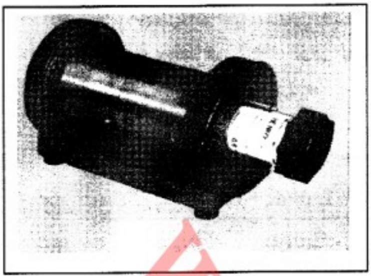
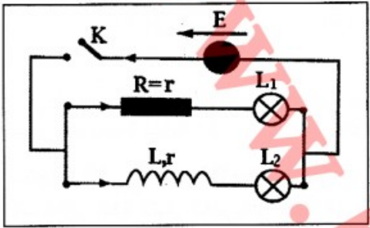
2 . الوشائع و ثنائي القطب RL



وصف الوشيعة و تصرفها في جزء من دارة

تتكون الوشيعة من سلك طويل من النحاس معزول بطبقة من الورنيش (vernis) ملفوف حول اسطوانة عازلة . يوجد في بعض الوشائع نواة حديدية تكون داخل الأسطوانة وهذا يزيد من فعل الوشيعة .
نربط طرفي الوشيعة إلى مقياس أوم ، فنجد أنه يشير إلى قيمة ما ، نستنتج أن للوشيعة خاصية المقاومة لذا نقول وشيعة مقاومة .

تصرف الوشيعة في جزء من دارة

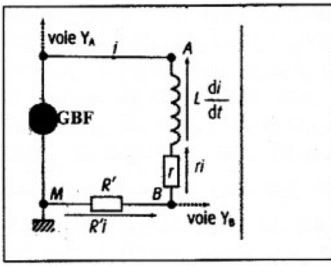


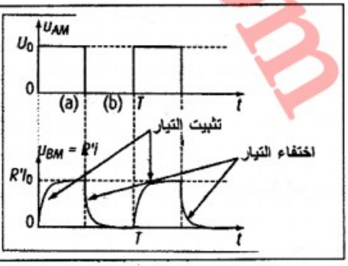
حتى نتعرف على كيفية تصرف وشيعة في جزء من دارة كهربائية ، نحقق دارة كهربائية كما في الشكل المرافق .
بعد غلق القاطعة تتغير شدة التيار المار بالدارة من القيمة 0 لحظة غلقها إلى قيمة (i) بعد عدة ثوان لذا نشاهد ما يلي :
بالنسبة للمصباح L_1 فيتوهج مباشرة وتكون إنارته ثابتة منذ البداية أما المصباح L_2 فإنه يتوهج متأخرا عن المصباح L_1 ، و بعد ثوان قليلة تصبح إنارة المصباحين متماثلة ، أي أن التيار المار بالفرع الأول نفسه الذي يمر بالفرع الثاني .
يدل ذلك على أن ثبات شدة التيار في الفرع الذي يحوي وشيعة كان تدريجيا وهي ظاهرة انتقالية ، سببها الوشيعة ، حيث حرضت تيارا يعاكس تيار المولد و هو سبب تأخير ظهور التيار في الوشيعة آنيا .
نستنتج ان للوشيعة خاصية أخرى هي خاصية التحريض لذا نقول أنها وشيعة تحريضية .
أما عندما تصبح إنارة المصباحين متماثلة أي شدة التيار المار بالفرعين نفسها و ذات قيمة ثابتة نقول عندها أن تصرف الوشيعة مماثل لتصرف المقاومة الموجودة بالفرع الأول .

نتيجة :
ـــ تمانع الوشيعة لوقت قصير ظهور التيار في الدارة (نظام انتقالي) .
ـــ تتصرف الوشيعة كناقل أومي عندما يجتازها تيار ثابت الشدة (نظام دائم) .

تأثير الوشيعة على التيار في جزء من دارة

حتى نتعرف على تأثير الوشيعة على التيار في جزء من دارة كهربائية ، نحقق دارة كهربائية كما في الشكل المرافق :
ـــ بعد غلق القطعة ، التيار لا يأخذ قيمته الأعظمية مباشرة بل تدريجيا .
ـــ بعد فتح القطعة ، التيار لا ينعدم مباشرة بل تدريجيا .



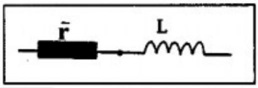


نتيجة : الوشيعة الموضوعة في فرع من دارة كهربائية تمانع تثبيت التيار و كذا اختفائه فالتيار الذي يعبرها يكون غير منقطع .
ما يسمى بظاهرة التحريض الذاتي

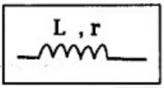
مميزات الوشيعة : لكل وشيعة ميزتين هما :
ــ مقاومتها الداخلية (r) و تقدر بالأوم (Ω) ــ ذاتيتها (L) و تقدر بالهنري (H) .

الذاتية L :
مقدار موجب تتعلق قيمته بالشكل الهندسي للوشيعة (طولها l ، نصف قطرها R ، عدد لفاتها N) . كما أن وجود النواة الحديدية يؤثر على قيمة الذاتية .

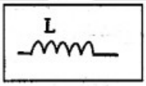
ــ يرمز للوشيعة بالرمز التالي :



أو

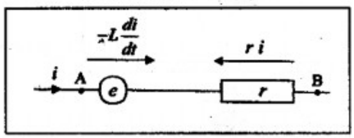


ــ إذا كانت الوشيعة صافية أي r = 0 فيرمز لها بالشكل :



ــ تعطى عبارة التوتر الكهربائي بين طرفي وشيعة بالشكل التالي :

u = L di/dt + ri



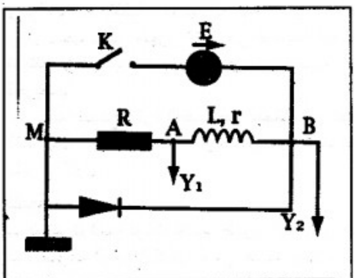
ــ في حالة تيار ثابت الشدة : di/dt = 0 . في هذه الحالة تتصرف الوشيعة كناقل أومي أي : **u = r . i**
ــ في حالة وشيعة صافية : r = 0 إذن : **u = L di/dt**

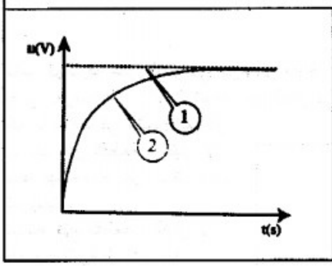
استجابة ثنائي القطب RL لسلم التوتر

1ــ تطور شدة التيار الكهربائي المار في وشيعة تحريضية

نشاط :

التجهيز التجريبي :
حقن الدارة المكونة من العناصر التالية :
ــ مولد توتر ثابت E = 6 V . ــ وشيعة (L = 1 H , r = 10 Ω) .
ــ مقاومة R = 170 Ω .
ــ صمام عادي (يسمح بمرور التيار في جهة ولا يسمح له بالمرور بالاتجاه المعاكس) . ــ راسم اهتزازات ذو ذاكرة . ــ قاطعة .





a. تطور شدة التيار نحو قيمة ثابتة غير معدومة

أغلق القاطعة فيظهر على شاشة راسم الاهتزازات بيانين 1 . 2 .

1ــ مالمقصود بــ RL ؟
ــ ثنائي القطب الذي يحتوي على التسلسل مقاومة R و وشيعة L يدعى بثنائي القطب RL .

2ــ حدد البيان الذي يمثل u_{BM} و كيف يتطور . بماذا تدعى الظاهرة الملاحظة ؟
عند غلق القاطعة يظهر على شاشة راسم الاهتزازات البيانين (1) و (2) . حيث :
يمثل البيان رقم (1) التوتر u_{BM} بين طرفي ثنائي القطب RL وهو ثابت و يساوي E . بحيث بعد غلق القاطعة مباشرة ، التوتر u_{BM} ينتقل آنيا و فجأة من القيمة الإبتدائية 0 إلى القيم E (القوة المحركة الكهربائية للمولد) و التي يثبت عندها .
نقول في هذه الحالة أن ثنائي القطب RL خاضع لسلم توتر .

سلم التوتر : في سلم التوتر ، ينتقل التوتر الذي كان في البداية معدوم لحظيا إلى قيمة أخرى معينة يحافظ عليها .

3ــ حدد البيان الذي يمثل u_{AM} و كيف يتطور ؟
يمثل البيان رقم (2) التوتر u_{AB} بين طرفي المقاومة حيث يتطور هذا التوتر تدريجيا خلال عملية تثبيت التيار (**نظام انتقالي**) حتى يصل إلى قيمة $u_{AM} = E$ ، ثابتة عند نهاية ثبوت التيار (**نظام دائم**) .

ـ أي البيانين يمكننا من متابعة تغير شدة التيار الكهربائي ؟

ـ على المدخل Y_1 (البيان 2) نشاهد التوتر u_{AM} بين طرفي الناقل الأومي $u_{AM} = R . i$ والذي سوف يمثل صورة شدة التيار $i = u_{AM} /R$ حسب تقريب R بحيث عندما تكون قيمة R صغيرة جدا تصبح $i = u_{AM}$ ، و منه فإن u_{AM} يمكن أن يمثل الشدة $i (t)$.

ـ كيف يتطور التوتر u_{AM} بين طرفي الناقل الأومي ؟

ـ تمر تغيرات u_{AM} بمرحلتين :

1ـ مرحلة انتقالية) : خلال هذه المرحلة يتغير التوتر بين طرفي المقاومة تدريجيا حتى يصل إلى قيمة عظمى .

2ـ مرحلة دائمة (نظام دائم) : خلال هذه المرحلة تكون قيمة التوتر u_{AM} عظمى و ثابتة هي :

$$u_{AM(max)} = E = R . I_0$$

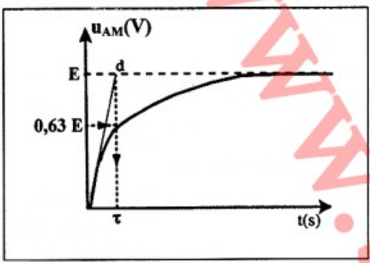
ـ كيف تتغير شدة التيار الكهربائي في الدارة ؟

بما أن $u_{AM} = Ri$ و R ثابتة إذن فإن تغيرات شدة التيار $i = f(t)$ مماثلة تماما لتغيرات التوتر u_{AM} كما بالوثيقة . و منه فإن شدة اليار تمر بمرحلتين :

1ـ مرحلة انتقالية (نظام انتقالي) : خلال هذه المرحلة تتزايد شدة التيار المار بالدارة تدريجيا مقتربة من قيمة عظمى .

2ـ مرحلة دائـة (نظام دائم) : خلال هذه المرحلة تكون شدة التيار وصلت لقيمة عظمى تعطى بالعلاقة التالية :

$$I_0 = u_{AM(max)}/R = E/R$$



ـ ارسم المماس للبيان $u_{AM} = f(t)$ عند المبدأ واستنتج فاصلة نقطة تقاطعه مع محور الأزمنة .

ـ المماس للبيان يقطع الخط المقارب $u = E$ عند نقطة فاصلتها$t = 5,55$ ms

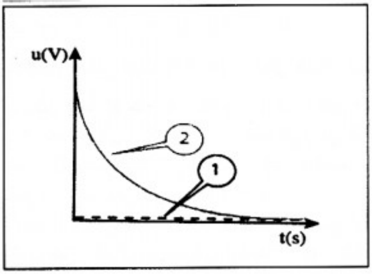
ـ قارن النتيجة التي تحصلت عليها مع المقدار $L/(R + r)$.

ـ $L/(R + r) = 1/(170 + 10) = 5,55$ ms .

ثابت الزمن لثنائي القطب RL :

المماس للبيان $i = f(t)$ يقطع الخط المقارب $u = E$ عند نقطة فاصلتها توافق ثابت الزمن و منه : $\tau = L/(R + r)$.

b. تطور شدة التيار نحو قيمة ثابتة معدومة



افتح القاطعة فيظهر على شاشة راسم الإهتزازات بيانين جديدين (1) ، (2) .

ـ ماذا يمثل كل بيان ؟

يمثل البيان (1) تغيرات u_{BM} حيث $u_{BM} = 0$ لأن المولد خارج الدارة .

يمثل البيان (2) تغيرات التوتر بين طرفي المقاومة .

ـ كيف يتطور التوتر u_{AM} بين طرفي الناقل الأومي ؟

ـ تمر تغيرات u_{AM} بمرحلتين :

1ـ مرحلة انتقالية (نظام انتقالي) : خلال هذه المرحلة تتناقص u_{AM} تدريجيا مقتربة من قيمة معدومة .

2ـ مرحلة دائمة (نظام دائم) : في هذه المرحلة تنعدم شدة التيار الكهربائي .

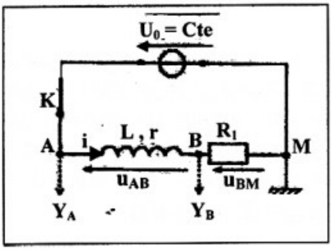
ـ كيف تتغير شدة التيار الكهربائي في الدارة ؟

بما أن $u_{AM} = Ri$ و R ثابتة إذن فإن تغيرات شدة التيار $i = f(t)$ مماثلة تماما لتغيرات التوتر u_{AM} كما بالوثيقة . نلاحظ في هذه الوثيقة أن شدة التيار تمر بمرحلتين :

1ـ مرحلة انتقالية (نظام انتقالي) : خلال هذه المرحلة تتناقص شدة التيار تدريجيا مقتربة من قيمة معدومة .

2ـ مرحلة دائمة (نظام دائم) : في هذه المرحلة تنعدم شدة التيار الكهربائي .

الدراسة النظرية



نحقق التركيبة الموضحة في الشكل المقابل :

ـ على المدخل Y_A نشاهد التوتر u_{AM} . بين طرفي ثنائي القطب R_1L .

ـ على المدخل Y_B نشاهد التوتر u_{BM} بين طرفي الناقل الأومي و بما أن $u_{BM} = R_1i$ و R_1 ثابتة إذن فإن تغيرات شدة التيار $i = f(t)$ مماثلة تماما لتغيرات التوتر u_{BM} . حيث : $i = u_{BM} / R_1$.

a. تطور شدة التيار نحو قيمة ثابتة غير معدومة

القاطعة K مغلوقة . المعادلة التفاضلية :

بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب : $u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$ خلال مرحلة تثبيت التيار التوتر بين طرفي المولد يبقى ثابت :

$u_{AM} = U_0 = E$. لكن $u_{BM} = R_1 i$ و $u_{AB} = L\, di/dt + ri$ و $u_{AM} = E$ بالتعويض نجد أن : $E = L\, di/dt + ri + R_1 i$

و منه : $E = L\, di/dt + (R_1 + r)\, i$ نضع : $R_1 + r = R$ و منه : $E = L\, di/dt + Ri$ نقسم الطرفين على R فنجد :

$$\mathbf{L/R\; di/dt + i = E/R}$$ بما أن $\tau = L/R$ ، $I_0 = E/R$

تصبح المعادلة بعد القسمة على τ على الشكل التالي : $\mathbf{di/dt + 1/\tau\; i = I_0/\tau}$

حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $\mathbf{i = A + B \exp(-t/\tau)}$.

تحديد عبارة كل من A ، B و τ :

حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i(t) = A + B \exp(-t/\tau)$ ، يجب أن يحقق المعادلة .

إذن لدينا : $di(t)/dt = -B/\tau \exp(-t/\tau)$ نعوض عن $i(t)$ و di/dt في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$$-B/\tau \exp(-t/\tau) + (R)/L\, [A + B \exp(-t/\tau)] = E/L$$
$$\Leftrightarrow -B/\tau \exp(-t/\tau) + A\,(R)/L + (R)/L\,.\,B \exp(-t/\tau) = E/L$$
$$\Leftrightarrow [-B/\tau + B\,(R)/L]\, \exp(-t/\tau) = E/L - A\,(R)/L$$

هذه المعادلة محققة إذا كان : • $-B/\tau + B\,(R)/L = 0$ أي : $B/\tau = B\,(R)/L$ و منه : $\tau = L/R$

• $E/L - A\,(R)/L = 0$ أي : $A\,(R)/L = E/L$ و منه : $A = E/R$

نحدد قيمة B من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $i = 0$ (شرط استمرارية شدة التيار نتيجة وجود الوشيعة)

و منه : $i(t = 0) = E/R + B \exp(-t/\tau) = E/R + B$ لأن : $\exp(0) = 1$

و منه : $E/(R) + B = 0 \Leftrightarrow B = -E/R$ و منه الشدة i للتيار تكتب على الشكل :

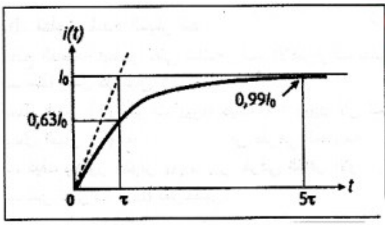
$$\mathbf{i(t) = E/R\, [1 - \exp(-t/\tau)]} \quad \text{مع :} \quad \mathbf{\tau = L/R}$$

إذن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة ل i حلها من الشكل : $\mathbf{i(t) = I_0\, [1 - \exp(-t/\tau)]}$ حيث : $\mathbf{I_0 = E/R}$.

حالات خاصة :

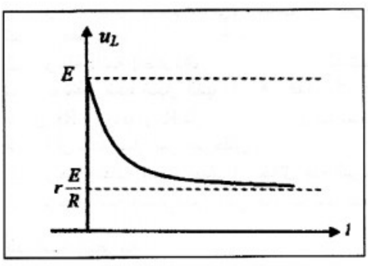
من أجل $t = 0$ نجد $i(0) = 0$ ،

من أجل $t = \tau$ نجد $i(\tau) = 0{,}63\, I_0$.



— **تمثيل منحنى الدالة $i = f(t)$** : انظر الشكل المقابل .

— **تأثير قيمة R على A ، B و τ** : عندما تكبر قيمة المقاومة R فإن A تصغر لأن : $A = E/R$. شدة التيار في الدارة تكون ضعيفة جدا . B تصغر قيمة لأن : $B = -A$. τ تصغر لأن : التيار يظهر في الدارة بسرعة أكبر لأن : $\tau = L/R$.



— **تمثيل منحنى الدالة $u_L = u_{AB} = f(t)$** : من أجل وشيعة $(r \neq 0)$:

تكون عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_L = L\, di/dt + ri$

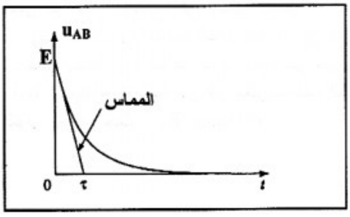
لكن $i(t) = I_0\, [1 - \exp(-t/\tau)]$. نشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$di/dt = I_0/\tau \exp(-t/\tau)$ ، بالتعويض في عبارة التوتر u_{AB} نجد أن :

$u_{AB} = L\, I_0/\tau \exp(-t/\tau)$ ، بما أن عبارة $\tau = L/R$ فإن :

$$\mathbf{u_L = r\, I_0 + I_0 \exp(-t/\tau)[R - r]} \quad \text{حيث :} \quad R_1 + r = R$$

أو : $$\mathbf{u_L = rE/R + E \exp(-t/\tau)[1 - r/R]}$$



— **تمثيل منحنى الدالة $u_L = u_{AB} = f(t)$** : من أجل وشيعة $(r = 0)$:

تكون عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_{AB} = L\, di/dt$

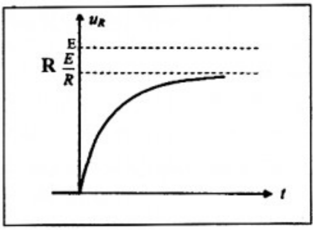
لكن $i(t) = I_0\, [1 - \exp(-t/\tau)]$. نشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$di/dt = I_0/\tau \exp(-t/\tau)$ ، بالتعويض في عبارة التوتر u_{AB} نجد أن :

$u_{AB} = L\, I_0/\tau \exp(-t/\tau)$ ، بما أن عبارة $\tau = L/R$ فإن :

$$\mathbf{u_{AB} = E \exp(-t/\tau)}$$

— تمثيل منحنى الدالة $u_R = u_{BM} = R_1 i = f(t)$:



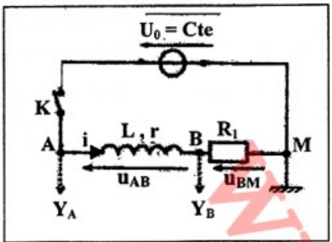
تكون عبارة التوتر بين طرفي المقاومة : $u_R = R_1 i$

لكن $i(t) = I_0\,[1 - \exp(-t/\tau)]$.بالتعويض في عبارة التوتر u_R نجد أن :

$$u_R = R_1 I_0 [1 - \exp(-t/\tau)]$$

أو : $$u_R = R_1 E/R\,[1 - \exp(-t/\tau)]$$

b. تطور شدة التيار نحو قيمة ثابتة معدومة



حالة القاطعة مفتوحة : بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب : $u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$

بما أن $u_{AM} = 0$ نحصل على : $0 = L\,di/dt + ri + R_1 i$

و منه : $0 = L\,di/dt + (r + R_1)\,i$. نضع $R_1 + r = R$

$0 = L\,di/dt + Ri$ بقسمة الطرفين على R نجد : $0 = L/R\,di/dt + i$

بقسمة الطرفين على τ نجد : $di/dt + L/\tau\,.\,i = 0$

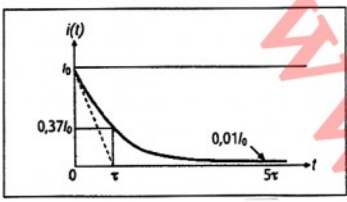
و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة لــ (i) يكون حلها من الشكل :

$$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$$

حالات خاصة :

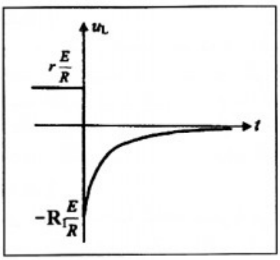
من أجل $t = 0$ نجد : $i(0) = I_0$

من أجل $t = \tau$ نجد : $i(\tau) = 0{,}37\,I_0$



— تمثيل منحنى الدالة $i = f(t)$: انظر الشكل المقابل .

— تمثيل منحنى الدالة $u_{AB} = f(t)$: من أجل وشيعة $(r \neq 0)$:



تكون عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_{AB} = L\,di/dt + r\,i$

لكن $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$. نشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$di/dt = -\,I_0/\tau \exp(-t/\tau)$ بالتعويض في عبارة التوتر u_{AB}

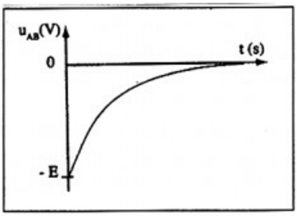
نجد أن : $u_{AB} = -\,L\,I_0/\tau \exp(-t/\tau)$.

بما أن $\tau = L/R$ فإن عبارة u_{AB} تكتب على الشكل التالي :

$$u_{AB} = I_0 \exp(-t/\tau)[r - R]$$

أو : $u_{AB} = E \exp(-t/\tau)[r/R - 1]$ حيث : $R_1 + r = R$

— تمثيل منحنى الدالة $u_{AB} = f(t)$: من أجل وشيعة صافية $(r = 0)$:



تكون عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_{AB} = L\,di/dt$

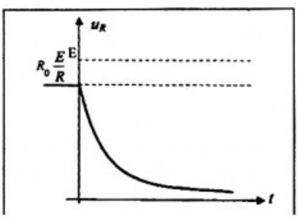
لكن $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$. نشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$di/dt = -\,I_0/\tau \exp(-t/\tau)$ بالتعويض في عبارة التوتر u_{AB}

نجد أن : $u_{AB} = -\,L\,I_0/\tau \exp(-t/\tau)$.

بما أن $\tau = L/R$ فإن عبارة u_{AB} تكتب على الشكل التالي :

$$u_{AB} = -\,E \exp(-t/\tau)$$



— تمثيل منحنى الدالة $u_R = u_{BM} = R_1 i = f(t)$:

تكون عبارة التوتر بين طرفي المقاومة : $u_R = R_1 i$

لكن $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)]$. بالتعويض في عبارة التوتر u_R نجد أن :

$$u_R = R_1 I_0 \exp(-t/\tau)]$$

أو : $$u_R = R_1 E/R \exp(-t/\tau)]$$

ثابت الزمن لثنائي القطب RL :

هو الزمن اللازم لتصل شدة التيار المار بالدارة بعد غلق القاطعة إلى قيمة تساوي 63 % من قيمتها العظمى والتي تبلغها عند ثبوت الشدة (نظام دائم) .

أي $i = 0,63\ I_0$. أو هو الزمن اللأزم لكي تصل شدة التيار المار بالدارة بعد فتح القاطعة إلى القيمة 37% من قيمتها الإبتدائية لحظة فتح القاطعة . رمزه τ وحدته الثانية .

ـ **تحديد ثابت الزمن بيانيا :** لتحديد ثابت الزمن الزمن بيانيا لدينا توجد طريقتان :

الطريقة الأولى :

ـ هو الزمن الآزم لكي تصل قيمة شدة التيار i إلى 63 % من قيمته العظمى . أي فاصلة النقطة التي ترتيبها $0,63\ I_0$.

الطريقة الثانية :

نرسم المماس للبيان عند المبدأ$(t = 0)$ ، فيقطع المستقيم $i = I_0$ عند نقطة d ، مسقط هذه النقطة على محور الأزمنة يحدد قيمة τ .

عبارة ثابت الزمن : نسمي المقدار L/R ثابت الزمن لثنائي القطب R,L و نكتب : $\tau = L/R$

وحدة ثابت الزمن :

ـ التحقق ، أن τ تجانس الزمن :

$$u_{AB} = L\ di/dt \Leftrightarrow [L] = ([E].[T])/([I]) \quad , [R] = ([U])/([I])$$

$$\Leftrightarrow [\tau] = [L]/[R] = ([E].[T])/([I]) . ([I])/([U]) = ([E].[T])/([U]) = [T]$$

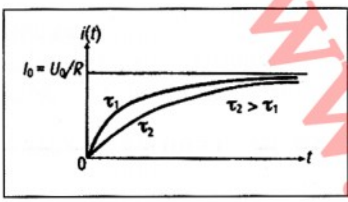
$$[\tau] = [T]$$

تأثير المقادير R و L على ثابت الزمن τ :

كلما تناقصت R ازدادت قيمة τ أي : $\tau \sim 1/R$.

كلما ازدادت قيمة L ازدادت قيمة τ أي : $\tau \sim L$.

نستنتج : تثبيت التيار و اختفاءه في ثنائي القطب RL يكون أسرع كلما كان ثابت الزمن τ للدارة أصغر أي كلما كان L صغير و R كبير .

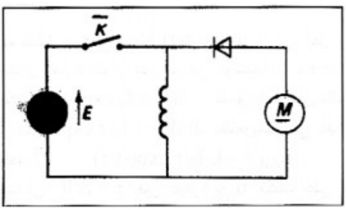


الطاقة المخزنة في وشيعة

نشاط 1 :

من أجل إظهار الطاقة المخزنة في وشيعة نحقق الدارة الكهربائية التالية .

المحرك M يسمح برفع كتلة m على إرتفاع h . نغلق القاطعة و ننتظر المدة اللأزمة لثبات التيار . نفتح القاطعة ، نلاحظ اشتغال المحرك و صعود الكتلة دليل على أن الوشيعة اختزنت طاقة عند غلق القاطعة و بعدها قدمتها للمحرك الذي بدوره استهلكها لرفع الكتلة .



نشاط 2 :

من أجل إيجاد قيمة الطاقة المخزنة في وشيعة نحقق الدارة الكهربائية التالية :

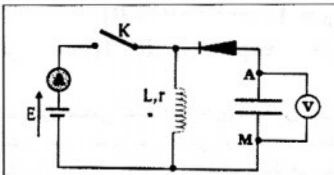
نغلق القاطعة فيشير مقياس الأمبير إلى مرور تيار كهربائي شدته 2 A ، بينما مقياس الفولط يشير إلى القيمة (0) . يدل ذلك على أن التيار مر في الوشيعة فقط ، وبالتالي بقيت المكثفة غير مشحونة .

في هذه الحالة تقوم الوشيعة بتخزين الطاقة التي تعطى بالعلاقة التالية :

$$E_{(L)} = 1/2\ L\ I^2 = 1/2 . 0,02 \times 4 = 0,04\ J$$

نفتح القاطعة فيشير مقاس الفولط إلى قيمة سالبة قدرها 59 V – وهي قيمة التوتر الذي تشحن تحته المكثفة . في هذه الحالة تخزن المكثفة طاقة تعطى بالعلاقة : $E_{(C)} = 1/2\ Cu^2 = 1/2 \times 15,5 \times 10^{-6}\ (-59)^2 = 0,027\ J$

نلاحظ وجود فرق بين الطاقتين $E_{(C)}$ و $E_{(L)}$ هذا الفرق بينهما ضاع على شكل تحويل الطاقة هو : $\eta = E_{(C)}/E_{(L)} = 0,027/0,04 = 0,675$ أي : $\eta = 67,5\%$



$E = 6\ V$

$L = 20\ mH ,\ r = 4,4\ \Omega$

$C = 15,5\ \mu F$

عبارة الطاقة المختزنة في الوشيعة : $E_{(L)} = 1/2\ L\ I^2$

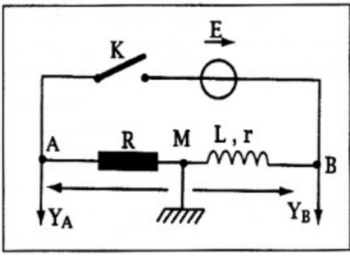
حيث **L** هي الذاتية و تقدر بالهنري (H) و $E_{(L)}$ الطاقة بالجول (J) و **I** شدة التيار بالأمبير(A) .

