثقل الجسم المغمور . هذه الحالة نصادفها في حالة كون المائع غازيا .

قوة الإحتكاك مائع : يخضع كل جسم صلب يتحرك في مائع لعدة قوى موزعة على سطحه . تتعلق هذه القوى بطبيعة المائع ، شكل الجسم الصلب و خشونة سطحه . تزداد قيمة هذه القوى بتزايد السرعة . يمكن نمذجة المجموع الشعاعي لهذه القوى التلامسية بقوة شاقولية ، معاكسة لجهة الحركة ، تدعى قوة الإحتكاك مائع . مميزات قوة الإحتكاك مائع : نقطة تأثيرها :

مركز عطالة الجسم . منحاها : منحى شعاع سرعة مركز عطالة الجسم . جهتها : معاكسة لجهة الحركة . شدتها : تتعلق بشكل الجسم و بأبعاده و بحالة سطحه و تتعلق كذلك بلزوجة المائع و بسرعة الجسم المتحرك بالنسبة للمائع . ننمذج شدتها بالعلاقة التالية : $\mathbf{f = k\,v_G^{\,n}}$ حيث k ثابت يتعلق بطبيعة المائع و بشكل الجسم المتحرك .

ــ عندما تكون قيمة السرعة ضعيفة : قيمة القوة متناسبة مع قيمة السرعة فتأخذ : $n = 1$ فتصبح العلاقة السابقة كالتالي :

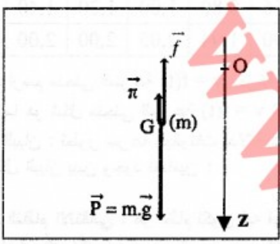
$\mathbf{f = k\,v}$ في هذه الحالة تتعلق **k** بلزوجة المائع .

ــ عندما تكون قيمة السرعة كبيرة : قيمة القوة متناسبة مع قيمة مربع السرعة فتأخذ : $n = 2$ فتصبح العلاقة السابقة كالتالي :

$\mathbf{f = k\,v^2}$ في هذه الحالة لا تتعلق **k** بلزوجة المائع بل تتعلق بكتلته الحجمية .

ــ في كلتي الحالتين ، الشعاع $\vec{f}$ معاكس للشعاع $\vec{v}_G$: $\vec{f} = -k\,\vec{v}_G^{\,n}$.

الدراسة النظرية لحركة السقوط الشاقولي الحقيقي لجسم صلب في الهواء



a ــ تحديد القوى المطبقة على الجسم خلال سقوطه في الهواء ثم تمثيلها على الشكل :

القوى المطبقة على الجسم هي قوة الثقل $\vec{P}$ و دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الإحتكاك $\vec{f}$:

مميزات قوة الثقل :

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأسفل ، القيمة : $P = m\,g = \mu\,V\,g$.

مميزات دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$:

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأعلى ، القيمة : $\Pi = \rho\,V\,g$.

مميزات قوة الإحتكاك $\vec{f}$:

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأعلى ، القيمة : $f = k\,v^n$.

b ــ تبيان أن حركة مركز عطالة الجسم تخضع لمعادلة تفاضلية : الجملة المدروسة هي الجسم . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجسم هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة الإحتكاك $\vec{f}$ و دافعة أرخميدس المطبقة من طرف المائع $\vec{\Pi}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على :

$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}$. بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل :

$m\,g - k\,v^n - \rho\,V\,g = m\,dv/dt$. إن الشكل النهائي للمعادلة التفاضلية له علاقة بشكل عبارة قوة الإحتكاك f .

1ــ عند $f = kv$ تكون المعادلة من الشكل : $y' + By = A$: لدينا : $m\,g - k\,v - \rho\,V\,g = m\,dv/dt$

و منه نحصل على المعادلة : $g - k/m\,v - (\rho\,V\,g)/m = dv/dt$ أي : $dv/dt + k/m\,v = g\,[(m - \rho\,V)]/m$

و منه نحصل على المعادلة التفاضلية من الشكل : $dv/dt = A - B\,v$ حيث $A = g\,[(m - \rho\,V)]/m$ و $B = k/m$.

ــ حساب عدديا قيم كل من A و B : إذا لم يعرف حجم الجسم و منه لا يمكن حساب A من العبارة الحرفية التي حصلنا عليها . و منه سنستعمل طريقة أخرى : عند $t = 0$ ، لدينا $v = 0$ و منه $A = (dv/dt)_{t=0}$ و هذا ما يوافق لمعامل توجيه المماس للمنحنى $v = f(t)$ عند $t = 0$. لتكن النقطة $M(t_M\,;\,v_M)$ المنتمية إلى المماس . $A = v_M/t_M$.

عند الوصول للنظام الدائم تكون : $v = v_L = Cte$ و منه $dv/dt = 0$ ، و منه $A - B\,v_L = 0$ و منه : $B = A/v_L$

ــ كتابة العبارة الحرفية للسرعة الحدية التي يبلغها الجسم : عند بلوغ السرعة الحدية $v = v_L = Cte$ ،

و منه $dv/dt = 0$ و منه : $A - B\,v_L = 0$ ، إذن : $v_L = A/B = [g\,(m - \rho\,V)]/m] / [(k/m)] = g/k\,[(\mu - \rho\,)V]$.

2ــ عند $f = kv^2$ تكون المعادلة $m\,g - k\,v^2 - \rho\,V\,g = m\,dv/dt$ من الشكل : $y' + By^2 = A$: لدينا :

$m\,g - k\,v^2 - \rho\,V\,g = m\,dv/dt$ و منه نحصل على المعادلة : $g - k/m\,v^2 - (\rho\,V\,g)/m = dv/dt$ أي :

$dv/dt + k/m\,v^2 = g\,[(m - \rho\,V)]/m$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية من الشكل : $dv/dt = A - B\,v^2$

حيث $A = g\,[(m - \rho\,V)]/m$ و $B = k/m$.

ــ كتابة العبارة الحرفية للسرعة الحدية التي يبلغها الجسم في حالة $f = kv^2$: عند بلوغ السرعة الحدية $v = v_L = Cte$ ، و منه $dv/dt = 0$ و منه : $A - B\,v_L^{\,2} = 0$ ، إذن : $v_L^{\,2} = A/B = [g\,(m - \rho\,V)]/m] / [(k/m)] = g/k\,[(\mu - \rho\,)V]$.

و منه : $v_L = \sqrt{g/k\,[(\mu - \rho\,)V]}$

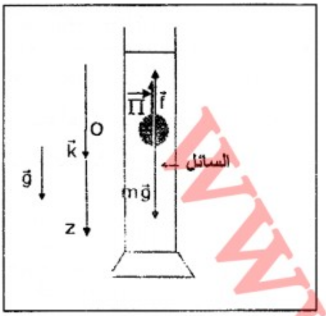
ملاحظة

ــ عند $f = kv$ تكون المعادلة من الشكل : $y' + By = A$: أي : $dv/dt = -B\,v + A$

بالأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية ، حل هذه المعادلة التفاضلية يكون من الشكل :

ـ نتائج هذه الدراسة مماثلة لنتائج الدراسة المحصل عليها في الظواهر الكهربائية (تطور التوتر الكهربائي في الدارة (R,C) وتطور شدة التيار الكهربائي في الدارة (R,L)) وفي التحولات النووية (قانون التناقص في النشاط الإشعاعي (N(t)) : إنها تتطور كلها بشكل رتيب وتتميز عن بعضها بالطبيعة و بثابت الزمنالمميز τ .

الدراسة النظرية لحركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في سائل



الدراسة النظرية لحركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في سائل هي نفسها كما في الهواء باستبدال الكتلة الحجمية للهواء بالكتلة الحجمية للسائل المعتبر .

و حتى لا نكرر نفس الخطوات سوف نعطي نموذج آخر لدراسة حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في سائل :

ندرس حركة كرية كتلتها m و حجمها V و كتلتها الحجمية ρ_b في زيت كتلته الحجمية ρ_h في حالة سكون بالنسبة للمرجع الأرضي المعتبر غاليلي .

بما أن حركة الكرية شاقولية و جهتها نحو الأسفل نختار معلم خطي موجه نحو الأسفل $(O\,;\,k)$.

a- تحديد القوى المطبقة على الجسم خلال سقوطه في السائل ثم تمثيلها على الشكل : القوى المطبقة على الجسم هي قوة الثقل $\vec{P}$ و دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الإحتكاك $\vec{f}$: مميزات قوة الثقل :

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأسفل ، القيمة : $P = m_b\,g$. مميزات دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$:

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأعلى ، القيمة : $\Pi = m_h\,g$. مميزات قوة الإحتكاك $\vec{f}$:

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأعلى ، القيمة : $f = k\,v^n$.

b- تبيان أن حركة مركز عطالة الجسم تخضع لمعادلة تفاضلية : الجملة المدروسة هي الجسم . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجسم هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة الإحتكاك $\vec{f}$ و دافعة أرخميدس المطبقة من طرف السائل $\vec{\Pi}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على :

$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}$. بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل :

$m_b\,g - k\,v^n - m_h\,g = m_b\,dv/dt$. إن الشكل النهائي للمعادلة التفاضلية له علاقة بشكل عبارة قوة الإحتكاك f .

لدينا : $m_b\,g - k\,v^n - m_h\,g = m_b\,dv/dt$ و منه نحصل على المعادلة :

$g - k/m_b\,v^n - (m_h\,g)/m_b = dv/dt$ أي : $dv/dt + k/m_b\,v^n = g\,[(m_b - m_h)]/m_b$ منه نحصل على المعادلة

التفاضلية من الشكل : $\mathbf{dv/dt = A - B\,v^n}$ حيث $A = g\,[(m_b - m_h)]/m_b$ و $B = k/m_b$.

تمثل هذه المعادلة ، المعادلة التفاضلية لحركة مركز عطالة الكرية G خلال السقوط الشاقولي في سائل .

تحديد المقادير المميزة للحركة

1ــ النظامين الملاحظين خلال الحركة :

1ــ النظامين الملاحظين خلال الحركة هما النظام الأول الإبتدائي (الإنتقالي) تكون خلاله الحركة متسارعة و مع تزايد السرعة تزداد شدة قوة الإحتكاك المائع التي هي من الشكل $f = k\,v^n$ (حيث n يأخذ القيمة 1 أو 2) و منه شدة هذه القوة تنطلق قيمتها من 0 و تزداد قيمتها مع ازدياد قيمة السرعة إلى أن تصبح محصلة القوى المؤثرة على المتحرك معدومة و منه ينعدم التسارع و تصبح إذن السرعة ثابتة و نقول حينئذ أن السرعة وصلت إلى قيمتها الحدية و هو ما يمثل النظام الثاني و يدعى **بالنظام الدائم** .

2ــ السرعة الحدية للكرية :

تبين الدراسة التجريبية أن سرعة الكرية تتناهى إلى قيمة حدية تسمى بالسرعة الحدية للكرية v_L . حيث تصبح بعدها حركة الكرية مستقيمة منتظمة أي أن : $dv/dt = 0$. في المعادلة التفاضلية للحركة $dv/dt = A - B\,v^n$ نستنتج : $A - B\,v_L^{\,n} = 0$

و منه : $\mathbf{v_L = (A/B)^{1/n} = g/k\,[(m_b - m_h)]^{1/n}}$

عندما تقارب سرعة الكرية السرعة الحدية $\mathbf{v_L}$ تخضع حركتها إلى نظام يسمى **النظام الدائم** و يتميز بثبات السرعة فيه .

3ــ النظامين الإبتدائي أو الإنتقالي للحركة :

قبل تحرير الكرية كانت ساكنة أي تخضع لقوى مجموعها معدوم . في اللحظة $t = 0$ تحرر الكرية ، فيصبح مجموع القوى المؤثرة عليها غير معدوم ، فتبدأ حركة السقوط الشاقولي للكرية و تتزايد سرعة مركز عطالتها : تسمى مرحلة التزايد هذه بالنظام الإبتدائي أي تخضع حركتها إلى نظام يسمى **النظام الإبتدائي** و يتميز بتزايد السرعة فيه . بعد ذلك تتطور حركة مركز عطالة الكرية نحو **نظام دائم** تصبح فيه مجموع القوى المؤثرة على الكرية معدوم $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ أي أن التسارع معدوم $a = dv/dt = 0$

4ـ التسارع الإبتدائي :

في المعادلة التفاضلية ، عند $t = 0$ ، لدينا : $a(t = 0) = a_0 = (dv/dt)_{t=0}$ بحيث أن a_0 هو التسارع الإبتدائي لمركز عطالة الكرية ، و لدينا كذلك $f = 0$ و منه : $\mathbf{a_0 = (m_b - m_h)g / (m_b)}$ $\Rightarrow$ $(m_b - m_h)\, g = m_b\, a_0$.

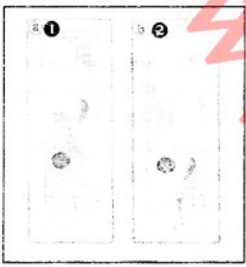
بيانيا ، قيمة التسارع الإبتدائي تساوي إلى قيمة معامل توجيه المماس لمنحنى السرعة $v = f(t)$ عند اللحظة $t = 0$.

الزمن المميز للحركة :

الزمن المميز للسقوط هو الزمن الموافق للمرور من نظام لآخر . إنه فاصلة نقطة تقاطع الخط المقارب الأفقي مع مماس المنحنى المار بالمبدأ ، نرمز له بـــ τ . يمكن تحديد الزمن المميز بالعلاقة : $\mathbf{v_L = a_0 \cdot \tau}$ حيث $\mathbf{a_0}$ هو التسارع الإبتدائي للحركة .

دراسة حركة سقوط صلب في الهواء بإهمال قوى الاحتكاك

قانون السقوط الحر



شكل سقوط الأجسام موضوع تساؤل الكثير من العلماء منذ القدم ، خصوصا بعد مجيء العالم غاليلي الذي صرح بما يلي :

« ينبغي على الأجسام أن تكون لها نفس حركة السقوط ، لكن يمكن لهذه الحركة أن تتغير مع طبيعة الوسط الذي يحدث فيه السقوط » .

جاء نيوتن فيما بعد ليؤكد ما صرح به غاليلي بإنجاز بعض التجارب ، نذكر منها تجربة الأنبوب :

❶ توجد ، داخل أنبوب شفاف ومملوء بالهواء ، كرية وريشة في قعر الأنبوب .

ننكس فجأة الأنبوب فتسقط الكرية لتصل الأولى إلى قعر الأنبوب بينما تنزل الريشة ببطء .

❷ يفرغ الأنبوب من الهواء وتكرر التجربة ، فتسقط الريشة مثل الكرية ، حيث تصلان معا إلى قعر الأنبوب .

ـ إن السقوط في الفراغ غير مرتبط بالكتلة .

ـ تنعدم في هذه الحالة القوى المقاومة الناتجة عن وجود الهواء ويبقى تأثير الجاذبية فقط : **إنه السقوط الحر .**

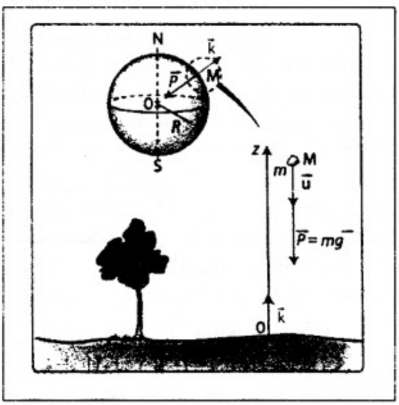
في غياب مقاومة الهواء ، كل الأجسام تسقط بالتسارع نفسه مهما كان حجمها أو شكلها .

تعريف :

نقول عن الجسم الصلب أنه في سقوط حر إذا لم يخضع خلال سقوطه إلا لقوة ثقله فقط .

يصلح هذا التعبير أيضا للأقمار الاصطناعية في مدارها حول الأرض والأجسام التي تنتقل من الأعلى إلى الأسفل والعكس (من الأسفل إلى الأعلى) . حتى يومنا هذا ، ليس من السهل تحديد تغير سرعة جسم يسقط رغم وجود الميقاتية التي تسمح بقياس دقيق . لا نستغرب إذن عن بقاء طبيعة هذه الحركة غير مفهومة لقرون ، حتى مجيء غاليلي في بداية القرن السابع عشر .

دراسة حركة مركز عطالة جسم صلب في سقوط حر



ـ الدراسة التحريكية للسقوط : الجملة المدروسة هي الجسم الصلب . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجسم الصلب هي : يخضع الجسم الصلب في المرجع الأرضي (الغاليلي) لثقله ، لدافعة أرخميدس ولقوة الاحتكاك . دافعة أرخميدس Π مهملة أمام الثقل P . في هذه الحالة قوى الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء على الجسم الصلب مهملة كذلك .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$.

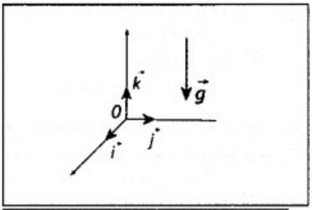
مميزات حركة السقوط الحر

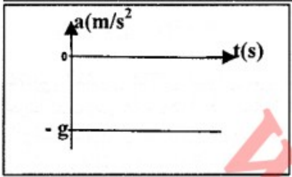
شعاع التسارع :

بإسقاط هذه العلاقة $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. أي $\vec{a} = \vec{g}$ على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل نحصل على : $P = m\, a$

و منه : $m\, a = m\, g$ ، بالاختزال على m نحصل على : $\mathbf{a = g}$

طبيعة حركة السقوط الحر





في المرجع الأرضي (غاليلي) ، نختار معلما متعامدا $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ بحيث أن المحور العمودي $(O;\vec{k})$ متجه نحو الأعلى . العلاقة الشعاعية $\vec{a}=\vec{g}$ تسمح بكتابة إحداثيات شعاع تسارع الجسم الصلب ، اعتمادا على معرفة إحداثيات g .
نحصل على المعادلات الزمنية لشعاع التسارع :

$$a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = 0 \quad ; \quad a_z(t) = -g$$

نلاحظ أن التسارع ثابت وفق المحور (Oz) ، نقول أن الحركة متغيرة بانتظام ، ونمثل التسارع $a_z(t)$ بدلالة الزمن بمستقيم أفقي. ومنه حركة جسم صلب في سقوط حر شاقولي هي **مستقيمة متغيرة بانتظام** .

المعادلة الزمنية للسرعة

نعلم أن $a = dv/dt$ ؛ نستنتج المعادلة الزمنية للسرعة بواسطة إحداثيات شعاع التسارع a :

$$a_x(t) = dv_x/dt = 0 \ ; \ a_y(t) = dv_y/dt = 0 \ ; \ a_z(t) = dv_z/dt = -g$$

يتمثل الحل في تحديد المعادلات الزمنية لشعاع السرعة v(t) ولشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$ لمركز عطالة الجسم الصلب ، أي إعطاء عبارات إحداثياتيهما بدلالة الزمن . من أجل هذا ، يجب معرفة الشروط الإبتدائية للحركة .
نختار المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ بحيث يكون المبدأ O هو موضع مركز العطالة في اللحظة $t_0 = 0\ s$.
لندرس حركة السقوط الحر بدون سرعة ابتدائية بحيث ، في اللحظة t_0 :

$$\overrightarrow{OM}(t_0) = \overrightarrow{OM_0}\begin{cases} x(t_0) = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v_0}\begin{cases} v_x(t_0) = v_{0x} = 0 \\ v_y(t_0) = v_{0y} = 0 \\ v_z(t_0) = v_{0z} = 0 \end{cases}$$

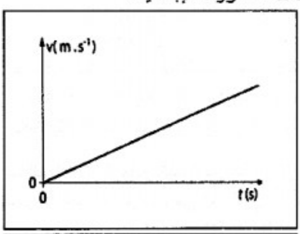
شعاع السرعة :

$$\begin{cases} dv_x/dt = 0 \\ dv_y/dt = 0 \\ dv_z/dt = -g \end{cases} \quad d\vec{v_x}/dt \text{ إذن بالتكامل } \quad \vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = C_2 \\ v_z(t) = -g\,t + C_3 \end{cases}$$

نحدد قيم الثوابت بالاستعانة بالشروط الابتدائية . في اللحظة t_0 : $v_x(t_0) = 0$ إذا $C_1 = 0$.
بالطريقة نفسها ، نجد $C_2 = 0$ و $C_3 = 0$.
المعادلة الزمنية لشعاع سرعة مركز عطالة جسم صلب في حالة سقوط حر دون سرعة ابتدائية هي :

$$v(t)\ \{\ v_x(t) = 0 \quad ; \quad v_y(t) = 0 \quad ; \quad v_z(t) = -g\,t\ \}$$

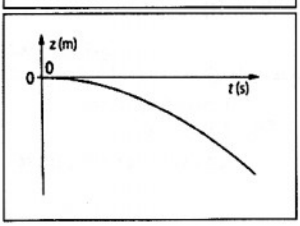
ملاحظة :
الحركة تتم وفق محور واحد شاقولي Oz و بالتالي يكفي معلم خطي لدراسة حركة السقوط الحر و يكون موجه نحو الأسفل :
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. الشروط الإبتدائية :
عند $t = 0$ فإن $v = 0$ و $z = 0$.



بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل ثم نكامل العلاقة الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على المعادلة الزمنية للحركة : $a = g \Rightarrow v = g\,t$

المعادلة الزمنية للسرعة هي : $\mathbf{v(t) = g\,t}$

ـــ قيمة السرعة تتزايد خلال السقوط الحر في هذه الحالة ، الحركة مستقيمة و متسارعة بانتظام .



شعاع الموضع و المعادلات الزمنية للحركة :
نعلم أن $\vec{v}(t) = d\overrightarrow{OM}/dt$ ؛ نحصل إذا على الإحداثيات x (t) ، y (t) و z (t) لشعاع الموضع بتكامل الإحداثيات $v_x(t)$ ، $v_y(t)$ و $v_y(t)$ ، لشعاع السرعة ومنه :

$$OM(t)\ \{\ x(t) = 0 \ ; \ x(t) = 0 \ ; \ \mathbf{z(t) = -1/2\,g\,t^2}\ \}$$

ملاحظة :
في حالة القذف بسرعة إبتدائية شاقولية نحو الأعلى . وعملا بالشروط الابتدائية المختارة حيث **الفاصلة الإبتدائية معدومة** و بالاستدلال السابق نفسه ، يمكن أن نحدد

المعادلات الزمنية لشعاع الموضع وشعاع السرعة :

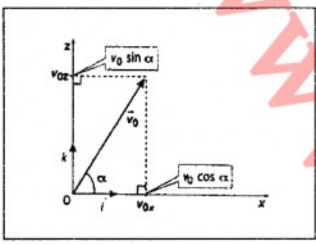
$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases}x(t)=0\\ y(t)=0\\ \mathbf{z(t_0)=-1/2\,gt^2+v_0\,t}\end{cases}\quad \text{إذا}\quad \vec{v}(t)\begin{cases}v_x(t)=0\\ v_y(t)=0\\ \mathbf{v_z(t)=-g\,t+v_0}\end{cases}$$

في حالة القذف بسرعة إبتدائية شاقولية نحو الأسفل . وعملا بالشروط الابتدائية المختارة وبالاستدلال السابق نفسه ، يمكن أن نحدد المعادلات الزمنية لشعاع الموضع وشعاع السرعة :

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases}x(t)=0\\ y(t)=0\\ \mathbf{z(t_0)=\ 1/2\,g\,t^2+v_0\,t}\end{cases}\quad \text{إذا}\quad \vec{v}(t)\begin{cases}v_x(t)=0\\ v_y(t)=0\\ \mathbf{v_z(t)=\ g\,t+v_0}\end{cases}$$

تطبيق القانون الثاني لنيوتن في الحركات المستوية

حركة قذف بسرعة ابتدائية غير شاقولية



الدراسة التجريبية بالتصوير المتعاقب تبين أن الحركة منحنية . في اللحظة $t_0 = 0$ s يقذف الجسم مركز عطالته M بسرعة ابتدائية $\vec{v}(t_0) = \vec{v_0}$
من أجل شعاع v_0 معطى ، نستطيع أن نختار معلما $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$
بحيث الشعاع $\vec{v_0}$ يتواجد في المستوي (xOz) . الزاوية التي يصنعها الشعاع $\vec{v_0}$ مع الأفق هي α . باعتبار الشروط الابتدائية :

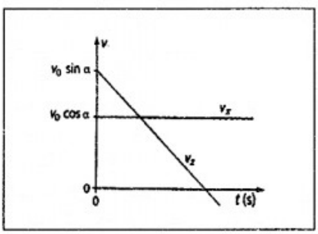
$$\overrightarrow{OM_0}\begin{cases}x(t)=0\\ y(t)=0\\ z(t_0)=0\end{cases}\ ;\quad \vec{v}(t_0)=\vec{v_0}\begin{cases}v_x(t_0)=v_{0x}=\ v_0\cos\alpha\\ v_y(t_0)\ =\ v_{0y}(t)=0\\ v_z(t_0)=v_{0z}=\ v_0\sin\alpha\end{cases}$$

شعاع التسارع :

الجملة المدروسة هي الجسم الصلب . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجسم الصلب هي : يخضع الجسم الصلب في المرجع الأرضي (الغاليلي) لثقله ، لدافعة أرخميدس ولقوة الاحتكاك . دافعة أرخميدس Π مهملة أمام الثقل P . في هذه الحالة قوى الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء على الجسم الصلب مهملة كذلك . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\vec{a}=\vec{g}\ \Rightarrow\ \Sigma\vec{F}_{ext}=\vec{P}=\ m\vec{a}$.

في المرجع الأرضي (غاليلي) ، نختار معلما متعامدا $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ بحيث أن المحور العمودي $(O\,;\vec{k})$ متجه نحو الأعلى .
العلاقة الشعاعية $\vec{a}=\vec{g}$ تسمح بكتابة إحداثيات شعاع تسارع الجسم الصلب ، اعتمادا على معرفة إحداثيات g .
نحصل على المعادلات الزمنية لشعاع التسارع : $\mathbf{a_x(t)=0\ \ ;\ \ a_y(t)=0\ \ ;\ \ a_z(t)=-g}$

شعاع السرعة



حسب الفقرة السابقة

$$\vec{v}(t)\begin{cases}v_x(t)=C_1\\ v_y(t)=C_2\\ v_z(t)=-g\,t+C_3\end{cases}\quad \text{إذا بالتكامل}\quad \vec{a}(t)\begin{cases}dv_x/dt=0\\ dv_y/dt=0\\ dv_z/dt=-g\end{cases}$$

نحدد قيم الثوابت بالاستعانة بالشروط الابتدائية . في اللحظة t_0 :
$v_x(t_0)=v_{0x}=\ v_0\cos\alpha$ إذا $C_1=v_0\cos\alpha$.
بالطريقة نفسها ، نجد $C_2=0$ و $C_3=v_0\sin\alpha$.

ــ المعادلات الزمنية لشعاع سرعة مركز عطالة جسم صلب في حالة سقوط حر بسرعة ابتدائية متواجدة في المستوي (xOz) وتصنع زاوية مع المحور الأفقي هي :

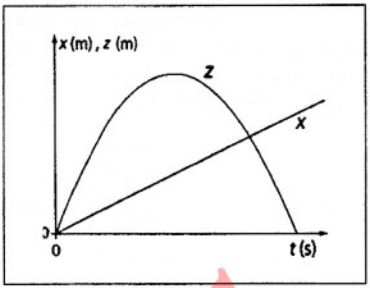
$$\mathbf{v(t)\ \{\ v_x(t)=v_0\cos\alpha\ ;\ v_y(t)=0\ ;\ v_z(t)=-g\,t+\ v_0\sin\alpha\ \}}$$

شعاع الموضع :

كما في الفقرة السابقة ، نحصل على إحداثيات شعاع الموضع بتكامل إحداثيات شعاع السرعة .

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases}x(t)=v_0\cos\alpha\,t+C_4\\ y(t)=C_5\\ z(t_0)=-1/2\,g\,t^2+v_0\sin\alpha\,.\,t+C_6\end{cases}\quad \text{إذا}\quad \vec{v}(t)\begin{cases}x(t)=v_0\cos\alpha\\ v_y(t)=0\\ v_z(t)=-g\,t+\ v_0\sin\alpha\end{cases}$$

نحدد قيم الثوابت بالاستعانة بالشروط الابتدائية : في اللحظة $t_0 = 0$ ،
$x(t_0) = 0$. إذا $C_4 = 0$ بالطريقة نفسها ، نجد $C_5 = 0$ و $C_6 = 0$.
و منه المعادلات الزمنية لشعاع الموضع هي :



$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} \mathbf{x(t) = v_0 \cos\alpha \,.\, t} \\ y(t) = 0 \\ \mathbf{z(t) = -1/2\, g\, t^2 + v_0 \sin\alpha \,.\, t} \end{cases}$$

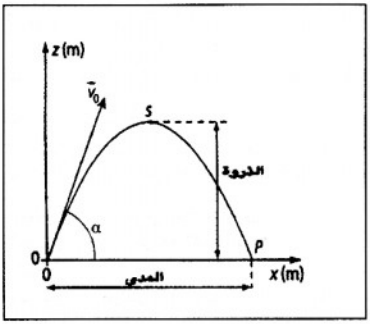
بما أن $y(t) = 0$ ، الحركة تتم في المستوي الشاقولي (xOz) الذي يضم شعاع السرعة الابتدائية v_0 فنقول أن الحركة مستوية ، فهي محصلة حركتين :
ـ حركة مستقيمة منتظمة وفق المحور الأفقي .
ـ حركة مستقيمة متغيرة بانتظام وفق المحور الشاقولي .

ملاحظة :
في الحالات الخاصة حيث زاوية القذف : $\alpha = \pm\pi/2$ ، $\cos\alpha = 0$ و $\sin\alpha = \pm 1$ ، نعود لحالة القذف الشاقولي
فنجد : $x(t) = 0$ ؛ $y(t) = 0$ ؛ $z(t) = -1/2\, g\, t^2 \pm v_0\, t$.
المسار هو الشاقول ، الحركة هي مستقيمة متغيرة بانتظام (متسارعة أو متباطئة) .

معادلة المسار :
بما أن الحركة تقع في المستوي (xOz) ، علينا كتابة z بدلالة x بحذف t . من المعادلة $x(t)$ ، نستخرج $t = x / v_0 \cos\alpha$.
نستبدل هذه العبارة في المعادلة $z(t)$: $\mathbf{z(x) = -1/2\, g/(v_0 \cos\alpha)^2 \,.\, x^2 + x \,.\, \tan\alpha}$
نجد أن معادلة المسار من الدرجة الثانية ، تمثيلها البياني قطع مكافئ . مسار مركز عطالة جسم صلب في سقوط حر بسرعة ابتدائية غير معدومة هو جزء من قطع مكافئ في المستوي الشاقولي الذي يضم $\overrightarrow{v_0}$.

