الاهتزازات القسرية والتجاوب

I. الاهتزازات القسرية والتجاوب

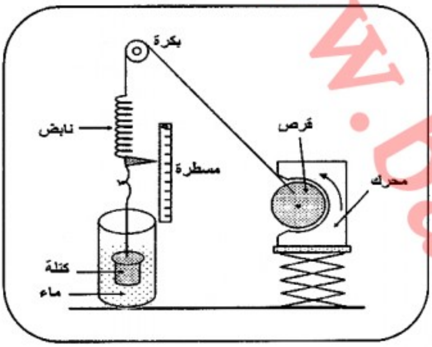
1- الاهتزازات القسرية:

نقول عن جملة أنها تهتز اهتزازات قسرية عندما يفرض عامل خارجي دور اهتزازاته على هذه الجملة أو نقول عن جملة مهتزة (ميكانيكية ، كهربائية) تواترها الذاتي $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ أنها خاضعة لاهتزازات قسرية عندما تهتز بواسطة تواتر $f \approx f_0$ مفروض عليها من طرف عامل خارجي.

2- التجاوب:

تكون ظاهرة التجاوب عندما تكون استجابة الجملة المهتزة (ميكانيكية ، كهربائية) أعظمية أي تكون الجملة المهتزة في حالة تجاوب عندما تأخذ سعة اهتزازاتها قيمة عظمى.

II. الاهتزازات الميكانيكية القسرية



1- الدراسة التجريبية:

لدراسة الاهتزازات الميكانيكية القسرية نحقق التركيب التجريبي المقابل و المتكون من:

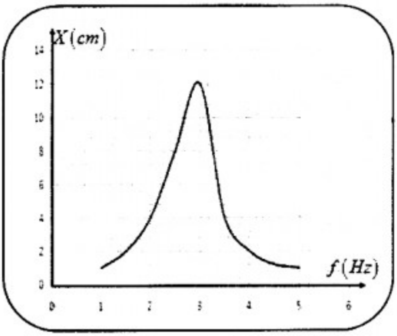
- كأس زجاجي شفاف فيه ماء.
- كتلة.
- مسطرة مدرجة.
- نابض كتلته مهملة وحلقاته غير متلاصقة.
- بكرة مثبتة.
- قرص.
- محرك كهربائي.
- الرافع.

نشغل المحرك فيدور القرص بتواتر f فيهتز النواس المرن ونقيس دور اهتزازات الكتلة ثم نستنتج تواتر الاهتزازات.

نقيس سعة اهتزازات الكتلة عندما نغير تواتر دوران القرص f فنحصل على الجدول التالي:

$f(Hz)$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$X(cm)$	1.0	2.0	4.0	8.0	12.0	4.0	2.0	1.2	1.0

- **تفسير التجربة:**



تغيرات سعة المجاوب بدلالة التواتر

- الاهتزازات الحاصلة قسرية لأن النواس المرن خاضع لقوة دورية ناتجة عن دوران القرص.
- الجملة (المحرك، القرص، الخيط) تسمى الجملة المحرضة والنواس المرن يسمى بالجملة المجاوبة (النواس المجاوب أو الرنان).
- من أجل تواتر f_0 للجملة المحرضة سعة الاهتزازات أعظمية، نقول أنه يوجد تجاوب بين الجملة المحرضة (المحرك، القرص، الخيط) والجملة المجاوبة (النواس المرن).
- تسمى هذه الظاهرة بـــ: تجاوب السعة.
- نحصل على هذه الظاهرة من أجل قيمة لتواتر الجملة المحرضة قريبة جداً من التواتر الذاتي للنواس المجاوب.
- في هذه الحالة $f_0 = 2.8Hz$.

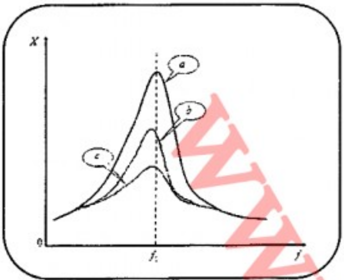
نتيجة

عند التجاوب سعة الاهتزازات أعظمية.

2- تأثير التخامد

نكرر التجربة السابقة بتغير فعالية التخامد في الجملة المجاوبة (النواس المرن) وذلك باستعمال محلول ذو لزوجة أكبر فنحصل على البيانات المقابلة:

- من أجل تخامد ضعيف: تكون استجابة الجملة المجاوبة (النواس المرن) كبيرة أي سعة الاهتزازات كبيرة عند التجاوب ويعبر عن ذلك وجود قمة حادة في البيان (منحنى a).
في هذه الحالة نقول إن التجاوب حاد.
- من أجل تخامد متوسط: تتناقص سعة التجاوب ويكون الرنين غير واضح (ضبابي) (منحنى b).
- من أجل تخامد فعال: يزول الرنين ويكون المنحنى منبسطاً (منحنى c).



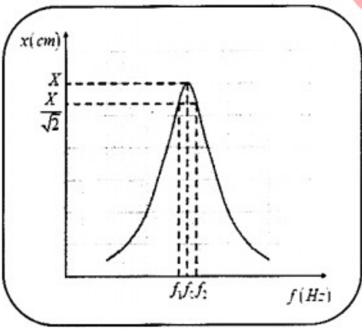
تأثير التخامد على سعة الاهتزازات

3- خصائص التجاوب

يتميز التجاوب بما يلي:

- **الشريط النافذ:** يتميز الشريط النافذ لتواترات الرنان على أنها مجال التواترات الموافقة لـــ: $x \geq \frac{X}{\sqrt{2}}$.
  - من أجل: $x = \frac{X}{\sqrt{2}}$ يكون للتواتر f قيمتان الأولى f_1 والثانية f_2 حيث $f_1 < f_2$.
  - نسمي f_1، f_2 حدي الشريط النافذ.
  - نسمي المقدار $\Delta f = f_2 - f_1$ بعرض الشريط النافذ للجملة المحرضة حيث تكون استجابة المهتز الرنان مقبولة في هذا المجال.
- **معامل الجودة:** هو مقدار يستعمل للتعبير عن حالة الجاوب بين المحرض والرنان حيث كلما كان معامل الجودة أكبر كانت استجابة الرنان للمحرض أفضل وأكثر حدة.

يعطى معامل الجودة بالعلاقة التالية: $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$

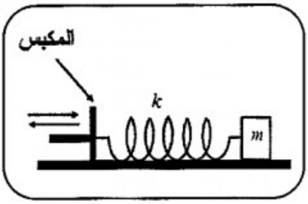


منحنى تجاوب السعة

4- تطبيق:

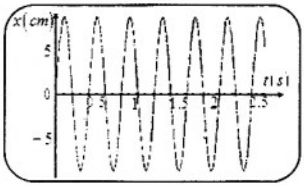
نستعمل التركيب المقابل والمتكون من:

- مكبس يقوم بحركة ذهابا وإيابا وبسرعة متحكم فيها.
- نابض ثابت مرونته $k = 25.1 N.m^{-1}$.
- جسم كتلته $m = 100g$ ينزلق دون احتكاك على مستوى أفقي.

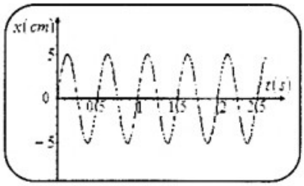


- بعد لحظات من تشغيل المحرك يؤثر على المكبس فيتحرك ذهاباً وإياباً.
- عندما يتحرك المكبس يفرض على الجملة (نابض، جسم) الاهتزازات.

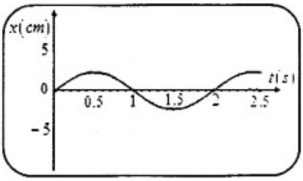
- نسجل منحنيات تطور الفاصلة x بدلالة الزمن لمركز عطالة الجسم من أجل قيم مختلفة لدور اهتزازات المكبس T.
- الدور الذاتي لاهتزازات الجملة (نابض ، جسم) هو: $T_0 = 0.397s$.



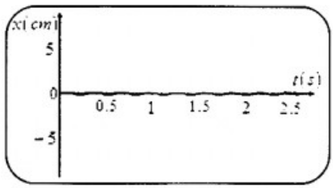
$T \approx T_0$



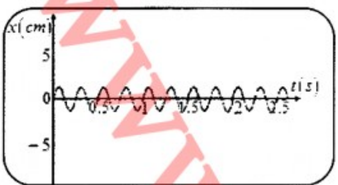
$T = 0.5s > T_0$



$T = 2.0s$ ⌉ T_0

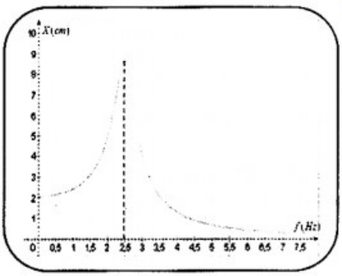


$T = 0.10s \quad T_0$



$T = 0.25s < T_0$

- بما أن المكبس فرض على الجملة (نابض ، جسم) الاهتزازات فنقول أن الجملة (نابض ، جسم) تخضع لاهتزازات قسرية.
- الجملة المحرضة هي المكبس.
- الجملة المجاوبة هي (نابض ، جسم) .
- سعة اهتزازات الجسم متعلقة بتواتر اهتزازات المكبس.
- المنحنى المقابل يمثل تطور سعة الاهتزازات القسرية للجسم بدلالة تواتر اهتزازات المكبس.
- عندما تؤثر الجملة المحرضة (المكبس) بتواتر خاصّ $(f_0 = 2.47Hz)$ على الجملة المجاوبة (نابض ، جسم) سعة تكون أعظمية فنقول أنها دخلت في تجاوب ميكانيكي.
- نسمي هذه الظاهرة بـــ: تجاوب السعة.



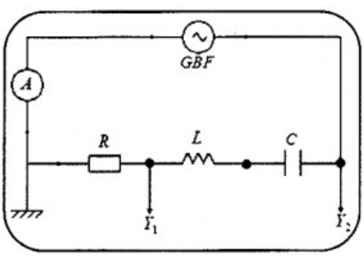
III. الاهتزازات القسرية الكهربائية

1- الدراسة التجريبية:

- الدراسة الكيفية:

نحقق الدارة الكهربائية المقابلة والمتكونة من:

- مولد للتواترات المنخفضة GBF.
- راسم اهتزازات.
- مقياس أمبير.
- مقاومة R.
- وشيعة L.
- مكثفة C.



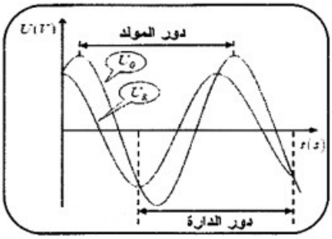
الدارة (R, L, C) مغذاة بتوتر متناوب جيبي تواتره قابل للتغيير عبارته الزمنية: $U(t) = U_0 \cos \omega t$

بواسطة راسم اهتزازات نتابع تغيرات:

U_R: التوتر بين طرفي المقاومة مدخل (1).

U_G: التوتر بين طرفي المولد مدخل (2).

- من أجل قيمة معينة للتواتر f، نشاهد على شاشة راسم الاهتزازات البيانين التاليين:



البيان (U_R) يمثل تغيرات التوتر بين طرفي المقاومة أي صورة عن تغير شدة التيار بدلالة الزمن:

(لدينا $U_R(t) = Ri(t) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}U_R(t)$)، يظهر في هذان البيانين أن تغيرات $i(t)$ على شكل دالة جيبية دورها يساوي دور توتر المولد ويختلف عن الدور الذاتي للدارة المهتزة (R,L,C) الذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

هكذا نحصل على اهتزازات قسرية حيث يجبر المولد المنخفض التواتر (GBF) الدارة (R,L,C) على الاهتزاز بدور مساو لدوره.

- نسمي المولد GBF الجملة المحرضة (المحرض) والدارة (R,L,C) الجملة المجاوبة (الرنان).