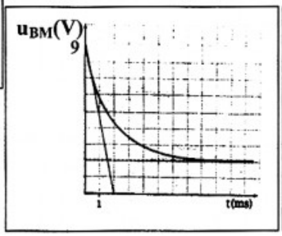
يمكن دراسة تأثير الذاتية على الطاقة المخزنة في وشيعة قيم ذاتياتها مختلفة ، كما يمكن دراسة تأثير شدة التيار بإضافة معدلة مع المولد على التسلسل للتحكم بشدة التيار .

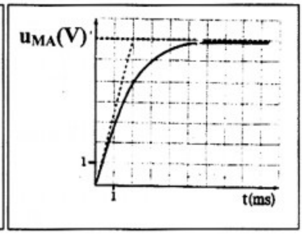
تمــارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

دارة كهربائية تضم على التسلسل مولد توتر مستمر مثالي قوته المحركة الكهربائية E . ناقل أومي مقاومته R ، وشيعة $(L , r = 10\ \Omega)$. نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ و نتابع تغيرت التوتر u_{MA} بين طرفي المقاومة ، u_{BM} بين طرفي الوشيعة بواسطة راسم اهتزاز و الذي يظهر على شاشته البيانين التاليين .







1. احسب E . 2. احسب L,R . 3. عبر عن i بدلالة (r , E , L , R) واحسب قيمته عند اللحظة $t = 3$ ms .
4. احسب الطاقة المخزنة في الوشيعة عند نفس اللحظة السابقة . 5. عين قيمة ثابت الزمن للدارة .

الحـــل ــ1

1. حساب E : حسب قانون التوترات ، في كل لحظة لدينا : $E = u_{BA} = u_{BM} + u_{MA}$
$E = L\ di/dt + ri + Ri$ ، $E = (R+ r)i + L\ di/dt$. لو اخترنا لحظة الوصول إلى النظام الدائم $(di/dt = 0)$ نجد :
$u_{MA} = 7$ V ، $u_{BM} = 2$ V و منه : $E = 9$ V
لو اخترنا اللحظة $t = 2$ ms نجد : $u_{MA} = 4{,}4$ V ، $u_{BM} = 4{,}6$ V و منه : $E = 9$ V
2. حساب R , L : في النظام الدائم لدينا : $u_{MA} = R\,.\,i = 7$ V ، و $u_{BM} = r\,.\,i = 2$ V
و منه : = $u_{MA}/u_{BM} = R/r = 7/2$ و منه : $r = 35\ \Omega$. $R = 7/2$ أي : $R = 35\ \Omega$
و من جهة أخرى لدينا : $u_{MA} = R\,.\,i$ و منه : $du_{MA}/dt = R\ di/dt$
المماس للمنحنى u_{MA} عند $t = 0$ هو : $du_{MA}/dt = 7/0{,}002$ و منه : $R\ di/dt = 3500$ و منه :
$di/dt = 3500/R = 100$. و من جهة أخرى لدينا : $L\ di/dt = 9$ و منه : $L = 0{,}09$ H
3. التعبير عن i بدلالة (r, R, L, R) و حساب قيمتة عند اللحظة $t = 3$ms : $i(t) = E/(R + r)\ (l - e^{-(R+r)t/L})$
عند اللحظة : $t = 0{,}003$ s نجد : $i(t) = 0{,}155$ A
4. حساب الطاقة المخزنة في الوشيعة : $E(L) = 1/2\ L\,.\,i^2 = 0{,}5 \times 0{,}09 \times 0{,}155^2 = 1{,}1 \times 10^{-3}$ J
5. حساب ثابت الزمن : $\tau = L/(R + r) = 0{,}09/45 = 0{,}002$ s

التمرين ــ 2

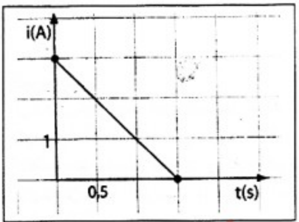
وشيعة مقاومتها $r = 6\ \Omega$ و ذاتيتها $L = 1$ H يجتازها تيار شدته ثابتة و تساوي 1,5 A .
1. احسب التوتر بين طرفي الوشيعة في النظام الدائم .
2. نقصر دارة الوشيعة فيستغرق انعدام التيار الكهربائي زمنا قدره $\Delta t = 2{,}5$ ms . أحسب التوتر الأعظمى بين طرفي الوشيعة ماذا تلاحظ ؟ ماذا تستنتج ؟

الحـــل ــ2

1. حساب التوتر بين طرفي الوشيعة u_L في النظام الدائم : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $E = u_L$ حيث :
$u_L = r\,i + L\ di/dt$ و منه : $E = r\,i + L\ di/dt$. في النظام الدائم $di/dt = 0$ و منه. : $u_L = r\,i = 6\,.\,1{,}5 = 9$ V
2ــ لما نقصر الدارة (عزل المولد) تنتقل شدة التيار من القيمة 1,5 A إلى الصفر أي تنقص و منه : $(di/dt < 0)$
تنشأ في الوشيعة قوة محركة كهربائية : $e = -\ L\ di/dt$ تكون موجبة تلعب دور المولد و تحاول تمرير تيار ناتج من الطاقة

المسترجعة التي اكتسبتها الوشيعة بوجود المولد . $e = -L\,di/dt = -1(0 - 1,5)/(2,5 \,.\, 10^{-3}) = 600$ V .
نلاحظ أن فرق الكمون بين طرفي الوشيعة في مدة قطع التيار يكون مرتفعا جدا ، أما استنتاجنا هو بإمكان هذا التوتر العالي أن يخرب أجهزة كهربائية تحتوي على وشائع عندما نقطع التيار ، لهذا يجب أن تحفظ هذه الأجهزة بربط نواقل أومية أو صمامات تعمل على التقليل من هذا التوتر العالي .

التمرين ــ 3



وشيعة $(L = 0,1\ H , r)$. عندما نطبق بين طرفيها توتر كهربائي مستمر قيمته 6 V يجتازها تيار كهربائي شدته 1,5 A .
1. احسب المقاومة الداخلية للوشيعة .
2. نمرر في الوشيعة تيارا كهربائيا تتغير شدته بدلالة الزمن وفق البيان التالي :
ــ احسب التوتر بين طرفي الوشيعة عند اللحظة $t = 0,5$ s .

الحــل ــ3

1. حساب المقاومة الداخلية للوشيعة : $u_L = r\,i + L\,di/dt$ تيار مستمر $di/dt = 0$)
و منه : $u_L = r\,i \Rightarrow r = u_L/i = 6/1,5 = 4\ \Omega$.
2ــ التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_L = r\,i + L\,di/dt$. منحنى $i = f(t)$ خط مستقيم مائل ميله سالب معادلته من الشكل :
$i = a\,.\,t + b$ حيث a هو ميل المستقيم $a = -3/1,5 = -2$ ، حيث : $di/dt = a = -2$ A/s . من جهة أخرى في اللحظة $t = 0,5$ s يكون $i = 2$ A ، بالتعويض في العلاقة $u_L = r\,i + L\,di/dt$: $u_L = 7,8$ V

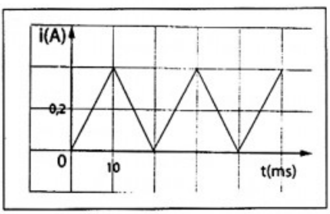
التمرين ــ4

وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها $r = 8\ \Omega$ نمرر بها تيارا كهربائيا شدته متغيرة و تعطى بالعلاقة التالية : $i(t) = 10\,t - 3$
عين قيمة L لكي ينعدم التوتر بين طرفي الوشيعة عند اللحظة $t = 0,15$ s .

الحــل ــ4

التوتر بين طرفي الوشيعة : لدينا عبارة شدة التيار $i(t) = 10\,t - 3$ ، إذن $di/dt = 10$ A/s
من جهة أخرى في اللحظة $t = 0,15$ s يكون $i = i(15) = 10\,(0,15) - 3 = -1,5$ A ، بالتعويض في علاقة التوتر $u_L = r\,i + L\,di/dt$ عن i و di/dt نجد : $r\,i + L\,di/dt = 0 \Rightarrow L = 1,2$ H

التمرين ــ 5

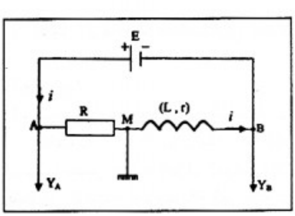


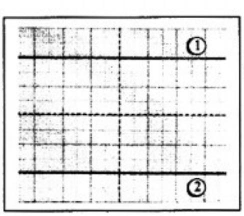
تتغير شدة التيار الكهربائي المار في وشيعة صافية $(L , r = 0)$ كما في البيان التالي :
1. ماذا نقول عن التيار في الوشيعة ؟
2. اكتب عبارة تغير شدة التيار بدلالة الزمن في المجالين التاليين :
[0 , 10 ms] , [10 , 20 ms]
3. إذا كان التوتر بين طرفي الوشيعة 0,4 V عند اللحظة 10 ms أحسب ذاتية الوشيعة .

الحــل ــ5

1ــ التيار الذي مررناه في الوشيعة تيار متغير و دوري ، حيث أن دوره $T = 20$ ms
2 ــ في المجال [0 , 10 ms] ، منحنى $i = f(t)$ خط مستقيم مائل ميله موجب معادلته من الشكل :
$i = a\,.\,t + b$ حيث a هو ميل المستقيم $a = +0,4/10^{-2} = +40$ ، حيث : $di/dt = a = +40$ A/s . من جهة أخرى في اللحظة $t = 0$ s يكون $i = 0$ A ، إذن معادلة تغير شدة التيار في هذا المجال هي $i = 40\,.\,t$
ــ في المجال [10 , 20 ms] ، منحنى $i = f(t)$ خط مستقيم مائل ميله سالب معادلته من الشكل :
$i = a\,.\,t + b$ حيث a هو ميل المستقيم $a = -0,4/10^{-2} = -40$ ، حيث : $di/dt = a = -40$ A/s . من جهة أخرى في اللحظة $t = 20$ ms يكون $i = 0$ A ، بالتعويض نجد : $i = -40\,.\,(0,02) + b = 0 \Rightarrow b = 0,8$ A . إذن معادلة تغير شدة التيار في هذا المجال هي $i = -40\,.\,t + 0,8$.
3 ــ التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_L = L\,di/dt$. و منه : $u_L = L\,di/dt = L\,.\,40 = 0,4 \Rightarrow L = 10$ mH .

التمرين ــ 6





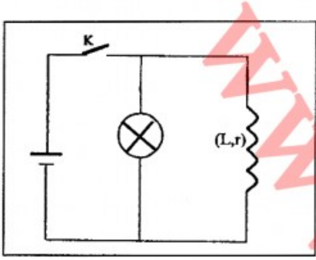
دارة كهربائية تضم على التسلسل وشيعة (L , r) ناقل أومي مقاومته $R = r = 12\ \Omega$ و مولد توتر مستمر مقاومته الداخلية مهملة و قوته المحركة الكهربائية E . نصل الدارة إلى راسم اهتزازات كما بالشكل التالي :

يظهر على شاشة راسم الإهتزازات البيانين التاليين : الحساسية الشاقولية : 3V/div
1. ماذا يمثل كل بيان ؟ علل . 2. كيف تصرفت الوشيعة ؟ علل . 3. احسب شدة التيار المار بالدارة .
4. احسب القوة المحركة الكهربائية للمولد .

الحــل ــ6

1 ــ البيان (2) يمثل التوتر بين طرفي الوشيعة u_{BM} ، لأن $u_{BM} < 0$ ، إذن الخط ينحرف إلى أسفل الشاشة .
البيان (1) يمثل التوتر بين طرفي الناقل الأومي u_{AM} ، لأن $u_{AM} < 0$ ، إذن الخط ينحرف إلى أعلى الشاشة .
2 ــ تصرفت الوشيعة كناقل أومي (لأن تطور التوتر بين طرفيها كان خطيا .)
3 ــ شدة التيار المار في الدارة : $i = u_{AM}/R = (3 . 2)/12 = 0{,}5$ A .
4 ــ قيمة القوة المحركة الكهربائية للمولد (E) : لدينا : $u_{AM} = 3 . 2 = 6$ V . و $u_{BM} = - 3 . 2 = - 6$ V . و حسب قانون جمع التوترات : $E = u_{AB} = u_{AM} + u_{MB} = u_{AM} - u_{BM} = 6 - (-6) = 12$ V . $u_{MB} = - u_{BM}$

التمرين ــ7



الدارة المبينة في الشكل تستعمل لتوهج مصباح ($R = 1$ kΩ) يضاء تحت توتر 220 V . نغذي الدارة بمولد للتوتر المستمر قوته المحركة الكهربائية 12 V .
نغلق القاطعة فيمر تيار كهربائي بالوشيعة ($L = 0{,}8$ H , $r = 8{,}0$ Ω) شدته ثابتة
a ــ اعط عبارة التوتر u_0 بين طرفي الوشيعة و المصباح . هل يشتعل المصباح؟
b ــ اعط عبارة الشدة i_0 التي تمر في الوشيعة .
c ــ تفتح القاطعة في اللحظة $t = 0$. اعط المعادلة التفاضلية التي تحققها $i(t)$ المارة في الوشيعة و المصباح بعد فتح القاطعة .
e ــ تحقق أن حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل $i(t) = A \exp(-t/\tau)$.
f ــ عين قيمة الثابت A باستعمال نتيجة السؤال b .
d ــ عين عبارة ثابت الزمن τ بدلالة R , r , L .
g ــ استنتج من العلاقة $i(t)$ عبارة التوتر $u(t)$ بين طرفي المصباح .
h ــ عند فتح القاطعة نلاحظ أن المصباح يزداد توجهه لحظيا . فسر هذه الظاهرة إنطلاقا من نتيجة السؤال السابق .

الحــل ــ 7

a ــ عندما نغلق القاطعة يصبح كل من المصباح و الوشيعة على التفرع مع المولد و يكون لهما نفس التوتر $u_0 = E = 12$ V
أي : $u_0 < 220$ V و منه المصباح لا يشتعل .
b ــ بما أن شدة التيار ثابتة فتصبح الوشيعة عبارة عن مقاومة صرفة r . عبارتها : $I_0 = E/r$.
c ــ بعد فتح القاطعة ، تصبح الوشيعة مربوطة على التسلسل مع المصباح . بتطبيق قانون جمح التوترات نكتب :
$0 = u_R + u_L$ نحصل على : $0 = L\, di/dt + ri + Ri$ ، و منه : $0 = L\, di/dt + (r + R)\, i$. نضع $R + r = R_0$
$0 = L\, di/dt + R_0 i$ بقسمة الطرفين على R_0 نجد : $L/R_0\, di/dt + i = 0$
و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة لــ (i) يكون حلها من الشكل :
e ــ التحقق أن حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل $i(t) = A \exp(-t/\tau)$:
حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i = A + B \exp(-\alpha t)$.
تحديد عبارة كل من A ، B و α : حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i(t) = A + B \exp(-\alpha t)$ ، يجب أن يحقق المعادلة .إذن لدينا : $di(t)/dt = - B\alpha \exp(-\alpha t)$ نعوض عن $i(t)$ و di/dt في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$$- B\alpha \exp(-\alpha t) + R_0/L\, [A + B \exp(-\alpha t)] = 0$$
$$\Leftrightarrow\ - B\alpha \exp(-\alpha t) + A\, (R_0)/L + (R_0)/L\, .\, B \exp(-\alpha t) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ [- B\alpha + B\, (R_0)/L]\ \exp(-\alpha t) = - A\, (R_0)/L$$

هذه المعادلة محققة إذا كان : • $- B\alpha + B\, (R_0)/L = 0$ أي : $B\alpha = B\, (R_0)/L$ و منه : $\alpha = R_0/L$
• $- A\, (R_0)/L = 0$ و منه : $A = 0$
نحدد قيمة B من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $i = E/r$ (شرط استمرارية شدة التيار نتيجة وجود الوشيعة)
و منه : $i(t = 0) = 0 + B \exp(-\alpha t) = E/r$ لأن : $\exp(0) = 1$ و منه : $B = + E/r$
و منه : $\alpha = R_0/L$ ، $A = 0$ ، $B = + E/r$.
إذن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة ل i حلها من الشكل : $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$ حيث : $I_0 = E/r$
d ــ عبارة ثابت الزمن τ بدلالة R , r , L : علما أننا وضعنا $R_0 = R + r$.
من عبارة شدة التيار لدينا $i = i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$ و $\alpha = R_0/L$ و كذلك لدينا : $i = I_0 \exp(-\alpha t)$ نجد : $\tau = L/(R + r)$.
g ــ استنتاج من العلاقة $i(t)$ عبارة التوتر $u(t)$ بين طرفي المصباح : تكون عبارة التوتر بين طرفي المقاومة : $u_R = Ri$

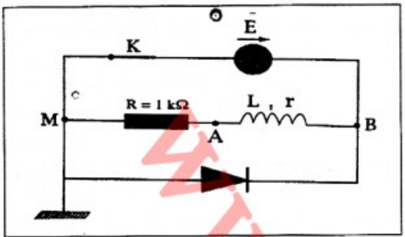
لكن $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$. بالتعويض في عبارة التوتر u_R نجد أن : $[u_R = RI_0 \exp(-t/\tau)]$ أو: $[u_R = RE/r \exp(-t/\tau)]$

h ــ عند فتح القاطعة نلاحظ أن المصباح يزداد توجهه لحظيا . فسر هذه الظاهرة إنطلاقا من نتيجة السؤال السابق :

قيمة التوتر بين طرفي المصباح بعد فتح القاطعة مباشرة أي عند $t = 0$: $u_R = RE/r = 1000 . 12/8 = 1500\ V$.

وهي قيمة كبيرة جدا بالنسبة لتوتر إشتعال المصباح $220\ V$ مما يؤدي إلى حدوث شرارة في القاطعة و تستعمل هذه الظاهرة مثلا في تشغيل المحركات .

لتمرين ــ8



في الدارة التالية نقوم بغلق القاطعة ثم فتحهاً عند $t = 0$. إذا علمت أنه عند اللحظة t_1 كان التوتر بين طرفي المقاومة $u_R = 0,9\ u_0$ وعند اللحظة t_2 كان التوتر بين طرفي المقاومة $u_R = 0,1\ u_0$.

u_0 هو التوتر بين طرفي المقاومة في اللحظة $t = 0$.

1. كيف تتغير شدة التيار في الدارة عند فتح القاطعة مع مرور الزمن ؟

2. إذا كان $t_2 - t_1 = 1,65\ ms$

a. احسب ثابت الزمن للدارة τ .

b. احسب ذاتية الوشيعة L إذا كانت مقاومتها الداخلية $r = 10\ \Omega$.

u_0 هو التوتر بين طرفي المقاومة في اللحظة $t = 0$.

الحــل ــ8

1 ــ تطور شدة التيار في الدارة عند فتح القاطعة : عند فتح القاطعة يحدث تفريغ للطاقة المخزنة في الوشيعة في المقاومة لذلك يكون تطور التيار بدلالة الزمن رتيب . بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب : $u_{MB} = u_{MA} + u_{AB}$.

بما أن $u_{MB} = 0$ نحصل على : $0 = L\ di/dt + ri + Ri$ و منه : $0 = L\ di/dt + (r + R)\ i$. نضع $R + r = R_0$

$0 = L\ di/dt + R_0 i$ بقسمة الطرفين على R_0 نجد : $0 = L/R_0\ di/dt + i$ بقسمة الطرفين على τ نجد :

$di/dt + L/\tau . i = 0$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة لــ (i) يكون حلها من الشكل : $i(t) = E/R_0 \exp(-t/\tau)$

شدة التيار إذن تمر بمرحلتين :

aــ مرحلة انتقالية (نظام انتقالي) : خلال هذه المرحلة تتناقص شدة التيار تدريجيا بشكل أسي مقتربة من قيمة معدومة .

bــ مرحلة دائمة (نظام دائم) : في هذه المرحلة تنعدم شدة التيار الكهربائي .

2ــ a) حساب ثابت الزمن للدارة τ : التوتر بين طرفي المقاومة : $u_R = R\ i(t) = RE/R_0 \exp(-t/\tau)$

RE/R_0 هو التوتر بين طرفي المقاومة في اللحظة $t = 0$ ، أي : $u_0 = RE/R_0$ ،

عند اللحظة $t_1 = 0$: $u_R = RE/R_0 \exp(-t_1/\tau) = 0,9\ u_0$ (1)

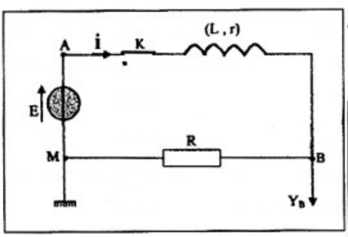
عند اللحظة $t_2 = 0$: $u'_R = RE/R_0 \exp(-t_2/\tau) = 0,1\ u_0$ (1)

بتقسيم العلاقتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد : $9 = \exp[(t_2-t_1)/\tau]$ ، و بإدخل اللوغاريتم النبيري على طرفي هذه العلاقة ،

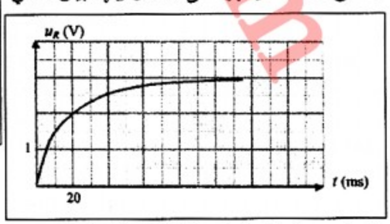
نكتب : $\ln 9 = (t_2-t_1)/\tau$ ، و منه $\tau = (t_2 - t_1) / \ln 9$ ، ، إذن $\tau = (t_2 - t_1) / \ln 9 = (1,65 . 10^{-3}) / 2,2 = 7,5 . 10^{-4}\ s$

b) ذاتية الوشيعة $\tau = L/(R + r) \Rightarrow L = \tau (R + r) = 7,5 . 10^{-4} (1010) = 757,5\ mH$.

التمرين ــ 9



في التركيب التالي ، لدينا دارة تشمل على التسلسل وشيعة (L , r) ، ناقل أومي مقاومته $R = 50\ \Omega$ ، مولد توتر مستمر مثالي $E = 3,8\ V$ ، راسم اهتزازات و قاطعة . عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة فيظهر على المدخل y_B البيان التالي:



1. اكتب عبارة التوتر الذي يظهر في المدخل y_B بدلالة التيار.

2. اوجد القيمة العددية لشدة التيار المار بالدارة في النظام الدائم (I_0) .

3. عبر عن E بدلالة : $L , r , R , i , di/dt$.

4. احسب المقاومة الداخلية للوشيعة و ذاتيتها .

الحــل ــ9

1. كتابة عبارة التوتر الذي يظهر في المدخل y_B بدلالة التيار : التوتر الذي يظهر على المدخل y_B هو التوتر بين طرفي الناقل الأومي $u_R = R . i$. و الذي يمثل صورة لتطور شدة التيار بدلالة الزمن .

2. إيجاد القيمة العددية لشدة التيار المار بالدارة في النظام الدائم (I_0) : في النظام الدائم (من البيان) : $u_R = 3\ V$ ، و لدينا قانون أوم في ناقل أومي $u_R = R \cdot I_0$ ، و منه : $I_0 = u_R / R = 3/50 = 0{,}06\ A$.

3. التعبير عن E بدلالة : $L, r, R, i, di/dt$: حسب قانون التوترات ، في كل لحظة لدينا : $E = u_R + u_L$
$E = L\, di/dt + ri + Ri$ ، $E = (R+r)i + L\, di/dt$.

4. حساب المقاومة الداخلية للوشيعة و ذاتيتها : لو اخترنا لحظة الوصول إلى النظام الدائم ($di/dt = 0$) نجد :
$E = (R+r)I_0 \Rightarrow R+r = E/I_0 = 3{,}8/0{,}06 = 63{,}33\ \Omega$ و منه : $50 + r = 63{,}33 \Rightarrow r = 13{,}33\ \Omega$.

لحساب ذاتية الوشيعة نحسب أولا ثابت الزمن τ ، و ذلك من البيان $u_R = f(t)$ ، حيث أن عند الزمن $t = \tau = 20\ ms$
يكون : $u_R = 0{,}63\ u_{Rmax} = 0{,}63 \cdot 3 = 1{,}89\ V$ و منه ذاتية الوشيعة : $L = \tau\,(R + r) = 1{,}26\ H$.

التمرين ــ 10

يتألف ثنائي قطب من وشيعة صافية ذاتيتها L و ناقل أومي مقاومته R متغيرة و مولد مثالي لتوتر مستمر $E = 6{,}0\ V$.

1. اوجد المعادلة التفاضلية لشدة التيار المارة بثنائي القطب (R , L) خلال تطوره نحو قيمة ثابتة غير معدومة .

2. إذا كانت عبارة شدة التيار المار بثنائي القطب بدلالة الزمن من الشكل : $i(t) = A + Be^{-\alpha t}$
اثبت أن $\alpha = R/L$ ، $A = -B = E/R$.

3. احسب الشدة العظمى للتيار من أجل $R = 12\ \Omega$. 4. احسب ثابت الزمن τ إذا كانت ذاتية الوشيعة $L = 0{,}1\ H$.

الحــل ــ10

1. المعادلة التفاضلية لشدة التيار المارة بثنائي القطب (R,L) خلال تطوره نحو قيمة ثابتة غير معدومة :
بتطبيق قانون جمع التوترات نكتب : $E = u_R + u_L$ خلال مرحلة تثبيت التيار التوتر بين طرفي المولد يبقى ثابت E:
لكن $u_R = Ri$ و $u_{AB} = L\, di/dt$ و بالتعويض نجد أن : $E = L\, di/dt + R_1 i$ و منه : $E = L\, di/dt + R\, i$ نقسم
الطرفين على R فنجد : $L/R\, di/dt + i = E/R$ بما أن $\tau = L/R$ ، $I_0 = E/R$
تصبح المعادلة بعد القسمة على τ على الشكل التالي : $di/dt + 1/\tau\, i = I_0/\tau$

2. حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i = A + B\exp(-\alpha t)$.
تحديد عبارة كل من A ، B و α : حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i(t) = A + B\exp(-\alpha t)$ ، يجب أن يحقق المعادلة . إذن لدينا : $di(t)/dt = -B\alpha \exp(-\alpha t)$ نعوض عن $i(t)$ و di/dt في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$$-B\alpha \exp(-\alpha t) + R/L\,[A + B\exp(-\alpha t)] = E/L$$
$$\Leftrightarrow\ -B\alpha \exp(-\alpha t) + A\,(R)/L + (R)/L \cdot B\exp(-\alpha t) = E/L$$
$$\Leftrightarrow\ [-B\alpha + B\,(R)/L]\ \exp(-\alpha t) = E/L - A\,(R)/L$$

هذه المعادلة محققة إذا كان : • $-B\alpha + B\,(R)/L = 0$ أي : $B\alpha = B\,(R)/L$ و منه : $\alpha = R/L$
• $E/L - A\,(R)/L = 0$ أي : $A\,(R)/L = E/L$ و منه : $A = E/R$

نحدد قيمة B من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $i = 0$ (شرط استمرارية شدة التيار نتيجة وجود الوشيعة)
و منه : $i(t = 0) = E/R + B\exp(-\alpha t) = E/R + B$ لأن : $\exp(0) = 1$
و منه : $E/(R) + B = 0 \Leftrightarrow B = -E/R$ و منه : $\alpha = R/L$ ، $A = -B = E/R$.
إذن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة ل i حلها من الشكل : $i(t) = I_0\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ حيث : $I_0 = E/R$.

3. حساب الشدة العظمى للتيار من أجل $R = 12\ \Omega$: $I_0 = E/R = 6/12 = 0{,}5\ A$.

4. حساب ثابت الزمن τ : $k = L/R = 0{,}1/12 = 8{,}33$ ms .

التمرين ــ 11

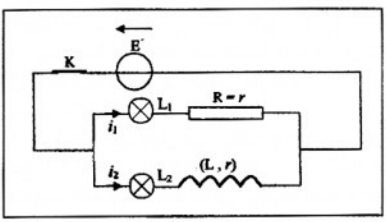
لدينا في الدارة التالية مصباحان متماثلان مقاومة كل منهما R_1 .
نغلق القاطعة فيمر بالفرع الأول تيار شدته i_1 .

1. اكتب عبارة التوتر في كل فرع .

2. هل يضيء المصباحان معا لحظة غلق القاطعة ؟

3. عند ثبات شدة التيار في الفرعين (نظام دائم) ، بين أن $i_1 = i_2$.

4. اقترح وسيلة عملية للتحقق من أن $i_1 = i_2$ في هذه الحالة .



الحــل ــ11

1ــ عبارة التوتر في كل فرع : الفرع (1) : $u_1 = (R_1 + r)\, i_1$.
الفرع (2) : $u_2 = (R_1 + r)\, i_2 + L\, di_2/dt$.

2ــ في الفرع (1) : بمجرد غلق القاطعة يشتعل المصباح L_1 لأن الناقل الأومي لا يمانع تثبيت التيار .
ــ في الفرع (2) : الوشيعة تمانع (تقاوم) تثبيت التيار ، أي تعاكس تغير التيار شدة التيار فيها ، حيث تنشأ قوة محركة

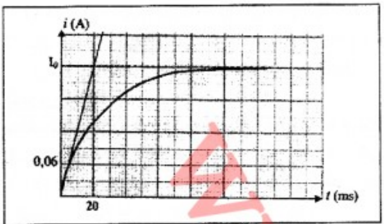
كهربائية متحرضة تمرر تيار في الوشيعة عكس جهة التيار i_2 مما يؤخر تثبيت التيار i_2 ، و بالتالي المصباح L_2 يشتعل بعد المصباح L_1 .

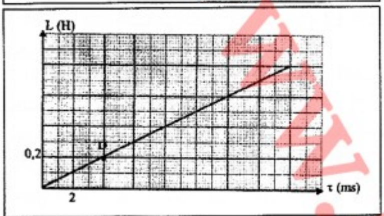
3ــ في النظام الدائم يصبح $di_2/dt = 0$ ، و منه : $u_1 = u_2$ و منه : $i_1 = i_2$ لأن مقاومتي الفرعين متساوية .