بعض خصائص الحركة أو المسار

ـ الذروة **La fleche** : هي أعلى نقطة يبلغها الجسم الصلب (النقطة S) .
إحدى الطرق المستعملة لتحديد إحداثيات النقطة S هي استغلال خاصية النقطة S أين يكون شعاع السرعة أفقيا ،
يعني $v_z = 0$. $v(t_s) = -g\, t_s + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t_s = (v_0 \sin\alpha)/(g)$
و منه : نستبدل هذه العبارة في المعادلة $z(t)$: $z(t) = -1/2\, g\, t^2 + v_0 \sin\alpha \,.\, t$ لنحصل في النهاية أي بعد التبسيط للعبارة الناتجة على عبارة الذروة : $\mathbf{z_s = v_0^2 \sin^2\alpha / 2g}$

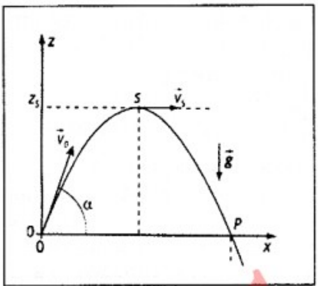


المـــدى **La Portée** :
هي المسافة بين الموضع M_0 لمركز عطالة القذيفة لحظة انطلاقها و الموضع P أين تسقط القذيفة بحيث تنتمي P إلى المحور الأفقي الذي يشمل M_0 .
حسب المعلم المعتبر سابقا تكون احداثيات النقطة P هي :
$z_p = 0$ ، $x_p = v_0 \cos\alpha \,.\, t$.
و منه : $z_p = -1/2\, g/(v_0 \cos\alpha)^2 \,.\, x^2 + x \,.\, \tan\alpha = 0$
نحصل على معادلة من الدرجة الثانية و بحلها نحصل على جذرين هما :
$x_p = 0$ و هي فاصلة نقطة الإنطلاق و $\mathbf{x_P = OP = v_0^2 \sin 2\alpha / g}$
و هي عبارة المدى للقذيفة .

المدى الأعظمي
من أجل قيمة محددة للسرعة الإبتدائية v_0 ، يكون المدى أعظميا لما $\sin(2\alpha) = 1$ أي $\alpha = 45°$

ملاحظة ترتبط إذا قيم الذروة والمدى بالشروط الابتدائية للحركة .

تطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة

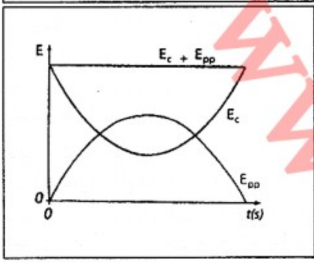


يمكن أن نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة لنحصل على نفس النتائج في حالة تطبيق نظرية مركز العطالة و سأكتفي بإعطاء نموذجين و هما : تطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة في حالة قذيفة و في حالة الأقمار الإصطناعية و نتبع نفس الطريقة في حالة النماذج الأخرى .

1ـ طاقة قذيفة :

نحدد في البداية الجملة والمرجع : المرجع الغاليلي والجملة (قذيفة + أرض) .
تعلمنا في السنة الثانية أن الجملة (قذيفة + أرض) لها طاقة حركية انسحابية $E_c = 1/2\ mv^2$ و طاقة كامنة ثقالية $E_{pp} = m\ g\ z$
في حقل منتظم للجاذبية g ، طاقة الجملة (قذيفة + أرض) هي :

$$\mathbf{E = 1/2\ mv^2 + m\ g\ z}$$

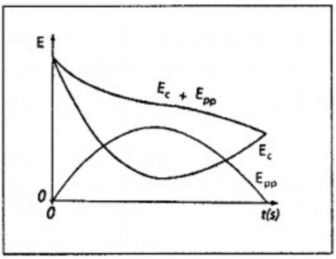


aـ الحالة التي تكون فيها قوى الإحتكاك مهملة :

نقذف قذيفة كتلتها m نحو الأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية v_0 و بزاوية α بالنسبة للأفق .
لنحدد قيمة الذروة بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة : نختار $z = 0$ على سطح الأرض .
عند الوضعية الابتدائية طاقة الجملة (قذيفة + أرض) :

$$E_0 = E_{pp0} + E_{c0} = 1/2\ mv^2_0$$

عند الإرتفاع الأعظمي أي الذروة S لدينا : $\vec{v}_s = v_x\,\vec{i} + v_z\,\vec{k}$
حيث $v_x = v_0 \cos\alpha$ و $v_z = 0$
و منه : $\vec{v}_s = v_x\,\vec{i} = v_0 \cos\alpha\ \vec{i}$ فتصبح الطاقة عند الذروة :
$E_S = E_{ppS} + E_{cS} = 1/2\ mv^2_0 \cos^2\alpha + m\ g\ z_S$. بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة : $E_0 = E_S$ نجد :
$1/2\ mv^2_0 = 1/2\ mv^2_0 \cos^2\alpha + m\ g\ z_S$ و منه قيمة الذروة : $\mathbf{z_S = v^2_0 \sin^2\alpha / 2g}$



bـ الحالة التي تكون فيها قوى الإحتكاك غير مهملة :

في هذه الحالة ، تكون قيمة الارتفاع الأعظمي أقل لأن الجملة (قذيفة + أرض) تقدم للوسط الخارجي طاقة تحول على شكل حرارة في الهواء .
إن الإنخفاض في الطاقة الحركية لا يحول كليا إلى طاقة كامنة ثقالية .
تطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة في هذه الحالة يعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$E_S = E_0 - |W_m|$$

حيث : $|W_m|$: القيمة المطلقة لعمل قوى الإحتكاك مع الهواء .

2ـ حالة الأقمار الإصطناعية :

ندرس حركة قمر اصطناعي أرضي الذي نعتبره نقطة مادية كتلتها m .
يصنع القمر مدار دائري مركزه O على إرتفاع z و سرعته v (R : نصف قطر الأرض) .

1ـ ماذا نقصد بمرجع جيو مركزي ؟
2ـ بين أن قيمة سرعة القمر ثابتة
الإجابـــة :

1ـ المرجع جيو مركزي مبدؤه مركز الأرض ، محاوره الثلاث موجهة نحو ثلاث نجوم معتبرة ثابتة و جد بعيدة . لدراسة حركة الأقمار الإصطناعية نستعمل المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي .
2ـ تبيان أن قيمة سرعة القمر ثابتة : الجملة المدروسة هي القمر . مرجع الدراسة هو المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي .
بإهمال كل التأثيرات الناتجة عن النجوم الأخرى على القمر واعتبار أن القوة الوحيدة المطبقة على القمر هي قوة الجذب العام :

$$\vec{F} = G\,.\,M_T\,.\,m/r^2\ .\vec{n} = m\ g_{(z)}\,\vec{n}\ .$$

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين S_1 و S_2 (موضعي القمر عند لحظتين مختلفتين) : $1/2\ m\ v_2^2\ - 1/2\ m\ v_1^2 = W_{\vec{(F)}}$
المسار دائري ، قوة الجذب العام دائما عمودية على الإنتقال و بالتالي عمل هذه القوة معدوم و كذا الإستطاعة و منه :
$W_{\vec{(F)}} = 0$ و $P_{(t)} = \vec{F}\,.\,\vec{v} = 0$ و منه نستنتج رأن التغير في الطاقة الحركية معدوم و منه : $v_2 = v_1$ و منه نقول أن السرعة ثابتة و الحركة دائرية منتظمة .

الذرة و ميكانيك نيوتن

1ـ قانون نيوتن : التأثير التجاذبي بين الأجسام

إذا وجد جسمان نقطيان A كتلته m_A و B كتلته m_B ، البعد بينهما $AB = r$ فإنه يطبق كل واحد منهما على الآخر قوة تجاذب كوني منحاها هو المستقيم المار من A و B و جهتيهما نحو الجسم المؤثر ، و شدتهما تساوي :

$F_{A\to B} = F_{B\to A} = G \,.\, m_A\, m_B / r^2$ بحيث G هي ثابت التجاذب الكوني و قيمته : $G = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}$ SI

حيث : يؤثر الجسم A على الجسم B بقوة $F_{A\to B}$ و هذا الأخير يرد عليه بقوة $F_{B\to A}$ بحيث :

$\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$. حيث : $\vec{F}_{A\to B} = -G \,.\, m_A\, m_B / r^2 \,.\, \vec{u}_{AB}$.

2ـ قانون كولومب

إذا وجد جسمان نقطيان A شحنته q_A و B شحنته q_B البعد بينهما $AB = r$ فإن كلاهما يطبق على الآخر قوة تجاذب أو تنافر منحاهما هو المستقيم المار من A و B و اتجاههما يتعلق بإشارتي q_A و q_B و شدتهما تساوي :

$F_{A\to B} = F_{B\to A} = k \,.\, q_A\, q_B / r^2$ بحيث أن k هي ثابتة العزل في الفراغ $k = 9 \,.\, 10^9\ N\, m^2/C^2$.

المقارنة بين قوى التأثير لكولومب و قوى التجاذب الكوني : نقرن بين قوى التجاذب لنيوتن و كولومب بين الإلكترون و البروتون في ذرة الهيدروجين $F_g/F_e = (G\, m_e \,.\, m_p)/(k \,.\, e^2) = 4{,}4 \,.\, 10^{-40}$

للمقارنة بين مقدارين من نفس الطبيعة نحسب النسبة بينهما : $F_g/F_e = 4{,}4 \,.\, 10^{-40} << 1$. إذن قوى التجاذب الكوني مهملة أمام القوى الهربائية لكولومب .

و منه التأثير البيني التجاذبي في الذرة مهمل أمام التأثير البيني الكهرساكن . مثلا في حالة ذرة الهيدروجين لدينا :

2ـ النموذج الكوكبي للذرة لروذرفورد

باستغلال المقارنة بين قوى التأثير التجاذب الكوني و قوى التجاذب الكهرساكنة لكولومب ، اقترح العالم روذرفورد في مطلع القرن العشرين " نموذجا كوكبيا " للذرة حيث نمذج النواة بكوكب ما و نمذج الإلكترونات بأقمار هذا الكوكب و مثلما تتحكم قوى التأثير التجاذب في حركة الأقمار حول الكوكب ، تتحكم قوى التأثير التجاذب الكهرساكنة في حركة الإلكترنات حول النواة .

3ـ حدود ميكانيك نيوتن

النسبية من غاليلي إلى أينشتاين

من بين المفاهيم التي تمتاز بحدسية كبيرة مع أنها الأكثر تعقيدا ، الحركة ، الذي يدخل في آن واحد الفضاء والزمن . بصفة شاملة ، يمكن وصف الحركة ، بواسطة المسار (فكرة الفضاء) وبالكيفية التي يقطع بها هذا المسار (فكرة الزمن) . فالحركة إذا تتميز بالمسار لأنها تحمل معلومة إضافية حول السرعة .

بينما كان مفهوم الزمن غائبا عن مفهوم الحركة عند أرسطو ، كون الحركة ، عنده ، خاصية للأجسام ؛ أصبحت الحركة عند غاليلي خاصية نسبية للأجسام ، فظهرت كل من السرعة اللحظية (أي تغير الموقع بالنسبة للزمن) والتسارع (تغير السرعة بالنسبة للزمن) .

وبعد إنجازه لعدة تجارب ، لاحظ غاليلي بأن أجساما ذات كتل مختلفة تسقط بنفس الكيفية (على عكس ما كان يظنه أرسطو)

وتوصل إلى تكميم التطور الزمني لهذا السقوط حيث وصفه «بالمتسارع بانتظام» .

وتوصل بتجاربه إلى إعطاء نص مبدأ العطالة النسبية الغاليلية .

أصبح للحركة طابع نسبي ، حيث لا توجد الحركة إلا بالنسبة لشيء (المرجع) .

حدود ميكانيك نيوتن

ـ إن أساس فيزياء نيوتن هو افتراضه وجود فضاء مطلق ، فضاء ثلاثي البعاد ، يحقق خواص هندسة إقليدس ، فكانت نظريته الميكانيكية كاملة وفعالة من أجل وصف الظواهر القابلة للملاحظة ، إلى أن اخترعت الهندسة غير الإقليدية ، حيث توصل العلماء إلى أن تصريح نيوتن ليس بحقيقة مطلقة ، بل هو مسلمة لوصف الشيء الرياضي الذي ينمذج الفضاء .

وحاول نيوتن تعريف "الزمن المطلق والكوني الذي يسير نظام الأشياء" .

وأهم كلمة في هذه الجملة هي "مطلق" ، حيث بالنسبة لنيوتن ، الفضاء والزمن هما نفسهما بالنسبة للجميع ، ولا يمكن أن يتأثرا بأي شيء .

إن من بين نجاحات نيوتن الكبرى ، توصل كل من أدامس (Adams) ولو فيريي (Le Verrier) من توقع وجود ، مع إعطاء المكان المحدد ، كوكب جديد وهذا بسبب عدم احترام أورانوس لقوانين نيوتن ، وهكذا تم اكتشاف Neptune ، ولهذا ، عندما لوحظ عدم احترام عطارد لهذه القوانين ، تم تفسيره أيضا بوجود جسم فلكي متسبب في ذلك ، ولم يتم فك اللغز إلا عند ظهور النظرية النسبية لاينشتاين .

إن مجال صلاحية النظرية الميكانيكية لنيوتن محدود على المستوين اللامتناهيين في الكبر وفي الصغر حيث تعتمد على خاصية التزامن أي زمن ملاحظة ظاهرة يوافق زمن حدوثها ويقتضي هذا أن المعلومة تنتقل آنيا من التركيبه المدروسة إلى الملاحظ ، غير أنها تنتقل بسرعة انتشار الضوء ، ما يؤكد عدم صلاحية ميكانيك نيوتن لدراسة الحركات ذات السرعة القريبة من سرعة انتشار الضوء .

ــ بالنسبة لمجموعة كوكبية (أرض ــ قمر اصطناعي) مثلا ، تسمح ميكانيك نيوتن بالتنبؤ بإمكانية وضع القمر الإصطناعي في مدار حول الأرض ، حيث يتعلق ارتفاعه عنها بالشروط الإبتدائية لإطلاقها . و بما أنه يمكن تغيير تلك الشروط الإبتدائية ، فإن شعاع مدار القمر الإصطناعي (بإعتباره دائريا) يمكنه أن يأخذ جميع القيم الممكنة .

باعتبار ذرة الهيدروجين و تخيلنا أن إلكترون الذرة في حركة دائرية منتظمة حول النواة ، فإنه حسب ميكانيك نيوتن يمكن لشعاع مدار الإلكترون أن يأخذ جميع االقيم الممكنة و بالتالي فإن ذرتين من هيدروجين سيكون لهما حجمان مختلفان حسب شعاع المدار و هذا غير صحيح لأن ذرتي هيدروجين لهما دائما نفس الحجم و بصفة عامة جميع ذرات الهيدروجين لها نفس المميزات . و هذا ما يجعل ميكانيك نيوتن تعجز عن تفسيره .

ــ لا يمكن لميكانيك نيوتن أن تفسر الظواهر الفيزيائية التي تحدث على مستوى الذرات أو الجزيئات . من بين هذه الظواهرالفيزيائية ، التبادلات الطاقوية بين المادة و إشعاع ضوئي و التي تبرزها أطياف الذرات .

4ــ التطور الكمي

رغم التشابه بين الفعل المتبادل الجاذبي والفعل المتبادل الكهرومغناطيسي الذي يوحي بوجود تشابه بين النظامين الكوكبي والذري ، إلا أن الحقيقة غير ذلك .

ــ لا يمكن وصف الذرة بطريقة كلاسيكية ، لشرح هذه الظواهر ، عرف القرن العشرون تطورا حقيقيا للعمل التجريبي الذي صنع أساس ما يسمى الفيزياء الكمية . خاصة منها التحقيق التجريبي لفرنك و هرتز في 1914 .

لشرح هذه الظواهر ، عرف القرن العشرون تطورا حقيقيا للعمل التجريبي الذي صنع أساس ما يسمى الفيزياء الكمية . خاصة منها التحقيق التجريبي لفرنك و هرتز في 1914 .

ــ طاقة الجملة (كوكب – قمر اصطناعي) : عندما يكون قمر اصطناعي في مدار ما ، تمتلك الجملة (كوكب – قمر اصطناعي) طاقة محددة ، أكبر كلما تواجد القمر الاصطناعي بعيدا عن الكوكب . بما أن جميع الارتفاعات وجميع السرعات محتملة ، فإن كل قيم الطاقة ممكنة ، أي يمكن أن تأخذ طاقة هذه الجملة أي مقدار ومنه يمكنها التغير بصفة مستمرة ، هذا ليس حال الجملة (بروتون – إلكترون) في نموذج ذرة الهيدروجين فطاقة الجملة (بروتون – إلكترون) بعكس طاقة الجملة (كوكب – قمر) ، لا تأخذ إلا قيما متفرقة . إذا النظام الكوكبي للذرة مرفوض .

تكممة التبادلات الطاقوية

يحدث تبادل الطاقة :

ــ عند اصطدام ذرة بدقيقة مادية

ــ عندما يحدث تأثير بيني بين الذرة و إشعاع ضوئي .

في سنة 1900 وضع الفيزيائي الألماني ماكس بلانك فرضية : المادة و الضوء لا يمكنهما أن يتبادلا الطاقة إلا بكميات منفصلة تسمى **كمات الطاقة** .

الطاقة المتبادلة E بين المادة و إشعاع ضوئي لا يمكنها أن تأخذ إلا قيما و منفصلة . ىقول أن هذه الطاقة المتبادلة مكماة .

1ــ نموذج الفوتون

طور إنشتاين فرضية ماكس بلانك و التي تقول أن الضوء هو عبارة عن موجات كهرمغناطسية تحمل طاقة على الشكل كمات الطاقة ، و ذلك بإثبات أن كمات الطاقة هاته تحملها دقائق تسمى بالفوتونات .

ماهو الفوتون ؟ الفوتون دقيقة ليس لها كتلة و غير مشحونة ، تنتقل في الفراغ بسرعة الضوء : $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s .

ــ تتكون موجة كهرمغنطسية ترددها ν ، و طول موجتها في الفراغ λ من فوتونات .

ــ طاقة كل فوتون : $E = h\,\nu = h\,c/\lambda$ حيث ν تواتر الموجة بــالهرتز Hz و λ طول الموجة بــالمتر m و h ثابت بلانك (Planck) و قيمته : $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J . s و E طاقة الفوتون بــ الجول J .

ملاحظة : للتعبير عن طاقة الفوتون نستعمل غالبا الإلكترون ــ فولط : eV حيث : $1\ eV = 1,60 \cdot 10^{-19}$ J

الفوتون و فرضية بور : في سنة 1900 ، حدد ماكس بلانك الطاقة لمنقولة من طرف الموجات الكهرومغناطيسية . كما استنتج أن تحويل الطاقة الكهرومغناطيسية لا يحدث إلا بقيم معينة وهي « كمات» الطاقة .

ــ في سنة 1905 ، اقترح أينشتاين الفكرة بأن الكم الطاقوي محمول من طرف جسيمات معدومة الكتلة والشحنة ،

سرعتها في الفراغ : $c \approx 3 \times 10^8 \; m.s^{-1}$.

ـــ طيف خطوط لذرة الهيدروجين : رأينا ، في السنة الأولى ثانوي ، أنه يمكن التعرف على عنصر كيميائي انطلاقا من طيفه للحصول على هذا الطيف ، يوضع الهيدروجين في حبابة زجاجية ، تحت ضغط منخفض ، ثم تقدم طاقة للذرات ، فيحدث تغير في حالة كل ذرة .

تكتسب الذرات طاقة زائدة ، فتصبح نشطة وغير مستقرة . وعندما تعود إلى حالتها ، الأكثر استقرارا ، تنخفض طاقتها بإصدارها لطاقة ضوئية .

إننا نلاحظ طيف خطوط ، وليس طيفا مستمرا ، وهذا يعني أن تواتر الإشعاعات الصادرة لا يأخذ إلا قيما خاصة لذا نقول إن التواتر مكمم .

ـــ فرضية بـــور Bohr

تبين الدراسة التجريبية لطيف الإصدار لذرة الهيدروجين في المجال المرئي أنه يتكون من عدة خطوط ملونة توافق كل منها إشعاعا معينا أحادي اللون ، و هو يتكون من أربع خطوط طول موجاتها هو كالتالي :

$\lambda_4 = 657$ nm ، $\lambda_3 = 487$ nm ، $\lambda_2 = 435$ nm ، $\lambda_1 = 411$ nm .

لتفسير هذه الظاهرة وضع العالم الفيزيائي الدانماركي نيلس بوهر في سنة 1913 فرضيته ، التي تفسر طيف ذرة الهيدروجين :

1ـــ تغير طاقة الذرة مكمم ؛

2ـــ لا يمكن للذرة أن تتواجد إلا في بعض حالات طاقة معرفة جيدا ، ومميزة بمستوى طاقوي E_n .

3ـــ يصدر فوتون ، تواتره ν ، عندما تنتقل الذرة من مستوى طاقة E_p إلى مستوى طاقة منخفض E_n حيث : $E_p - E_n = h \cdot \nu$.

رأينا سابقا ، أن التواترات غير مستمرة بل هي مكممة . نستنتج من عبارة بور أن التغير $E_p - E_n$ هو أيضا مكمم . بما أن المستوى الأساسي للطاقة مثبت ، طاقة الذرة مكممة . عكس طاقة الجملة (كوكب – قمر) ، طاقة ذرة الهيدروجين لا تأخذ إلا قيما متفرقة . إذا النظام الكوكبي للذرة مرفوض .

تكممة مستويات الطاقة

1ـــ تكممة مستويات الطاقة في الذرات

النموذج الذي وضعه بوهر يتناسب و الأفكار الجديدة للتكمية ، يتمثل هذا النموذج في كون طاقة الذرة مكماة أي لا تأخذ سوى بعض القيم المنفصلة و المحددة تسمى **مستويات الطاقة** . أي أن كل مستوى طاقي له طاقة معينة و نميزها بعدد n يسمى بالعدد الكمي ، و الذي يأخذ الأعداد 1و 2 و 3 ....

ـــ مستوى الطاقة بالنسبة للعدد الكمي $n = 1$ يسمى المستوى الأساسي و هو يوافق المستوى ذو الطاقة الأصغر (الحالة المستقرة للذرة) .

ـــ مستويات الطاقة ذات العدد الكمي $n > 1$ توافق المستويات المثارة .

ـــ المستوى الطاقي ذو العدد الكمي $n = \infty$ يوافق الطاقة $E_\infty = 0$ حيث الإلكترون غير مرتبط بالنواة . إن هذا الإصطلاح يستوجب أن تكون لكل المستويات الطاقية طاقة سالبة .

مخطط مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين

في غياب أي إضطراب خارجي ، إذا كانت الحالة الأساسية لذرة هي حالتها الإبتدائية ، فإن الذرة تبقى في هذه الحالة .
عندما تكتسب ذرة طاقة خارجية ، فإنها تنتقل من حالتها الأساسية إلى إحدى الحالات المثارة و التي تكون في الغالب غير مستقرة ، لكن سرعان ما تعود إلى إحدى حالاتها ذات مستوى طاقي أقل ، و ذلك بفقدان طاقة تكون **مكماة** .
الإنتقال هو المرور من حالة إلى أخرى ذات مستوى طاقي أعلى (حالة إثارة) أو ذات مستوى طاقي أقل (فقدان الإثارة)

تمرين تطبيقي

باستعمال مخطط مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين :

1ـــ احسب الطاقة المفقودة خلال إنتقال ذرة الهيدروجين في الحالة المثارة الرابعة إلى حالتها الأساسية .

2ـــ ما هي أكبر قيمة ممكنة لطاقة الإنتقال بين حالتين متتاليتين ؟

الجواب :

1ـــ الطاقة المفقودة خلال إنتقال الذرة من الحالة المثارة الرابعة إلى الحالة الأساسية :

$$E_4 - E_1 = -0{,}85 - (-13{,}6) = 12{,}75 \text{ eV}$$

2ـــ الحالتين المتتاليتين اللتان تبعدان أكثر عن بعضهما البعض هما الحالة الأساسية و الحالة المثارة الأولى :

$$E_2 - E_1 = 10{,}2 \text{ eV}$$

2ـــ تكممة مستويات الطاقة في الجزيئات

تتكون الجزيئات من ذرات في تأثير بيني ، مما يكثر من عدد مستويات الطاقة و يوسعها . فطاقة الجزيئة مكماة أيضا و هي تتعلق بالإلكترونات و باهتزازات الجزيئة حول مركز الكتلة و بدورانها .

3ــ تكممة مستويات الطاقة في النوى

إن طاقة النواة مكماة كذلك ، بحيث أن النواة يمكنها أن تنتقل من مستوى طاقي إلى آخر ، مثل الذرة و ذلك بفقدان طاقة أو بإكتسابها . كما يمكن للنواة أن تثار بفعل اصطدامها مع دقيقة مادية عالية الطاقة . عندما تتبادل هذه المجموعات طاقة مع الوسط الخارجي ، فإنها تنتقل من مستوى طاقي E_p إلى مستوى طاقي E_n أو العكس . هذه الطاقة المتبادلة تحكمها علاقة بوهر :

$\Delta E = E_p - E_n$ بحيث أن $E_p > E_n$.

تطبيقــات على الأطياف

تعريف بطيف ضوء

نسمي طيف ضوء مجموع الإشعاعات التي يتكون منها هذا الضوء ، و يتميز كل إشعاع منها بطول الموجة في الفراغ .

1ــ أطياف الذرات

تمثل الوثيقة أعلاه طيف خطوط الإمتصاص و طيف خطوط الانبعاث لذرة الصوديوم و يلاحظ أن الخطوط المظلمة تحتل نفس مواضع خطوط الإنبعاث .

عندما تنتقل ذرة من مستوى طاقي E_p إلى أخر ذي طاقة E_n أقل ، فإنها تفقد طاقة تبعثها على شكل إشعاع تردده ν ، بحيث أن $\Delta E = E_p - E_n = h\,\nu$ بحيث أن $E_p > E_n$.

ــ كلما كان الفرق $\Delta E = E_p - E_n$ كبير كلما كان التردد ν مهما .

ــ ترددات الإشعاعات المنبعثة تحددها مستويات الطاقة ، ففي طيف الإنبعاث الذري ، كل خط أحادي اللون (أحادي طول الموجة) توافق انتقال بين مستويين للطاقة .

ــ لا تتعلق مستويات الطاقة لذرة إلا بطبيعة الذرة . هذه الأخيرة تبعث إشعاعات تميزها و التي تكون قادرة على امتصاصها أيضا ، إن طيف النابعاث لذرة يميز الذرة شأنه في ذلك شأن مستويات الطاقة .

و عند إضاءة ذرات بواسطة ضوء أحادي طول الموجة في الفراغ تردده ν ، تنتقل الذرة من مستوى طاقي E_n إلى مستوى طاقي E_p مع امتصاص الإشعاع إذا كانت $E_p - E_n = h\,\nu$

إذا كانت $h\,\nu$ أصغر من أي فرق ممكن بين مستويات الطاقة ، فإن الإشعاع يعبر المادة دون إحداث أي اضطراب .

عندما تنتقل ذرة من مستوى طاقي E_n إلى مستوى طاقي E_p أكبر فإنها تمتص إشعاعا تردده ν بحيث أن $E_p - E_n = h\,\nu$

نشاط تجريبي : دراسة طيف خطوط ذرة الهيدروجين

تجربة : نستعمل حبابة تحتوي على غاز الهيدروجين تحت ضغط ضعيف تتم إثارته بالتفريغ الكهربائي . فينبعث منه ضوءا الذي يكون طيف الإنبعاث لذرة الهيدروجين . و الذي يمكن معاينته بواسطة مطياف .

نلاحــظ

ــ طيف متقطع .

ــ يحتوي على خطوط طيفية أهمها الأربع التالية : 657mn أحمر 487mn أزرق 435mn نيلي 411mn بنفسجي

في سنة 1908م اقترح ريتز علاقة رياضية تمكن من حساب أطوال الموجة لطيف الإنبعاث لذرة الهيدروجين في المجالات : المرئي ، فوق البنفسجي و تحت الأحمر ، و تربط هذه العلاقة أطوال الموجة λ_{np} بعددين طبيعيين n و p

حيث $n = 1$ أو $n = 2$ أو $n = 3$ ... و $p > n$ و هي : $\mathbf{1/\lambda_{np} = R_H\,(1/n^2 - 1/p^2)\ \ldots(1)}$

بحيث أن R_H ثابت يدعى ثابت ريدبيرك Rhydberg : $R_H = 1{,}09737320 \cdot 10^7\ m^{-1}$.

انطلاقا من قيمة معينة للعدد n يمكن حساب سلسلة من الخطوط و ذلك بتغيير العدد p .

ــ سلسلة **بالمير** Balmer توافق $n = 2$ و تعطى أطوال الموجة لأربع خطوط مرئية يوافق كل خط قيمة معينة للعدد p .

ــ سلسلة **باشين** نحصل عليها بالنسبة للعدد $n = 3$ و $p > 3$.

ــ سلسلة **ليمان** نحصل عليها بالنسبة للعدد $n = 1$ و $p > 1$.

ــ سلسلة **براكيت** نحصل عليها بالنسبة للعدد $n = 4$ و $p > 4$.

في سنة 1913م اقترح الفيزيائي **بوهر** نظرية تمكن من تفسير طيف خطوط ذرة الهيدروجين ، حيث توصل إلى كون طاقة ذرة هيدروجين معزولة هي : $E_n = -\,13{,}6/n^2\ eV$ ، حيث n عدد صحيح موجب يسمى العدد الكمي الرئيسي . يستخلص من هذا أن طاقة ذرة الهيدروجين مكماة بحيث لا تأخذ إلا قيما محددة ، يميزها العدد n .

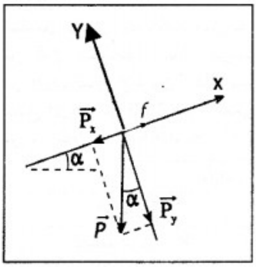
حلول تمارين نموذجية من الكتاب المدرسي

التمرين ـــ 1

1ـــ ينتقل متزحلق ثقله $P = 600\ N$ على مستو مستقيم ثلجي يصنع زاوية $\alpha = 10°$ مع الأفق ، بسرعة ثابتة .
نهمل كلا من احتكاك الثلج على المتزحلق و دافعة أرخميدس المطبقة من طرف الهواء أمام القوى الأخرى . نستطيع نمذجة احتكاك الهواء بقوة موازية للمستوي ، معاكسة للحركة و قيمتها تتزايد مع السرعة .
a– حوصل القوى المطبقة على المتزحلق .
b– بتطبيق مبدأ العطالة في المرجع الأرضي ، بفرض أنه غاليلي ، حدد قيم جميع القوى المطبقة على المتزحلق .
2ـــ ينزل الآن المتزحلق ، بدون احتكاك ، على منحدر جليدي مائل بـــ $\theta = 30°$ عن الأفق . اوجد تسارعه و القوة المطبقة من طرف المنحدر على المتزحلق .

الحـل ـــ 1

a–1 ـــ حوصلة القوى المطبقة على المتزحلق : تؤثر في المتزحلق ثلاث قوى : ثقله $\vec{P}$ ، شاقولي ، متجه نحو الأسفل و قيمته $P = 600\ N$ ؛ رد فعل المستوي $\vec{R}$: الإحتكاكات على الثلج مهملة بالنسبة للقوى الأخرى و منه $\vec{R_T} = \vec{0}$ و $\vec{R_N}$ عمودية على المستوي متجه نحو الأعلى $(\vec{R} = \vec{R_N})$ ؛ قوة احتكاك الهواء $\vec{f}$ ، موازية للمسار ومعاكسة للحركة .



b– تحديد قيم جميع القوى المطبقة على المتزحلق : ينجز مركز عطالة المتزحلق حركة مستقيمة منتظمة . حسب مبدأ العطالة ، في المرجع الأرضي بفرض أنه غاليلي ، المجموع الشعاعي للقوى الخارجية المطبقة معدوم : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0}$

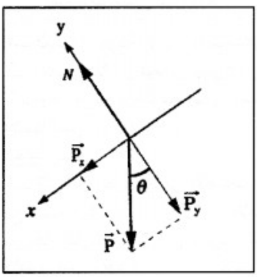
بإسقاط هذه العبارة على المعلم المتعامد (O , x, y) المختار المبين في المخطط :

(1) $- P \sin\alpha + f = 0$ على المحور Ox الموجه إيجابا نحو الأعلى .