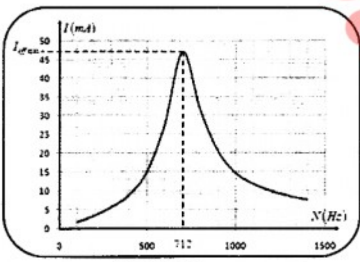
الدراسة الكمية

نأخذ: $R = 37\Omega$, $L = 0.1H$, $C = 0.5\mu F$

- نجعل التوتر بين طرفي المولد ثابتا $U_{eff} = 1.5V$ ونغير من قيمة تواتره N، ونسجل قيم الشدة المنتجة للتيار الكهربائي I_{eff} في الدارة (R,L,C) فنحصل على الجدول التالي:

$N(Hz)$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400
$I_{eff}(mA)$	1.6	3.4	5.7	8.9	15.1	27.6	47	31.5	20.5	14.6	11.7	9.8	8.5	7.6

- نمثل تغيرات I_{eff} بدلالة التواتر N تواتر المحرض (المولد) أي $I_{eff} = f(N)$، فنحصل على البيان المقابل:



منحنى تجاوب الشدة $I_{eff} = f(N)$

- نحسب التواتر الذاتي للدارة (R,L,C) من العلاقة:

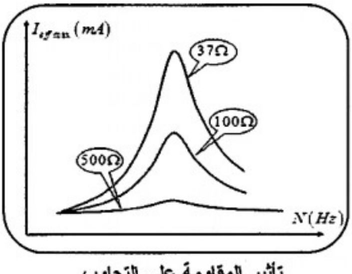
$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 712Hz$$

- من البيان نلاحظ أن الشدة المنتجة للتيار الكهربائي تبلغ قيمة عظمى من أجل تواتر المولد $N_0 \approx 712Hz$ أي أن: تواتر المحرض (GBF) = تواتر المجاوب (R,L,C)، نقول عندها إن الدارة في حالة تجاوب كهربائي (رنين)

الشريط النافذ

يتميز الشريط النافذ لتواترات الرنان بأنه مجال التواترات الموافق لـ: $I_{eff} \geq \frac{I_{eff\max}}{\sqrt{2}}$، يكون للتواتر N قيمتان الأولى N_1 والثانية N_2 حيث: $N_1 < N_2$.

2-تأثير التخامد



تأثير المقاومة على التجاوب

نكرر التجربة السابقة بتغيير قيمة المقاومة R:

- من أجل كل قيمة للمقاومة R، نمثل تغيرات الشدة المنتجة للتيار بدلالة التواتر فنحصل على البيانات المقابلة:
- من أجل مقاومة صغيرة $R = 37\Omega$، يكون التخامد ضعيفاً والتجاوب حاداً.

- من أجل مقاومة متوسطة $R = 100\Omega$ ، يكون التخامد متوسطا والتجاوب غير واضح (ضبابي).
- من أجل مقاومة كبيرة $R = 500\Omega$ ، يكون التخامد كبيرا والمنحنى منبسطا ولا يوجد تجاوب.

3- ممانعة ثنائي القطب (R,L,C) على التسلسل

لدينا: $\begin{cases} U(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi_0) = U_0\cos(\omega t+\varphi_0) \\ I(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi_0) = I_0\cos(\omega t+\varphi_0) \end{cases}$

حيث:

- $U(t)$: التوتر اللحظي (V)، متغير خلال الزمن.
- U_0: التوتر الأعظمي (V)، ثابت و: $U_0 = U_{eff}\sqrt{2}$.
- U_{eff}: التوتر المنتج (V)، ثابت.
- $I(t)$: شدة التيار اللحظي (A)، متغيرة خلال الزمن.
- I_0: شدة التيار الأعظمية (A)، ثابتة و $I_0 = U_{eff}\sqrt{2}$.
- I_{eff}: الشدة المنتجة (A)، ثابتة.
- $(\omega t+\varphi_0)$: الطور (rad).
- ω: نبض الحركة (rad/s).
- t: الزمن (s).
- φ_0: الصفحة الابتدائية (الزاوية) (rad).

مع:

- $\omega = 2\pi N$ ، N التواتر بالهرتز (Hz).
- $N = \frac{1}{T}$ ، الدور بالثانية (s).

تعطى ممانعة ثنائي القطب بالعلاقة التالية: $Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0}$ وتقدر بالأوم (Ω).

ملاحظة:

- جهاز أمبير يقيس الشدة المنتجة I_{eff}.
- جهاز فولط يقيس التوتر المنتج U_{eff}.

4- ممانعة ثنائي القطب (R,L,C) على التسلسل في حالة التجاوب

تعطى بالعلاقة التالية: $Z = \frac{U_0}{I_{résonance}} = R_{circuit}$

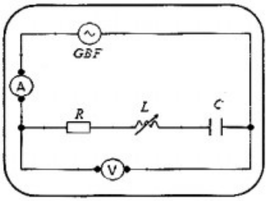
حيث: - الدارة: circuit.
- التجاوب: résonance.

تجاوب الشدة

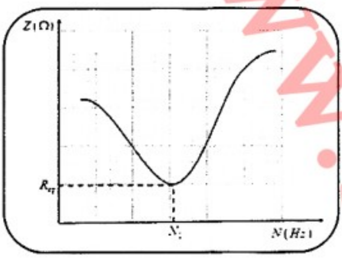
- نقول أن الدارة (R,L,C) المتسلسلة في حالة التجاوب عندما تكون ممانعة الدارة (Z) صغرى تساوي المقاومة المكافئة للدارة $R_{eq(\text{circuit})}$ ،
أي: $Z = R_{eq(\text{circuit})}$ ، عندئذ تكون الشدة المنتجة للتيار الكهربائي عظمى.
- يكون تجاوب الشدة عندما تتحقق العلاقة التالية: $LC\omega_0^2 = 1$.

5- تأثير العوامل N, L على ممانعة ثنائي القطب

6- نحقق دارة R, L, C على التسلسل (المخطط التالي):



تأثير التواتر N على ممانعة ثنائي القطب

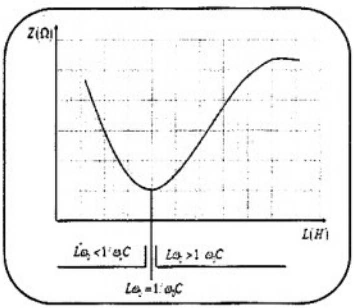


نثبت R, L, C ونغير من قيم التواتر المستعمل (N) ومن أجل كل قيمة لــ: N نقرأ قيمة التوتر المنتج بين طرفي الدارة U_{eff}، والشدة المنتجة للتيار الكهربائي I_{eff} ونحسب ممانعة الدارة ثم نمثل تغيرات الممانعة Z بدلالة التوتر N فنحصل على البيان المقابل:

تحليل البيان:

- من البيان نجد أن كلما ازداد التواتر N تناقصت ممانعة الدارة حتى تصل لقيمة صغرى عند التجاوب تبدأ بعدها بالتزايد.
- القيمة الحدية (N_0, R_{eq}) تمثل التواتر عند التجاوب N_0 وقيمة المقاومة المكافئة للدارة R_{eq}.
- تكون ممانعة الدارة عند التجاوب صغرى وتساوي المقاومة المكافئة أي: $Z = R_{eq}$ وتكون شدة التيار عندئذٍ عظمى.

تأثير ذاتية الوشيعة L على ممانعة ثنائي القطب



نثبت R, C, N ونغير من قيم ذاتية الوشيعة (L) المستعملة ومن أجل كل قيمة لــ: L نقرأ قيمة التوتر المنتج بين طرفي الدارة U_{eff}، والشدة المنتجة للتيار الكهربائي I_{eff} ونحسب ممانعة الدارة ثم نمثل تغيرات الممانعة Z بدلالة ذاتية الوشيعة L فنحصل على البيان المقابل:

تحليل البيان:

- من البيان نجد أن كلما ازدادت قيمة L تناقصت ممانعة الدارة حتى تصل لقيمة صغرى عند التجاوب تبدأ بعدها بالتزايد.
- عند التجاوب تتحقق العلاقة التالية: $L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0}$

التمرين ـــ 1 ★

تشحن مكثفة سعتها $C = 20nF$ تحت توتر قيمته $U = 10V$ نفرغ هذه المكثفة في وشيعة ذاتيتها $L = 0.05H$ ومقاومتها الداخلية r. الطاقة الضائعة خلال عملية التفريغ تعادل $\frac{1}{6}$ الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثفة.

1- متى تكون شدة التيار عظمى خلال التفريغ؟

2- احسب الشدة العظمى للتيار الكهربائي (I_{max}) .

3- في أية لحظة يكون $i = I_{max}$ ؟

الحل-1 :

1- إذا بدأ تفريغ المكثفة عند اللحظة $t = 0$ تكون شدة التيار عندها تكون معدومة، وبعد مرور زمن قدره $t = \frac{T_0}{4}$ تنعدم شحنة المكثفة وتبلغ شدة التيار قيمة عظمى.

2- حساب I_{max} :

- الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E_{(C)max} = \frac{1}{2}CU^2_{C\,max}$

من الجملة اللغوية التالية: الطاقة الضائعة خلال عملية التفريغ تعادل $\frac{1}{6}$ الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثفة.

نستنتج أن الطاقة الضائعة هي: $\frac{1}{6}E_{(C)max}$، وبالتالي الطاقة المفرغة في الوشيعة هي: $E_{(L)max} = \frac{5}{6}E_{(C)max}$ علما أن: $E_{(L)} = \frac{1}{2}LI^2_{max}$ ومنه: $\frac{1}{2}LI^2_{max} = \frac{5}{6}\frac{1}{2}CU^2_{C\,max} \Rightarrow I^2_{max} = \frac{5}{6}\frac{C}{L}U^2_{C\,max} \Rightarrow I_{max} = \sqrt{\frac{5}{6}\frac{C}{L}U^2_{C\,max}}$

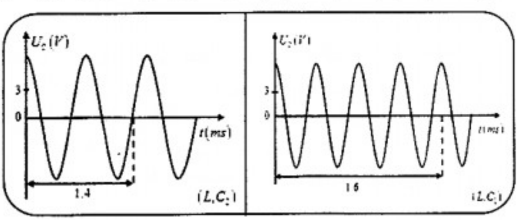
تطبيق عددي: $I_{max} = \sqrt{\frac{5 \times 20 \times 10^{-9} \times (10)^2}{6 \times 0.05}} = 5.8 \times 10^{-3}A \Rightarrow I_{max} = 5.8mA$

3- يكون $i = I_{max}$ عند $t = \frac{T_0}{4}$ علما أن: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ ومنه: $t = \frac{T_0}{4} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$

تطبيق عددي: $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{0.05 \times 20 \times 10^{-9}} = 49.6 \times 10^{-6}s \Rightarrow t = 49.6\mu s$

التمرين ـــ 2 ★★

تحتوي دارة كهربائية (1) على التسلسل مكثفة سعتها $C_1 = 0.1\mu F$ وشيعة $(L, r = 0)$ ، و تحتوي دارة كهربائية (2) على التسلسل مكثفة سعتها C_2 مجهولة، ونفس الوشيعة $(L, r = 0)$ في كلتا الحالتين تكون المكثفة مشحونة عندما نصل طرفيها إلى طرفي الوشيعة عند اللحظة $(t = 0)$. حتى نتابع تطور التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة نستعمل راسم اهتزازات فنحصل على البيانيين المقابلين:



1- احسب قمتي L و C_2.

2- كيف تؤثر سعة المكثفة على دور الاهتزازات؟

3- احسب طاقة كل من الجملتين المهتزتين.

4- احسب القيمة العظمى لشدة التيار الكهربائي في كل حالة.

الحل-2 :

1- قيمتي L و C_2:

- من البيان (L, C_1) لدينا: $4T_{01} = 1.6ms$ ومنه: $T_{01} = \frac{1.6 \times 10^{-3}}{4} = 4 \times 10^{-4}s$

علما أن: $T_{01}=2\pi\sqrt{LC_1}$ ومنه: $T_{01}^2=4\pi^2LC_1 \Rightarrow L=\frac{T_{01}^2}{4\pi^2C_1}=\frac{\left(4\times10^{-4}\right)^2}{4\times(3.14)^2\times0.1\times10^{-6}}=0.04H$

- من البيان (L,C_2) لدينا: $\left(1+\frac{3}{4}\right)T_{02}=1.4ms$ أي: $\frac{7}{4}T_{02}=1.4ms$

ومنه: $T_{02}=\frac{4\times1.4\times10^{-3}}{7}=8\times10^{-4}s$

علما أن: $T_{02}=2\pi\sqrt{LC_2}$ ومنه:

$$T_{02}^2=4\pi^2LC_2 \Rightarrow C_2=\frac{T_{02}^2}{4\pi^2L}=\frac{\left(8\times10^{-4}\right)^2}{4\times(3.14)^2\times0.04}=4\times10^{-7}F \Rightarrow C_2=0.4\mu F$$

إذا: $L=0.04H$ و $C_2=4\times10^{-7}F=0.4\mu F$

2- عند استعمال: $C_1=0.1\mu F$، وجدنا: $T_{01}=4\times10^{-4}s$

و عند استعمال: $C_2=0.4\mu F$، وجدنا: $T_{02}=8\times10^{-4}s$

لدينا: $C_2>C_1$ و $T_{02}>T_{01}$، نستنتج أن كلما ازدادت سعة المكثفة ازداد الدور.

