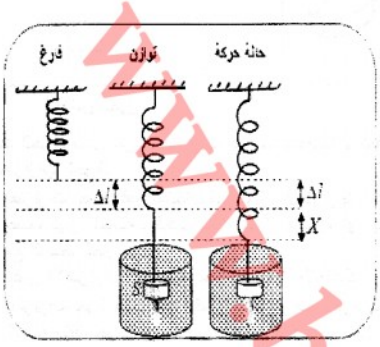
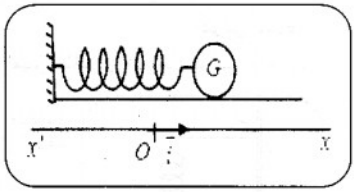
التطورات الاهتزازية

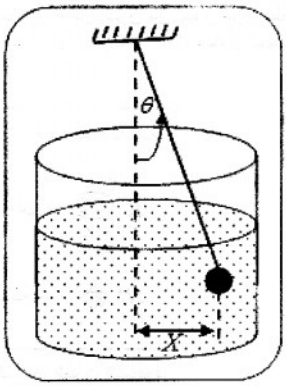
الاهتزازات الميكانيكية الحرة

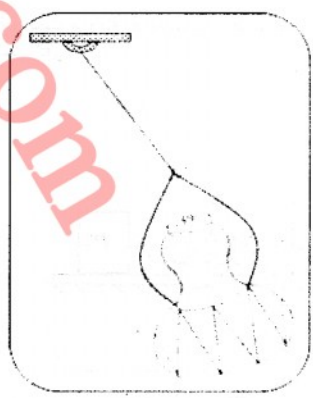
النواس المرن





النواس الثقـــالي

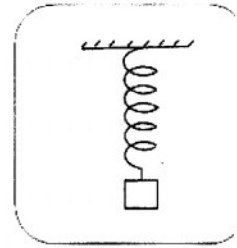


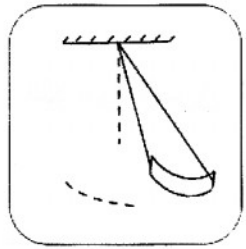


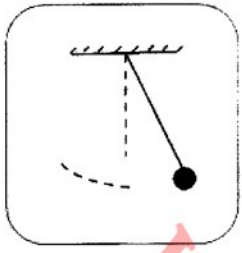
www.bacdz.com

الاهتزازات الميكانيكية الحرة

الجملة الميكانيكية المهتزة: هي كل جملة تتحرك ذهابا وإيابا على جانبي وضع توازنها..
مثل: النواس المرن، الأرجوحة، النواس البسيط.

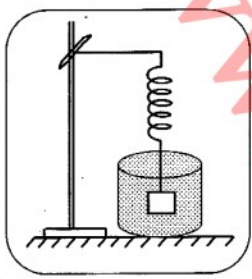

النواس المرن


الأرجوحة


النواس البسيط

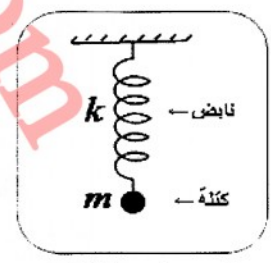
الاهتزازات الحرة: نقول عن الاهتزازات أنها حرة عندما لا تلتقى الجملة المهتزة طاقة من الوسط الخارجي أثناء الاهتزاز.
أنماط الاهتزازات الحرة:

- **اهتزازات حرة غير متخامدة:** تكون الاهتزازات الحرة غير متخامدة عندما تهتز الجملة وطاقتها ثابتة خلال الزمن، أي أنها لا تتبادل الطاقة مع الوسط الخارجي.
  تكون الاهتزازات غير متخامدة إذا أهملنا الإحتكاك.
- **اهتزازات حرة متخامدة:** تكون الاهتزازات الحرة متخامدة عندما تهتز الجملة وتفقد جزءاً من طاقتها بفعل الاحتكاكات، مثل النواس المرن.
- **اهتزازات حرة مغذاة:** تكون الاهتزازات الحرة مغذاة عندما يتم تعويض كل الطاقة الضائعة باستمرار، يتحقق ذلك بتجهيز يتناسب مع الجملة المهتزة. مثل: ساعة الحائط.

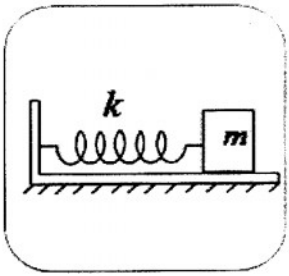

النواس المرن والاحتكاكات المائعة

النواس المرن

تعريفه: يتكون النواس المرن من نابض مرن حلقاته غير متلاصقة، كتلته مهملة و ثابت مرونته k مثبت من أحد طرفيه، وطرفه الآخر موصول بجسم ذو كتلة m ، ويكون الجسم إما معلقا أو موضوعا على مستو أفقي.



النواس المرن الشاقولي



النواس المرن الأفقي

www.tacd2.com

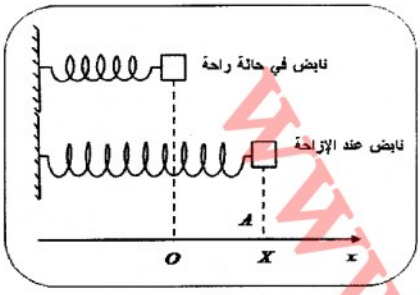
قوة الإرجاع المطبقة من طرف نابض

نشاط-1: تحديد عبارة قوة الإرجاع باستعمال المحاكاة.

لشحن المحاكاة: www.wontu.fr/animation-oscillteur-harmonique.htm

ندرس حركة نواس مرن أفقي دون تخامد(عدم وجود الاحتكاكات)، نابض مرن حلقاته غير متلاصقة.

كتلته مهملة و ثابت مرونته k. نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه (O) بسحبه أفقيا ثم تركه لحاله دون سرعة ابتدائية بمقدار (X) أي (OA).



دراسة حركة نواس مرن أفقي

ماذا تلاحظ؟

يتحرك الجسم (S) ذهابا و إيابا على جانبي وضع التوازن (O) الذي نعتبره مبدأ الفواصل.

ما هو سبب الحركة؟

سبب الحركة قوة يطبقها النابض على الجسم (S) أي $\left(\overrightarrow{F_{R/S}}\right)$

تحاول هذه القوة إعادة الجسم (S) إلى وضع توازنه.

ما هو اتجاه هذه القوة؟

تتجه دوما نحو (O) مبدأ الفواصل.

بماذا تتعلق هذه القوة؟

هذه القوة تتعلق بمقدار إزاحة النابض (OA) أي (X) و ثابت مرونته (k).

استنتج عبارة قوة الإرجاع المطبقة من طرف نابض؟

قوة الإرجاع: $\overrightarrow{F} = -k.\overrightarrow{OA}$ أو $\|\overrightarrow{F}\| = k.|X|$

F : قوة الإرجاع بالنيوتن (N).

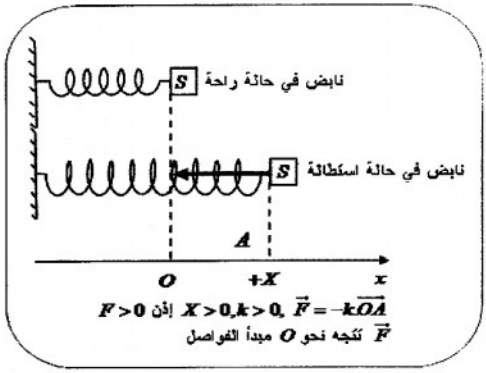
k : ثابت المرونة بالنيوتن على المتر $\left(N.m^{-1}\right)$

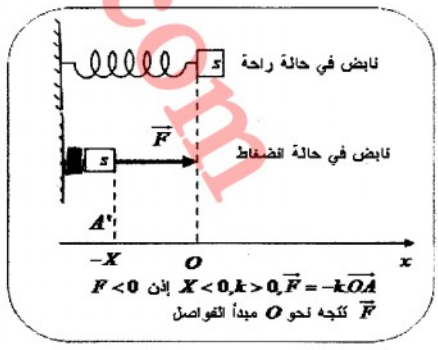
(X) و (OA) : مقدار الإزاحة بالمتر (m)

تعاكس هذه القوة دوما الشعاع $\overrightarrow{OA}$ أي : $F = -kx(t)$

إذا كانت $x(t) > 0$ فإن $F < 0$

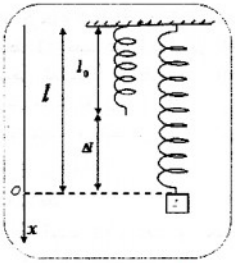
إذا كانت $x(t) < 0$ فإن $F > 0$





www.bacoz.com

ملاحظة: قوة الإرجاع في حالة نواس المرن الشاقولي.



قوة الإرجاع تعطى بالعلاقة التالية: $F = k.|l - l_0| = k.|\Delta l|$

l_0 : طول النابض الأصلي (فارغ بدون حمولة).

l : طول النابض بالحمولة (في حالة التوازن).

الدور الذاتي للحركة (T_0) : هو الفترة الزمنية الفاصلة بين مرورين متتاليين للجسم (S) من نقطة ما في نفس الاتجاه.

تأثير الكتلة على الدور

نشاط-2: تأثير الكتلة على الدور (T_0).

لكي نظهر تأثير الكتلة على الدور نستعمل نواسا مرنا رأسيا، يتألف من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة ونعلق به كتلا مختلفة (الوثيقة المقابلة)، ومن اجل كل كتلة نقيس الدور T_0 ونسجل النتائج في الجدول التالي:

$m(g)$	20	40	60	80
$T_0(s)$	0.280	0.397	0.486	0.561
$\frac{T_0}{\sqrt{m}}$				

- كيف نقيس الدور؟
- احسب النسب $\frac{T_0}{\sqrt{m}}$.
- ما هو تأثير الكتلة على الدور؟

الحل:

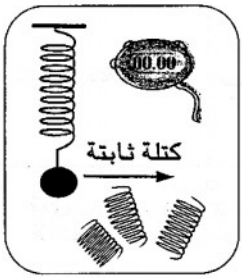
- لقياس الدور نقيس زمن 10 اهتزازات (t) بواسطة ميقاتية ونحسب $T_0 = \frac{10}{t}$.
- النسب $\frac{T_0}{\sqrt{m}}$:

$\frac{T_0}{\sqrt{m}}$	1.98	1.98	1.98	1.98

- تأثير الكتلة على الدور:

$$T = C^{te}\sqrt{m} \quad \text{أي} \quad \frac{T}{\sqrt{m}} = C^{te}$$

الدور T_0 يتناسب طرديا مع $\sqrt{m}$



تأثير ثابت المرونة على الدور

نشاط-3: تأثير ثابت مرونة النابض k **على الدور.**

نستعمل نواسا مرنا رأسيا ونجعل الكتلة ثابتة ونغير قيمة ثابت المرونة وذلك باستعمال عدة نوابض لكل منها ثابت مرونة مختلف عن الأخر (الوثيقة المقابلة)، ومن أجل كل ثابت مرونة (نابض) نقيس الدور T_0 ونسجل النتائج في الجدول التالي:

$k(N.m^{-1})$	5	10	15
$T_0(s)$	0.561	0.397	0.324
$T_0\sqrt{k}$			

www.bacdz.com

- احسب الجداء $T_0\sqrt{k}$.
- ما هو تأثير ثابت مرونة النابض k على الدور ؟

الحل:

- الجداء $T_0\sqrt{k}$:

$T_0\sqrt{k}$	1.25	1.25	1.25

- تأثير ثابت مرونة النابض k على الدور:

$$T_0 = \frac{C^{te}}{\sqrt{k}} \text{ أي } T_0.\sqrt{k} = C^{te}$$

الدور T_0 يتناسب عكسيا مع $\sqrt{k}$.

استنتاج:

مما سبق يمكن أن نستنتج بأن: $T_0 = C\sqrt{\frac{m}{k}}$

لتعيين ثابت C نأخذ $m = 100g$, $k = 10\,N/m$ ونقيس الدور عدة مرات فنجد $T_0 = 0.628s$

قيمة C: نعوض قيم k, m و T_0 في $T_0 = C\sqrt{\frac{m}{k}}$ فنجد $C = 6.28 = 2\pi$

ومنه: عبارة دور النواس المرن $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

نشاط-4: بين أن $\sqrt{\frac{m}{k}}$ متجانس مع الزمن باستخدام التحليل البعدي.

الحل:

لدينا: $F = k.x$ أي: $k = \frac{F}{x}$ ومنه: $[K] = [F].[L]^{-1}$

من العلاقة: $F = m.a$ نجد: $[F] = [M][L][T]^{-2}$ إذن: $[K] = [M].[T]^{-2}$

ومنه: $[T]^2 = \frac{[M]}{[K]}$ أي: $[T] = \left[\sqrt{\frac{M}{K}}\right]$

إذا: $\sqrt{\frac{m}{k}}$ متجانس مع الزمن.

المعادلة التفاضلية(حالة اهتزازات حرة غير متخامدة)

أثناء دراسة الحركة نهمل:

- كتلة النابض أمام m.
- الاحتكاكات الصلبة.
- مقاومة الهواء.
- نعتبر الجسم (S) صلبا ونقطيا.

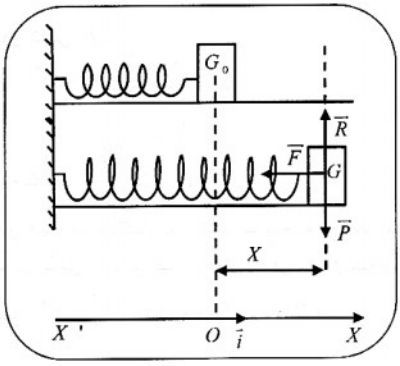
ومنه الجملة$(S$، نابض) جملة مثالية.

ندرس حركة نواس مرن أفقي دون تخامد، نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بسحبه أفقيا ثم تركه لحاله دون سرعة ابتدائية.

نطبق القانون الثاني لنيوتن في مرجع غاليلي أرضي على الجملة، وننسب لها معلم$(O,\vec{i})$.

يخضع الجسم الصلب (S) إلى ثلاث قوى:

- $\vec{P}$: ثقل الجسم.
- $\vec{F}$: قوة الإرجاع أي فعل النابض على الجسم.



نواس مرن أفقي

www.bacdz.com

- $\vec{R}$: فعل المستوي على الجسم (الاحتكاكات مهملة).

نعلم أنه في مرجع غاليلي يكون مجموع القوى الخارجية المطبقة على الجسم تساوي جداء كتلة الجسم وتسارع مركز عطالته.

أي : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}_G$ ومنه: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}_G$

بالإسقاط على محور الحركة $(O,\vec{i})$ أي $x'Ox$ نجد: $0 + 0 - kx(t) = ma_x$

حيث: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ ومنه: $-kx(t) = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

نقسم الطرفين على m فنجد : $-\dfrac{k}{m}x(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ إذا: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x(t) = 0 \ldots\ldots(1)$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ x.

نتيجة

عند إهمال الاحتكاكات ومقاومة الهواء، فإن حركة مركز عطالة الجسم تتحقق حسب المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

حل هذه المعادلة التفاضلية هو دالة جيبية بدلالة الزمن من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

حيث: - X : سعة الحركة (أكبر قيمة للفاصلة) تقدر بالمتر (m) وهي موجبة دائما.