(2) $- P \cos\alpha + R = 0$ على المحور Oy الموجه إيجابا نحو الأعلى .

و منه من العبارة (1) نجد : $f = P\sin\alpha = 600 \times \sin 10° = 104\ N$ و من العبارة (2) نجد : $R = P\cos\alpha = 600 \times \cos 10° = 591\ N$

2ـــ إيجاد تسارع المتزحلق و القوة المطبقة من طرف المنحدر على المتزحلق :



المخطط البياني للقوى ممثل على الشكل المرفق

نطبق القانون الثاني لنيوتن : (1) $\sum \vec{E}_{ext} = \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$

إذا كان محور الفواصل x موجبا إيجابا نحو الأسفل على طول المستوى المائل يصبح : $a_x = a$ و $a_y = 0$ (لأن $a_y = 0$) .

بإسقاط هذه العبارة على المعلم المتعامد (O , x, y) المختار المبين في المخطط :

(3) $m\,g \sin\theta = ma$ على المحور Ox الموجه إيجابا نحو الأسفل .

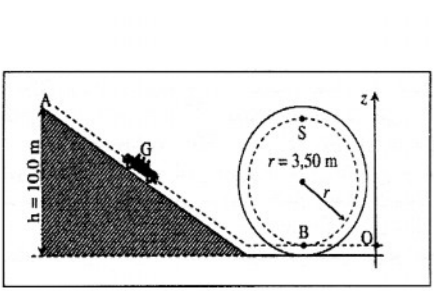
(4) $N - m\,g \cos\theta = 0$ على المحور Oy الموجه إيجابا نحو الأعلى .

من خلال المعادلة (3) ، نستخرج مباشرة التسارع :

$$a = g \sin\theta = (9{,}8)\sin 30° = 4{,}9\ m/s^2$$

بينما المعادلة (4) تعطينا : $N = mg\cos\theta = 519\ N$

التمرين ـــ 2



نجد في بعض الحدائق للتسلية لعبة تتكون من عربة يركب فيها الناس وتقطع مسارا ممثلا كما في الشكل المرفق . يوجد جهاز يعمل على ضمان التلامس بين العربة والسكة مهما كانت الوضعية . في المستوي الشاقولي ، السكة ممثلة بالمقطع المبين في الشكل .
يمثل G في هذا الشكل مركز عطالة العربة مع الركاب .
تحرر العربة من النقطة A بدون سرعة ابتدائية . كتلة العربة مع الركاب : $M = 400\ kg$ ، $g = 9{,}8\ N/kg$.

1ــ احسب الطاقة الكامنة الثقالية للجملة :
(عربة مع الركاب + الأرض في النقطتين A و S) .
2ــ نعتبر العربة جسما صلبا ونهمل الإحتكاكات . أحسب الطاقة الحركية للعربة عندما يصل مركز العطالة G إلى النقطة S .
3ــ مثل في مخطط بياني تحول طاقة العربة مع الركاب خلال انتقالها من A إلى S .

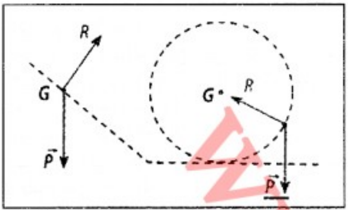
الحــل ــ 2

1ــ حساب الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (عربة مع الركاب + الأرض في النقطتين A و S) : الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (عربة + ركاب + أرض) هي $E_{PP} = M\,g\,z$ ، z يمثل ارتفاع G . عند النقطة A :

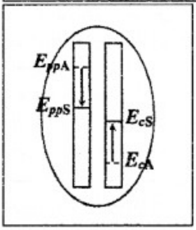
$z = h$: $E_{PPA} = M\,g\,h = 400 \times 9{,}8 \times 10{,}0 = 3{,}92 \times 10^4\ J$

و عند النقطة S : $z = 2r$:

$E_{PPS} = 2\,Mg\,r = 2 \times 400 \times 9{,}8 \times 3{,}50 = 2{,}74 \times 10^4\ J$



2ــ حساب الطاقة الحركية للعربة عندما يصل مركز العطالة G إلى النقطة S :
القوتان المطبقتان على العربة عند S هما الثقل $\vec{P}$ و رد فعل السكة $\vec{R}$.
$\vec{R}$ هي دائما عمودية على السكة (لا توجد احتكاكات) ، عملها إذن معدوم .
وبالتالي ثقل العربة هو الذي يعمل فقط ، و منه فالطاقة الكلية (الميكانيكية) تكون ثابتة : $E_m = E_{PP} + E_c = Cte$.
عند A : $E_{PP} = M\,g\,h$ و $E_{CA} = 0$ إذن $E_m = M\,g\,h$ مهما كان موضع العربة .
عند S : $E_{PPS} = 2\,M\,g\,r$ إذن $E_{CS} = M\,g\,h - 2\,M\,g\,r = M\,g(h - 2r) = 1{,}18 \,.\, 10^4\ J$
3ــ تمثيل في مخطط بياني لتحول طاقة الجملة (عربة مع الركاب + الأرض) خلال انتقالها من A إلى S :
تناقص E_{PP} يساوي إلى تزايد E_C : يجب أن تمثل التغيرات في المخطط البياني بنفس الارتفاع .



التمرين ــ 3

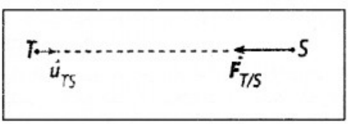
تستعمل الأقمار الإصطناعية من نوع "صبوت" للإستطلاع على سطح الأرض ، إنها مجموعة من أقمار اصطناعية مدنية . من بين أحدثها "صبوت 5" الذي وضع في مداره في ماي 2002 من طرف صاروخ أريان ، فهو يستطيع التمييز بين تفاصيل من رتبة 2,5 m . يمر القمر الإصطناعي فوق المكان نفسه من سطح الأرض كل 26,0 يوم شمسي متوسط : تمثل هذه المدة «الحلقة المدارية» والتي ينجز خلالها القمر الإصطناعي 369 دورة . تعطى : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/\ kg^2$

الأرض		صبوت 5	
الكتلة M_T	$5{,}97\times10^{24}$ kg	الكتلة m	3000 kg
نصف القطر R_T	6378 km	المدار	دائري
اليوم الشمسي المتوسط	24 h	الارتفاع z	822 km

1ــ اثبت أن حركة القمر الإصطناعي منتظمة . أوجد عبارتي سرعته و دوره .
2ــ احسب كلا من قيمتي السرعة والدور .
3ــ اوجد مرة ثانية قيمة الدور باستعمال الفقرة التالية من النص : تمثل هذه المدة «الحلقة المدارية» والتي ينجز خلالها القمر الإصطناعي 369 دورة .

الحــل ــ 3

1ــ اثبات أن حركة القمر الإصطناعي منتظمة : ندرس حركة القمر الإصطناعي في مرجع مركزي أرضي Geo-centrique مع اعتباره غاليليا . نعتبر القمر الإصطناعي ذي الكتلة m نقطيا و نرمز له بــ S ؛ كما نفرض بأن الأرض جسم صلب كتلته موزعة وفق تناظر كروي ، نرمز لمركزها بــ T . تطبق الأرض على القمر الإصطناعي القوة :



$\vec{F}_{T/S} = -\,G\,M_T\,m / r^2 \,.\, \vec{u}_{TS}$ حيث r نصف قطر المدار . يكتب القانون الثاني لنيوتن : $\vec{F}_{T/S} = m\vec{a}$ ، باختزال m نحصل على :
$\vec{a} = -\,G\,M_T / r^2 \,.\, \vec{u}_{TS}$ حيث $a = G\,M_T / r^2$ تمثل قيمة ثابتة .
تبين معطيات النص أن المدار دائري و بما أن التسارع هو شعاع ناظمي قيمته a ثابتة فإن الحركة دائرية منتظمة .
ــ عبارتي السرعة و الدور : شعاع التسارع يمكن أن يحلل على الشكل التالي :
$\vec{a} = dv/dt\ \vec{t} + v^2/(r)^2\ \vec{n}$ أي : $a_t = dv/dt$ و $a_n = v^2/(r)$.
حسب ما سبق : القوة الوحيدة المطبقة على القمر هي قوة الجذب للأرض ، و منه التسارع مركزي أي : $dv/dt = 0$.

و منه قيمة السرعة ثابتة و منه الحركة دائرية منتظمة .

و منه : المركبة التي تمثل التسارع الشعاعي $\vec{a}$ للكوكب في الأساس $(\vec{t}, \vec{n})$ هي التسارع الناظمي $a_n = a = v_2^2 / R_2$

ـ مميزات شعاع التسارع لكوكب الزهرة : المنحى : مستقيم يمر من مركزي القمر و الأرض ، الجهة : من القمر نحو الأرض ، القيمة : $a = G \cdot M_l/(R_2)^2$ أو $a = v_2^2/(R_2)$.

من عبارتي التسارع : $a = G M_T / r^2$ و $a = v^2/r$ نحصل على : $v^2/r = G M_T / r^2$ و منه : $v = \sqrt{G M_T/r}$.

ـ الدور المطلوب هو مدة انجاز دورة ، المسافة المقطوعة هي إذا $2\pi r$. إن الدور T يمثل مدة انجاز دورة :

$$T = 2\pi r / v = 2\pi r / \sqrt{G M_T/r} = 2\pi \sqrt{r^3/G M_T}$$

2ـ حساب كلا من قيمتي السرعة والدور : $v = \sqrt{G M_T/r} = \sqrt{G M_T/(R_T + z)}$

علينا أن نميز بين نصف قطر المدار والارتفاع : نصف قطر المدار محسوب انطلاقا من مركز الأرض ، أي هو $r = R_T + z$ ، حيث z يمثل ارتفاع القمر الاصطناعي بالنسبة لسطح الأرض . يعبر عن R_T و z بالمتر .

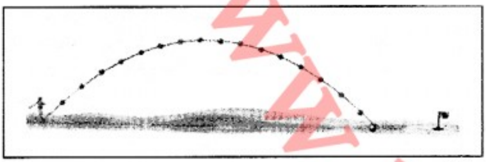
$$v = \sqrt{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} / (6\,378 + 822) \times 10^3} = 7,44 \times 10^3\ m.s^{-1} = 7,44\ km.s^{-1}$$

$$T = 2\pi\,(6378 + 822)\,10^3 / (7,44 \times 10^3) = 6,08 \times 10^3\ s = 101\ min$$

3ـ إيجاد مرة ثانية قيمة الدور باستعمال الفقرة التالية من النص : تمثل هذه المدة «الحلقة المدارية» والتي ينجز خلالها القمر الإصطناعي 369 دورة : مدة 369 دورة تساوي 26,0 يوما ، يعني : $369\ T = 26,0\ jours = 26,0 \times 24 \times 60\ min$

إذن : $T = 26,0 \times 24 \times 60 / 369 = 101\ min$ وهي القيمة نفسها الموجودة من قبل .

التمرين ـ 4



1ـ **يرمي لاعب الغولف كرة كتلتها $m = 40\ g$ ، موضوعة على الأرض ، بسرعة ابتدائية قيمتها $v_{0z} = 28\ m/s$ بحيث يصنع شعاعها زاوية $\alpha = 45°$ مع الأفق .**

a ـ أوجد المعادلات الزمنية لمركز عطالة الكرة بإهمال تأثير الهواء .

b ـ على أي مسافة ، بالنسبة لنقطة القذف ، سوف تسقط الكرة ؟

2ـ يريد اللاعب أن تصل الكرة إلى نقطة أبعد من نقطة السقوط بالتأثير على متغير واحد .

هل من أجل هذا ، عليه أن يغير زاويةالقذف ؟ أم قيمة السرعة الابتدائية ؟ برر إجابتك . نأخذ $g = 9,8\ N.kg^{-1}$

الحـل ـ 4

بما أن تأثير الهواء مهمل ، يمكننا دراسة حركة مركز عطالة كرة الغولف بتطبيق قانون السقوط الحر .

1ـa ـ إيجاد المعادلات الزمنية لمركز عطالة الكرة بإهمال تأثير الهواء : الجملة المدروسة هي الكرة . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الكرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. و منه : $\vec{a} = \vec{g}$ نختار معلما بحيث يتطابق مبدؤه مع نقطة الإنطلاق ، و يتواجد شعاع السرعة الإبتدائية في المستوي (xOy) . الشروط الإبتدائية : في اللحظة $t = 0\ s$ ، إحداثيات شعاعي الموضع و السرعة هما : $x(t) = 0\ ;\ y(t) = 0\ ;\ z(t) = 0$ ، $v_{x0} = v_0 \cos\alpha$ ، $v_{y0} = v_0 \sin\alpha$ ، $v_{z0} = 0$.

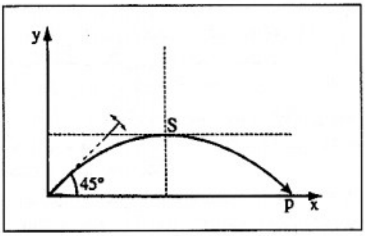
إحداثيات شعاع التسارع هي : $a_x = dv_x/dt = 0\ ;\ a_y = dv_y/dt = -g \quad a_z = 0$

بإسقاط العلاقة $\vec{a} = \vec{g}$ على جملة محاورثم نكامل مرتين العلاقات الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)\,t \\ y = -1/2\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t \\ z = 0 \end{cases}$$

العلاقة الأخيرة $(z = 0)$ تبين أن المسار في المستوي Oxy .

bـ إيجاد المسافة ، بالنسبة لنقطة القذف ، أين تسقط الكرة : لتكن B النقطة التي تصل إليها الكرة على الأرض . إن المسافة التي نبحث عنها (أي المدى) هي الفاصلة x_B للنقطة B والتي تحقق $y_B = 0$.



ليكن : $0 = -1/2\,gt^2 + v_0\,(\sin\alpha)\,t = t\,(-1/2\,gt + v_0 \sin\alpha)$.

الحل الأول $t = 0\ s$ يمثل نقطة الانطلاق .

و الحل الثاني اللحظة التي نبحث عنها : $t_B = 2v_0 \sin\alpha/g$: المعادلة الزمنية x(t) تعطي إذن :

$x_B = v_0\,(\cos\alpha) \times (2v_0 \sin\alpha/g) = v_0^2 \sin 2\alpha/g$.

ت . ع : $x_B = 28^2 \times \sin(2 \times 45°)/9,8 = 80\ m$

تذكير: $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

2ـ يريد اللاعب أن تصل الكرة إلى نقطة أبعد من نقطة السقوط بالتأثير

على متغير واحد : نستعمل العبارة السابقة x_B .

ــ قيمة v_0 ثابتة ، يكون المدى أعظميا عندما $\sin 2\alpha = 1$ أي $\alpha = 45°$

قيمة الزاوية هي $45°$ ، وبالتالي تغيير الزاوية α لا يزيد من المدى الذي كان سابقا أعظميا .

ــ قيمة الزاوية ثابتة ، يكفي إذا رفع قيمة v_0 لزيادة x_B .

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

تتغير وضعية نقطة مادية من $\vec{r_1} = (3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k})$ m إلى $\vec{r_2} = (4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k})$ m خلال 2s .

1ــ ما هي سرعتها المتوسطة ؟

2ــ لنقطة مادية أخرى تسارع معطى بالمعادلة $\vec{a} = (-7\vec{i} + 2\vec{j})$ m/s² خلال مدة 5 s . بعد هذه المدة ، تصبح سرعتها $\vec{v} = (5\vec{i} + 2\vec{k})$ m/s ، كم كانت سرعتها الإبتدائية ؟

الحــل ــ 1

1ــ إيجاد سرعتها المتوسطة : شعاع السرعة المتوسطة هي نسبة شعاع تغير الموضع $\overrightarrow{\Delta r}$ على المدة الزمنية Δt :

$$\vec{v}_m = \overrightarrow{\Delta r}/\Delta t = (\vec{r_2} - \vec{r_1})/2 = [(4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}) - (3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k})] / 2 = 0{,}5\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j} - \vec{k}$$

إذن قيمة السرعة المتوسطة هي : $v_m = \sqrt{(0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (-1)^2} = 1{,}22$ m/s

2ــ إيجاد سرعتها الإبتدائية : شعاع التسارع المتوسط هي نسبة شعاع تغير السرعة $\overrightarrow{\Delta v}$ على المدة الزمنية Δt :

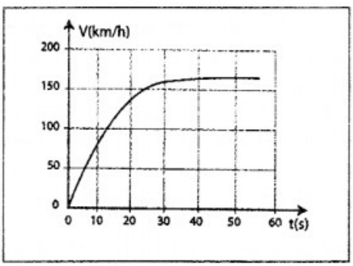
$$\vec{a} = \overrightarrow{\Delta v}/\Delta t = (\vec{v} - \vec{v_0})/5 \Rightarrow (\vec{v} - \vec{v_0}) = 5\vec{a} \Rightarrow \vec{v_0} = \vec{v} - 5\vec{a} = (5\vec{i} + 2\vec{k}) - 5(-7\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{v_0} = (5\vec{i} + 2\vec{k}) - (-35\vec{i} + 10\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{v_0} = [(5\vec{i} + 2\vec{k}) + 35\vec{i} - 10\vec{j}] = 40\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}$$

إذن قيمة السرعة الإبتدائية هي : $v_0 = \sqrt{(40)^2 + (10)^2 + (2)^2} = 41{,}2$ m/s

التمرين ــ 2



يمثل البيان المقابل تغير سرعة سيارة خلال اختبارها في جزء مستقيم من مدار تجريبي .

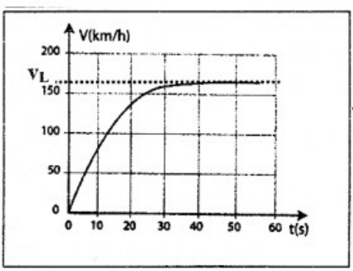
1ــ اشرح تغير سرعة السيارة مع مرور الزمن .

2ــ في أي مجال من الزمن يكون تسارع السيارة ثابتا ؟ ما هي إذا طبيعة حركة السيارة ؟

3ــ بعد أي لحظة يصبح التسارع معدوما ؟ وماهي إذا طبيعة حركة السيارة ؟

4ــ اوجد تسارع السيارة : في اللحظة $t_1 = 15$ s وفي اللحظة $t_2 = 20$ s .

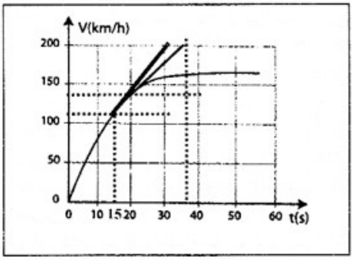
الحــل ــ 2



1ــ شرح تغير سرعة السيارة مع مرور الزمن : بين $t_1 = 0$ s و $t_2 = 40$ s ، على المنحنى نلاحظ الطور الأول أين سرعة الجسيمة تزداد بشكل سريع في البداية ثم بشكل بطيئ و يمثل النظام الإبتدائي أو الإنتقالي . ينتهي المنحنى بخط مقارب أفقي و بالتالي فالسرعة ثابتة ابتداءا من $t_2 = 40$s . على هذا الجزء $(t > 40$ s$)$ من المنحنى ، السرعة تبقى ثابتة و تساوي إلى السرعة الحدية v_L . و هو النظام التقاربي أو النظام الدائم . الجسيمة مزودة بحركة مستقيمة منتظمة .

2ــ يكون تسارع السيارة ثابتا عندما $dv/dt = k = Cte$ أي عندما يكون $v = k\,t$ و يتحقق ذلك عندما يكون المنحنى خط مستقيم و هذا ما يلاحظ في المجال الزمني : $0 < t < 15$ s . إذن في هذا المجال الزمني تكون حركة السيارة متسارعة بانتظام .

3ــ يصبح التسارع معدوما عندما $dv/dt = 0 = Cte$ أي عندما يكون $v = k = Cte$ و يتحقق ذلك عندما يكون المنحنى خط مستقيم موازي لمحور الأزمنة و هذا ما يلاحظ في المجال الزمني :



$t > 40$ s . إذن في هذا المجال الزمني تكون حركة السيارة منتظمة .

4ـ إيجاد تسارع السيارة : في اللحظة $t_1 = 15$ s : المماس للمنحنى في هذه اللحظة عبارة عن خط مستقيم و على نفس الإستقامة من المنحنى (امتداد له) و التسارع عندها يمثل بميل المماس هذا :

$$a_1 = \Delta v/\Delta t = (200 - 112) / 3{,}6)/(15) = 1{,}63 \ m/s^2$$

التسارع عند اللحظة $t_2 = 20$ s يمثل بميل المماس للمنحنى :

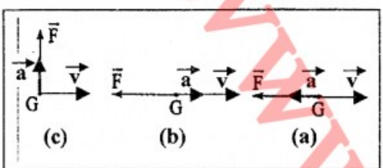
$$a_2 = (200 - 140)/3{,}6)/(16) = 1{,}04 \ m/s^2$$

ملاحظة : يمكن مناقشة المنحنى بطريقة أخرى :

التسارع a هو مشتق السرعة v بالنسبة للزمن ، فهو يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى $v = f(t)$.

ـ وصف حركة كل طور محددا طبيعة الحركة من جهة و من جهة أخرى نحدد التسارع فيها إن كان معدوم ، ثابت ، متزايد أو متناقص : حركة G يمكن تجزئتها إلى ثلاث أطوارمتتالية : I ، II و III : خلال الطور I ($0 \leq t \leq 15$ s) ، المنحنى خط مستقيم و منه السرعة هي دالة متزايدة خطيا مع الزمن . إذن الحركة متسارعة حيث التسارع ثابت غير معدوم . خلال الطور II ($15 \text{ s} \leq t \leq 40$ s) ، السرعة متزايدة و لكن معامل توجيه المماس للمنحنى يتناقص . إذن الحركة متسارعة حيث التسارع يتناقص . الطور III ($t \geq 40$ s) ، يتميز بالسرعة الثابتة ، إذن الحركة منتظمة و التسارع معدوم .

التمرين ـــ 3



في كل مخطط من المخططات الممثلة في الوثيقة ، عند لحظة زمنية ، تمثل الأشعة مجموع القوى الخارجية $\vec{F}$ المطبقة على جسم صلب و السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ لمركز عطالته G . هذه الأشعة ممثلة بدون سلم معين . حدد ، مع التعليل (تطبيق قانون ، مثال ...) الوضعيات المختلفة الممكنة .

الحـــل ــ 3

ـ في الشكل (a) : شعاعي السرعة و التسارع لهما جهتين متعاكستين و بالتالي $a \cdot v < 0$ إذن الحركة متباطئة بانتظام و كذلك شعاع القوة و شعاع التسارع لهما نفس المنحى و بالتالي فالتسارع الناظمي معدوم و منه فالحركة مستقيمة متباطئة بانتظام .

ـ في الشكل (b) : شعاع القوة و شعاع التسارع لهما جهتين متعاكستين و هذا غير ممكن لأن حسب القانون الثاني للنيوتن فإن شعاع القوة و شعاع التسارع لهما نفس المنحى و الجهة . إذن هذه الوضعية غير ممكنة التحقق أي مستحيلة .

ـ في الشكل (c) : شعاع القوة و شعاع التسارع متعامدين و هذا يعني أن التسارع المماسي $dv/dt = 0$ معدوم و منه تسارع الحركة يكون ناظمي أي مركزي و منه فالحركة دائـــرية منتظمة .

التمرين ـــ 4

تخضع نقطة مادية كتلتها 2 kg لقوتين منشئتين لتسارع محصلته $\vec{a} = (4\vec{i} - 3\vec{j})$ m/s^2 .
إذا كانت $\vec{F_1}$ معطاة بالعبارة : $\vec{F_1} = (-\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k})$ N أوجد $\vec{F_2}$.

الحـــل ــ 4

إيجاد $\vec{F_2}$: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = m\vec{a}$ و منه : $\vec{F_1} + \vec{F_2} = m\vec{a}$ و منه :

$$\vec{F_2} = m\vec{a} - \vec{F_1} = m(4\vec{i} - 3\vec{j}) - (-\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}) = 2(4\vec{i} - 3\vec{j}) - (-\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k})$$

و منه : $\vec{F_2} = 9\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

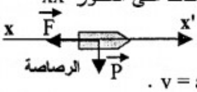
إذن قيمة قيمة القوة $\vec{F_2}$ هي : $F_2 = \sqrt{(9)^2 + (-4)^2 + (3)^2} = 10{,}3$ N m/s

التمرين ـــ 5

لرصاصة بندقية كتلة 10 g ، تنتقل أفقيا بسرعة 400 m/s . تتوقف بعد اختراقها لسمك 3 cm من الخشب . أوجد شدة القوة المؤثرة على الرصاصة ، بافتراض أنها ثابتة . قارن هذه القوة مع ثقل شخص كتلته 60 kg . تعطى : $g = 10$ m/s^2 .

الحـــل ــ 5

إيجاد شدة القوة المؤثرة على الرصاصة : بافتراض السرعة الإبتدائية (سرعة الإختراق) هي $v_0 = 400$ m/s تصبح السرعة النهائية (السرعة بعد الإختراق) $v = 0$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F} = m\vec{a}$ بالإسقاط على المحور xx' الموجه إيجابا مع جهة الحركة نحصل على : $-F = m \cdot a \Rightarrow a = -F/m$.



نعبر عن السرعة وفق المحور x'x : باستخدام تعريف التسارع : $dv/dt = a = -F/m$.

بما أن F ثابتة إذن التسارع كذلك ثابت خلال الحركة . نكامل بالنسبة للزمن فنحصل على : $v = a\,t + k$.

السرعة الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v_0 = 400$ m/s إذن : $k = v_0 = 400$ m/s و منه :

$v = a\,t + k = -F/m\,t + v_0$ و منه : (1) $v = -F/m\,t + v_0$.

لتحديد فاصلة الرصاصة ، نكامل من جديد عبارة السرعة فنحصل على :

(2) $x = -1/2\ F/m\ .\ t^2 + v_0\, t + x_0$. عند $t = 0$ لدينا : $x_0 = 0$ و منه : $x = -1/2\ F/m\ t^2 + v_0\, t$

من العبارة (1) نستخرج عبارة الزمن t و نعوضها في العبارة (2) فنحصل على علاقة السرعة بالمسافة المقطوعة d :

$v^2 - v_0^2 = 2a\,(x - x_0)$ حيث $d = x - x_0$ هي المسافة المقطوعة بين السرعتين .

و منه : $a = (v^2 - v_0^2)/2d = -2,7\ .\ 10^6\ m/s^2$ و مما سبق : $-F = m\ .\ a \Rightarrow F = -m\,a = 2,7\ .\ 10^4\ N$

ـ مقارنة هذه القوة مع ثقل شخص كتلته 60 kg : $F/P = (2,7\ .\ 10^4)/(60\ .\ 10) = 45$

منه نستنتج أن هذه القوة F تعادل 45 شخص كتلته 60 kg .

التمرين ـ 6

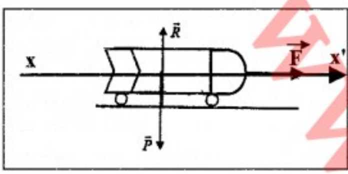
إن قوة دفع محركات طائرة من نوع بوينغ 747 هي : $8,8\ .\ 10^5\ N$. كتلة هذه الطائرة عند الإقلاع على مستوي أفقي هي $3,0\ .\ 10^5\ kg$.

1ـ ما هو التسارع عند الإقلاع ؟

2ـ إذا انطلقت الطائرة من حالة الراحة ، ما هي سرعتها بعد 10 ثوان ؟

نهمل قوى الإحتكاك المطبقة من طرف الهواء و الأرض .

الحل ـ 6



1ـ التسارع عند الإقلاع : الجملة المدروسة هي الطائرة . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الطائرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الأرض على الطائرة $\vec{R}$ (شاقولية لأنه لا توجد أية قوة تعاكس تقدم الطائرة) و قوة الدفع $\vec{F}$ الأفقية المطبقة من طرف محركات الطائرة نمثل هذه القوى الثلاث في الشكل التالي :

ـ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = M\ .\ \vec{a}$ بالإسقاط على المحور Ox الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على :

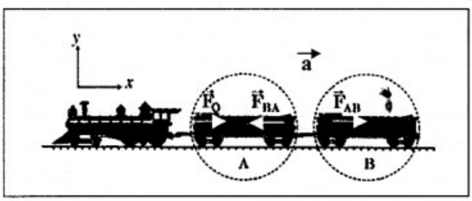
$$F = M\ .\ a \Rightarrow a = F/M = (8,8\ .\ 10^5)/(3,0\ .\ 10^5) = 2,9\ m/s^2$$

2ـ سرعتها بعد 10 ثوان : باستخدام تعريف التسارع ، العلاقة السابقة تكتب على الشكل التالي :

$dv/dt = a = F/M$. بما أن F ثابتة إذن التسارع كذلك ثابت خلال الحركة . نكامل بالنسبة للزمن فنحصل على :

$v = a\,t + v_0$. السرعة الإبتدائية معدومة عند الإنطلاق إذن : $v = a\,t = F/M\ t = 2,9\ .\ 10 = 29\ m/s$

التمرين ـ 7



عربتا قطار A و B كتلتاهما على التوالي :

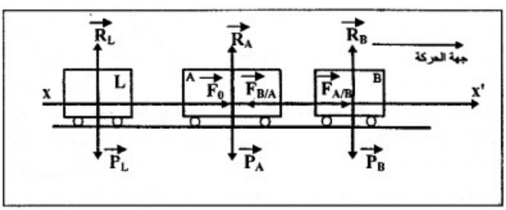
$m_A = 1,2\ .\ 10^4\ kg$ و $m_B = 8\ .\ 10^3\ kg$ تستطيعان التحرك بحرية (تهمل كل الإحتكاكات) على سكة حديدية أفقية .

تطبق (قوة دفع) قاطرة كتلتها $10^5\ kg$ على A قوة $\vec{F_0}$ ، تنتج تسارعا قيمته $2\ m/s^2$.

1ـ اوجد F_0 والقوة المطبقة على A من طرف B .

2ـ ما هي قوة الدفع الأفقية المطبقة على القاطرة من طرف المحرك ؟

الحل ـ 7



1ـ إيجاد F_0 والقوة المطبقة على A من طرف B :

مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي .

القوى الخارجية المطبقة على العربة A هي : قوة الثقل $\vec{P}_A$ ، رد فعل الأرض على العربة A $\vec{R}_A$ (شاقولية لأنه لا توجد أية قوة تعاكس تقدم العربة A) و قوة الجر $\vec{F}_0$ الأفقية المطبقة من طرف القاطرة و القوة $\vec{F}_{B/A}$ المطبقة على A من طرف B . نمثل هذه القوى الأربع في الشكل التالي :

ـ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_0 + \vec{F}_{B/A} = m_A\ .\ \vec{a}_x$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على : $F_0 - F_{B/A} = m_A\ .\ a_x$ (1)

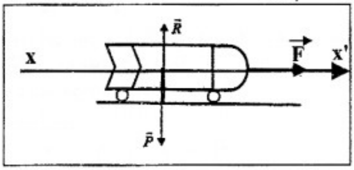
ـ القوى الخارجية المطبقة على العربة B هي : قوة الثقل $\vec{P}_B$ ، رد فعل الأرض على الطائرة $\vec{R}_B$ (شاقولية لأنه لا توجد أية قوة تعاكس تقدم العربة B) و قوة الدفع $\vec{F}_{A/B}$ الأفقية المطبقة من طرف B .

ــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{A/B} = m_B . \vec{a}_x$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على : $F_{A/B} = m_B . a_x \quad (2)$

ــ من المعادلة (2) ، نستنتج أن $F_{A/B} = m_B . a_x = 8 . 10^3 . 2 = 1,6 . 10^4 \text{ N}$

بما أن $F_{A/B} = F_{B/A}$ حسب مبدأ الأفعال المتبادلة (القانون الثالث لنيوتن) تصبح المعادلة (1) :

$$F_0 - 1,6 . 10^4 = 1,2 . 10^4 . 2 \Rightarrow F_0 = 4,0 . 10^4 \text{ N}$$



2ــ قوة الدفع الأفقية المطبقة على القاطرة من طرف المحرك : القوى الخارجية المطبقة على الجملة المؤلفة من القاطرة و العربتين هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الأرض على الجملة $\vec{R}$ (شاقولية لأنه لا توجد أية قوة تعاكس تقدم الجملة) و قوة الدفع $\vec{F}$ الأفقية المطبقة على القاطرة من طرف المحرك و التي نعتبرها مطبقة على الجملة . نمثل هذه القوى الثلاث في الشكل التالي :

ــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = (m_A + m_B + m) . \vec{a}_x$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على : $F = (m_A + m_B + m) . a_x = 2,4 . 10^5 \text{ N}$

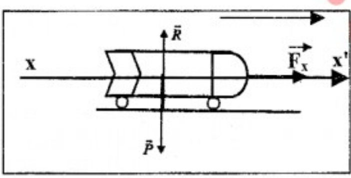
التمرين ــ 8

حدد القوة الثابتة الأفقية التي تؤثر على طائرة F₄ Fantome كتلتها 12 500 kg في كلتي الحالتين التاليتين :

1ــ تسرع الطائرة انطلاقا من الراحة حتى تبلغ سرعة 250 km/h خلال 2,2s ؛

2ــ تكبح فتتغير سرعتها من 180 km/h إلى الصفر على مسافة 40 m بفضل شباك . (تتم حركة الطائرة في الاتجاه الموجب لمحور الفواصل (x)) .

الحـل ــ 8



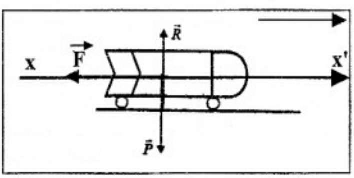
1ــ تحديد القوة الثابتة التي تؤثر على الطائرة في الحالة (1) :

مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الطائرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الأرض على الطائرة $\vec{R}$ (شاقولية لأنه لا توجد أية قوة تعاكس تقدم الطائرة) و قوة الدفع $\vec{F}_x$ الأفقية المطبقة من طرف محركات الطائرة . نمثل هذه القوى الثلاث في الشكل التالي :

ــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_x = M . \vec{a}$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على : $F_x = M . a \Rightarrow a = F_x / M$

ــ سرعتها بعد 2,2 s هي 69,5 m/s : باستخدام تعريف التسارع ، العلاقة السابقة تكتب على الشكل التالي : $dv/dt = a = F_x / M$. بما أن F_x ثابتة إذن التسارع كذلك ثابت خلال الحركة . نكامل بالنسبة للزمن فنحصل على : $v = a\, t + v_0$. السرعة الإبتدائية معدومة عند الإنطلاق إذن : $v = a\, t \Rightarrow a = v / t = 69,5 / 2,2 = 31,56 \text{ m/s}^2$

و منه نحصل على القوة الثابتة التي تؤثر على الطائرة في الحالة (1) : $F_x = M . a = 12\,500 . 31,56 = 3,94 . 10^5 \text{ N}$



2ــ تحديد القوة الثابتة التي تؤثر على الطائرة في الحالة (2) :

مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الطائرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الأرض على الطائرة $\vec{R}$ (شاقولية لأنه لا توجد أية قوة تعاكس تقدم الطائرة) و قوة رد الفعل $\vec{F}$ الأفقية المطبقة من طرف الشباك . نمثل هذه القوى الثلاث في الشكل التالي :

ــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = M . \vec{a}$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على :

$$- F = M . a \Rightarrow a = - F / M$$

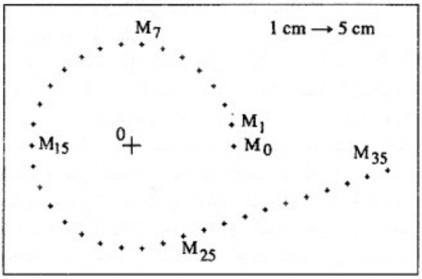
ــ نعبر عن السرعة وفق المحور x'x : باستخدام تعريف التسارع : $dv/dt = a = - F/M$. بما أن F ثابتة إذن التسارع كذلك ثابت خلال الحركة . نكامل بالنسبة للزمن فنحصل على : $v = a\, t + k$. السرعة الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v_0 = 50 \text{ m/s}$ إذن : $k = v_0 = 50 \text{ m/s}$ و منه : $v = a\, t + k = - F/m\, t + v_0$ و منه : $v = - F/m\, t + v_0 \quad (1)$.

لتحديد فاصلة الرصاصة ، نكامل من جديد عبارة السرعة فنحصل على :

$x = - 1/2\, F/m . t^2 + v_0\, t + x_0 \quad (2)$. من العبارة (1) نستخرج عبارة الزمن t و نعوضها في العبارة (2) فنحصل على علاقة السرعة بالمسافة المقطوعة d : $v^2 - v_0^2 = 2\, a\, (x - x_0)$ حيث $d = x - x_0$ هي المسافة المقطوعة بين السرعتين .

و منه : $a = (v^2 - v_0^2) / 2\, d = - 31,2 \text{ m/s}^2$ و مما سبق : $- F = M . a \Rightarrow F = - M\, a = 3,9 . 10^5 \text{ N}$

التمرين ــ 9



يمثل الشكل المرفق الأوضاع المتتالية لحركة مركز عطالة جملة مادية تم تسجيلها عن طريق التصوير المتعاقب حيث تعطى المدة الزمنية الفاصلة بين صورتين متتاليتين $\tau = 40$ ms .

1ــ صف الحركة .

2ــ انقل على ورق شفاف الوثيقة السابقة ثم مثل أشعة السرعة في النقاط الموضحة في الشكل .

3ــ استنتج قيمة التسارع المركزي .

الحـل ــ 9

1ــ وصف الحركة : من النقطة M_0 إلى النقطة M_{25} : المسار دائري و المسافات (الأقواس) المتتالية المقطوعة في أزمنة متساوية نلاحظها على الشكل أنها متساوية أي أن السرعة ثابتة و منه فالحركة دائرية منتظمة .

ــ من النقطة M_{25} إلى النقطة M_{35} : المسار مستقيم و المسافات (قطع مستقيمة) المتتالية المقطوعة في أزمنة متساوية نلاحظها على الشكل أنها متساوية أي أن السرعة ثابتة و منه فالحركة مستقيمة منتظمة .

2ــ تمثيل أشعة السرعة اللحظية في المواضع : M_0 ، M_1 ، M_7 ، M_{15} ، M_{25} :

للسرعة اللحظية نفس القيمة في M_0 ، M_1 ، M_7 ، M_{15} ، M_{25} لأن الحركة دائرية منتظمة .

لحساب السرعة اللحظية V_7 مثلا في الموضع M_7 نتبع الخطوات التالية :

1) نقيس طول الوتر M_6M_8 على الوثيقة فنجده : $M_6M_8 = 0{,}8$ cm و باستعمال سلم المسافات : 1 cm → 5 cm .

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 5\text{ cm} \\ 0{,}8\text{ cm} \rightarrow x\text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow x = (5 \times 0{,}8)/1 = 4\text{ cm} .$$

نجد 0,04 m في الحقيقة .

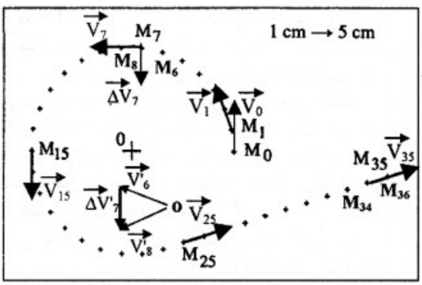
2) نحسب السرعة V_7 في الموضع M_7 : $V_7 = M_6M_8 / 2\tau = 0{,}04 / 0{,}08 = 5 . 10^{-1}$ m/s

إذن في كل المواضع تكون قيمة السرعة هي $5 . 10^{-1}$ m/s .

3) تمثيل أشعة السرعة :

ــ نرسم شعاع السرعة $\vec{V_7}$ باختيار السلم التالي : 1 cm → 0,5 m/s.

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 0{,}5\text{ m/s} \\ x\text{ cm} \rightarrow 0{,}5\text{ m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow x = (0{,}5 \times 1)/0{,}5 = 1\text{ cm} .$$



إذن : طول $\vec{V_7}$ على الرسم هو : 1 cm . إذن في الموضع M_7 نرسم سهم طوله 1 cm مماسي للمسار عند M_7.

بنفس الطريقة يمكن الحصول على أشعة السرعة في كل المواضع لأنها كلها متساوية .

2ــ تمثيل أشعة السرعة اللحظية في المواضع : M_{25} ، M_{35} :

للسرعة اللحظية نفس القيمة في M_{25} و M_{35} لأن الحركة مستقيمة منتظمة . لحساب السرعة اللحظية V_{35} مثلا في الموضع M_{35} نتبع الخطوات التالية :

1) نقيس طول الوتر $M_{34}M_{36}$ على الوثيقة : $M_{34}M_{36} = 0{,}8$ cm

و باستعمال سلم المسافات : 1 cm → 5 cm .

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 5\text{ cm} \\ 0{,}8\text{ cm} \rightarrow x\text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow x = (5 \times 0{,}8)/1 = 4\text{ cm} .$$

نجد 0,04 m في الحقيقة .

2) نحسب السرعة V_{35} في الموضع M_{35} : $V_{35} = M_{34}M_{36} / 2\tau = 0{,}04 / 0{,}08 = 5 . 10^{-1}$ m/s

إذن في كل المواضع تكون قيمة السرعة هي $5 . 10^{-1}$ m/s .

3) تمثيل أشعة السرعة :

ــ نرسم شعاع السرعة $\vec{V_{35}}$ باختيار السلم التالي : 1 cm → 0,5 m/s.

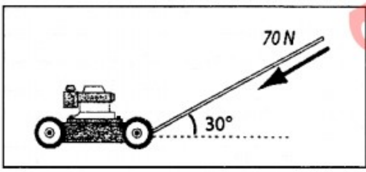
$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 0{,}5\text{ m/s} \\ x\text{ cm} \rightarrow 0{,}5\text{ m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow x = (0{,}5 \times 1)/0{,}5 = 1\text{ cm} .$$

إذن : طول $\vec{V}_{35}$ على الرسم هو : 1 cm . إذن في الموضع M_{35} نرسم سهم طوله 1 cm مماسي للمسار عند M_{35}.
بنفس الطريقة يمكن الحصول على أشعة السرعة في كل المواضع لأنها كلها متساوية .
من M_{25} إلى M_{36} يكون المسار مستقيم و منه لحساب السرعة اللحظية نتبع نفس طريقة حساب شعاع السرعة في الحركات المستقيمة : يكون المماس محمولا على المسار .
3ـــ استنتاج قيمة التسارع المركزي : شعاع التسارع المتوسط هي نسبة شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta v}$ على المدة الزمنية Δt :
ـــ لتمثيل شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta V}$ في الموضع M_7 نتبع الخطوات التالية :
1)ـــ نختار نقطة كيفية o خارج التسجيل .
2)ـــ انطلاقا من هذه النقطة o نرسم شعاعا $\vec{V'}_8$ مسايرا للشعاع $\vec{V}_8$
3)ـــ انطلاقا من هذه النقطة o نرسم شعاعا $\vec{V'}_6$ مسايرا للشعاع $\vec{V}_6$
4)ـــ نرسم الشعاع $\vec{\Delta V'}_7$ ، بحيث تكون بدايته في نهاية $\vec{V'}_6$ و نهايته في نهاية $\vec{V'}_8$ بهذا الترتيب ، $\vec{\Delta V'}_7 = \vec{V'}_8 - \vec{V'}_6$
ـــ بما أن $\vec{V'}_6$ و $\vec{V'}_8$ يسايران $\vec{V}_6$ و $\vec{V}_8$ على الترتيب ، فإن $\vec{\Delta V'}_7$ يساير $\vec{\Delta V}_7$.
ـــ نرسم شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta V'}_7$ باتباع الطريقة المذكورة سابقا ثم نقيس طوله بالمسطرة على الرسم فنجد 0,8 cm .
ـــ نرسم شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta V}_7$ مسايرا لـــ $\vec{\Delta V'}_7$ و باعتماد سلم السرعات السابق : $1\text{ cm} \rightarrow 0{,}5\text{ m/s}$

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ cm} \rightarrow 0{,}5\text{ m/s} \\ 0{,}8\text{ cm} \rightarrow \Delta V_7\text{ m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta V_7 = (0{,}5 \times 0{,}8)/1 = 0{,}4\text{ m/s}.$$

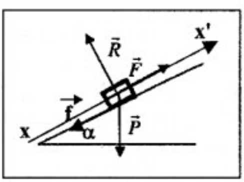
نستنتج قيمة ΔV_7 : $\Delta V_7 = 0{,}4$ m/s .
ـــ بنفس الطريقة يمكن الحصول على أشعة تغير السرعة في المواضع من M_0 إلى M_{25} فنجدها كلها متساوية و جهتها نحو مركز الدائرة . نستنتج عن شعاع تغير السرعة خلال الحركة أنه ثابت في القيمة و منحاه متغير أي يتجه نحو مركز الدائرة.
ـــ أشعة تغير السرعة في المواضع من M_{25} إلى M_{35} فنجدها كلها متساوية و معدومة لأن الحركة منتظمة .
و أخيرا نستنتج قيمة التسارع المركزي من M_0 ، M_1 ، M_7 ، M_{15} ، M_{25} : $a_n = \Delta V_7/2\tau = 0{,}4/0{,}08 = 5\text{ m/s}^2$.
و أخيرا نستنتج قيمة التسارع المركزي من M_{25} إلى M_{35} : $a = \Delta V/2\tau = 0$.

التمرين ـــ 10



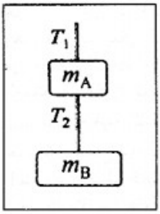
يقوم رجل على طريق أفقية بدفع جرارة الحشيش كتلتها 20 kg بقوة 70 N حاملها مواز للمقبض المائل بزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للأفق .
1ـــ إذا انتقل الرجل بسرعة ثابتة ، ما هي شدة قوة الإحتكاك المطبقة من طرف الأفق ؟
2ـــ ما هي قيمة القوة الموازية للمقبض والقادرة على إنتاج تسارع 1m/s^2 مع اعتبار أن قوة الإحتكاك المطبقة هي نفسها ؟

الحـل ـــ 10



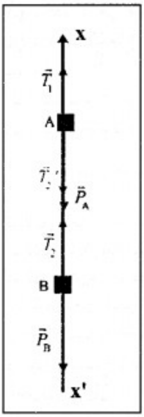
1ـــ شدة قوة الإحتكاك المطبقة من طرف الأفق : إذا انتقل الرجل بسرعة ثابتة فهذا معناه أن الجرارة كذلك تنتقل بسرعة ثابتة .
ـــ تحديد القوى المطبقة على الجسم الصلب ثم تمثيلها على الشكل : القوى المطبقة على الجسم الصلب هي قوة الثقل $\vec{P}$ و قوة رد المستوي المائل الناظمية $\vec{R}$ و قوة الإحتكاك $\vec{f}$ و قوة الدفع للرجل $\vec{F}$: مميزات قوة الثقل :
ـــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأسفل ، القيمة : $P = m\,g$.
مميزات قوة رد المستوي المائل $\vec{R}$:
ـــ المنحى : عمودي على المستوي ، الجهة : نحو الأعلى ، القيمة : R. مميزات قوة الدفع للرجل $\vec{F}$:
ـــ المنحى : مواز للمقبض المائل بزاوية 30° بالنسبة للأفق ، الجهة : جهة الحركة ، القيمة : F . مميزات قوة الإحتكاك $\vec{f}$:
ـــ المنحى : موازي للمستوي ، الجهة : جهة الحركة ، القيمة : f .
مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . نمثل هذه القوى الأربع في الشكل التالي :
ـــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = M\,.\,\vec{a}$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على : $F\cos\alpha - f = 0 \Rightarrow f = F\cos\alpha = 70\,.\,\cos 30 = 60{,}6\text{ N}$ التسارع معدوم لأن السرعة ثابتة .
2ـــ قيمة القوة الموازية للمقبض والقادرة على إنتاج تسارع 1m/s^2 :
ـــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F}_x = M\,.\,\vec{a}$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على : $F\cos\alpha - f = M\,.\,a \Rightarrow F = (M\,.\,a + f)/\cos\alpha = 93{,}7\text{ N}$

التمرين ـ 11



جسمان كتلتاهما $m_A = 0,2\ kg$ و $m_B = 0,3\ kg$ معلقان الواحد أسفل الآخر . حدد توتري الحبلين (المعتبرين بدون كتل) ، في الحالات التالية :
1ـ الجسمان في راحة ؛ نفرض أن شدة حقل الجاذبية ثابتة و قيمتها $9,8\ m/s^2$.
2ـ الجسمان يصعدان بـ $5\ m/s$ ؛
3ـ الجسمان يتسارعان إلى الأعلى بـ $2\ m/s^2$ ؛
4ـ الجسمان يتسارعان إلى الأسفل بـ $2\ m/s^2$ ؛
5ـ إذا كان التوتر الأقصى الممكن هو $10\ N$ ، ما هو التسارع الأقصى الممكن نحو الأعلى ؟

الحل ـ 11



1ـ الجسمان في راحة : نرمز لتوتري الحبلين بـ T_1 و T_2 . نطبق القانون الأول لنيوتن لتحديد التوترين .
حساب T_1 : نختار الجملة المدروسة هي $(A+B)$. مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الحبل أي التوتر $\vec{T_1}$. نمثل هاتين القوتين في الشكل التالي :
حسب القانون الأول لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T_1} = \vec{0}$ حيث : $P = P_A + P_B$
و منه : $\vec{T_1} + \vec{P_A} + \vec{P_B} = \vec{0}$ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $x\,x'$ نجد : $T_1 - P_A - P_B = 0$
و منه : $T_1 = P_A + P_B = (m_A + m_B)\ g = 0,5\ .\ 9,8 = 4,9\ N$

حساب T_2 : الجسمان في راحة

نختار الجملة المدروسة هي (B) . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي .
القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P_B}$ ، رد فعل الحبل أي التوتر $\vec{T_2}$.
نمثل هاتين القوتين في الشكل التالي :
حسب القانون الأول لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P_B} + \vec{T_2} = \vec{0}$ و منه : $\vec{T_2} + \vec{P_B} = \vec{0}$ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $x\,x'$ نجد : $T_2 - P_B = 0$ و منه : $T_2 = P_B = (m_B)\ g = 0,3\ .\ 9,8 = 2,94\ N$

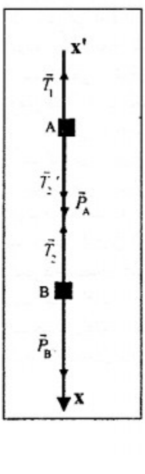
2ـ الجسمان يصعدان بسرعة قدرها $5\ m/s$: السرعة ثابتة أي $a = dv/dt = 0$ إذن نطبق القانون الأول لنيوتن لتحديد التوترين و منه نحصل على نفس النتائج السابقة .

3ـ الجسمان يتسارعان إلى الأعلى بـ $2\ m/s^2$: حساب T_1 :

حساب T_1 : نختار الجملة المدروسة هي $(A+B)$. مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الحبل أي التوتر $\vec{T_1}$. نمثل هاتين القوتين في الشكل التالي :
حسب القانون الأول لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T_1} = (m_A + m_B)\,\vec{a}$ حيث : $P = P_A + P_B$ و منه :
$\vec{T_1} + \vec{P_A} + \vec{P_B} = (m_A + m_B)\,\vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $x\,x'$ الموجه اختياريا نحو الأعلى نجد :
$T_1 - P_A - P_B = (m_A + m_B)\ a$ و منه : $T_1 = P_A + P_B + (\ m_A + m_B\ )\ a\ = 4,9 + 0,5\ \ .\ 2\ = 5,9\ N$

حساب T_2 :

نختار الجملة المدروسة هي (B) . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P_B}$ ، رد فعل الحبل أي التوتر $\vec{T_2}$. نمثل هاتين القوتين في الشكل التالي :
حسب القانون الأول لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P_B} + \vec{T_2} = m_B\,\vec{a}$ و منه : $\vec{T_2} + \vec{P_B} = m_B\,\vec{a}$
بإسقاط هذه العلاقة على المحور $x\,x'$ الموجه نحو الأعلى نجد : $T_2 - P_B = m_B\ a$
و منه : $T_2 = P_B + m_B\ g = 2,94 +\ 0,3\ .\ 2 = 3,54\ N$



4ـ الجسمان يتسارعان إلى الأسفل بـ $2\ m/s^2$:

حساب T_1 : نختار الجملة المدروسة هي $(A+B)$. مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الحبل أي التوتر $\vec{T_1}$.
نمثل هاتين القوتين في الشكل التالي :
حسب القانون الأول لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T_1} = (m_A + m_B)\,\vec{a}$ حيث : $P = P_A + P_B$ و منه :
$\vec{T_1} + \vec{P_A} + \vec{P_B} = (m_A + m_B)\,\vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $x\,x'$ الموجه اختياريا نحو الأسفل نجد : $P_A + P_B - T_1 = (m_A + m_B)\ a$ و منه :
$T_1 = P_A + P_B - (\ m_A + m_B\ )\ a\ = 4,9 - 0,5\ \ .\ 2\ = 3,9\ N$

حساب T_2 :

نختار الجملة المدروسة هي (B) . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي .
القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P_B}$ ، رد فعل الحبل أي التوتر $\vec{T_2}$. نمثل هاتين القوتين في الشكل التالي :

حسب القانون الأول لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P}_B + \vec{T}_2 = m_B \vec{a}$ و منه : $\vec{T}_2 + \vec{P}_B = m_B \vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $x x'$ الموجه اختياريا نحو الأسفل نجد : $P_B - T_2 = m_B a$ و منه : $T_2 = P_B - m_B g = 2,94 - 0,3 . 2 = 2,34 N$

5ـ التسارع الأقصى الممكن نحو الأعلى :

ـ الجسمان يتسارعان إلى الأعلى بـ $a\ m/s^2$ حيث : $T_1 \le 10 N$:

حساب T_1 : نختار الجملة المدروسة هي (A+B) . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الحبل أي التوتر $\vec{T}_1$. نمثل هاتين القوتين في الشكل التالي :

حسب القانون الأول لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T}_1 = (m_A + m_B)\vec{a}$ حيث : $P = P_A + P_B$ و منه :

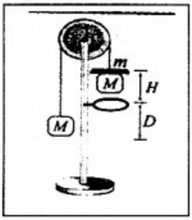
$\vec{T}_1 + \vec{P}_A + \vec{P}_B = (m_A + m_B)\vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $x x'$ الموجه اختياريا نحو الأعلى نجد :

$T_1 - P_A - P_B = (m_A + m_B) a$ و منه : $T_1 = P_A + P_B + (m_A + m_B) a$ و لدينا : $T_1 \le 10 N$

و منه : $P_A + P_B + (m_A + m_B) a \le 10$ و منه : $a \le [10 - (P_A + P_B)] / [(m_A + m_B)]$

و منه : $a \le 10,2 m/s^2$

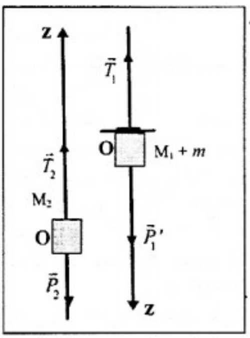
التمرين ـ 12



إن آلة أتود جهاز يسمح بالتحقق المباشر من القانون الثاني لنيوتن . نستطيع استعمالها أيضا لقياس g . يعلق جسمان متماثلان بواسطة حبل ، كتلة كل واحد منهما M ، من جهة و أخرى لبكرة . توضع صفيحة صغيرة مربعة الشكل كتلتها m على أحد الجسمين . عندما تحرر الجملة ، تتسارع على مسافة H حتى تتوقف الصفيحة بواسطة حلقة تسمح بمرور الكتلة لوحدها . تتحرك بعدئذ الجملة بسرعة ثابتة يمكن قياسها بقياس مدة السقوط على المسافة D .

ـ بين أن : $g = [(2M + m) D^2] / [2mHt^2]$ ، حيث t مدة الانتقال بالسرعة ثابتة .

الحـل ـ 12



آلة أتود (Machine d'atood)) : عبارة عن بكرة خفيفة قابلة للدوران حول محورها الأفقي . يمر على محزها خيط مهمل الكتلة و يحمل في طرفيه جسمان كتلتهما $M_1 = M_2 = M$ ، يمكن للجملة أن تتحرك عندما يختل التوازن و ذلك بإضافة صفيحة صغيرة مربعة الشكل كتلتها m على أحد الجسمين .

عندما تنزل الجملة (الجسم M_1 مع الصفيحة m) مسافة معينة H يمكن قياسها بواسطة مسطرة مدرجة ملصقة على حامل البكرة ، تصادف حاجز مثبت على المسطرة على شكل حلقة مفرغة يمر من خلالها الجسم M_1 وتبقى الصفيحة عالقة فوق الحلقة بعدها تصبح الجملة الكلية من جديد في حالة توازن حيث تتساوى الكتل على جهتي البكرة مما يسمح بالتحقق المباشر من القانون الثاني لنيوتن . يمكن إذن أن ندرس بواسطة آلة أتود طورين لحركة M_1 . يبدأ الطور الأول منذ الإنطلاق حتى الوصول إلى الحاجز بعدها يبدأ الطور الثاني أين تكون الجملة في حالة توازن . لكي نجد علاقة رياضية فيها g ندرس حركة الجملة في طورها الأول أي أثناء الإنتقال H . باعتبار أن الجملة تبدأ حركتها من السكون .

دراسة حركة الطور الأول : جهة الحركة في جهة حركة M_1 . نقسم الجملة الكلية إلى جملتين لتسهيل الدراسة و تحديد القوى : الجملة المدروسة هي $(M_1 + m)$. القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $P_1 = (M_1 + m) g$ ، قوة توتر الحبل $\vec{T}_1$ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P}'_1 + \vec{T}_1 = (M_1 + m)\vec{a}_1$

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل : $(M_1 + m) g - T_1 = (M_1 + m) a_1$ ......(1)

نطبق نظرية مركز العطالة على الجملة (M_2) :

القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $P_2 = M_2 g$ ، قوة توتر الحبل T_2 . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = M_2 \vec{a}_2$

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأعلى : $T_2 - M_2 g = M_2 a_2$ ......(2)

الجملة مترابطة و بالتالي $a_1 = a_2 = a$. البكرة مهملة الكتلة إذن $T_1 = T_2$. بجمع العلاقتين (1) و (2) نجد

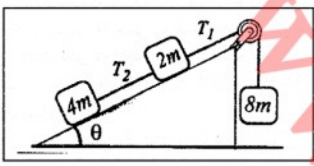
$$a = m g /(2M + m) .... (3)$$

العلاقة (3) تبين أن التسارع ثابت ، و بالتالي حركة الجملة في الطور الأول متغيرة بإنتظام .

ـ كتابة المعادلة الزمنية للحركة خلال هذا الطور : التسارع ثابت ، $a = Cte$ ، نكامل لتحديد السرعة : $a = Cte \Rightarrow v = 4 t + k$ ، نحدد قيمة الثابت k من الشروط الإبتدائية ، عند $t = 0$ ، $v_0 = 0$ إذن : $v = a t$. نكامل مرة ثانية للحصول على المعادلة الزمنية : $v = 4 t \Rightarrow x = 2 t^2 + k$ ، نحدد قيمة الثابت k من الشروط الإبتدائية ، عند $t = 0$ ، $x_0 = 0$ إذن : $x = 1/2\ a\ t^2$. لتكن v السرعة التي تصل بها الجملة $(M_1 + m)$ إلى الحلقة المفرغة ، لتحديد السرعة عند نقطة فاصلتها $x = H\ m$ نستعمل العلاقة التي تربط السرعة بالفاصلة أي باستخراج عبارة الزمن من معادلة السرعة و تعويضها في المعادلة الزمنية للحركة : $v^2 - v_0^2 = 2a(H)$ ....(4) .

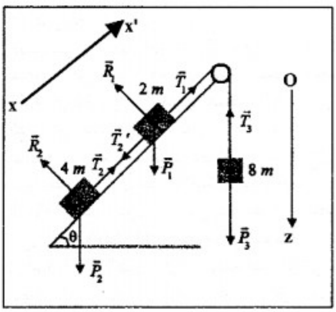
دراسة حركة الطور الثاني : جهة الحركة في جهة حركة M_1 . نقسم الجملة الكلية إلى جملتين لتسهيل الدراسة و تحديد القوى :
الجملة المدروسة هي (M_1) . القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $P_1 = M_1 g$ ، قوة توتر الحبل $\overrightarrow{T_1}$
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{T_1} = M_1 \overrightarrow{a_1}$
بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل : $(M_1) g - T_1 = (M_1) a_1$ ......(5)
نطبق نظرية مركز العطالة على الجملة (M_2) :
القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $P_2 = M_2 g$ ، قوة توتر الحبل T_2 . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} = M_2 \overrightarrow{a_2}$
بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأعلى : $T_2 - M_2 g = M_2 a_2$ ......(6)
الجملة مترابطة و بالتالي $a_1 = a_2 = a$. البكرة مهملة الكتلة إذن $T_1 = T_2$. بجمع العلاقتين (5) و (6) نجد :
$a = 0$......... (7)
العلاقة (7) تبين أن التسارع بعد الحلقة المفرغة يصبح معدوم و بالتالي حركة الجملة في الطور الثاني منتظمة .
و منه تصبح السرعة النهائية للطور الأول هي نفسها السرعة الثابتة التي تواصل بها الجملة الحركة المنتظمة خلال الطور الثاني .
ـ كتابة المعادلة الزمنية للحركة خلال هذا الطور : التسارع معدوم ، $a = 0$ و منه : $D = v\, t$ ......(8)
من العلاقتين (8) و (4) نستنتج $D^2/t^2 = 2a\,H$ ، و منه $a = D^2 / 2Ht^2$ ، و بالتعويض في العلاقة (3) نجد :
$$g = [(2M + m) D^2] / [2mHt^2]$$

التمرين ـ 13



ثلاثة أجسام ذات الكتل 4m و 2m و 8m مشدودة بعضها للبعض كما في الشكل . كتلة الحبلين مهملة (يبقى هكذا التوتر على طول نفس الحبل ثابتا و بأخذ القيمة T_1 أو T_2) .
1ـ أوجد قيمة التسارع بدلالة g و θ
2ـ $T_1 - T_2$.
3ـ احسب قيم هذه العبارات من أجل $m = 1\ kg$ و $\theta = 45°$ ، $g = 9,8\ m/s^2$. نهمل الإحتكاك.