4ــ الوسيلة العملية التي تبين لنا أن $i_1 = i_2$:

ــ إما مشاهدة شدة التوهج في المصباحين متماثلة (أقل دقة) . ــ أو ربط مقياس أمبير في كل فرع و قراءة شدة التيار عليهما .

التمرين ــ 12





دارة كهربائية تضم على التسلسل وشيعة (L , r) ، ناقل أومي مقاومته $R = 35\ \Omega$ ، مولد توتر مستمر مقاومته الداخلية مهملة و قوته المحركة الكهربائية $E = 12\ V$ و قاطعة . نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ و نتابع تطور شدة التيار المار بالدارة خلال الزمن ، نحصل على البيان التالي

1. مثل مخطط الدارة .

2. اكتب العبارة الحرفية لشدة التيار المار بالدارة في النظام الدائم واحسب قيمته العددية ثم أحسب r .

3. اوجد من البيان قيمة ثابت الزمن τ و احسب (L , r , R) .

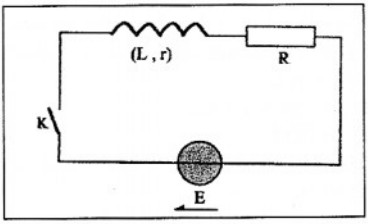
4. من أجل عدة قيم مختلفة لذاتية الوشيعة نحصل على قيم موافقة لثابت الزمن ممثلة في البيان التالي :

a. اكتب العبارة البيانية .

b. من الدراسة النظرية عبر عن τ بدلالة (L , r , R) .

c. هل نتائج هذه التجربة تتفق مع المعطيات ؟

الحــل ــ12



1ــ تمثيل مخطط الدارة : انظر الشكل المقابل :

2. كتابة العبارة الحرفية لشدة التيار في النظام الدائم وحساب قيمته وقيمة r :

في النظام الدائم (من البيان) : $I_0 = 4 . 0,06 = 0,24\ A$ (1)

في النظام الدائم $I_0 = E/(R + r)$ (1)

النظام الدائم $(di/dt = 0)$ نجد :

$$E = (R+ r)I_0 \Rightarrow R+ r = E/I_0 = 12/0,24 = 50\ \Omega$$

و منه : $35 + r = 50 \Rightarrow r = 15\ \Omega$.

3. إيجاد من البيان قيمة ثابت الزمن τ و حساب (L , r , R) : من البيان

لدينا فاصلة نقطة تقاطع المماس للبيان عند المبدأ مع المستقيم الأفقي $i = I_0$

هي $t = \tau = 20\ ms$. ذاتية الوشيعة :

4ــ ا) العبارة البيانية هي : $L = a . \tau$ حيث a هو ميل المستقيم قيمته : $a = 0,2/(4 . 10^{-3}) = 50\ H/s$. و منه :

العبارة البيانية هي : $L = 50 . \tau$. من جهة أخرى ثابت الزمن من الدراسة النظرية هو:

$L = (R + r) . \tau \Rightarrow \tau = L/R + r)$. بالمطابقة : $(R + r) = 50\ \Omega$. هذه النتيجة تتفق مع المعطيات .

التمرين ــ 13

وشيعة ذاتيتها $L = 0,1\ H$ و مقاومتها الداخلية (r) . تعطى شدة التيار المار في هذه الوشيعة خلال تطوره نحو قيمة ثابتة بالعلاقة التالية : $i = 1,2\ (1 - e^{-2t})$, $t(s)$, $i(A)$

1. اوجد قيمة شدة التيار عند اللحظة $t = 0$ ، هل تخزن الوشيعة طاقة عندها ؟

2. اوجد قيمة الطاقة المتولدة في الوشيعة عندما $t = \tau$ و $t \to \infty$. 3. اوجد قيمة مقاومة الوشيعة .

الحــل ــ13

1. إيجاد قيمة شدة التيار عند اللحظة $t = 0$ ، هل تخزن الوشيعة طاقة عندها : لدينا شدة التيار $i = 1,2\ (1 - e^{-2t})$

عند $t = 0$ يكون $i = 1,2\ (1 - e^{0}) = 0$. شدة التيار معدومة إذن الطاقة معدومة لأن : $E = 1/2\ L\, i^2$.

2. إيجاد قيمة الطاقة المتولدة في الوشيعة عندما $t = \tau$ و $t \to \infty$: نكتب عبارة الشدة كما يلي : $i = 1,2\ [1 - \exp(-t/\tau)]$

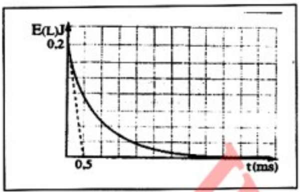
عند $t = \tau$ فإن $i = 1,2\ [1 - \exp(-\tau/\tau)] = 0,63 . 1,2 = 0,75\ A$. الطاقة المخزنة : $E = 1/2\ L\, i^2 = 2,8 . 10^{-2}\ J$

عند $t \to \infty$ فإن $i = 1,2\ [1 - \exp(-\infty)] = 1,2\ A$. الطاقة المخزنة : $E = 1/2\ L\, i^2 = 7,2 . 10^{-2}\ J$

3. إيجاد قيمة مقاومة الوشيعة : من عبارة شدة التيار لدينا $i = 1,2\ [1 - \exp(-\tau/\tau)]$ و كذلك لدينا : $i = 1,2\ [1 - \exp(-t/\tau)]$.

بالمطابقة نجد : $\tau = 0,5\ s$. و منه مقاومة الوشيعة هي : $r = L/\tau = 0,1/0,5 = 0,2\ \Omega$.

التمرين ــ 14



تعطى المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار في ثنائي القطب (R , L) نحو قيمة ثابتة معدومة بالعلاقة التالية : $di/dt + R/L \,.\, i(t) = 0$

1. اكتب حل هذه المعادلة .

2. يمثل البيان التالي تغيرات الطاقة المخزنة في الوشيعة بدلالة الزمن .

عبر عن الطاقة المخزنة في الوشيعة في كل لحظة بدلالة t ، τ ، I_0 ، L .

3. برهن أن المماس للبيان عند المبدأ يقطع محور الأزمنة في نقطة توافق $t = \tau/2$

4. اوجد ذاتية الوشيعة حيث : $R = 100\ \Omega$

5. برهن أن الزمن اللآزم لتناقص الطاقة إلى النصف $(t_{1/2})$ يعطى بالعلاقة $t_{1/2} = \tau/2 \ln 2$ و احسب قيمته .

الحــل ــ14

1. كتابة حل هذه المعادلة : حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i = A + B \exp(-\alpha t)$.

تحديد عبارة كل من A ، B و α : حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i(t) = A + B \exp(-\alpha t)$ ، يجب أن يحقق المعادلة .إذن لدينا : $di(t)/dt = - B\alpha \exp(-\alpha t)$ نعوض عن $i(t)$ و di/dt في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$$- B\alpha \exp(-\alpha t) + R/L\, [A + B \exp(-\alpha t)] = 0$$

$$\Leftrightarrow\ - B\alpha \exp(-\alpha t) + A\, (R)/L + (R)/L \,.\, B \exp(-\alpha t) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ [- B\alpha + B\, (R)/L]\ \exp(-\alpha t) = - A\, (R)/L$$

هذه المعادلة محققة إذا كان : • $- B\alpha + B\, (R)/L = 0$ أي : $B\alpha = B\, (R)/L$ و منه : $\alpha = R/L$

• $- A\, (R)/L = 0$ و منه : $A = 0$

نحدد قيمة B من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $i = E/R$ (شرط استمرارية شدة التيار نتيجة وجود الوشيعة)

و منه : $i(t = 0) = 0 + B \exp(-\alpha t) = E/R$ لأن : $\exp(0) = 1$ و منه : $B = + E/R$

و منه : $\alpha = R/L$ ، $A = 0$ ، $B = + E/R$.

إذن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة ل i حلها من الشكل : $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$ حيث : $I_0 = E/R$.

2. التعبير عن الطاقة المخزنة في الوشيعة في كل لحظة بدلالة t ، τ ، I_0 ، L : الطاقة المخزنة في الوشيعة من الشكل :

$E_{(L)} = 1/2\, L\, i^2 = 1/2\, L[I_0 \exp(-t/\tau)]^2 = 1/2\, L \,.\, I_0^2 \exp(-2t/\tau)$. تكتب على الشكل : $E_{(L)} = E_{(L)0} \exp(-2t/\tau)$.

حيث : $E_{(L)0} = 1/2\, L \,.\, I_0^2$.

3. البرهان أن المماس للبيان عند المبدأ يقطع محور الأزمنة في نقطة توافق $t = \tau/2$:

المماس للمنحنى عند مبدأ الأزمنة معامل توجيهه $d E_{(L)}/dt$.

لدينا $E_{(L)}(t) = E_{(L)0} \exp(-2t/\tau)$ إذن : معادلة المماس للبيان من الشكل : $E_{(L)}(t) = a \,.\, t + b$

حيث : $a = d E_{(L)}/dt = - E_{(L)0} \,.\, 2/\tau \,.\, \exp(-2t/\tau)$. عند $t = 0$ يكون $a = - E_{(L)0} \,.\, 2/\tau$ و $b = E_{(L)0}$

و منه : $E_{(L)}(t) = - E_{(L)0} \,.\, 2/\tau \,.\, t + E_{(L)0}$. عند التقاطع مع محور الأزمنة يكون : $i(t) = 0$ أي :

$0 = - E_{(L)0} \,.\, 2/\tau \,.\, t + E_{(L)0}$ و منه : $t = \tau/2$

4. إيجاد ذاتية الوشيعة حيث : $R = 100\ \Omega$: من المنحنى نجد : $t = 0{,}5 = \tau/2 \Rightarrow \tau = 1\ ms$.

و منه : $\tau = L/R \Rightarrow L = \tau \,.\, R = 100 \,.\, 10^{-3} = 0{,}1\ H$.

5. البرهان على أن الزمن اللآزم لتناقص الطاقة إلى النصف $(t_{1/2})$ يعطى بالعلاقة $t_{1/2} = \tau/2 \ln 2$ و حساب قيمته :

عبارة الطاقة المخزنة في الوشيعة خلال التفريغ فنجد : $E_{(L)} = E_{(L)0} \exp(-2t/\tau)$

من أجل $t = 0$ نجد : $E_{(L)(t=0)} = 1/2\, L \,.\, I_0^2$ ، من أجل : $t = t_{1/2}$ لدينا : $E_{(L)(t=t1/2)} = 1/2\, E_{0(C)}$

$$1/2\, L \,.\, I_0^2 \exp[-(2\, t_{1/2})/\tau] = 1/2\, (1/2\, L \,.\, I_0^2)$$

و منه : $\exp[-(2\, t_{1/2})/\tau] = 1/2$. بأخذ اللوغاريتم النيبيري للطرفين نجد : $- 2t_{1/2}/\tau = - \ln 2$

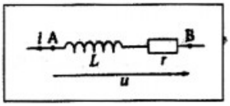
و منه : $t_{1/2} = \tau/2 \,.\, \ln 2 = (1 \,.\, 10^{-3})/2 \,.\, \ln 2 = 3{,}46 \,.\, 10^{-4}\ s$.

تمـــارين نماذج للبكالوريا
مراقبات مستمرة ، فروض و اختبارات
BAC

التمرين ــ1

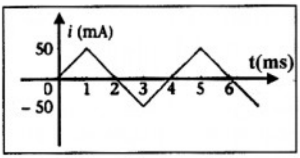
aــ مثل ، على مخطط ، وشيعة ، باعتبارها إصطلاحا آخذة . مثل بواسطة أسهم التوتر u و الشدة i للتيار المار .
bــ اكتب العلاقة بين u ، i ، L (ذاتية الوشيعة) و r (مقاومة الوشيعة) ثم أعط وحداتها .
cــ اعط عبارة الطاقة المختزنة E_b في الوشيعة بدلالة i و L .

الحـــل ــ1



aــ تمثيل الوشيعة : انظر الشكل المرفق .
bــ اكتب العلاقة بين u ، i ، L و r : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $u = u_r + u_L$
حيث $u_r = r\,i$ و $u_L = L\,di/dt$ و بالتعويض في المعادلة $u = u_r + u_L$
نحصل على : $r\,i + L\,di/dt = u$
cــ اعطاء عبارة الطاقة المختزنة E_b في الوشيعة بدلالة i و L : $E_b = 1/2\,Li^2$.

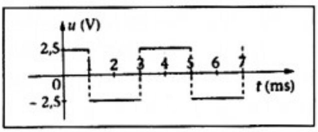
التمرين ــ2



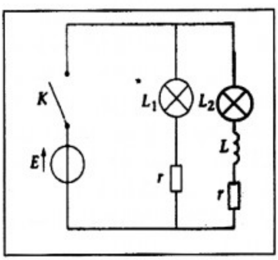
وشيعة ذاتيتها L = 50 mH و مقاومتها r مهملة ، موصولة إلى مولد تيار كهربائي و ناقل أومي مقاومته R . تغيرات الشدة i ، بدلالة الزمن ، ممثلة على الشكل المقابل . مثل تغيرات التوتر u بين طرفي الوشيعة بدلالة الزمن .

الحـــل ــ 2

تمثيل تغيرات التوتر u بين طرفي الوشيعة بدلالة الزمن : التوتر بين طرفي الوشيعة يعطى بالعبارة التالية : $r\,i + L\,di/dt = L\,di/dt$ لأن المقاومة r مهملة .



بين $t = 1{,}0$ ms و $t = 3{,}0$ ms لدينا :
$di/dt = \Delta i/\Delta t = (-100 . 10^{-3})/(2 . 10^{-3}) = -50$ A/s .
لدينا إذن : $u = 50 . 10^{-3} . (-50) = -2{,}5$ V . بين $t = 0$ ms و $t = 1{,}0$ ms
ثم بين $t = 3{,}0$ ms و $t = 5{,}0$ ms لدينا : $di/dt = \Delta i/\Delta t = 50$ A/s
و منه $u = 50 . 10^{-3} . (50) = 2{,}5$ V . تغيرات التوتر u دورية . انظر الشكل .



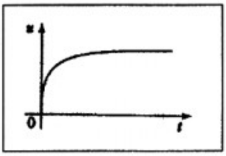
التمرين ــ3

نحقق الدارة الكهربائية المبينة في الشكل المقابل . L_1 و L_2 هي مصابيح متماثلة ، مقاوماتها مهملة . عند اللحظة t = 0 ، نغلق القاطعة K .
aــ ما هي الظاهرة الملاحظة عند غلق القاطعة ؟
bــ اشرح الظاهرة
cــ ماذا يحدث إذا ما فتحنا القاطعة ؟

الحـــل ــ 3

aــ الظاهرة الملاحظة عند غاق القاطعة : المصباح L_1 يشتعل قبل المصباح L_2 .
bــ شرح الظاهرة : الوشيعة الموصولة على التسلسل مع المصباح L_1 تعاكس حدوث تغيرات لشدة التيار و منه تمانع ظهور التيار في هذا الفرع من الدارة حيث تجعل شدة التيار تتغير من 0 إلى I_0 **تدريجيا** و بدون انقطاع . المصباح إذن يشتعل عندما تصل شدة التيار إلى القيمة الكافية لإشتعاله و هذا ما يفسر التأخر في الإشتعال . و بالعكس بالنسبة للمصباح L_2 فشدة التيار فيه تتغير آنيا من 0 إلى القيمة الكافية لإشتعاله . لأنه لا توجد وشيعة في هذا الفرع من الدارة .
cــ ماذا يحدث إذا ما فتحنا القاطعة : بنفس الكيفية ، عندما نفتح القاطعة ، الوشيعة تعاكس اختفاء (انقطاع) التيار . إذن التيار يختفي تدريجيا . ومنه المصباح L_2 ينطفئ بعد المصباح L_1 . الطاقة المختزنة في الوشيعة تسمح ببقاء التيار لبعض الوقت .

التمرين ــ 4



نشاهد على شاشة راسم إهتزاز المهبطي مزود بذاكرة ، تغيرات التوتر u بين طرفي وشيعةذاتيتها L و مقاومتها r عندما يطبق بين طرفيها سلم توتر .

أرسم المنحنى الممثل لــ u(t) عندما : a ــ L' = 2 L و r' = r ،

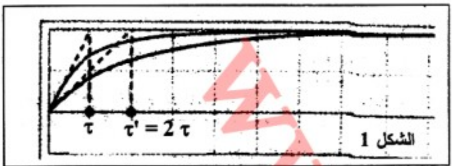
b ــ L' = L و r' = 2r ، c ــ L' = L و r' = 1/2 r .

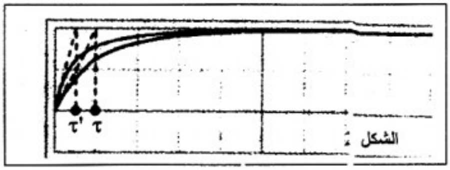
الحــل ــ 4

ــ رسم المنحنى الممثل لــ u(t) عندما : a ــ L' = 2 L و r' = r : τ' = L'/r' = 2 L/r = 2 τ انظر الشكل 1

ــ رسم المنحنى الممثل لــ u(t) عندما : b ــ L' = L و r' = 2r : τ' = L'/r' = L/2r = 1/2 τ انظر الشكل 2

ــ رسم المنحنى الممثل لــ u(t) عندما : c ــ L' = L و r' = 1/2 r : τ' = L'/r' = L/(1/2r) = 2 τ نفس الشكل 1





التمرين ــ 5

وشيعة ذاتيتها L = 100 mH مقاومتها r = 25 Ω ، موصولة على التسلسل مع : مولد توتر ، قوته المحركة الكهربائية E = 6,0 V ، قاطعة K و ناقل أومي مقاومته R = 150 Ω . عند اللحظة t = 0 ، نغلق القاطعة K .

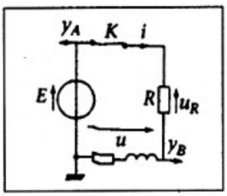
a ــ ارسم مخطط الدارة ، موضحا التوصيلات التي تسمح بمشاهدة ، على شاشة راسم الإهتزاز ، تغيرات التوتر بين طرفي المولد (المدخل A) و كذلك بين طرفي الوشيعة (المدخل B) .

b ــ اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها i(t)

c ــ بين أن i(t) = E/(r + R) [1 - exp(-t/τ)] هي حل للمعادلة التفاضلية مع τ = L/(r + R) .

d ــ احسب i(0) ، i(τ) و i(5 τ) . e ــ تحقق من أن شدة التيار في النظام الدائم مساوية إلى i(5 τ) .

الحــل ــ5



a ــ رسم مخطط الدارة : انظر الشكل المرفق .

b ــ كتابة المعادلة التفاضلية التي يحققها i(t) : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا :

E = U_R + u حيث U_R = R i و u = L di/dt + r i و بالتعويض في المعادلة

E = U_R + u نحصل على : R i + L di/dt + r i = E و تصبح :

L di/dt + (R + r) i = E أو : di/dt + (R + r)/L i = E/L معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة لــ i .

c ــ التحقيق : بالتعويض عن i(t) و di/dt في المعادلة التفاضلية نحصل على :

E/L exp(-t/τ) + (R + r)/L (E/(R + r) [1 - exp(-t/τ)] = E/L . بالفعل i(t) = E/(r + R) [1 - exp(-t/τ)] هي حل للمعادلة التفاضلية .

d ــ حساب i(0) ، i(τ) و i(5 τ) : i(0) = (E/(R + r) [1 - exp(0)] = 0 ،

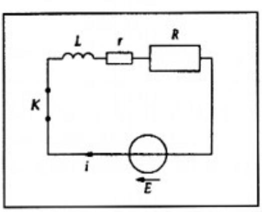
i(τ) = (E/(R + r) [1 - exp(-1)] = 0,63 (E/(R + r) = 22 mA ،

i(5τ) = (E/(R + r) [1 - exp(-5)] = (E/(R + r) = 34 mA

e ــ تحقق : في النظام الدائم ، الحد L di/dt معدوم لأن i ثابتة . قانون جمع التوترات يسمح بالكتابة :

E = R i + r i و منه i = E/(R + r) و منه نحصل على العبارة السابقة لــ i(5 τ) .

التمرين ــ6



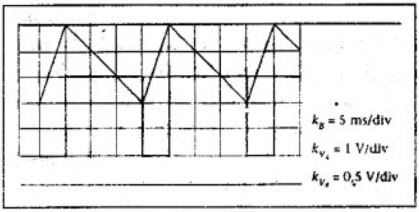
مولد ، مثالي التوتر ، موصول على التسلسل مع : وشيعة (L , r) و ناقل أومي مقاومته R . نشاهد على شاشة راسم الإهتزاز (أنظر الشكل) التوتر بين طرفي الناقل الأومي u_R (المدخل A) و بين طرفي الوشيعة u_B (المدخل B) .

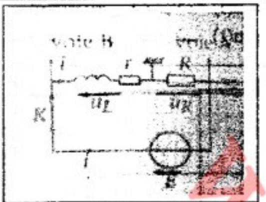
a ــ اعد رسم المخطط على الشكل ثم حدد التوصيلات التي تسمح بمشاهدة التوترات u_R و u_B .

b ــ اعط عبارة كل من u_R و u_B . c ــ بين أنه يمكن أن نكتب :

u_B = - L/R . du_R/dt .

d– حدد المدخلين A و B على الشكل .
e– استنتج قيمة المقاومة R للناقل الأومي .
تعطى : $L = 200\ mH$ ، $r = 10\ \Omega$ ، $R \gg r$.





الحل – 6

a– رسم المخطط على الشكل ثم تحديد التوصيلات التي تسمح بمشاهدة التوترات u_R و u_B : انظر الشكل .

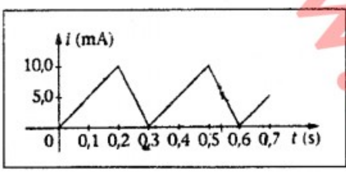
b– عبارة كل من u_R و u_B : $u_B = L\ di/dt + r\ i$
و $u_R = -R\ i$. و السهم الممثل لـ u_R و i لهما نفس الجهة .

c– تبيان أنه يمكن أن نكتب : $u_B = -L/R\ .\ du_R/dt$: $i = -u_R/R$
إذن : $u_B = -L/R\ du_R/dt - r/R\ u_R$. و بما أن $R \gg r$ فمنه $r/R \ll 1$
و منه يمكن أن نكتب : $u_B = -L/R\ .\ du_R/dt$

d– تحديد المدخلين A و B على الشكل : الإشارة المثلثية توافق التوتر u_R و الإشارة المربعة توافق التوتر u_B . بالفعل لو نفرض أن $u_R = k\,t$ (على الإشارة الصاعدة ، $k > 0$) نجد $du_R/dt = k$. و يكون لدينا $u_B = -L/R\ .\ k$ توتر ثابت و سالب .

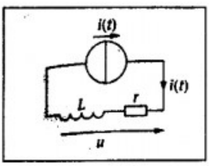
e– استنتاج قيمة المقاومة R للناقل الأومي :
على الجبهة الصاعدة لدينا : $R = -L/u_B\ .\ du_R/dt = -L/u_B\ .\ \Delta u_R/\Delta t$.
$R = -(0{,}2/0{,}5)\ .\ (3/15\ .10^{-3}) = 80\ \Omega$. على الجبهة النازلة نحسب : $R = -(0{,}2/-1{,}5)\ .\ (3/5\ .10^{-3}) = 80\ \Omega$.
نحصل على نفس القيمة للمقاومة R ، مهما تكن الجبهة المختارة .

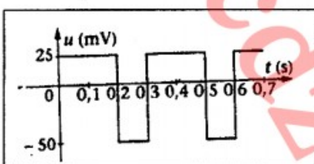
التمرين – 7



وشيعة ذاتيتها $L = 0{,}5\ H$ و مقاومتها r مهملة ، موصولة على التسلسل مع مولد للتيار الكهربائي .المولد يعطي تيار متغير مع الزمن كما هو موضح في الشكل المقابل .
a– ارسم مخطط الدارة
b– اعط عبارة التوتر u(t) بين طرفي الوشيعة .
c– احسب u(t) .
d– مثّل تغيرات u(t) .

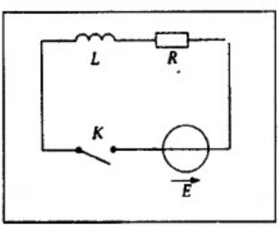
الحل – 7





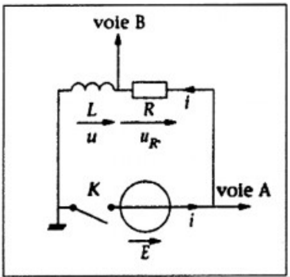
a– رسم مخطط الدارة : انظر الشكل .
b– عبارة التوتر u(t) بين طرفي الوشيعة :
$u(t) = L\ di/dt + r = L\ di/dt$ لأن المقاومة مهملة
c– حساب و تمثيل تغيرات u(t) :
$u(t) = L\ \Delta i/\Delta t$. على الجبهة الصاعدة
$(0 < t < 0{,}2\ s)$ ، $u(t) = 25\ mV$.
على الجبهة النازلة $(0{,}2 < t < 0{,}3\ s)$ ، $u(t) = -50\ mV$. نحصل عاى الشكل المرفق .

التمرين – 8



وشيعة ذاتيتها $L = 50\ mH$ و مقاومته مهملة ، موصولة على التسلسل مع مولد توتر قوته المحركة الكهربائية $E = 12{,}0V$ ، قاطعة و ناقل أومي مقاومته $R = 270\ \Omega$.
عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة .
a– انقل المخطط ، محددا التوصيلات اللازمة التي تسمح بالمشاهدة ، على شاشة راسم الإهتزاز ، التوتر بين طرفي المولد (المدخل A) و كذلك التوتر بين طرفي الوشيعة u(t) (المدخل B) .
b– اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها i(t) .
c– عرف ثم احسب ثابت الزمن τ لثنائي القطب (R , L) .
d– تحقق من أن $i(t) = E/R\ [1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية .
e– استنتج عبارة u(t) .
f– ارسم المخطط الذي نحصل عليه على الشاشة مع تحديد المعيارات المختارة على الجهاز .

الحـل ـ 8



a– نقل المخطط : انظر الشكل المرفق .

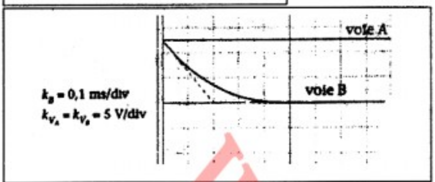
b– كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها $i(t)$: حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $E = u_R + u(t)$ حيث $u_R = R\,i$ و $u(t) = L\,di/dt$ لأن r مهملة ، و بالتعويض في المعادلة $E = u_R + u(t)$ نحصل على : $R\,i + L\,di/dt = E$

c– تعريف ثم حساب ثابت الزمن τ لثنائي القطب (R L) : ثابت الزمن τ هي المدة الزمنية التي من أجلها تكون شدة التيار تساوي إلى % 63 من قيمتها في النظام الدائم للدارة . من التعريف : $\tau = L/R_{tot}$. هنا : $\tau = L/R_{tot} = 0{,}19\ ms$.

d– تحقيق : بالتعويض عن $i(t)$ و di/dt في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$E/L\ \exp(-t/\tau) + (R/L)\,(E/(R)\,[1 - \exp(-t/\tau)] = E/L$$

بالفعل $i(t) = E/R\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ هي حل للمعادلة التفاضلية .



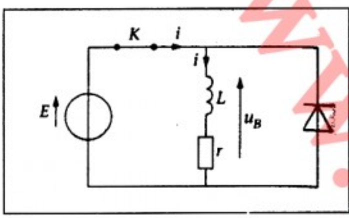
e– استنتاج عبارة $u(t)$: من التعريف ، $u(t) = L\,di/dt$

إذن $u(t) = E\exp(-t/\tau)$.

f– رسم المخطط الذي نحصل عليه على الشاشة مع تحديد المعيارات المختارة على الجهاز : لتمثيل التوتر $u(t)$ لا بد من حساب بعض المقادير : حساب $u(0)$ ، $u(\tau)$ و $u(5\tau)$:

$i(0) = E\ \exp(0) = 12\ V$ ، $u(\tau) = E\ \exp(-1) = 4{,}4\ V$ ، $u(5\tau) = E\ \exp(-5) = 0$ و منه نحصل على الشكل المرفق و نختار السلم التالي : قاعدة الزمن : $k_B = 0{,}1\ ms$ لكل تدريجة و $k_V = 5\ V$ لكل تدريجة ، بالنسبة للمدخلين .

التمرين ـ9



وشيعة ذاتيتها $L = 23\ mH$ و مقاومتها $r = 27\ \Omega$ ، موصولة في دارة كهربائية كما هو مبين في الشكل المقابل . عندما تكون K مغلوقة ، الصمام يلعب دور قاطعة مفتوحة . تعطى $E = 6{,}0\ V$.

a– احسب الشدة i_0 للتيار في النظام الدائم .

b– احسب الطاقة المختزنة في الوشيعة .

c– عند اللحظة $t = 0$ ، نفتح القاطعة K . الصمام يفرض أنه مثالي ، يلعب دور سلك ناقل . اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها $i(t)$.

d– ماذا تصبح الطاقة الإبتدائية المختزنة في الوشيعة ؟

e– تحقق من أن : $i(t) = i_0\ \exp(-t/\tau)$ هي حل للمعادلة التفاضلية ثم احسب : $di/dt_{(t=0)}$.

f– حدد نقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ ، مع الخط المقارب الأفقي .