- ω_0 : نبض الحركة وحدته (rad/s).
- φ_0 : الصفحة الابتدائية للحركة وتتعلق قيمتها بالشروط الابتدائية للحركة.

نبض الحركة ω_0

لدينا عبارة الفاصلة بدلالة الزمن: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

ومنه: $\dfrac{dx}{dt} = -X\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

أي: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t)$ إذن: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \ldots\ldots(2)$

بالمطابقة بين (1) و(2) نجد: $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ أي: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

الدور الذاتي T_0

لدينا: $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ أي: $T_0 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

ومنه نكتب : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

تتعلق قيمة الدور بالكتلة m وثابت المرونة k ووحدته الثانية (S).

التواتر الذاتي f_0 : هو عدد الاهتزازات في ثانية واحدة ونرمز له بـ: (f_0).

حيث: $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ ، وحدته الهرتز (Hz) .

www.bacdz.com

مخططات الحركة:

إن الاهتزازات الحرة لنواس مرن غير متخامد هي دالة جيبية، ومنحاها يكون على شكل حركة اهتزازية جيبية.

- مخطط الفاصلة (المطال) بدلالة الزمن:

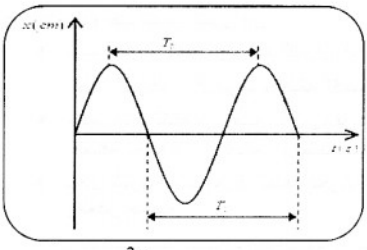
لدينا: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

- مخطط السرعة بدلالة الزمن:

السرعة هي المشتق الاول للفاصلة، أي:

$$\frac{dx}{dt} = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v(t) = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



مخطط الفاصلة من أجل $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

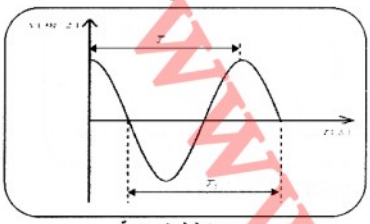
سعة الفاصلة هي: X

- مخطط التسارع بدلالة الزمن:

التسارع هو المشتق الاول للسرعة أي المشتق الثاني للفاصلة، أي:

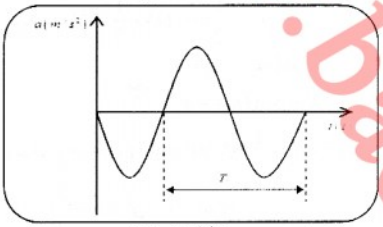
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



مخطط السرعة

سعة السرعة هي: $X\omega_0$



مخطط التسارع

سعة التسارع هي: $X\omega_0^2$

كيف نعين X و φ_0 :

المقادير X و φ_0 تعين بواسطة الشروط الابتدائية عند مبدأ الأزمنة.

على سبيل المثال عند $t = 0$:

- مركز عطالة الجسم (S) موجودة عند النقطة A ذات الفاصلة a حيث $a > 0$.
- السرعة الابتدائية $v_0 = 0$

لدينا:

$$x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v(t) = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

عند $t = 0$ وبأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية نجد:

$$x(0) = X\cos(\varphi_0) = a$$

$$v(0) = -X\omega_0 \sin(\varphi_0) = 0$$

$-X\omega_0 \neq 0$ وهذا يعني أن: $\sin\varphi_0 = 0$ أي: $\varphi_0 = 0$ أو $\varphi_0 = \pi$

$\cos\varphi_0 > 0$ لأن $X\cos(\varphi_0) = a$ مع $a > 0$ و $X > 0$

ومنه نكتب: $x(t) = a\cos\omega_0 t$ حيث a: سعة الحركة.

الدراسة الطاقوية: (نابض، جسم S) في حالة غياب الاحتكاكات.

طاقة الجملة هي مجموع طاقتيهما الكامنة والحركية أي:

طاقة الجملة=الطاقة الحركة+الطاقة الكامنة $E(t) = E_c(t) + E_{pe}(t)$

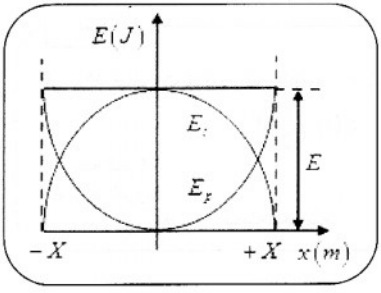
الطاقة الحركة للجملة= الطاقة الحركة للجسم $E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$

لأن النابض ليس له طاقة حركية (كتلته مهملة).

الطاقة الكامنة للجملة= الطاقة المرونية للنابض $E_{pe}(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$

لأن الكتلة ليس لها طاقة كامنة ثقالية (الجملة تبقى أفقية ولا يوجد تغير في الارتفاع).

إذن: $E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$

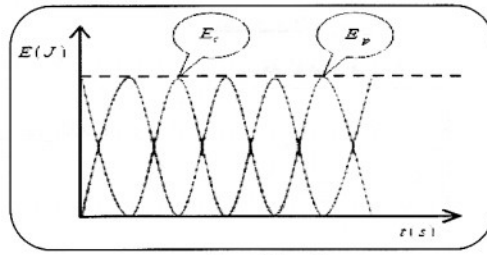


مخطط الطاقة بدلالة الزمن

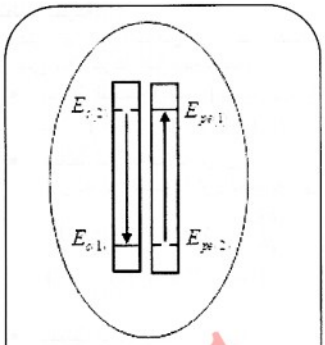
www.bacdz.com

عند اهتزازة واحدة للنواس المرن فإن:

- عندما تقترب الكتلة من وضع التوازن $(x=0)$ فإن:
  الطاقة الحركية E_c تتزايد والطاقة الكامنة المرونية E_{pe} تتناقص.
- عندما تبتعد الكتلة من وضع التوازن، فإن:
  الطاقة الحركية E_c تتناقص والطاقة الكامنة المرونية E_{pe} تتزايد.
- خلال الحركة يوجد تحويل للطاقة الحركية إلى طاقة كامنة مرونية والعكس صحيح.



مخطط الطاقة بدلالة الزمن



$$E_{pe(1)} + E_{c(1)} = E_{c(2)} + E_{pe(2)}$$
$$E_{c(1)} - E_{c(2)} = E_{pe(2)} - E_{pe(1)}$$
$$-\Delta E_c = \Delta E_{pe} \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_{pe} = 0$$
$$\Delta E = 0 \Rightarrow E(t) = C^{te}$$

استعمال مبدأ حفظ الطاقة

تبيان أن طاقة الجملة ثابتة في كل لحظة

لدينا: $E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$

مع: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
$v(t) = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

ومنه: $E(t) = \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}mX^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

لكن: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ أي: $\omega_0^2 m = k$

وبالتالي: $E(t) = \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kX^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$E(t) = \frac{1}{2}kX^2\left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right]$$

إذا: $E(t) = \frac{1}{2}kX^2$ أي: $E(t) = C^{te}$ (لأن: k ثابت و X مقدار ثابت)

نتيجة

في حالة غياب الاحتكاكات، فإن طاقة الجملة (نابض أفقي، كتلة) مقدار ثابت في كل لحظة.

$$E(t) = \frac{1}{2}kX^2$$

X سعة الحركة.
k ثابت المرونة.
نقول إن الجملة محفوظة.

www.bac-dz.com

طبيعة الحركة والطاقة (المعادلة التفاضلية)

بما أن طاقة الجملة ثابتة: $E(t)=\frac{1}{2}mv^2(t)+\frac{1}{2}kx^2(t)=C^{te}$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{dE}{dt}=mv(t)\frac{dv}{dt}+kx(t)\frac{dx}{dt}=0$$

$$mv(t)\frac{d^2x}{dt^2}+kx(t)v(t)=0$$

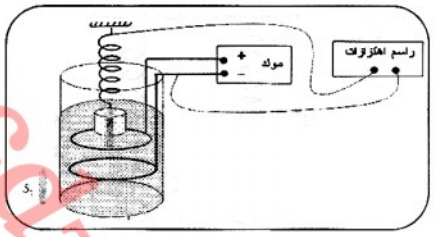
لأن: $\frac{dx}{dt}=v(t)$ و $\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$

ومنه: $\left[m\frac{d^2x}{dt^2}+kx(t)\right]v(t)=0$ علما أن $v(t)\neq 0$ في حالة حركة.

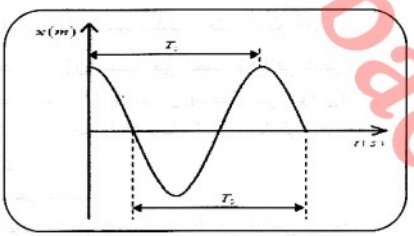
إذا: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t)=0$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ: x.

الاهتزازات الحرة المتخامدة

نشاط: نحقق التركيب التالي، نعلق بالجسم S سلكا نحاسيا مقطعه صغير حتى يكون الاحتكاك مع السائل ضعيفا جدا. نغمر السلك بمحلول كبريتات النحاس الموجود داخل الوعاء، ونزيح الجسم (S) عن وضع توازنه، ونتركه لحاله فيظهر على شاشة راسم الاهتزازات البيان التالي:



النواس المرن والاكتكاكات السائلة

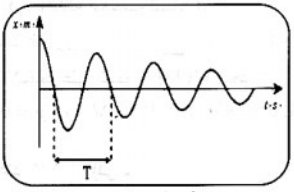


مخطط الفاصلة في غياب الاحتكاكات

ماذا تستنتج؟

نستنتج من البيان أنه في حالة الاحتكاكات تكون الاهتزازات حرة دورية غير متخامدة دورها الذاتي T_0 .

- نضع الجسم S داخل المحلول ونعيد التجربة السابقة فيظهر على شاشة راسم الاهتزازات البيان المقابل.



نظام شبه دوري

ماذا تلاحظ؟

نلاحظ تناقص السعة تدريجيا نحو قيمة معدومة.

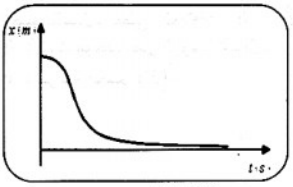
ماذا تستنتج؟

نستنتج أن الاهتزازات أصبحت شبه دورية.

قارن بين شبه الدور T مع الدور الذاتي T_0 .

T يختلف عن T_0 أي: $(T \neq T_0)$

- نثبت الجسم S_1 في نهاية السلك بحيث تصبح الاحتكاكات أكثر فعالية، ونعيد نفس العمل السابق، فنحصل على البيان المقابل.



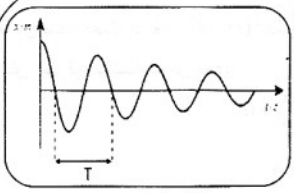
نظام لا دوري حرج

من خلال البيان هل تهتز الجملة؟ ماذا نقول عن هذا النظام؟

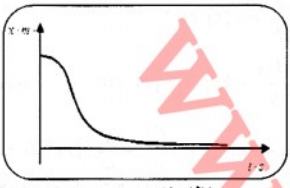
الجملة لا تهتز(عدم وجود اهتزازات)، نقول عن هذا النظام إنه لا دوري حرج.

www.bacdz.com

نتيجة



نظام شبه دوري


نظام لا دوري حرج

الاهتزازات المتخامدة: إذا كانت قوة الاحتكاكات المطبقة على الجسم غير مهملة، فإن سعة الاهتزازات تتناقص مع الزمن، ونقول إن الاهتزازات تتخامد.

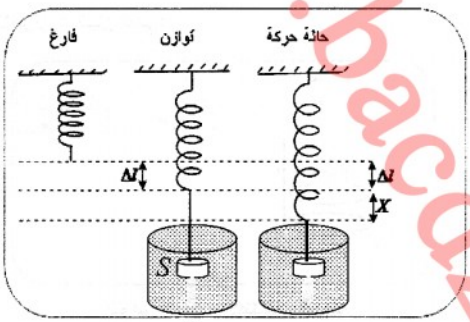
حالة الاحتكاكات ضعيفة: يكون التخامد ضعيفا أي تتناقص سعة الاهتزازات تدريجيا خلال الزمن، وحركة نواس المرن تكون شبه دورية وقيمة شبه الدور T يقترب من قيمة الدور الذاتي T_0 أي: $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

حالة الاحتكاكات كبيرة جدا: عندما تكون الاحتكاكات كبيرة جدا فإن النواس المرن لا يهتز ونحصل على النظام لا دوري حرج.

يزداد تخامد الاهتزازات كلما تزايدت فعالية الاحتكاكات

www.bacdz.com

المعادلة التفاضلية(حالة الاحتكاكات المائعة)



احتكاكات مائعة

لدينا النواس المقابل، نهمل كتلة النابض، وندرس الجسم (S) الذي نعتبره صلبا ونقطيا، نختار المعلم $(O,\vec{i})$.

في حالة التوازن: عندما نعلق الجسم (S) في نابض يستطيل بمقدار Δl ثم يتوازن (نحصل على التوازن)، بحيث يكون الجسم (S) داخل السائل، وبالتالي يتأثر بالقوى التالية:

$\vec{P}$: ثقل الجسم.

$\vec{F}$: توتر النابض (نعبر بـ: $\vec{F_0}$ عن النابض في حالة التوازن).

$\vec{\Pi}$: دافعة أرخميدس $\left(\vec{\Pi} = -\rho V\vec{g}\right)$ حيث:

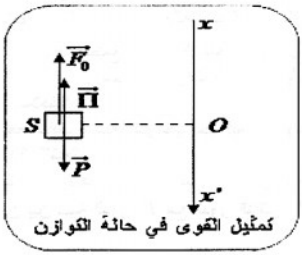
V : (حجم الجسم S).

ρ : (الكتلة الحجمية للسائل).

عند التوازن: $\vec{P} + \vec{F_0} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ أي $\sum \vec{F_{ext}} = \vec{0}$

بالإسقاط على المحور $(x'Ox)$ نجد :

$P - k\Delta l - \rho V g = 0$ أي: $P = k\Delta l + \rho V g$



تمثيل القوى في حالة التوازن

عند الاهتزاز (في حالة الحركة): نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه بمقدار X ونتركه بدون سرعة ابتدائية فيهتز، وبالتالي يخضع لقوة إضافية ناتجة عن احتكاك الجسم بالسائل، تعطى بالعلاقة: $\vec{f} = -h\vec{v}$ حيث:

h : ثابت موجب يميز لزوجة السائل.

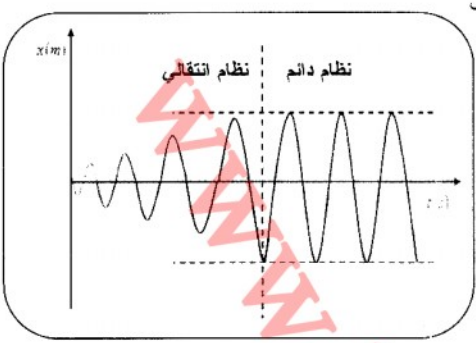
v : سرعة الجسم (S).