الحـل ـ 13



1ـ قيمة التسارع : نقسم الجملة الكلية إلى جملتين لتسهيل الدراسة و تحديد القوى :
نفرض جهة الحركة هي من جهة 8 m .
الجملة المدروسة هي (8m) . القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي :
قوة الثقل $\overrightarrow{P_3} = 8m\, g$ ، قوة توتر الحبل $\overrightarrow{T_3}$ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{T_3} = (8m) \overrightarrow{a_1}$
بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل :
$(8m)\, g - T_3 = (8m)\, a_1$ ......(1)
نطبق نظرية مركز العطالة على الجملة ($4m + 2m = 6\ m$) :
القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي: قوة الثقل $\overrightarrow{P} = 6m\, g$ ،
قوة توتر الحبل $\overrightarrow{T_1}$ و قوة رد فعل المستوي $\overrightarrow{R}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{R} = 6m\, \overrightarrow{a_2}$
بإسقاط هذه العلاقة على محور 'xx موجه نحو الأعلى و موازي للمستوي المائل نحصل :
$T_1 - 6m\, g \sin\theta = 6m\, a_2$ ......(2)
الجمل مترابطة و بالتالي $a_1 = a_2 = a$. البكرة مهملة الكتلة إذن $T_1 = T_3$. بجمع العلاقتين (1) و (2) نجد :
$$\mathbf{a = (8 - 6 \sin\theta)\, g /(14) = 2,66\ m/s^2}$$
النتيجة تبين أن التسارع ثابت و موجب و بالتالي حركة الجملة متسارعة بانتظام .
2ـحساب $T_1 - T_2$:
نطبق نظرية مركز العطالة على الجملة (2m) :
القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $P_1 = 2m{\cdot}g$ ، قوة توتر الحبل $\overrightarrow{T_1}$ و قوة توتر الحبل $\overrightarrow{T_2}$ و قوة رد فعل المستوي R_1 . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{T_2} = 2m\, \overrightarrow{a}$
بإسقاط هذه العلاقة على محور 'xx موجه نحو الأعلى و موازي للمستوي المائل نحصل :
$$T_1 - 2m\, g \sin\theta - T_2 = 2m\, a \Rightarrow \mathbf{T_1 - T_2 = 2m\, (a + g \sin\theta) = 19\ N}$$

التمرين ـ 14

يدور قمر اصطناعي كتلته m حول الأرض على مدار دائري مستقر نصف قطره r . كيف تكون المقادير التالية تابعة لــ r ؟ قيمة السرعة v ، الدور T و الطاقة الحركية E_C .

الحـل ـ 14

1ـ المرجع جيو مركزي مبدؤه مركز الأرض ، محاوره الثلاث مو جهة نحو ثلاث نجوم معتبرة ثابتة و جد بعيدة . لدراسة حركة الأقمار الإصطناعية نستعمل المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي .

2ـ تبيان أن قيمة سرعة القمر ثابتة : الجملة المدروسة هي القمر . مرجع الدراسة هو المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي . بإهمال كل التأثيرات الناتجة عن النجوم الأخرى على القمر واعتبار أن القوة الوحيدة المطبقة على القمر هي قوة الجذب العام : $\vec{F} = G . M_T . m/r^2 . \vec{n} = m\, g_{(z)} \vec{n}$.

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين S_1 و S_2 (موضعي القمر عند لحظتين مختلفتين) : $1/2\, m\, v_2^2 - 1/2\, m\, v_1^2 = W_{\vec{F}}$

المسار دائري ، قوة الجذب العام دائما عمودية على الإنتقال و بالتالي عمل هذه القوة معدوم و كذا الإستطاعة و منه : $W_{\vec{F}} = 0$ و $P_{(t)} = \vec{F} . \vec{v} = 0$ و منه نستنتج رأن التغير في الطاقة الحركية معدوم و منه : $v_2 = v_1$ و منه نقول أن السرعة ثابتة و الحركة دائرية منتظمة .

ـ مميزات شعاع التسارع في حالة حركة دائرية منتظمة على مسار نصف قطره r : في حالة حركة دائرية منتظمة ، التسارع مركزي (ناظمي على المسارو موجه نحو مركز الكوكب الجاذب قيمته : $a = v^2/r$)

3ـ التعبير عن سرعة القمر : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع جيو مركزي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = G . M_T . m/r^2 . \vec{n}$ و منه : $m\, v^2/r . \vec{n} = G . M_T . m/r^2 . \vec{n}$

و منه : $v^2 = GM_T/r$ و منه : $v = \sqrt{GM_T/r}$. كلما زادت قيمة r تنقص قيمة v .

4ـ القمر جيومستقر : معنى ذلك أن القمر يبدو ثابتا بالنسبة لملاحظ ساكن موجود على سطح الأرض . مدار القمر في المستوي الأكواتوري الأرضي و القمر S يدور في نفس جهة دوران الأرض أي دوره يساوي إلى دور الأرض .

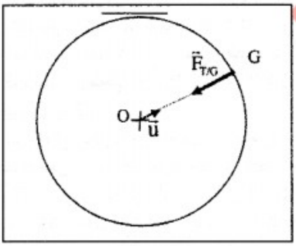
عبارة الدور : $T = 2\pi r/v = 2\pi\sqrt{r^3/GM_T}$ كلما زادت قيمة r تزداد قيمة T .

عبارة الطاقة الحركية : $E_C = 1/2\, m\, v^2 = 1/2\, m\, GM_T/r$ كلما زادت قيمة r تنقص قيمة E_C .

التمرين ـ 15

حدد دور قمر اصطناعي للاستطلاع G موجود على ارتفاع منخفض h من سطحالأرض . وذلك بإهمال مقاومة الهواء .

الحـل ـ 15



ـ القمر على مساره و القوة التي تطبقها الأرض على القمر .

ـــ العبارة الشعاعية لهذه القوة : القوة التي تطبقها الأرض على القمر هي قوة الجاذبية الأرضية : $\vec{F}_{T/G} = - G\, (M_T . m)/(h + R_T)^2\, \vec{u}$.

ـ مرجع حركة القمر : وصفت حركة القمر بالنسبة للمركز O للأرض أي بالنسبة لمرجع جيومركزي .

bـ الفرضية التي نضعها بالنسبة لهذا المرجع لكي نطبق القانون الثاني لنيوتن هي أن يكون المرجع جيومركزي هو مرجع غاليلي لأن القانون الثاني لنيوتن يطبق في مرجع غاليلي .

ـ تحديد عبارة شعاع التسارع a للقمر : الجملة المدروسة هي القمر . مرجع الدراسة هو المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي . بإهمال كل التأثيرات الناتجة عن النجوم الأخرى على القمر واعتبار أن القوة الوحيدة المطبقة على القمر هي قوة الجذب العام : $\vec{F}_{T/G} = - G\, (M_T . m)/(h + R_T)^2 . \vec{u}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع جيو مركزي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = - G . (M_T . m)/(h + R_T)^2 . \vec{u}$ و منه : $\vec{a} = - G . M_T/(h + R_T)^2 . \vec{u}$

ـ مميزات شعاع التسارع $\vec{a}$ لنقطة مادية في حركة دائرية منتظمة : في حركة دائرية منتظمة شعاع التسارع a مركزي :

ـ نقطة التطبيق : G ، المنحى : وفق OG ، الجهة : من G إلى O ، القيمة : $a = v^2/R$ حيث R نصف قطر المسار . $R = h + R_T$

ـ تبيان أن السرعة v للقمر عبارتها : $v^2 = G\, M_T/R$: حسب 3ـــaـــ ، التسارع a قيمته $a = v^2/R$ ، و حسب 2ـــcـــ : $a = G . M_T/(h + R_T)^2$ و منه : $v^2/(h + R_T) = G . M_T/(h + R_T)^2$ أي : $v^2 = G . M_T/(h + R_T)$

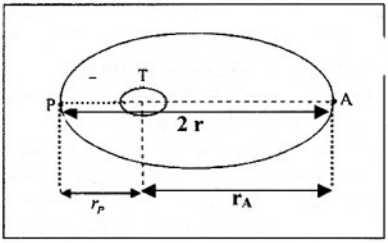
ـ تعريف دور الحركة T للقمر : هو المدة الزمنية لإنجاز دورة واحدة حول الأرض .

ـ عبارة دور الحركة T بدلالة G ، M_T و R : لإنجاز دورة واحدة حول الأرض ، يقطع القمر المحيط : $d = 2\pi R$ خلال مدة زمنية T . و منه : $T = 2\pi R/v$. بالتعويض عن عبارة السرعة السابقة نجد : $T = 2\pi\sqrt{(h + R_T)^3/ G\, M_T}$

التمرين ـ 16

أول قمر اصطناعي روسي ، Spoutnik I كتلته 83,5 kg ، أطلق في 4 أكتوبر 1957 على مدار بحيث تأخذ المسافة بين مركزه و مركز الأرض القيمتين الموافقتين لأدنى بعد وأقصاه كما يلي : $r_p = 6\,610$ km و $r_A = 7\,330$ km . أوجد دوره و قيمة سرعته في أدنى بعد من مداره . تعطى : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg² ، كتلة الأرض : $M_T = 5{,}98 . 10^{24}$ kg .

الحـل ــ 16



إيجاد دور و قيمة سرعة القمر في أدنى مدار له :

نص القانون الثالث لكيبلر يعطى كما يلي : مربعات الأزمنة (الدور) لدوران الكواكب في النظام الشمسي تتناسب مع مكعبات أنصاف المحاور الكبرى للمدارات الإهليليجية. $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM_T$ ، حيث T : (الدور) و a نصف المحور الكبير . و منه : $T^2/r^3 = 4\pi^2/GM_T$

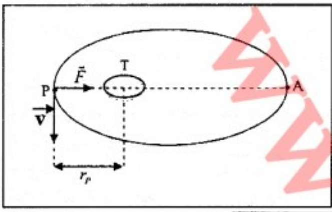
ــ حساب r للنصف المحور الأكبر لمدار الإنتقال : لدينا : $2\,r = r_p + r_A$

حيث : $r_p = 6\,610$ km و $r_A = 7\,330$ km .

و منه : $r = (r_p + r_A)/(2) = 6970$ km

gــ استنتاج الدور T للقمر على مدار الإنتقال :

$$T = 2\pi\sqrt{r^3/GM_T} = 6{,}28\sqrt{[6970\,.\,10^3)^3]/[(6{,}67\,.\,10^{-11}\,.\,5{,}98\,.\,10^{24}]} = 5786\text{ s}$$



ــ تكون السرعة أعظمية عند $r_p = 6\,610$ km و أصغرية عند $r_A = 7\,330$ km لأن السرعة تتناسب عكسا مع المسافة بين القمر و الأرض . من عبارتي التسارع : $a = G\,.\,M_T/(r_p)^2$ و $a = v^2/(r_p)$

و منه : $v^2/(r) = G\,.\,M_T/(r_p)^2$

و منه : $v = \sqrt{G\,M_T/(r_p)} = \sqrt{(6{,}67\,.\,10^{-11}\,.\,5{,}98\,.\,10^{24})/(6\,610\,.\,10^3)} = 7768$ m/s .

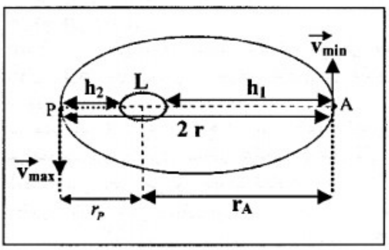
التمرين ــ 17

خلال رحلة أبولو 17 (Apollo 17) أنجز الفضائي (Eugéne Cernan) مدارا حول القمر بحيث كان الإرتفاعان الأعظمي والأصغري على الترتيب $h_1 = 125$ km و $h_2 = 100$ km . أوجد :

1ــ قيمتي السرعتين العظمى والصغرى على هذا المدار .

2ــ الدور . تعطى : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/ kg² ، كتلة القمر : $M_L = 7{,}35\,.\,10^{22}$ kg ، $R_L = 1729$ km

الحـل ــ 17



1ــ قيمتي السرعتين العظمى والصغرى على هذا المدار :

ــ التعبير حرفيا عن سرعة مركز عطالته بدلالة المقادير M_L ، R_L ، h

وG : : من عبارتي التسارع $a = G\,.\,M_L/(R_L + h)^2$

و $a = v^2/(R_L + h)$ و منه : $v^2/(R_L + h) = G\,.\,M_L/(R_L + h)^2$

و منه : $v = \sqrt{G\,M_L/(R_L + h)}$.

ــ قيمة السرعة العظمى :

$v_{max} = \sqrt{G\,M_L/(R_L + h_2)} = (6{,}67\,.\,10^{-11}\,.\,7{,}35\,.\,10^{22})/(1829\,.\,10^3) = 1637$ m/s .

ــ قيمة السرعة الصغرى :

$v_{min} = \sqrt{G\,M_L/(R_L + h_1)} = (6{,}67\,.\,10^{-11}\,.\,7{,}35\,.\,10^{22})/(1854\,.\,10^3) = 1626$ m/s .

cــ التعبير عن الدور T : $T = 2\pi(R_L + h)/v = 2\pi(R_L + h)/\sqrt{G\,M_L/(R_L + h)} \Rightarrow T^2/(R_L + h)^3 = 4\pi^2/GM_L$.

و منه نحصل على القانون الثالث لكبلر : $T^2/(a)^3 = 4\pi^2/GM_L$ حيث a نصف المحور الأكبر لمدار الإنتقال.

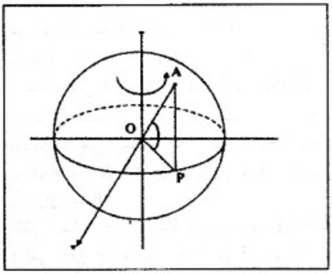
ــ حساب r للنصف المحور الأكبر لمدار الإنتقال : لدينا : $2\,a = h_1 + 2R_L + h_2$.

و منه : $a = (h_1 + 2R_L + h_2)/(2) = 1841{,}5$ km

gــ استنتاج الدور T للقمر على مدار الإنتقال : القانون الثالث لكيبلر يعطي :

$$T^2/(a)^3 = 4\pi^2/GM_L \Leftrightarrow T = \sqrt{4\pi^2/GM_L\,.\,a^3} = 7085\text{ s}$$

التمرين ــ 18



يتم إهمال حركة الأرض حول الشمس . نعتبر الأرض ذات شكل كروي نصف قطرها $R_T = 6,4 \cdot 10^6 m$. نعتبر معلما $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ساكنا بالنسبة للشمس مركزه يتطابق مع مركز الأرض .
تدور الأرض حول المحور Oz بسرعة زاوية $\omega = 7,792 \cdot 10^{-5}$ rd/s (أنظر الشكل). A نقطة على سطح الأرض .

1ــ إذا كان شعاع $\overrightarrow{OA}$ للنقطة A يصنع زاوية α مع الشعاع $\overrightarrow{OP}$ الواقع في مستوى خط الاستواء . ما هي حركة النقطة A ؟

2ــ a ــ احسب بدلالة الزاوية α قيمة السرعة v_A و قيمة التسارع a_A للنقطة A على سطح الأرض .

b ــ اعط قيمتي السرعة v_E والتسارع a_E للنقطة E الواقعة عند خط الإستواء $(\alpha = 0)$

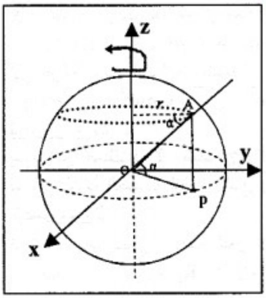
c ــ اعط قيمتي السرعة v_N والتسارع a_N للنقطة N الواقعة في القطب$(\alpha = \pi/2)$

d ــ قارن قيمتي التسارع عند خط الاستواء و قيمة التسارع الثقالي $g = 9,8 \ m/s^2$.

الحـل ــ 18

1ــ **حركة النقطة A** : النقطة A تنتمي لسطح الأرض ، أي أن $OA = R_T$. النقطة A تدور حول المحور Oz بسرعة زاوية ω_A و على مدار دائري نصف قطره r ، حيث : $\omega_A = v_A/r$ و $r = OA \cos\alpha$. تدور النقطة A بنفس السرعة الزاوية للأرض : ω_T $\omega_T = \omega_A = 2\pi/T = 6,28/86164 = 7,28 \cdot 10^{-5}$ rad/s

2ــ a ــ حساب بدلالة الزاوية α قيمة السرعة v_A و قيمة التسارع a_A للنقطة A على سطح الأرض :



$$v_A = \omega \cdot r = \omega^2 \cdot R_T \cdot \cos\alpha = \quad 466 \cos\alpha \ m/s$$

ــ تسارع النقطة A هو تسارع ناظمي لأن حركتها دائرية منتظمة :

$$a_A = a_N = v_A{}^2/r = \omega^2 r = \omega^2 R_T \cdot \cos\alpha \ = 3,4 \cos\alpha$$

b ــ اعطاء قيمتي السرعة v_E والتسارع a_E للنقطة E الواقعة عند خط الإستواء $(\alpha = 0)$:

$$v_E = \omega \cdot r = \omega^2 \cdot R_T \cdot \cos 0 = 466 \ m/s$$

ــ تسارع النقطة E هو تسارع ناظمي لأن حركتها دائرية منتظمة :

$$a_E = a_N = v_E{}^2/r = \omega^2 r = \omega^2 R_T \cdot \cos 0 \ = 3,4 \cdot 10^{-2} \ m/s^2$$

c ــ اعطاء قيمتي السرعة v_N والتسارع a_N للنقطة N الواقعة في القطب $(\alpha = \pi/2)$:

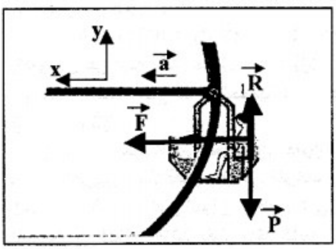
عند القطبين $r = 0$ ، و بالتالي $v_N = 0$ ، $a_N = 0$

d ــ مقارنة قيمتي التسارع عند خط الاستواء و قيمة التسارع الثقالي $g = 9,8 \ m/s^2$:

$$a_E/g = (3,4 \cdot 10^{-2})/(9,8) = 3,47 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

و منه التسارع عند خط الإستواء أقل بكثير عن التسارع الثقالي .

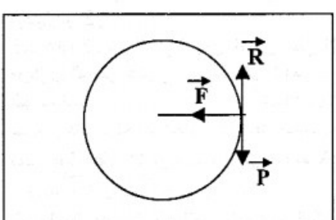
التمرين ــ 19



في حديقة للتسلية ، توجد امرأة ، كتلتها $M = 60$ kg ، بمقصورة على محيط العجلة الكبيرة ، ذات نصف قطر $r = 8$ m ؛ تدور العجلة في مستوي شاقولي بسرعة 5 tr/min . ما هي قيمة محصلة القوى التي يطبقها كل من مسند و مقعد الكرسي على المرأة ، عندما تكون في منتصف الطريق نحو الأعلى ؟
قيمة التسارع الثقالي $g = 9,8 \ m/s^2$.

الحـل ــ 19

قيمة محصلة القوى التي يطبقها كل من مسند و مقعد الكرسي على المرأة ، عندما تكون في منتصف الطريق نحو الأعلى :



تدور العجلة بسرعة ثابتة فهذا معناه أن حركة المرأة كذلك حركة دائرية منتظمة .

ــ تحديد القوى المطبقة علي المرأة ثم تمثيلها على الشكل : القوى المطبقة على المرأة هي قوة الثقل $\vec{P}$ و قوة رد فعل مقعد الكرسي $\vec{R}$ و قوة رد فعل المسند للكرسي الناظمية $\vec{F}$. مميزات قوة الثقل $\vec{P}$:

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأسفل ، القيمة : $P = M g$. مميزات قوة رد فعل الكرسي$\vec{R}$:

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأعلى ، القيمة : R . مميزات قوة رد فعل المسند للكرسي$\vec{F}$:

ــ المنحى : أفقي ، الجهة : نحو مركز العجلة ، القيمة : F .

مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . نمثل هذه القوى الثلاث في الشكل التالي :

ـــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = M . \vec{a}$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا نحو مركز العجلة

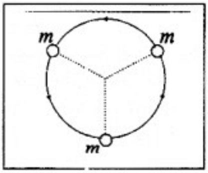
نحصل على : $F = M . a = M v^2/r = M \omega^2 r = M (2\pi N)^2 r = 60 . 4 . 3,14^2 . (5/60)^2 . 8 = 133$ N

حيث أن التسارع ناظمي لأن الحركة دائرية منتظمة و $\omega = 2\pi N$ و $N = 5/60$ tr/s .

بالإسقاط على المحور y'y الموجه إيجابا نحو الأعلى نحصل على : $R = P = M . g = 60 . 9,8 = 588$ N

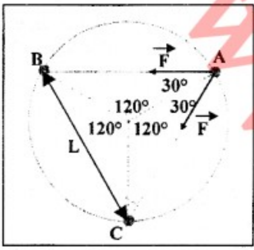
ـــ قيمة محصلة القوى N التي يطبقها كل من مسند و مقعد الكرسي على المرأة : $N = \sqrt{F^2 + R^2} = 602,8$ N

التمرين ــ 20



لتكن الحالة غير المستقرة التي تصنعها ثلاثة نجوم واقعة على أبعاد متساوية ، كتلها m متساوية ، والتي تدور في مسار دائري نصف قطره r حول مركز كتل . بين أن قيمة السرعة الزاوية للحركة معطاة بـــ : $\omega^2 = \sqrt{3}/3 \; Gm/r^3$

الحــل ــ 20



المسافة بين كتلتين هي : $L = 2r \cos 30° = 2r \sqrt{3}/2 = r\sqrt{3}$

نطبق قانون الجذب العام بين نجمين : $F = Gm^2/L^2 = (Gm^2)/(r^2 . 3) = Gm^2/ 3 r^2$

ـــ الجملة المدروسة هي النجم A . مرجع الدراسة هو المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي .

قيمة محصلة القوى التي يطبقها كل نجم على النجم A هي :

ـــ تحديد القوى المطبقة على النجم A ثم تمثيلها على الشكل : القوى المطبقة على النجم A هي قوة الجذب F الناتجة عن النجم B و قوة الجذب F الناتجة عن النجم C

ـــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F} + \vec{F} = m . \vec{a}$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا نحو مركز الكتل نحصل على :

$$2 F \cos \alpha = m . a = m v^2/r = m \omega^2 r$$

لأن حركة النجم A دائرية منتظمة . و بالتعويض عن قيمة F نحصل على : $= m \omega^2 r$

و منه : $\omega^2 = \sqrt{3}/3 \; Gm/r^3$

التمرين ــ 21

يدور قمر اصطناعي ذو الكتلة 10^4 kg حول القمر في مدار دائري يبعد بـــ 100 km من سطح القمر . دوره هو 118 min .
ما هي الكتلة الحجمية للقمر (الذي يعتبر على أنه كرة متجانسة) ؟ كتلة القمر : M_L ، نصف قطره : $R_L = 1729$ km

الحــل ــ 21

الكتلة الحجمية للقمر : حجم القمر : $V_L = 4/3 \pi R_L^3$ و الكتلة الحجمية له : $\rho = M_L/V_L$

و منه : : $\rho = M_L/V_L = M_L/(4/3 \pi R_L^3) = 3/4 \; M_L/ (\pi R_L^3) \Rightarrow M_L = 4/3 \; (\pi R_L^3) . \rho$

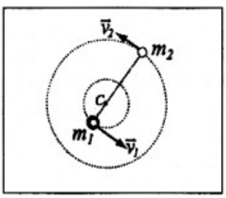
ـــ التعبير عن الدور T :

$$T = 2\pi(R_L + h)/v = 2\pi(R_L + h) /\sqrt{G M_L /(R_L + h)} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2(R_L + h)^3 / G M_L .$$

بالتعويض عن قيمة M_L نحصل على : $T^2 = [4\pi^2(R_L + h)^3]/ [G (4/3 \; (\pi R_L^3) . \rho)]$

و منه : نحصل على الكتلة الحجمية : $\rho = [3\pi(R_L + h)^3]/ [G R_L^3 . T^2] = 3335$ kg/m^3

التمرين ــ 22



تتكون جملة مسماة ثنائي النجوم من نجمين كتلتاهما على الترتيب m_A و m_B موجودتان في مدارين دائريين نصفا قطريهما على الترتيب r_1 و r_2 تدوران كل واحدة حول مركز كتلتها .

1ـــ اكتب القانون الثاني لنيوتن المطبق على كل نجمة .

2ـــ بين أن القانون الثالث لكبلر يأخذ الشكل : $T^2 = [4\pi^2(r_1 + r_2)^3] / [G(m_A + m_B)]$

3ـــ هل تستطيع الملاحظات أن تعطي معلومات عن الكتل ؟

الحــل ــ 22

1ـــ كتابة القانون الثاني لنيوتن المطبق على كل نجمة A و B : الجملة المدروسة هي النجمة . مرجع الدراسة هو المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي . بإهمال كل التأثيرات الناتجة عن النجوم الأخرى واعتبار أن القوة الوحيدة المطبقة على النجمة هي قوة الجذب العام : $F = G . m_A . m_B/r^2$

ـــ نص قانون الجذب العام : إذا وجد جسمين نقطيين كتلتيهما على الترتيب m_A و m_B على بعد r من بعضهما فإن كل واحد منهما يؤثر على الآخر بقوة . يؤثر الجسم A على الجسم B بقوة $\vec{F}_{A\to B}$ و هذا الأخير يرد عليه بقوة $\vec{F}_{B\to A}$ بحيث : $-\vec{F}_{A\to B} = \vec{F}_{B\to A}$ حيث : $\vec{F}_{A\to B} = - G . m_A m_B / r^2 . \vec{u}_{AB}$.

1ـــ بإهمال تأثيرات الكواكب الأخرى و التاثير الثقالي يكون كل نجم خاضعا لقوة : $-\vec{F}_{A\to B} = \vec{F}_{B\to A}$

$$\vec{F}_{B\to A} = m_A\vec{a}_n \quad , \quad \vec{F}_{A\to B} = m_B \, \vec{a}_n$$

2ـ تبيان أن القانون الثالث لكبلر يأخذ الشكل : $T^2 = [4\pi^2(r_1 + r_2)^3] / [G(m_A + m_B)]$:
النجمان يدوران حول مركز كتلتيهما . نحدد أولا مركز الكتلة ، و المسمى كذلك مركز الثقل ، و المكافئ في الرياضيات لمركز الأبعاد المتناسبة . يوجد مركز الكتلة على القطعة المستقيمة AB الواصلة بين مركز النجمين .
نفرض أن مركز الكتلة يبعد عن النقطة A بالمسافة x : $m_A x = m_B (r_1 + r_2 - x)$ (قانون مركز الكتلة)
و منه : $x = m_B . (r_1 + r_2) / (m_A + m_B)$
قوة التجاذب بين النجمين هي : $F = G . m_A m_B / (r_1 + r_2)^2$
بالنسبة للنجم A :

$$F = m_A a_n \Rightarrow G . m_A m_B / (r_1 + r_2)^2 = m_A v_1^2/x = [m_A v_1^2] / [m_B . (r_1 + r_2) / (m_A + m_B)]$$

و منه : $G . m_A m_B / (r_1 + r_2)^2 = [m_A v_1^2] / [m_B . (r_1 + r_2) / (m_A + m_B)]$ ......(1)
من جهة أخرى لدينا $v_1^2 = \omega^2 x^2 = 4\pi^2/T^2 . [m_B . (r_1 + r_2) / (m_A + m_B)]^2$
بتعويض عبارة v_1^2 في العلاقة (1) : $T^2 = [4\pi^2(r_1 + r_2)^3] / [G(m_A + m_B)]$
3ـ يمكن بواسطة الملاحظات و القياسات الفلكية أن نقيس الدور T ، r_1 و r_2 و بالتالي نستنتج مجموع كتلتي النجمين .

$$T^2/(r_1 + r_2)^3 = 4\pi^2/ G(m_A + m_B)$$

التمرين ـ 23

لكوكب زحل عدة أقمار طبيعية ، بعضها صغير جدا ، اكتشف حديثا في مهمات فضائية أو عن طريق ملاحظات أرضية . يتواجد القمر أنسيلاد (Encelade) على مدار دائري نصف قطره 238 020 km بينما القمر ديوني (Dioné) يتواجد على مدار دائري نصف قطره 377 400 km .
بين أن هذين القمرين في تجاوب 1 : 2 أي أن إذا أنجز أحدهما دورة كاملة حول زحل ، ينجز الثاني دورتين .

الحل ـ 23

نطبق قانون كبلر على القمرين : على القمر Encelade : $T_1^2/(r_E)^3 = 4\pi^2/GM_S$ و على القمر Dioné : $T_2^2/(r_D)^3 = 4\pi^2/GM_S$ و منه : $T_1^2/(r_E)^3 = T_2^2/(r_D)^3$ و منه : $T_1^2/ T_2^2 = (r_E)^3/(r_D)^3 = 0,25$
و منه : $T_1/ T_2 = 0,5$ و منه : $T_2 = 2 T_1 = 0,5$ أي أن إذا أنجز Dioné دورة كاملة ، ينجز Encelade دورتين .

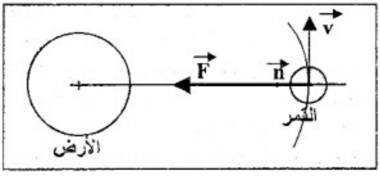
التمرين ـ 24

نستعمل بعض خواص الأقمار الإصطناعية للأرض قصد إيجاد قيمة تقريبية لكتلة الأرض . لهذا نفرض أن هذه الأقمار في حركة دائرية تحت تأثير قوة الجاذبية للأرض فقط .
1ـ بين أن حركة القمر الإصطناعي دائرية منتظمة .
2ـ نرمز بـ H لإرتفاع القمر الاصطناعي و R لنصف قطر الأرض و G ثابت التجاذب الكوني وT دور القمر الإصطناعي و M كتلة الأرض . بين أن $(R + H)^3/T^2 = Cte$ ، ثم أوجد قيمة ثابت التناسب بدلالة M و G .
3ـ الجدول التالي يعطي ارتفاعات وأدوار بعض الأقمار الاصطناعية للأرض :

القمر الاصطناعي	ميتيوسات	مركبة مير	كوسموس
T	23h 56 min	1h 35 min	11h 14 min
H	35 800 km	500 km	19 100 km

يتميز القمر الإصطناعي ميتيوسات بخصائص خاصة :
aـ ما هي هذه الخصائص ؟
bـ كيف يسمى هذا النوع من الأقمار الاصطناعي ؟
cـ ماذا يمثل الدور 23 h 56 min ؟
dـ لماذا هذا الدور لا يساوي 24 h ؟
4ـ تأكد من الجدول أن $(R + H)^3/T^2 = Cte$
5ـ استنتج قيمة تقريبية لكتلة الأرض M . المعطيات : $R_T = 6\ 400$ km ، $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI

الحل ـ 24



1ـ تبيان أن حركة القمر الإصطناعي دائرية منتظمة :
ـ المرجع جيو مركزي مبدؤه مركز الأرض ، محاوره الثلاث مو جهة نحو ثلاث نجوم معتبرة ثابتة و جد بعيدة . لدراسة حركة الأقمار الإصطناعية نستعمل المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي .
ـ تبيان أن قيمة سرعة القمر ثابتة : الجملة المدروسة هي القمر .
مرجع الدراسة هو المرجع جيو مركزي المعتبر غاليلي . بإهمال كل التأثيرات الناتجة عن النجوم الأخرى على القمر واعتبار أن القوة الوحيدة

المطبقة على القمر هي قوة الجذب العام : $\vec{F} = G . M_T . m/r^2 . \vec{n} = m\, g_{(z)} \vec{n}$.