الحـل ـ 9

a– حساب الشدة i_0 للتيار في النظام الدائم : في النظام الدائم $di/dt = 0$ يكون لدينا إذن $u_B = r\,i_0$ و حسب قانون جمع التوترات نجد : $E = u_B$ أي $i_0 = E/r = 2{,}2 \cdot 10^{-1}\ A$.

b– حساب الطاقة المختزنة في الوشيعة : من التعريف $E_b = 1/2\ L\,i_0^2 = 1/2 \cdot 23 \cdot 10^{-3}\,(2{,}2 \cdot 10^{-1})^2 = 5{,}7 \cdot 10^{-4}\ J$.

c– كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها $i(t)$: حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $r\,i + L\,di/dt = 0$

d– الطاقة الإبتدائية المختزنة في الوشيعة تضيع في مقاومة الوشيعة على شكل حرارة أي بفعل جول .

e– تحقيق : بالتعويض عن $i(t)$ و di/dt في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$r\,i_0\exp(-t/\tau) + L[-(i_0/\tau)]\exp(-t/\tau) = r\,i_0\exp(-t/\tau) - L i_0\,(r/L)\exp(-t/\tau) = 0$$

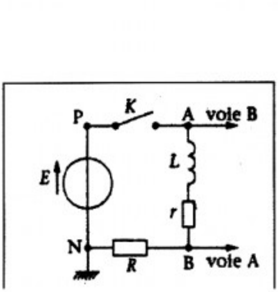
بالفعل $i(t) = i_0\ \exp(-t/\tau)$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

– حساب $di/dt_{(t=0)}$: $di/dt_{(t=0)} = -(i_0/\tau)]\exp(0) = -(i_0 r)/L = -E/L$

f– تحديد نقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ ، مع الخط المقارب الأفقي :

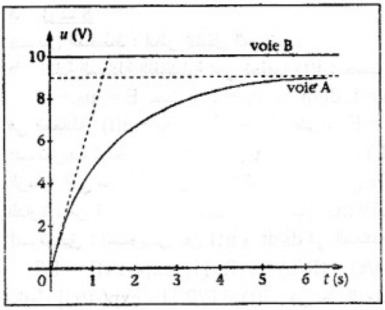
المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ يمر من النقطة $A(0\,;\,i_0)$ و ميله هو : $-E/L$

و معادلته : $i'(t) = -E/L \cdot t + i_0$. يقطع محور الفواصل (الذي هو الخط المقارب الأفقي للمنحنى) عندما : $i'(t) = 0$ أي عندما : $t = (L\,i_0)/E = L/r = \tau$.



التمرين ـ10

حققنا الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي . جهاز راسم إهتزاز مهبطي مزود بذاكرة ، يسمح بتسجيل تغيرات التوترات عند غلق القاطعة . الشاشة تعطي الشكل التالي : انظر الشكل .



a– ما هي التوترات المشاهدة على المدخلين A و B ؟

b– اكتب العلاقة الموجودة بين هذين التوترين .

c– احسب شدة التيار في النظام الدائم .

d– استنتج قيمة المقاومة r للوشيعة .

e– عرف ثابت الزمن τ لثنائي القطب ثم اعط قياسها .

f– استنتج الذاتية L للوشيعة .

g– احسب الطاقة المختزنة في الوشيعة في النظام الدائم .

تعطى : $E = 10{,}0\ V,\ R = 270\ \Omega$

الحـل – 10

a– التوترات المشاهدة على المدخلين A و B : المدخل A يسمح بمشاهدة التوتر بين طرفي الناقل الأومي u_{BN} . المدخل B يسمح بمشاهدة التوتر بين طرفي المولد u_{PN} .

b– كتابة العلاقة الموجودة بين هذين التوترين : $u_{BN} = R\,i$ و $u_{PN} = E = r\,i + L\,di/dt + R\,i$. بما أن : $i = u_{BN}/R$ و إذن : $di/dt = 1/R \,.\, du_{BN}/dt$. نحصل على : $u_{PN} = [(R + r)/R]\,u_{BN} + L/R \,.\, du_{BN}/dt$.

c– حساب شدة التيار في النظام الدائم : على المدخل A لدينا : $u_R = u_{BN} = R\,i$. في النظام الدائم : $u_{BN} = R\,i_0 = 9{,}0\ V$. إذن : $i_0 = u_{BN}/R = 33\ mA$.

d– استنتاج قيمة المقاومة r للوشيعة : على المدخل B لدينا : $u_{PN} = E = r\,i + L\,di/dt + R\,i$. في النظام الدائم لدينا : $di/dt = 0$ و منه : $E = r\,i_0 + R\,i_0$ و منه : $r\,i_0 = E - R\,i_0$ و منه : $r = E/i_0 - R = 30\ \Omega$

e– تعريف ثابت الزمن τ لثنائي القطب ثم اعطاء قياسها : ثابت الزمن τ هي المدة الزمنية التي من أجلها تكون شدة التيار تساوي إلى 63 % من قيمتها في النظام الدائم للدارة . من التعريف : $\tau = L/R_{tot}$. هنا : $\tau = L/(R + r)$. و يمثل فاصلة نقطة تقاطع المماس للمنحنى عند اللحظة $t = 0$ ، مع الخط المقارب الأفقي . قياسها : $\tau = 1{,}2\ ms$.

f– استنتاج الذاتية L للوشيعة : $L = \tau \,.\, (R + r) = 0{,}36\ H$.

g– حساب الطاقة المختزنة في الوشيعة في النظام الدائم : $E_b = 1/2\,L\,i_0^2 = 1/2 \,.\, 0{,}36\,(33 \,.\, 10^{-3})^2 = 2{,}0 \,.\, 10^{-4}\ J$.

التمرين – 11

نعتبر ثنائي القطب RL مكون على التسلسل من ناقل أومي مقاومته R و وشيعة مقاومتها r و ذاتيتها L .هل التصريحات التالية صحيحة أم خاطئة ؟ برر إجابتك .

1– مقاومة ثنائي القطب RL هي R + r

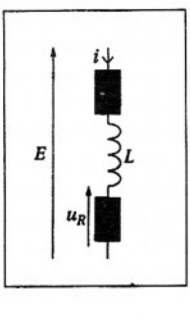
2– ذاتية ثنائي القطب RL الذي مقاومته الكلية $120\ \Omega$ و ثابت الزمن $\tau = 0{,}20\ ms$ هي 24 H .

الحـل – 11

1– صحيح : المقاومات الموصولة على التسلسل تجمع ، إذن مقاومة ثنائي القطب RL هي R + r .

2– خطأ : ثابت الزمن لثنائي القطب RL هو : $\tau = L/(R + r)$ إذن الذاتية عبارتها : $L = \tau\,(R + r)$ مع $R + r = 120$ h و $\tau = 0{,}20\ ms$ نحصل على : $L = 0{,}20 \,.\, 10^{-3} \,.\, 120 = 24 \,.\, 10^{-3}\ H = 24\ mH$ إذن الذاتية قيمتها : $L = 24\ mH$.

التمرين – 12



نوصل على التسلسل ناقل أومي مقاومته $R = 20\ \Omega$ مع وشيعة (مقومتها r و ذاتيتها L) .

عند اللحظة $t = 0$ نغذي ثنائي القطب RL بتوتر ثابت قيمته $E = 12\ V$.

شدة التيار تزداد إذن حسب القانون التالي : $i(t) = E/(R + r)\,[1 - \exp(-t/\tau)]$.

1– اعط عبارة ثابت الزمن τ .

2– عبر عن التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي . استنتج قيمته العظمى u_{Rmax} .

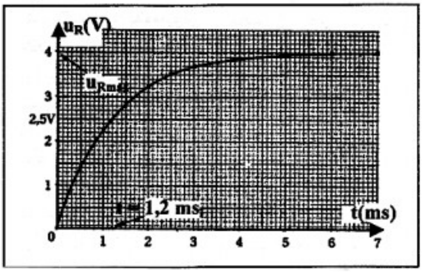
3– التطور الزمني لـ u_R ، نحصل عليه بالإستعانة بالكومبيوتر . إستغل القيم التي نحصل عليها و المعطاة في الجدول أسفله لتحديد قيمة المقاومة r و الذاتية L .

t(ms)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
e_r(V)	0	1,4	2,3	2,8	3,2	3,5	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0

الحـل – 12

1– اعطاء عبارة ثابت الزمن τ : من التعريف ثابت الزمن عبارته هي : $\tau = L/(R + r)$.

2 – التعبير عن التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي و استنتاج قيمته العظمى u_{Rmax} : حسب قانون أوم ، التوتر بين طرفي الناقل الأومي عبارته : $u_R(t) = R\,i(t)$ ، إذن : $i(t) = RE/(R + r)\,[1 - \exp(-t/\tau)]$. القيمة العظمى للحد $1 - \exp(-t/\tau)$



هي 1 (عندما تؤول t إلى ∞) إذن : $u_{Rmax} = RE/(R + r)$.

3ــ تحديد قيمة المقاومة r و الذاتية L : العبارة السابقة تعطي :

$r = RE / u_{Rmax} - R$. على المنحنى المرسوم انطلاقا من القيم المعطاة نقرأ : $u_{Rmax} = 4{,}0\ V$. مع $E = 12\ V$ و $R = 20\ \Omega$

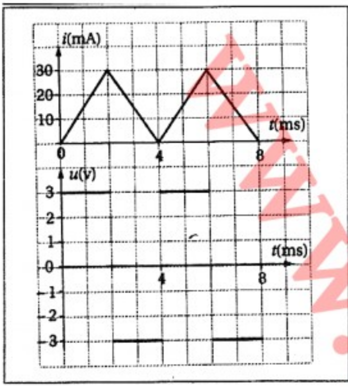
نحصل على : $r = (20 . 12)/4{,}0 - 20 = 40\ \Omega$.

ثابت الزمن τ هو الزمن الأزم لكي تصل قيمة التوتر u_R إلى 63 % من قيمته العظمى $u_{Rmax} = 4{,}0\ V$ أي $2{,}5\ V$.

بالقراءة البيانية ، نحصل على : $\tau = 1{,}2\ ms$. و منه الذاتية :

$L = \tau (R + r) = 1{,}2 . 10^{-3}(20 + 40) = 7{,}2 . 10^{-2}\ H$.

التمرين ــ 13



نعتبر وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها مهملة .

1ــ اعط تمثيل الوشيعة . معتبرا الوشيعة اصطلاحا كآخذة ، أعط عبارة التوتر u بين طرفيها .

2ــ ما هي إشارة u عندما تكون شدة التيار متزايدة ؟ متناقصة ؟

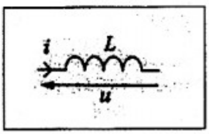
3ــ ما هي عبارة و طبيعة التوتر u إذا كان شدة التيار هي دالة تآلفية من الشكل : $i(t) = at + b$.

4ــ تيار ذو إشارة مثلثية يعبر الوشيعة . التمثيلات البيانية لــ $u(t)$ و $i(t)$ معطاة في الشكل المقابل .

بين أن شكل التوتر u يوافق الأجوبة المعطاة للأسئلة 2 و 3 .

5ــ حدد قيمة الذاتية L .

الحــل ــ 13



1ــ تمثيل الوشيعة : انظر الشكل المقابل . عبارة التوتر u بين طرفيها : اصطلاحا أخذة ،

التوتر بين طرفي الوشيعة ، ذات مقاومة مهملة ، عبارته : $u = L\ di/dt$.

2ــ إشارة u ، عندما تكون شدة التيار متزايدة : $di/dt > 0$ إذن : $u = L\ di/dt > 0$

إشارة u ، عندما تكون شدة التيار متناقصة : $di/dt < 0$ إذن : $u = L\ di/dt < 0$

3ــ عبارة و طبيعة التوتر u : عندما تكون الشدة دالة تآلفية من الشكل : $i(t) = at + b$ ، تصبح : $di/dt = a$ ، إذن : $u = L\ di/dt$. التوتر u ثابت (أو مستمر) .

4ــ التيار i(t) يكون : إما دالة تآلفية متزايدة (بين 0 و 2 ms ، بين 4 و 6 ms ، الخ...) ، أو دالة تآلفية متناقصة (بين 2 و 4 ms ، بين 6 و 8 ms ، الخ...) و حسب الأجوبة المعطاة للأسئلة 2 و 3 ، التوتر u يجب أن يكون بالتناوب :

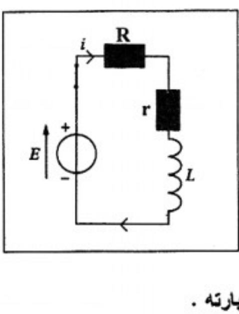
ــ ثابت موجب عندما يكون i دالة تآلفية متزايدة .

ــ ثابت سالب عندما يكون i دالة تآلفية متناقصة .

و منه : شكل التوتر u يوافق الأجوبة المعطاة للأسئلة 2 و 3 .

5ــ تحديد قيمة الذاتية L : عندما تكون i متزايدة ، قيمتها تزداد من 0 إلى 30 mA خلال 2 ms ، و منه إذن : $di/dt = a = (30 . 10^{-3})/(2 . 10^{-3}) = 15\ A . s^{-1}$ و $u = 3V$. و نتيجة لذلك ، تكون قيمة الذاتية : $L = u/a = 3/15 = 0{,}2\ H$. و في طور التناقص : $di/dt = - 15\ A . s^{-1}$ و $u = - 3V$ ، و منه إذن نجد نفس القيمة للذاتية L للوشيعة $L = -3/-15 = 0{,}2\ H$.

التمرين ــ 14



مولد يعطي توتر ثابت قيمته $E = 12\ V$ ، قاطعة ، ناقل أومي مقاومته $R = 10\ k\Omega$ و وشيعة (مقاومتها $r = 10\ \Omega$ ، ذاتيتها L) موصولة على التسلسل .

عند $t = 0$ نغلق القاطعة .

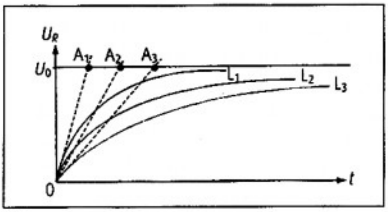
1ــ اكتب المعادلة التفاضلية المنظمة للتطور الزمني لشدة i للتيار .

2ــ في بقية التمرين ، نستخدم المعادلة التفاضلية المقربة التالية $L/R\ di/dt + i = E/R$. لماذا يمكننا فعل هذا التقريب؟

3ــ بعد غلق القاطعة ، شدة التيار i تزداد ثم تصل إلى قيمة نهائية ثابتة i_{max} . انطلاقا من المعادلة التفاضلية المقربة ، اكتب عبارة i_{max} . احسب قيمتها .

4ــ حل المعادلة التفاضلية هو $i(t) = i_{max} [1 - \exp(-t/\tau)]$. كيف يدعى الثابت τ ؟ أعط عبارته .

التمرين ــ16



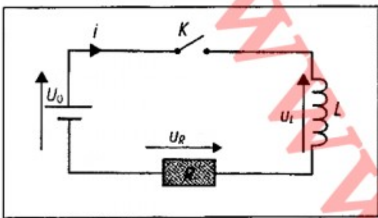
في الشكل المرفق ، نمثل التوتر بين طرفي المقاومة R خلال مرور تيار في دارة كهربائية RL من أجل ثلاث وشائع مختلفة L_1 ، L_2 و L_3 مقاوماتها مهملة .

1ــ لماذا تكون القيمة الحدية U_0 بين طرفي R هي نفسها في الوشائع الثلاث ؟ هل هذا التوتر يتعلق بقيمة L ؟ بقيمة R ؟

2ــ رتب قيم الذاتيات ترتيبا تصاعديا .

3ــ الذاتية L_1 تساوي 60 mH . اعط القيم التقريبية لــ L_2 و L_3 .

الحــل ــ16



1ــ في الثلاث حالات ، التيار سوف يظهر مستغرقا زمن أطول أو أقصر حسب الحالة المعتبرة . يكون لدينا : $i(\infty) = Cte$.

و منه : $i(\infty) = di(\infty)/dt = 0$ و حسب قانون جمع التوترات :

$u_L + u_R = U_0$. و منه : $u_R = U_0$. هذه القيمة هي القيمة التي يعطيها المولد فهي إذن مستقلة عن قيم R أو L .

2ــ ترتيب قيم الذاتيات ترتيبا تصاعديا : في الدارة RL ثابت الزمن τ يتناسب عكسيا مع ميل المماس للمنحنى i(t) عند المبدأ . و حسب قانون أوم i و u_R تتناسب طردا و منه ثابت الزمن $\tau = L/R$ يتناسب عكسيا مع ميل المماس للمنحنى $u_R(t)$ عند المبدأ .

و حسب الشكل المرفق ، ميل هذا المماس يكون أكبر في حالة الوشيعة ذات الذاتية L_1 ثم أصغر في L_2 ثم أصغر في L_3

و منه : نستنتج أن : $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ و منه : $L_1/R < L_2/R < L_3/R$. إذن : $L_1 < L_2 < L_3$

3ــ τ في هذه الحالة كذلك هو فاصلة نقطة تقاطع المماس للمنحنى i(t) مع الخط المقارب له . و بما أن i(t) و $u_R(t)$ تتناسب طردا و حسب الشكل المرفق ،يكون لدينا : $t_{A1} \approx 1/2\ t_{A2} \approx 1/3\ t_{A3}$ و منه نستنتج أن : $\tau_1 \approx 1/2\ \tau_2 \approx 1/3\ \tau_3$

و لدينا : $\tau = L/R$. و منه : $L_1/R \approx 1/2\ L_2/R \approx 1/3\ L_3/R$ و منه : $L_1 \approx 1/2\ L_2 \approx 1/3\ L_3$.

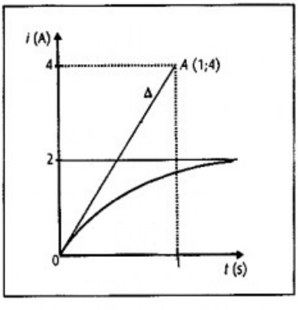
و منه نحسب : $L_3 = 3\ L_1 = 180\ mH$, $L_2 = 2\ L_1 = 120\ mH$.

التمرين ــ17

تتكون دارة كهربائية من مولد مثالي توتره E = 20 V ، قاطعة K و وشيعة مقاومتها r و ذاتيتها L مجهولة . جهاز مناسب للتسجيل يسمح بالحصول على منحنى شدة التيار : i = f(t) . نغلق القاطعة عند اللحظة $t_0 = 0$ ، المنحنى يقبل عند هذه اللحظة (أين شدة التيار لازالت معدومة) مماس الذي يمر بنقطة إحداثيتها : (t = 1,0 s ; i = 4,0 A) . من جهة أخرى نلاحظ خلال مدة زمنية معتبرة أن شدة التيار تستقر عند القيمة الثابتة I = 2,0 A .

1ــ ارسم مظهر المنحنى ظهور التيار .2 ــ اكتب عبارة i(t) بدلالة r ، L ، E و t . 3 ــ استنتج قيم كل من L و R .

الحــل ــ17



1ــ رسم مظهر المنحنى لظهور التيار : انظر الشكل . الشدة تزداد انطلاقا من 0 مماسيا للمستقيم Δ الذي معادلته i = 4 t وفق قانون أسي خطه المقارب الأفقي i = 2 .

2ــ كتابة عبارة i(t) بدلالة r ، L ، E و t : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $E = u_L$ وحيث أن الوشيعة لها مقاومة داخلية r : $E = L\ di/dt + r\ i$. نحصل على : $L/r\ di/dt + i = E/r$ و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة لــ i . آخذا بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية ، نحصل على حل هذه المعادلة :

$$i(t) = E/r\ [1 - \exp(-r/L\ .\ t)]\quad (1)$$

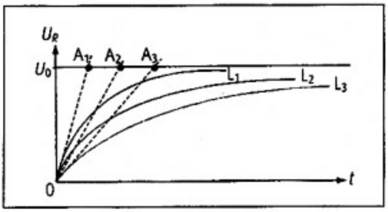
3ــ استنتاج قيم كل من L و R : حسب المعادلة (1) نهاية i(t) عندما تؤول t إلى ∞ هي E/r . و حسب المعطيات هذه القيمة تساوي 2 A . و منه :

$$20/r = 2 \Rightarrow r = 10\ \Omega$$

و حسب (1) ، ميل المستقيم Δ هو 4 A/s . إذن مشتقة i(t) عند 0 تساوي 4

أي : $(di/dt)_{t=0} = - E/r(- r/L)\ \exp(-r/L\ .\ 0) = E/L = 4$. ومنه نحسب : $L = E/4 = 5,0\ H$.

التمرين ـ16



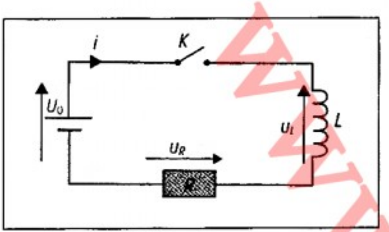
في الشكل المرفق ، نمثل التوتر بين طرفي المقاومة R خلال مرور تيار في دارة كهربائية RL من أجل ثلاث وشائع مختلفة L_1 ، L_2 و L_3 مقاوماتها مهملة .

1ـ لماذا تكون القيمة الحدية U_0 بين طرفي R هي نفسها في الوشائع الثلاث ؟ هل هذا التوتر يتعلق بقيمة L ؟ بقيمة R ؟

2ـ رتب قيم الذاتيات ترتيبا تصاعديا .

3ـ الذاتية L_1 تساوي 60 mH . اعط القيم التقريبية لـ L_2 و L_3 .

الحـل ـ16



1ـ في الثلاث حالات ، التيار سوف يظهر مستغرقا زمن أطول أو أقصر حسب الحالة المعتبرة . يكون لدينا : $i(\infty) = Cte$.

و منه : $i(\infty) = di(\infty)/dt = 0$ و حسب قانون جمع التوترات : $u_L + u_R = U_0$. و منه : $u_R = U_0$. هذه القيمة هي القيمة التي يعطيها المولد فهي إذن مستقلة عن قيم R أو L .

2ـ ترتيب قيم الذاتيات ترتيبا تصاعديا : في الدارة RL ثابت الزمن τ يتناسب عكسيا مع ميل المماس للمنحنى i(t) عند المبدأ . و حسب قانون أوم i و u_R تتناسب طردا و منه ثابت الزمن $\tau = L/R$ يتناسب عكسيا مع ميل المماس للمنحنى $u_R(t)$ عند المبدأ .

و حسب الشكل المرفق ، ميل هذا المماس يكون أكبر في حالة الوشيعة ذات الذاتية L_1 ثم أصغر في L_2 ثم أصغر في L_3

و منه : نستنتج أن : $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ و منه : $L_1/R < L_2/R < L_3/R$. إذن : $L_1 < L_2 < L_3$

3ـ τ في هذه الحالة كذلك هو فاصلة نقطة تقاطع المماس للمنحنى i(t) مع الخط المقارب له . و بما أن i(t) و $u_R(t)$ تتناسب طردا و حسب الشكل المرفق يكون لدينا : $t_{A1} \approx 1/2\ t_{A2} \approx 1/3\ t_{A3}$ و منه نستنتج أن : $\tau_1 \approx 1/2\ \tau_2 \approx 1/3\ \tau_3$

و لدينا : $\tau = L/R$. و منه : $L_1/R \approx 1/2\ L_2/R \approx 1/3\ L_3/R$ و منه : $L_1 \approx 1/2\ L_2 \approx 1/3\ L_3$.

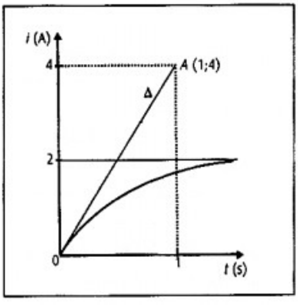
و منه نحسب : $L_3 = 3\ L_1 = 180\ mH$, $L_2 = 2\ L_1 = 120\ mH$.

التمرين ـ17

تتكون دارة كهربائية من مولد مثالي توتره E = 20 V ، قاطعة K و وشيعة مقاومتها r و ذاتيتها L مجهولة . جهاز مناسب للتسجيل يسمح بالحصول على منحنى شدة التيار : i = f(t) . نغلق القاطعة عند اللحظة $t_0 = 0$ ، المنحنى يقبل عند هذه اللحظة (أين شدة التيار لازالت معدومة) مماس الذي يمر بنقطة إحداثيتها : (t = 1,0 s ; i = 4,0 A) . من جهة أخرى نلاحظ خلال مدة زمنية معتبرة أن شدة التيار تستقر عند القيمة الثابتة I = 2,0 A .

1ـ ارسم مظهر المنحنى ظهور التيار .2ـ اكتب عبارة i(t) بدلالة r ، L ، E و t . 3 ـ استنتج قيم كل من L و R .

الحـل ـ17



1ـ رسم مظهر المنحنى لظهور التيار : انظر الشكل . الشدة تزداد انطلاقا من 0 مماسيا للمستقيم Δ الذي معادلته i = 4 t وفق قانون أسي خطه المقارب الأفقي i = 2 .

2ـ كتابة عبارة i(t) بدلالة r ، L ، E و t : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $E = u_L$ وحيث أن الوشيعة لها مقاومة داخلية r : $E = L\ di/dt + r\ i$. نحصل على : $L/r\ di/dt + i = E/r$ و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة لـ i . أخذا بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية ، نحصل على حل هذه المعادلة :

$$i(t) = E/r\ [1 - \exp(-r/L\ .\ t)]\quad (1)\ .$$

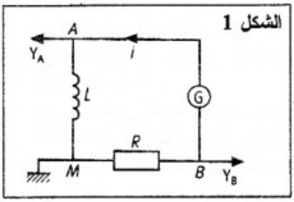
3ـ استنتاج قيم كل من L و R : حسب المعادلة (1) نهاية i(t) عندما تؤول t إلى ∞ هي E/r . و حسب المعطيات هذه القيمة تساوي 2 A . و منه :

$$20/r = 2 \Rightarrow r = 10\ \Omega\ .$$

و حسب (1) ، ميل المستقيم Δ هو 4 A/s . إذن مشتقة i(t) عند 0 تساوي 4

أي : $(di/dt)_{t=0} = - E/r(- r/L)\exp(-r/L\ .\ 0) = E/L = 4$. ومنه نحسب : $L = E/4 = 5{,}0\ H$.

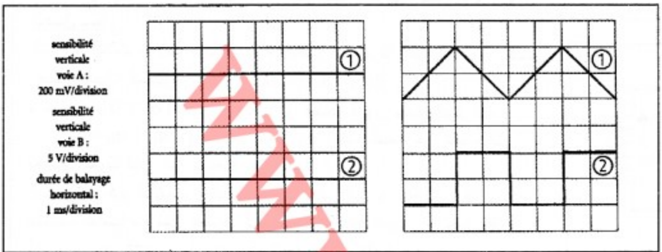
التمرين ـــ18



لدينا مولد G يعطي توتر متناوب جيبي . نصل على التسلسل مع هذا المولد وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها مهملة و ناقل أومي مقاومته $R = 2000\ \Omega$. جهاز راسم إهتزاز مهبطي ذو مدخلين يوضع في الدارة كما في الشكل 1 .

1ــ a ــ ما هو المقدار الفيزيائي الكهربائي الملاحظ على المدخل A و على المدخل B . مثل هاذين المقدارين في مخطط الدارة b ــ بعد ضبط الجهاز نحصل على الشكل 2 على شاشة جهاز راسم الإهتزاز . ما هو تواتر التوتر الذي يعطيه المولد ؟

2ــ a ــ اعط اسم الظاهرة الملاحظة في هذه التجربة . اكتب العلاقة بين التوتر u_{AM} بين طرفي الوشيعة ، الذاتية L و شدة التيار اللحظية i المار في الدارة .



b ــ استنتج العلاقة

$$u_{AM} = - L/R\ du_{BM}/dt$$

أين u_{AM} و u_{BM} على الترتيب التوترات بين طرفي الوشيعة و الناقل الأومي .

c ــ أي من المنحنيين 1 أو 2 يوافق للمدخل A و المدخل B .

3ــ باستعمال السلم السابق على الجهاز الموضح على الشكل :

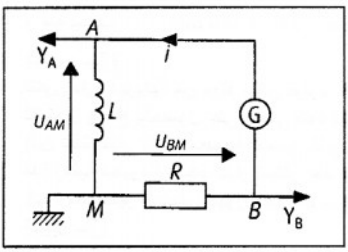
a ــ حدد القيم العظمى للتوتر u_{AM} بين طرفي الوشيعة .

b ــ انطلاقا من نصف الدور الأول للمنحنيات الموضحة في الشكل المرافق ، احسب du_{BM}/dt .

4ــ a ــ استنتج انطلاقا من السؤالين 2 و 3 القيمة العددية للنسبة $\tau = L/R$.

b ــ بين أن هذه النسبة تجانس الزمن . c ــ استنتج قيمة الذاتية L .

الحـل ــ18



1ــ a ــ المقدار الفيزيائي الكهربائي الملاحظ على المدخل A هو التوتر بين Y_A و القطب السالب للجهاز أي u_{AM} . أي التوتر بين طرفي الوشيعة (اصطلاحا آخذة) . المقدار الفيزيائي الكهربائي الملاحظ على المدخل B هو التوتر بين Y_B و القطب السالب للجهاز أي u_{BM} . أي التوتر بين طرفي الناقل الأومي .

b ــ تواتر التوتر الذي يعطيه المولد : من الشكل نجد :

$T = 4\ ms \Rightarrow N = 1/T = 1/(4\ .\ 10^{-3}) = 250\ Hz$.

2ــ a ــ اسم الظاهرة الملاحظة في هذه التجربة : ظاهرة التحريض الذاتي .

مقاومة الوشيعة مهملة . u_{AM} و i لهما اتجاهين متعاكسين و منه :

$u_{AM} = + L di/dt$.

b ــ استنتج العلاقة $u_{AM} = - L/R\ du_{BM}/dt$: $u_{BM} = - R\, i \Rightarrow i = - u_{BM}/R$. بتعويض علاقة i في العلاقة 2ــ a ــ نحصل على : $u_{AM} = L d/dt(- u_{BM}/R)$. و منه : $u_{AM} = - L/R\ du_{BM}/dt$.

c ــ التوتر u_{AM} يتناسب طردا مع مشتقة u_{BM} . و حيث أن مشتقة دالة مثلثية تعطي دالة مربعة إذن المدخل A يوافق المنحنى 2 و المدخل B يوافق المنحنى 1 .