تغذية الاهتزازات الميكانيكية:

عند ترك جملة ميكانيكية تهتز، فبعد مدة زمنية نلاحظ أنها تتوقف عن الجركة، فنقول أن حركتها تخامدت(يمكن التحقق من ذلك بواسطة نواس مرن في المخبر)، فسبب التخامد يعود إلى وجود قوى معيقة للحركة تؤثرعلى حركة الجملة الميكانيكية، فتفقد طاقة إلى الوسط الخارجي ويظهر ذلك من خلال تناقص تدريجي لسعة الاهتزازات حتى تنعدم.

ومن أجل المحافظة على سعة الاهتزازات ثابتة يجب تعويض بشكل مستمر كل الطاقة الضائعة ويتم ذلك بواسطة جمل مغذية (أجهزة خاصة) مثل النابض الحلزوني في بعض الساعات اليدوية أو استعمال ثقل مضاد في حركة نواس ساعة حائطية.

- أثناء تغذية الاهتزازات نحصل على جملة ميكانيكية مهتزة مغذاة غير متخامدة وفق نظامين:



تغذية الاهتزازات

نظام إنتقالي: يكون في بداية الاهتزازات، وتزداد قيمة الطاقة المعوضة تدريجيا على حسب مقدار الطاقة الضائعة، ويظهر ذلك في البيان من خلال التزايد التدريجي لسعة الاهتزازات الجملة الميكانيكية.

الجملة الميكانيكية في هذا النظام تهتز بواسطة طاقتها والطاقة المعوضة.

نظام دائم: يكون عند فقدان الجملة الميكانيكية كل طاقتها وتصبح الجملة تهتز بواسطة الطاقة المعوضة فقط، حيث تكون قيمة هذه الطاقة في النظام ثابتة لذلك تظهر في البيان سعة الاهتزازات ثابتة.

- عند تغذية الاهتزازات في النواس المرن الأفقي(أي تعويض له الطاقة الضائعة) يصبح يهتز وفق المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = 0$ وحلها من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

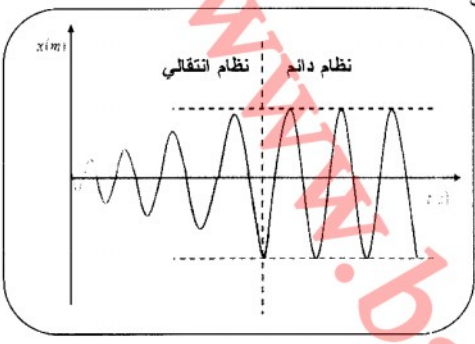
www.bacoz.com

تغذية الاهتزازات الميكانيكية

عند ترك جملة ميكانيكية تهتز، فبعد مدة زمنية نلاحظ أنها تتوقف عن الحركة، فنقول أن حركتها تخامدت(يمكن التحقق من ذلك بواسطة نواس مرن في المخبر)، فسبب التخامد يعود إلى وجود قوى معيقة للحركة تؤثرعلى حركة الجملة الميكانيكية، فتفقد طاقة إلى الوسط الخارجي ويظهر ذلك من خلال تناقص تدريجي لسعة الاهتزازات حتى تنعدم.

ومن أجل المحافظة على سعة الاهتزازات ثابتة يجب تعويض بشكل مستمر كل الطاقة الضائعة ويتم ذلك بواسطة جمل مغذية (أجهزة خاصة) مثل النابض الحلزوني في بعض الساعات اليدوية أو استعمال ثقل مضاد في حركة نواس ساعة حائطية.

- أثناء تغذية الاهتزازات نحصل على جملة ميكانيكية مهتزة مغذاة غير متخامدة وفق نظامين:



تغذية الاهتزازات

نظام إنتقالي: يكون في بداية الاهتزازات، وتزداد قيمة الطاقة المعوضة تدريجيا على حسب مقدار الطاقة الضائعة، ويظهر ذلك في البيان من خلال التزايد التدريجي لسعة الاهتزازات الجملة الميكانيكية.

الجملة الميكانيكية في هذا النظام تهتز بواسطة طاقتها والطاقة المعوضة.

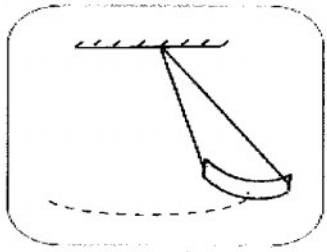
نظام دائم: يكون عند فقدان الجملة الميكانيكية كل طاقتها وتصبح الجملة تهتز بواسطة الطاقة المعوضة فقط، حيث تكون قيمة هذه الطاقة في النظام ثابتة لذلك تظهر في البيان سعة الاهتزازات ثابتة.

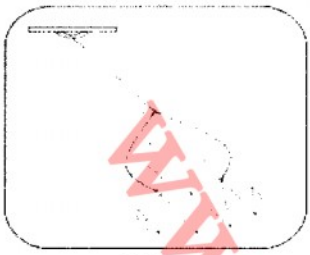
- عند تغذية الاهتزازات في النواس المرن الأفقي(أي تعويض له الطاقة الضائعة) يصبح يهتز وفق المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = 0$ وحلها من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

www.bacdz.com

النواس الثقالي

النواس الثقالي في الحياة اليومية


الأرجوحة


ممخضة

www.baadz.com

- **شيئ من التاريخ:**

عاش غاليلي غاليلو في الفترة الممتدة ما بين (1642م-1564م) وهو عالم فيزيائي وفلكي ايطالي، من الأوائل الذين وضفوا الرياضيات لشرح الظواهر الفيزيائية ويعود له الفضل في إعطاء الرياضيات دورا أساسيا في نمو القوانين الفيزيائية وصياغتها، وهو الذي شبه الكون بكتاب كبير مفتوح أمامنا لغته الرياضيات، ومن مؤسسي الطريقة التجريبية في العلوم الفيزيائية.

لما كان عمره 19 سنة، أي في عام 1583م خلال تواجده في كنيسة (cathédrale de Pise) شاهد ثريتين كبيرتين متماثلتين معلقتين بسلسلتين متماثلتين تهتزان بنفس الدور، بالرغم من اختلافهما في الكتلة.

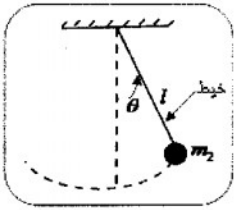
استوحى من هذه المشاهدة فكرة لدراسة النواس الثقالي.

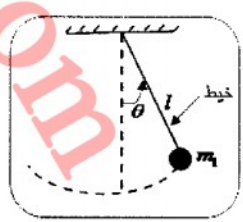
للمزيد عن غاليلي غاليلو:

- http://chronomath.irme.univ.fr/ chronomath/galilee.html
- http://galileo.imss.fireze.it/museo/b/egalilg.html
- http ://xavier.info/coursmath/bio/galilee.htm

تجربة غاليلي غاليلو

أخذ غاليلي كرتين الأولى من الرصاص كتلتها m_1 والثانية من الفلين كتلتها m_2 حيث: $m_1 > 100m_2$ (m_1 أكبر بكثير من m_2 (100 مرة)) وعلق كلا منهما بخيطين رقيقين لهما نفس الطول (l) وثبت كلا منهما من الأعلى، أزاحهما عن وضعهما الشاقولي وتركهما لحالهما في نفس اللحظة.





ملاحظة غاليلي:

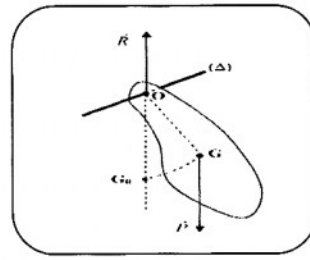
لاحظ غاليلي أن الكرتين تنجز 100 اهتزازة كاملة خلال نفس الزمن، أي أن الكرتين تهتزان بنفس الدور.

ماذا تستنتج؟

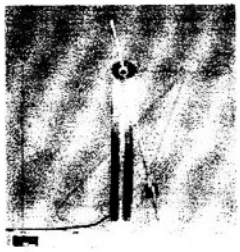
نستنتج من هذه التجربة أن دور اهتزازات هذا النواس لا يتعلق بالكتلة (لا يتأثر بكتلة الكرية).

تعريف النواس الثقالي

النواس الثقالي هو كل جملة بإمكانها أن تهتز حول محور أفقي (Δ) ثابت لا يمر من مركز عطالتها.



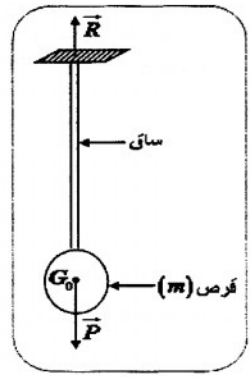
النواس الثقالي



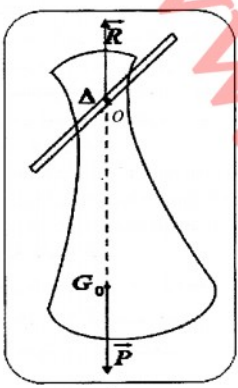
النواس الثقالي في المخبر

وضع التوازن المستقر للنواس الثقالي

وضع التوازن المستقر للنواس الثقالي هو الذي يكون فيه مركز عطالته G أسفل وعلى الشاقول المار من نقطة تعليق النواس (O).



وضع التوازن



وضع التوازن

دراسة اهتزازات نواس ثقالي

- **الدراسة التجريبية:**
- **تجربة ـ1:**

نزيح النواس الثقالي عن وضع توازنه المستقر بزاوية θ ونتركه لحاله.

- **الملاحظة:**

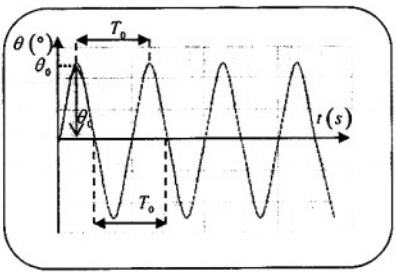
نلاحظ أن النواس الثقالي يهتز اهتزازات حرة حول شاقول نقطة تعليقه.

- **تجربة ـ2:**

نعيد التجربة السابقة أي نزيح النواس الثقالي عن وضع توازنه المستقر بزاوية θ ونتركه لحاله، وذلك في حالة عدم وجود الاحتكاكات (التخامد ضعيف جدا) وبواسطة تجهيز مناسب (راسم اهتزازات بذاكرة أو نظام إلتقاط التسجيل) نحصل على منحنى تطور الفاصلة الزاوية θ بدلالة الزمن.

- **الملاحظة:**

نلاحظ من خلال المنحنى أن النواس تكون له حركة دورية أي الاهتزازات دورية.



مخطط الفاصلة الزاوية

www.bacdz.com

- **نتيجة:**

حركة النواس الثقالي دورية في حالة عدم وجود الاحتكاكات.

- **تجربة ــ3:**
- نكرر التجربة السابقة ولكن في هذه المرة الاحتكاكات موجودة:

أ- احتكاكات مائعة (هواء، سائل):

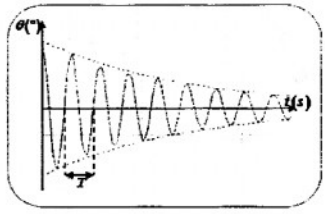
نسجل المنحنى الأتي.

في هذه الحالة تكون الاهتزازات شبه دورية، تتناقص سعتها بشكل غير خطي.

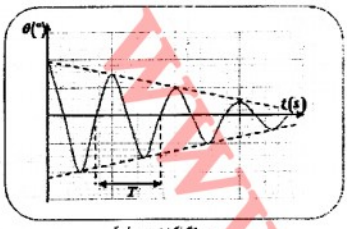
ب- احتكاكات صلبة (احتكاكات عل مستوى محور الدوران)

نسجل المنحنى الأتي.

في هذه الحالة تكون الاهتزازات شبه دورية، تتناقص سعتها بشكل خطي.



تخامد في وسط مائع

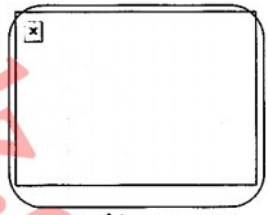


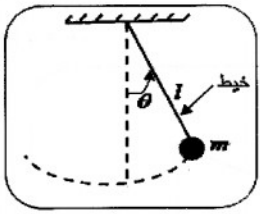
احتكاكات صلبة

www.bacdz.com

النواس البسيط

تعريفه: يتألف من خيط عديم الامتطاط (غير مرن) طوله l مهمل الكتلة معلق بنهايته الحرة جسم نقطي m أبعاده مهملة بالنسبة لطول الخيط، ويهتز بفعل ثقله.


النواس البسيط في المخبر

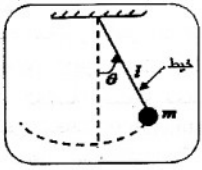


نواس بسيط

حالة اهتزازات حرة غير متخامدة

- **الدراسة التجريبية للعوامل المؤثرة على دور النواس البسيط:**
- **تأثير السعة الزاوية:**
- **تجربة:**

نزيح النواس عن وضع توازنه بسعة زاوية 2° ثم نتركه لحاله ونقيس بواسطة ميقاتية زمن 10 اهتزازات كاملة ثم نحسب زمن الاهتزازة الواحدة (الدور). نكرر التجربة من أجل سعات زاوية متزايدة وندون النتائج في الجدول التالي:



نواس بسيط

$\theta(°)$	2	5	10	15	20	30	45	60
$T_0(s)$	1.60	1.60	1.60	1.61	1.61	1.63	1.66	1.71

- **ملاحظة:**

نلاحظ من أجل سعات زاوية أقل من 10° أن قيمة الدور ثابتة، ومن أجل سعات زاوية أكبر من 10° أن قيمة الدور تزداد.

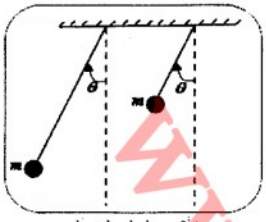
- **نتيجة:**

دور الاهتزازات مستقل عن السعة الزاوية (من أجل سعات صغيرة).

تأثير طول الخيط

- **دراسة تجريبية:**

نحافظ على السعة صغيرة ونكرر التجربة السابقة من أجل عدة قيم متزايدة لطول الخيط وندون النتائج في الجدول التالي:



تأثير طول الخيط

$l(m)$	$T_0(s)$	$\sqrt{l}\left(m^{\frac{1}{2}}\right)$
0.60	1.6	
0.80	1.8	
1.0	2.0	
1.2	2.2	
1.4	2.4	

1- أكمل الجدول.

2- أرسم البيان $T_0 = f\left(\sqrt{l}\right)$.

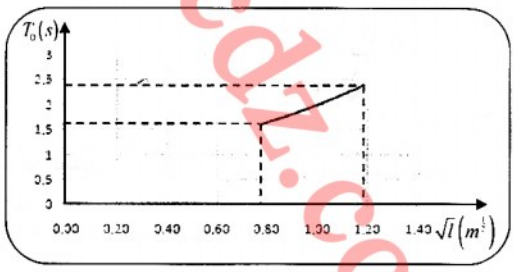
3- تحقق أن T_0 يتناسب طرديا مع $\sqrt{l}$.