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين S_1 و S_2 (موضعي القمر عند لحظتين مختلفتين) : $1/2\, m\, v_2^2 - 1/2\, m\, v_1^2 = W_{(\vec{F})}$

المسار دائري ، قوة الجذب العام دائما عمودية على الإنتقال و بالتالي عمل هذه القوة معدوم و كذا الإستطاعة و منه :

$W_{(\vec{F})} = 0$ و $P_{(t)} = \vec{F} . \vec{v} = 0$ و منه نستنتج رأن التغير في الطاقة الحركية معدوم و منه : $v_2 = v_1$ و منه نقول أن السرعة ثابتة و الحركة دائرية منتظمة .

2ــ تبيان أن $(R + H)^3/T^2 = Cte$ ثم إيجاد قيمة ثابت التناسب بدلالة M و G :

نعتبر مرجع الدراسة Geo-centrique ، المعتبر غاليلي . القوة الوحيدة المطبقة على القمرالإصطناعي هي قوة الجذب $\vec{F}$.

بتطبيق القانون الثاني على القمر الإصطناعي نحصل على : $m\vec{a} = \vec{F} = - G\, M_T\, m/r^2\, \vec{u}$ بالإسقاط نحصل على :

$m\, v^2/r = G\, M_S\, m/r^2$ حيث m هي كتلة القمر ، r نصف قطر المدار الدائري ، G ثابت الجذب العام .

عبارة السرعة تعطى بالعلاقة التالية : $v = \sqrt{G\, M_S/(R + H)}$.

ــ الدور T الموافق للزمن الذي يستغرقه القمر للقيام بدورة واحدة على مداره : $T = 2\, \pi r/v$ و منه : $T = 2\, \pi \sqrt{r^3/ G\, M_S}$

و منه : $T^2/r^3 = 4\pi^2/GM_S$ و منه : $(R + H)^3/T^2 = GM_S/ 4\pi^2 = Cte$ حيث : $r = R + H$.

3ــa ــ هذه الخصائص هي : ــ مدار دائري مركزه هو مركز الأرض و جهة دورانه هي نفس جهة دوران الأرض .

ــ مداره موجود في نفس المستوي الإكواتوري الأرضي .

ــ دوره T يساوي الدور T_0 للأرض لدورانها حول محور القطبين .

bــ يسمى هذا النوع من الأقمار الاصطناعية بالأقمار الجيومستقرة .

dــ هذا الدور لا يساوي 24 h لأن 24 h هو الزمن الذي تستغرقة الأرض للقيام بدورة كاملة حول نفسها بالنسبة للشمس و ليس بالنسبة للنجوم الأخرى . و منه خلال دوران الأرض حول نفسها تدور مسافة صغيرة حول الشمس التي تفسر الإنتقال الظاهري للشمس بالنسبة للنجوم الأخرى . إذن لإسترجاع هذه الزاوية الإضافية ، تدور الأرض خلال 4 دقائق تقريبا إضافية .

cــ يمثل الدور 86164 s = 23 h 56 min المدة الزمنية لكي ينجز القمر الإصطناعي ميتيوسات دورة كاملة حول الأرض .

4ــ التأكد من الجدول أن $(R + H)^3/T^2 = Cte$: بإجراء الحسابات نجد دائما نفس القيمة و هذا بالنسبة لكل الأقمار :

$$(R + H)^3/T^2 \approx 10^{13}$$

5ــ استنتاج قيمة تقريبية لكتلة الأرض M : $(R + H)^3/T^2 \approx 10^{13} = GM_S/ 4\pi^2 \Rightarrow M \approx 6 . 10^{24}$ kg

التمرين ــ 25

يدور قمر إصطناعي (S) حول الأرض بحركة دائرية منتظمة . في مستوى خط الاستواء عند الارتفاع H = 400 km .

1ــ عين السرعة v_s لحركة مركز عطالة القمر الاصطناعي .

2ــ عين دور الحركة T_s .

3ــ القمر الإصطناعي (S) ينتقل نحو الشرق ، عين المجال الزمني الذي يفصل بين مرورين متتاليين في موضع يقع على شاقول نقطة معينة من خط الإستواء .

نفترض الآن أن القمر الاصطناعي الموجود عند الإرتفاع $h_0 = 400$ km و نظرا للتأثيرات المختلفة يتناقص إرتفاعه بمقدار 1/100 من الإرتفاع الذي كان عليه عند بداية كل دورة .

4ــ اوجد علاقة بين h_{n+1} (الإرتفاع الذي كان عليه عند الدورة (n + 1) و h_n (الإرتفاع الذي كان عليه عند بداية الدورة n)

5ــ استنتج علاقة بين h_1 و h_0 .

6ــ عين عدد الدورات التي أنجزها القمر الإصطناعي عند الإرتفاع 100 km .

المعطيات : ثابت التجاذب الكوني : $G = 6,67 . 10^{-11}\ N.m^2kg^{-2}$ ، كتلة الأرض : $M = 5,97. 10^{24}$ kg

نصف قطر الأرض : $R_T = 6,68. 10^3$ km ، دور حركة الأرض حول محور الأقطاب : $T_T = 24$ h

الحــل ــ 25

1ــ تعيين السرعة v_s لحركة مركز عطالة القمر الاصطناعي :

نعتبر مرجع الدراسة Geo-centrique ، المعتبر غاليلي . القوة الوحيدة المطبقة على القمرالإصطناعي هي قوة الجذب $\vec{F}$.

بتطبيق القانون الثاني على القمر الإصطناعي نحصل على : $m\vec{a} = \vec{F} = - G\, M_T\, m/r^2\, \vec{u}$ بالإسقاط نحصل على :

$m\, v^2/r = G\, M_T\, m/r^2$ حيث m هي كتلة القمر ، r نصف قطر المدار الدائري ، G ثابت الجذب العام .

عبارة السرعة تعطى بالعلاقة التالية : $v = \sqrt{G\, M_T /r}$ حيث $r = R_T + H$.

التطبيق العددي : $v_s = 7600$ m/s

2ــ تعيين دور الحركة T_s : الدور T_s الموافق للزمن الذي يستغرقه القمر للقيام بدورة واحدة على مداره : $T_s = 2\, \pi r/v$

و منه : $T_s = 2\, \pi \sqrt{r^3/ G\, M_T}$. التطبيق العددي : $T_s = 5568$ s

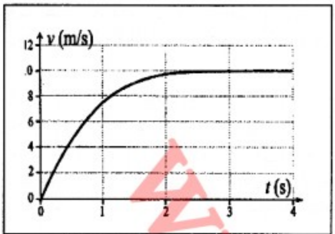
3ــ تعيين المجال الزمني الذي يفصل بين مرورين متتاليين في موضع يقع على شاقول نقطة معينة من خط الإستواء : القمر الإصطناعي (S) ينتقل نحو الشرق أي يدور في نفس جهة دوران الأرض . لنفرض أن القمر و نقطة A على الأرض يقعان

على نفس الشاقول ينطلقان ابتداءا من من نقطة C عند اللحظة $t = 0$. بعد مدة زمنية يحدث الإلتقاء الأول على نفس الشاقول ، عندها تكون النقطة A قد انجزت دورة كاملة أما القمر فإنه ينجز دورة و جزء من دورة . بعد مدة زمنية أخرى يحدث الإلتقاء الثاني على نفس الشاقول ، عندها تكون النقطة A قد انجزت دورتين كاملتين أما القمر فإنه ينجز دورتين و جزء من الدورة السابق مع جزء من دورة آخر و هكذا إلى أن تمر مدة زمنية t يحدث الإلتقاء عند C تكون النقطة A قد انجزت n دورة و القمر عندها ينجز $(n + 1)$ دورة . يكون عندها : $t = n\,T_T$ و $t = (n + 1)\,T_s$ و منه :

$$n\,T_T = (n + 1)\,T_s \;\Rightarrow\; n = T_s / (T_T - T_s)$$

و منه :
$$t = T_T\,T_s / (T_T - T_s) = 86400 \,.\, 5568 / (86400 - 5568) = 5951{,}5 \text{ s}$$

التمرين ــ 26



تسقط كرة من المطاط المرن في الهواء دون سرعة إبتدائية . لقد سمحت دراسة حركة سقوطها الشاقولي بتحديد قيم سرعة مركز عطالتها بدلالة الزمن .
فتحصلنا على المنحنى التالي :
1ــ كيف نسمي النظامين المختلفين لمثل هذه الحركة ؟
2ــ حدد بيانيا :a ــ السرعة الحدية . b ــ الزمن المميز .

الحـل ــ 26

في المجال الزمني $[0 \,،\, 2{,}5 \text{ s}]$: السرعة تتزايد إلى أن تستقر عند $t = 2{,}5$ s .
نقول عن الحركة في هذا المجال الزمني أنها في النظام الإنتقالي .
في المجال الزمني $[2{,}3 \,،\, 4\text{s}]$: السرعة ثابتة . نقول عن الحركة في هذا المجال الزمني أنها في النظام الدائم .
السرعة الحدية : نرسم الخط المقارب الأفقي للبيان فيقطع محور السرعة في القيمة $v_l = 10$ m/s . نحصل على قيمة السرعة الحدية بالقراءة البيانية (قيمة الخط المقارب الأفقي للمنحنى) : $v_{lim} = 10$ m/s .
الزمن المميز : نرسم المماس للبيان عند المبدأ و نحدد فاصلة تقاطعه مع الخط المقارب الأفقي للمنحنى . الزمن المميز نحصل عليه بتقاطع المماس للمنحنى عند المبدأ مع الخط المقارب الأفقي : $\tau = 0{,}95$ s .

التمرين ــ 27

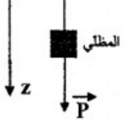
نغمر كليا جسما صلبا حجمه $V = 5{,}0 \text{ cm}^3$ و كتلة الحجمية $\rho = 8{,}9 \text{ g/cm}^3$ ، في مائع كتلته الحجمية ρ_1 .
1ــ احسب ثقل الجسم
2ــ احسب قيمة دافعة أرخميدس في الحالة التي يكون فيها المائع هو الماء حيث $\rho_{eau} = 1{,}0 \text{ g/cm}^3$.
3ــ احسب قيمة دافعة أرخميدس في الحالة التي يكون فيها المائع هو الهواء حيث : $\rho_{air} = 1{,}3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$.

الحـل ــ 27

1ــ حساب ثقل الجسم : $P = m\,g = \rho\,V\,g = 8{,}9 \,.\, 10^{-3} \,.\, 5{,}0 \,.\, 9{,}81 = 4{,}36 \,.\, 10^{-1}$ N
2ــ حساب قيمة دافعة أرخميدس في الحالة التي يكون فيها المائع هو الماء : قيمة دافعة أرخميدس Π هي قيمة ثقل الماء المزاح من قبل الجسم عند غمره : $\Pi = \rho_{eau}\,V\,g = 1{,}0 \,.\, 5{,}0 \,.\, 9{,}81 = 4{,}9 \,.\, 10^{-2}$ N
3ــ حساب قيمة دافعة أرخميدس في الحالة التي يكون فيها المائع هو الهواء : قيمة دافعة أرخميدس Π هي قيمة ثقل حجم الهواء المزاح من قبل الجسم عند غمره : $\Pi = \rho_{air}\,V\,g = 1{,}3 \,.\, 10^{-3} \,.\, 10^{-3} \,.\, 5{,}0 \,.\, 9{,}81 = 6{,}4 \,.\, 10^{-5}$ N

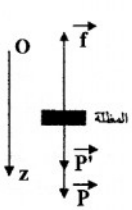
التمرين ــ 28

سقط مظلي كتلته 60 kg مع مظلته ذات الكتلة 7 kg بسرعة ثابتة قيمتها 6 m/s . حدد شدة :
1ــ القوة المطبقة على المظلي من طرف مظلته ؛
2ــ القوة المطبقة من طرف الهواء على المظلة .



الحـل ــ 28

1ــ القوة المطبقة على المظلي من طرف مظلته : قوة ثقله $\vec{P}$ المطبقة من طرف الأرض على المظلي . القوة $\vec{F}$ المطبقة من من طرف مظلته الموجهة في عكس اتجاه الحركة شدتها : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على :
$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل :
$m\,g - F = m\,dv/dt$ حيث الحركة منتظمة و منه $dv/dt = 0$ و منه :
$$F = m\,g = 60 \,.\, 9{,}81 = 5{,}88 \,.\, 10^2 \text{ N}$$



2ــ القوة المطبقة من طرف الهواء على المظلة : مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي القوى الخارجية المطبقة على المظلة هي : قوة ثقل المظلة $\vec{P'}$ ، القوة المطبقة من طرف الهواء $\vec{f}$ و قوة الشد المطبقة من طرف المظلي $\vec{P}$ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{P'} + \vec{f} = m\vec{a}$

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل : $m g + m' g - f = m\, dv/dt$
حيث الحركة منتظمة و منه $dv/dt = 0$ و منه : $f = m g + m' g = 7 . 9{,}81 + 60 . 9{,}81 = 6{,}57 . 10^2$ N

التمرين ــ 29

يسقط مظلي شاقوليا فيبلغ سرعة ثابتة قيمتها 4,5 m/s . نستطيع ، خلال السقوط ، إهمال دافعة أرخميدس أمام القوى الأخرى المطبقة على المظلي و تجهيزه . نعتبر أن قوة الإحتكاك المطبقة من طرف الهواء على المظلي من الشكل $f = kv^2$.

1ــ اوجد المعادلة التفاضلية لحركة مركز عطالة المظلي و تجهيزه .

2ــ فسر لماذا يمكن للسرعة أن تصبح ثابتة .

3ــ احسب المعامل k الذي يتدخل في قوة الإحتكاك .

المعطيات : قيمة تسارع الجاذبية : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$ ، كتلة المظلي المجهز : $m = 1{,}0 \times 10^2$ kg .

الحــل ــ 29

1ــ إيجاد المعادلة التفاضلية لحركة مركز عطالة المظلي و تجهيزه : الجملة المدروسة هي المظلي و تجهيزه . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة الإحتكاك $\vec{f}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل : $m g - k v^2 = m\, dv/dt$ حيث $a = dv/dt$

و $f = kv^2$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $dv/dt + k/m\, v^2 = g$

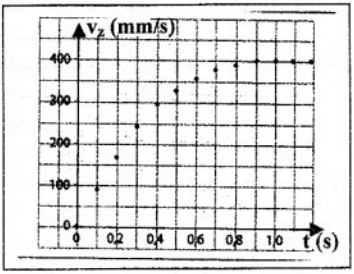
2ــ تفسير لماذا يمكن للسرعة أن تصبح ثابتة : في بداية السقوط كانت السرعة معدومة ، و أثناء السقوط و تحت تأثير قوة الثقل تزداد السرعة و بالتالي تزداد قوة الإحتكاك المعاكسة لجهة الحركة لأنها تتناسب طردا مع مربع السرعة $f = k v^2$ و بعد مدة زمنية تتساوى قوة الثقل مع قوة الإحتكاك $P = f$ و منه : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل :

$m g - k v^2 = m\, dv/dt$ و منه : $0 = m\, dv/dt$ و منه : $a = dv/dt = 0$ و منه الحركة منتظمة و السرعة ثابتة .

3ــ حساب المعامل k الذي يتدخل في قوة الإحتكاك : $dv/dt + k/m\, v^2 = g$ الحركة منتظمة و السرعة ثابتة : $dv/dt = 0$

و منه : $(k/m)\, v^2 = g \Rightarrow k = m\, g/v^2 = 48{,}4$ kg/m

التمرين ــ 30



تم تصوير السقوط الشاقولي لكرية داخل الزيت . وبعد معالجة المعطيات بالإعلام الآلي ، تم الحصول على تطور السرعة $v_z(t)$ للكرية خلال الزمن . المحور (Oz) متجه نحو الأسفل .

1ــa ــ ما هي السرعة الإبتدائية v_0 للكرية ؟

bــ ما هي سرعتها الحدية v_L ؟

2ــ حدد الزمن المميز للسقوط .

3ــ حدد بواسطة المنحنى ، قيمة التسارع في اللحظة $t = 0$ s .

4ــ نستطيع كتابة المعادلة التفاضلية للسرعة بالشكل :

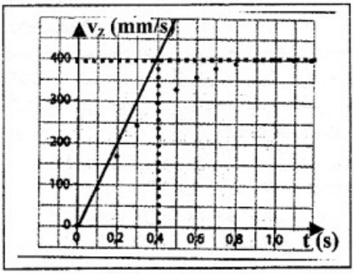
$$dv_z/dt = g\,(1 - \rho_f\, V_s/m) - k/m\, v_z(t)$$

استنتج قيمة دافعة أرخميدس و قيمة k . المعطيات : $g = 9{,}8\ m/s^2$ كتلة الكرية $m = 13{,}3$ g

نفرض أن قوة الإحتكاك تعطى بالشكل $\vec{f} = - k . \vec{v}$ أين v هي سرعة مركز عطالة الكرة .

الحــل ــ 30

1ــa ــ السرعة الإبتدائية v_0 للكرية : السرعة الإبتدائية v_0 هي قيمة السرعة عند $t = 0$ بالقراءة البيانية نجد : $v_0 = 0$.



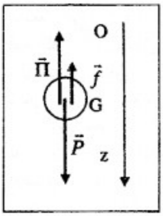
bــ سرعتها الحدية v_L : استخراج قيمة السرعة الحدية v_L على التمثيل البياني $v_z = f(t)$: قيمة السرعة الحدية v_L على التمثيل البياني $v_z = f(t)$ تمثل الخط المقارب الأفقي للمنحنى $v_z = f(t)$. بالقراءة البيانية نجد : $v_L = 0{,}4$ m/s .

2ــ تحديد الزمن المميز للسقوط : فاصلة نقطة تقاطع المماس للمنحنى $v_z = f(t)$ عند المبدأ مع الخط المقارب الأفقي تمثل قيمة الزمن المميز :

بالقراءة البيانية نجد : $\tau = 0{,}4$ s .

3ــ تحديد بواسطة المنحنى ، قيمة التسارع في اللحظة $t = 0$ s :

التسارع dv_z/dt يمثل تغير السرعة بالنسبة للزمن أي بالمفهوم الرياضي يمثل مشتق السرعة بالنسبة للزمن إذن فهو يمثل على المنحنى $v_z = f(t)$ ميل المماس للمنحنى $v_z = f(t)$. إذن لإيجاد قيمة التسارع في اللحظة $t = 0$ s نرسم مماس للمنحنى في اللحظة $t = 0$ s ثم نحسب ميله . $a_0 = 0{,}2/0{,}2 = 1\ m/s^2$



4ـ استنتاج قيمة دافعة أرخميدس و قيمة k : تحديد القوى الخارجية المطبقة على الكرية و هي في السقوط الشاقولي في الزيت ثم تمثيلها على الشكل : الجملة المدروسة هي الكرية . القوى الخارجية المطبقة على الكرية هي : قوة الثقل $P = m\,g$ ، قوة الإحتكاك $f = k \cdot v$ و دافعة أرخميدس المطبقة من طرف المائع

$$\Pi = \rho_{huile} \cdot V_s \cdot g$$

ـ كتابة المعادلة التفاضلية لحركة الكرة في مرجع المخبر : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل :

$$g - (k/m)\,v - (\rho_{huile} \cdot V_s \cdot g)/m = m\,dv/dt$$

و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $dv/dt + k/m\,v = g\,[1 - (\rho_{huile} \cdot V_s)/m]$

ـ استنتاج قيمة دافعة أرخميدس : عند $t = 0$ ، السرعة معدومة و و منه قوة الإحتكاك معدومة لأنها تتعلق بالسرعة $f = k \cdot v$ و التسارع عندها قيمته : $a_0 = 1{,}25\ m/s^2$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{\Pi} = m\,\vec{a_0}$$

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل : $m\,g - \Pi = m\,a_0$ و منه نحصل على قيمة دافعة أرخميدس :

$$\Pi = m\,g + m\,a_0 = 13{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 - 13{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 1{,}17 \cdot 10^{-1}\ N$$

استنتاج قيمة k : قيمة تسارع الكرية عندما تبلغ هذه الأخيرة السرعة الحدية : عندما تبلغ هذه الأخيرة السرعة الحدية فإنها تصبح ثابتة و بالتالي ينعدم التسارع أي : $a_L = dv_L/dt = 0$ و منه : $(k/m)\,v_L = g\,[1 - (\rho_{huile} \cdot V_s)/m]$

و منه : $k = (m\,g - \Pi)/v_L = (13{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 - 1{,}17 \cdot 10^{-1}) / 0{,}4 = 0{,}033\ kg/s$

التمرين ــ 31

ترك رجل فضاء جسما يسقط على سطح القمر .

1ـ هل يكون مركز عطالة الجسم في سقوط حر ؟

2ـ أوجد المعادلة التفاضلية للحركة .

3ـ استنتج المعادلات الزمنية .

4ـ احسب مدة السقوط و سرعة مركز عطالة الجسم بعد قطعه مسافة 2 m من السقوط .

المعطيات : قيمة جاذبية القمر $g' = 1{,}6\ m/s^2$.

الحل ــ 31

1ـ يكون مركز عطالة الجسم في سقوط حر : نقول عن الجسم الصلب أنه في سقوط حر إذا لم يخضع خلال سقوطه إلا لقوة ثقله فقط و هو ما محقق في حالتنا هذه ، حيث الجسم لا يخضع خلال سقوطه إلا لقوة جذب القمر له المتمثلة في قوة ثقله .

2ـ إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة : الجملة المدروسة هي الجسم الصلب . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجسم الصلب هي : قوة الثقل $\vec{P}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\,\vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل : $m\,g = m\,dv/dt$

و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $dv/dt = g$

3ـ استنتاج المعادلات الزمنية : مرجع الدراسة : مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجسم الصلب هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\,\vec{a}$. باعتبار الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v_0 = 0$ و $z = z_0$.

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل ثم نكامل مرتين العلاقة الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على المعادلة الزمنية للحركة : $a = g \Rightarrow v = g\,t \Rightarrow z = 1/2\,g\,t^2 = 0{,}8\,t^2$

التمرين ــ 32

عند القفز بالمطاط (saut à l'élastique) .

يترك شخص نفسه يسقط من جسر ، بدون سرعة ابتدائية .

1ـ بين أن تسارع حركة السقوط الحر مستقل عن كتلة الشخص . استنتج معادلات الحركة و طبيعة المسار .

2ـ إن المطاط المرتبط بالشخص يبدأ في الشد بعد قطع مسافة 30 m .

aـ كم تكون حينئذ مدة السقوط الحر ؟

bـ ما هي قيمة السرعة بعد 30 m من السقوط ؟

cـ ما هي قيمة الطاقة الحركية للرجل عند هذه اللحظة ؟

المعطيات : $g = 9{,}8\ m/s^2$ ؛ $m = 75\ kg$ ؛ قوى الإحتكاك مهملة في الهواء .

الحل ــ 32

1ـ تبيان أن تسارع حركة السقوط الحر مستقل عن كتلة الشخص : نقول عن الجسم الصلب أنه في سقوط حر إذا لم يخضع خلال سقوطه إلا لقوة ثقله فقط و هو ما محقق في حالتنا هذه ، حيث الشخص لا يخضع خلال سقوطه إلا لقوة جذب الأرض له

المتمثلة في قوة ثقله . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الشخص هي : قوة الثقل $\vec{P}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل : $m\,g = m\,a$ و منه نحصل على التسارع : $a = g$. و منه نستنتج أن تسارع حركة السقوط الحر مستقل عن كتلة الشخص .

ــ استنتاج معادلات الحركة : مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الشخص هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. باعتبار الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v_0 = 0$ و $z = 0$.

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oz موجه نحو الأسفل ثم نكامل مرتين العلاقة الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على المعادلة الزمنية للحركة و للسرعة : $a = g \Rightarrow v = 9{,}8\ t \Rightarrow z = 1/2\,g\,t^2 = 4{,}9\ t^2$

ــ طبيعة المسار : مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الشخص هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. و منه : $\vec{a} = \vec{g}$

بإسقاط العلاقة $\vec{a} = \vec{g}$ على محورشاقولي Oz موجه نحو الأسفل نحصل على : $a = g$. مميزات قوة الثقل :

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأسفل ، القيمة :

بإسقاط العلاقة $\vec{a} = \vec{g}$ على جملة محاورثم نكامل مرتين العلاقات الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = g\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1/2\,g\,t^2 \end{cases}$$

العلاقة الأخيرة $(x = 0$ و $y = 0)$ تبين أن المسار فق المحور Oz الشاقولي و منه المسار خط مستقيم شاقولي .

2ــ aــ مدة السقوط الحر : إن المطاط المرتبط بالشخص يبدأ في الشد بعد قطع مسافة $30\ m$ بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام حيث تسارعها هو $a = g$: نكامل مرتين العلاقة الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على المعادلة الزمنية للحركة و للسرعة : $a = g \Rightarrow v = 9{,}8\ t \Rightarrow z = 1/2\,g\,t^2 = 4{,}9\ t^2$ و منه : $z = 4{,}9\ t^2 \Rightarrow t = 2{,}47\ s$

bــ قيمة السرعة بعد $30\ m$ من السقوط : $v = 9{,}8\ t = 9{,}8 \,.\, 2{,}47 = 24{,}2\ m/s$

cــ قيمة الطاقة الحركية للرجل عند هذه اللحظة : $E_C = 1/2\,m\,v^2 = 21961{,}5\ J$

التمرين ــ 33

نترك حجرا يسقط في بئر . المدة المستغرقة للوصول إلى سطح ماء البئر هي $2\ s$.

1ــ ما هو عمق البئر ؟ بفرض قوى الإحتكاك مهملة في الهواء .

2ــ بأي سرعة يصل الحجر إلى قعر البئر ؟

3ــ علما بأن سرعة انتشار الصوت ، في هذه الشروط هي : $v_s = 340\ m/s$ ، في أي مدة زمنية ، بعد ترك الحجر ، يصل صوت اصطدام الحجر بقعر البئر لأذن القاذف ؟ المعطيات : $g = 9{,}8\ m/s^2$

الحــل ــ 33

1ــ عمق البئر : مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي القوى الخارجية المطبقة على الشخص هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. و منه : $\vec{a} = \vec{g}$

بإسقاط العلاقة $\vec{a} = \vec{g}$ على محورشاقولي Oz موجه نحو الأسفل نحصل على : $a = g$. مميزات قوة الثقل :

ــ المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأسفل ، القيمة : $P = m\,g$.

إذن الحجر يسقط بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام حيث تسارعها هو $a = g$: نكامل مرتين العلاقة الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على المعادلة الزمنية للحركة و للسرعة :

$a = g \Rightarrow v = 9{,}8\ t \Rightarrow z = 1/2\,g\,t^2 = 4{,}9\ t^2$ و منه : $z = 4{,}9\ t^2 = 19{,}6\ m$.

2ــ سرعة وصول الحجر إلى قعر البئر : $v = 9{,}8\ t = 9{,}8 \,.\, 2 = 19{,}6\ m/s$

3ــ المدة زمنية الأزمة لوصول صوت اصطدام الحجر بقعر البئر لأذن القاذف t : هذه المدة تمثل مدة سقوط الحجر $t_1 = 2\ s$ مضافا إليها المدة التي يستغرقها الصوت من قعر البئر إلى فوهته (أذن القاذف) t_2 : $t = 2 + t_2$. حساب t_2 : حركة الصوت منتظمة أي السرعة ثابتة و منه : $z = v_s \,.\, t_2 \Rightarrow t_2 = z/\,v_s = 19{,}6/\,340 = 0{,}0576\ s$

و منه : $t = 2 + t_2 = 2 + 0{,}057 = 2{,}057\ s$

التمرين ــ 34

قطرة من الماء يمكن إعتبارها كروية نصف قطرها $r = 20\ \mu m$ تسقط في الهواء وتتأثر بقوة احتكاك قيمتها $f = 6\ \pi r \eta v$.

1ــ بين أن دافعة أرخميدس مهملة أمام ثقل الكرة .

2ــ اكتب المعادلة التفاضلية الموافقة لحركة القطرة .

3ــ عين السرعة الحدية . المعطيات : لزوجة الهواء : $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}\ SI$ ،

الكتلة الحجمية للماء : $\rho_{eau} = 1\,000\ kg/m^3$ ، الكتلة الحجمية للهواء : $\rho_{air} = 1{,}3\ kg/m^3$.

الحـل ـ 34

1ـ تبيان أن دافعة أرخميديس مهملة : قيمة دافعة أرخميديس على القطرة هي : $\Pi = \rho_{air} \cdot V_{goutte} \cdot g$
. قيمة ثقل القطرة هي : $P = m\,g = \rho_{eau} \cdot V_{goutte} \cdot g$. قيمة النسبة :
$P/\Pi = \rho_{eau} / \rho_{air} = 1000/1,3 = 769$. قيمة دافعة أرخميديس أضعف بـ 769 مرة من قيمة ثقل القطرة . يمكن أن نهمل دافعة أرخميديس أمام ثقل القطرة .

2ـ كتابة المعادلة التفاضلية لحركة قطرة الماء : الجملة المدروسة هي قطرة الماء . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على القطرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة الإحتكاك $\vec{f}$.
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$
بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي yy' موجه نحو الأسفل : $m\,g - 6\pi r\eta v = m\,dv/dt$
و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $dv/dt + 6\pi r\eta/m \cdot v = g$

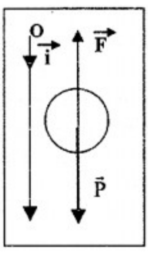
3ـ تحديد السرعة الحدية للسقوط : عندما تبلغ السرعة قيمتها الحدية تصبح ثابتة ، فينعدم التسارع : $dv/dt = 0$.
و منه : $v_{lim} = m\,g/(6\pi r\eta) = [(4/3)\,\pi r^3 \rho_{eau}\,g]/[\,6\pi r\eta] = (4\,r^2\,\rho_{eau}\,g)/(18\,\eta) = 0{,}048 m/s$.

التمرين ـ 35

يسقط مظلي في الهواء و قبل فتح مظلته نفترض أن قوى الإحتكاك المطبقة على الجملة (مظلي + مظلة مغلقة) من الشكل $-\,k\vec{v}$ حيث $\vec{v}$ شعاع سرعة السقوط و $k = Cte = 14\ SI$.
عند اللحظة t_0 يفتح المظلي مظلته (نفترض أن فتحها لحظي) و يكون المظلي في هذه اللحظة قد بلغ سرعته الحدية . تكون قوة الإحتكاك المطبقة على الجملة (مظلي + مظلة مفتوحة) من الشكل $-\,\lambda\vec{v}$ حيث $\lambda = Cte = 350\ SI$.
1ـ في أي وحدات دولية تقدر كل من k و λ ؟ تهمل دافعة أرخميدس أمام ثقل الجملة .
2ـ ما هي السرعة الحدية v_0 للجملة قبل فتح المظلة ؟
3ـ ما هي السرعة الحدية الجديدة v_1 للجملة بعد فتح المظلمة ؟
4ـ بتقديم حصيلة للقوى المطبقة على الجملة (مظلي + مظلة مفتوحة) ، أوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها $v(t) - v_1$. حل المعادلة ثم استنتج $v(t)$ من أجل $t > t_0$. المعطيات : كتلة الجملة (مظلي + مظلة) : 70 kg ، تسارع الجاذبية الأرضية : $10\ m/s^2$. تهمل دافعة أرخميدس أمام ثقل الجملة قبل و بعد فتح المظلة .