3- قيمة طاقة الجملة (L,C_1): $E_{(C_1)}=\frac{1}{2}C_1U_{C_1}^2=\frac{1}{2}\times0.1\times10^{-6}\times(6)^2=18\times10^{-7}J$

قيمة طاقة الجملة (L,C_2): $E_{(C_2)}=\frac{1}{2}C_2U_{C_2}^2=\frac{1}{2}\times4\times10^{-7}\times(6)^2=72\times10^{-7}J$

4- حساب القيمة العظمى لشدة التيار في كل حالة:

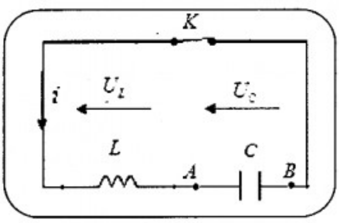
بما أن المقاومة الداخلية للوشيعة معدومة $(r=0)$ فإن الدارة مثالية والطاقة المخزنة في المكثفة تتحول إلى الوشيعة.

أي: $E_{(C_1)}=E_{(L)_1}$ و $E_{(C_2)}=E_{(L)_2}$ حيث: $\begin{cases}E_{(L)_1}=\frac{1}{2}LI_{01}^2\\E_{(L)_2}=\frac{1}{2}LI_{02}^2\end{cases}$

- الجملة (L,C_1): $E_{(C_1)}=\frac{1}{2}LI_{01}^2 \Rightarrow I_{01}^2=\frac{2E_{(C_1)}}{L} \Rightarrow I_{01}=\sqrt{\frac{2E_{(C_1)}}{L}}=\sqrt{\frac{2\times18\times10^{-7}}{0.04}}=9.48mA$
- الجملة (L,C_2): $E_{(C_2)}=\frac{1}{2}LI_{02}^2 \Rightarrow I_{02}^2=\frac{2E_{(C_2)}}{L} \Rightarrow I_{02}=\sqrt{\frac{2E_{(C_2)}}{L}}=\sqrt{\frac{2\times72\times10^{-7}}{0.04}}=18.97mA$

التمرين ــ 3 ★★

تضم دارة كهربائية على التسلسل وشيعة صافية $(L=100mH, r=0)$
و مكثفة سعتها $C=10\mu F$ مشحونة بداية كما بالشكل :
نغلق القاطعة فتتفرغ المكثفة في الوشيعة بشكل دوري.



1- ما هي الظاهرة التي تحدث في الدارة؟
2- اكتب المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة الشحنة q_A المحمولة على اللبوس A .
3- اكتب العبارة الحرفية للدور الذاتي للاهتزازات T_0 ثم احسب قيمته العددية.

الحل-3 :

1- بما أن مكونات الدارة هي (L,C) لا تحتوي على المقاومة فهي دارة مثالية، عند غلق القاطعة K تتغير شحنة المكثفة بدلالة الزمن بشكل دوري أي حدوث اهتزازات كهربائية غير متخامدة.

2- المعادلة التفاضلية:

بتطبيق قانون مجموع التوترات في الدارة المتسلسلة (L,C) فنجد: $U_L+U_C=0$

حيث: $U_C=\frac{q}{C}$ ، $U_L=L\frac{di}{dt}$ ، أي: $L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0$

علما أن: $i=\frac{dq}{dt}$ ومنه: $\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$

المعادلة السابقة تصبح: $L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0$ أي: $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q(t)=0$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـــ: q.

3- الدور الذاتي T_0:

بالتعريف: $T_0=2\pi\sqrt{LC}$

تطبيق عددي: $L=100\times10^{-3}H, C=10\times10^{-6}F$

ومنه: $T_0=2\pi\sqrt{100\times10^{-3}\times10\times10^{-6}}=6.28\times10^{-3}s\Rightarrow T_0=6.28ms$

التمرين ــ 4 ★★

مكثفة سعتها C مشحونة بداية تحت توتر U_0. عند اللحظة $t=0$ نصل طرفي المكثفة إلى طرفي وشيعة (L,r) .

1- ما هي الظاهرة التي تحدث في الدارة؟ علل.

2- أكتب المعادلة التفاضلية للدارة (L,r,C) بدلالة $U_C(t)$.

3- إذا اعتبرنا $r=0$ كيف يصبح شكل المعادلة التفاضلية؟ و ما هو حلها؟

4- اكتب عبارتي الطاقة المخزنة في المكثفة و الطاقة المتولدة في الوشيعة.

5- عبر عن التوتر الأعظمي بين لبوسي المكثفة U_m بدلالة I_m,L,C .

الحل-4 :

1- تحدث اهتزازات كهربائية حرة ومتخامدة:

التعليل: عند تفرغ مكثفة في وشيعة فإن التفريغ يكون مهتز وحر.

وجود مقاومة في الدارة المهتزة تسبب ضياع جزء من الطاقة بفعل جول وبالتالي التفريغ المهتز يكون متخامدا، أي تناقص تدريجي في سعة الاهتزازات حتى تنعدم.

2- المعادلة التفاضلية للدارة (L,r,C) بدلالة $U_C(t)$:

بتطبيق قانون مجموع التوترات في الدارة المتسلسلة (L,r,C) نجد: $U_L+U_C(t)=0$

حيث: $U_L=L\frac{di}{dt}+ri$ ومنه: $L\frac{di}{dt}+ri+U_C(t)=0$.

لكن: $q=CU_C(t)$ و $i=\frac{dq}{dt}$ أي: $i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(CU_C)}{dt}=C\frac{dU_C}{dt}\Rightarrow\frac{di}{dt}=C\frac{d^2U_C}{dt^2}$

وبتعويض i و $\frac{di}{dt}$ في المعادلة السابقة نجد:

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2}+rC\frac{dU_C}{dt}+U_C(t)=0\Rightarrow\frac{d^2U_C}{dt^2}+\frac{r}{L}\frac{dU_C}{dt}+\frac{1}{LC}U_C(t)=0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـــ: $U_C(t)$.

3- في حالة $r=0$ فإن المعادلة التفاضلية السابقة تصبح: $\frac{d^2U_C}{dt^2}+\frac{1}{LC}U_C(t)=0$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وحلها من الشكل: $U_C(t)=U_0\cos(\omega_0t+\varphi_0)$.

4- الطاقة المخزنة في المكثفة: $E_{(C)}=\frac{1}{2}CU_C^2(t)$

الطاقة المتولدة في الوشيعة: $E_{(L)}=\frac{1}{2}Li^2(t)$

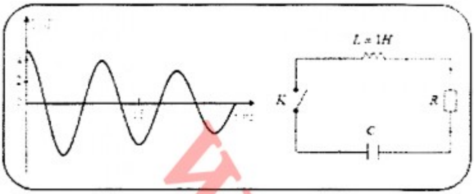
5- عبارة التوتر الأعظمي بين لبوسي المكثفة U_m بدلالة I_m,L,C:

بما أن الدارة مثالية $(r=0)$ فإن: $E_{(C)\max}=E_{(L)\max}$

أي: $\frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}LI_m^2 \Rightarrow U_m^2 = \frac{L}{C}I_m^2 \Rightarrow U_m = \sqrt{\frac{L}{C}}I_m$

التمرين ــ 5 ★★

مهتز كهربائي كما في الشكل المقابل:
المكثفة بداية مشحونة، عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة و نتابع في البيان المرافق تغيرات التوتر الكهربائي $U_C(t)$ بين طرفي المكثفة.



1- عين قيمة شبه دور الاهتزازات.
2- احسب سعة المكثفة.
3- احسب الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثفة.

الحل-5 :

1- قيمة شبه دور الاهتزازات:

من البيان نجد: $\frac{3}{2}T = 1.5\times10^{-3}s$ ومنه: $T = \frac{2\times1.5\times10^{-3}}{3} = 10^{-3}s$ أي: $T = 1ms$

2- سعة المكثفة: التخامد الحاصل ضعيف لذلك $T \approx T_0$ ولدينا: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

ومنه: $T^2 \approx 4\pi^2 LC \Rightarrow C \approx \frac{T^2}{4\pi^2 L} \approx \frac{\left(10^{-3}\right)^2}{4\times(3.14)^2\times1} \approx 0.025\times10^{-6}F$ إي: $C \approx 0.025\mu F$

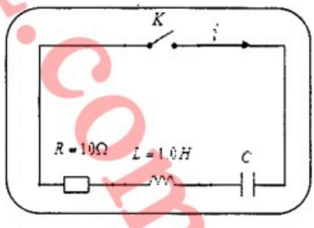
3- الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثفة:

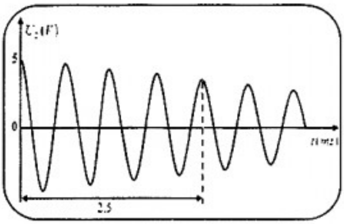
لدينا: $E_{(C)} = \frac{1}{2}CU_0^2$ ، نقيس من المنحنى U_0 فنجد: $U_0 \approx 4.5V$

ومنه: $E_{(C)} \approx \frac{1}{2}\times0.025\times10^{-6}\times(4.5)^2 \approx 0.25\times10^{-6}J$

التمرين ــ 6 ★★

دارة كهربائية R, L, C على التسلسل كما بالشكل:
المكثفة مشحونة بداية، نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ و نتابع تغيرات $U_C(t)$ فنحصل على البيان التالي:





1- ما طبيعة الاهتزازات في الدارة؟ علل.
2- عين قيمة شبه دور الاهتزازات.
3- احسب سعة المكثفة.
4- احسب الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثفة.
5- عين الطاقة المتولدة في الوشيعة عند اللحظة $t = \frac{T}{4}$.

الحل-6 :

1- الاهتزازات الحاصلة حرة متخامدة، لأن السعة تتناقص مع مرور الزمن بسبب وجود المقاومة في الدارة.
2- قيمة شبه دور الاهتزازات:

من البيان لدينا: $4T = 2.5\times10^{-3}s$ ومنه: $T = \frac{2.5\times10^{-3}}{4} = 0.625\times10^{-3}s$ أي: $T = 0.625ms$.

3- سعة المكثفة:

التخامد الحاصل ضعيف لذلك نضع $T \approx T_0$ وبما أن $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ فنجد: $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$

ومنه: $T^2 \approx 4\pi^2 LC \Rightarrow C \approx \dfrac{T^2}{4\pi^2 L} \approx \dfrac{\left(0.625\times10^{-3}\right)^2}{4\times(3.14)^2\times1} \approx 9.9\times10^{-9}F$

أي: $C \approx 9.9\eta F$.

4- الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثفة:

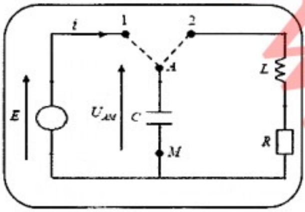
لدينا: $E_{(C)} = \dfrac{1}{2}CU_0^2$ ، من البيان نجد: $U_0 = 5V$ مع $C = 9.9\eta F$

فإن: $E_{(C)} = \dfrac{1}{2}\times9.9\times10^{-9}\times(5)^2 = 12.37\times10^{-8}J$

5- الطاقة المتولدة في الوشيعة عند اللحظة $t = \dfrac{T}{4}$:

بعد مرور زمن قدره $t = \dfrac{T}{4}$ فإن: $E_{(L)} = \dfrac{1}{2}LI_0^2 = E_{(C)} = 12.37\times10^{-8}J$

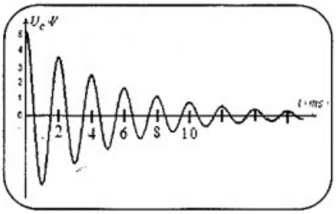
التمرين ـــ 7 ★★



في الدارة المقابلة لدينا: مكثفة سعتها $C = 1\mu F$ فارغة في البداية، وشيعة $(L, r=0)$. $R = 20\Omega$ ، مولد لتوتر ثابت $(E = 5V)$.

1- نضع في البادلة في الوضع (1) لمدة زمنية قدرها $1ms$ على الأكثر. احسب الطاقة المخزنة في المكثفة.

2- عند اللحظة $t = 0$ نقلب البادلة للوضع (2) ونسجل تغيرات $U_C(t)$ نحصل على البيان التالي:



أحسب قيمة ذاتية الوشيعة.