الحل:

1- الجدول:

$\sqrt{l}\left(m^{\frac{1}{2}}\right)$	0.77	0.89	1	1.09	1.18

2- البيان $T_0 = f\left(\sqrt{l}\right)$:



3- البيان خط مستقيم معادلته من الشكل $T_0 = C^{te}\sqrt{l}$ حيث C^{te} ميل المستقيم وبالتالي T_0 يتناسب طرديا مع $\sqrt{l}$.

- **نتيجة:**

تزداد قيمة دور الاهتزازات كلما ازداد طول الخيط.

قيمة دور الاهتزازات للنواس البسيط T_0 تتناسب طرديا مع الجذر التربيعي لطول خيط النواس أي: $T_0 = C^{te}\sqrt{l}$.

تأثير الجاذبية: (استعمال محاكاة)

- **لشحن المحاكاة: http://wontu.club.fr**

نجعل طول النواس ثابتا $l = 0.72m$ والسعة صغيرة $\theta = 6°$، ونكرر التجربة السابقة في أماكن مختلفة باستعمال المحاكاة.

نسجل النتائج في الجدول التالي:

www.bacdz.com

المكان	الأرض	المريخ	سطح القمر
$g(m/s^2)$	9.81	3.72	1.6
$T_0(s)$	1.70	2.76	4.21
$\frac{1}{\sqrt{g}}$			

1- أكمل الجدول.

2- أرسم البيان $T_0 = f\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)$.

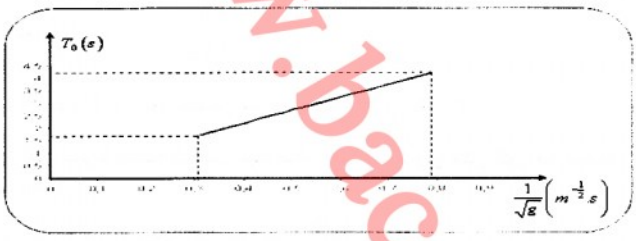
3- ماذا تستنتج؟

الحل:

1- الجدول:

$\frac{1}{\sqrt{g}}$	0.31	0.51	0.79

2- البيان $T_0 = f\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)$:



3- نلاحظ من الجدول كلما ازدادت الجاذبية g تتناقص قيمة دور الاهتزازات T_0.

- نستنتج أن T_0 يتناسب عكسيا مع $\sqrt{g}$.
- من البيان نستنتج أن قيمة دور الاهتزازات T_0 تزداد كلما ازداد المقدار $\frac{1}{\sqrt{g}}$ أي: $T_0 = C^{te}\sqrt{\frac{1}{g}}$

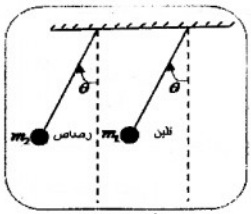
تأثير الكتلة

- **تجربة:**

نجعل طول الخيط ثابت($l = 0.72m$) والسعة صغيرة $\theta = 6°$ ، ونكرر التجربة السابقة في نفس المكان $\left(g = 9.81m/s^2\right)$ من أجل عدة كتل مختلفة.

نسجل النتائج في الجدول التالي:

الكتلة $m(Kg)$	الدور $T_0(s)$
0.2	1.70
0.3	1.70
0.4	1.70
0.5	1.70



تأثير الكتلة

www.bacdz.com

1- قارن قيم الدور المتحصل عليها.
2- ماذا تستنتج؟

الحل:

1- قيم دور الاهتزازات المتحصل عليها متساوية.
2- نستنتج أن قيمة دور الاهتزازات T_0 للنواس البسيط لا تتعلق بالكتلة m.

نتيجة

الدور الذاتي T_0 للنواس البسيط لا يتعلق بالكتلة ومتناسب طرديا مع طول الخيط ويتناسب عكسيا مع قيمة الجاذبية.

عبارة الدور الذاتي T_0

- نبين أن $T_0 = C^{te}\sqrt{\frac{l}{g}}$ باستعمال التحليل البعدي:

  - طول الخيط l يعبر عنه بـ L أي: $[l] = L$
  - الجاذبية g يعبر عنها بـ $L.T^{-2}$ أي: $[g] = L.T^{-2}$
  - C^{te} بدون بعد.

ومنه بعد $\frac{l}{g}$ هو: $\left[\frac{l}{g}\right] = \frac{L}{L.T^{-2}} = T^2$

إذا بعد $\sqrt{\frac{l}{g}}$ هو: $\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = T$

بما أن $T = T_0$ إذا الدور متجانس مع الزمن ومنه: $T_0 = C^{te}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

- نكرر نفس التجربة السابقة باستعمال خيط طوله $l = 0.72m$ وفي مكان تكون فيه الجاذبية $g = 9.81m/s^2$ نجد: $T_0 = 1.70s$

لدينا: $T_0 = C^{te}\sqrt{\frac{l}{g}}$ ومنه: $C^{te} = \frac{T_0}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1.70}{\sqrt{\frac{0.72}{9.81}}} = 6.28 = 2\pi$

إذا: $C^{te} = 2\pi$

الدور الذاتي للنواس البسيط من أجل سعات صغيرة يعطى بالعلاقة :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ملاحظات

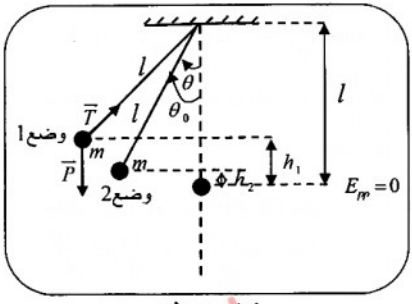
- دور النواس البسيط من أجل سعات معتبرة يعطى بالعلاقة: $T = T_0\left(1+\frac{\theta^2}{16}\right)$ حيث $\theta(rad)$

أي: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\theta^2}{16}\right)$.

- من أجل سعات صغيرة دور النواس البسيط يعطى بالعلاقة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ويبقى ثابتا، نقول بأن الاهتزازات متواقتة (الاهتزازات بنفس الدور)

www.bacdz.com

المعادلة التفاضلية:



نواس بسيط

- الجملة المدروسة: (كرية، أرض).
- المعلم المختار: معلم مرتبط بالأرض.
- نزيح الجملة عن وضع توازنها بزاوية θ_0 (وضع1) ونتركها بدون سرعة.
- نجد الحصيلة الطاقوية بين الوضع1 و الوضع2 عندما تصنع الجملة زاوية θ مع الشاقول وذلك حسب مبدأ إنحفاظ الطاقة.

$$E_{PP_1} + E_{C_1} + W_T = E_{PP_2} + E_{C_2}$$

$$mgh_1 + 0 + 0 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2(t)$$

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv^2(t)$$

$$mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}mv^2(t)$$

ومنه: $2g(h_1 - h_2) = v^2(t) \ldots\ldots (1)$

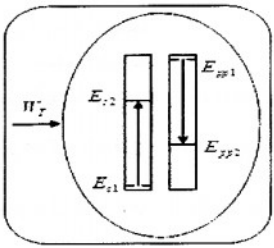
لاحظ من الشكل أن:

$$\begin{cases} \cos\theta_0 = \dfrac{l - h_1}{l} \\ \cos\theta = \dfrac{l - h_2}{l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l\cos\theta_0 = l - h_1 \\ l\cos\theta = l - h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = l - l\cos\theta_0 \\ h_2 = l - l\cos\theta \end{cases}$$

ومنه: $h_1 - h_2 = (l - l\cos\theta_0) - (l - l\cos\theta) \Rightarrow h_1 - h_2 = -l\cos\theta_0 + l\cos\theta$

أي: $h_1 - h_2 = l(\cos\theta - \cos\theta_0)$

بالتعويض $(h_1 - h_2)$ في العلاقة (1) نجد: $2gl(\cos\theta - \cos\theta_0) = v^2(t)$



نشتق الطرفين بالنسبة للزمن:

$$\frac{d}{dt}\left[2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)\right] = \frac{d}{dt}\left[v^2(t)\right]$$

$$2gl\frac{d}{dt}\left[(\cos\theta - \cos\theta_0)\right] = \frac{d}{dt}\left[v^2(t)\right]$$

$$2gl\left[\frac{d(\cos\theta)}{dt} - \frac{d(\cos\theta_0)}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[v^2(t)\right]$$

لاحظ طريقة الاشتقاق

- بما أن θ متغير فإن: $\dfrac{d(\cos\theta)}{dt} = -\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}$
- بما أن θ_0 مقدار ثابت فإن: ثابت $\cos\theta_0 = C^{te}$

ومنه: $\dfrac{d(C^{te})}{dt} = 0$ إذا: $\dfrac{d(\cos\theta_0)}{dt} = 0$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(v \times v)}{dt}$$

لدينا: $$\frac{dv^2}{dt} = \left[\left(\frac{dv}{dt} \times v\right) + \left(v \times \frac{dv}{dt}\right)\right]$$

$$\frac{dv^2}{dt} = 2v\frac{dv}{dt}$$

- وفق مشتق الدالتين $(f \times g)$:

$$(f \times g)' = (f' \times g) + (f \times g')$$

نضع: $\begin{cases} v^2 = v \times v \\ v = f \\ v = h \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} (f \times g)' = (f' \times g) + (f \times g') \\ (v \times v)' = \left(\dfrac{dv}{dt} \times v\right) + \left(v \times \dfrac{dv}{dt}\right) = 2v\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$

www.bacdz.com

$$2gl\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+0\right)=2v(t)\frac{dv}{dt}.....(2)$$

لدينا: $v(t)=l\frac{d\theta}{dt}.....(3)$ ومنه: $\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left[l\frac{d\theta}{dt}\right]$

$$\frac{dv}{dt}=l\frac{d}{dt}\times\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow\frac{dv}{dt}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}.....(4)$$

نعوض (3) و (4) في العلاقة (2) نجد:

$$-2gl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=2\times l\frac{d\theta}{dt}\times l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-gl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=l^2\frac{d\theta}{dt}\times\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-g\sin\theta(t)=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta(t)=0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تميز حركة دورية غير جيبية.

من أجل سعات صغيرة $(\theta<10°)$ نكتب $\sin\theta\approx\theta(rad)$ نجد: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta(t)=0.....(5)$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ومتجانسة تميز حركة دورانية جيبية وحلها من الشكل: $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega_0t+\varphi_0)$

حيث:

θ : الفاصلة الزاوية (المطال الزاوي).

θ_0 : السعة الزاوية (المطال الأعظمي).

ω_0 : النبض الذاتي.

$(\omega_0t+\varphi_0)$: الصفحة.

φ_0 : الصفحة الابتدائية.

- نشتق المعادلة الزمنية $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega_0t+\varphi_0)$ مرتين بالنسبة للزمن نجد:

السرعة الزاوية: $\frac{d\theta}{dt}=-\theta_0\omega_0\sin(\omega_0t+\varphi_0)$.

التسارع الزاوي: $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0t+\varphi_0)$.

ومنه: $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0t+\varphi_0)\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega_0^2\theta(t)$.

إذا: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta(t)=0.....(6)$

بالمطابقة بين المعادلتين (5) و (6) نجد: $\omega_0^2=\frac{g}{l}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$

لدينا: $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

T_0 : هو الدور الذاتي للاهتزازات الحرة الغير متخامدة، وحدته الثانية (s).

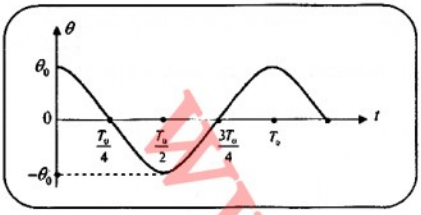
- **التواتر الذاتي للحركة** (f_0): $(f_0)=\frac{1}{T_0}=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$، وحدته الهرتز (Hz).

www.bacdz.com

- **مخططات الحركة:** للتبسيط نأخذ الصفحة الابتدائية $(\varphi_0 = 0)$

- **مخطط الفاصلة الزاوية** $\theta(t)$:

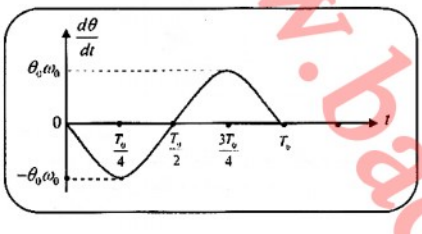
عبارة الفاصلة الزاوية: $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$



$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\theta(rad)$	θ_0	0	$-\theta_0$	0	θ_0

- **مخطط السرعة الزاوية** $\frac{d\theta}{dt}$:

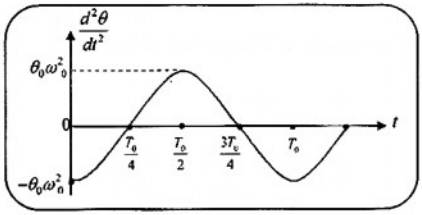
عبارة السرعة الزاوية: $\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\omega_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$



$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\frac{d\theta}{dt}$	0	$-\theta_0\omega_0$	0	$\theta_0\omega_0$	0

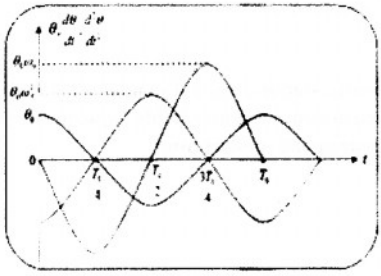
- **مخطط التسارع الزاوي** $\frac{d^2\theta}{dt^2}$:

عبارة التسارع الزاوي: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega_0^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$



$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$-\theta_0\omega_0^2$	0	$\theta_0\omega_0^2$	0	$-\theta_0\omega_0^2$

مخططات الحركة (مخطط الفاصلة الزاوية و السرعة الزاوية و التسارع الزاوي)



www.bacdz.com

حالة اهتزازات حرة متخامدة

- **تجربة ـ1:**

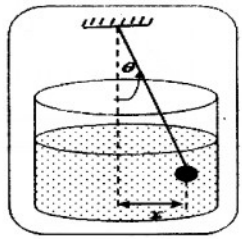
نضع كتلة النواس البسيط داخل مائع لزوجته ضعيفة (ماء) ونقوم بإزاحته عن وضع توازنه المستقر، كما يبين الشكل الأتي.

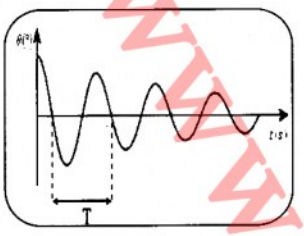
- **الملاحظة:**

النواس يهتز وسعة الاهتزازات تتناقص تدريجيا مع الزمن حتى تنعدم.

- **نتيجة:**

الاهتزازات شبه دورية ذات دور T ومتخامدة، نحصل على نظام شبه دوري.





نظام شبه دوري

- **تجربة ـ2:**

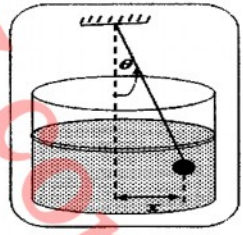
نعيد التجربة السابقة ولكن في هذه المرة نضع كتلة النواس البسيط داخل وسط مائع لزوجته معتبرة (الزيت) أي الاحتكاكات المائعة تكون فعالة، ونقوم بإزاحة النواس البسيط عن وضع توازنه المستقر، كما يبين الشكل الأتي.