3ــ a ــ تحديد القيم العظمى للتوتر u_{AM} بين طرفي الوشيعة : $(+ 5\ V\ ;\ - 5\ v)$.

b ــ حساب du_{BM}/dt : على الجزء المعتبر ، المنحنى يصعد خطيا بتدريجتين أي 10 V و يوافقه تقدم زمني قدره 2 ms و هذا ما يوافق ميل قدره : $10/(2\ .\ 10^{-3}) = 5000\ V/s$. بما أن u_{BM} خطي ، إذن مشتقته تمثل قيمة هذا الميل أي : $du_{BM}/dt = 5000\ V/s$.

4ــ a ــ استنتاج القيمة العددية للنسبة $\tau = L/R$: حسب 2ــ b ــ $u_{AM} = - L/R\ du_{BM}/dt$ أي : $L/R = - u_{AM} / du_{BM}/dt$ و منه : $\tau = - u_{AM} / du_{BM}/dt$. بالنسبة للنصف لدور الأول : $du_{BM}/dt = 5000\ V/s$ و $u_{AM} = - 5\ V$ يكون لدينا إذن : $\tau = - 5/5000 = 0{,}001\ s$.

b ــ النسبة تجانس الزمن : حسب 4ــ a ــ ، $\tau = [u]/[u]/T = T$.

c ــ استنتج قيمة الذاتية L : $\tau = L/R \Rightarrow L = R\ .\ \tau = 2000\ .\ 0{,}001 = 2\ H$

التمرين ــ19

1ــ كلما كانت المقاومة في الدارة RL كبيرة كلما كان زمن رد فعلها : a ــ قصير ، b ــ طويل .

2ــ إذاكان توتر بين طرفي الوشيعة معدوم إذن نقول أنها لم تختزن طاقة مغناطيسية : a ــ صحيح ، b ــ خطأ .

3ــ إذا كانت شدة التيار التي تجتاز وشيعة ثابتة و معدومة إذن التوتر بين طرفيها يمكن أن يكون ثابت و غير معدوم

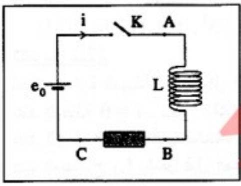
a ــ صحيح ، b ــ خطأ .

الحــل ــ 19

1 ــ a ــ قصير : لأن $\tau = L/R$. 2 ــ b ــ خطأ لأن الطاقة تتعلق بالتيار و ليس بالتوتر $E_{(L)} = 1/2\ L\ i^2$.

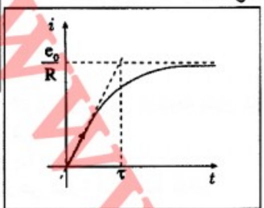
3ــ b ــ خطأ . إذاكانت شدة التيار ثابتة و معدومة ، العلاقة : $U = L\ di/dt + r\ i$ تبين أن التوتر بين طرفيها يمكن أن يكون معدوم .

التمرين ــ20



نعتبر دارة مبينة في الشكل المقابل ، مكونة من العناصر التالية ، موصولة على التسلسل : مولد توتر بدون مقاومة داخلية ، وشيعة بدون مقاومة و مقاومة .

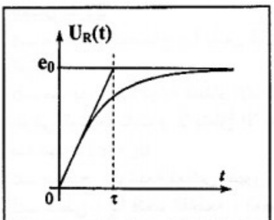
ــ عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K . نلاحظ حينئذ أن الشدة i للتيار المار في الدارة يتطور كالتالي :

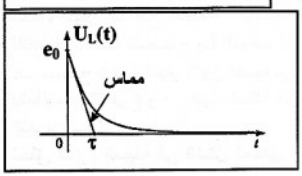


1ــ مثل بيانيا مظهر التوتر $U_{BC} = U_R$ بين طرفي المقاومة R بدلالة الزمن . برر إجابتك .

2ــ عبر عن التوتر $U_{AB} = U_L$ بين طرفي الوشيعة بدلالة e_0 و U_R . استنتج مظهر المنحنى الممثل لتغيرات U_L بدلالة الزمن .

3ــ اشرح لماذا يمكن القول أن الوشيعة تكافئ دارة قصيرة في النظام الدائم .





الحــل ــ 20

1ــ مظهر التوتر $U_{BC} = U_R$: حسب قانون أوم : $U_R = R\ i$.إذن منحنى $U_R(t)$ يستنتج من منحنى $U_R(t)$ بالضرب في R القيم على محور التراتيب . فنحصل على منحنى $U_R(t)$ بدلالة الزمن .

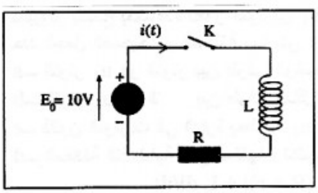
2ــ التعبير عن التوتر $U_{AB} = U_L$ بين طرفي الوشيعة بدلالة e_0 و U_R :

قانون جمع التوترات يسمح بكتابة : $U_L = U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = e_0 - U_R$.

مظهر U_L يستنتج بأخذ الناظر للمنحنى $U_R(t)$ بالنسبة للمستقيم الأفقي الذي معادلته : $U = e_0/2$. نحصل على المنحنى الممثل لتغيرات U_L بدلالة الزمن .

3ــ شرح لماذا يمكن القول أن الوشيعة تكافئ دارة قصيرة في النظام الدائم :

حسب المنحنى السابق نلاحظ ان النظام الدائم نصل إليه من أجل $t >> \tau$ و منه كل المقادير المميزة للدارة تؤول إلى قيم ثابتة ، أي i تؤول إلى e_0/R و U_R تؤول إلى e_0 و U_L تؤول إلى 0 . و منه نقول أنه لا يحدث تغير فجائي أو لحظي للتوتر بين طرفي الوشيعة $(U_L = 0)$ و منه نقول أن الوشيعة تكافئ دارة قصيرة في النظام الدائم .



التمرين ــ21

نعتبر دارة مبينة في الشكل المقابل .

ــ عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K فنلاحظ تطور الشدة i(t) :

1ــ برر قيمة i(t) من أجل $t \to 0^+$.

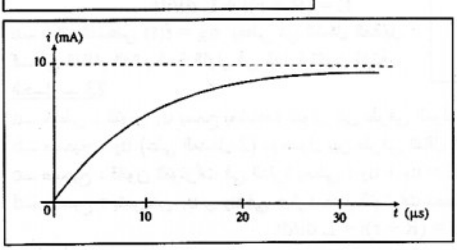
2ــ إنطلاقا من القيمة الحدية لــ i(t) من أجل $t \to \infty$ ،أحسب قيمة المقاومة R .

3ــ نريد تحديد ثابت الزمن τ للدارة بطريقتين :

a ــ ارسم المماس عند المبدأ للمنحنى . من أجل أي قيمة لــ t يقطع المماس الخط المقارب الأفقي ؟

b ــ من أجل أي قيمة لــ t ، الشدة i(t) تأخذ القيمة 63 % من قيمته النهائية ؟

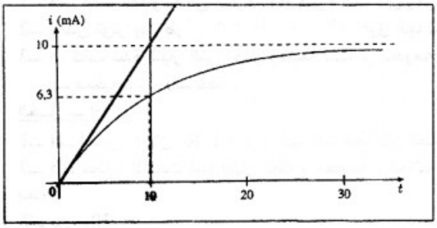
4ــ ما هي قيمة الذاتية L للوشيعة ؟



الحــل ــ21

1ــ تبرير قيمة i(t) من أجل $t \to 0^+$: شدة التيار المار في الوشيعة مستمرة بالنسبة للزمن . من أجل كل قيمة لــ t سالبة

هذه الشدة معدومة بما أن القاطعة مفتوحة . إذن فهو منطقي أن تؤول i إلى 0 من أجل $t \to 0^+$.



2ـ حساب قيمة المقاومة R :

$E_\infty = R \cdot i_\infty \Rightarrow R = E_0/i_\infty = 10/(10 \cdot 10^{-3}) = 1\ k\Omega$.

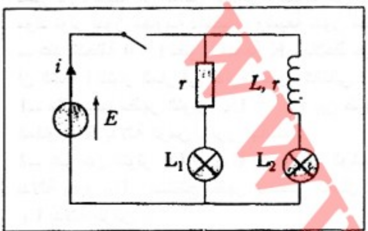
aـ رسم المماس عند المبدأ للمنحنى . من أجل أي قيمة لـ t : المماس للمنحنى عند مبدأ الأزمنة يقطع الخط المقارب الأفقي $i = I_0$ عند نقطة فاصلتها تمثل قيمة ثابت الزمن $\tau = 10\ \mu s$.

bـ قيمة t ، التي من أجلها الشدة i(t) تأخذ القيمة 63 % من I_0 : ترتيب النقطة من المنحنى التي فاصلتها $t = \tau$ هو $i = 0{,}63\ I_0$.

4ـ قيمة الذاتية L للوشيعة :

$\tau = L/R \Rightarrow L = \tau \cdot R = 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-2}\ H$.

التمرين ـ22



نحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل . المصباحين L_1 و L_2 متماثلين .

عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة .

حدد الجمل الصحيحة و الخاطئة مما يلي :

aـ المصباح L_1 يشعل قبل المصباح L_2 .

bـ عند نهاية النظام الإنتقالي ، التوتر بيْن طرفي الوشيعة يكون ثابت .

cـ الوشيعة تعاكس ظهور التيار في الدارة .

dـ إذا فتحنا القاطعة ، المصباح L_2 ينطفئ أولا .

eـ شدة التيار تكون نفسها في فرعي الدارة في النظام الدائم .

الحـل ـ 22

aـ صحيح : المصباح L_1 يشعل قبل المصباح L_2 : هناك تأخير (عرقلة لوصول التيار) في الفرع من الدارة الحاوي على الوشيعة .

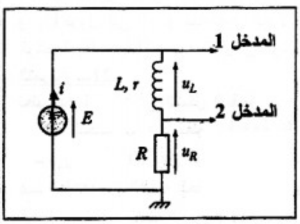
bـ صحيح : عند نهاية النظام الإنتقالي ، التوتر بين طرفي الوشيعة يكون ثابت : عند الوصول للنظام الدائم ، يكون التوتر بين طرفي الوشيعة ثابت و لا يتعلق إلا بمقاومته الداخلية r . لدينا $u_L = L\ di/dt$ و بما أن i ثابت قي النظام الدائم فإن $di/dt = 0$: و منه نجد : $u_L = r\ i$

cـ صحيح : الوشيعة تعاكس ظهور التيار **في الدارة** : **الوشيعة تعاكس** حدوث تغيرات للتيار في الفرع من **الدارة الموجودة فيه .**

dـ خاطئ : إذا فتحنا القاطعة ، المصباح L_2 **ينطفئ أولا** : كما تعاكس الوشيعة ظهور التيار عند غلق **القاطعة كذلك تعاكس** اختفاء التيار عند فتح القاطعة . **الوشيعة تعاكس** حدوث تغيرات للتيار في الفرع من الدارة الموجودة فيه . **إذن يحدث تأخر** للإنطفاء بالنسبة للمصباح L_2 الموصول على التسلسل مع الوشيعة .

eـ صحيح : شدة التيار تكون نفسها في فرعي الدارة في النظام الدائم : في النظام الدائم ، شدة التيار في الفرعين لا تتعلق إلا بالمقاومة لكل فرع و بما أنها متماثلة فإن شدة التيار تكون متساوية أي نفسها في فرعي الدارة .

التمرين ـ23



نحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل . عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة . جهاز كمبيوتر يسمح بمشاهدة تطور التوترين u_1 (على المدخل 1) و u_2 (على المدخل 2) .

حدد الجمل الصحيحة و الخاطئة مما يلي :

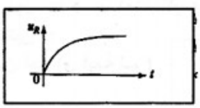
aـ التوتر u_1 هو التوتر بين طرفي الوشيعة .

bـ التوتر u_2 هو التوتر بين طرفي الناقل الأومي .

cـ قانون التوترات في الدارة يعطي : $E = u_1 + u_2$

dـ المعادلة التفاضلية التي تحققها i تكتب على الشكل :

$$E = (R + r)i + L\ di/dt$$



eـ شكل المنحنى $u_R = f(t)$ يعطى في الشكل المقابل :

fـ في النظام الدائم شدة التيار في الدارة تكون ثابتة .

الحـل ـ 23

aـ خاطئ : التوتر u_1 يسمح بمشاهدة التوتر بين طرفي المولد .

bـ صحيح : u_2 (على المدخل 2) موصول بين طرفي الناقل الأومي .

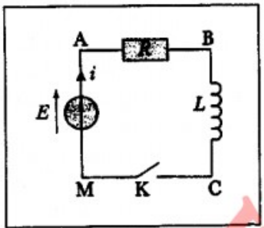
cـ صحيح : قانون التوترات في الدارة يعطي : $E = u_1 + u_2$

dـ صحيح : بتعويض u_1 و u_2 في عبارة جمع التوترات نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها i :

$$E = (R + r)i + L\ di/dt$$

e– صحيح : التوتر بين طرفي الناقل الأومي يتناسب طردا مع الشدة i للتيار . عند اللحظة $t = 0$ تكون شدة التيار معدومة . بعدها تزداد الشدة أسيا لتصل إلى قيمة عظمى تثبت عندها .
f– صحيح : في النظام الدائم شدة التيار في الدارة تكون ثابتة .

التمرين –24



نحقق دارة تحتوي على التسلسل : مولد مثالي ، قوته المحركة الكهربائية $E = 10\ V$ ، ناقل أومي مقاومته $R = 470\ \Omega$ و وشيعة ذاتيتها $L = 0{,}82\ H$ و مقاومتها مهملة .

الجزء A

عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K .

أذكر هل الإقتراحات التالية صحيحة أم خاطئة :

a– لمشاهدة سلم التوتر يجب إيصال القطب السالب إلى النقطة M و القطب الموجب إلى النقطة A

b– تيار كهربائي يظهر لحظيا في الدارة .

c– شدة التيار تأخذ القيمة $I_0 = 21\ mA$ في النظام الدائم . d– التوتر بين طرفي الوشيعة يؤول إلى القيمة 0

e– ثابت الزمن للدارة قيمته $\tau = 385\ ms$. f– المعادلة التفاضلية التي تحققها i تكون من الشكل $E = i + L/R\ .\ di/dt$.

الجزء B

اشرح في بعض اسطر الظاهرة الملاحظة عندما نفتح القاطعة K .

الحل – 24

الجزء A

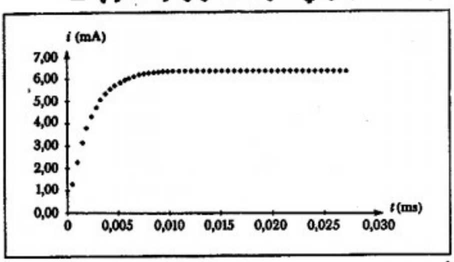
a– صحيح : لمشاهدة سلم التوتر أي التوتر بين طرفي المولد يجب ربط الجهاز بين طرفي المولد .
b– خاطئ : الوشيعة تعاكس حدوث تغيرات للتيار في الدارة الموجودة فيه أي تؤخر ظهور التيار كما تؤخر كذلك اختفائه .
c– صحيح : في النظام الدائم شدة التيار ثابتة و تأخذ القيمة $I_0 = E/R = 10/470 = 21{,}3\ mA$.
d– صحيح : عند الوصول للنظام الدائم التوتر بين طرفي الوشيعة ينعدم : لدينا $u_L = r\,i + L\ di/dt$ و عند الوصول للنظام الدائم تصبح شدة التيار ثابتة ومنه $di/dt = 0$ و كذلك مقاومة الوشيعة مهملة ومنه : التوتر بين طرفي الوشيعة ينعدم .
e– خاطئ : من التعريف ثابت الزمن للدارة عبارته RL و منه : $\tau = L/R = 0{,}82/470 = 1{,}7\ ms$.
f– خاطئ : المعادلة التفاضلية التي تحققها i تكون من الشكل $E/L = di/dt + R/L\ i$.

الجزء B

الظاهرة الملاحظة عندما نفتح القاطعة K : الوشيعة تمانع اختفاء التيار أي التيار يتناقص تدريجيا إلى أن ينعدم أي التيار لا ينعدم لحظيا أو آنيا و يحدث هذا نتيجة وجود طاقة مختزنة في الوشيعة تعطيها للدارة عند فتح القاطعة مما يسبب ظهور تيار جهته نفس الجهة للتيار الذي كان يعطيه المولد .

التمرين –25

نعتبر دارة RL تحتوي على التسلسل : مولد قوته المحركة الكهربائية E ، ناقل أومي مقاومته R و وشيعة ذاتيتها L .



المقاومة الكلية للدارة هي $R = 47\ \Omega$. تغيرات الشدة i للتيار في الدارة ممثلة في الشكل المقابل .

أذكر هل الإقتراحات التالية صحيحة أم خاطئة :

a– يظهر مرور التيار في الدارة .

b– الوشيعة تعاكس إختفاء التيار في الدارة .

c– ثابت الزمن للدارة هو $\tau = 2{,}1\ ms$.

d– ذاتية الوشيعة هي : $L = 0{,}10\ H$

e– المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة i هي :

$$L/R\ .\ di/dt\ +\ i\ =\ 0$$

f– شدة التيار تكتب على الشكل : $i(t) = E/R\ [1 - \exp(-t/\tau))\ ]$

g– الطاقة المختزنة في الوشيعة عند اللحظة $t = 0{,}02\ ms$ تساوي إلى $3{,}2\ mJ$.

الحل – 25

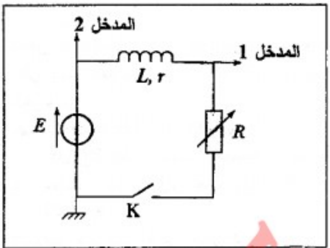
a– صحيح : يظهر مرور التيار في الدارة حيث أن المنحنى يشير إلى أن شدة التيار تزداد تدريجيا إلى أن تثبت .
b– صحيح : الوشيعة تعاكس إختفاء التيار في الدارة . الوشيعة تعاكس حدوث تغير للتيار في الفرع من الدارة الموجودة فيه .
c– صحيح : تحديد ثابت الزمن للدارة بيانيا يؤكد أن قيمته تساوي فعلا $\tau = 2{,}1\ ms$.
d– صحيح : باستخدام العبارة $\tau = L/R$ نحدد ذاتية الوشيعة : $L = \tau\ .\ R = 2{,}1\ .\ 10^{-3}\ .\ 47 = 0{,}10\ H$ بالتقريب .
e– خاطئ : المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة i هي : $E/L = di/dt + R/L\ i$

f_ صحيح : شدة التيار تكتب على الشكل : $i(t) = E/R\,[1 - \exp(-t/\tau)]$

g_ خاطئ : الطاقة المختزنة في الوشيعة هي $E_{bob} = 1/2\ L\ i^2$ و عند اللحظة $t = 0{,}02\ ms$ تكون $i = 6{,}4 \cdot 10^{-3}\ A$ و منه

توضيح : الوشيعة تعاكس اختفاء التيار أي تواصل تقديم تيار في الإتجاه الأصلي قبل فتح القاطعة .

التمرين _26



نحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل ، مؤلفة من مولد قوته المحركة الكهربائية E ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومته الداخلية r ، و ناقل أومي مقاومته متغيرة .

نوصل المدخلين 1 و 2 بجهاز الكمبيوتر . عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة K .

a_ ماهي التوترات المشاهدة على شاشة الكومبيوتر ؟

مثل هذه التوترات على مخطط .

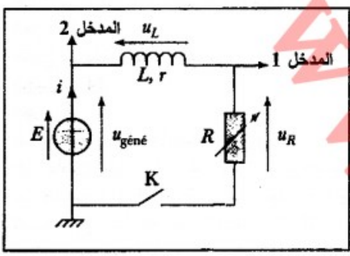
b_ اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها i .

c_ حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل $i = A + B\exp(-t/\tau)$.

حدد عبارة كل من A ، B و τ . d_ مثل منحنى الدالة $i = f(t)$.

e_ ما هي عبارة الطاقة المختزنة في الوشيعة عند اللحظة t ؟ f_ ما هو تأثير قيمة R على A ، B و τ ؟

الحل _ 26



a_ التوترات المشاهدة على شاشة الكومبيوتر هي :

على المدخل 1 : التوتر بين طرفي الناقل الأومي إذن عبارته : $u_R = R\,i$

على المدخل 2 : التوتر بين طرفي المولد إذن عبارته : $u_G = E$

تمثيل هذه التوترات على مُخطط : انظر الشكل المقابل . باعتبار الإصطلاح آخذة ، التوترات u_R و u_L موجبة .

b_ كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها i : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $u_G = u_R + u_L$ حيث $u_R = R\,i$

و $u_L = L\,di/dt + r\,i$ و بالتعويض في المعادلة $E = u_R + u_L$ نحصل

على : $R\,i + L\,di/dt + r\,i = E$ و تصبح :

$L\,di/dt + (R + r)\,i = E$ أو : $di/dt + (R + r)/L\ i = E/L$ معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة لـ i .

c_ تحديد عبارة كل من A ، B و τ :

حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i(t) = A + B\exp(-t/\tau)$ ، يجب أن يحقق المعادلة .

إذن لدينا : $di(t)/dt = -B/\tau\,\exp(-t/\tau)$ نعوض عن $i(t)$ و di/dt في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$$-B/\tau\,\exp(-t/\tau) + (R + r)/L\,[A + B\exp(-t/\tau)] = E/L$$

$$\Leftrightarrow\ -B/\tau\,\exp(-t/\tau) + A\,(R + r)/L + (R + r)/L \cdot B\exp(-t/\tau) = E/L$$

$$\Leftrightarrow\ [-B/\tau + B\,(R + r)/L]\ \exp(-t/\tau) = E/L - A\,(R + r)/L$$

هذه المعادلة محققة إذا كان : • $-B/\tau + B\,(R + r)/L = 0$ أي : $B/\tau = B\,(R + r)/L$ و منه : $\tau = L/(R + r)$

• $E/L - A\,(R + r)/L = 0$ أي : $A\,(R + r)/L = E/L$ و منه : $A = E/(R + r)$

نحدد قيمة B من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $i = 0$ (شرط استمرارية شدة التيار نتيجة وجود الوشيعة)

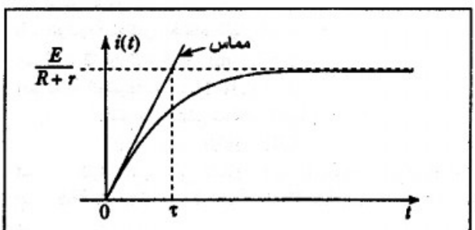
ومنه : $i(t = 0) = E/(R + r) + B\exp(-t/\tau) = E/(R + r) + B$ لأن : $\exp(0) = 1$

ومنه : $E/(R + r) + B = 0 \Leftrightarrow B = -E/(R + r)$

ومنه الشدة i للتيار تكتب على الشكل :

$$i(t) = E/(R + r)\,[1 - \exp(-t/\tau)]$$

مع : $\tau = L/(R + r)$



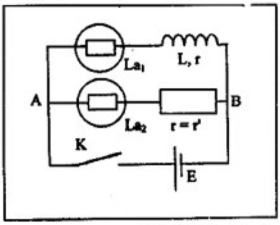
d_ تمثيل منحنى الدالة $i = f(t)$: انظر الشكل المقابل .

e_ عبارة الطاقة المختزنة في الوشيعة عند اللحظة t :

$E_{bob} = 1/2 \cdot L \cdot i^2$.

f_ تأثير قيمة R على A ، B و τ : عندما تكبر قيمة المقاومة R فإن A تصغر لأن : $A = E/(R + r)$. شدة التيار في الدارة تكون ضعيفة جدا . B تصغر قيمة لأن : $B = -A$. τ تصغر لأن : التيار يظهر في الدارة بسرعة أكبر لأن : $\tau = L/(R + r)$.

التمرين ــ27



نحقق تركيب الدارة الموضحة في الشكل المقابل ، La_1 و La_2 هما مصباحين متماثلين يحملان العلامة التالية : 6V , 1 A . المولد قوته المحركة الكهربائية هي $E = 6\ V$.

1ــ نغلق القاطعة K ، أوصف الظاهرة الملاحظة مع التعليق عليها .

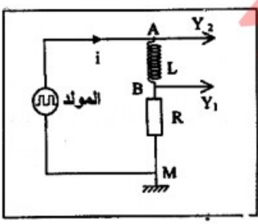
2ــ قارن بين شدة التوهج للمصباحين في النظام الدائم .

الحــل ــ27

1ــ وصف الظاهرة الملاحظة مع التعليق عليها : عند غلق القاطعة ، المصباح La_1 يشتعل قبل المصباح La_2 و هذا يحدث بسبب وجود الوشيعة التي تعاكس التيار العابر في الفرع الموجودة فيه . بعد مدة زمنية (تتعلق بقيمة L و r) المصباحين يشتعلان . الوصول إلى النظام الدائم .

2ــ المقارنة بين شدة التوهج للمصباحين في النظام الدائم : الناقل الأومي مقاومته تساوي إلى المقاومة الداخلية للوشيعة و منه شدة التيار في فرعي الدارة تكون نفسها إذن شدة توهج المصباحين تكون نفسها .

التمرين ــ 28



لدراسة استجابة الدارة R L لسلم التوتر ، نحقق تركيب الدارة الموضحة في الشكل المقابل . المولد يعطي توتر قيمته العظمى $E = 5\ V$.

الوشيعة ذاتيتها $L = 250\ mH$ ، المقاومة قيمتها $R = 5\ \Omega$. نستخدم مدخلي جهاز راسم الإهتزاز المهبطي لمشاهدة التوترين u_{AM} و u_{BM} .

1ــ لماذا يدون التوتر u_{BM} صورة للتيار في الدارة ؟ ماذا نشاهد على المدخل 2 (Y_2) ؟

2ــ ما هي شدة التيار في الدارة في النظام الدائم ؟

3ــ دور المولد هو $T = 10\ ms$ ، هل يمكننا مشاهدة النظام الدائم .

الحــل ــ28

1ــ يكون التوتر u_{BM} صورة للتيار في الدارة : حسب الإتجاهات الإصطلاحية المختارة لدينا : $u_{BM} = R\,i$

التوتر u_{BM} يسمح بمشاهدة i (بتقريب يتعلق بقيمة المعامل R) . التوتر u_{AM} يشاهد على المدخل 2 و هو يمثل التوتر بين طرفي المولد .

2ــ شدة التيار في الدارة في النظام الدائم : عند الوصول إلى النظام الدائم ، شدة التيار تصبح ثابتة و ينعدم تأثير الذاتية و منه $di/dt = 0$. و يمكن أن نكتب $E = uAM = R\,I$ و بالتالي شدة التيار تساوي $I = E/R = 1\ A$.

3ــ لمشاهدة النظام الدائم يجب أن يكون ثابت الزمن للدارة ضعيف أمام نصف الدور للمولد ($\tau < T/20$)

دور المولد هو $T = 10\ ms$ أي $T/20 = 0{,}5\ ms$. ثابت الزمن $\tau = L/R = (250 \cdot 10^{-3})/5 = 50\ ms$

و منه ثابت الزمن كبير أمام دور المولد إذن النظام الدائم لا يمكن مشاهدته .

التمرين ــ29

عند غلق الدارة RL ، المعادلة التفاضلية التي تحققها i هي : $E = L\,di/dt + (R + r)\,i$

1ــ اكتب عبارة الثابت τ بدلالة المقادير المميزة للدارة .

2ــ بين ، باستخدام طريقة تحليل الأبعاد لهذه العبارة ، أن τ تجانس الزمن .

3ــ نفس السؤال ، باستخدام طريقة تحليل الأبعاد للمعادلة التفاضلية .

الحــل ــ29

1ــ كتابة عبارة الثابت τ بدلالة المقادير المميزة للدارة : $\tau = L/(R + r)$.

2ــ تبيان ، أن τ تجانس الزمن :

$[L/(R + r)] = [L] / [R + r]$

$u_R = R \cdot i \Rightarrow [R] \cdot [I] \Rightarrow [R] = [U] / [I]$,

$u_L = L\,di/dt + r\,I \Rightarrow [U] = [L\,di/dt] = [L] \cdot [I] / [T] \Rightarrow [L] = ([U] \cdot [T]) / [I]$

$[L/(R + r)] = [L] / [R] = ([U] \cdot [T]) / ([I]) \times [I]/[U]) = [T]$

$\Rightarrow [L/(R + r)] = [T] \Rightarrow [\tau] = [L/(R + r)] = [T]$.

3ــ نفس السؤال ، باستخدام طريقة تحليل الأبعاد للمعادلة التفاضلية :

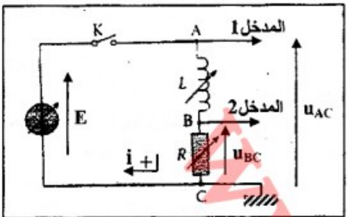
$E = L\,di/dt + (R + r)\,i \Leftrightarrow E/(R + r) = L/(R + r)\,di/dt + i$.