3- نستبدل المولد بآخر قوته المحركة الكهربائية $E = 10V$ كم تصبح قيمة تواتر الاهتزازات؟

الحل-7 :

1- الطاقة المخزنة في المكثفة:

بما أن ثابت الزمن يعطى بالعلاقة $\tau = R.C$ ومنه: $\tau = 20\times1\times10^{-6} = 20\times10^{-6}s$.

علما أن بعد مرور زمن قدره 5τ تشحن المكثفة كليا، حيث: $5\tau = 10^{-4}s$ وبالتالي: $5\tau = 10^{-4}s < 10^{-3}s$ أي عند زمن $1ms$ تكون المكثفة قد شحنت كليا.

لذلك نستعمل العلاقة $E_{(C)} = \dfrac{1}{2}CU_C^2$ مع: $U_C = U_{AM} = E = 5V$

أي: $E_{(C)} = \dfrac{1}{2}\times1\times10^{-6}\times(5)^2 = 12.5\times10^{-6}J$

2- البادلة في الوضع (2) نجد قيمة ذاتية الوشيعة:

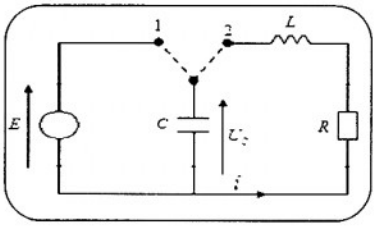
- قيمة T : من البيان نجد: $5T = 10\times10^{-3}s$ ومنه: $T = 2\times10^{-3}s$
- نأخذ $T \approx T_0$ (التخامد ضعيف) حيث: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ ومنه: $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$

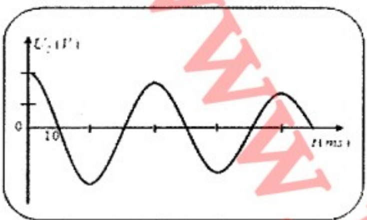
أي: $L \approx \frac{T^2}{4\pi^2 C} \approx \frac{\left(2\times10^{-3}\right)^2}{4\times(3.14)^2\times10^{-6}} = 0.1H$ إذا: $T^2 \approx 4\pi^2 LC \Rightarrow$. $L = 0.1H$

3- قيمة تواتر الاهتزازات:
تواتر الاهتزازات لا يتعلق بتوتر التغذية.
لدينا: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\times10^{-3}} \Rightarrow f = 500Hz$

التمرين ـــ 8 ★★

في المخطط التالي لدينا: $C = 1.0mF . E = 10V$
-البادلة في الوضع (1).
1-ما هي الظاهرة التي تحدث في الدارة؟
2-نقلب البادلة إلى الوضع (2) ونتابع تغيرات التوتر بين طرفي المكثفة فنحصل على البيان التالي:





أ- فسر البيان.
ب- إن دور الاهتزازات الحاصلة قريب من دور الاهتزازات الحرة غير الخامدة. احسب قيمة L .
ج- كم تصبح قيمة دور الاهتزازات في الدارة لو جعلنا سعة المكثفة $C = 4mF$.
د- ما هي الطاقة الضائعة بفعل جول في نهاية الاهتزازة الثانية.
هـــ- مثل تغيرات $U_C(t)$ من اجل $R = 0$.

الحل-8 :

1- البادلة في الوضع (1)، تشحن المكثفة.
2- البادلة في الوضع (2):
أ- تفسير البيان:
البيان يمثل اهتزازات حرة متخامدة في الدارة المتسلسلة (R, L, C) حيث تتناقص سعة الاهتزازات تدريجيا بسبب وجود المقاومة في الدارة.
ب- قيمة L :
بما أن دور الاهتزازات الحاصلة T قريب من الاهتزازات الحرة غير الخامدة T_0،أي: $T \approx T_0$
فإن: $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.
من البيان نجد: $2T = 80\times10^{-3}s$ ومنه: $T = 4\times10^{-2}s$
لدينا: $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$ ومنه: $T^2 \approx 4\pi^2 LC \Rightarrow L \approx \frac{T^2}{4\pi^2 C} \approx \frac{\left(4\times10^{-2}\right)^2}{4\times(3.14)^2\times1\times10^{-3}} \approx 0.04H$
إذا: $L = 0.04H$
ج- قيمة دور الاهتزازات T' في حالة $C = 4mF$:
في حالة مضاعفة سعة المكثفة أربع مرات نجد:
$T' = 2\pi\sqrt{L\times4C} = 2\times2\pi\sqrt{LC} = 2T = 2\times4\times10^{-2} = 8\times10^{-2}s = 80ms$ أي: $T' = 80ms$.

د- الطاقة الضائعة بفعل جول في نهاية الاهتزازة الثانية:

تكون نهاية الاهتزازة الثانية عند $t = 2T$، ومنه: $U_C(t) \approx 6.3V$ وذلك من البيان وبالتالي:

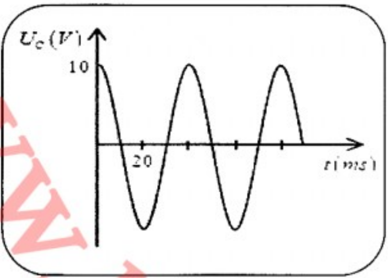
$$E_{(C)} = \frac{1}{2}CU_C^2(t) = \frac{1}{2}\times 1\times 10^{-3}\times (6.3)^2 = 19.8\times 10^{-3}J$$

لما $t = 0$ لدينا: $U_C(t) = 10V$ فإن: $E'_{(C)} = \frac{1}{2}CU_C^2(t) = \frac{1}{2}\times 1\times 10^{-3}\times (10)^2 = 50\times 10^{-3}J$

إذا الطاقة الضائعة بفعل جول في نهاية الاهتزازة الثانية هي:

$$\Delta E_{(C)} = E'_{(C)} - E_{(C)} = (50\times 10^{-3}) - (19.8\times 10^{-3}) = 30.2\times 10^{-3}J$$

هـ- تمثيل تغيرات $U_C(t)$ من اجل $R = 0$:



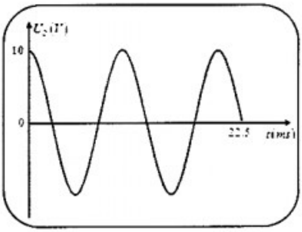
التمرين ـ 9 ★★

يتألف مهتز كهربائي مثالي من وشيعة ذاتيتها L مقاومتها الداخلية مهملة، مكثفة سعتها $C = 22\mu F$ ، قاطعة، أسلاك التوصيل، مقياس فولط لمتابعة التوتر بين طرفي المكثفة $U_C(t) = U_{AB}$ حيث $i_{AB} > 0$.

1- حقق الدارة.

2- عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة و نسجل تغيرات U_C في عدة لحظات فنحصل على البيان المقابل:

اكتب العلاقة بين شدة التيار المار بالدارة و التوتر U_C .



3- ما هو نمط الاهتزازات الحاصلة؟ علل.

4- تعطى المعادلة التفاضلية للدارة بالعلاقة التالية:

$$U_C(t) + LC\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$$

أوجد قيمة الدور الذاتي للاهتزازات الحاصلة و احسب L .

5- اثبت أن مشتق طاقة الدارة بالنسبة للزمن معدوم. ثم اوجد القيمة العددية لهذه الطاقة.

6- نفتح القاطعة و نضيف للدارة مقاومة متغيرة R ثم نعيد غلق القاطعة من جديد.

من اجل $R = 10\Omega$ تكون تغيرات U_C بدلالة الزمن كما في البيان التالي:

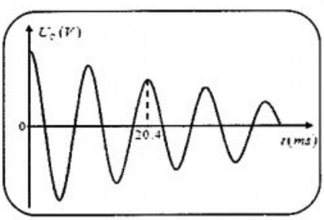
أ- ما هو نمط الاهتزازات الحاصلة؟

ب- هل تؤثر قيمة المقاومة على شبه دور الاهتزازات؟

اوجد قيمة شبه الدور.

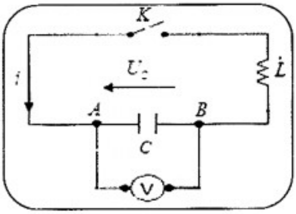
ج- كيف تؤثر المقاومة على طبيعة الاهتزازات؟

د- احسب القيمة العظمى لشدة التيار الكهربائي المار بالدارة.



الحل-9 :

1- الدارة:



2- العلاقة بين شدة التيار المار بالدارة والتوتر U_C:

لدينا: $q(t) = CU_C(t)$ و $i(t) = \frac{dq}{dt}$ ومنه: $i(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt}$

3- الاهتزازات الحاصلة حرة غير متخامدة، لأن سعة الاهتزازات ثابتة خلال الزمن.

- حرة (لا يوجد مولد).
- غير متخامدة (السعة ثابتة، $R = 0$).

4- قيمة T_0:

من البيان: $\frac{9}{4}T_0 = 22.5\times10^{-3}s$ ومنه: $T_0 = \frac{4\times22.5\times10^{-3}}{9} = 10^{-2}s$، أي: $T_0 = 10ms$

- حساب L : بما أن: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

ومنه: $T_0^2 = 4\pi^2 LC \Rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C} = \frac{(10^{-2})^2}{4\times(3.14)^2\times22\times10^{-6}} = 0.115H$، أي: $L = 0.115H$.

5- طاقة الدارة: $E = E_{(C)} + E_{(L)} = \frac{1}{2}CU_C^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t)$

لكن: $i(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt}$، أي: $E = \frac{1}{2}CU_C^2(t) + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{dU_C}{dt}\right)^2$

ومنه: $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}CU_C^2(t) + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{dU_C}{dt}\right)^2\right] = CU_C\frac{dU_C}{dt} + LC^2\frac{dU_C}{dt}\frac{d^2U_C}{dt^2}$

وبالتالي: $\frac{dE}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}\left[U_C + LC\frac{d^2U_C}{dt^2}\right]$

المعادلة التفاضلية المعطاة للدارة المثالية (L,C) هي: $U_C(t) + LC\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$

إذا: $\frac{dE}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}\times0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

مشتق طاقة الدارة بالنسبة للزمن معدوم، ومنه: $E(t) = C^{te}$

- طاقة الدارة: $E = \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}\times22\times10^{-6}\times(10)^2 = 1.1\times10^{-3}J$

6- إضافة مقاومة متغيرة:

أ- الاهتزازات الحاصلة حرة ومتخامدة.

ب- المقاومة لا تؤثر على شبه دور الاهتزازات.

- قيمة شبه الدور T:

من البيان: $2T = 20.4\times10^{-3}s$ ومنه: $T = 10.2\times10^{-3}s$، أي: $T = 10.2ms$.

ج- تأثير المقاومة على طبيعة الاهتزازات:

كلما ازدادت قيمة المقاومة ازداد تخامد الاهتزازات ونقص عددها.

د- قيمة I_{max}:

طاقة الدارة: $E = E_{(C)} + E_{(L)}$، عند اللحظة $t = 0$ يكون $i(0) = 0$ ومنه: $E_{(L)} = 0$.

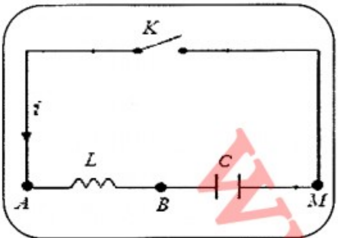
وبالتالي: $E = E_{(C)} = 1.1\times10^{-3}J$

تكون شدة التيار عظمى لما: $t = \frac{T}{4}$، حيث $U_C = 0$ ومنه: $E = E_{(L)}$

أي: $E=\frac{1}{2}LI_{max}^2$ ، وبالتالي: $I_{max}=\sqrt{\frac{2E}{L}}$

تطبيق عددي: $I_{max}=\sqrt{\frac{2\times1.1\times10^{-3}}{0.115}}=0.138A$

التمرين ــ 10 ★★



تضم دارة على التسلسل وشيعة $(L=1.0H, r=0)$ مكثفة سعتها $(C=22mF)$ تم شحنها تحت توتر ثابت $(E=3.0V)$

عند اللحظة $(t=0)$ نغلق القاطعة.

1- أسس المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة q .

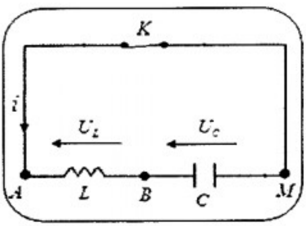
2- حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل التالي $q(t)=a\cos bt$ ، عين a,b .