الحـل ـ 35

1ـ وحدات دولية تقدر كل من k و λ : $F = k \cdot v \Rightarrow f = F/v = m\,a/v$
لدينا $F = m\,a$ إذن $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$ و $[v] = L \cdot T^{-1}$ و منه $[k] = (M \cdot L \cdot T^{-2})/(L \cdot T^{-1}) = M/T$
إذن نعبر عن k بـ kg/s . بنفس الطريقة نجد أن وحدة λ هي kg/s .



2ـ السرعة الحدية v_0 للجملة قبل فتح المظلة : ـ تحديد القوى المؤثرة على الجملة و كتابة العبارة الشعاعية لكل قوة : الجملة المدروسة هي (مظلي + مظلة مغلقة). ندرس الحركة وفق محور شاقولي Ox مزود بشعاع وحدة $\vec{i}$ موجه نحو الأسفل .
مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي :
قوة الثقل $\vec{P} = m\,g\,\vec{i}$ ، قوة الإحتكاك للهواء : $\vec{F} = -\,k\,v\,.\,\vec{i}$. دافعة أرخميدس مهملة أمام القوى الأخرى .
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$
بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Ox موجه نحو الأسفل : $m\,g - k \cdot v = m \cdot a = m\,dv/dt$
و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $g - k/m \cdot v = dv/dt$ و منه نجد : $dv/dt + k/m \cdot v = g$
عند بلوغ السرعة الحدية $v = v_0$ ، سرعة الكرية ثابتة أي : $dv/dt = 0$. و منه نحصل على : $k/m \cdot v_0 = g$
و منه : $v_0 = m\,g/k = 700/14 = 50\ m/s$

3ـ السرعة الحدية الجديدة v_1 للجملة بعد فتح المظلة : ـ تحديد القوى المؤثرة على الجملة و كتابة العبارة الشعاعية لكل قوة : الجملة المدروسة هي (مظلي + مظلة مفتوحة) . ندرس الحركة وفق محور شاقولي Ox مزود بشعاع وحدة $\vec{i}$ موجه نحو الأسفل
مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P} = m\,g\,\vec{i}$ ، قوة الإحتكاك للهواء : $\vec{F} = -\,\lambda\,v\,.\,\vec{i}$. دافعة أرخميدس مهملة أمام القوى الأخرى .
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$
بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Ox موجه نحو الأسفل : $m\,g - \lambda \cdot v = m \cdot a = m\,dv/dt$
و منه نحصل على المعادلة التفاضلية : $g - \lambda/m \cdot v = dv/dt$ و منه نجد : $dv/dt + \lambda/m \cdot v = g$
عند بلوغ السرعة الحدية $v = v_0$ ، سرعة الكرية ثابتة أي : $dv/dt = 0$. و منه نحصل على : $\lambda/m \cdot v_1 = g$
و منه : $v_1 = m\,g/\lambda = 700/350 = 2\ m/s$

4ــ إيجاد المعادلة التفاضلية التي تحققها $v(t) - v_1$:

ــ تحديد القوى المؤثرة على الجملة و كتابة العبارة الشعاعية لكل قوة : الجملة المدروسة هي (مظلي + مظلة مفتوحة) . ندرس الحركة وفق محور شاقولي Ox مزود بشعاع وحدة $\vec{i}$ موجه نحو الأسفل .

مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P} = m\,g\,\vec{i}$ ، قوة الإحتكاك للهواء : $\vec{F} = -\lambda\, v\,.\,\vec{i}$. دافعة أرخميدس مهملة أمام القوى الأخرى .

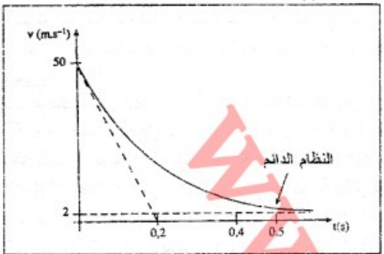
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$

بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Ox موجه نحو الأسفل : $m\,g - \lambda\,.\,v(t) = m\,.\,a = m\,dv(t)/dt$

بالقسمة على λ نحصل على المعادلة التفاضلية : $mg/\lambda - v(t) = m/\lambda\; dv(t)/dt$ و منه نجد :

$v_1 - v(t) = m/\lambda\; dv(t)/dt$ و منه نحصل على : $v(t) - v_1 = - m/\lambda\; dv(t)/dt$

بوضع : $u(t) = v(t) - v_1$ بالتعويض نحصل على : $v(t) - v_1 = - m/\lambda\; dv(t)/dt$



بما أن $v_1 = Cte$ إذن : $du/dt = dv(t)/dt$

و منه : $du/dt = - \lambda\; u/m$ و هي عبارة عن معادلة تفاضلية خطية متجانسة بمعامل ثابت و هي مماثلة لمعادلة التناقص الإشعاعي لعنصر مشع أو معادلة تفريغ المكثفة عبر مقاومة . حل المعادلة التفاضلية :

$du/dt = - \lambda\; u/m$ يكون من الشكل : $u = u_0 \exp(-\lambda/m\; t)$

أين الثابت u_0 نحصل عليه من الشروط الإبتدائية . عند $t = 0$

يكون : $u(0) = v(0) - v_1 = v_0 - v_1$

و منه نستنتج $v(t) = u(t) + v_1 = (v_0 - v_1) \exp(-\lambda/m\; t) + v_1$

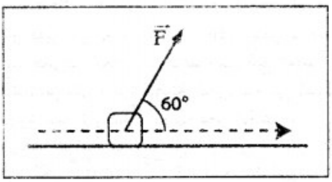
التمرين ــ 36

يبين الجدول التالي قيم السرعات اللحظية و اللحظات الزمنية الموافقة لها ، لمركز عطالة جسم صلب كتلته $m = 0,50\ kg$ ، يقوم بحركة مستقيمة على طاولة أفقية .

t(ms)	60	120	180	240	300
v(m/s)	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42

1ــ a ــ ارسم المنحنى البياني $v = f(t)$

b ــ أستنتج من البيان طبيعة حركة الجسم و قيمة تسارعه و سرعته عند $t = 0\ s$.



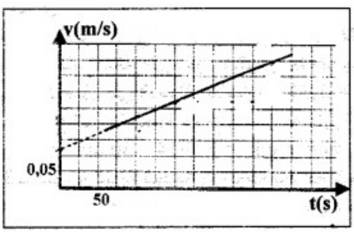
2ــ يخضع الجسم (S) في هذه الحركة ، إلى قوة يصنع حاملها زاوية $60°$ مع شعاع السرعة و تساوي قيمها $1,4\ N$.

a ــ اوجد قيمة محصلة القوى المقاومة المؤثرة على الجسم الصلب والتي نعتبرها ثابتة وموازية للمسار .

b ــ احسب عمل كل من هذه القوى خلال انتقال مقداره $2\ m$

c ــ استنتج قيمة الطاقة الحركية المخزنة خلال هذا الانتقال .

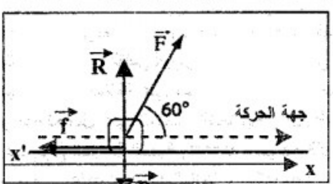
الحل ــ 36



1 ــ a ــ رسم المنحنى البياني $v = f(t)$: المنحنى عبارة عن خط مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل : $v(t) = a\,t + v_0$

b ــ استنتاج طبيعة حركة الجسم و قيمة تسارعه و سرعته عند $t = 0\ s$: هذا المنحنى عبارة عن مستقيم مائل نحو الأعلى و بالتالي ميله a موجب ويمثل تسارع المتحرك . a ثابت موجب و v موجبة و منه إذن الحركة متسارعة بانتظام : $a = \Delta v/\Delta t = 1,0\ m/s^2$. عند $t = 0\ s$ ، $v = v_0 = 0,12\ m/s$

و نحصل على هذه القيمة بتمديد المنحنى المستقيم إلى أن يقطع محور السرعة في نقطة تمثل السرعة الإبتدائية $v_0 = 0,12\ m/s$.



2ــ a ــ إيجاد قيمة محصلة القوى المقاومة المؤثرة على الجسم الصلب والتي نعتبرها ثابتة وموازية للمسار : مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي القوى الخارجية المطبقة على الجسم هي : قوة الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل الأرض على الجسم $\vec{R}$ (شاقولية) و القوة $\vec{F}$ قوة يصنع حاملها زاوية $60°$ مع شعاع السرعة ومحصلة القوى المقاومة المؤثرة على الجسم الصلب والتي نعتبرها ثابتة وموازية للمسار $\vec{f}$. نمثل هذه القوى الأربع في الشكل التالي :

ــ حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m\,.\,\vec{a}$

بالإسقاط على المحور x'x الموجه في جهة الحركة نحصل على : $F \cos 60 - f = m \cdot a$

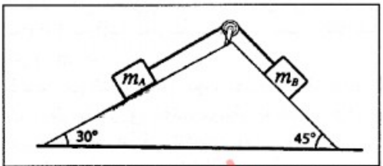
$$f = F \cos 60 - m \cdot a = 1{,}4 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 1{,}0 = 0{,}2 \text{ N}$$

b ـ حساب عمل كل من هذه القوى خلال انتقال مقداره 2 m : شعاع قوة الثقل و قوة رد الفعل للطريق عمودية على شعاع الإنتقال و بالتالي فعملها معدوم . عمل القوة F : $W_{\vec{F}} = \|\vec{F}\| \cdot d \cdot \cos 60 = 1{,}4 \text{ J}$. عمل القوة f :

$$W_{\vec{f}} = \|\vec{f}\| \cdot d \cdot \cos 180 = -0{,}4 \text{ J}$$

c ـ استنتاج قيمة الطاقة الحركية المخزنة خلال هذا الإنتقال : $\Delta E_C = W_{\vec{F}} + W_{\vec{f}} = 1{,}4 - 0{,}4 = 1 \text{ J}$

التمرين ـ 37



نأخذ g = 10 SI و نهمل جميع الإحتكاكات في كل التمرين كما نهمل كتلة البكرة .

تتكون الجملة الممثلة في الشكل من عربتين : (A) كتلتها $m_A = 500$ g و (B) كتلتها m_B موضوعتين على سكتين مائلتين بزاويتين $\alpha = 30°$ و $\beta = 45°$ بالنسبة للأفق وموصولتين بخيط عديم الامتطاط ومهمل الكتلة يمر على محز بكرة .

1ـ اوجد العلاقة التي تربط بين m_A ، m_B ، α و β عندما تكون الجملة في حالة توازن ثم استنتج قيمة الكتلة m_B .

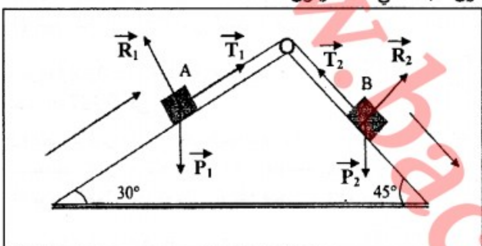
2ـ نضع فوق العربة (B) كتلة إضافية (m) ، بحيث تصبح $m_A = m_B + m$ ، ثم نترك الجملة لحالها دون سرعة ابتدائية

a ـ استنتج طبيعة الحركة و تسارعها .

b ـ ما هي سرعة الجملة بعد خمس ثواني من بدأ الحركة ؟

الحــل ـ 37

1ـ إيجاد العلاقة التي تربط بين m_A ، m_B ، α و β عندما تكون الجملة في حالة توازن :



نقسم الجملة الكلية إلى جملتين لتسهيل الدراسة و تحديد القوى الجملة المدروسة هي (m_A) . القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P_1} = m_A \vec{g}$ ، قوة توتر الحبل $\vec{T_1}$ و قوة رد فعل المستوي المائل $\vec{R_1}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R_1} = m_A \vec{a_1}$$

بإسقاط هذه العلاقة على محور موازي للمستوي و موجه نحو الأعلى : $T_1 - m_A g \sin\alpha = m_A a_1$ ......(1)

نطبق نظرية مركز العطالة على الجملة (m_B) :

القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $\vec{P_2} = m_B \vec{g}$ ، قوة توتر الحبل $\vec{T_2}$. و قوة رد فعل المستوي المائل $\vec{R_2}$

.بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P_2} + \vec{T_2} + \vec{R_2} = m_B a_2$

بإسقاط هذه العلاقة على محور موازي للمستوي و موجه نحو الأسفل : $m_B g \sin\beta - T_2 = m_B a_2$ ......(2)

الجملة مترابطةو في توازن و بالتالي $a_1 = a_2 = a = 0$. البكرة مهملة الكتلة إذن $T_1 = T_2$. بجمع العلاقتين (1) و (2) نجد

$$m_B g \sin\beta - m_A g \sin\alpha = 0 \Rightarrow m_A \sin\alpha = m_B \sin\beta$$

ـ استنتاج قيمة الكتلة m_B : $2m_A \sin\alpha = m_B \sin\beta \Rightarrow m_B = m_A \sin\alpha / \sin\beta = 0{,}5 \sin 30 / \sin 45 = 353$ g

a ـ استنتاج طبيعة الحركة و تسارعها :

نقسم الجملة الكلية إلى جملتين لتسهيل الدراسة و تحديد القوى :

الجملة المدروسة هي $(m_A = m_B + m)$. القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $P_1 = m_A g$ ، قوة توتر الحبل $\vec{T_1}$ و قوة رد فعل المستوي المائل $\vec{R'}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R'} = (m_B + m) \vec{a_1}$$

بإسقاط هذه العلاقة على محور موازي للمستوي و موجه نحو الأعلى :

$$T_1 - (m_B + m) g \sin\alpha = (m_B + m) a_1 \quad ......(1)$$

نطبق نظرية مركز العطالة على الجملة $(m_B + m)$:

القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة هي : قوة الثقل $P_2 = (m_B + m) g$ ، قوة توتر الحبل $\vec{T_2}$. و قوة رد فعل المستوي المائل $\vec{R''}$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P_2} + \vec{T_2} + \vec{R''} = (m_B + m) \vec{a_2}$

بإسقاط هذه العلاقة على محور موازي للمستوي و موجه نحو الأسفل :

$$(m_B + m) g \sin\beta - T_2 = (m_B + m) a_2 \quad ......(2)$$

الجملة و بالتالي $a_1 = a_2 = a$. البكرة مهملة الكتلة إذن $T_1 = T_2$. بجمع العلاقتين (1) و (2) نجد

$$(m_B + m) g \sin\beta - (m_B + m) g \sin\alpha = 2 (m_B + m) a = 2(m_A) a$$

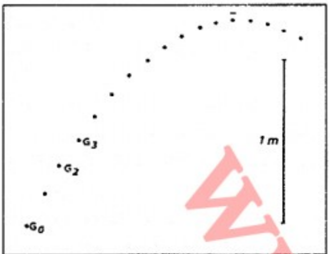
بعد الإختصار نحصل على : $a = g(\sin\beta - \sin\alpha)/(2)$ هذه العلاقة تبين أن التسارع ثابت و موجب و بالتالي حركة الجملة متسارعة بإنتظام . التطبيق العددي : $a = g(\sin\beta - \sin\alpha)/(2) = 1{,}03\ m/s^2$

b- سرعة الجملة بعد خمس ثواني من بدأ الحركة : التسارع ثابت ، $a = 1{,}03\ m/s^2$ ، نكامل لتحديد السرعة :

$a = 1{,}03 \Rightarrow v = 1{,}03\,t + k$ ، نحدد قيمة الثابت k من الشروط الإبتدائية ، عند $t = 0$ ، $v_0 = 0m/s$ إذن : $v = 1{,}03\,t$.

و منه : $v = 1{,}03\,t = 1{,}03 . 5 = 5{,}15\ m/s$.

التمرين - 38



تحصلنا على التصوير المتعاقب المبين في الشكل من خلال تسجيل فيديو لحركة سقوط كرية قذفت بسرعة ابتدائية . الصور المتتالية مسجلة بفاصل زمني قدره 40 ms .

1- ما هي الشروط التي يجب إحترامها عند إنجاز الفيلم ؟

2- أنقل على ورق شفاف الوثيقة السابقة . أوجد الخواص التالية :

a- أشعة السرعة في النقطتين G_2 و G_4 .

b- شعاع التسارع في النقطة G_3 ، أرسم هذا الشعاع مع تحديد السلم المستعمل .

c- قارن قيمة هذا التسارع بقيمة حقل الجاذبية .

الحل - 38

1- الشروط التي يجب إحترامها عند إنجاز الفيلم هي : اجراء التجربة في مكان هادئ حتى يمكننا اهمال التأثيرات الخارجية مثل مقاومة الهواء و كذا التقليل من حجم الكرية حتى يمكننا اهمال دافعة أرخميدس .

2- a- أشعة السرعة في النقطتين G_2 و G_4 : لحساب السرعة اللحظية V_2 في الموضع G_2 نتبع الخطوات التالية :

1) نقيس الطول G_1G_3 على الوثيقة فنجده : $G_1G_3 = 1{,}2\ cm$ و باستعمال سلم المسافات : $3{,}1\ cm \to 1\ m$.

$$\left.\begin{matrix} 3{,}1\ cm \to 1\ m \\ 1{,}2\ cm \to X\ m \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = (1 \times 1{,}2)/3{,}1 = 0{,}387\ cm .$$

نجد $0{,}387\ m$ في الحقيقة .

2) نحسب السرعة V_2 في الموضع G_2 : $V_2 = G_1G_3 / 2\tau = 0{,}387 / 0{,}08 = 4{,}84\ m/s$

- لحساب السرعة اللحظية V_4 في الموضع G_4 نتبع الخطوات التالية :

1) نقيس الطول G_3G_5 على الوثيقة فنجده : $G_3G_5 = 1{,}1\ cm$ و باستعمال سلم المسافات : $3{,}1\ cm \to 1\ m$.

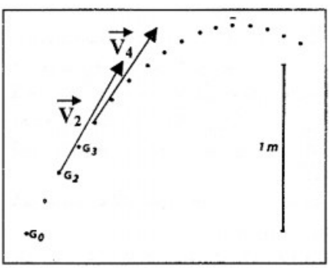
$$\left.\begin{matrix} 3{,}1\ cm \to 1\ m \\ 1{,}1\ cm \to X\ m \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = (1 \times 1{,}1)/3{,}1 = 0{,}354\ m .$$

نجد $0{,}354\ m$ في الحقيقة .

2) نحسب السرعة V_4 في الموضع G_4 : $V_4 = G_3G_5 / 2\tau = 0{,}354 / 0{,}08 = 4{,}43\ m/s$

3) تمثيل أشعة السرعة $\vec{V_2}$ و $\vec{V_4}$:

- نرسم شعاع السرعة $\vec{V_2}$ باختيار السلم التالي : $1\ cm \to 2\ m/s$.



$$\left.\begin{matrix} 1\ cm \to 2\ m/s \\ X\ cm \to 4{,}84\ m/s \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = (4{,}84 \times 1)/2 = 2{,}42\ cm .$$

إذن : طول $\vec{V_2}$ على الرسم هو : $2{,}42\ cm$. إذن في الموضع G_2 نرسم سهم طوله $2{,}42\ cm$ مماسي للمسارعند G_2 .

- نرسم شعاع السرعة $\vec{V_4}$ باختيار السلم التالي : $1\ cm \to 2\ m/s$.

$$\left.\begin{matrix} 1\ cm \to 2\ m/s \\ X\ cm \to 4{,}43\ m/s \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = (4{,}43 \times 1)/2 = 2{,}21\ cm .$$

إذن : طول $\vec{V_4}$ على الرسم هو : $2{,}21\ cm$. إذن في الموضع G_4 نرسم سهم طوله $2{,}21\ cm$ مماسي للمسارعند G_4 .

b- شعاع التسارع في النقطة G_3 ، رسم هذا الشعاع مع تحديد السلم المستعمل :

شعاع التسارع المتوسط هي نسبة شعاع تغير السرعة $\vec{\Delta v}$ على المدة الزمنية Δt :

- لتمثيل شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{V}$ في الموضع G_3 نتبع الخطوات التالية :

1)- نختار نقطة كيفية o خارج التسجيل .

2)- انطلاقا من هذه النقطة o نرسم شعاعا $\vec{V'_4}$ مسايرا للشعاع $\vec{V_4}$

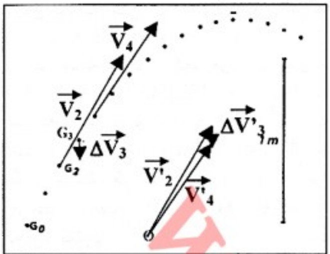
3)ــ انطلاقا من هذه النقطة o نرسم شعاعا $\vec{V'}_2$ مسايرا للشعاع $\vec{V}_2$

4)ــ نرسم الشعاع $\Delta\vec{V'}_3$ ، بحيث تكون بدايته في نهاية $\vec{V'}_3$ و نهايته في نهاية $\vec{V'}_4$ بهذا الترتيب ، $\Delta\vec{V'}_3 = \vec{V'}_4 - \vec{V'}_2$

ــ بما أن $\vec{V'}_2$ و $\vec{V'}_4$ يسايران $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_4$ على الترتيب ، فإن $\Delta\vec{V'}_3$ يساير $\Delta\vec{V}_3$.

ــ نرسم شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{V'}_3$ باتباع الطريقة المذكورة سابقا ثم نقيس طوله بالمسطرة على الرسم فنجد 0,37 cm .

ــ نرسم شعاع تغير السرعة $\Delta\vec{V}_3$ مسايرا لــ $\Delta\vec{V'}_3$ و باعتماد سلم السرعات السابق : $1\ cm \rightarrow 0{,}5\ m/s$



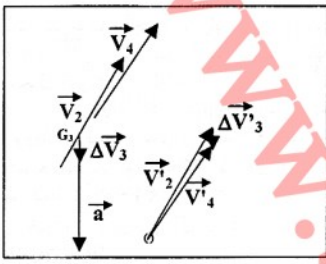
$$\left.\begin{array}{l}1\ cm \rightarrow 2\ m/s\\ 0{,}3\ cm \rightarrow \Delta V_3\ m/s\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta V_3 = (0{,}37 \times 2)/1 = 0{,}74\ m/s .$$

نستنتج قيمة ΔV_3 : $\Delta V_3 = 0{,}6\ m/s$.

و أخيرا نستنتج قيمة التسارع : $a = \Delta V_3/2\,\tau = 0{,}74 /0{,}08 = 9{,}25\ m/s^2$.

ــ نرسم شعاع التسارع $\vec{a}$ له نفس منحى الشعاع $\Delta\vec{V}_3$ و باعتماد سلم التسارع $1\ cm \rightarrow 4\ m/s^2$:

$$\left.\begin{array}{l}1\ cm \rightarrow 4\ m/s^2\\ a\ cm \rightarrow 9{,}25\ m/s^2\end{array}\right\} \Rightarrow a = (9{,}25 \times 1)/4 = 2{,}31\ cm .$$



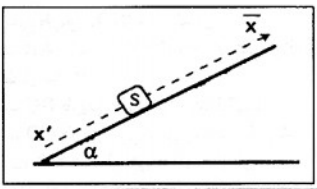
إذن : طول $\vec{a}$ على الرسم هو : 2,31 cm . إذن في الموضع G_3 نرسم سهم طوله 2,31 cm عند G_4 له نفس منحى و جهة $\Delta\vec{V}_3$.

cــ مقارنة قيمة هذا التسارع بقيمة حقل الجاذبية : نلاحظ أن القيمتين متقاربتين جدا و هذا لأن الكرية في سقوط حر حيث :

مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي القوى الخارجية المطبقة على الكرية هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. و منه : $\vec{a} = \vec{g}$

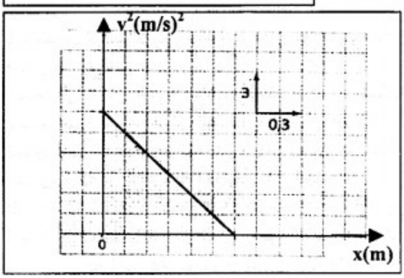
بإسقاط العلاقة $\vec{a} = \vec{g}$ على محورشاقولي Oz موجه نحو الأسفل نحصل على : $a = g$. مميزات قوة الثقل : المنحى : شاقولي ، الجهة : نحو الأسفل ، القيمة : $P = m\,g$ إذن الكرية تسارعها هو $a = g$.

التمرين ــ 39



ندفع جسما صلبا (S) كتلته $m = 100\ g$ ، بسرعة ابتدائية v_0 من نقطة A ، مبدأ الفواصل على المحور x'x المنطبق على خط الميل الأعظم لمستوي مائل بزاوية α عن الأفق . يسمح تجهيز مناسب بقياس سرعة المتحرك v في مواضع مختلفة فواصلها x أثناء حركة الجسم وفق خط الميل الأعظم للمستوي .

تهمل الإحتكاكات . نأخذ $g = 10\ m/s^2$.



1ــ يحدد المنحنى المرفق تغيرات $v^2 = f(x)$

aــ ادرس حركة مركز عطالة الجسم (S)

bــ اكتب العلاقة النظرية $v^2 = f(x)$

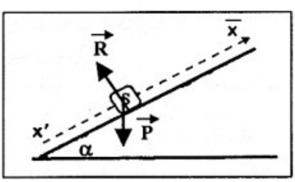
cــ باستغلال البيان ، استنتج : قيمة زاوية الميل α و قيمة السرعة الابتدائية v_0 .

2ــ توجد قوى احتكاك تكافئ قوة وحيدة و معاكسة لجهة حركة (S) وهي ثابتة .

aــ استنتج العبارة الحرفية للتسارع الجديد 'a لمركز عطالة (S)

bــ احسب شدة قوة الإحتكاك f ، علما أن الطاقة الحركية للجسم (S) هي 0,2 J عندما يقطع المسافة $x = 0{,}4\ m$.

الحـل ــ 39



1ــ aــ دراسة حركة مركز عطالة الجسم (S) :

ــ تحديد القوى المطبقة على الجملة (الجسم الصلب (S)) : قوة ثقله $\vec{P}$ و قوة رد فعل المستوي المائل عليه $\vec{R}_N$. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$.

اسقاط على المحاور العلاقة الشعاعية :

$- m g \sin\alpha = m a$ على المحور (x'x) و منه : $a = - g \sin\alpha$. علما المحور موجه في جهة الحركة أي السرعة ووجدنا أن التسرع سالب هذا معناه أن الحركة متباطئة بانتظام .

b– كتابة العلاقة النظرية $v^2 = f(x)$: مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . بالإسقاط على المحور x'x الموجه إيجابا في جهة الحركة نحصل على : $- F = m . a \Rightarrow a = - F/m$ حيث : $F = m g \sin\alpha$ ثابتة .
باستخدام تعريف التسارع : $dv/dt = a = - F/m$. بما أن F ثابتة إذن التسارع كذلك ثابت خلال الحركة . نكامل بالنسبة للزمن فنحصل على : $v = a t + k$. السرعة الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v = v_0 m/s$ إذن : $k = v_0$ و منه : $v = a t + v_0$ و منه : $v = - F/m\ t + v_0$ (1) .
لتحديد فاصلة الكرية ، نكامل من جديد عبارة السرعة و باعتبار أن عند $t = 0$ فإن $x_0 = 0$ فنحصل على :
$x = - 1/2\ F/m . t^2 + v_0 t$ (2) . من العبارة (1) نستخرج عبارة الزمن t و نعوضها في العبارة (2) فنحصل على علاقة السرعة بالفاصلة x : $v^2 - v_0^2 = 2 a (x)$ حيث x هي المسافة المقطوعة بين السرعتين .

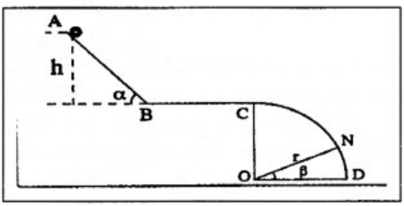
c– استنتاج قيمة زاوية الميل α و قيمة السرعة الإبتدائية v_0 : المنحنى $v^2 = f(x)$ عبارة عن خط مستقيم مائل نحو الأسفل و بالتالي معادلته تكون من الشكل : $v^2 = c x^2 + b$. حيث a يمثل ميل المسقيم و b يمثل ترتيب نقطة تقاطع المستقيم مع محور التراتيب . و منه : $c = \tan\alpha = 9/0,9 = 10$ و $b = 9$ و منه : $v^2 = 10 x^2 + 9$. و بتطبق هذه العبارة التجريبية مع العبارة النظرية $v^2 = 2 a (x) + v_0^2$ نحصل على : $a = 5$ و منه : $a = - g \sin\alpha$ و منه : $\alpha = 30°$
و $v_0^2 = 9$ أي $v_0 = 3\ m/s$.

2– a– استنتاج العبارة الحرفية للتسارع الجديد 'a لمركز عطالة (S) : تحديد القوى المطبقة على الجملة (الجسم الصلب (S)) : قوة ثقله $\vec{P}$ و قوة رد فعل المستوي المائل عليه $\vec{R_N}$ و قوة الإحتكاك f . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{f} = m\vec{a'}$. اسقاط على المحاور العلاقة الشعاعية على المحور (x'x) :
$- m g \sin\alpha - f = m a'$ و منه : $a' = - g \sin\alpha - f/m$. علما المحور موجه في جهة الحركة أي السرعة ووجدنا أن التسرع سالب هذا معناه أن الحركة متباطئة بانتظام .

b– حساب شدة قوة الإحتكاك f : من علاقة الطاقة نستنتج قيمة السرعة $E_C = 1/2\ m v^2 = 0,2 \Rightarrow v = 2\ m/s$
من العبارة $v^2 = 2 a' (x) + v_0^2$ نستنتج قيمة التسارع $a' = 6,25\ m/s^2$.
و أخيرا من العبارة $a' = - g \sin\alpha - f/m$ نستنتج قيمة f $a' = - g \sin\alpha - f/m \Rightarrow f = 0,125\ N$.

التمرين – 40

ينزلق جسم صلب (S) ، يمكن اعتباره نقطيا كتلته $m = 0,1\ kg$ ، على طريق ABCD . الشكل :
– AB منحدر ، تقع النقطة A على ارتفاع h من المستوي الأفقي المار من B .
– BC طريق أفقي طوله 22,75 m .
– CD طريق على شكل ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها r = 3 m ، تقع في مستو شاقولي .
تهمل قوى الإحتكاكات على هذا الجزء من المسار .