$[E/(R + r)] = [L/(R + r)] \cdot [di/dt] = [i] \Leftrightarrow [I] = ([L] \cdot [I]) / ([R] \cdot [T])$

$\Leftrightarrow [T] = [L] / [R] = [T] = [\tau]$

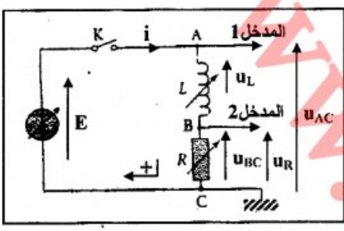
تمـــارين نماذج للبكالوريا
وضعية ادماجية
BAC

التمرين ـ1



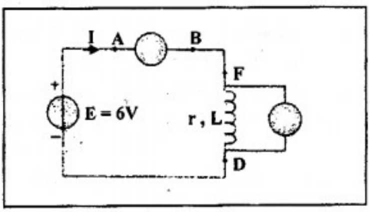
نعتبر الدارة المبينة على الشكل . عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K .
نريد متابعة تطور الشدة i للتيار بدلالة الزمن .
1ـ مثل أسهم التوترات u_R و u_L على الشكل المرفق ثم أعط أسمائها مستعملا حروف النقاط الموضحة على الشكل .
2ـ ما هو التوتر الذي نشاهده على المدخل 1 ؟ و كذا على المدخل 2 ؟
3ـ ما هو التوتر الذي نسجله لتحقيق متابعة تطور الشدة i ؟
4ـ ما هي العملية التي يجب إذن إجراءها ؟

الحـل ـ 1



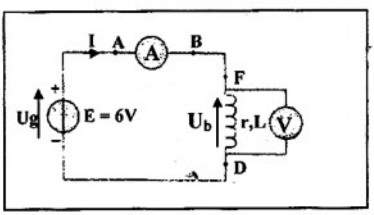
1ـ تمثيل أسهم التوترات u_R و u_L على الشكل : u_R و u_L لهما اتجاه يعاكس اتجاه i . إذن : $u_L = u_{AB}$, $u_R = u_{BC}$.
2ـ على المدخل 1 ، نسجل التوتر بين نقطة القياس A و القطب السالب ، إذن التوتر الذي نشاهده هو u_{AC} .
على المدخل 2 ، نسجل التوتر بين نقطة القياس B و القطب السالب ، إذن التوتر الذي نشاهده هو u_{BC} .
3ـ التوتر الذي نسجله لتحقيق متابعة تطور الشدة i . حسب قانون أوم ، $u_R = R\,i$ إذن التوتر الذي نسجله لتحقيق متابعة تطور الشدة i هو : التوتر بين طرفي المدخل 2 .
4ـ العملية التي يجب إذن إجراءها : العملية التي يجب إذن إجراءها لتحديد i هي : $i = u_R/R$

التمرين ـ2



لقياس قيمة r ، مقاومة الدارة المبينة على الشكل . التلميذ نسيم يحقق دارة كهربائية ، تحتوي على مولد توتر مستمر قيمته $E = 6{,}0\ V$
و مقاومته الداخلية مهملة ، أمبيرمتر رقمي ، فولط متر رقمي ، أسلاك توصيل و الوشيعة المعدة للدراسة .
1ـ اكمل رسم تركيب الدارة المرفقة مع تعيين أوضاع الأمبيرمتر و الفولط متر . حدد على الشكل التوتر $U_g = E$ (التوتر بين طرفي المولد) و كذا التوتر U_b (التوتر بين طرفي الوشيعة) . نهمل التوتر بين طرفي الأمبيرمتر .
2ـ قياسات الأجهزة تعطي $U_b = 5{,}95\ V$ و $I_b = 410\ mA$. استنتج قيمة r لمقاومة الوشيعة في هذه الحالة الخاصة . برر إجابتك .

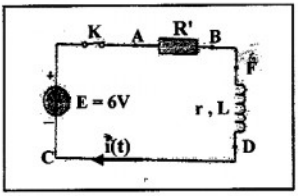
الحـل ـ2

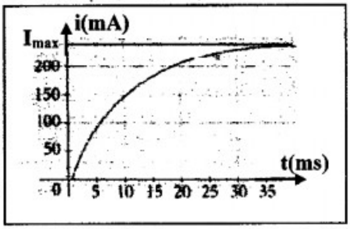


1ـ اكمال رسم تركيب الدارة المرفقة : الأمبير متر يوصل على التسلسل في الدارة بينما الفولط متر يوصل عل التفرع . إذن لقياس التوتر بين طرفي الوشيعة ن الفولط متر يوصل على التفرع بين النقطتين F و D .
2ـ استنتاج قيمة r لمقاومة الوشيعة في هذه الحالة الخاصة : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $u_{AD} = E$ و حيث : $u_{AD} = u_{AB} + u_{FD}$
و $u_{AB} = 0$ (التوتر بين طرفي الأمبيرمتر مفروض أنه معدوم)
و $u_{FD} = U_b$ يصبح لدينا : $E = U_b = L\,di/dt + r\,i$.
في النظام الدائم كل المقادير مستقلة عن الزمن ، و بالتالي شدة التيار ثابتة أين $di/dt = 0$. و منه عبارة جمع التوترات تصبح : $E = r\,i$ مع $i = I_b$. نحصل إذن على : $r = E/I_b = 5{,}95/0{,}410 = 14{,}5\ \Omega$.

التمرين ــ3

بدراسة الدارة الكهربائية المرفقة ، نحصل على منحنى الشدة المبين في الشكل المرفق .





1ــ حدد بيانيا قيمة τ .

2ــ $\tau = L/R$ أين R تمثل المقاومة الكلية للدارة . أعط العبارة الحرفية لــ τ بدلالة المقادير البارامترية للدارة .

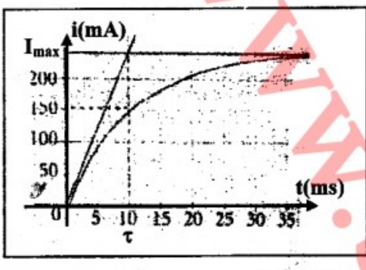
3ــ إذا كانت ذاتية الوشيعة تساوي $L = 250\ mH$ و $R' = 10{,}0\ \Omega$ ، استنتج قيمة r لمقاومتها . نعتبر أن الشدة $i(t)$ تصل إلى قيمتها الحدية $I_{max} = 240\ mA$ خلال مدة زمنية أكبر من τ بــ 5 مرات .

4ــ ما هو حينئذ نظام اشتغال الوشيعة ؟

5ــ عبر عن r ، مقاومة الوشيعة بدلالة E ، I_{max} و R' ثم احسب قيمتها .

6ــ هل النتائج متماثلة ؟ علق .

الحــل ــ3



1ــ تحديد قيمة τ بيانيا : لتحديد قيمة τ بيانيا لدينا طريقتين :

ــ برسم المماس للمنحنى $i = f(t)$ عند المبدأ أي عند $t = 0$ الذي يقطع الخطالمقارب الأفقي الذي معادلته $y = I_{max}$ في نقطة تكون فاصلتها هي : $t = \tau = 10\ ms$.

ــ عند $t = \tau$ ، $i(\tau) = 0{,}63\ I_{max} = 0{,}63 \,.\, 240 = 151\ mA$

و منه نقرأ على المنحنى فاصلة هذه النقطة فنجد : $t = \tau = 10\ ms$.

2ــ العبارة الحرفية لــ τ بدلالة المقادير البارامترية للدارة : R تمثل المقاومة الكلية للدارة . إذن الدارة تحتوي على مقاومتين على التسلسل المقاومة المكافئة الكلية تساوي مجموعهما : $R = R' + r$ و منه : $\tau = L/R = L/(R' + r)$.

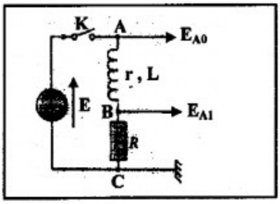
3ــ استنتاج قيمة r لمقاومتالوشيعة : باستخدام علاقة ثابت الزمن السابقة نجد :

$\tau = L/R = L/(R' + r) \Leftrightarrow R' + r = L/\tau - R' = (250 \,.\, 10^{-3})/(10 \,.\, 10^{-3}) - 10{,}0 = 15{,}0\ \Omega$.

4ــ نظام اشتغال الوشيعة حينئذ : خلال المدة الزمنية $5\ \tau$ تصل شدة لتيار إلى قيمتها العظمى : I_∞ و تبقى ثابتة عند هذه القيمة ، فنقول حينئذ أننا وصلنا إلى النظام الدائم .

5ــ التعبير عن r بدلالة E ، I_{max} و R' ثم حساب قيمتها : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $u_{AD} = u_{AB} + u_{FD}$ و حيث : $u_{AD} = E$ و $u_{AB} = R'i$ (التوتر بين طرفي المقاومة R') و $u_{FD} = u_b$ و منه : $E = R'i + u_b = R'i + L\, di/dt + r\, i$. في النظام الدائم كل المقادير مستقلة عن الزمن ، و بالتالي شدة التيار ثابتة أين $di/dt = 0$. و منه عبارة جمع التوترات تصبح : $E = (R' + r)\ I_{max}$.

التمرين ــ4



ندرس الدارة المبينة في الشكل المقابل .

المعادلة التفاضلية $dx/dt + \alpha x = \beta$ (1) (حيث α و β مقادير ثابتة) تقبل رياضيا حلين :

ــ $x(t) = \beta/\alpha\ [1 - \exp(-\alpha t)]$ (2) إذا كان : $\beta \neq 0$.

ــ $x(t) = X_0 \exp(-\alpha t)$ إذا كان : $\beta = 0$ حيث X_0 مقدار ثابت .

1ــ بتطبيق قانون جمع التوترات و محترما اتجاه الدارة ، أكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة $i(t)$.

2ــ بالمطابقة مع المعادلة (1) ، تحقق أن $\alpha = (R + r)/L$ ثم أعط عبارة β .

3ــ استنتج المعادلة الزمنية الحرفية $i(t)$ بدلالة r ، R ، L و E . بين أن هذا الحل يحقق المعادلة المذكورة في السؤال 1 .

4ــ بين أن هذه المعادلة الزمنية يمكن كتابتها على الشكل : $i(t) = E/(R + r)\ [1 - \exp(-t/\tau)]$

الحــل ــ4

1ــ كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة $i(t)$: حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$

و حيث : $u_{AB} = u_L = L\, di/dt + r\, i$ و $u_{BC} = R\, i$ (التوتر بين طرفي المقاومة R) و $u_{AC} = E$ و منه نحصل

على المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة $i(t)$: $E = Ri + L\,di/dt + ri = L\,di/dt + (R+r)\,i$.

2ـ التحقيق : المعادلة (1) تكتب على الشكل التالي : $dx/dt + \alpha.x = \beta$. نكتب المعادلة التفاضلية على هذا الشكل

إذن : $E = L\,di/dt + (R+r)\,i \Leftrightarrow di/dt + (R+r)/L\ i = E/L$ بمطابقة المعادلتين نحصل على :

$\alpha = (R+r)/L$ و $\beta = E/L$.

3ـ استنتاج المعادلة الزمنية الحرفية $i(t)$: حل المعادلة (1) يكتب على الشكل التالي :

$x(t) = \beta/\alpha\,[1 - \exp(-\alpha t)]$ إذا كان : $\beta \neq 0$. نعوض عن α و β فنحصل :

$$i(t) = (E/L) / (R+r)/L\ [1 - \exp(-(R+r)/L\,.\,t)] = E/(R+r)\ [1 - \exp(-(R+r)/L\,.\,t)]$$

نتحقق من أن هذه المعادلة هي حل للمعادلة التفاضلية (1) :

$$i(t) = E/(R+r)\ [1 - \exp(-(R+r)/L\,.\,t)] \Rightarrow di/dt = E/(R+r)\,.\,(-(R+r)/L)\ \exp[-(R+r)/L\,.\,t]$$

$$di/dt = E/L\,\exp[-(R+r)/L\,.\,t)]$$

$$L\,di/dt + (R+r)\,i = L\,.\,(E/L)\exp[-(R+r)/L\,.\,t] + (R+r)\,.\,[E/(R+r)\,.\,(1 - \exp(-(R+r)/L\,.\,t))]$$

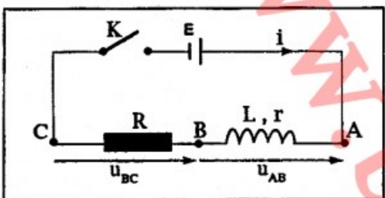
$$= E\exp[-(R+r)/L\,.\,t] - E\exp[-(R+r)/L\,.\,t] + E = E$$

و منه العبارة السابقة هي حل للمعادلة التفاضلية : $E = L\,di/dt + (R+r)\,i$.

4ـ لدينا المعادلة التالية : $i(t) = E/(R+r)\ [1 - \exp(-(R+r)/L\,.\,t)]$. بوضع : $k = L/(R+r)$

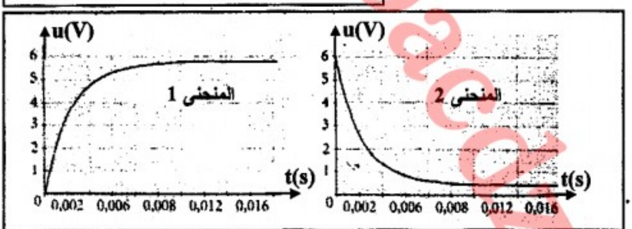
نحصل على المعادلة الزمنية : $i(t) = E/(R+r)\,[1 - \exp(-t/\tau)]$.

التمرين ـ 5



دارة كهربائية تحتوي على التسلسل : مولد مثالي لتوتر مستمر قوته المحركة الكهربائية $E = 6{,}00\ V$ ، قاطعة K ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها $r = 10{,}0\ \Omega$ و ناقل أومي مقاومته $R = 200\ \Omega$.

كمبيوتر موصول إلى التركيب ، يسمح بمشاهدة قيم التوترات u_{AB} و u_{BC} مع مرور الزمن . المخطط المرفق يحدد اتجاه التيار و التوترات المدروسة . عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة K و نستخدم الكمبيوتر للحصول على المنحنيين التاليين :



I . دراسة التركيب

1ـ ما هو الجهاز الذي يسمح بدراسة الظاهرة المدروسة بغياب الكمبيوتر ؟

2ـ اعط عبارة u_{AB} بدلالة i و di/dt .

3ـ اعط عبارة u_{BC} بدلالة i .

4ـ ارفق كل منحنى بالتوتر الموافق له .

II . تحديد شدة التيار في النظام الدائم

1ـ بتطبيق قانون جمع التوترات ، اكتب عبارة I_0 لشدة التيار الذي يجتاز الدارة في النظام الدائم . احسب قيمة I_0 .

2ـ استغل إحدى المنحنيين السابقين لإيجاد القيمة I_0 .

III . حساب الذاتية L للوشيعة

1ـ استغل إحدى المنحنيين لتحديد ثابت الزمن τ للتركيب . مع شرح الطريقة المتبعة .

2ـ اكتب عبارة ثابت الزمن τ بدلالة المقادير المميزة للدارة . بين أن هذه العبارة تجانس الزمن .

3ـ إنطلاقا من قيمة τ المقاسة ، أحسب الذاتية L للوشيعة .

الحـل ـ 5

I . دراسة التركيب

1ـ الجهاز الذي يسمح بدراسة الظاهرة المدروسة بغياب الكمبيوتر : لمشاهدة التوتر بدلالة الزمن نستخدم جهاز راسم الإهتزاز المهبطي . بما أن التوتر يتطور بسرعة مع مرور الزمن مع عدم حدوث التكرار له فلا بد من استخدام جهاز راسم إهتزاز مهبطي مزود بذاكرة .

2ـ عبارة u_{AB} بدلالة i و di/dt : $u_{AB} = u_L$ ، الوشيعة المعتبرة هي وشيعة حقيقية مميزتها : (L , r) . إذن :

$u_{AB} = u_L = L\,di/dt + r\,i$.

3ـ عبارة u_{BC} بدلالة i : $u_{BC} = u_R = R\,i$.

4ـ ارفاق كل منحنى بالتوتر الموافق له : المنحنى 1 يوافق u_{BC} و المنحنى 2 يوافق u_{AB} . التبرير :

ـ استخدام الشروط الإبتدائية : عند غلق الدارة ، الوشيعة تعاكس ظهور التيار ، إذن عند اللحظة $t = 0$ ، $i = 0$.

إذن $u_R(t=0) = 0$ أي $u_R = u_{BC}$ و منه : المنحنى 1 يوافق u_{BC} . و منه المنحنى 2 يوافق u_{AB} .

ـ استخدام تطور الشدة i : الوشيعة تعاكس ظهور التيار في البداية و لكن في النظام الدائم تصبح سلك ناقل أومي . إذن الشدة في الدارة تزداد تدريجيا حتى تصل إلى قيمة عظمى في النظام الدائم . و حيث أن : $u_R = R\,i$ يتناسب طردا مع i . إذن u_R يتطور بنفس تطور i . و منه : المنحنى 1 يوافق u_{BC} . و منه المنحنى 2 يوافق u_{AB} .

II . تحديد شدة التيار في النظام الدائم

1ـ كتابة عبارة I_0 لشدة التيار الذي يجتاز الدارة في النظام الدائم : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا :

$u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$ و حيث : $u_{AB} = u_L = L\,di/dt + r\,i$ و $u_{BC} = u_R = R\,i$ (التوتر بين طرفي المقاومة R)

و $u_{AC} = E$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة $i(t)$:

$$E = R\,i + L\,di/dt + r\,i = L\,di/dt + (R+r)\,i .$$

في النظام الدائم كل المقادير مستقلة عن الزمن ، و بالتالي شدة التيار ثابتة أين $i = I_0$ إذن : $dI_0/dt = 0$. و منه عبارة جمع التوترات تصبح : $E = (R+r)\,I_0 \Leftrightarrow I_0 = E/(R+r) = 6{,}00 / 210 = 2{,}86 \,.\, 10^{-2}\ A = 28{,}6\ mA$.

2ـ ايجاد القيمة I_0 باستغلال إحدى المنحنيين السابقين : لإيجاد القيمة I_0 يمكن استخدام المنحنى 1 أو 2 :

الطريقة 1 : استخدام المنحنى 1 $u_R(t)$: في النظام الدائم ، u_R يكون ثابت و $u_R = R\,I_0$. نقرأ على المنحنى $u_R = 5{,}8\ V$.

إذن $I_0 = u_R/R = 5{,}8/200 = 29 \,.\, 10^{-3}\ A = 29\ mA$.

الطريقة 2 : استخدام المنحنى 2 $u_L(t)$: في النظام الدائم ، u_L يكون ثابت لأن $i = I_0$ و $u_L = r\,I_0$.

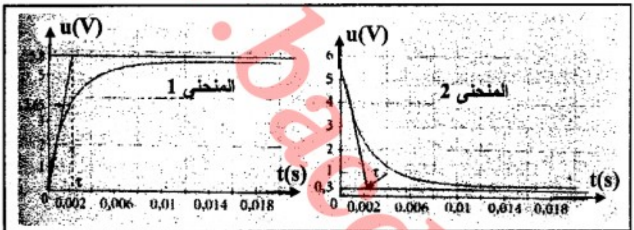
نقرأ على المنحنى $u_L = 0{,}3\ V$. إذن $I_0 = u_L/r = 0{,}3/10 = 3 \,.\, 10^{-2}\ A = 30\ mA$.

III . حساب الذاتية L للوشيعة

1ـ استغلال إحدى المنحنيين لتحديد ثابت الزمن τ للتركيب . مع شرح الطريقة المتبعة : توجد طريقتين :

aـ نرسم المماس للمنحنى عند المبدأ أي عند $t = 0$ الذي يقطع الخط المقارب الأفقي للمنحنى في نقطة تكون فاصلتها هي : $t = \tau = 2{,}2\ ms$. هذه الطريقة صالحة للمنحنيين .

bـ بالنسبة للمنحنى 1 عند $t = \tau$ ، $i(\tau) = 0{,}63\ I_0$ و منه ، $u_R(\tau) = 0{,}63\ u_{R\,max} = 0{,}63 \,.\, 5{,}8 = 3{,}65\ V$ نقرأ على المنحنى فاصلة هذه النقطة فنجد : $t = \tau = 2{,}2\ ms$.



2ـ كتابة عبارة الثابت τ بدلالة المقادير المميزة للدارة : $\tau = L/(R+r)$.

ـ تبيان ، أن τ تجانس الزمن :

$[L/(R+r)] = [L] / [R+r]$

$u_R = R\,.\,i \Rightarrow [R]\,.\,[I] \Rightarrow [R] = [U]/[I]$,

$u_L = L\,di/dt + r\,I \Rightarrow [U] = [L\,di/dt] = [L]\,.\,[I]/[T] \Rightarrow [L] = ([U]\,.\,[T])/[I]$

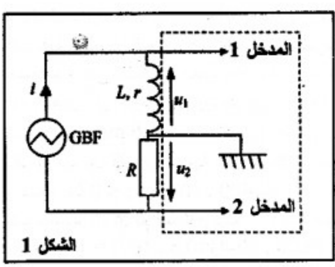
$[L/(R+r)] = [L]/[R] = ([U]\,.\,[T])/([I]) \times [I]/[U]) = [T]$

$\Rightarrow [L/(R+r)] = [T] \Rightarrow [\tau] = [L/(R+r)] = [T]$.

3ـ حساب الذاتية L للوشيعة إنطلاقا من قيمة τ المقاسة : $L = \tau\,.\,(R+r) = 210 \,.\, 2{,}2 \,.\, 10^{-3} = 0{,}46\ H$.

التمرين ـ6

نحقق الدارة الكهربائية الموضحة في الشكل المقابل التي تحتوي على مولد GBF ، وشيعة مقاومتها r و ذاتيتها L و مقاومة $R = 1{,}0 \,.\, 10^4\ \Omega$ موصولة على التسلسل . المولد يعطي توتر متناوب مثلثي تواتره $f = 1{,}0\ kHz$. كومبيوتر يوصل بالدارة يسمح بإعطاء التغيرات بدلالة الزمن للتوتر $u_L(t)$ بين طرفي الوشيعة و الشدة $i(t)$ للتيار الذي يمر في الدارة .



الشكل 1

aـ بالإستعانة بالشكل2 تحقق أن المولد GBF مضبوط عند $f = 1{,}0\ kHz$.

bـ ماهي عبارة التوتر المقاس على المدخل 2 للكومبيوتر ؟ استنتج العمليات التي يجب أن يجريها الكومبيوتر لمشاهدة الشدة على الشاشة .

c‍ـ عبر عن التوتر u_L بين طرفي الوشيعة بدلالة المقادير المميزة لها و الشدة i للتيار و مشتقتها di/dt

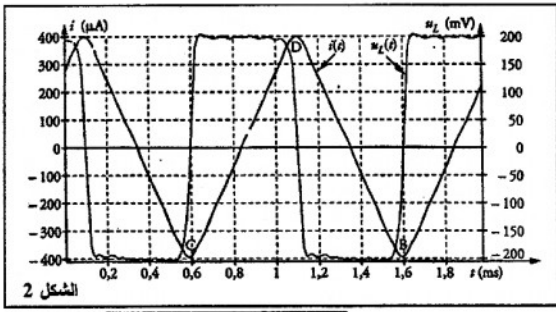
ـ على الشكل 2 ، التمثيل البياني للدالة i(t) يبين في الحقيقة أن النقط العظمى للشدة مقوسة .
في هذه الشروط المماس عند القمة يكون أفقي .
استنتج العبارة المبسطة لـ u_L عندما تكون الشدة في الدارة عظمى .

d‍ـ بقياس u_L على الشكل 2 عندما تكون شدة التيار عظمى (مثلا عند t = 1,6 ms)
بين أن r <<R .

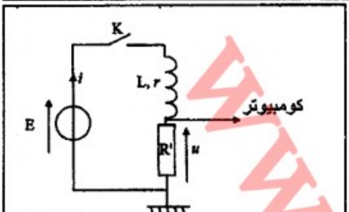
ـ فيما يلي نهمل الحد الذي تدخل فيه r في عبارة u_L و كذلك تقوسات الشدة .

a‍ـ انطلاقا من نصف الدور المحصور بين النقطتين C و D في الشكل 2 ، قس u_L ، أحسب di/dt ثم استنتج قيمة L .

b‍ـ صانع الوشيعة يشير إلى r = 12 Ω . احسب إذن u_L في نفس اللحظة المذكورة في السؤال d‍ـ ثم بين أن القيمة الناتجة تتوافق مع القياس المعطى في السؤال d‍ـ .



الشكل 2



الشكل 3

الجزء 2

الوشيعة الآن توصل على التسلسل مع المقاومة R' = 100 Ω بين طرفي مولد مثالي قوته المحركة الكهربائية E = 6,5 V . كومبيوتر يسمح بمتابعة تطور شدة التيار في الدارة بدلالة الزمن . غلق القاطعة عند اللحظة t = 0 يسبب بدأ إشتغال الكومبيوتر نحصل على التسجيل المبين في الشكل 4 .

a‍ـ توصل إلى العبارة التي تعطي شدة التيار في النظام الدائم بدلالة المقادير المميزة للدارة .

b‍ـ تحقق أن قيمة شدة التيار في النظام الدائم الناتجة من المنحنى للشكل 4 تتوافق مع معطيات التمرين .

c‍ـ اعط عبارة ثابت الزمن لثنائي القطب RL .

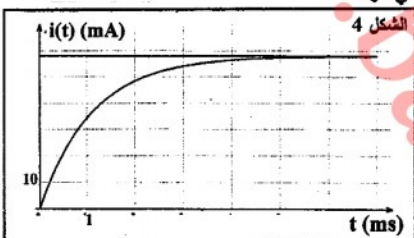
d‍ـ حدد بيانيا (الشكل 5) قيمته مع شرح الطريقة المتابعة .

ـ في الحقيقة ، المقاومة R' متغيرة . نعطيها الآن القيمة R' = 100 Ω .

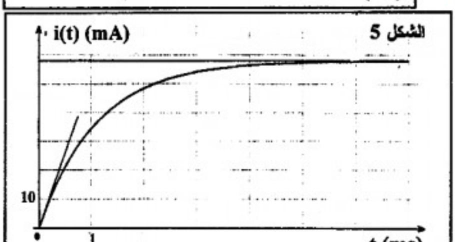
e‍ـ احسب قيمة الشدة الجديدة للتيار في النظام الدائم .

f‍ـ احسب ثابت الزمن لثنائي القطب الجديد RL .

g‍ـ مثل المنحنى الممثل لتطور شدة التيار بدلالة الزمن i = f(t) على الشكل 5 .



الشكل 4



الشكل 5

الحـل ـ 6

a‍ـ التحقق أن المولد GBF هو فعلا مضبوط عند f = 1,0 kHz : التيار i = f(t) الذي يمر في الدارة مثلثي . بين النقطتين C و B لـ i = f(t) يكون $T = 1,6 - 0,60 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ s . و منه : f = 1/T = 1,0 kHz .

b‍ـ عبارة التوتر المقاس على المدخل 2 للكومبيوتر : أخذا بعين الإعتبار جهة التيار المختارة ، و حسب قانون أوم : $u_2 = - R\,i$
لمشاهدة i على الشاشة ، يجب خلق دالة جديدة : $i = (-u_2)/R$. ونه الكومبيوتر يعالج الحساب التالي : $i = -(u_2)/(1,0 \cdot 10^4)$

c‍ـ التعبير عن التوتر u_L بين طرفي الوشيعة : $u_L = L\,di/dt + r\,i$

d‍ـ من أجل t = 1,6 ms ، تكون i عظمى ، و منه : $u_L = r\,i$ أي : $r = u_L/i$. نقرأ على المنحنى i = - 400 µA و لكن بالنسبة لـ u_L القراءة البيانية على الشكل 2 صعبة ، يمكن فقط القول أن $-50\text{ mV} \le u_L \le 0\text{ mV}$.
و منه : $0\ \Omega \le r \le (50 \cdot 10^{-3})/(400 \cdot 10^{-6})$ - . و منه : $0\ \Omega \le r \le 1,3 \cdot 10^2$. أي : r <<R .

a‍ـ حساب di/dt ثم استنتاج قيمة L : بين النقطتين C و D في الشكل 2 نقيس : $u_L = 0,200$ V . من جهة أخرى : $di/dt = (i_D - i_C)/(t_D - t_C) = (8,00 \cdot 10\text{-}4)/(0,5 \cdot 10^{-3}) = 1,6$ A/s . بإهمال الحد الذي تدخل فيه r في عبارة u_L

نجد : $u_L = L\, di/dt$. و منه نستنتج L : $L = 0{,}200/1{,}6 = 0{,}13\ H$.

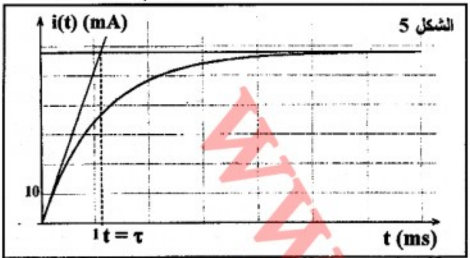
b– حساب إذن u_L من أجل $t = 1{,}6\ ms$: $u_L = r\,.\,i = 12\,.\,(-400\,.\,10^{-6}) = -4{,}8\,.\,10^{-3}\ V$.

الجزء 2

a– عبارة شدة التيار في النظام الدائم بدلالة المقادير المميزة للدارة : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $E = u_L + u$ و حيث : $u_L = L\, di/dt + r\,i$ و $u = R'\,i$ (التوتر بين طرفي المقاومة R')

في النظام الدائم كل المقادير مستقلة عن الزمن ، و بالتالي شدة التيار ثابتة أين $i = I_0$ إذن : $dI_0/dt = 0$. و منه عبارة جمع التوترات تصبح : $E = (R' + r)\ I_0 \Rightarrow I_0 = E/(R' + r)$.

b– التحقق أن قيمة شدة التيار في النظام الدائم الناتجة من المنحنى للشكل 4 تتوافق مع معطيات التمرين : على الشكل 4 و في النظام الدائم ، نقرأ I_0 أصغر بقليل عن $60\ mA$. و حسابيا : $I_0 = 6{,}5/(12 + 100) = 58\ mA$. إذن نعم هناك توافق .