3- أكتب العبارة الحرفية للدور الذاتي بدلالة L,C . وأوجد قيمته العددية.

4- اوجد قيمة شدة التيار الكهربائي I_0 .

5- مثل تغيرات شدة التيار $i(t)$ والشحنة $q(t)$ بدلالة الزمن؟

الحل-10 :



1- المعادلة التفاضلية للدارة (L,C) بدلالة q:

بتطبيق قانون مجموع التوترات في الدارة المتسلسلة (L,C) نجد:

$$U_{AB}+U_{BM}+U_{MA}=0$$

حيث:
$$\begin{cases} U_{AB}=U_L=L\frac{di}{dt} & - \\ U_{BM}=U_C=\frac{q(t)}{C} & - \\ U_{MA}=0 & - \end{cases}$$

مع $i=\frac{dq}{dt}$ فنجد: $U_{AB}=L\frac{d^2q}{dt^2}$

بالتعويض نجد: $L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q(t)+0=0$ ومنه: $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q(t)=0$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لــ q .

2- تعين a,b:

- تعين a : نجد a لما: $t=0$ فنحصل على: $q(0)=a\cos b(0)=a$

نستنتج أن: a يمثل الشحنة الكهربائية الأعظمية المخزنة في المكثفة لما $(t=0)$ ومنه: $a=Q=CE$

تطبيق عددي: $a=22\times10^{-3}\times3=66\times10^{-3}C\Rightarrow Q=66\times10^{-3}C$

- تعين b : حل المعادلة التفاضلية السابقة من الشكل التالي: $q(t)=a\cos bt=Q\cos bt$

نشتق $q(t)$ مرتين بالنسبة للزمن فنجد: $\frac{dq}{dt}=-ba\sin bt$

ومنه: $\frac{d^2q}{dt^2}=-b^2a\cos bt=-b^2q(t)\Rightarrow\frac{d^2q}{dt^2}+b^2q(t)=0$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية نجد: $b^2=\frac{1}{LC}$ ومنه: $b=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ حيث: $b=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

تطبيق عددي: $\omega_0=b=\frac{1}{\sqrt{1\times22\times10^{-3}}}=6.74rad/s$

3- العبارة الحرفية للدور الذاتي بدلالة $(L.C)$:

لدينا: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ومنه: $T_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

قيمة T_0: $T_0 = \frac{2(3.4)}{6.74} = 0.93s$

4- قيمة I_0:

I_0 تمثل القيمة العظمى لـــ: $i(t)$

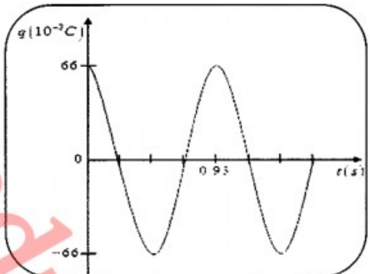
لدينا: $q(t) = a\cos bt = Q\cos\omega_0 t$ و $i(t) = \frac{dq}{dt}$ ومنه: $i(t) = -Q\omega_0 \sin\omega_0 t$

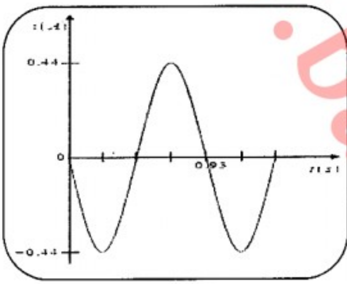
$i(t)$ أعظمي لما: $\sin\omega_0 t = \pm 1$ وبالتالي: $i(t) = \pm Q\omega_0 = I_0$

إذا: $I_0 = Q\omega_0 = 66\times 10^{-3}\times 6.74 = 0.44A$

5- تمثيل تغيرات شدة التيار $i(t)$ والشحنة $q(t)$ بدلالة الزمن:

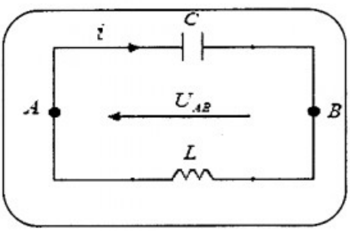
لدينا: $i(t) = -0.44\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ و $q(t) = 66\times 10^{-3}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$، علما أن: $T_0 = 0.93s$.





التمرين ــ 11 ★★

مكثفة سعتها $C = 1.0\times 10^{-9}F$ شحنت تحت توتر ثابت $U_{AB} = U_0 = 2.0V$. عند اللحظة الزمنية $(t=0)$ نربطها مع وشيعة مقاومتها مهملة وذاتيتها $L = 0.10H$ عند اللحظة $t = 0$ تكون شدة التيار الكهربائي المار في الدارة LC معدومة.



1- أنشئ المعادلة التفاضلية بدلالة q_A شحنة اللبوس A.

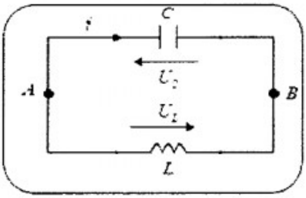
2- عبر عن كل من q_A و U_{AB} و i بدلالة الزمن.

3- أحسب الدور الذاتي T_0 للاهتزازات الحاصلة.

4- اكمل الجدول التالي مع التعليل:

$i(A)$	$U_{AB}(V)$	$q(C)$
0		
10^{-4}		

الحل-11 :



1- المعادلة التفاضلية بدلالة q_A شحنة اللبوس A :

بتطبيق قانون مجموع التوترات في الدارة المتسلسلة (L,C) نجد:

$U_{AB}+U_{BA}=0$ ومنه: $U_C+U_L=0$

علما أن: $\left(U_C=\dfrac{q(t)}{C}\right)$ و $\left(U_L=L\dfrac{di}{t}\right)$ مع: $i=\dfrac{dq}{dt}$ فنجد:

$\left(U_L=L\dfrac{d^2q}{dt^2}\right.$

بالتعويض نجد: $\dfrac{q(t)}{C}+L\dfrac{d^2q}{dt^2}=0$ ومنه: $\dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{1}{LC}q(t)=0$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بدلالة q_A شحنة اللبوس A .

2- عبارات q_A و U_{AB} و i بدلالة الزمن:

- $q_A(t)=Q\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

- $U_{AB}=U_C=\dfrac{q(t)}{C}=\dfrac{Q}{C}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=U_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

- $i=\dfrac{dq(t)}{dt}=-Q\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$

تعين φ_0:

لما: $t=0$ لدينا: $\begin{cases} q(0)=Q\cos(\omega_0\times 0+\varphi_0)=Q\cos\varphi_0=CU_0 \\ i(0)=-Q\omega_0\sin(\omega_0\times 0+\varphi_0)=-Q\omega_0\sin\varphi_0=0\Rightarrow -\sin\varphi_0=0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} \cos\varphi_0=1 \\ -\sin\varphi_0=0 \end{cases}$ إذا: $\varphi_0=0$ أو $\varphi_0=\pi$

من أجل $\varphi_0=\pi$ فإن: $q(0)=-Q$ مرفوض.

من أجل $\varphi_0=0$ فإن: $q(0)=+Q$ مقبول.

ومنه: $\begin{cases} q_A(t)=Q\cos(\omega_0 t) \\ U_{AB}(t)=U_0\cos(\omega_0 t) \\ i(t)=-Q\omega_0\sin(\omega_0 t) \end{cases}$

3- الدور الذاتي T_0:

$$T_0=2\pi\sqrt{LC}=2\times 3.14\sqrt{0.1\times 1\times 10^{-9}}=6.28\times 10^{-5}s$$

4- إكمال الجدول:

- من العلاقة: $i(t)=-Q\omega_0\sin(\omega_0 t)$ ومن الجدول $i(t)=0$ نجد: $-Q\omega_0\sin(\omega_0 t)=0$

أي: $\sin(\omega_0 t)=0$ نستنتج أن: $\cos\omega_0 t=\pm 1$

وبالتالي: $\begin{cases} U_{AB}(t)=U_0\cos\omega_0 t=U_0\times(\pm 1)=\pm U_0=\pm 2V \\ q_A(t)=Q\cos\omega_0 t=Q\times(\pm 1)=\pm CU_0=\pm 2\times 10^{-9}C \end{cases}$

- من العلاقة: $i(t)=-Q\omega_0\sin(\omega_0 t)$ ومن الجدول $i(t)=10^{-4}A$ نجد: $-Q\omega_0\sin(\omega_0 t)=10^{-4}$

ومنه: $\sin\omega_0 t=-\dfrac{10^{-4}}{\omega_0 Q}$

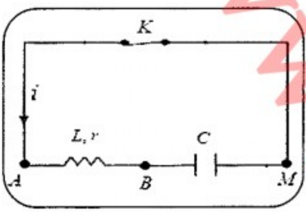
أي: $-\frac{1}{2} = -\dfrac{10^{-4}}{\dfrac{2\pi}{2\pi\times 10^{-3}}\times 1\times 10^{-9}\times 2} = -\dfrac{10^{-4}}{\dfrac{2\pi}{T_0}\times CU_0} = \sin\omega_0 t$. إذا: $\omega_0 t = -\frac{\pi}{6}$

وبالتعويض نجد:
$$\begin{cases} U_{AB}(t) = U_0\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 1.73V \\ q_A(t) = Q\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = CU_0\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1.73\times 10^{-9}C \end{cases}$$

- الجدول:

$i(A)$	$U_{AB}(V)$	$q(C)$
0	± 2	$\pm 2\times 10^{-9}$
10^{-4}	1.73	1.73×10^{-9}

التمرين ـــ 12 ★★



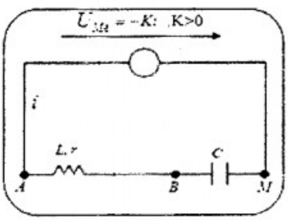
دارة كهربائية ممثلة بالمخطط المقابل:
المكثفة المشحونة بداية. نغلق القاطعة:

1- ما هي الظاهرة التي تحدث في الدارة؟

2- أنشئ المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تطور شحنة المكثفة $q = q_B$ خلال الزمن.

3- كيف تصبح هذه المعادلة لو اعتبرنا مقاومة الوشيعة مهملة؟ ماذا تقول عن الاهتزازات عندها؟ ما هي عبارة الدور الذاتي للاهتزازات الحاصلة في هذه الحالة.

4- لماذا نحتاج إلى طاقة لتغذية الاهتزازات في الدارة الحقيقية (r, L, C)؟



5- من اجل تغذية الاهتزازات نضيف للدارة الحقيقية مولدا يعطي توترا كهربائيا من الشكل: $U_{MA} = -ki$ حيث $k > 0$.

أ-أنشئ المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة شحنة المكثفة.

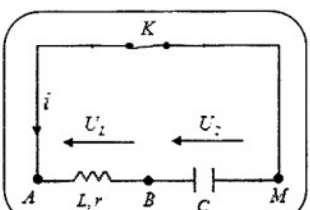
ب- يمثل ثنائي القطب الموافق للجزء من الدارة MA مقاومة سالبة، علل سبب هذه التسمية.

ج-في أي شروط (علاقة بين k, r) تظهر اهتزازات مغذاة؟

الحل-12 :

1- تفريغ المكثفة في الوشيعة (اهتزازات حرة متخامدة)

2- المعادلة التفاضلية:



بتطبيق قانون مجموع التوترات نجد: $U_{AB} + U_{BM} + U_{MA} = 0$

أي: $U_L + U_C + 0 = 0 \Rightarrow ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q(t)}{C} = 0$

مع: $i = \dfrac{dq}{dt}$ و $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$ وبالتالي: $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + r\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q(t) = 0$ ،

إذا: $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q(t) = 0$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـــ: q .

3- في حالة مقاومة الوشيعة مهملة أي $(r \approx 0)$، المعادلة التفاضلية تصبح من الشكل التالي: $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}q(t) = 0$ وحلها من الشكل: $q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

نقول عن الاهتزازات أنها حرة غير متخامدة دورها الذاتي يعطى بالعلاقة التالية: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

4- نحتاج إلى طاقة لتغذية الاهتزازات في الدارة الحقيقية (r,L,C) لتعويض الطاقة الضائعة بفعل جول عن طريق المقاومة.

5- إضافة مولد للدارة الحقيقية (r,L,C):

أ- المعادلة التفاضلية:

بتطبيق قانون مجموع التوترات نجد: $U_{AB}+U_{BM}+U_{MA}=0$

أي: $L\frac{di}{dt}+ri+\frac{1}{C}q(t)-Ki=0 \Rightarrow L\frac{di}{dt}+(r-K)i+\frac{q(t)}{C}=0$ مع: $i=\frac{dq}{dt}$ و $\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$

وبالتالي: $L\frac{d^2q}{dt^2}+(r-K)\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=0$ ، إذا: $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{(r-K)}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q(t)=0$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة لـــ: q.