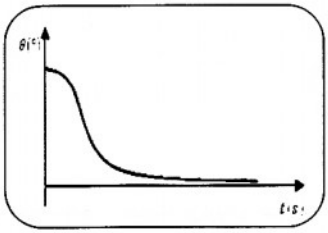
- **الملاحظة:**

النواس لا يهتز.

- **نتيجة:**

الاحتكاكات ذات قيمة كبيرة، النواس لا يهتز ويكون النظام لا دوري حرج.





نظام لا دوري حرج

للمزيد

محاكاة نواس بسيط غير متخامد: http ://www.walter-fendt.de/ph11f/pendulum_f.htm

محاكاة نواس بسيط متخامد: http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant.html

www.hacdz.com

العبارات الحرفية

النواس المرن

- حالة اهتزازات حرة غير متخامدة
- قوة الإرجاع: $\left\|\overrightarrow{F}\right\| = k.|X|$
- المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$
- نبض الحركة (الذاتي): $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- الدور الذاتي: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- التواتر الذاتي: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$
- الفاصلة: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
- السرعة: $\frac{dx}{dt} = -X\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$
- التسارع: $\frac{d^2x}{dt^2} = -X\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

النواس البسيط

- حالة اهتزازات حرة غير متخامدة
- المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0$
- من أجل سعات صغيرة: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$
- النبض الذاتي: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
- الدور الذاتي: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
- التواتر الذاتي: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$
- الفاصلة الزاوية: $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
- السرعة الزاوية: $\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$
- التسارع الزاوي: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

www.bacoz.com

التمرين ــ 1 ★

يتألف نواس مرن أفقي من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة وجسم (S) كتلته $m = 1Kg$.

تتميز حركته بالمعادلة التفاضلية التالية: $\frac{d^2x}{dt^2} + 100x(t) = 0$

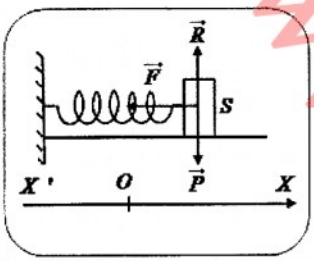
1- هل الاهتزازات الحاصلة حرة ؟ لماذا؟
2- أحسب نبض الاهتزازات.
3- أحسب قيمة ثابت مرونة النابض.

الحل-1 :

1- الاهتزازات الحاصلة حرة، لأن:

- المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـــ x ومتجانسة. حلها من الشكل : $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
- الجملة (جسم، نابض) لا تخضع لمؤثر خارجي وبالتالي لا تتلقى طاقة من الوسط الخارجي.

2- نبض الاهتزازات: نطبق قانون نيوتن الثاني على الجسم (S) فنجد: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$



$\vec{P}$: ثقل الجسم (S).

$\vec{F}$: توتر النابض.

$\vec{R}$: فعل المستوي.

لدينا: $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ لأن $\vec{P}$ و $\vec{R}$ متساويتان في القيمة ومختلفتان في الاتجاه.

بالإسقاط على المحور (XOX') نجد: $-kx(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$ ومنه:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad .....(1)$$

وهي معادلة تفاضلية حلها من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

باشتقاق هذه المعادلة الزمنية بالنسبة للزمن مرتين نجد: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ أي: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t)$

ومنه: $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad .....(2)$$

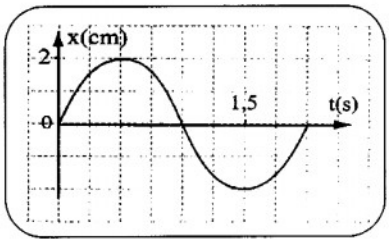
بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة: $\frac{d^2x}{dt^2} + 100x(t) = 0$ نجد: $\omega_0^2 = 100$ ومنه: $\omega_0 = 100rad/s$

3- قيمة ثابت مرونة النابض:

بمطابقة المعادلتين (1) و (2) نجد: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه: $k = m \times \omega_0^2$ علما أن: $\omega_0^2 = 100rad/s$ و $m = 1Kg$

أي: $k = 100N/m$

التمرين ــ 2 ★



في الحياة اليومية أمثلة كثيرة عن الجمل المهتزة.

1- أذكر مثالين مختلفين وبين الفرق بينهما.
2- في البيان المقابل لدينا تغيرات الفاصلة بدلالة الزمن بالنسبة لجسم مهتز.

حدد من أجل هذا المهتز:

أ- سعة الحركة.
ب- الدور.
ج- التواتر.
د- السرعة العظمى.

www.bacdz.com

الحل-2 :

1- مثالين مختلفين عن الجمل المهتزة في الحياة اليومية:
المثال الأول: رقاص ساعة الحائط، إذا ترك يهتز لحاله فهو ينجز اهتزازات ميكانيكية حرة غير متخامدة، فهي مغذاة إما بطريقة ميكانيكية أو بطريقة كهربائية لتعويض الطاقة الضائعة.
المثال الثاني: الأرجوحة، عندما نزاح عن وضع توازنها وتترك لحالها تقوم بحركة اهتزازية حرة متخامدة.

2- من البيان نحدد قيمة:

أ- سعة الحركة: أكبر قيمة للفاصلة x، أي: $X = 2cm = 2\times10^{-2}m$

ب- الدور: لدينا: $\frac{3T}{4} = 1.5$ ومنه: $T = 2s$.

ج- التواتر: $f = \frac{1}{T} = 0.5Hz$.

د- السرعة العظمى: لدينا عبارة السرعة $v(t) = -\omega_0 X\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$، تكون السرعة أعظمية من أجل:

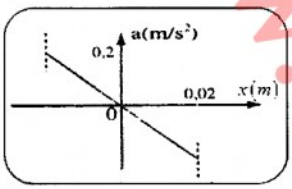
$\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \pm1$ وبالتالي: $|V_{max}| = \omega_0 X$ حيث: $\omega_0 = 2\pi f$

ومنه: $|V_{max}| = 6.28\times10^{-2}m/s$ أي: $|V_{max}| = 2\pi fX = 2\pi\times0.5\times2\times10^{-2}$

التمرين ــ 3 ★

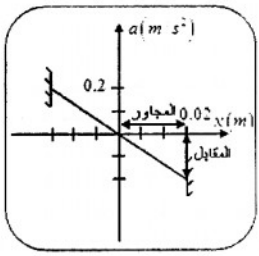
ينتقل جسم صلب على خط مستقيم.
يمثل البيان المقابل تغيرات تسارع حركته (a) بدلالة الفاصلة (x):

1- بين أن الجسم يهتز بحرية دون إخماد.
2- أحسب دور اهتزازاته.
3- عند اللحظة $t = 0$ كانت فاصلة المتحرك عظمى موجبة.
مثل تغيرات تسارع حركته بدلالة الزمن.



الحل-3:

1- تبيان أن الجسم يقوم بحركة اهتزازية حرة غير متخامدة:
العبارة البيانية: محور الترتيب يمثل التسارع $a(t)$ ومحور الفواصل يمثل الفاصلة $x(t)$، أي: $a(t) = f(x)$.
البيان خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل: $a(t) = Cx(t)$،



C: ميل المستقيم، $C = tg\alpha = \frac{-0.2-0}{0.02-0} = -10$

ومنه: $a(t) = -10x(t)$

و لدينا: $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ أي: $\frac{d^2x}{dt^2} = -10x(t)$

إذا: $\frac{d^2x}{dt^2} + 10x(t) = 0.....(1)$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـــ x، لحركة اهتزازية حرة غير متخامدة.

2- الدور: المعادلة التفاضلية السابقة حلها من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$

باشتقاق حل المعادلة التفاضلية بالنسبة للزمن مرتين نجد: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ أي: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t)$

ومنه: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0.....(2)$

بالمطابقة بين المعادلتين (1) و (2) نجد: $\omega_0^2 = 10$ وبوضع $\pi^2 \approx 10$ أي: $\omega_0 = \pi rad/s$

ومنه: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$ إذا: $T_0 = 2s$

www.bacdz.com

3- تمثيل تغيرات التسارع بدلالة الزمن $a = f(t)$:

بما أن حل المعادلة التفاضلية من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

عند $t = 0$ لدينا: $x(0) = X\cos(\omega_0(0) + \varphi_0)$ ومنه: $x(0) = X\cos\varphi_0$.....(3)

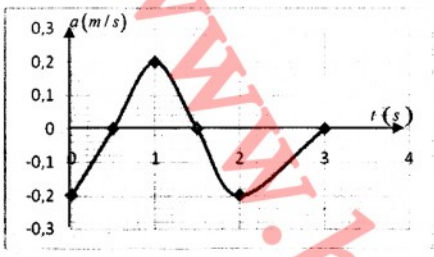
من الشروط الابتدائية لدينا عند اللحظة $t = 0$ فاصلة المتحرك أعظمية موجبة أي: $x(0) = X$.....(4)

ومن العلاقة (3) و(4) لدينا: $\begin{cases} x(0) = X\cos\varphi_0 \\ x(0) = X \end{cases}$ نستنتج أن: $\cos\varphi_0 = 1$ وبالتالي $\varphi_0 = 0$

سعة الحركة هي أكبر قيمة للفاصلة x أي: $X = 2cm = 0.02m$ بالتعويض في المعادلة الزمنية $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ نجد: $x(t) = 0.02m$

نشتق المعادلة $x(t)$ مرتين بدلالة الزمن نجد:

$a(t) = -\omega_0^2 X\cos\pi t$ أي: $a(t) = -0.2\cos\pi t$



$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3}{2}T_0$	T_0
	0	0.5	1	1.5	2
$a(m/s^2)$	−0.2	0	+0.2	0	−0.2

الطريقة الثانية (طريقة استنتاجية) :

بما أن $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ و $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t)$ نستنتج أن :

- تسارع الحركة يتناسب طرديا مع الفاصلة ويعاكسها في الإشارة، أي عندما تكون الفاصلة موجبة يكون التسارع سالبا والعكس صحيح.
- يكون التسارع أعظميا عندما تكون الفاصلة أعظمية أي:

$$x(t) = \pm X \Rightarrow a(t) = \pm\omega_0^2 X$$
$$x(t) = +X \Rightarrow a(t) = -\omega_0^2 X$$
$$x(t) = -X \Rightarrow a(t) = +\omega_0^2 X$$

- يكون التسارع معدوما عند المرور بوضع التوازن (O) أي عندما تكون الفاصلة $x(t) = 0$.

ومنه نجد الجدول التالي:

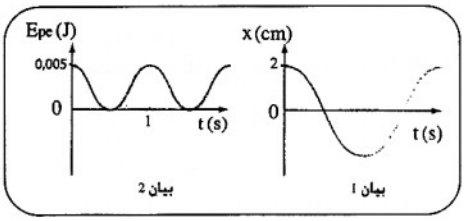
$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3}{2}T_0$	T_0
	0	0.5	1	1.5	2
$x(m)$	$+X$	0	$-X$	0	$+X$
	0.02	0	−0.02	0	0.02
$a(m/s^2)$	$-\omega_0^2 X$	0	$+\omega_0^2 X$	0	$-\omega_0^2 X$
	−0.2	0	+0.2	0	−0.2

ونحصل على نفس البيان $a = f(t)$

www.bacdz.com

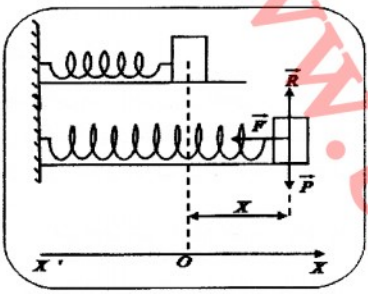
التمرين ــ 4 ★★

يتألف نواس مرن أفقي من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة وجسم (S) كتلته m.
يمثل البيان (1) تغيرات فاصلة مركز عطالة الجسم أثناء حركته $x = f(t)$
ويمثل البيان(2) تغيرات الطاقة الكامنة المرونية $E_{Pe} = f(t)$.



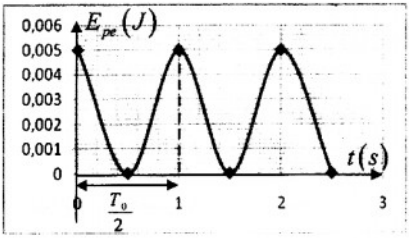
1- أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.
2- أكتب المعادلة الزمنية للحركة.
3- عبر عن الطاقة الكامنة المرونية بدلالة (t).
4- أوجد قيمتي : m, k.

الحل-4:



1- المعادلة التفاضلية: نستنتج من البيان (1) أن الاحتكاكات غير موجودة لأن سعة الاهتزازات بقيت ثابتة بمرور الزمن.
بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم (s) نجد:
$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ ولدينا: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$
بالإسقاط على محور الحركة $(X'OX)$ نجد: $-kx(t) = ma$
مع: $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ أي: $-kx(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$
بقسمة الطرفين على m نجد: $-\frac{k}{m}x(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$
ومنه: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ x حلها دالة جيبية بدلالة الزمن من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

2- كتابة المعادلة الزمنية للحركة:
المعادلة الزمنية للحركة من الشكل:
$x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.....(1)
سعة الحركة: من البيان (1) نستنتج قيمة السعة أي:
$X = 2cm = 2\times10^{-2}m$
نبض الحركة ω_0 : من البيان (2) نستنتج قيمة الدور T_0
أي: $\frac{T_0}{2} = 1$ ومنه: $T_0 = 2s$
لدينا: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi rad/s$



تعيين φ_0 : عند $t = 0$ لدينا: $x(0) = X$ أي السعة أعظمية موجبة وذلك من البيان (1) .
ومنه المعادلة الزمنية (1) تكتب على الشكل التالي: $X = X\cos(\omega_0(0) + \varphi_0)$ أي: $\cos\varphi_0 = 1$ ومنه: $\varphi_0 = 0$
إذا: $x(t) = 2\cos(\pi t)$.....cm أو $x(t) = 2\times10^2\cos(\pi t)$.....$m$

3- عبارة الطاقة الكامنة المرونية بدلالة الزمن $E_{Pe}(t)$:
$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2(t)$ حيث: $E_{Pe} = \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ ومنه: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

www.bacdz.com

4- قيمة ثابت المرونة k والكتلة m :

ثابت المرونة k :

من مخطط الطاقة (البيان(2))، لدينا: $E_{Pe(\max)} = 0.005J$.....(1)

ومن عبارة الطاقة، لدينا: $E_{Pe(\max)} = \frac{1}{2}kX^2$ مع: $X = 2\times10^{-2}m$ أي: $E_{Pe(\max)} = \frac{1}{2}k\left(2\times10^{-2}\right)^2$

$E_{Pe(\max)} = 2\times10^{-4}k$.....(3)

من (2) و(3) نجد: $0.005 = 2\times10^{-4}k$ أي: $k = \frac{0.005}{2\times10^{-4}} = 25N/m$

الكتلة m :

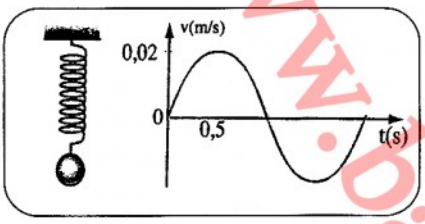
لدينا: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$، بتربيع الطرفين نجد: $T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$ ومنه: $m = \frac{kT_0^2}{4\pi^2}$ مع: $T_0 = 2s$

وبوضع $\pi^2 = 10$ نجد: $m = 2.5Kg$

التمرين ــ 5 ★★

يتألف نواس مرن شاقولي من نابض مرن ثابت مرونته (k) حلقاته غير متلاصقة مهمل الكتلة وجسم (S) كتلته $m = 200g$.

