الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

الجزء الأول

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي

الشعب:

- رياضيات
- تقني رياضي
- علوم تجريبية

إشراف و تأليف

محمد فاتح مراد..............................مفتش التربية و التكوين

المؤلفون:

- تاوريرت جمال مفتش التربية و التكوين
- محمد قورين مفتش التربية و التكوين
- عبد الحفيظ فلاح أستاذ التعليم الثانوي
- عبد المؤمن موس أستاذ التعليم الثانوي
- غريسي بلجيلالي أستاذ التعليم الثانوي

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

2007

بسم الله الرحمان الرحيم

مدخل

أعد هذا الكتاب استجابة لمتطلبات المنهاج الجديد الخاص بالسنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي الخاص بشعب الرياضيات ، التقني الرياضي والعلوم التجريبية الذي شرع في تطبيقه ابتداء من الدخول المدرسي 2007 – 2008 .

بالإضافة إلى الاحترام التام للمنهاج فقد حاولنا العمل بمختلف التوجيهات الواردة فيه كما حرصنا على تجسيد المقاربة بالكفاءات التي بني عليها من خلال اختيار أنشطة مناسبة سواء عند مقاربة مختلف المفاهيم أو عند إدماجها كما حظي استعمال تكنولوجيات الإعلام

و الاتصال بالاهتمام اللازم.

يحتوي الكتاب على ستة (6) أبواب تمت هيكلتها بنفس الكيفية على النحو التالي:

- عرض للكفاءات المستهدفة إضافة إلى نبذة تاريخية.
- أنشطة تمهيدية.
- الدرس.
- طرائق و تمارين محلولة.
- أعمال موجهة.
- استعد للبكالوريا.
- تمارين و مسائل.
- اختبر معلوماتك.

أردنا أن نجعل من هذا الكتاب وسيلة عمل ممتعة و ناجعة في آن واحد، نتمنى أن يمكنكم من التحضير الجيد لامتحان نهاية السنة.

و كون هذا العمل إنجازا بشريا فإنه لا يخلو من النقائص، و عليه فإننا نرحب، بكل اهتمام، بانتقادات القراء التي تهدف إلى إثراء و تحسين الكتاب و هم مشكورون مسبقا على ذلك.

فهرس الكتاب

النهايات و الاستمرارية 01

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$، k عدد حقيقي معطى.

كوشي أوغسطين لويس: عالم رياضيات و فيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789م إلى 1857م. كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات، و بصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات و الاستمرار، و طور نظرية الدوال ذات متغيرات عقدية. شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس و العالم لاغرانج و أصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون و كلية فرنسا و بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 فنفي مع حفيد تشارلز العاشر ، و عينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذية أنشئ من أجله، و لكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر.

لقد نشر ما مجموعه 789 عملا ، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات ، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة و نظرية الأعد و المرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الضوء.

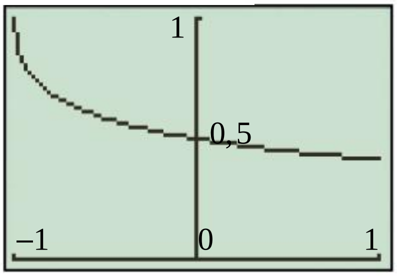
كوشي أوغسطين لويس

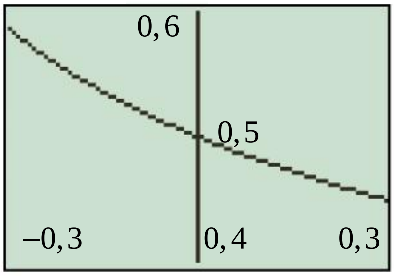
نشاط أول

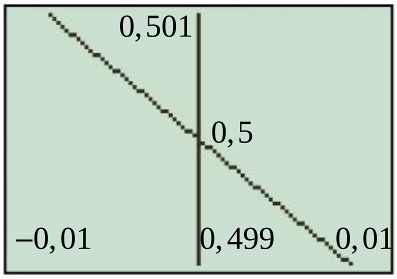
نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) وضع تخمين

- أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني (C_f) ثم أنجز التكبيرات $(zoom)$ التالية:







- الدالة f غير معرفة عند 0 إلا أنه بإمكان x أخذ قيم قريبة من 0 بالقدر الذي نريد. ضع في هذه الحالة تخمينا بخصوص قيم $f(x)$.

2) إثبات صحة التخمين

نعلم أن الدالة $g:x\mapsto\sqrt{x+1}$ قابلة للاشتقاق عند 0.

- عين العدد المشتق للدالة g عند 0.
- استنتج نهاية الدالة f عند 0

نشاط ثان

1) دراسة مثال

نعتبر الدالة u المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $u(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ و لتكن v الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $v(x)=x^2+1$

- عرف الدالة $v\circ u$.
- لاحظ على شاشة حاسبة بيانية أو مجدول سلوك كل من $u(x)$ و $v\circ u(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.
- ضع تخمينا بخصوص نهاية الدالة $v\circ u$ عند $+\infty$.
- عين b نهاية الدالة u عند $+\infty$ ثم نهاية الدالة v عند b.
- ماذا تلاحظ ؟

	A	B	C
1	x	u(x)	v0u(x)
2	100		
3	200		
4	300		
5			
6			
7			

2) وضع تخمين

a، b و c تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا فرضنا أن $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ ضع تخمينا بخصوص نهاية الدالة f عند a.