ب- بالمطابقة بين فرق الكمون المولد $U=-Ki$ وقانون أوم بين طرفي المقاومة $U=Ri$ نجد أن: $-K=R \Rightarrow R=-K$ لذا نقول أن المولد كأنه مقاومة سالبة.

ج- تظهر اهتزازات مغذاة في حالة: $K-r=0$ أي: $K=r$ ، والمعادلة التفاضلية تصبح: $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q(t)=0$

التمرين ـــ 13 ★★

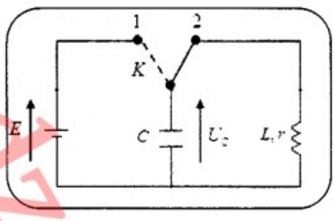
نحقق الدارة الكهربائية التالية:

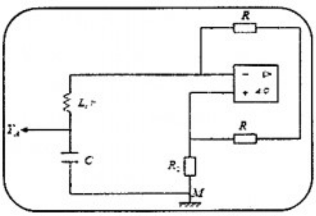
تحتوي الدارة على مولد توتر مستمر قوته المحركة الكهربائية $E=6.0V$ ، مقاومته الداخلية مهملة، مكثفة سعتها $C=2.0\mu F$ وشيعة (L,r) .

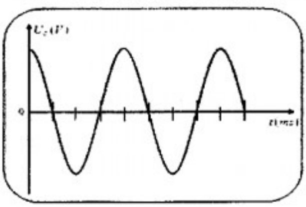
1- نشحن المكثفة بوضع البادلة في الوضع (1)، ماذا تشاهد على شاشة راسم الاهتزازات الموصل بين طرفي المكثفة؟

2- نقلب البادلة إلى الوضع (2) ماذا تشاهد في حالة كون المقاومة r ضعيفة؟

3- نحقق الدارة الكهربائية التالية(دارة يمكن تشبيهها بمقاومة سالبة علما إنها غير موجودة حقيقة) ونصل الدارة بالعناصر السابقة نفسها كما بالشكل:







من أجل $R_0=12\Omega$ نشاهد البيان المقابل:

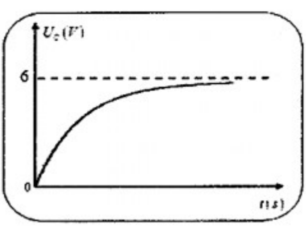
المسح الزمني $0.2ms/div$

الحساسية الشاقولية $1V/div$

أ- اشرح الظاهرة التي تشاهدها.

ب- قدر مميزتي الوشيعة.

الحل-13 :



1- نشاهد على شاشة راسم الاهتزازات الموصل بين طرفي المكثفة بيان تطور التوتر الكهربائي U_C بين لبوسي المكثفة بدلالة الزمن، ويكون كما في الشكل المقابل:

2- البادلة في الوضع (2) والمقاومة صغيرة نشاهد على شاشة راسم الاهتزازات اهتزازات شبه دورية ذات تخامد ضعيف.

تمثل هذه الاهتزازات كيفية تغير التوتر بين طرفي المكثفة U_C بدلالة الزمن.

3- من أجل $R_0 = 12\Omega$:

أ- نشاهد اهتزازات دورية غير متخامدة.

ب- تتميز الوشيعة بالمقاومة الداخلية r وذاتية L.

- لكي تكون الاهتزازات غير متخامدة يجب أن تكون $r = R_0$ ومنه: $r = 12\Omega$.
- ذاتية الوشيعة L :

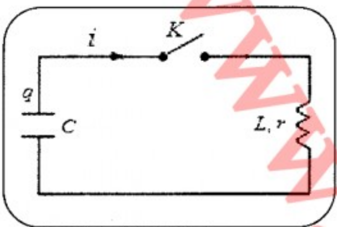
لدينا من البيان: $T_0 = 4div \times 0.2\frac{ms}{div} = 0.8ms = 0.8 \times 10^{-3}s$ ، علما أن: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

ومنه: $L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C} = \frac{\left(0.8\times10^{-3}\right)^2}{4\times(3.14)^2\times2\times10^{-6}} = 0.008H$ أي: $L = 0.008H$.

التمرين ــ 14 ★★★

تحتوي الدارة المبينة بالشكل التالي على:

مكثفة سعتها C ، وشيعة (L,r) و قاطعة K .



للتعبير عن $U_C(t)$: التوتر بين طرفي المكثفة نحتاج إلى الشحنة q وشدة التيار الكهربائي $i(t)$ المبين على المخطط.

1- المكثفة مشحونة تحت توتر موجب U_0. نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$. إذا كانت الطاقة الضائعة في الدارة بفعل جول مهملة نحصل على اهتزازات كهربائية جيبية ذات نبض $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

أ- أكتب بدقة عبارة التوتر $U_C(t)$ و التيار $i(t)$ بدلالة U_0, C, ω_0, t .(لا تكتب المعادلة التفاضلية).

ب- أرسم كيفيا بيان تغيرات $U_C(t)$ و $i(t)$ خلال دورين ابتداءا من اللحظة $t = 0$.

2- الطاقة الضائعة بفعل جول غير مهملة، تكون الاهتزازات شبه دورية. كيف يصبح بيان تغيرات $U_C(t)$ ؟

3- نفرض أن الضائعة بفعل جول خلال شبه دور واحد هي 10% من الطاقة الابتدائية للدارة، أحسب النسبة U_{n+1}/U_n بين قيمتين عظميين موجبتين متتاليتين.

4- كم شبه دور نحتاج تقريبا لكي تصبح سعة الاهتزازات تساوي $U_0/100$.

الحل-14 :

1- عند غلق القاطعة K :

أ- عبارتي التوتر $U_C(t)$ والتيار $i(t)$ بدلالة (U_0, C, ω_0, t) :

بما أن الطاقة الضائعة في الدارة بفعل جول مهملة، أي: $(R = 0)$ فإن: $U_C(t) = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$i(t) = -Q\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -CU_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

حسب الشروط الابتدائية نجد:

لما: $t = 0$ لدينا: $\begin{cases} U_C(0) = U_0\cos\varphi_0 = U_0 > 0 \\ i(0) = -CU_0\omega_0\sin\varphi_0 = 0 \end{cases}$ ومنه: $\varphi_0 = 0$

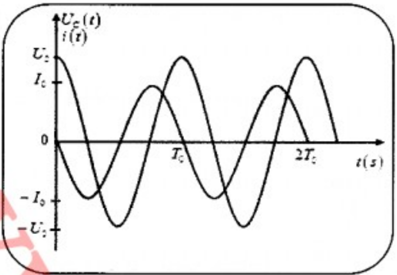
إذا: $\begin{cases} U_C(t) = U_0\cos\omega_0 t \\ i(t) = -CU_0\omega_0\sin\omega_0 t \end{cases}$

ب- البيانات $U_C(t)$ و $i(t)$ خلال دورين ابتداء من اللحظة $t = 0$:

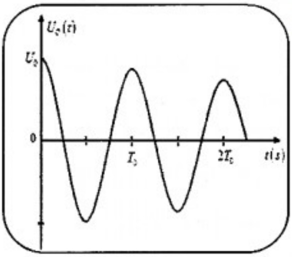
ننشأ الجدول والبيانات باستعمال العبارات التالية:

$U_C(t) = U_0\cos\omega_0 t = U_0\cos\frac{2\pi}{T_0}t$ ، $i(t) = -CU_0\omega_0\sin\omega_0 t = -CU_0\omega_0\sin\frac{2\pi}{T_0}t = -I_0\sin\frac{2\pi}{T_0}t$

$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0	$\frac{5T_0}{4}$	$\frac{3T_0}{2}$	$\frac{7T_0}{4}$	$2T_0$
$U_C(t)$	U_0	0	$-U_0$	0	U_0	0	$-U_0$	0	U_0
$i(t)$	0	$-I_0$	0	I_0	0	$-I_0$	0	I_0	0



2- إذا كانت الطاقة الضائعة بفعل جول غير مهملة فإن الاهتزازات تكون شبه دورية ومتخامدة، أي تتناقص سعة الاهتزازات تدريجياً خلال الزمن ونحصل على البيان المقابل:



3- حساب النسبة U_{n+1}/U_n:

- الطاقة المخزنة الابتدائية في المكثفة في البداية هي : $E_{(C)}=\frac{1}{2}CU_0^2$.
- الطاقة المخزنة في المكثفة بعد مرور n شبه دور هي: $E_{(C)_n}=\frac{1}{2}CU_n^2$.
- الطاقة المخزنة في المكثفة بعد مرور $(n+1)$ شبه دور هي: $E_{(C)_{n+1}}=\frac{1}{2}CU_{n+1}^2$.
- شبه الدور هو T، أي: $(n+1)T-nT=T$.
- خلال شبه الدور تفق الجملة 10% من طاقتها فتكون الطاقة المتبقية هي: 90%

أي: $\begin{cases}E_{(C)_n}\to 100\% \\ E_{(C)_{n+1}}\to 90\%\end{cases}\Leftrightarrow 90\%E_{(C)_n}=100\%E_{(C)_{n+1}}\Rightarrow E_{(C)_{n+1}}=\frac{90}{100}E_{(C)_n}$

ومنه: $\frac{1}{2}CU_{n+1}^2=\frac{90}{100}\times\frac{1}{2}CU_n^2$ وبالتالي: $U_{n+1}^2=\frac{9}{10}U_n^2\Rightarrow\frac{U_{n+1}}{U_n}=\sqrt{0.9}\Rightarrow U_{n+1}=\sqrt{0.9}U_n$

4- العلاقة: $U_{n+1}=\sqrt{0.9}U_n$ تمثل متتالية هندسية أساسها $q=\sqrt{0.9}$ وحدها الأول هو U_0

> U_n متتالية هندسية حدها الأول U_0، أساسها q .
> من اجل كل عدد طبيعي n، المتتالية معرفة بـــ: $U_n=U_0q^n$

لدينا: $U_n=U_0q^n$ حيث $q=\sqrt{0.9}$ ومنه $U_n=U_0\left(\sqrt{0.9}\right)^n$

- تعيين n من أجل $U_n=\frac{U_0}{100}$، حيث n يمثل عدد الاهتزازات **(كل اهتزازة تمثل شبه الدور)**:

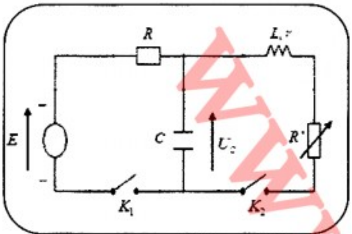
لدينا: $\frac{1}{100} = 0.9^{\frac{n}{2}} \Leftarrow \frac{1}{100} = \left(\sqrt{0.9}\right)^n \Leftarrow U_n = U_0\left(\sqrt{0.9}\right)^n = \frac{U_0}{100}$

أي: $\ln(0.9)^{\frac{n}{2}} = \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow \frac{n}{2}\ln(0.9) = \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow n = 2\times\frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln(0.9)}$

ومنه: (اهتزازة) $n = 87.41$، بالتقريب: $n = 87$ اهتزازة ونصف اهتزازة.

نحتاج 87 شبه دور ونصف دور تقريبا لكي تصبح سعة الاهتزازات تساوي $\frac{U_0}{100}$.

التمرين ــ 15 ★★★



يسمح التركي المقابل بشحن مكثفة عبر مقاومة تحت توتر ثابت، كما يسمح بتفريغ مكثفة في وشيعة ومقاومة.

المعطيات:

$(L = ?, r = 7\Omega).C = 1\mu F.R' = 1500\Omega.E = 5V.R = 10K\Omega$ ،

راسم اهتزازات بذاكرة.

I. شحن المكثفة:

1- بين على المخطط توصيل راسم الاهتزازات الذي يسمح بمشاهدة التوتر $U_C(t)$ بين طرفي المكثفة خلال الزمن وذلك على المدخل Y_A.

2- لشحن المكثفة نغلق القاطعة K_1 عند اللحظة $t = 0$ ونبقي K_2 مفتوحة:

أ- أعط شكل البيان الذي يظهر على شاشة راسم اهتزازات.

ب- ما هي قيمة U_C وقيمة الشحنة عندما $t \to \infty$.