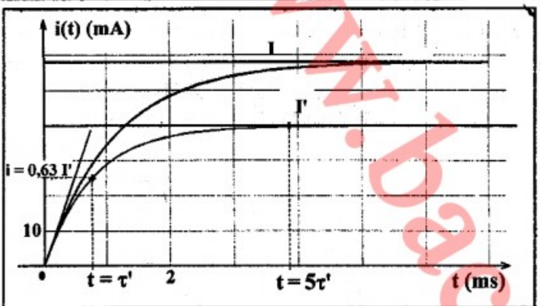
c– عبارة ثابت الزمن لثنائي القطب RL : $\tau = L/(R' + r)$

d– تحديد بيانيا (الشكل 5) قيمته مع شرح الطريقة المتابعة : توجد طريقتين :

1– نرسم المماس للمنحنى عند المبدأ أي عند $t = 0$ الذي يقطع الخط المقارب الأفقي للمنحنى في نقطة تكون فاصلتها هي : $t = \tau = 1{,}1\ ms$.

2– بالنسبة للمنحنى عند $t = \tau$ ، $i(\tau) = 0{,}63\ I_0$ و منه نقرأ على المنحنى فاصلة هذه النقطة فنجد : $t = \tau = 1{,}1\ ms$.

– في الحقيقة ، المقاومة R' متغيرة . نعطيها الآن القيمة $R' = 100\ \Omega$.



a– حساب قيمة الشدة الجديدة للتيار في النظام الدائم :
$I' = E/(R' + r) = 6{,}5/(12 + 150) = 40\ mA$

b– حساب ثابت الزمن لثنائي القطب الجديد RL :
$\tau' = L/(R' + r) = 0{,}125/(12 + 150)$
$\tau' = 7{,}7\,.\,10^{-4}\ s$

c– تمثيل المنحنى الممثل لتطور شدة التيار بدلالة الزمن $i = f(t)$ على الشكل 5 : نتبع الخطوات التالية

1– نرسم الخط المقارب الأفقي : $I' = 40\ mA$

2– نحدد النقطة التي احداثياتها :
$(t = 5\,\tau' = 3{,}9\ ms\ ;\ i = I' = 40\ mA)$

3– نحدد النقطة التي احداثياتها : $(t = \tau' = 0{,}8\ ms\ ;\ i = 0{,}63\ I' = 25\ mA)$

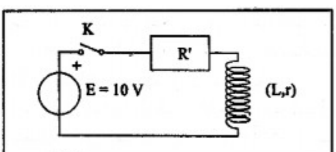
4– نستعمل المماس عند المبدأ المرسوم على الشكل 5 بالفعل ، العبارة النظرية لـ $i(t)$: $i(t) = E/(R + r)\ [1 - \exp(-t/\tau)]$

المشتقة عبارتها : $di/dt = E/L\ \exp(-t/\tau)$.

معامل توجيه المماس للمنحنى $i(t)$ عند المبدأ عبارته : $(di/dt)_{t=0} = E/L$ إذن نلاحظ أنه لم يتغير إذا تغيرت فقط R .

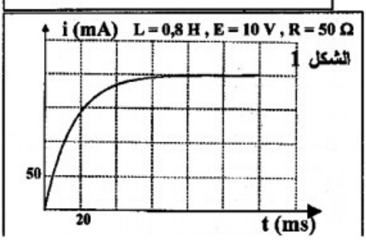
التمرين 7

ندرس استجابة الدارة R L لسلم التوتر . للحصول على المدة الزمنية الآزمة للوصول إلى النظام الدائم نستخدم المقدار المسمى ثابت الزمن τ للدارة و المعرف كما يلي : $\tau = L/R$.



I – تحديد τ تجريبيا . – نحقق تركيب الدارة الموضح في الشكل المقابل .

تعطى : $R = R' + r = 50\ \Omega$. جهاز معلوماتي يسمح بتسجيل تطور شدة التيار في الدارة بدلالة الزمن . عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة ، عندها نبدأ التسجيل ، فنحصل على المنحنى الموضح في الشكل 1 .



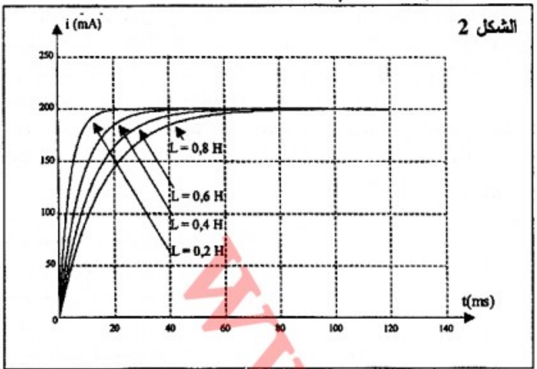
1– اكتب العبارة الحرفية لشدة التيار i في الدارة بدلالة المقادير المميزة للدارة في النظام الدائم ثم حدد قيمته العددية .

2– نقبل أن شدة التيار تصل إلى 63 % من قيمتها العظمى I خلال مدة زمنية τ . حدد قيمة τ بيانيا .

II – التحقق من عبارة τ تجريبيا .

ـ من أجل ذلك نعيد التجربة المحققة في الجزء I ، محتفظا بقيمة $R = 50\ \Omega$ و لكن بإعطاء L قيم مختلفة . التسجيلات المأخوذة تسمح بالحصول على مجموعة من المنحنيات الموضحة في الشكل 2 .

1ـ إنطلاقا من التسجيلات المأخوذة حدد قيم τ الموافقة لمختلق قيم L . اكمل الجدول أسفله .



L (H)	0,20	0,40	0,60	0,80
τ (ms)				

2ـ إنطلاقا من الدراسة التجريبية اكتب العلاقة بين τ و L .

3ـ استنتج القيمة التجريبية لــ R . هل توافق المعطيات .

III ـ تحديد القيمة العددية لــ τ إنطلاقا من الدراسة النظرية لمنحنى شدة التيار للدارة المدروسة المقترحة في الجزء 1 .

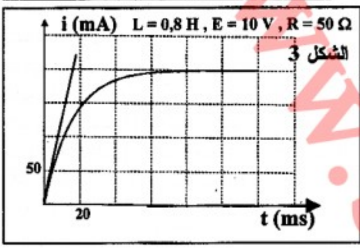
1ـ من قانون جمع التوترات نحصل على المعادلة التفاضلية التي تنظم ظهور التيار في الدارة : $E = R\,i + L\,di/dt$. باستخدام هذه المعادلة تحقق أن النسبة L/R تجانس الزمن .

2ـ ما هي قيمة شدة التيار عند اللحظة $t = 0$ ؟ كيف تكتب إذن المعادلة التفاضلية المعطاة سابقا عند هذه اللحظة ؟

3ـ استنتج معادلة المماس لمنحنى التيار عند اللحظة $t = 0$ ، ثم بين أن هذه القطعة المستقيمة تمر من $i = I$ عند اللحظة $t = \tau$.

4ـ استنتج بيانيا من الشكل 3 القيمة العددية لــ τ .

. $L = 0{,}8\ H\ ,\ E = 10\ V\ ,\ R = 50\ \Omega$



الحــل ـ7

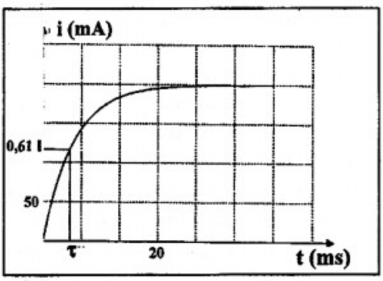
I ـ تحديد τ تجريبيا .

1ـ كتابة العبارة الحرفية لشدة التيار i في الدارة بدلالة المقادير المميزة للدارة في النظام الدائم . ثم تحديد قيمته العددية :

حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $E = u_R + u_L$

و حيث : $u_L = L\,di/dt$ و $u_R = R\,i$ (التوتر بين طرفي المقاومة R) و منه : $E = R\,i + L\,di/dt$. في النظام الدائم شدة التيار ثابتة أين $i = I$. $di/dt = 0$ و منه :

. $E = R\,I \Rightarrow I = E/R = 10/50 = 0{,}2\ A$



2ـ تحديد قيمة τ بيانيا : في النظام الدائم شدة التيار ثابتة و توافق القيمة العظمى لها و التي يمكن قياسها على الشكل 1 . للحصول على ثابت الزمن يجب أن نبحث عن اللحظة التي توافق قيمة الشدة تساوي :

$i = 0{,}63\ I = 0{,}126\ A$. أين فاصلة هذه النقطة تساوي τ : $\tau = 16\ ms$.

II ـ التحقق من عبارة τ تجريبيا .

1ـ اكمال الجدول أسفله : القيمة الحدية لـ I هي نفسها في المنحنيات الأربعة . نبحث إذن عن نقاط تقاطع هذه المنحنيات مع المستقيم الذي معادلته : $i = 0{,}126\ A$. و منه نكمل الجدول :

L (H)	0,20	0,40	0,60	0,80
τ (ms)	4	8	13	16

2ـ كتابة العلاقة بين τ و L ، إنطلاقا من الدراسة التجريبية : بالنظر إلى الجدول السابق ، نلاحظ أن τ تتغير تقريبا خطيا مع L و مه نشكل النسبة L/τ (τ بالثانية) نحصل على الجدول التالي :

L (H)	0,2	0,4	0,6	0,8
L/τ (Ω)	50	50	46	50

نلاحظ أن النسبة L/τ تقريبا ثابتة و تساوي تقريبا $50\ \Omega$ و منه : $\tau = L/50$.

3ـ استنتاج القيمة التجريبية لـ R : ثابت الزمن τ يساوي L/R إذن النسبة L/τ تساوي إلى R .
إذن القيمة التي وجدناها سابقا توافق القيمة المعطاة .

III ـ تحديد القيمة العددية لـ τ إنطلاقا من الدراسة النظرية لمنحنى شدة التيار للدارة المدروسة المقترحة في الجزء I :

1ـ من قانون جمع التوترات نحصل على المعادلة التفاضلية التي تنظم ظهور التيار في الدارة : $E = R\,i + L\,di/dt$.
بقسمة طرفي المعادلة على R نحصل على : $E/R = i + L/R\ di/dt$. الحد E/R يجانس شدة التيار و منه يجب على الطرف الأخر للمعادلة أن يجانس شدة التيار و حيث أن di/dt يجانس الشدة مقسومة على الزمن إذن L/R يجب أن يجانس الزمن .

2ـ قيمة شدة التيار عند اللحظة $t = 0$: نذكر أن في حالة الوشيعة يحدث استمرار للشدة ، أي عند اللحظة $t = 0$ تكون $i = 0$ (القاطعة مفتوحة) . إذن عند اللحظة $t = 0^+$ يجب أن تكون i معدومة و منه المعادلة التفاضلية السابقة تكتب على الشكل التالي :

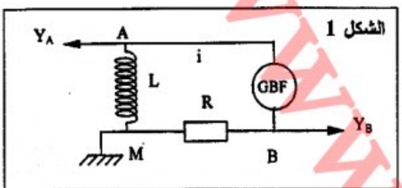
$$E/L = (di/dt)_{t=0}$$

3ـ استنتاج معادلة المماس لمنحنى التيار عند اللحظة $t = 0$: النسبة E/L تمثل معامل توجيه المماس للمنحنى $i = f(t)$ عند المبدأ . هذا المماس يمر من النقطة $(t = 0 , i = 0)$ إذن معادلته : $i = E/L\ .\ t$ و من أجل $\tau = L/R$ تصبح :

$$i = E/L\ .\ L/R = E/R = I$$

4ـ استنتاج بيانيا من الشكل 3 القيمة العددية لـ τ : في الشكل 3 ، المماس للمنحنى $i = f(t)$ عند المبدأ يقطع المستقيم الذي معادلته : $i = I$ من أجل $\tau = 16\ ms$. هذه القيمة توافق القيمة التي و جدناها في السؤال 2 من الجزء I .

التمرين ـ 8



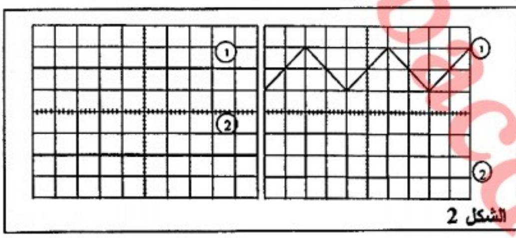
الشكل 1

لدينا مولد (GBF) يعطي توتر متناوب ذو إشارة مثلثية متناظرة .
نصل هذا المولد على التسلسل مع وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها مهملة و ناقل أومي مقاومته $R = 2000\ \Omega$. أنظر الشكل 1 .
نصل القطب السالب لجهاز راسم الإهتزاز المهبطي إلى النقطة M و المدخل A إلى النقطة A و المدخل B إلى النقطة B .

1ـ هل من الواجب إيصال القطب السالب للمولد إلى الأرض ؟ برر إجابتك .

2ـa ـ ما هو المقدار الكهربائي الملاحظ على المدخل A ؟ المدخل B ؟

bـ ضبط الجهاز كان كالتالي : الحساسية الشاقولية للمدخل A : $200\ mV$ لكل تدريجة .
الحساسية الشاقولية للمدخل B : $5\ mV$ لكل تدريجة .
قاعدة الزمن : $1\ ms$ لكل تدريجة .
بعد ضبط الإشارة عند الصفر بالنسبة للمدخلين ، نحصل على المنحنيين الممثلين في الشكل 2 .



الشكل 2

ما هو تواتر التوتر الذي يعطيه المولد ؟

3ـa ـ اكتب العلاقة بين التوتر u_{AM} بين طرفي الوشيعة و الذاتية L و الشدة اللحظية i للتيار المار في الدارة .

bـ استنتج العلاقة $u_{AM} = - L/R\ du_{BM}/dt$
حيث u_{AM} و u_{BM} هما على الترتيب ، التوتر بين طرفي الوشيعة و الناقل الأومي .

cـ انسب لكل منحنى 1 أو 2 المدخل الموافق له A أو B .

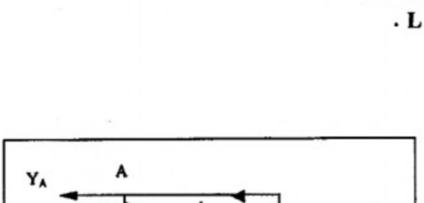
4ـa ـ باستخدام السلم المختار لضبط الجهاز السابق : حدد القيم العظمى للتوتر u_{AM} بين طرفي الوشيعة .

bـ انطلاقا من قيمة نصف الدور الأول للمنحنيات في الشكل 2 احسب du_{BM}/dt .

5ـa ـ استنتج من السؤالين 3 و 4 ، القيمة العددية للنسبة $\tau = L/R$.

bـ بين أن المقدار τ له بعد زمني . c ـ استنتج قيمة الذاتية L .

الحل ـ 8

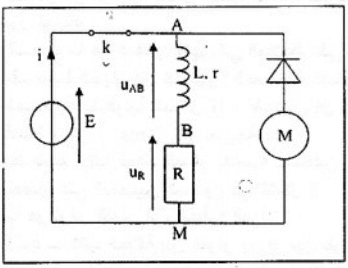


1ـ ليس من الواجب ايصال القطب السالب للمولد إلى الأرض لأنه في حالة العكس تكون الوشيعة أو المقاومة (حسب جهة التوصيل) في دارة مقصورة .

2ـa ـ المقدار الكهربائي الملاحظ على المدخل A : هو التوتر u_L بين طرفي الوشيعة . و على المدخل B نلاحظ التوتر $u_R = - R\,i$ بين طرفي المقاومة R . أي ، بالتقريب حسب قيمة R ، صورة الشدة i .

b– تواتر التوتر الذي يعطيه المولد : نقرأ على المنحنيين الممثلين في الشكل 2 نقرأ : $T = 4$ div أي T يوافق 4 تدريجات .
و حسب السلم المعطى نجد : $t = 4\ ms$. و منه : $N = 1/T = 250\ Hz$.
3–a – كتابة العلاقة بين التوتر u_{AM} بين طرفي الوشيعة و الذاتية L و الشدة اللحظية i للتيار المار في الدارة :
عبار التوتر بين طرفي الوشيعة هي : $u_L = u_{AM} = L\ di/dt$.
b– استنتاج العلاقة $u_{AM} = L/R\ du_{BM}/dt$: التوتر بين طرفي الناقل الأومي (حسب الإتجاه الإصطلاحي المختار على الشكل)
عبارته : $u_R = u_{BM} = - R\ i \Rightarrow i = - u_{BM}/R$ و $di/dt = - 1/R\ du_{BM}/dt$. و منه : $u_{AM} = - L/R\ du_{BM}/dt$.
c– انساب لكل منحنى 1 أو 2 المدخل الموافق له A أو B : التوتر u_{AM} يتناسب مع مشتقة u_{BM} . المشتقة لـ توتر ذو إشارة مربعة (المنحنى 2) توتر معدوم . المنحنى 1 يوافق المدخل B (u_R) . المنحنى 2 يوافق المدخل A (u_L) .
4–a – تحديد القيم العظمى للتوتر u_{AM} بين طرفي الوشيعة : على المنحنى 2 نقرأ :
$(u_{AM})_{max} = 1\ div = 200\ mV$ و $(u_{AM})_{min} = 1\ div = - 200\ mV$.
b– حساب du_{BM}/dt انطلاقا من قيمة نصف الدور الأول للمنحنيات في الشكل 2 : خلال نصف الدور الأول للمنحنى 1 في الشكل 2 ، u_{BM} تنتقل قيمته من $- 5\ V$ إلى $+ 5\ V$ خلال $2\ ms$. بما أن تغيرات u_{BM} بدلالة الزمن هي دالة تآلفية ، يمكننا أن نكتب : $du_{BM}/dt = \Delta u_{BM}/\Delta t = 10/0{,}002 = 5000\ V/s$.
5–a – استنتاج من السؤالين 3 و 4 ، القيمة العددية للنسبة $\tau = L/R$: في نصف الدور الأول $u_{AM} = - 200\ mV$. و حسب السؤال 3 b– $u_{AM} = - L/R\ du_{BM}/dt$ حيث : $- 0{,}2 = - L/R\ 5000$.
و منه : $\tau = L/R \Rightarrow \tau = 0{,}2/5000 = 4 . 10^{-5}\ s$.
b– تبيان أن المقدار τ له بعد زمني : تحليل الأبعاد للعلاقة $u_{AM} = - L/R\ du_{BM}/dt$ توضح أن الحد u_{AM} يجانس التوتر . الحد du_{BM}/dt يجانس التوتر مقسوم على الزمن و حيث أن طرفي المعادلة يجب أن تكون متجانسة
و منه : يجب أن يكون المقدار $\tau = L/R$ له بعد زمني .
c– استنتاج قيمة الذاتية L : $\tau = L/R \Rightarrow L = \tau . R = 4 . 10^{-5} . 2000 = 80\ mH$.

التمرين –9



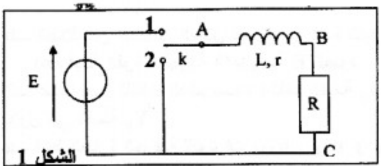
نحقق تركيب الدارة المبين في الشكل المقابل . الوشيعة مقاومتها مهملة .
تعطى : $L = 2\ H$, $r = 10\ \Omega$, $R = 100\ \Omega$, $E = 12\ V$.
M محرك يشتغل بالتيار المستمر مقاومته الداخلية مهملة ، موصول إلى بكرة مما يسمح برفع جسم كتلته $m = 10\ g$. نغلق القاطعة K لمدة زمنية كافية للوصول إلى النظام الدائم .
1– هل المحرك يدور ؟
2– احسب الطاقة المختزنة في الوشيعة .
3– نفتح القاطعة K . نلاحظ أن المحرك يشتغل .
a– هل يمكنك شرح و تبرير إشتغال المحرك ؟
b– ما هو الإرتفاع الذي يصعده الجسم ، باعتبار مردود المحرك % 100 .
c– في الحقيقة ، أي تجريبيا ، الجسم يصعد إرتفاع أقل مما وجدناه سابقا . علل .

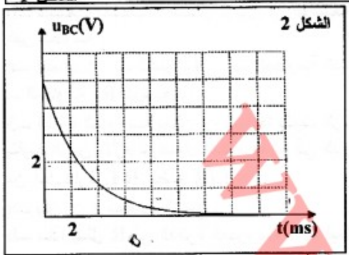
الحـل –9

1– هل المحرك يدور ؟ المحرك لا يدور لأنه لا يوجد تيار كهربائي يعبره بسبب وجود الصمام الذي يمنعه .
2– حساب الطاقة المختزنة في الوشيعة : نعتبر أننا وصلنا للنظام الدائم . من قانون جمع التوترات :
$E = u_{AB} + u_R \Rightarrow E = r\,i + R\,i \Rightarrow i = E/(r + R) = 12/(10 + 100) = 0{,}11\ A$. في النظام الدائم : $di/dt = 0$.
و منه : الطاقة المختزنة : $E_{mag} = 1/2 . L . i^2 = 1/2 . 2 . 0{,}11^2 = 1{,}21 . 10^{-2}\ J$.
3–a – شرح و تبرير إشتغال المحرك : تتحرر الطاقة المختزنة في الوشيعة ، فيسري تيار كهربائي في الوشيعة في نفس الإتجاه الذي كان يسري فيه من قبل . الصمام في هذه الحالة يسمح بمرور التيار . المحرك يصله التيار فيدور أي يشتغل
b– اعتبار مردود المحرك % 100 يعني أن كل الطاقة المتحررة من الوشيعة تستهلك من طرف المحرك لإصعاد الجسم .
الإرتفاع الذي يصعده الجسم : $E_{mag} = E_{pp} = m\,g\,h \Rightarrow h = E_{mag}/mg = (1{,}2 . 10^{-2})/(0{,}01 . 10) = 0{,}12\ m$.
c– في الحقيقة ، أي تجريبيا ، الجسم يصعد إرتفاع أقل مما وجدناه سابقا : بسبب وجود المقاومة ، جزء من الطاقة المتحررة من الوشيعة تصرف على شكل حرارة في المقاومة أي تضيع بفعل جول و منه فليس كل الطاقة تستهلك لرفع الجسم و منه فالإرتفاع الذي يصعده الجسم يكون أقل مما سبق .

التمرين –10

نحقق تركيب الدارة المبين في الشكل 1 : $L = 0{,}05\ H$, $r = 8\ \Omega$, $R = 10\ \Omega$, $E = 9\ V$.
1– نضع القاطعة في الوضعية 1 . ما قيمة شدة التيار I_0 في النظام الدائم ؟

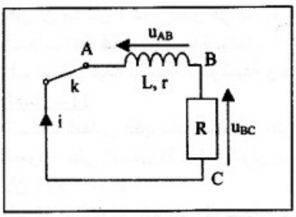




2ــ عند اللحظة $t = 0$ نضع القاطعة في الوضعية 2 .
اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها شدة التيار i .
ــ تحقق من أن حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل :
$i = I_0 \exp(-t/\tau)$ ثم اعط عبارة τ .
3ــ لتكن u_{BC} التوتر بين طرفي الناقل الأومي R . ليكن t_1 الزمن الذي من أجله u_{BC} يصل إلى 90 % من قيمته العظمى و t_2 الزمن الذي من أجله u_{BC} يصل إلى 10 % من قيمته العظمى . عبر عن $t_d = t_2 - t_1$ بدلالة τ . ــ انطلاقا من المنحنى $u_{BC} = f(t)$ ، الممثل في الشكل 2 ، حدد t_d و منه استنتج قيمة τ . تحقق من القيمة التي تجدها من خلال التطبيق العددي في العبارة τ .

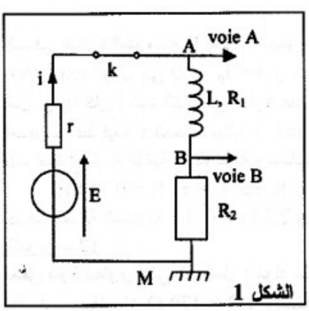
الحــل ــ10

1ــ قيمة شدة التيار I_0 في النظام الدائم : من قانون جمع التوترات :
$E = u_{AB} + u_{BC} \Rightarrow E = r\,i + R\,i$.
$\Rightarrow i = I_0 = E/(r + R) = 9/(10 + 8) = 0{,}5$ A
في النظام الدائم : $di/dt = 0$.



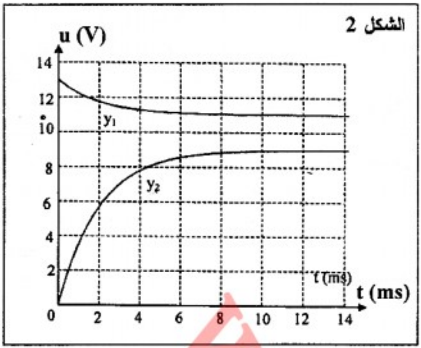
2ــ كتابة المعادلة التفاضلية التي يحققها شدة التيار i : من قانون جمع التوترات :
$u_{AB} + u_{BC} = 0$ بالتعويض عن كل توتر بعبارته نحصل على :
$L\,di/dt + r\,i + R\,i = L\,di/dt + (r + R)\,i = di/dt + [(r + R)L]\,i = 0$.
و هي المعادلة التفاضلية التي نبحث عليها .
ــ التحقق من أن حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i = I_0 \exp(-t/\tau)$
ثم اعطاء عبارة τ : بالتعويض بالعبارة هذه في المعادلة التفاضلية نحصل على :
$d\,[I_0 \exp(-t/\tau)]/dt + [(r + R)L]\,[I_0 \exp(-t/\tau)] = 0$.
نضع : $\tau = L/(r + R)$. تصبح المعادلة السابقة : $- I_0/\tau \exp(-t/\tau) + I_0/\tau \exp(-t/\tau) = 0$. و منه نقول أن المعادلة محققة
3ــ التعبير عن $t_d = t_2 - t_1$ بدلالة τ : من قانون أوم : $u_{BC} = R\,i \Rightarrow u_{BC} = R\,I_0 \exp(-t/\tau)$.
عند اللحظة $t = 0$ ، $u_{BC} = (u_{BC})_{max} = R\,I_0$.
عند اللحظة $t_1 = 0$ ، $u_{BC} = 0{,}9(u_{BC})_{max} = R\,I_0 \exp(-t_1/\tau)$
عند اللحظة $t_2 = 0$ ، $u_{BC} = 0{,}1(u_{BC})_{max} = R\,I_0 \exp(-t_2/\tau)$
نأخذ اللوغاريتم لكل عبارة فنحصل على :
$\ln(0{,}9\,R\,I_0) = \ln[R\,I_0 \exp(-t_1/\tau)] \Rightarrow \ln 0{,}9 + \ln(R\,I_0) = \ln(R\,I_0) - t_1/\tau$ .....(1) .
$\ln(0{,}1\,R\,I_0) = \ln[R\,I_0 \exp(-t_2/\tau)] \Rightarrow \ln 0{,}1 + \ln(R\,I_0) = \ln(R\,I_0) - t_2/\tau$ .....(2) .
بطرح هاتين المعادلتين (2) – (1) : $\ln 0{,}9 - \ln 0{,}1 = - t_1/\tau + t_2/\tau$.
و منه : $t_d = t_2 - t_1 = \tau\,(\ln 0{,}9 - \ln 0{,}1)$. القراءة على المنحنى تعطي : $(u_{BC})_{max} = 5$ V .
عند اللحظة $t_1 = 0$ ، $0{,}9(u_{BC})_{max} = 4{,}5$ V و منه : $t_1 = 0{,}4$ ms .
عند اللحظة $t_2 = 0$ ، $0{,}1(u_{BC})_{max} = 0{,}5$ V و منه : $t_2 = 6{,}8$ ms . و منه نستنتج قيمة t_d : $t_d = t_2 - t_1 = 6{,}4$ ms .
إذن قيمة ثابت الزمن : $\tau = t_d/(\ln 0{,}9 - \ln 0{,}1) = 2{,}9 \,.\, 10^{-3}$ s .
و يمكن التحقق من ذلك من : $\tau = L/(r + R) = 0{,}05/(10 + 8) = 2{,}8 \,.\, 10^{-3}$ s $= 2{,}8$ ms .
الفرق البسيط بين القيمتين يعود إلى أخطاء التجربة و خطأ القراءة على المنحنى .

التمرين ــ11



نربط على التسلسل عمود قوته المحركة الكهربائية E و مقاومته الداخلية r ، قاطعة K ، و شيعة ذاتيتها L مقاومتها الداخلية R_1 و ناقل أومي مقاومته $R_2 = 50\ \Omega$. انظر الشكل 1 .
جهاز كومبيوتر نصله بالدارة بشكل مناسب يسمح بتسجيل قيم التوترات بدلالة الزمن .
1ــ عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة K و نبدأ التسجيل . فنحصل على المنحنيين $y_1 = f(t)$ و $y_2 = g(t)$ أنظر الشكل 2 .
a ــ ما هي المقادير الكهربائية المشاهدة على المدخلين A و B ؟
حدد إذن y_1 و y_1 مع التبرير .

b– انطلاقا من المنحنى الممثل لتغيرات i شدة التيار في الدارة اشرح السلوك الكهربائي للوشيعة .



c– اعط قيمة القوة المحركة الكهربائية E للعمود .

2– عندما نصل للنظام الدائم الشدة i تأخذ القيمة I_p بينما y_2 تؤول إلى القيمة Y_p .

a– اعط العبارة الحرفية للتوترات u_{AM} ، u_{AB} و u_{BM} .

b– مستعينا بمنحنيات الشكل 2 بين أن الوشيعة لها مقاومة R_1 غير معدومة .

c– احسب : – الشدة I_p – المقاومة الداخلية r للعمود

– المقاومة R_1 للوشيعة .

3– الدارة المدروسة يمكن أن نميزها بثابت الزمن τ الذي يسمح بتقييم الزمن الآزم للوصول للنظام الدائم في الدارة .

من أجل دارة R L نضع $\tau = L/R$.

a– بين أن τ يجانس الزمن .

b– ماذا يمثل R في الدالرة المدروسة ؟ ما قيمته العددية ؟

نقبل أن إذا كان i شدة التيار في الدارة عند اللحظة t فإن : $i = A\,[1 - \exp(-t/\tau)]$. أثبت أن A تساوي إلى I_p .

4–a – اعط قيمة τ المحددة بيانيا .

b– استنتج قيمة الذاتية L للوشيعة واحسب الطاقة المختزنة فيها عند الوصول إلى النظام الدائم .