يمثل البيان المقابل تغيرات سرعة مركز عطالة الجسم (S) بدلالة الزمن.



1- من البيان عين اللحظة التي من أجلها يكون التسارع أعظميا موجبا ثم أوجد قيمته.

2- بين أن الطاقة الحركية العظمى للكتلة (m) هي: $4\times10^{-5}J$.

3- مثل تغيرات الطاقة الحركية $E_c(t)$ بدلالة الزمن t.

4- أوجد قيمة k.

الحل-5:

1- تعيين اللحظة التي من أجلها يكون التسارع أعظميا موجبا:

لدينا عبارة التسارع بدلالة الزمن $a(t) = -\omega_0^2X\cos(\omega_0t+\varphi_0)$، يكون التسارع أعظميا موجبا عندما يكون $\cos(\omega_0t+\varphi_0) = -1$ وبالتالي: $a(t)_{\max} = +\omega_0^2X$ و $x(t) = -X$ لأن $x(t) = X\cos(\omega_0t+\varphi_0)$

$\cos(\omega_0t+\varphi_0) = -1$ هذا يعني أن: $\sin(\omega_0t+\varphi_0) = 0$ وبالتالي: $v(t) = 0$، لأن:

$v(t) = -\omega_0X\sin(\omega_0t+\varphi_0)$

إذا التسارع أعظمي موجبا أي: $a(t)_{\max} = +\omega_0^2X$ عندما تكون $\begin{cases}v(t)=0\\x(t)=-X\end{cases}$

من البيان نجد أن السرعة تنعدم في اللحظات التالية: t=0 $t = \frac{T_0}{2} = 1s$, $t = T_0 = 2s$,

إذا السرعة تنعدم وتصبح بعد ذلك موجبة عند اللحظتين t=0 $t = T_0 = 2s$,

قيمة التسارع الأعظمي هي: $a(t)_{\max} = +X\omega_0^2$

من مخطط السرعة لدينا (1).....$V_{\max} = X\omega_0 = 0.02$ و $\frac{T_0}{4} = 0.5$ ومنه: $T_0 = 2s$

أي: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi rad/s$

www.bacdz.com

نعوض قيمة ω_0 في العلاقة (1) نجد: $X = \frac{0.02}{\omega_0} = \frac{0.02}{\pi}$

إذا: $a(t)_{max} = \omega_0^2 X = \pi^2 \times \frac{0.02}{\pi} = 6.28 \times 10^{-2} m/s^2$

2- تبيان أن الطاقة الحركية العظمى للكتلة (m) هي $4 \times 10^{-5} J$:

ومنه: $E_{c(max)} = \frac{1}{2} m V_{(max)}^2$ وبما أن $E_c = \frac{1}{2} m v^2(t)$

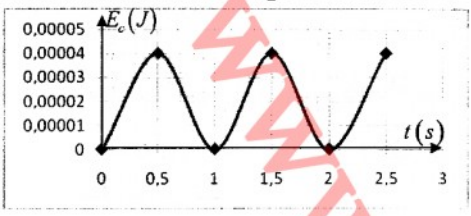
و $m = 200g = 0.2Kg$ و $V_{max} = X\omega_0 = 0.02 m/s$

أي: $E_{c(max)} = 4 \times 10^{-5} J$ إذا: $E_{c(max)} = \frac{1}{2}(0.2)(0.02)^2$

3- تمثيل مخطط الطاقة الحركية بدلالة الزمن:

من مخطط السرعة بدلالة الزمن نستنتج قيم $v(t)$ ونعوضها في العبارة $E_c = \frac{1}{2} m v^2(t)$ فنجد الجدول التالي:

$t(s)$	0	0.5	1	1.5	2
$v(m/s)$	0	0.02	0	-0.02	0
$E_c(J)$	0	4×10^{-5}	0	4×10^{-5}	0



التمرين ــ 6 ★★

نواس بسيط طول خيطه $l = 1,0m$، يهتز بحرية بسعة قدرها $10cm$ و بدور قدره $2,0s$.

1- هل الاهتزازات الحاصلة صغيرة السعة؟

2- ما هو تواتر الاهتزازات؟

3- ماهي قيمة الجاذبية الأرضية في مكان التجربة؟

4- حدد الوضع الذي تكون عنده السرعة عظمى؟

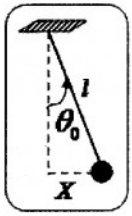
5- عين الفاصلة الزاوية التي يكون عندها التسارع الزاوي أعظميا موجبا.

6- مثل تغيرات التسارع الزاوي بدلالة الفاصلة الزاوية θ.

الحل-6:

1- الاهتزازات صغيرة السعة؟

لدينا من الشكل المقابل:



$$tg(\theta_0) = \frac{X}{l} = \frac{0.1}{1} = 0.1rad \Rightarrow \theta_0 = tg^{-1}(0.1) = 0.09966rad$$

ومنه: $\begin{cases} \pi rad \rightarrow 180° \\ 0.09966rad \rightarrow \theta_0 \end{cases} \Rightarrow \theta_0 = \frac{0.09966 \times 180°}{\pi} = 5.71°$

بما أن $\theta_0 = 5.71° < 10°$ فإن الاهتزازات صغيرة السعة.

2- تواتر الاهتزاز: $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} = 0.5Hz$

3- قيمة الجاذبية الأرضية (g):

نعلم أن دور النواس البسيط من أجل السعات الصغيرة هو: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

ومنه: $T_0^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} = 4\pi^2 \frac{1}{4} = 9.86 m/s^2$

4- الوضع الذي تكون عنده السرعة عظمى:

تكون السرعة أعظمية أثناء مرور النواس بوضع التوازن (شاقول نقطة التعليق) وعندها تكون $\theta(t) = 0$.

www.baadz.com

5- الفاصلة الزاوية التي يكون عندها التسارع أعظميا موجبا:

عبارة التسارع الزاوي: $\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

يكون التسارع أعظمي موجب أي: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta_0\omega_0^2$ عندما يكون $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -1$

وبالتعويض $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -1$ في عبارة الفاصلة الزاوية $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ نجد:

$$\theta(t) = \theta_0(-1) \Rightarrow \theta(t) = -\theta_0 = -0.1rad$$

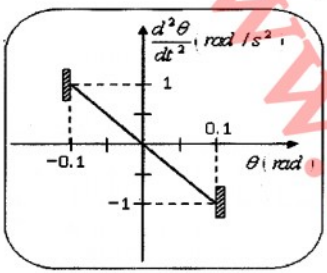
6- تمثيل $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ بدلالة الفاصلة الزاوية $\theta(t)$:

لدينا:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta(t) \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi rad/s \end{cases}$$

ومنه: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\pi^2 \times \theta(t)$، نضع $\pi^2 = 10$ نجد: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -10\theta(t)$

من العلاقة $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -10\theta(t)$ نستنتج أن البيان عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ.



$\theta(t)(rad)$	$-\theta_0 = -0.1$	0	$+\theta_0 = 0.1$
$\frac{d^2\theta}{dt^2}(rad/s^2)$	+1	0	-1

التمرين ــ 7 ★★

يتألف نواس بسيط من خيطه طوله (l)، يحمل جسما نقطيا كتلته (m).

1- عرف دور النواس البسيط.

2- إذا كانت عبارة الدور بدلالة المقادير k,m,l معطاة بالعلاقة التالية: $T = km^x l^y g^z$.
حيث k ثابت، g تسارع الجاذبية الأرضية.
عين كلا من x,y,z. ماذا تستنتج؟

3- إذا كانت قيمة الدور $2s$ من أجل $l = 1m$ عين قيمة g في مكان التجربة.

الحل-7:

1- دور النواس البسيط هو الزمن اللازم لمرور النواس مرورين متعاقبين من نفس الوضع وفي نفس الاتجاه (الدور هو زمن انجاز اهتزازة واحدة).

2- العلاقة المعطاة $T = km^x l^y g^z$.....(1) تتوافق مع دور الاهتزازات صغيرة السعة $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

وبالتالي نجد: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T = (2\pi)\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)\frac{(l)^{\frac{1}{2}}}{(g)^{\frac{1}{2}}} = (2\pi)(l)^{\frac{1}{2}}(g)^{-\frac{1}{2}}$

بما أن $(m)^0 = 1$ يمكن أن نضع: $T = (2\pi)(m)^0(l)^{\frac{1}{2}}(g)^{-\frac{1}{2}}$.....(2)

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد: $\left(z = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2} \quad x = 0\right)$

www.dacdz.com

نستنتج أن در النواس البسيط لا يتعلق بالكتلة.

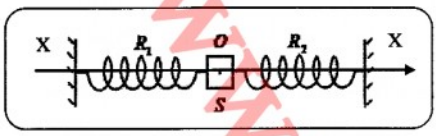
3- قيمة الجاذبية g :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g} \Rightarrow g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$$

تطبيق عددي: $g = 4\pi^2 \times \frac{1}{4} = \pi^2 = 9.86 m/s^2$

التمرين ـ8 ★★

في الشكل التالي، لدينا نابضان مرنان (R_1, R_2) مهملا الكتلة حلقاتهما غير متلاصقة، ثابتا مرونتهما على الترتيب $k_1 = 40\,N/m, k_2 = 50\,N/m$ يشدان جسا صلبا (S) كتلته $m = 400g$ بإمكانه أن ينزلق دون احتكاك على مسو أفقي. النابضان في وضع راحة.



نزيح الجسم (S) عن وضع توازنه في الاتجاه الموجب للمحور $(X'OX)$ بمقدار $2cm$ ثم نتركه لحاله دون سرعة ابتدائية.

1- أوجد المعادلة التفاضلية للجملة المهتزة.

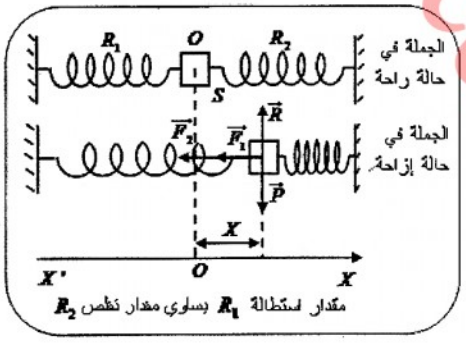
2- أكتب عبارة الدور و أوجد قيمته.

3- عند اللحظة $t_0 = 0$ يمر الجسم (S) من وضع التوازن في الاتجاه الموجب.

أكتب المعادلة الزمنية لحركته $x = f(t)$.

4- احسب قيمة سرعته عند اللحظة t_0 واستنتج قيمة سرعته عند اللحظتين $t_1 = \frac{T_0}{4}, t_2 = \frac{T_0}{2}$.

الحل-8:



1- المعادلة التفاضلية للجملة المهتزة :

الجسم (s) يخضع إلى أربعة قوى:

$\overline{P}$: ثقل الجسم (s).

$\overline{R}$: رد فعل المستوي.

$\overline{F_1}$: توتر النابض R_1 .

$\overline{F_2}$: توتر النابض $R2$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن $\sum \overline{F_{ext}} = m\overline{a}$

أي: $\overline{P} + \overline{R} = \overline{0}$ و $\overline{P} + \overline{R} + \overline{F_1} + \overline{F_2} = m\overline{a}$

بالإسقاط على محور الحركة (XOX') نجد:

$$-(k_1 + k_2)x(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} \text{ أي: } -k_1x(t) - k_2x(t) = ma$$

نقسم الطرفين على m نجد: $-\frac{(k_1+k_2)}{m}x(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ ومنه: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(k_1+k_2)}{m}x(t) = 0$.....(1)

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية النسبة لـ x وحلها من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.....(2)

2- عبارة الدور :نشتق المعادلة(2) بالنسبة للزمن مرتين نجد: $\frac{dx}{dt} = -\omega_0 X\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

ثم $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ أي: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t)$ ومنه: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$.....(3)

بالمطابقة بين المعادلتين (1) و (3) نجد: $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$ ومنه: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

www.bacdz.com

لدينا: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ومنه: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$

قيمة الدور: $T_0 = 2\times 3.14\sqrt{\frac{0.4}{40+50}}$ إذا: $T_0 = 0.42s$

3- كتابة المعادلة الزمنية للحركة $x = f(t)$

تعين φ_0: لما $t = 0$ ، $x(0) = 0$ (مرور من وضع التوازن)

نعوض في المعادلة (2) أي: $0 = X\cos\varphi_0$ ومنه: $\cos\varphi_0 = 0$ أو $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ أو $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

المرور بالاتجاه الموجب يعني السرعة موجبة $v(t) = 0$ أي: $v(t) = -\omega_0 X\sin(\omega_0 t + \varphi_0) > 0$

لما $t = 0$ لدينا: $v(0) = -\omega_0 X\sin\varphi_0 > 0$ أي أن: $\sin\varphi_0 < 0$ ومنه: $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

نبض الحركة: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.42} \approx 15rad/s$

سعة الحركة: هي القيمة التي أزحنا بها الجسم (S) عن وضع توازنه، أي: $X = 2cm = 0.02m$

المعادلة الزمنية: $x = 0.02\cos(15t + \frac{3\pi}{2})$.....$(m)$

4- قيمة السرعة عند المرور بوضع التوازن (عند اللحظة $t = 0$):

لما $t = 0$ أي عند المرور بوضع التوازن تكون السرعة أعظمية موجبة $v(0) = v(t)_{max} = +\omega_0 X$

ومنه: $v(0) = 15\times 0.02 = 0.3m/s$

الطريقة الثانية: لدينا المعادلة الزمنية للسرعة $v(t) = -\omega_0 X\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

ومنه: $v(t) = -0.3\sin\left(15t + \frac{3\pi}{2}\right)$ أي: $v(t) = -0.02\times 15\sin\left(15t + \frac{3\pi}{2}\right)$

أو (4).....$v(t) = -0.3\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{3\pi}{2}\right)$ عند تعويض $t = 0$ نجد: $v(0) = 0.3m/s$

قيمة السرعة لما $t_1 = \frac{T_0}{4}$: نعوض $t_1 = \frac{T_0}{4}$ في المعادلة (4) $v\left(\frac{T_0}{4}\right) = -0.3\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{T_0}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$

إذا: $v(t_1) = 0$

$$\begin{cases} v\left(\frac{T_0}{4}\right) = -0.3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) \\ v\left(\frac{T_0}{4}\right) = -0.3\sin(2\pi) \\ v\left(\frac{T_0}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

قيمة السرعة لما $t_2 = \frac{T_0}{2}$: نعوض $t_2 = \frac{T_0}{2}$ في المعادلة (4) $v\left(\frac{T_0}{2}\right) = -0.3\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{T_0}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)$

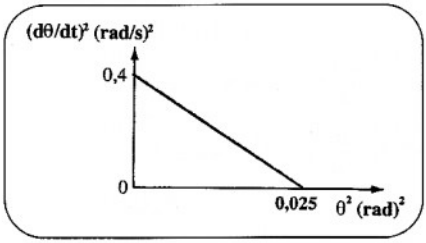
إذا: $v(t_2) = -0.3m/s$

$$\begin{cases} v\left(\frac{T_0}{2}\right) = -0.3\sin\left(\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \\ v\left(\frac{T_0}{2}\right) = -0.3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ v\left(\frac{T_0}{2}\right) = -0.3m/s \end{cases}$$

www.bacdz.com

التمرين ـ9 ★★★

يتألف نواس بسيط من خيطه طوله (l)، يحمل كتلة نقطية (m).
يمثل البيان المقابل تغيرات مربع سرعته الزاوية بدلالة الفاصلة الزاوية (θ^2).