ج- بين أن شدة التيار الكهربائي I_0 عند اللحظة $t = 0$ تعطى بالعلاقة $I_0 = \frac{E}{R}$.

د- اشرح كيف يسمح البيان $U_C(t)$ بمعرفة كيفية تطور شدة التيار خلال الزمن. أعط شكل البيان $i(t)$.

هـ-احسب ثابت الزمن للدارة خلال الشحن.

و- ما هو الزمن اللازم لكي تشحن المكثفة بنسبة 99%.

ز- لكي نشاهد عملية الشحن التام للمكثفة على الشاشة لابد من تعديل الحساسية على راسم الاهتزازات علما أن شاشة راسم الاهتزازات تحتوي على 10 تدريجات أفقية و 8 تدريجات شاقولية.

ما هي القيمة الصغرى التي تضبط عليها الحساسية العمودية والمسح الزمني؟ حيث الحساسيات العمودية بـ: $10, 5, 2, 1, 0.5 : (V)$ معاير المسح الزمني بـ $100, 5, 2, 1, 0.5 : (ms)$.

II. تفريغ المكثفة: نضبط راسم الاهتزازات على:

$2V/div$ بالنسبة للحساسية العمودية.

$2ms/div$ بالنسبة للمسح الزمني.

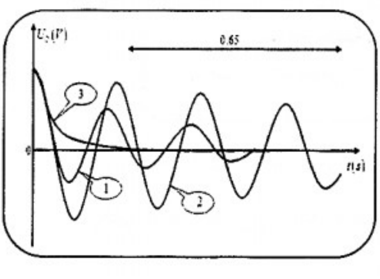
1- من اجل عدة قيم للمقاومة R' معطاة في الجدول التالي:

$R'(\Omega)$	0	100	1300	5000

نفتح K_1 ونغلق K_2 عند اللحظة $t = 0$ ونسجل في كل تجربة تغيرات $U_C(t)$ بواسطة راسم الاهتزازات فنحصل على البيانات المقابلة:

أ- ما هو نمط الاهتزازات في كل حالة؟ علل.

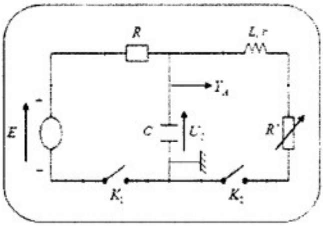
ب- انسب كل بيان للمقاومة المناسبة.



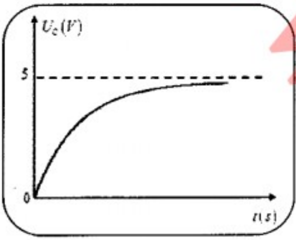
الحل-15 :

I. شحن المكثفة:

1- مخطط الدارة الموصولة براسم الاهتزازات الذي يسمح بمشاهدة التوتر $U_C(t)$ بين طرفي المكثفة خلال الزمن.

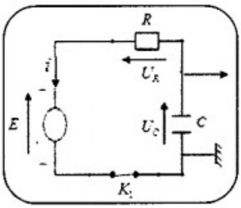


2- شحن المكثفة: K_1 مغلقة و K_2 مفتوحة عند اللحظة $t=0$:



أ- البيان الذي يظهر على شاشة راسم الاهتزازات: $U_C = f(t)$ تطور التوتر U_C بين طرفي المكثفة خلال الزمن.
(الشكل المقابل).

ب- عندما $t \to \infty$: $U_C = 5V$ و $q = CU_C$ أي: $q = 5\times10^{-6}C$

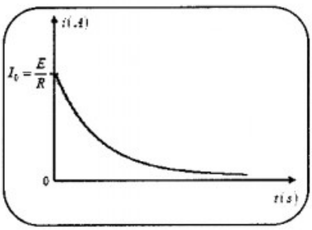


ج- تبيان أن $I_0 = \dfrac{E}{R}$ عندما $t=0$:

نطبق قانون مجموع التوترات على الدارة المتسلسلة المقابلة فنجد: $U_R + U_C = E \Rightarrow Ri + U_C = E$

في اللحظة $t=0$ لدينا: $U_C = 0$ و $i = I_0$

إذا: $RI_0 + 0 = E \Rightarrow RI_0 = E \Rightarrow I_0 = \dfrac{E}{R}$



د- لما $t=0$ لدينا: $U_C = 0$ وبالتالي: $I_0 = \dfrac{E}{R}$

لما $t \to \infty$ $U_C = 5V$ وبالتالي: $I_0 = 0$

$U_C(t)$ يزداد تدريجيا وبالتالي $i(t)$ يتناقص تدريجيا.

البيان المقابل يمثل $i = f(t)$

هـ- ثابت الزمن للدارة RC خلال الشحن:

$\tau = RC = 10\times10^3 \times 1\times10^{-6} = 10^{-2}s \Rightarrow \tau = 10ms$

و- الزمن اللازم لكي تشحن المكثفة بنسبة 99% هو: 5τ، أي:

$5\tau = 5\times10^{-2}s = 50ms$

ز- الحساسية العمودية: $1V$

المسح الزمني: $5ms$

II. تفريغ المكثفة:

1- K_1 مفتوحة و K_2 مغلقة:

أ- نمط الاهتزازات في كل حالة:

- حالة $R' = 0\Omega$ ومنه: $R_{eq} = r + R' = 7 + 0 = 7\Omega$، اهتزازات شبه دورية ذات تخامد ضعيف.
- حالة $R' = 100\Omega$ ومنه: $R_{eq} = r + R' = 7 + 100 = 107\Omega$، اهتزازات شبه دورية متخامدة (تخامد معتبر).
- حالة $R' = 1300\Omega$ ومنه: $R_{eq} = r + R' = 7 + 1300 = 1307\Omega$، لا توجد اهتزازات، نظام لا دوري (تخامد كبير جدا).

ب- بيان (1) يمثل المقاومة $R' = 0\Omega$ أي: $R_{eq} = r = 7\Omega$.

بيان (2) يمثل المقاومة $R' = 100\Omega$ أي: $R_{eq} = r + R' = 107\Omega$.

بيان (3) يمثل المقاومة $R' = 1300\Omega$ أي: $R_{eq} = r + R' = 1307\Omega$.

الاهتزازات القسرية والتجاوب

التمرين ـ 16 ★★

تضم دارة كهربائية على التسلسل وشيعة $(L=0.1H, r=20\Omega)$ ومكثفة سعتها $C=2.5\mu F$ نغذي الدارة بتوتر متناوب جيبي شدته المنتجة $U_{eff}=40V$.

1- احسب N_0 التواتر الذاتي للدارة عند التجاوب.

2- احسب الشدة المنتجة للتيار الكهربائي عندها.

3- في الجدول التالي لدينا تغيرات شدة التيار الكهربائي المنتجة بدلالة التواتر N .

$N(HZ)$	240	260	280	310	330	340	360	380
$I_{eff}(A)$	0.34	0.47	1.28	1.76	1.62	1.21	0.75	0.54

أ- ارسم البيان $I_{eff}=f(N)$

ب- اوجد بيانيا N_2, N_1, N_0 (حدي الشريط النافذ).

ج-احسب معامل جودة الدارة.

الحل-16 :

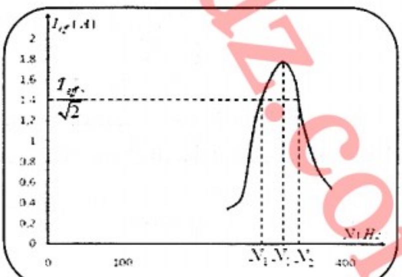
1- التواتر الذاتي N_0 للدارة عند التجاوب:

$$N_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.1\times2.5\times10^{-6}}}=318.30Hz.$$

2- الشدة المنتجة للتيار الكهربائي عند التجاوب:

لدينا: $U_{eff}=ZI_{eff}$ ، عند التجاوب: $Z=R_{eq}=r$ ومنه: $U_{eff}=rI_{eff}$ إذا: $I_{eff}=\frac{U_{eff}}{r}=\frac{40}{20}=2A$

3- أ- البيان $I_{eff}=f(N)$:



ب- N_2, N_1, N_0 بيانيا:

$N_0\approx316Hz$

لتعيين N_2, N_1 نجد: $\frac{I_{eff}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=1.41A$

نرسم مستقيم أفقي : $\frac{I_{eff}}{\sqrt{2}}=1.41A$ فيقطع البيان في نقطتين:

- الأولى فاصلتها: $N_1\approx288Hz$.
- الثانية فاصلتها: $N_2\approx336Hz$.

ج- معامل جودة الدارة : $Q=\frac{N_0}{\Delta N}=\frac{N_0}{N_2-N_1}\approx\frac{316}{336-288}\approx6.58$.

التمرين ــ 17★★

يتكون جزء من دارة كهربائية من ناقل أومي مقاومته $R = 15\Omega$ ، وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها الداخلية r ومكثفة سعتها C كلها موصولة على التسلسل، نغذي هذا الجزء من الدارة بتوتر متناوب جيبي عبارته اللحظية هي:

$$U(t) = 10\sqrt{2}\cos 100\pi t......(V)$$

فيجتاز الدارة تيار شدته المنتجة $I_{eff} = 0.2A$.

1- ما هو نمط الاهتزازات في الدارة؟ علل.

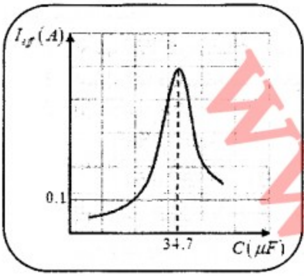
2- أوجد ممانعة الدارة.

3- نغير من سعة المكثفة ونسجل تغيرات الشدة المنتجة للتيار بواسطة القراءة على مقياس أمبير. ثم نرسم تغيرات الشدة المنتجة للتيار الكهربائي بدلالة سعة المكثفة فنحصل على البيان المقابل:

أ- ما هي الظاهرة التي يبرزها البيان؟

ب- اوجد ذاتية الوشيعة.

ج- اوجد قيمة المقاومة الداخلية للوشيعة.



الحل-17 :

1- نمط الاهتزازات في الدارة:

اهتزازات قسرية لأن الدارة (R,L,C) مغذاة بتوتر كهربائي جيبي $U(t)$ وبذلك المولد يفرض دور اهتزازاته على الدارة مما يؤثر على سعة الاهتزازات.

2- ممانعة الدارة:

لدينا: $U_0 = U_{max} = 10\sqrt{2}V$ أي: $U_{eff} = 10V$ و $I_{eff} = 0.2A$.

إذا: $Z = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}} = \dfrac{10}{0.2} = 50\Omega$.

3- البيان $I_{eff} = f(C)$:

أ- ظاهرة التجاوب الكهربائي في الدارة (R,L,C) .

ب- ذاتية الوشيعة:

عند التجاوب تتحقق العلاقة التالية: $LC\omega_0^2 = 1$.

من البيان نجد سعة المكثفة عند التجاوب: $C_r = 34.7\times10^{-6}F$.

ومن عبارة التوتر اللحظي $U(t) = 10\sqrt{2}\cos 100\pi t$ نجد: $\omega_0 = 100\pi rad/s$.

لدينا: $LC_r\omega_0^2 = 1$ ومنه: $L = \dfrac{1}{C_r\omega_0^2} = \dfrac{1}{34.7\times10^{-6}\times(100\pi)^2} = 0.29H$.

ج- قيمة المقاومة الداخلية للوشيعة r :

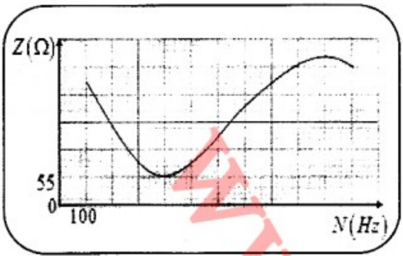
عند التجاوب لدينا من البيان: $I_{eff_{max}} = 0.5A$ وممانعة الدارة عند التجاوب هي: $Z = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff_{max}}} = \dfrac{10}{0.5} = 20\Omega$.

لدينا: $Z = R + r$ ومنه: $r = Z - R = 20 - 15 = 5\Omega$.

التمرين ـــ 18 ★★

يتكون جزء من دارة كهربائية من ناقل أومي مقاومته $R = 50\Omega$ وشيعة ذاتيتها $L = 0.1H$ ومقاومتها الداخلية r .مكثفة سعتها C ، كلها موصولة على التسلسل. نغذي هذا الجزء من الدارة بتوتر متناوب جيبي قيمته المنتجة $U_{eff} = 8.8V$ ثابتة عمليا، وتواتره N متغير.