الحـل –11

1– a– المقادير الكهربائية المشاهدة على المدخلين A و B : على المدخل A نشاهد التوتر u_{AM} ، و يمثل التوتر بين طرفي العمود . على المدخل B نشاهد التوتر u_{BM} ، و يمثل التوتر بين طرفي R_2 . و الذي يسمح لنا بمشاهدة شدة التيار لأن $u_{BM} = R_2\, i$.

b– شرح السلوك الكهربائي للوشيعة : نستخدم التمثيل البياني للمنحنى y_2 ، الوشيعة تعاكس ظهور التيار في الدارة .

c– اعطاء قيمة القوة المحركة الكهربائية E للعمود : عند اللحظة $t = 0$ ، $i = 0$ و منه : $u_{BM} = 0$ و $u_{AM} = E = 13\ V$.

2– a– اعطاء العبارة الحرفية للتوترات u_{AM} ، u_{AB} و u_{BM} : التوتر $u_{AM} = E - r\, i$. التوتر u_{AB} بين طرفي الوشيعة قيمته : $u_{AB} = L\, di/dt + R_1\, i$. التوتر بين طرفي R_2 قيمته (قانون أوم) : $u_{BM} = R_2\, i$.

b– تبيان أن الوشيعة لها مقاومة R_1 غير معدومة : في النظام الدائم ، شدة التيار ثابتة و منه : $di/dt = 0$. من قانون جمع التوترات : $u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$. أي $E - r\, i = R_1\, i + R_2\, i$. لو أن R_1 معدومة ، يكون لدينا $E - r\, i = R_2\, i$ أين $u_{AM} = u_{BM}$. المنحنيات y_1 و y_2 تؤول إلى نفس الخط المقارب . و لكن لم يحدث ذلك إذن $R_1 \neq 0$.

c– حساب الشدة I_p و r و R_1 : I_p تتحدد انطلاقا من المنحنى y_2 حيث $I_p = u_{BM} / R_2$. عند الوصول إلى النظام الدائم أي بعد : $t > 10\ ms$ ، $u_{BM} = 9\ V$. و منه : $I_p = 9 / 50 = 0{,}18\ A$.

من أجل $t > 10\ ms$ ، $u_{AM} = 11\ V \Rightarrow 11 = E - r\, I_p \Rightarrow r = (13 - 11)/0{,}18 = 11{,}1\ \Omega$.

من أجل $t > 10\ ms$ ، $E - r\, I_p = R_1\, I_p + R_2\, I_p \Rightarrow R_1 = (E - r\, I_p - R_2\, I_p)/ I_p = 11{,}1\ \Omega$.

3– a– تبيان ، أن τ تجانس الزمن :

$$u_R = R\,.\,i \Rightarrow [R]\,.\,[I] \Rightarrow [R] = [U] / [I]\ ,$$
$$u_L = L\, di/dt + r\, I \Rightarrow [U] = [L\, di/dt] = [L]\,.\,[I] / [T] \Rightarrow [L] = ([U]\,.\,[T]) / [I]$$
$$[L] / [R] = ([U]\,.\,[T]) / ([I]) \times [I]/ [U]) = [T]$$
$$\Rightarrow [L/(R)] = [T] \Rightarrow [\tau] = [L/(R)] = [T]\,.$$

b– في الدالرة المدروسة R يمثل : مجموع المقاومات في الدارة : $R = r + R_1 + R_2 = 72{,}2\ \Omega$. عندما تؤول t إلى ∞ فإن $\exp(-t/\tau)$ تؤول إلى 0 و $i = I_p$ و منه : $A = I_p \Rightarrow i = I_p = A\,[1 - \exp(-t/\tau)] = A\,[1 - 0] = A$.

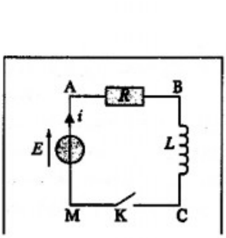
نقبل أن إذا كان i شدة التيار في الدارة عند اللحظة t فإن : $i = A\,[1 - \exp(-t/\tau)]$. أثبت أن A تساوي إلى I_p .

4–a – اعط قيمة τ المحددة بيانيا : $\tau = 2\ ms$.

b– استنتاج قيمة الذاتية L للوشيعة وحساب الطاقة المختزنة فيها عند الوصول إلى النظام الدائم :

$\tau = L/R \Rightarrow L = \tau\,.\,R = 0{,}144\ H$.

حساب الطاقة المختزنة : $E_m = 1/2\, L\, I_p^{\,2} = 1/2\,.\,0{,}144\,.\,0{,}18^2 = 2{,}33\,.\,10^{-3}\ J$.



التمرين –12

نحقق دارة تحتوي على التسلسل : مولد مثالي ، قوته المحركة الكهربائية $E = 10\ V$ ، ناقل أومي مقاومته $R = 470\ \Omega$ و وشيعة ذاتيتها $L = 0{,}82\ H$ و مقاومتها مهملة .

الجزء A

عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K . أذكر هل الإقتراحات التالية صحيحة أم خاطئة :

a– لمشاهدة سلم التوتر يجب إيصال القطب السالب إلى النقطة M و القطب الموجب إلى النقطة A

b– تيار كهربائي يظهر لحظيا في الدارة .

c– شدة التيار تأخذ القيمة $I_0 = 21\ mA$ في النظام الدائم . d– التوتر بين طرفي الوشيعة يؤول إلى القيمة 0

e– ثابت الزمن للدارة قيمته $\tau = 385\ ms$. f– المعادلة التفاضلية التي تحققها i تكون من الشكل $E = i + L/R\ .\ di/dt$.

الجزء B

اشرح في بعض اسطر الظاهرة الملاحظة عندما نفتح القاطعة K .

الحـل – 12

الجزء A

a– صحيح : لمشاهدة سلم التوتر أي التوتر بين طرفي المولد يجب ربط الجهاز بين طرفي المولد .

b– خاطئ : الوشيعة تعاكس حدوث تغيرات للتيار في الدارة الموجودة فيه أي تؤخر ظهور التيار كما تؤخر كذلك اختفائه .

c– صحيح : أي النظام الدائم شدة التيار ثابتة و تأخذ القيمة $I_0 = E/R = 10/470 = 21{,}3\ mA$.

d– صحيح : عند الوصول للنظام الدائم التوتر بين طرفي الوشيعة ينعدم : لدينا $u_L = r\,i + L\ di/dt$ و عند الوصول للنظام الدائم تصبح شدة التيار ثابتة ومنه : $di/dt = 0$ و كذلك مقاومة الوشيعة مهملة ومنه : التوتر بين طرفي الوشيعة ينعدم .

e– خاطئ : من التعريف ثابت الزمن للدارة عبارته RL و منه : $\tau = L/R = 0{,}82/470 = 1{,}7\ ms$.

f– خاطئ : المعادلة التفاضلية التي تحققها i تكون من الشكل $E/L = di/dt + R/L\ i$.

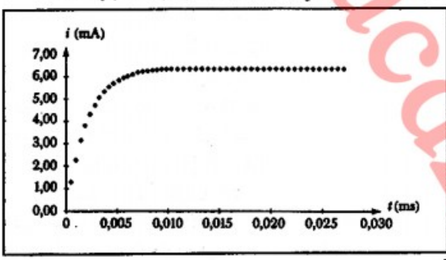
الجزء B

الظاهرة الملاحظة عندما نفتح القاطعة K : الوشيعة تمانع اختفاء التيار أي التيار يتناقص تدريجيا إلى أن ينعدم أي التيار لا ينعدم لحظيا أو آنيا و يحدث هذا نتيجة وجود طاقة مختزنة في الوشيعة تعطيها للدارة عند فتح القاطعة مما يسبب ظهور تيار جهته نفس الجهة للتيار الذي كان يعطيه المولد .

التمرين – 13

نعتبر دارة RL تحتوي على التسلسل : مولد قوته المحركة الكهربائية E ، ناقل أومي مقاومته R و وشيعة ذاتيتها L .

المقاومة الكلية للدارة هي $R = 47\ \Omega$. تغيرات الشدة i للتيار في الدارة ممثلة في الشكل المقابل .



أذكر هل الإقتراحات التالية صحيحة أم خاطئة :

a– يظهر مرور التيار في الدارة .

b– الوشيعة تعاكس إختفاء التيار في الدارة .

c– ثابت الزمن للدارة هو $\tau = 2{,}1\ ms$.

d– ذاتية الوشيعة هي : $L = 0{,}10\ H$

e– المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة i هي :

$$L/R\ .\ di/dt\ +\ i\ =\ 0$$

f– شدة التيار تكتب على الشكل : $i(t) = E/R\ [1 - \exp(-t/\tau))\ ]$

g– الطاقة المختزنة في الوشيعة عند اللحظة $t = 0{,}02\ ms$ تساوي إلى $3{,}2\ mJ$.

الحـل – 13

a– صحيح : يظهر مرور التيار في الدارة حيث أن المنحنى يشير إلى أن شدة التيار تزداد تدريجيا إلى أن تثبت .

b– صحيح : الوشيعة تعاكس إختفاء التيار في الدارة . الوشيعة تعاكس حدوث تغير للتيار في الفرع من الدارة الموجودة فيه .

c– صحيح : تحديد ثابت الزمن للدارة بيانيا يؤكد أن قيمته تساوي فعلا $\tau = 2{,}1\ ms$.

d– صحيح : باستخدام العبارة $\tau = L/R$ نحدد ذاتية الوشيعة : $L = \tau\ .\ R = 2{,}1\ .\ 10^{-3}\ .\ 47 = 0{,}10\ H$ بالتقريب .

e– خاطئ : المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة i هي : $E/L = di/dt + R/L\ i$

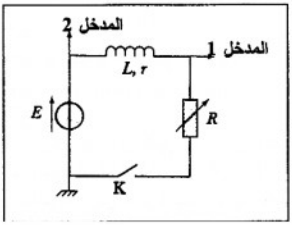
f– صحيح : شدة التيار تكتب على الشكل : $i(t) = E/R\ [1 - \exp(-t/\tau))\ ]$

g– خاطئ : الطاقة المختزنة في الوشيعة هي $E_{bob} = 1/2\ L\ i^2$ و عند اللحظة $t = 0{,}02\ ms$ تكون $i = 6{,}4\ .\ 10^{-3}\ A$ و منه

التمرين – 14

نحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل ، مؤلفة من مولد قوته المحركة الكهربائية E ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومته الداخلية r ، و ناقل أومي مقاومته متغيرة . نوصل المدخلين 1 و 2 بجهاز الكمبيوتر . عند اللحظة $t = 0$ ، نغلق القاطعة K .

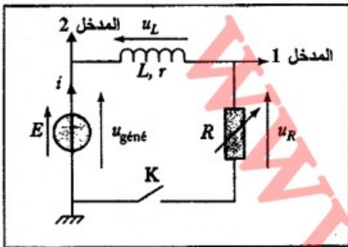
a– ماهي التوترات المشاهدة على شاشة الكومبيوتر ؟ مثل هذه التوترات على مخطط .



b– اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها i .
c– حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل $i = A + B\exp(-t/\tau)$ ،
حدد عبارة كل من A ، B و τ . d– مثل منحنى الدالة $i = f(t)$.
e– ما هي عبارة الطاقة المختزنة في الوشيعة عند اللحظة t ؟ f– ما هو تأثير قيمة R على A ، B و τ ؟

الحـل – 14

a– التوترات المشاهدة على شاشة الكومبيوتر هي :
على المدخل 1 : التوتر بين طرفي الناقل الأومي إذن عبارته : $u_R = R\,i$
على المدخل 2 : التوتر بين طرفي المولد إذن عبارته : $u_G = E$
تمثيل هذه التوترات على مخطط : انظر الشكل المقابل . باعتبار الإصطلاح آخذة ، التوترات u_R و u_L موجبة .



b– كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها i : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $u_G = u_R + u_L$ حيث $u_R = R\,i$ و $u_L = L\,di/dt + r\,i$ و بالتعويض في المعادلة $E = u_R + u_L$ نحصل على : $R\,i + L\,di/dt + r\,i = E$ و تصبح : $L\,di/dt + (R + r)\,i = E$ أو : $di/dt + (R + r)/L\;\, i = E/L$ معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة لـ i .

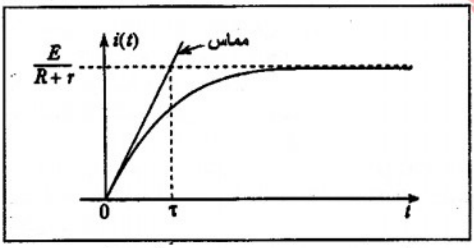
c– تحديد عبارة كل من A ، B و τ :
حل المعادلة التفاضلية يكون من الشكل : $i(t) = A + B\exp(-t/\tau)$ ، يجب أن يحقق المعادلة .
إذن لدينا : $di(t)/dt = -B/\tau\,\exp(-t/\tau)$ نعوض عن $i(t)$ و di/dt في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$$-B/\tau\,\exp(-t/\tau) + (R + r)/L\,[A + B\exp(-t/\tau)] = E/L$$
$$\Leftrightarrow\; -B/\tau\,\exp(-t/\tau) + A\,(R + r)/L + (R + r)/L\,.\,B\exp(-t/\tau) = E/L$$
$$\Leftrightarrow\; [-B/\tau + B\,(R + r)/L]\;\exp(-t/\tau) = E/L - A\,(R + r)/L$$

هذه المعادلة محققة إذا كان : • $-B/\tau + B\,(R + r)/L = 0$ أي : $B/\tau = B\,(R + r)/L$ و منه : $\tau = L/(R + r)$
• $E/L - A\,(R + r)/L = 0$ أي : $A\,(R + r)/L = E/L$ و منه : $A = E/(R + r)$

نحدد قيمة B من الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ لدينا $i = 0$ (شرط استمرارية شدة التيار نتيجة وجود الوشيعة)
ومنه : $i(t = 0) = E/(R + r) + B\exp(-t/\tau) = E/(R + r) + B$ لأن : $\exp(0) = 1$
ومنه : $E/(R + r) + B = 0 \;\Leftrightarrow\; B = -E/(R + r)$
ومنه الشدة i للتيار تكتب على الشكل :

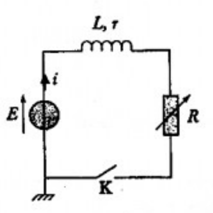
$$i(t) = E/(R + r)\,[1 - \exp(-t/\tau)]$$
مع : $\tau = L/(R + r)$



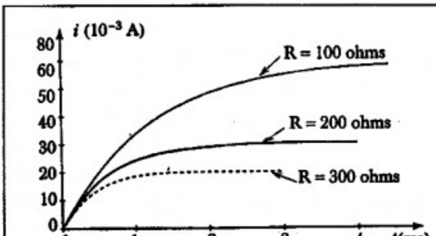
d– تمثيل منحنى الدالة $i = f(t)$: انظر الشكل المقابل .
e– عبارة الطاقة المختزنة في الوشيعة عند اللحظة t :
$E_{bob} = 1/2\,.\,L\,.\,i^2$.
f– تأثير قيمة R على A ، B و τ : عندما تكبر قيمة المقاومة R فإن A تصغر لأن : $A = E/(R + r)$. شدة التيار في الدارة تكون ضعيفة جدا . B تصغر قيمة لأن : $B = -A$. τ تصغر لأن : التيار يظهر في الدارة بسرعة أكبر لأن : $\tau = L/(R + r)$.

التمرين –15

حقق تركيب دارة مؤلفة من مولد قوته المحركة الكهربائية E ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r مهملة و ناقل أومي مقاومته R متغيرة . نصل المدخلين 1 و 2 بجهاز معلوماتي يسمح بمشاهدة التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي و التوتر



الشكل 1



الشكل 2

$u_{géné}$ بين طرفي المولد . عند اللحظة $t = 0$ ،
نغلق القاطعة K . نقوم بتغيير قيمة المقاومة R عدة مرات و في كل مرة نشاهد تطور الشدة i للتيار في الدارة . نرسم على نفس الشكل المنحنيات الموافقة للشدة لمختلف قيم R .

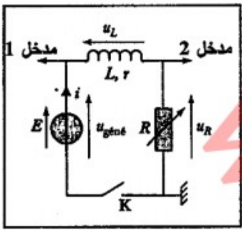
aـ اعد رسم الشكل 1 مبرزا التوصيلات الآزمة لمشاهدة التوتر u_R و التوتر $u_{géné}$. **b**ـ ما هي العلاقة التي تربط i و u_R ؟

cـ اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة i في الدارة .

dـ حل هذه المعادلة يكون من الشكل : $i = A\,[1 - \exp(-t/\tau)]$. حدد عبارات كل من A و τ .

eـ على كل منحنى حدد قيمة A و τ . **f**ـ استنتج قيمة الذاتية L للوشيعة و كذا قيمة E للمولد .

الحل ـ 15



aـ اعادة رسم الشكل 1 مبرزا التوصيلات الآزمة لمشاهدة التوتر u_R و التوتر $u_{géné}$:

المدخل 2 : التوتر بين طرفي الناقل الأومي u_R . المدخل 1 : التوتر بين طرفي المولد $u_{géné}$.

bـ العلاقة التي تربط i و u_R : من التعريف : $u_R = R\,i$ (قانون أوم) .

cـ كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة i في الدارة : حسب قانون جمع التوترات

يكون لدينا : $u_{géné} = u_R + u_L$

و حيث : $u_L = L\,di/dt$ (مقاومتها الداخلية r مهملة) و $u_R = R\,i$

(التوتر بين طرفي المقاومة R) و $u_{géné} = E$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية التي

تحققها الشدة $i(t)$: $di/dt + R/L\ i = E/L$.

dـ حل هذه المعادلة يكون من الشكل : $i = A\,[1 - \exp(-t/\tau)]$. حدد عبارات كل من A و τ :

في العبارة $i = A\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ ، A و τ ثوابت ، إذن :

$$di/dt = A\,d/dt[1 - \exp(-t/\tau)] = - A\,d/dt\,[\exp(-t/\tau)] = A/\tau\,\exp(-t/\tau) .$$

بتعويض $i = A\,[1 - \exp(-t/\tau)]$ و $di/dt = A/\tau\,\exp(-t/\tau)$ في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$A/\tau\,\exp(-t/\tau) + R/L\,.\,A\,[1 - \exp(-t/\tau)] = E/L$$

أي : $[A/\tau - R/L\,.\,A]\,\exp(-t/\tau) + R/L\,.\,A = E/L$

الحل المقترح يحقق المعادلة إذا كان : $[A/\tau - R/L\,.\,A] = 0 \Rightarrow A/\tau = R/L\,.\,A \Rightarrow \boldsymbol{\tau = L/R}$.

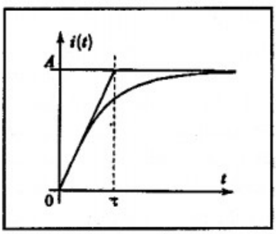
و إذا كان : $R/L\,.\,A = E/L \Rightarrow \boldsymbol{A = E/R}$

eـ تحديد قيمة A و τ على كل منحنى : يمكن تحديد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب R L كما يلي :

ـ برسم المماس للمنحنى $i = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته $i = A$ في نقطة تكون فاصلتها هي τ .

على المنحنيات نقرأ : $\tau(100\,\Omega) = 1{,}4$ ms ، $\tau(200\,\Omega) = 0{,}70$ ms ، $\tau(300\,\Omega) = 0{,}50$ ms .

على المنحنيات نقرأ : $A(100\,\Omega) = 60$ mA ، $A(200\,\Omega) = 30$ mA ، $A(300\,\Omega) = 20$ mA .



fـ استنتاج قيمة الذاتية L للوشيعة : $\tau = L/R \Rightarrow L = \tau\,.\,R$.

و منه : $L(100\,\Omega) = 1{,}4\,.\,10^{-3}\,.\,100 = 0{,}14$ H ،

$L(100\,\Omega) = 0{,}70\,.\,10^{-3}\,.\,200 = 0{,}14$ H ،

$L(100\,\Omega) = 0{,}50\,.\,10^{-3}\,.\,300 = 0{,}15$ H ،

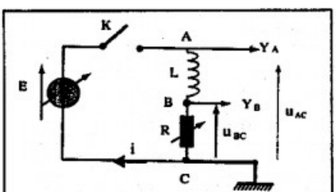
و كذا قيمة E للمولد : $E = A\,.\,R$.

و منه : $E(100\,\Omega) = 60\,.\,10^{-3}\,.\,100 = 6{,}0$ V ،

$E(100\,\Omega) = 30\,.\,10^{-3}\,.\,200 = 6{,}0$ V ،

$E(100\,\Omega) = 20\,.\,10^{-3}\,.\,300 = 6{,}0$ V ،

التمرين ـ16



لدراسة تطور التيار في ثنائي قطب يحتوي على وشيعة ذاتيتها $L = 0{,}10$ H ومقاومتها الداخلية مهملة أمام R و ناقل أومي مقاومته $R = 1{,}0\ k\Omega$ يخضع لتوتر ذي مستوى ثابت قيمته $E = 6{,}0$ V ، نحقق التركيب التالي :

عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K .

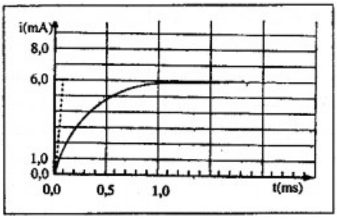
الدراسة التجريبية :

a. لمتابعة تطور شدة التيار المار بالدارة بدلالة الزمن ، ما هو التوتر الذي يجب تسجليه و ما هي العملية التي تطلبها من الحبكة الإعلامية لتنفيذ ذلك ؟ برر

b. بعد تنفيذ العملية السابقة نحصل على البيان التالي :

1ـ من البيان ، أوجد قيمة I شدة التيار في النظام الدائم واشرح الطريقة المتبعة .

2ـ اوجد بيانيا قيمة ثابت الزمن .



3ــ هل هذه القيمة تتفق مع المعطيات النظرية للتمرين ؟ برر إجابتك .

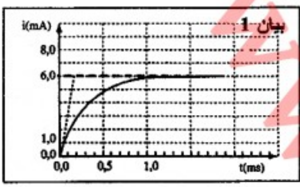
الدراسة التحليلية :

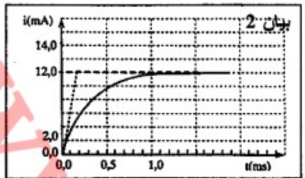
a. توصل إلى المعادلة التفاضلية بدلالة التيار i و di/dt .

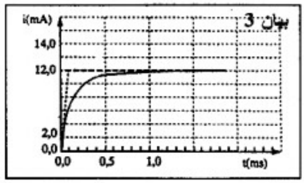
تأثير العوامل المختلفة :

نجري عدة تجارب و في كل مرة نغير أحد العوامل (L , R , E) و نسجل النتائج في الجدول التالي :

	L (H)	R (kΩ)	E (V)
تجربة 1	0,10	1,0	6,0
تجربة 2	0,10	1,0	12,0
تجربة 3	0,10	0,50	6,0
تجربة 4	0,20	1,0	6,0







من أجل كل تجربة لدينا بيان يمثل تطور i بدلالة الزمن .

ــ حدد البيان الموافق لكل تجربة مع التعليل .

الحــل ــ 16

الدراسة التجريبية :

a . التوتر الذي يجب تسجليه لمتابعة تطور شدة التيار : هو التوتر بين طرفي الناقل الأومي u_{BC} .

حسب قانون أوم : $u_{BC} = R\,.\,i$. و العملية التي يقوم بها الكمبيتر هي $i = u_{BC} / R$.

1bــ إيجاد قيمة I شدة التيار في النظام الدائم : في النظام الدائم شدة التيار ثابتة و أعظمية . للحصول على قيمتها نرسم الخط المقارب الأفقي للمنحنى فنحصل على قيمة I : $I = 6{,}0\ mA$.

2ــ إيجاد بيانيا قيمة ثابت الزمن :

يمكن تحديد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب R L كما يلي : برسم المماس للمنحنى $i = f(t)$ عند المبدأ الذي يقطع المستقيم الذي معادلته $i = I = 6{,}0\ mA$ في نقطة تكون فاصلتها هي $\tau = 0{,}1\ mA$.

3ــ القيمة النظرية ثابت الزمن τ : $\tau = L/R = 0{,}1/(1{,}0\,.\,10^3) = 0{,}1\ mA$. تتفق القيمة مع المعطيات النظرية.

الدراسة التحليلية :

a. التوصل إلى المعادلة التفاضلية بدلالة شدة التيار i و di/dt : حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $u_{géné} = u_R + u_L$

و حيث : $u_L = L\,di/dt$ (مقاومتها الداخلية r مهملة) و $u_R = R\,i$ (التوتر بين طرفي المقاومة R) و $u_{géné} = E$ و منه نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة $i(t)$: $di/dt + R/L\ i = E/L$.

b. استنتاج عبارة الشدة في النظام الدائم وحساب هذه القيمة : في النظام الدائم الشدة ثابتة ومنه : $di/dt = 0$.

و منه : $0 + R/L\ i = E/L \Rightarrow i = E/R = 6{,}0/(1{,}0\,.\,10^3) = 6{,}0\ mA$

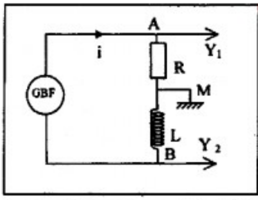
تأثير العوامل البارامترية : سوف نستخدم قيم ثابت الزمن و قيم شدة التيار في النظام الدائم .

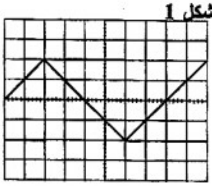
	L (H)	R (kΩ)	E (V)	القيم النظرية: I = E/R (mA)	القيم النظرية: τ = L/R (ms)
تجربة 1	0,10	1,0	6,0	$6{,}0/(1{,}0\,.\,10^3) = 6{,}0\ mA$	$0{,}1/(1{,}0\,.\,10^3) = 0{,}1\ mA$
تجربة 2	0,10	1,0	12,0	$12{,}0/(1{,}0\,.\,10^3) = 12\ mA$	$0{,}1/(1{,}0\,.\,10^3) = 0{,}1\ mA$
تجربة 3	0,10	0,50	6,0	$6{,}0/(0{,}5\,.\,10^3) = 12\ mA$	$0{,}1/(0{,}5\,.\,10^3) = 0{,}2\ mA$
تجربة 4	0,20	1,0	6,0	$6{,}0/(1{,}0\,.\,10^3) = 6{,}0\ mA$	$0{,}2/(1{,}0\,.\,10^3) = 0{,}2\ mA$

و منه نحصل على النتائج التالية :

الخلاصة	τ (ms)	I(mA) في النظام الدائم	القيم التجريبية
تجربة 1	0,1 mA	6,0 mA	المنحنى 1
تجربة 4	0,2 mA	6,0 mA	المنحنى 2
تجربة 3	0,2 mA	12 mA	المنحنى 3
تجربة 2	0,1 mA	12 mA	المنحنى 4

التمرين ــ 17





الشكل 1

وشيعة مقاومتها مهملة و ذاتيتها L ، موصولة على التسلسل مع ناقل أومي مقاومته $R = 10^3\ \Omega$. الجملة يغذيها مولد توتر دوري ذو إشارة مثلثية .

بواسطة جهاز راسم إهتزاز مهبطي ذو مدخلين نشاهد التوتر u_{AM} بين طرفي الناقل الأومي و التوتر u_{BM} بين طرفي الوشيعة ، فنحصل على شاشة راسم الإهتزاز المهبطي على المنحنى الموضح في الشكل 1 . الجهاز ضبط على السلم التالي :

قاعدة الزمن : 1 ms يمثل مربع واحد .

على المدخل 1 : 1 V يمثل مربع واحد .

على المدخل 2 : 0,1 V يمثل مربع واحد .

1ــ اكتب عبارة u_{AM} بدلالة i ، بين طرفي الناقل الأومي .

2ــ خلال كل نصف دور ، عبارة شدة التيار بدلالة الزمن تكون من الشكل : $i = a\,t$.
حدد من أجل كل نصف دور المحصور بين اللحظة $t = 0$ (لحظة إنطلاق الإشارة) و اللحظة $t = 2 . 10^{-3}$ s . اختر القيمة الصحيحة لـ a ، من بين القيم التالية :

$a = 10^3$, $a = 1$, $a = 10^{-3}$, $a = 2 . 10^3$

3ــ احسب ذاتية الوشيعة مستعينا بالمعطيات التجريبية .

الحــل ــ17

1ــ كتابة عبارة u_{AM} بدلالة i ، بين طرفي الناقل الأومي : $u_{AM} = R\,i$.

2ــ خلال نصف الدور المحصور بين اللحظة $t = 0$ و اللحظة $t = 2 . 10^{-3}$ s ، التوتر u_{AM} يتغير بشكل خطي من 0 إلى 2 V

يمكن إذن أن نكتب $u_{AM} = b\,t$ ثم نحدد b : $b = \Delta u_{AM} / \Delta t$. باستخدام العلاقة $u_{AM} = R\,i$

نكتب : $u_{AM} = b\,t = R\,i = R\,a\,t$ و منه : $a = b/R = 10^3/10^3 = 1$ A/s .

3ــ حساب ذاتية الوشيعة مستعينا بالمعطيات التجريبية : مع الأخذ بعين الإعتبار الإتجاه المختار لـــ i :

$u_{BM} = -L\,di/dt$. بتعويض بـــ $u_{AM} = b\,t = R\,i = R\,a\,t$

نجد : $u_{BM} = -L/R\ du_{AM}/dt = -L/R\ d(R\,a\,t)/dt = -La$. على المجال $[0\ ;\ 2 . 10^3]$ ، u_{BM} ثابت و يساوي إلى $u_{BM} = -0,2$ V . نحصل على : $L = -u_{BM}/a = -(-0,2)/1 = 0,2$ H .