1– ينطلق الجسم S من النقطة A دون سرعة ابتدائية ليصل إلى B بسرعة $v_B = 10\ m/s$. بفرض قوى الإحتكاك مهملة :
a– اوجد الإرتفاع h .
b– ما طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) عند انتقاله من A إلى B ؟
c– احسب ، تسارع مركز العطالة ، علما أن $AB = 10\ m$, $g = 10\ m/s^2$
2– يواصل الجسم S حركته على BC ، في وجود قوة احتكاك ثابتة .
a– ارسم القوى الخارجية المطبقة على الجسم S .
b– احسب شدة قوة الاحتكاك إذا علمت أن سرعة مرور الجسم بالنقطة C هي $v_C = 3\ m/s$.
3– يغادر الجسم S المسار الدائري في النقطة N حيث الزاوية $\beta = (DO,ON)$.
a– اوجد عبارة سرعة الجسم S عند النقطة N بدلالة β , g , r بإهمال قيمة سرعته v_C حتى يحافظ على مساره CN .
b– اوجد قيمة الزاوية β .

الحـل – 40

1– a– إيجاد الإرتفاع h : نطبق نظرية الطاقة الحركية بين لحظة الإنطلاق A و لحظة الوصول إلى B :
$\Delta E_C = \Sigma W(\vec{F})_{ext}$ و منه : $1/2\ m v_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$
و لدينا : $W(\vec{P}) = m g h$ و $W(\vec{R}) = 0$ (رد الفعل عمودي على منحى الإنتقال)
و منه : $h = 5\ m \Leftarrow 1/2\ m v_B^2 = m g h$

b– طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) عند انتقاله من A إلى B : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ بإسقاط هذه العلاقة على محور 'xx موازي للمستوي المائل في جهة الحركة نحصل على : $m g \sin\alpha = m a \Rightarrow a = g \sin\alpha$

بما أن المحور 'xx موازي للمستوي المائل في جهة الحركة و التسارع موجب إذن الحركة متسارعة بانتظام .

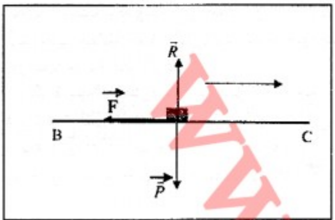
c– حساب تسارع مركز العطالة علما أن $AB = 10\ m$, $g = 10\ m/s^2$: التسارع معرف بالعلاقة $a = dv/dt$

و منه : $v = a\,t + k$. نحدد قيمة k من الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v_0 = 0$ و منه : $k = 0$.

$v = dx/dt = a\,.\,t \Rightarrow x = 1/2\, a\, t^2 + k'$ ، نحدد قيمة 'k من الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $x = 0$ و منه : $k' = 0$.

و منه : $x = 1/2\, a\, t^2$. نحذف الزمن بين علاقتي السرعة و الفاصلة فنحصل على : $x = 1/2\, a\, (v/a)^2 \Rightarrow a = v^2/2x$.

و منه نحصل على قيمة التسارع : $a = v^2/2x = 10^2/(2\,.\,10) = 5\ m/s^2$



2– a– رسم القوى الخارجية المطبقة على الجسم S : القوى المطبقة على الجسم S هي : الثقل $\vec{P}$ ، رد فعل المستوي $\vec{R}$ و قوة الإحتكاك $\vec{F}$.

b– حساب شدة قوة الاحتكاك إذا علمنا أن سرعة مرور الجسم بالنقطة C هي $v_C = 3\ m/s$: نمثل القوى الثلاث في الشكل التالي :

حسب القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,.\,\vec{a}$ بالإسقاط على المحور x'x الموجه في جهة الحركة نحصل على :

$F = -\, m\,.\,a \Rightarrow a = -\, F/m$. باستخدام تعريف التسارع :

$dv/dt = a = -\, F/m$. بما أن F ثابتة إذن التسارع كذلك ثابت خلال الحركة . بما أن المحور 'xx موازي للمستوي الأفقي في جهة الحركة و التسارع موجب إذن الحركة متسارعة بانتظام . التسارع معرف بالعلاقة $a = dv/dt$ و منه : $v = a\,t + k$.

نحدد قيمة k من الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v_0 = v_B$ و منه : $k = v_0 = v_B = 10\ m/s$.

$v = dx/dt = a\,.\,t + v_B \Rightarrow x = 1/2\, a\, t^2 + v_B\, t + k'$ ، نحدد قيمة 'k من الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $x = 0$

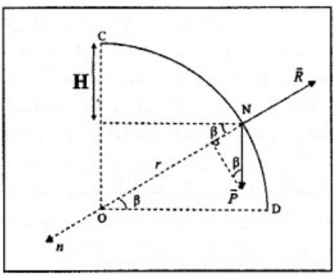
و منه : $k' = 0$. و منه : $x = 1/2\, a\, t^2 + v_B\, t$. نحذف الزمن بين علاقتي السرعة و الفاصلة فنحصل على :

$a = (v_C^2 - v_B^2)/2\,BC = -\,2\ m/s^2$ و منه : $F = -\, m\,.\,a = -\,0{,}1\,(-\,2) = 0{,}2\ N$

3– a– إيجاد عبارة سرعة الجسم S عند النقطة N ، بدلالة β , g , r : نطبق نظرية الطاقة الحركية بين لحظة الإنطلاق C و لحظة الوصول إلى N : $\Delta E_C = \Sigma W(\vec{F})_{ext}$ و منه : $1/2\, m\, v^2_N - 1/2\, m\, v^2_C = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

و لدينا : $W(\vec{P}) = m\, g\, H$ و $W(\vec{R}) = 0$ (رد الفعل عمودي على منحى الإنتقال) بإهمال قيمة السرعة v_C حتى يحافظ على مساره CN . و منه : $1/2\, m\, v^2_N = m\, g\, H \Rightarrow v^2_N = 2\, g\, H$

و لدينا : $H = r(1 - \sin\beta)$ و منه : $v_N = \sqrt{2\, g\, r(1 - \sin\beta)}$



b– إيجاد قيمة الزاوية β :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم ، في مرجع معتبر غاليلي نحصل على :

$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

– العبارات الحرفية لـ $\vec{a_t}$ و $\vec{a_n}$ بدلالة السرعة $\vec{v}$ للجسم : شعاع التسارع في معلم فريني يمكن أن يحلل على الشكل التالي :

$\vec{a} = dv/dt\ \vec{t} + v^2/r\ \vec{n}$ أي : $a_t = dv/dt$ و $a_n = v^2/r$.

و منه : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a_t} + m\,\vec{a_n}$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور 'xx وفق المنحى ON نحصل على :

$-\,R + P \sin\beta = m\, a_n = m v^2/r$

و منه نحصل على : $R = m\, g(3 \sin\beta - 2)$ حيث : $v^2/r = 2\, g\, (1 - \sin\beta)$

يغادر الجسم S المسار الدائري في النقطة N عندما تنعدم قوة رد فعل المسار الدائري $R = 0$.

و منه : $R = m\, g(3 \sin\beta - 2) = 0 \Rightarrow (3 \sin\beta - 2) = 0 \Rightarrow \beta = 41{,}8°$

التمرين – 41

نعتبر في كل التمرين الكرة نقطة مادية ونهمل تأثير الهواء.. لإنجاز إرسال ، يقذف لاعب التنس الكرة شاقوليا نحو الأعلى من نقطة تبعد بـ 1,60 m عن سطح الأرض ثم يضربها بمضربه عندما تبلغ ذروتها الواقعة على بعد 0,40 m فوق نقطة القذف الأول فتذهب بسرعة أفقية v_0 وعليها أن تجتاز شباكا علوه 0,90 m . البعد بين اللاعب والشباك هو 12 m .

1– بأي سرعة يقذف اللاعب الكرة شاقوليا ؟

2– حدد ، في معلم يطلب توضيحه ، معادلة مسار الكرة بعد اصطدامها بالمضرب .

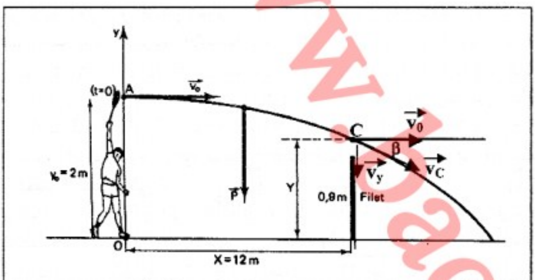
3– ما هي قيمة v_0 حتى تمر الكرة بـ 10 cm فوق الشباك ؟

ما هو ، عند هذا الإجتياز ، منحى شعاع السرعة للكرة ؟ يعطى : $g = 9{,}80\ m/s^2$.

الحـل ــ 41

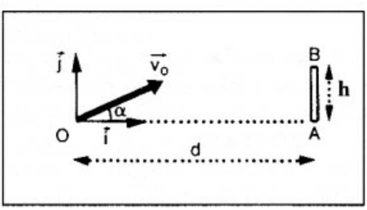
1ــ حتى تصل الكرة علوا قدره 0,40 m ، يقذفها اللاعب شاقوليا بسرعة ابتدائية v_O ، نحصل على قيمتها بدراسة حركة الكرة بين لحظة القذف و لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع h (ذروتها) أين تنعدم سرعتها : الجملة المدروسة هي الكرة . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الكرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v = v_O$ و $y = 0$.
بإسقاط هذه العلاقة على محور شاقولي Oy موجه نحو الأعلى ثم نكامل مرتين العلاقة الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على المعادلة الزمنية للحركة : $a = -g \Rightarrow v = -g\,t + v_O \Rightarrow y = -1/2\, g\, t^2 + v_O\, t$
نحذف الزمن بين علاقتي السرعة و الفاصلة فنحصل على : $(v_h^2 - v_O^2) = 2\,g\,h \Rightarrow v_O = 2{,}8$ m/s
حيث : لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع h (ذروتها) ، تنعدم سرعة الكرة $v_h = 0$ و $h = 0{,}40$ m
2ــ تحديد معادلة مسار الكرة بعد اصطدامها بالمضرب : باعتبار نقطة القذف الثاني هو مبدأ للفواصل و الأزمنة و كذلك محور التراتيب موجه نحو الأعلى .
ــ الكرة الجملة المدروسة هي الكرة . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي . القوى الخارجية المطبقة على الكرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$.
و منه : $\vec{a} = \vec{g}$ الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $x_0 = 0$ و $y = y_0$.
$v_{x0} = v_0$ ، $v_{y0} = 0$. بإسقاط العلاقة $\vec{a} = \vec{g}$ على جملة محاور (O , x , y) نحصل على :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



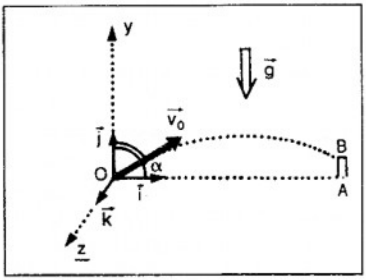
ــ كتابة المركبات $v_x(t)$ و $v_y(t)$ لشعاع السرعة $\vec{v}$ في المعلم (O , x , y) بدلالة الزمن t : مركبات شعاع السرعة نحصل عليها بمكاملة مركبات شعاع التسارع و من الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $v_{x0} = v_0$ و $v_{y0} = 0$. و منه : $v_x(t) = v_0$ و $v_y(t) = -g\,t$
ــ كتابة المركبات $x(t)$ و $y(t)$ لشعاع الموضع في المعلم (O , x , y) بدلالة الزمن t : مركبات شعاع الموضع نحصل عليها بمكاملة مركبات شعاع السرعة و من الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$:
فإن $x_0 = 0$ و $y = y_0 = 2$ m .
و منه : $x(t) = v_0\, t$ و $y(t) = -1/2\, g\, t^2 + y_0$
ــ كتابة معادلة المسار : بحذف الزمن بين معادلتي x و z نحصل على معادلة المسار : $y = -1/2\, g/(v_0)^2 \,.\, x^2 + y_0$
3ــ قيمة v_0 حتى تمر الكرة بـ 10 cm فوق الشباك : حتى تمر الكرة بالنقطة C التي تبعد بـ 10 cm فوق الشباك أي احداثياتها C(12 m , 1 m) هذه الإحداثيات يجب أن تحقق معادلة المسار : $y_C = -1/2\, g/(v_0)^2 \,.\, x_C^2 + 2$
$1 = -1/2\, g/(v_0)^2 \,.\, 12^2 + 2 \Rightarrow v_0 = 26{,}56$ m/s .
ــ منحى شعاع السرعة للكرة عند هذا الإجتياز : لتحديد منحى شعاع السرعة للكرة نحدد قيمة الزاوية التي يصنعها شعاع السرعة مع محور الفواصل أو التراتيب إذن نحدد قيمة الزاوية β التي يصنعها شعاع السرعة مع محور الفواصل :
$\tan\beta = v_{Cy}/v_{Cx} = v_{Cy}/v_0$ ، لنحسب قيمة v_{Cy} : $v_{Cy} = g\, t_C$ ، لنحسب قيمة t_C : من المعادلة الزمنية للحركة :
$x_C = v_0\, t_C$ و منه : $12 = v_0\, t_C \Rightarrow t_C = 12/26{,}56 = 0{,}45$ s و منه : $v_{Cy} = g\, t_C = 9{,}8 \,.\, 0{,}45 = 4{,}41$ m/s
و منه : $\tan\beta = v_{Cy}/v_{Cx} = v_{Cy}/v_0 = 4{,}41/26{,}56 = 0{,}166 \Rightarrow \beta = 9°$

التمرين ــ42



توضع كرة عند النقطة O على سطح أفقي مقابل للمرمى AB ارتفاعه h = 2,44 m على بعد d = 25,0 m من هذا الأخير . يقذف الأعب الكرة (coup franc) فيكسبها سرعة ابتدائية $\vec{v_0}$ في المستوي $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ و تصنع زاوية α = 30° مع الأفق .
1ــ بين أن مسار الكرة يقع في المستوي $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
2ــ اكتب معادلة المسار .
3ــ كم يجب أن تكون قيمة السرعة الابتدائية v_0 حتى تمر الكرة تحت العارضة الأفقية ؟
4ــ ما هي سرعتها حينئذ ؟

5ـ كيف يكون اتجاه شعاع السرعة حينئذ ؟



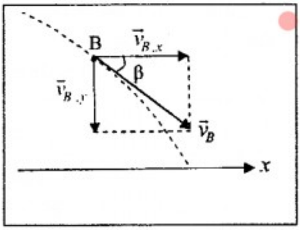
الحـل ـ 42

1ـ تبيان أن مسار الكرة في المستوي $(O;\vec{i};\vec{j})$: الجملة المدروسة هي الكرة . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي .
القوى الخارجية المطبقة على الكرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على :
$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. و منه : $\vec{a} = \vec{g}$ الشروط الإبتدائية :
عند $t = 0$ فإن $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ و $z_0 = 0$.
$v_{x0} = v_0 \cos\alpha$ ، $v_{y0} = v_0 \sin\alpha$ ، $v_{z0} = 0$.

بإسقاط العلاقة $\vec{a} = \vec{g}$ على جملة محاورثم نكامل مرتين العلاقات الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على :

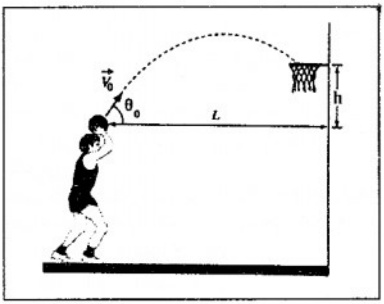
$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -g\,t + v_0 \sin\alpha \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)\,t \\ y = -1/2\, g\, t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t \\ z = 0 \end{cases}$$

العلاقة الأخيرة $(z = 0)$ تبين أن المسار في المستوي Oxy .
2ـ كتابة معادلة المسار : بحذف الزمن بين معادلتي x و y نحصل على معادلة المسار :
$$y = -1/2\, g/(v_0 \cos\alpha)^2\ .\ x^2 + x \tan\alpha$$
3ـ لكي يسجل الأعب الهدف مباشرة تحت العارضة الأفقية يجب أن تكون احداثيي النقطة B تحقق معادلة المسار :
$x_B = d$ و $y_B = h$. أي : $h = -1/2\, g/(v_0\cos\alpha)^2\ d^2 + d\tan\alpha$ و منه : $v_0 = 18{,}6\ m/s$
4ـ سرعتها حينئذ : نطبق نظرية الطاقة الحركية بين لحظة الإنطلاق و لحظة الوصول إلى العارضة الأفقية :
$\Delta E_C = \Sigma W(\vec{F})_{ext}$ و منه : $1/2\, m\, v^2_B - 1/2\, m\, v^2_0 = W(\vec{P})$
و لدينا : $W(\vec{P}) = -m\,g\,h$:
$$1/2\, m\, v^2_B - 1/2\, m\, v^2_0 = -m\,g\,h \Rightarrow v_B = 17{,}2\ m/s$$



5ـ اتجاه شعاع السرعة حينئذ : لتحديد اتجاه شعاع السرعة للكرة نحدد قيمة الزاوية التي يصنعها شعاع السرعة مع محور الفواصل أو التراتيب إذن نحدد قيمة الزاوية β التي يصنعها شعاع السرعة مع محور الفواصل : $\cos\beta = v_{Bx} / v_B$ ،
لنحسب قيمة v_{Bx} : $v_{Bx} = v_0 \cos\alpha = 18{,}6 . \cos\alpha = 16{,}11\ m/s$ ،
و منه : $\cos\beta = v_{Bx} / v_B = 16{,}11/17{,}2 = 0{,}936 \Rightarrow \beta = 20{,}5°$

التمرين ـ 43



يقذف لاعب كرة السلة كرته بسرعة ابتدائية v_0 بزاوية θ_0 بالنسبة للأفق نحو سلة تقع على مسافة L أفقية وعلى ارتفاع h فوق نقطة القذف .
1ـ بين أن عبارة قيمة السرعة الإبتدائية من الشكل :
$$v^2_0 = [gL] / [2 \cos^2\theta_0 (\tan\theta_0 - h/L)]$$

الحـل ـ 43

1ـ تبيان أن عبارة قيمة السرعة الإبتدائية من الشكل :
$$v^2_0 = [gL] / [2 \cos^2\theta_0 (\tan\theta_0 - h/L)]$$
ـ تبيان أن مسار الكرة في المستوي $(O;\vec{i};\vec{j})$: الجملة المدروسة هي الكرة . مرجع الدراسة هو المرجع الأرضي المعتبر غاليلي .
القوى الخارجية المطبقة على الكرة هي : قوة الثقل $\vec{P}$ فقط . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع أرضي غاليلي نحصل على :
$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$. و منه : $\vec{a} = \vec{g}$ الشروط الإبتدائية : عند $t = 0$ فإن $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ و $z_0 = 0$.
$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$ ، $v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$ ، $v_{z0} = 0$.
بإسقاط العلاقة $\vec{a} = \vec{g}$ على جملة محاورثم نكامل مرتين العلاقات الناتجة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية نحصل على :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y = -g\,t + v_0 \sin\theta_0 \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (v_0 \cos\theta_0)\,t \\ y = -1/2\, g\, t^2 + (v_0 \sin\theta_0)\,t \\ z = 0 \end{cases}$$

العلاقة الأخيرة $(z = 0)$ تبين أن المسار في المستوي Oxy .

ــ كتابة معادلة المسار : بحذف الزمن بين معادلتي x و y نحصل على معادلة المسار :

$$y = -1/2\ g/(v_0 \cos\theta_0)^2\ x^2 + x \tan\theta_0$$

ــ عندما تكون الكرة عند السلة تكون احداثياتها : $(x = L\ ,\ y = h)$ و منه : $h = -1/2\ g/(v_0 \cos\theta_0)^2\ L^2 + L \tan\theta_0$

و منه : $g L^2 / 2 (v_0 \cos\theta_0)^2 = L \tan\theta_0 - h \Rightarrow 2 (v_0 \cos\theta_0)^2 (L \tan\theta_0 - h) = g L^2$

بالقسمة على L نحصل على : $2 (v_0 \cos\theta_0)^2 (\tan\theta_0 - h/L) = g L$

و منه : $v^2_0 = [gL] / [2 \cos^2\theta_0 (\tan\theta_0 - h/L)]$

التمرين ــ 44

لقد أنجز العالم روذرفرد ، سنة 1911 ، تجربة تمكن في قذفه لورقة رفيعة من ذهب بواسطة دقائق تدعىالدقائق α ، فلاحظ بأن غالبية هذه الدقائق تخترق الورقة ، بينما البعض القليل يخضع لانحراف من مساراتها . استنتج من ذلك بأن المادة متكونة عمليا من الفراغ واقترح نموذجه للذرة والذي يشبه النموذج الكوكبي ، حيث تتكون النواة من جزء مشحون ايجابيا تتمركز فيه معظم الكتلة ، بينما تدور حول هذه النواة الكترونات مشحونة سلبيا .

ولكن قد تم التشكيك في هذا النموذج من طرف نيالس بور حيث طرح عدة ملاحظات من بينها :

ــ لماذا تتماثل كل ذرات نفس المادة ، مهما كان مصدرها أو منطقتها ؟

ــ لو كانت للذرت بنية كوكبية ، لخضعت لتغيرات أثناء التصادمات التي تحدث بينها ، ولكن لم يلاحظ ذلك عند تسخين أو قنبلة الذرات . إن هذه املاحظات مكنت بور ، سنة 1913 ، من تطوير نموذج روذرفرد حيث أرفق كل مدار الكتروني بطاقة معينة ، كما صرح بأن طاقة الذرة لا يمكن أن تأخذ قيما كيفية .

وفي حالتها العادية ، تكون للطاقة أصغر طاقة توافق الاستقرار الأعظمي . كما سمح هذا النموذج بتفسير ظاهرة الأطياف .

الأسئلــــة :

1 . ما هي دقائق α ؟

2 . قبل نموذج روذرفرد ، ما هو نموذج الذرة الذي كان سائدا ؟

3 . ما هي عيوب نموذج روذرفرد ؟

4 . كيف صححت هذه العيوب من طرف بور ؟

5 . ما سبب الأطياف ؟ ما هي مجالات تطبيقها ؟

الحــل ــ 44

1ــ الدقائق α هي أنوية الهيليوم He

2ــ النموذج الذي كان سائدا قبل نموذج روذرفورد هو نموذج دالتون (1803).

من أجل شرح التفاعلات الكيميائية تصور دالتون أن الذرات هي كرات مملوءة يمكن أن تتحد مع بعضها خلال التفاعلات الكيميائية .

3ــ عيوب نموذج روذفورد : تشبيه البنية الذرية بالنموذج الكوكبي

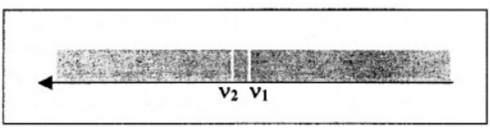
و كأنه يشبه القمرالصناعي بالإلكترون و الأرض بالنواة ، و نحن نعلم أن كل ارتفاعات القمر الصناعي عن سطح الأرض محتملة لو كان الأمر كذلك بالنسبة للإلكترون و النواة ، لوجدنا ذرات عنصر واحد مختلفة في اشكالها نتيجة التصادمات التي يمكن أن تجعل الإلكترونات في كل مكان في الذرة .

4ــ بين بور أن طاقة الذرة مكممة ، أي لا تأخذ إلا قيما محددة (أي غير مستمرة) ، و أن انتقال إلكترونات من مدار إلى أخر لا يتم إلا بواسطة امتصاص أو بعث فوتون طاقته مساوية للفرق بين طاقتي المدارين .

5ــ نسمي طيف ضوء مجموع الإشعاعات التي يتكون منها هذا الضوء ، و يتميز كل إشعاع منها بطول الموجة في الفراغ .

التمرين ــ 45

يظهر طيف إصدار الصوديوم ثنائية doublet صفراء مميزة لهذا العنصر ، المتكون من خطين تواترهما :



$$\upsilon_1 = 5{,}084 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

و $$\upsilon_2 = 5{,}090 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

1ــ احسب طولي موجتي الخطين في الفراغ .

تأكد ، باستعمال الطيف المستمر للضوء الأبيض من أن لون الزوج doublet أصفر .

و لعدم توفر الألوان استعن بالجدول التالي :

615,0	579,1	577,0	546,1	435,8	404,6	λ_0 (n m)
أحمر	أصفر	أصفر	أخضر	أزرق	بنفسجي	اللون

2ــ ما هي الظاهرة الفيزيائية التي تسمح بتفسير هذا الطيف علما أنه يعطي مستوى الطاقة الأساسي E_1 لذرة الصوديوم طاقتها $E_1 = -5{,}139$ eV ؟

3ـ حدد الطاقات E_j و E_k للمستويين المثارين المرتبطين بالانتقالين نحو المستوى الأساسي .

4ـ استنتج تمثيل جزء من بيان مستويات الطاقة للصوديوم المحددة بالإنتقالين .   المعطيات :

$1\ eV = 1{,}602 \times 10^{-19}\ J$ ، $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ J.s$ ، $c = 2{,}998 \times 10^{8}\ m.s^{-1}$

الحــل ــ 45

1ـ حساب طولي موجتي الخطين في الفراغ : $\lambda_1 = c/\nu_1 = 589{,}6\ nm$ ، $\lambda_2 = c/\nu_2 = 589{,}0\ nm$.

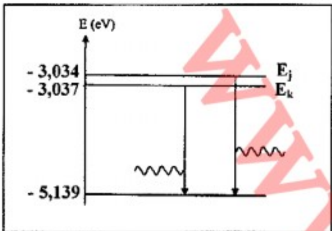
فعلا نلاحظ أن طول الموجة للإشعاعين موجود في مجال اللون الأصفر .

2ـ الظاهرة الفيزيائية التي تسمح بتفسير هذا الطيف : تحول الذرة من الحالة المثارة إلى أقل إثارة (مثلا حالة مستوى الطاقة الأساسي) يصاحبه تحرر طاقة على شكل فوتونات : $E = h\,\nu$ حيث E هي الطاقة المتحررة هذه الطاقة تصدر على شكل اشعاعات كهرومغناطيسية .

3ـ تحديد الطاقات E_j و E_k للمستويين المثارين المرتبطين بالإنتقالين نحو المستوى الأساسي :

ــ عندما تنتقل ذرات من المستوى المثار E_k إلى مستوى الطاقة الأساسي تفقد طاقة قدرها $E_k - E_1$ المشكلة لفوتون إشعاعه الكهرومغناطيسي الموافق تواتره : ν_1 بحيث : $h\,\nu_1 = E_k - E_1$

$h\,\nu_1 = E_k - E_1 = E_k - (-5{,}139) = E_k + 5{,}139 \Rightarrow E_k = h\,\nu_1 - 5{,}139\ eV = -3{,}037\ eV$.



ــ عندما تنتقل ذرات من المستوى المثار E_j إلى مستوى الطاقة الأساسي تفقد طاقة قدرها $E_j - E_1$ المشكلة لفوتون إشعاعه الكهرومغناطيسي الموافق تواتره : ν_2 بحيث : $h\,\nu_2 = E_j - E_1$

$h\,\nu_2 = E_j - E_1 = E_j - (-5{,}139) = E_j + 5{,}139$.

$\Rightarrow E_j = h\,\nu_2 - 5{,}139\ eV = -3{,}034\ eV$

4ـ استنتاج تمثيل جزء من بيان مستويات الطاقة : للصوديوم المحددة بالإنتقالين .

التمرين ــ 46

لنفترض أن كوكبا يصدر إشعاعا لضوء تحت البنفسجي عبر جو غازي ، متكون في غالبيته من ذرات الهيدروجين .

أطوال موجات الإشعاع أقل من 91,2 nm .

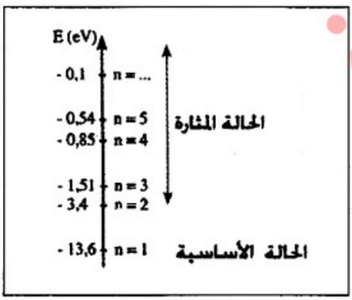
1ـ اعط معنى لمستوى الطاقة . $E = 0\ e\,V$

2ـ ما هو مستوى الطاقة لذرة الهيدروجين في حالتها الأساسية عندما تتأثر بإشعاع ذي طول موجة 91,2 nm ؟

3ـ ما هو طول موجة الإشعاع الصادر ، عندما تنتقل ذرة من الهيدروجين من الحالة المثارة $n = 3$ إلى الحالة $n = 2$ ؟

المعطيات :

$c = 3{,}0\times 10^{8}\ m.s^{-1}$ ، $h = 6{,}62\times 10^{-34}\ J.s$ ، $1\ e = 1{,}6\times 10^{-19}\ C$



الحــل ــ 46

1ـ معنى لمستوى الطاقة $E = 0\ e\,V$:

ــ تنقص شدة إرتباط الإلكترون بنواة ذرة الهيدروجين H (التي تحمل الشحنة + e) كلما كان مستوى الطاقة مرتفع . عندما تكون الذرة مثارة بشكل أعظمي (E_∞) ينفصل الإلكترون عن النواة : نحصل على أيون H^+ و إلكترون بسرعة معدومة : نقول في هذه الحالة أن الذرة في حالة عتبة التأين .

ــ إذا أخذنا ذرة في حالة عتبة التأين كحالة مرجعية بطاقة معدومة (أي إذا وضعنا $E_\infty = 0$) فإن مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين H قيمتها بالإلكترون فولط : $E_n = -13{,}6/n^2$ ، حيث العدد n يسمى العدد الكمي الأساسي لذرة الهيدروجين H و منه معنى مستوى الطاقة $E = 0\ e\,V$ هو : E_∞

2ـ مستوى الطاقة لذرة الهيدروجين في حالتها الأساسية عندما تتأثر بإشعاع ذي طول موجة 91,2 nm : لكي نغير طاقة ذرة من المستوي E_1 إلى المستوي $E_n > E_1$ يجب أن نوفر للذرة الطاقة $E = E_n - E_1$:

ــ هذه الطاقة يمكن أن تأتي من الفوتون الممتص من قبل الذرة و الذي يتخلى عن كل طاقته وبالتالي يجب أن تكون للفوتون الطاقة $E = h\,\nu = h\,c/\lambda$ لكي يمكن أن يمتص .

و منه : $h\,c/\lambda = E_n - E_1 = E_n - (-13{,}6) = E_n + 13{,}6 \Rightarrow E_n = h\,c/\lambda - 13{,}6\ eV$

و منه : $E_n = (6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}) / (91{,}2 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) - 13{,}6\ eV = 0$

نستنتج أن مستوى الطاقة لذرة الهيدروجين عندما تتأثر بإشعاع ذي طول موجة 91,2 nm هو مستوى عتبة التأين أي الذرة مثارة بشكل أعظمي (E_∞) حيث يمكن أن ينفصل الإلكترون عن النواة : نحصل على أيون H^+ و إلكترون بسرعة معدومة :

نقول في هذه الحالة أن الذرة في حالة عتبة التأين .

3ــ طول موجة الإشعاع الصادر ، عندما تنتقل ذرة من الهيدروجين من الحالة المثارة $n = 3$ إلى الحالة $n = 2$:

ــ عندما تنتقل ذرات الهيدروجين من المستوي المثار $n = 3$ إلى المستوي المثار $n = 2$ تفقد طاقة قدرها $E = E_3 - E_2$ المشكلة لفوتون إشعاعه الكهرومغناطيسي الموافق تواتره : ν_3 بحيث : $h.\nu_3 = E_3 - E_2$

و منه : $\nu_3 = (E_3 - E_2)/ h = (-13,6/9 - (-13,6/4) . 1,6 . 10^{-19} / (6,62 . 10^{-34}) = 0,4565 . 10^{15}$ Hz

و طول الموجة الموافقة لهذا الإشعاع هو : $\lambda_3 = c/\nu_3 = (3 . 10^8) /(0,4565 . 10^{15}) = 6,571 . 10^{-7}$ m = 0,657 µm