1- بين أن اهتزازات النواس حرة غير خامدة وذلك اعتمادا على البيان.
2- أحسب دور الاهتزازات.
3- أحسب السعة الزاوية θ و l .
4- نزيح النواس عن وضع توازنه بزاوية $\theta = 30°$ ثم نتركه لحاله دون سرعة ابتدائية، أحسب سرعة كتلته عند المرور بوضع التوازن، $g = 10 m/s^2$.

الحل-9:

1- البيان خط مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C.\theta^2 + b$ حيث C ميل المستقيم.

- حساب ميل المستقيم: $C = \frac{0-0.4}{0.025-0} = \frac{-0.4}{0.025} = -16$.
- تعين b : لما $\theta^2 = 0$ من البيان نجد: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0.4$ ومن معادلة المستقيم نجد: $b = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

ومنه: $b = 0.4$ إذا البيان عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0.4 - 16\theta^2$.

- نشتق المعادلة: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0.4 - 16\theta^2$ بالنسبة للزمن، أي:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt}\left[0.4 - 16\theta^2\right] \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = \frac{d(0.4)}{dt} - 16\frac{d(\theta\times\theta)}{dt}$$

ومنه: $$\left[\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\times\frac{d\theta}{dt}\right) + \left(\frac{d\theta}{dt}\times\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right] = 0 - 16\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\times\theta\right) + \left(\theta\times\frac{d\theta}{dt}\right)\right]$$

$$2\frac{d\theta}{dt}\times\frac{d^2\theta}{dt^2} = -16\left(2\theta\times\frac{d\theta}{dt}\right) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -16\theta$$

إذا: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + 16\theta = 0$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ θ ومتجانسة، حل هذه المعادلة دالة جيبية من الشكل $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ وبالتالي اهتزازات النواس حرة غير متخامدة.

طريقة الاشتقاق موجودة في الدرس ص21

2- دور الاهتزازات:
باشتقاق المعادلة الزمنية $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ مرتين نجد:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta$$

ومنه: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$، بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية نجد: $\omega_0^2 = 16 \Rightarrow \omega_0 = 4 rad/s$.

لدينا: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4} = 0.5\pi = 1.57 s$

www.bacz.com

3- حساب θ_0 و l:

- السعة الزاوية θ_0:

نعلم أن السرعة تنعدم $\left(\frac{d\theta}{dt}=0\right)$ من أجل الفاصلة الزاوية $\theta(t)=\pm\theta_0$

من البيان لدينا: $\left(\left(\theta_0^2=0.025\right),\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=0\right)\right)$ ومنه: $\theta_0^2=0.025\Rightarrow\theta_0=0.158rad$

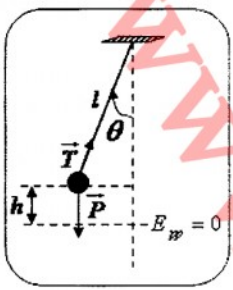
- طول النواس l:

لدينا: $\omega_0^2=\frac{g}{l}\Rightarrow l=\frac{g}{\omega_0^2}=\frac{10}{16}=0.625m$.

4- حساب السرعة عند المرور بوضع التوازن:

الجملة المدروسة (كرية، أرض).

الحصيلة الطاقوية:



الطاقة عند وضع الإزاحة: $E_{PP_1}+E_{C_1}=mgh+0$

لدينا: $\cos\theta=\frac{(l-h)}{l}\Rightarrow l\cos\theta=l-h\Rightarrow h=l(1-\cos\theta)$

ومنه: $E_{PP_1}+E_{C_1}=mgl(1-\cos\theta)$

الطاقة أثناء المرور بوضع التوازن: $E_{PP_2}+E_{C_2}=0+\frac{1}{2}mv_2^2$

حسب مبدأ إنحفاظ الطاقة نكتب:

$$E_{PP_1}+E_{C_1}=E_{PP_2}+E_{C_2}\Rightarrow mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_2^2\Rightarrow 2gl(1-\cos\theta)=v_2^2$$

ومنه: $v_2=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}=\sqrt{2\times10\times0.625(1-\cos30°)}=1.29m/s$

الطاقة عند وضع الإزاحة = الطاقة أثناء المرور بوضع التوازن

الطريقة الثانية لحل هذا التمرين

1- البيان يمثل تغيرات مربع السرعة الزاوية $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ بدلالة الفاصلة الزاوية (θ^2)، أي: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=f(\theta^2)$ وهو عبارة عن خط مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=C.\theta^2+b$ حيث C ميل المستقيم.

- حساب ميل المستقيم $C=\frac{0-0.4}{0.025-0}=\frac{-0.4}{0.025}=-16$.
- تعين b: لما $\theta^2=0$ من البيان نجد: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=0.4$ ومن معادلة المستقيم نجد: $b=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

ومنه: $b=0.4$

إذا البيان عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل (1)..... $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=0.4-16\theta^2$

- إذا كانت الاهتزازات حرة غير متخامدة تكون المعادلة التفاضلية بالنسبة لـ θ من الشكل: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}=0$

(اهتزازات صغيرة السعة) ويكون حل هذه المعادلة من الشكل: $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega_0t+\varphi_0)$

www.baedz.com

نشتق المعادلة الزمنية فنجد: $\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

ثم نربع الطرفين: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \theta_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

نعلم أن: $\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

ومنه: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \theta_0^2\omega_0^2\left(1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right) = \theta_0^2\omega_0^2 - \theta_0^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

إذا: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \theta_0^2\omega_0^2 - \omega_0^2\theta^2 \ldots\ldots (2)$

نلاحظ أن المعادلة (1) المستخرجة من البيان متطابقة مع المعادلة (2)، وبالتالي اهتزازات النواس حرة غير متخامدة.

2- دور الاهتزازات:

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد: $\begin{cases} \theta_0^2\omega_0^2 = 0.4 \ldots\ldots (3) \\ \omega_0^2 = 16 \Rightarrow \omega_0 = 4(rad/s) \end{cases}$

لدينا: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4} = 0.5\pi = 1.57s$

3- حساب θ_0 و l:

- السعة الزاوية θ_0:

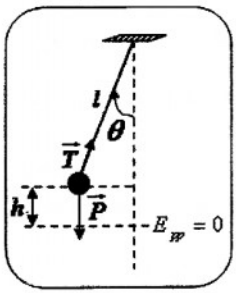
من العلاقة (3) لدينا: $\theta_0^2\omega_0^2 = 0.4 \Rightarrow \theta_0^2 = \frac{0.4}{\omega_0^2} = \frac{0.4}{16} \Rightarrow \theta_0 = \sqrt{\frac{0.4}{16}} = 0.158rad$

- طول النواس l:

لدينا: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2\frac{l}{g} \Rightarrow l = \frac{g \times T_0^2}{4\pi^2}$

تطبيق عددي: $l = \frac{10 \times (1.57)^2}{4\pi^2} = 0.625m$

4- حساب السرعة عند المرور بوضع التوازن:



الجملة المدروسة (كرية، أرض).

الحصيلة الطاقوية:

الطاقة عند وضع الإزاحة: $E_{PP_1} + E_{C_1} = mgh + 0$

لدينا: $\cos\theta = \frac{(l-h)}{l} \Rightarrow l\cos\theta = l - h \Rightarrow h = l(1 - \cos\theta)$

ومنه: $E_{PP_1} + E_{C_1} = mgl(1 - \cos\theta)$

الطاقة أثناء المرور بوضع التوازن: $E_{PP_2} + E_{C_2} = 0 + \frac{1}{2}mv_2^2$

حسب مبدأ انحفاظ الطاقة نكتب:

$$E_{PP_1} + E_{C_1} = E_{PP_2} + E_{C_2} \Rightarrow mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow 2gl(1 - \cos\theta) = v_2^2$$

ومنه: $v_2 = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.625(1 - \cos 30°)} = 1.29m/s$

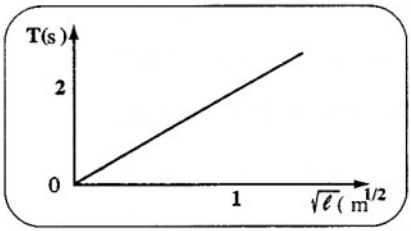
الطاقة عند وضع الإزاحة = الطاقة أثناء المرور بوضع التوازن

www.bacdz.com

التمرين ــ10 ★★★

يتألف نواس بسيط من خيطه مهمل الكتلة غير مرن طوله (l)، معلق من نقطة O و يحمل كتلة نقطية $(m=50g)$.

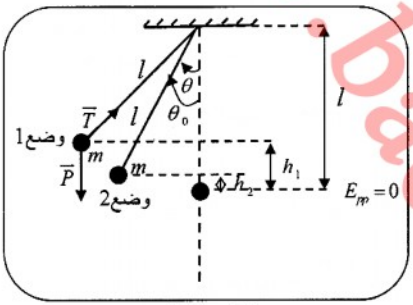
نزيح الجملة عن وضع التوازن بسعة زاوية صغيرة (θ_0) ونتركها لحالها دون سرعة ابتدائية ومن اجل عدة قيم (l) نقيس دور الحركة الناتجة ثم نرسم البيان $T=f\left(\sqrt{l}\right)$ فنحصل على البيان المقابل:



1- أكتب العبارة البيانية.
2- من الدراسة الطاقوية اوجد عبارة الدور.
3- استنتج مما سبق قيمة g في مكان التجربة.
4- نستعمل هذا النواس بطول $(l=1m)$ ونزيحه عن وضع التوازن بزاوية $\alpha=60°$ ونتركه لحاله دون سرعة ابتدائية. أحسب a_n, a_t, a عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية $\beta=30°$.

الحل-10:

1- العبارة البيانية:
البيان خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل:
$T=C\sqrt{l}$ حيث C ميل المستقيم $C=\frac{2-0}{1-0}=2$
ومنه: $T=2\sqrt{l}$.....(1).



نواس بسيط

2- عبارة الدور باستعمال الدراسة الطاقوية:
نجد الحصيلة الطاقوية بين وضعين:
- الوضع الأول عند إزاحة النواس بزاوية θ_0.
- الوضع الثاني عندما يصنع النواس زاوية θ مع الشاقول.
حسب مبدأ انحفاظ الطاقة نكتب:

$$E_{pp_1}+E_{c_1}+W_\gamma=E_{pp_2}+E_{c_2}\Rightarrow mgh_1+0+0=mgh_2+\frac{1}{2}mv^2(t)$$

ومنه: $mgh_1-mgh_2=+\frac{1}{2}mv^2(t)\Rightarrow 2g(h_1-h_2)=v^2(t)$.....(2)

لدينا: $\begin{cases}\cos\theta_0=\frac{l-h_1}{l}\\ \cos\theta=\frac{l-h_2}{l}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l\cos\theta_0=l-h_1\\ l\cos\theta=l-h_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h_1=l-l\cos\theta_0\\ h_2=l-l\cos\theta\end{cases}$

أي: $h_1-h_2=(l-l\cos\theta_0)-(l-l\cos\theta)\Rightarrow h_1-h_2=l(\cos\theta-\cos\theta_0)$

بالتعويض (h_1-h_2) في العلاقة (2) نجد: $2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)=v^2(t)$.....(3)

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد: $2gl\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+0\right)=2v(t)\frac{dv}{dt}$.....(4)

لدينا: $v(t)=l\frac{d\theta}{dt}$ ومنه: $\frac{dv}{dt}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ و بالتعويض في العلاقة (4) نحصل على:

$$-gl\frac{d\theta}{dt}\sin\theta=l^2\frac{d\theta}{dt}\times\frac{d^2\theta}{dt^2}\Rightarrow -g\sin\theta(t)=l\frac{d^2\theta}{dt^2}\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta(t)=0$$

www.bacdz.com

اهتزازات صغيرة السعة $\sin\theta = \theta(rad)$ ، إذا $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$.....(5)

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ θ وحلها من الشكل $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

نشتق المعادلة الزمنية $\theta(t)$ مرتين بالنسبة للزمن نجد :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta(t)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta(t) = 0.....(6)$$

بالمطابقة بين المعادلتين (5) و (6) نجد: $\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

لدينا: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

3- قيمة g :

بالمطابقة بين العبارتين البيانية $\left(T = T_0 = 2\sqrt{l}\right)$ والنظرية $\left(T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$ نجد:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\sqrt{l} \Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1 \Rightarrow \pi = \sqrt{g}$$

ومنه: $g = \pi^2 = 9.86 m/s^2$ ، بوضع $\pi^2 = 10$ نجد: $g = 10 m/s^2$.

4- حساب التسارع الناظمي a_n والمماسي a_t والتسارع a :

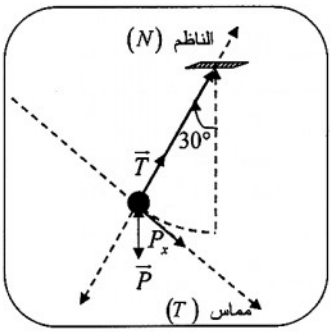
- التسارع الناظمي a_n :

لدينا من العلاقة (4): $v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0) \Rightarrow v^2 = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha)$

علما أن: $\alpha = 60°$ ، $\beta = 30°$ ، $l = 1m$ ، $g = 10 m/s^2$

ومنه: $V^2 = 2\times 10\times 1(\cos 30° - \cos 60°) = 7.3(m/s)^2$

لدينا: $a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{V^2}{l} = \frac{7.3}{1} = 7.3 m/s^2$.



- التسارع المماسي a_t :

نطبق القانون الثاني لنيوتن $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

بالإسقاط على المماس نجد: $P_x = P\sin 30° = ma_t$

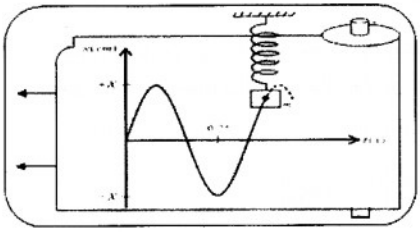
ومنه: $mg\sin 30° = ma_t \Rightarrow a_t = g\sin 30° = 5 m/s^2$

- التسارع a :

لدينا: $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(7.3)^2 + (5)^2} = 8.84 m/s^2$

www.bacdz.com

التمرين ــ11 ★★★

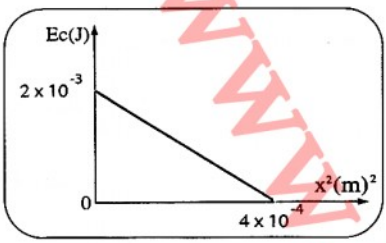


نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته غير متلاصقة معلق رأسيا، ثابت مرونته (k). نعلق به جسما صلبا (S) كتلته (m) فيستطيل بمقدار Δl عند التوازن. نزيح (S) عن وضع التوازن بسحبه راسيا نحو الأسفل ثم نتركه حرا دون سرعة ابتدائية.
يمثل الشكل المقابل تسجيلا لحركة مركز عطالة الجسم (S) يظهر فيه تغيرات فاصلته x بدلالة الزمن t .