بعد قياس ممانعة الدارة من أجل عدة قيم لتواتر التيار مثلنا تغيرات الممانعة بدلالة التواتر N فحصلنا على البيان المقابل:



1- أكتب عبارة ممانعة الدارة بدلالة I_{eff} و U_{eff} .

2- كيف تكون ممانعة الدارة عند التجاوب؟ عين قيمتها.

3- احسب شدة التيار الكهربائي عند التجاوب.

4- احسب المقاومة الداخلية للوشيعة.

5- احسب سعة المكثفة.

6- أثبت أن ممانعة الدارة عند حدي الشريط النافذ للتواترات توافق $Z = (R+r)\sqrt{2}$.

7- عين بيانيا حدي الشريط النافذ.

8- أحسب معامل جودة الدارة.

الحل-18 :

1- عبارة ممانعة الدارة بدلالة I_{eff} و U_{eff}: $Z = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}}$.

2- عند التجاوب تكون ممانعة الدارة صغرى وتساوي المقاومة المكافئة للدارة.

من البيان نجد: $Z = 55\Omega$.

3- شدة التيار الكهربائي عند التجاوب:

لدينا: $U_{eff} = ZI_{eff}$ ومنه: $I_{eff} = \dfrac{U_{eff}}{Z} = \dfrac{8.8}{55} = 0.16A$.

4- المقاومة الداخلية للوشيعة:

عند التجاوب ممانعة الدارة صغرى وتعطى بـــ: $Z = R + r$ ومنه: $r = Z - R = 55 - 50 = 5\Omega$.

5- سعة المكثفة:

عند التجاوب تتحقق العلاقة التالية: $LC\omega_0^2 = 1$.

من البيان نجد: $N_0 = 400Hz$ ومنه: $\omega_0 = 2\pi N_0 = 2\pi \times 400 = 800\pi rad/s$

لدينا: $LC\omega_0^2 = 1$ ومنه: $C = \dfrac{1}{L\omega_0^2} = \dfrac{1}{0.1\times(800\pi)^2} = 1.58\times10^{-6}F$ ، أي: $C = 1.58\mu F$.

6- تبيان أن ممانعة الدارة عند حدي الشريط النافذ للتواترات توافق $Z = (R+r)\sqrt{2}$:

لدينا: $I_{eff} = \dfrac{I_{eff_{max}}}{\sqrt{2}}$ ونعلم أن: $Z = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}}$ ومنه: $Z = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff_{max}}} \times \sqrt{2}$

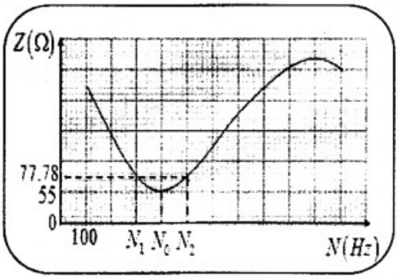
حيث: $\dfrac{U_{eff}}{I_{eff_{max}}} = R + r$ ، إذا: $Z = (R+r)\sqrt{2}$.

7- حدي الشريط النافذ:

لدينا: $Z = (R+r)\sqrt{2} = 55\sqrt{2} = 77.78\Omega$

نرسم مستقيم أفقي: $Z = 77.78\Omega$ فيقطع البيان في نقطتين:

- الأولى فاصلتها: $N_1 \approx 300Hz$.
- الثانية فاصلتها: $N_2 \approx 500Hz$.



8- معامل جودة الدارة:

$$.Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{N_0}{N_2 - N_1} \approx \frac{400}{500 - 300} \approx 2$$

التمرين ـــ 19 ★★

يتكون جزء من دارة كهربائية من ناقل أومي مقاومته $R = 50\Omega$ ، موصولة على التسلسل مع وشيعة $(L = 0.1H, r)$ و مكثفة سعتها C نغذي الدارة بتوتر متناوب جيبي قيمته المنتجة ثابتة $U_{eff} = 5.4V$ تواتره متغير. نقيس بواسطة جهاز ميلي أمبير متر الشدة المنتجة للتيار I_{eff} من أجل عدة قيم للتواتر فنحصل على النتائج المدونة في الجدول التالي:

$N(Hz)$	20	30	40	50	60	70
$I_{eff}(mA)$	35.1	52.4	68.1	80.4	87.8	90.0
$Z(\Omega)$						
$N(Hz)$	80	90	100	120	140	160
$I_{eff}(mA)$	88.3	84.4	79.4	69.3	60.6	53.5
$Z(\Omega)$						

1- أكمل الجدول.

2- أرسم على ورقة ملمترية البيان $Z = f(N)$.

3- أ-عين من البيان القيمة الصغرى للممانعة و لتكن (Z_0) و التواتر الموافق لها (N_0) .

ب-ما هي الحالة الفيزيائية التي توجد عليها الدارة عندئذ؟ برر إجابتك.

ج-أحسب r, C .

4- أ-عرف الشريط النافذ للتواترات.

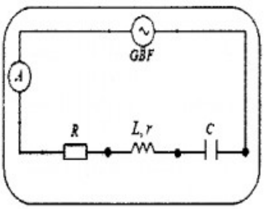
ب- بين أن قيمة الممانعة Z عند حدي الشريط النافذ (N_2, N_1) توافق $Z = Z_0\sqrt{2}$

ج- أوجد عرض الشريط النافذ بيانيا ومعامل الجودة.

الحل-19 :

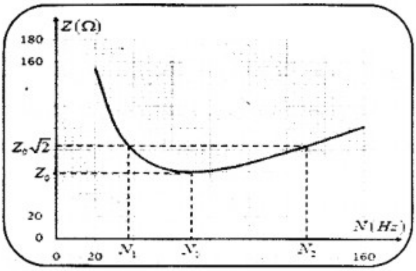
1- الجدول:

بما أن: $Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$ حيث: $U_{eff} = 5.4V$



$N(Hz)$	20	30	40	50	60	70
$I_{eff}(mA)$	35.1	52.4	68.1	80.4	87.8	90.0
$Z(\Omega)$	153.84	103.05	79.29	67.16	61.50	60
$N(Hz)$	80	90	100	120	140	160
$I_{eff}(mA)$	88.3	84.4	79.4	69.3	60.6	53.5
$Z(\Omega)$	61.15	63.98	68.01	77.92	89.10	100.93

2- البيان $Z=f(N)$:



3- أ- تعيين Z_0 و N_0 من البيان: $Z_0=60\Omega$ ، $N_0=70Hz$

ب- الحالة الفيزيائية التي توجد فيها الدارة هي حالة التجاوب لأن الممانعة تأخذ قيمة صغرى والشدة المنتجة للتيار تكون عظمى.

ج- حساب r,C :

- سعة المكثفة C :

عند التجاوب لدينا: $LC\omega_0^2=1$ حيث: $N_0=70Hz$ ومنه: $\omega_0=2\pi N_0=2\pi\times 70=140\pi\,(rad/s)$

إذا: $C=\dfrac{1}{L\omega_0^2}=\dfrac{1}{0.1\times(140\pi)^2}=51.6\times10^{-6}F=51.6\mu F$.

- المقاومة الداخلية للوشيعة r :

ممانعة الدارة عند التجاوب هي: $Z_0=R+r=60$ ومنه: $r=Z_0-R=60-50=10\Omega$.

4- أ- تعريف الشريط النافذ للتواترات:

الشريط النافذ لتواترات الرنان هو مجال التواترات الموافق لـــ: $I_{eff}\geq\dfrac{I_{eff_{max}}}{\sqrt{2}}$

ب- تبيان أن قيمة الممانعة Z عند حدي الشريط النافذ (N_2,N_1)توافق $Z=Z_0\sqrt{2}$:

لدينا: $I_{eff_{max}}=\dfrac{U_{eff}}{Z_0}$ و $I_{eff_{max}}=\sqrt{2}I_{eff}$ ومنه: $\sqrt{2}I_{eff}=\dfrac{U_{eff}}{Z_0}\Rightarrow Z_0\times\sqrt{2}=\dfrac{U_{eff}}{I_{eff}}$.

علما أن: $Z=\dfrac{U_{eff}}{I_{eff}}$ ، إذا: $Z=Z_0\times\sqrt{2}$.

ج- عرض الشريط النافذ:

لدينا: $Z=Z_0\sqrt{2}=84.85\Omega$

نرسم مستقيم أفقي: $Z=84.85\Omega$ فيقطع البيان في نقطتين:

- الأولى فاصلتها: $N_1\approx 36Hz$.
- الثانية فاصلتها: $N_2\approx 130Hz$.

معامل الجودة: $Q=\dfrac{N_0}{\Delta N}=\dfrac{N_0}{N_2-N_1}\approx\dfrac{70}{130-36}\approx 0.74$.

التمرين ـــ 20 ★★★

لدراسة تجاوب الشحنة في دارة R,L,C على التسلسل نحقق الدارة اللازمة وقياس التوتر $U_{C(\max)}$ و من ثم U_{eff}
من أجل كل قيمة N لتواتر المولد (GBF) الذي يغذي الدارة بتوتر متناوب جيبي عبارته: $U(t)=U_{\max}\sin 2\pi Nt$
ومن أجل مشاهدة تأثير المقاومة R على منحنى تجاوب الشحنة، نجري تجربتين بإعطاء R قيمتين R_1 و R_2 ونسجل النتائج في الجدول التالي:

$N(KHz)$	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.25	1.30	1.35	1.38
$U_C(V)$ من أجل $R_1=100\Omega$	4.5	5.1	6.1	7.6	10.4	12.3	16.1	17.2	16.5
$N(KHz)$	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.25	1.30	1.35	1.38
$U_C(V)$ من أجل $R_2=200\Omega$	4.2	4.5	4.9	5.4	5.7	5.9	6.0	5.9	5.8

$N(KHz)$	1.40	1.45	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
$U_C(V)$ من أجل $R_1=100\Omega$	16.4	15.3	12.4	7.6	5.2	4.0	3.2	2.6
$N(KHz)$	1.40	1.45	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
$U_C(V)$ من أجل $R_2=200\Omega$	5.5	5.4	5.2	4.4	3.6	3.1	2.5	2.2

نأخذ $L=10mH, C=1.33\mu F$

1- بين على مخطط الدارة كيف نصل راسم الاهتزازات من أجل قياس $U_{C(\max)}$.

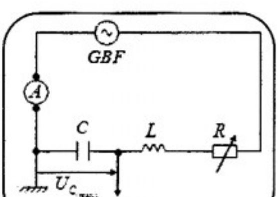
2- أحسب التواتر الذاتي N_0 للمهتز القسري R,L,C.

3- أرسم البيانين U_C بدلالة التواتر N من أجل كل قيمة لـــ R في نفس المعلم و بنفس السلم.

4- عين $N_{0(1)}$ و $N_{0(2)}$ تواتري المولد عند التجاوب من أجل كل قيمة لـــ R.

5- قارن بين N_0 و $N_{0(1)}$ و $N_{0(2)}$ وبين كيف يتغير N_0 بدلالة R ؟

الحل-20 :



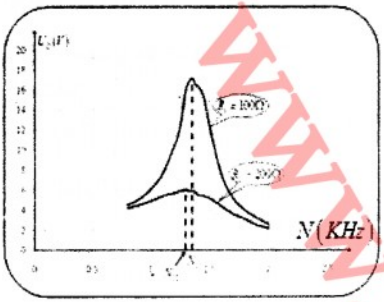
1- مخطط توصيل الدارة براسم اهتزازات:
من أجل قياس $U_{C(\max)}$:

2- التواتر الذاتي N_0 للمهتز القسري (R,L,C):
عند التجاوب لدينا: $LC\omega_0^2=1$ أي: $LC(2\pi N_0)^2=1$

ومنه: $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10\times10^{-3}\times1.33\times10^{-6}}} = 1380.04\,Hz$ أي: $N_0 = 1.38\,KHz$

3- البيانين U_C بدلالة التواتر N من أجل R_1 و R_2 :

4- تعيين $N_{0(1)}$ و $N_{0(2)}$ تواتري المولد عند التجاوب من أجل كل قيمة لـــ R :



من المنحنى نجد:

- من أجل $R_1 = 100\Omega$ ، التواتر $N_{0(1)} = 1.38KHz$
- من أجل $R_2 = 200\Omega$ ، التواتر $N_{0(2)} = 1.30KHz$

5- المقارنة بين N_0 و $N_{0(1)}$ و $N_{0(2)}$:

لدينا: $N_0 = N_{01}$ و $N_{01} > N_{02}$

- تتناقص قيمة N_0 كلما كانت قيمة R كبيرة.