1- عبر عن Δl عند التوازن بدلالة m,g,k .
2- بين أن حركة مركز عطالة الجسم (S) مستقيمة جيبية.
3- أكتب عبارة دور حركته و أوجد قيمته.
4- بين أن الطاقة الحركية للجسم (S) تعطى بالعلاقة

$$E_{c} = \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(X^2 - x^2(t)\right)$$

5- يمثل البيان المقابل تغيرات الطاقة الحركية بدلالة مربع فاصلة مركز عطالة الجسم (S) أثناء حركته.
استعن بالبيانين لإيجاد: φ (الصفحة الابتدائية) k,m,X.
6- أحسب سرعة مركز عطالة الجسم (S) عند المرور بنقطة فاصلتها $1cm$ بالاتجاه الموجب.



الحل-11:

1- عبارة Δl بدلالة المقادير (m,g,k) في حالة التوازن:
عند التوازن الجسم (S) يخضع لقوتين:
$\overline{P}$: ثقل الجسم (S)، حيث: $\overline{P} = m\overline{g}$.
$\overline{F_0}$: توتر النابض، حيث: $F_0 = k|\Delta l|$
الجملة في حالة التوازن إذن : $\sum \overline{F}_{ext} = \overline{0}$ أي: $\overline{P} + \overline{F_0} = \overline{0}$ بالإسقاط على محور (XOX') نجد:

$$mg - k\Delta l = 0 \ldots\ldots(1) \text{ ومنه: } mg = k\Delta l \text{ أي: } \Delta l = \frac{mg}{k}$$

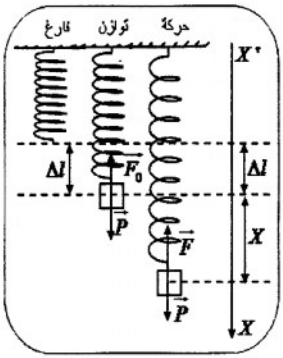
2- تبيان أن حركة مركز عطالة الجسم (S) مستقيمة جيبية:
الدراسة الحركية: عندما نسحب الجسم (S) عن وضع توازنه نحو الأسفل ونتركه دون سرعة ابتدائية فيخضع لقوتين:
$\overline{P}$: ثقل الجسم (S) و $\overline{F}$: توتر النابض.
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :
$\sum \overline{F_{ext}} = m\overline{a}$ ومنه: $\overline{P} + \overline{F} = m\overline{a}$
بالإسقاط على محور (XOX') نجد: $mg - k(\Delta l + x) = ma$

$$mg - k\Delta l - kx(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} \ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نجد: $-kx(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$ وبقسمة الطرفين على m نجد:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \ldots\ldots(3) \text{ ومنه: } -\frac{k}{m}x(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ x حلها من الشكل:
$x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ، إذا حركة مركز عطالة الجسم (S) مستقيمة جيبية.



www.bacdz.com

3- عبارة الدور: نشتق المعادلة $x(t)=X\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ مرتين نجد: $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

ومنه: $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2 x(t)$ أي: $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x(t)=0.....(4)$

بالمطابقة بين المعادلة (3) و (4) نجد: $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ أي: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

لدينا: $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ ومنه: $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

قيمة الدور: من البيان $x=f(t)$ لدينا: $\frac{3T_0}{4}=0.75$ ومنه: $T_0=1s$

4- تبيان أن الطاقة الحركية للجسم (S) تعطى بالعلاقة $E_C=\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(X^2-x^2(t)\right)$:

عبارة الطاقة الحركية: $E_C=\frac{1}{2}mv^2(t)$ علما أن: $v(t)=\frac{dx}{dt}=-\omega_0 X\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$

ومنه: $E_C=\frac{1}{2}m\left[-\omega_0 X\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\right]^2\Rightarrow E_C=\frac{1}{2}m\omega_0^2X^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)$

نعلم أن: $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$ أي: $\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)+\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)=1$

إذا: $\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)=1-\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)$ ومنه: $E_C=\frac{1}{2}m\omega_0^2X^2\left[1-\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)\right]$

أي: $E_C=\frac{1}{2}m\omega_0^2\left[X^2-X^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)\right]\Rightarrow E_C=\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(X^2-x^2(t)\right)$

5- إيجاد k,m,X,φ_0:

- الصفحة الابتدائية φ_0:

من البيان $x=f(t)$: لما $\left(t=\frac{3T_0}{4}\right)$ تكون $x(t)=-X$ وبالتعويض في $x(t)=X\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi_0\right)$

نجد: $-X=X\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{3T_0}{4}+\varphi_0\right)$ أي: $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\varphi_0\right)=-1$ ومنه: $\frac{3}{2}\pi+\varphi_0=\pi$ أي: $\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$

ومنه: $\varphi_0=\frac{3\pi}{2}$ (لأن $-\frac{\pi}{2}$ يمثل $\frac{3\pi}{2}$ في الدائرة المثلثية).

من مخطط الطاقة الحركية:

العبارة البيانية لمخطط الطاقة الحركية: لدينا $E_C=f\left(x^2\right)$

البيان عبارة عن خط مستقيم لا يمر من المبدأ أي: $E_C=ax^2+b.....(5)$ حيث $a=\frac{0-2\times10^{-3}}{4\times10^{-4}-0}=-5$ (الميل)

لما $x=0$ لدينا: $\begin{cases}E_C=b\\E_C=2\times10^{-3}\end{cases}$ أي: $b=2\times10^{-3}$

$E_C=-5x^2+2\times10^{-3}\Leftrightarrow(5)$

من عبارة الطاقة الحركية $E_C=\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(X^2-x^2(t)\right)$ نجد: $E_C=-\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2(t)+\frac{1}{2}m\omega_0^2X^2$

أي: $E_C=ax^2+b$ حيث: $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}m\omega_0^2=-5\\b=\frac{1}{2}m\omega_0^2X^2=2\times10^{-3}\end{cases}$

www.bacdz.com

- الكتلة m :

$-\frac{1}{2}m\omega_0^2 = -5$ أي: $m = \frac{10}{\omega_0^2} = \frac{10}{(2\pi)^2}$ (لأن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad/s$) ومنه: $m = 0.25Kg$

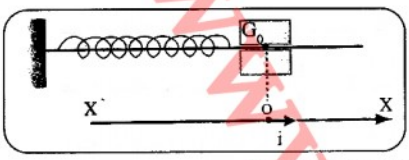
- سعة الحركة X :

$\frac{1}{2}m\omega_0^2 X^2 = 2\times10^{-3}$ أي: $X^2 = \frac{4\times10^{-3}}{m\omega_0^2} = \frac{4\times10^{-3}}{0.25\times(2\pi)^2} = 4\times10^{-4}$ ومنه: $X = 0.02m$

- ثابت المرونة k :

لدينا: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه: $k = \omega_0^2 m = (2\pi)^2 \times 0.25$ أي: $k = 10N/m$

التمرين ـ12 ★★★

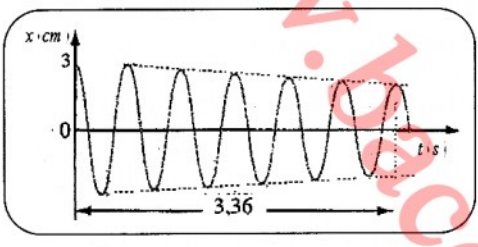


مهتز ميكانيكي يتكون من جسم صلب (S) كتلته $(m = 100g)$ مركز عطالته G ، بإمكانه الحركة على ساق أفقية، و نابض مرن حلقاته غير متلاصقة، ثابت مرونته $k = 13N/m$ كتلته مهملة أمام m .

عند اللحظة $t = 0$ يكون في حالة توازن ويكون G منطبقا على النقطة O (مبدأ الفواصل).

عند اللحظة t تمر النقطة G من فاصلتها x بسرعة v.

بواسطة تجهيز خاص يمكن متابعة تغيرات الفاصلة x بدلالة الزمن t نحصل على البيان المقابل:



I. الدراسة البيانية:

1- ما هو نمط الاهتزازات؟

2- أحسب قيمة شبه الدور T للاهتزازات.

3- ما هي قيمة الفاصلة x عند اللحظات التالية:

$t_0 = 0, t_1 = T, t_2 = 5T$

II. دراسة طاقوية:

1- اكتب عبارة الطاقة للجملة (نابض، جسم (S)) بدلالة v, x, k, m .

2- احسب قيمة الطاقة للمهتز عند اللحظات السابقة.

3- قارن بين القيم المتحصل عليها، ما هو سبب التغير في طاقة الجملة؟

4- احسب سرعة مرور الجسم لأول مرة من وضع التوازن.

III. الدراسة التحريكية : (نهمل الاحتكاك)

1- مثل القوة المؤثرة على الجسم (S) في لحظة ما.

2- بتطبيق قانون نيوتن الثاني بين أن المعادلة التفاضلية للحركة هي من الشكل التالي:

$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx(t) = 0$ وحلها هو: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

3- عبر عن T_0 بدلالة k, m .

4- بين أن عبارة الدور الذاتي T_0 متجانسة مع الزمن.

5- احسب قيمة T_0 وقارن النتيجة مع قيمة T ثم احسب الدقة في القياس.

www.bacdz.com

الحل-12:

I. الدراسة البيانية:

1- الاهتزازات حرة متخامدة.

2- قيمة شبه الدور T: نستنتج من البيان أن $6T = 3.36$ ومنه: $T = \frac{3.36}{6} = 0.56s$ أي: $T = 0.56s$

3- قيم الفاصلة x عند اللحظات $(0, T, 5T)$: من البيان نجد:

لما $t_0 = 0$، لدينا: $x(0) = 3cm = 0.03m$

لما $t_1 = T$، لدينا: $x(T) = 2.88cm = 0.0288m$

لما $t_2 = 5T$، لدينا، $x(5T) = 2.16cm = 0.0216m$

II. الدراسة الطاقوية:

1- طاقة الجملة بدلالة (v, x, t, m): $E(t) = E_C(t) + E_{Pe}(t)$ ومنه: $E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$

E_C: طاقة حركية

E_{Pe}: طاقة كامنة مرونية

2- قيمة الطاقة عند اللحظات $(0, T, 5T)$: في اللحظات $t_0 = 0$, $t_1 = T$, $t_2 = 5T$ تكون الجملة في الفاصلة أي سرعتها تكون معدومة وبالتالي تكون الطاقة الحركية معدومة $E_C(t) = 0$ ومنه طاقة الجملة $E(t) = E_{Pe}(t)$ أي: $E(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$.

لما $t = 0$ يكون $x(0) = 3cm = 0.03m$ وبالتالي: $E(t) = E_{Pe}(0) = \frac{1}{2} \times 13 \times (0.03)^2 = 5.85 \times 10^{-3} J$

لما $t_1 = T$ يكون $x(T) = 2.88cm = 0.0288m$

وبالتالي: $E(t) = E_{Pe}(T) = \frac{1}{2} \times 13 \times (0.0288)^2 = 5.39 \times 10^{-3} J$

لما $t_2 = 5T$ يكون $x(5T) = 2.16cm = 0.0216m$

وبالتالي: $E(t) = E_{Pe}(5T) = \frac{1}{2} \times 13 \times (0.0216)^2 = 3.03 \times 10^{-3} J$

3- نلاحظ أن قيمة طاقة الجملة تتناقص مع مرور الزمن، والسبب في ذلك هو وجود الاحتكاكات بين الجسم (S) والساق.

4- سرعة مرور الجسم لأول مرة من وضع التوازن:

يمكن اعتبار أن مقدار تناقص الطاقة خلال زمن قصير، صغير جدا. لذا نضع $E(0) = E(1)$ حيث:

$E(0)$: الطاقة في الوضع الابتدائي (الوضع الأول) أي: $E(0) = 5.85 \times 10^{-3} J$

$E(1)$: الطاقة في المرور الأول بوضع التوازن (الوضع الثاني) أي: $E(1) = \frac{1}{2}mV_{max}^2$ لأن $x = 0$ و $E_{Pe} = (0)$

ومنه: $E(0) = E(1) = \frac{1}{2}mV_{max}^2$ وبالتالي: $V_{max}^2 = \frac{2 \times E(0)}{m}$ أي: $V_{max}^2 = \frac{2 \times 5.85 \times 10^{-3}}{0.1} = 0.117$

إذا: $V_{max} = 0.34 m/s$

III. الدراسة التحريكية (الاحتكاكات مهملة):

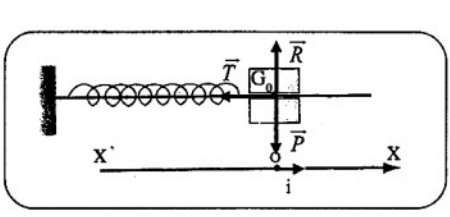
1- تمثيل القوى المؤثرة على الجسم (S):

الجسم (S) يخضع لثلاث قوى:

$\vec{P}$: ثقل الجسم (S).

$\vec{R}$: رد فعل الساق.

$\vec{F}$: توتر لنابض.



www.bacdz.com

2- نطبق القانون الثاني لنيوتن: $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$ ومنه: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$

بالإسقاط على محور (XOX') نجد: $-F = ma$ ومنه: $-kx(t) = m\frac{d^{2x}}{dt^2}$ أي: $m\frac{d^{2x}}{dt^2} + kx(t) = 0$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ x.

- إثبات أن المعادلة التفاضلية حلها هو دالة جيبية من الشكل: $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

نشتق حل المعادلة التفاضلية مرتين فنجد: $\frac{dx}{dt} = -\omega_0 X\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

نعوض عبارة $x(t)$ وعبارة $\frac{d^2x}{dt^2}$ في المعادلة التفاضلية فنجد:

$-m\omega_0^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + kX\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$ مع: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

ومنه: $-kX\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + kX\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$ أي المساواة محققة.

3- عبارة الدور T_0 بدلالة k, m: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

4- تبيان أن عبارة الدور الذاتي T_0 متجانسة مع الزمن:

لدينا: $F = k.x$ أي: $k = \frac{F}{x}$ ومنه: $[K] = [F].[L]^{-1}$

من العلاقة $F = ma$ أي: $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$ نجد: $[F] = [M][L][T]^{-2}$ ومنه: $[M] = [F][L]^{-1}[T]^2$

أي: $\frac{[M]}{[K]} = \frac{[F][L]^{-1}[T]^2}{[F][L]^{-1}} \Rightarrow \frac{[M]}{[K]} = [T]^2$ ومنه: $[T] = \left[\sqrt{\frac{M}{K}}\right]$

حيث: $[T] = [T_0]$ إذن الدور الذاتي T_0 متجانس مع الزمن.

5- قيمة الدور الذاتي T_0:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{13}} = 0.55s$$

- المقارنة بين T و T_0:

لدينا: $T_0 = 0.55s$ و $T = 0.56s$ القيمتان متقاربتان.

- دقة القياس:

$\frac{|T - T_0|}{T} = \frac{0.56 - 0.55}{0.56} \approx 0.02$ و بالتالي الدقة هي 2%.

www.bacdz.com