نشاط ثالث

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$.

1) أحسب $[-2,3]$، $E(-1)$، $\left[\sqrt{3}\right]$ و $E(11,01)$.

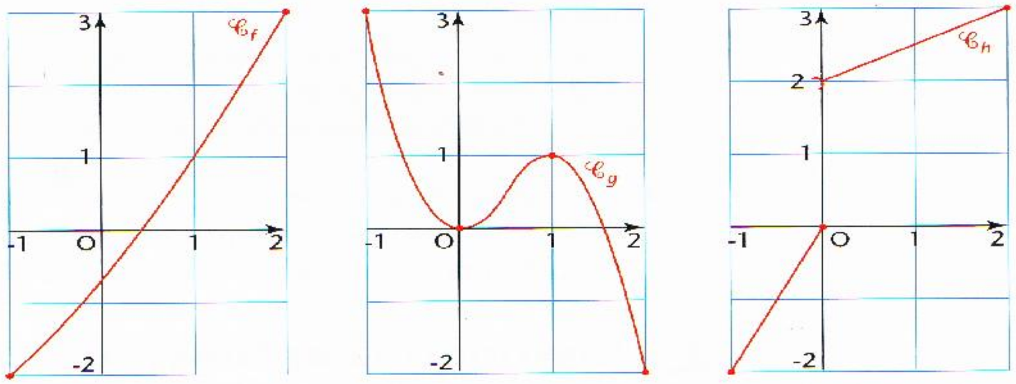
2) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على المجال $[-2;1]$ كما يلي:

$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$ ، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f)،(C_g)،(C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

- أرسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f)،(C_g) و (C_h).
- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f)،(C_g) و (C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- هل تقبل الدوال f، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- أكتب خلاصة.

نشاط رابع

إليك المنحنيات (C_f)، (C_g) و (C_h) الممثلة على التوالي لثلاث دوال f، g و h معرفة على المجال $[-1;2]$ و ليكن k عددا حقيقيا من المجال $[-2;3]$.



1. هل الدوال f، g و h مستمرة على المجال $[-1;2]$ ؟
2. بواسطة قراءة بيانية حدد، حسب قيم العدد الحقيقي k، عدد حلول كل معادلة من المعادلات التالية:

$$f(x)=k \quad (1) \qquad g(x)=k \quad (2) \qquad h(x)=k \quad (3)$$

3. ماذا تمثل القيمتان -2 و 3 حدود المجال $[-2;3]$ ؟
4. من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-2;3]$،

- هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2) ، (3) حلا على الأقل في المجال $[-1;2]$ ؟
- هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2) ، (3) حلا وحيدا في المجال $[-1;2]$ ؟

نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

1. نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$ و l عدد حقيقي.
القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى $+\infty$.

نتيجة: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y=l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$.

أمثلة: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ *

2. نهاية غيرمنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف1: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.
القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

تعريف2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.
القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;B[$ $(B\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$.

أمثلة: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *

3. المستقيم المقارب المائل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$
القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+¨(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}¨(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}¨(x)=0$
فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=2x-3+\frac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.
لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

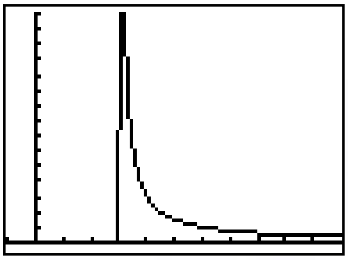
تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

الحل: ليكن $I=]a;b[$ حيث $a<0<b$ (I مجال مفتوح يشمل 0).

من أجل x من $]3;+\infty[$، $f(x)\in I$ يعني $\dfrac{2}{x-3}<b$ أي $x>3+\dfrac{2}{b}$.

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي(أكبر من $3+\dfrac{2}{b}$)، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$. ومنه نهاية f عند $+\infty$ هي 0.



تمرين محلول2: لتكن f الدالة المعرفة على $[3;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x-3}$

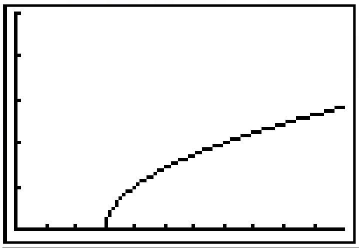
أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

الحل: ليكن A عددا حقيقيا موجبا.

$\sqrt{x-3}\geq A$ يعني $x\geq A^2+3$ ومنه المجال $[A;+\infty[$

يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

لدينا إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



تمرين محلول3: لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

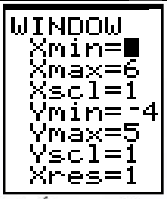
1. بعد تمثيل (C_f) على شاشة حاسبة بيانية، ضع تخمينا بصدد وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

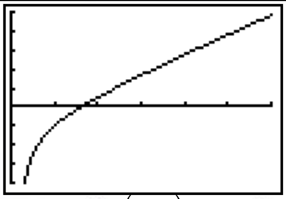
2. بين أن المستقيم $(D):y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

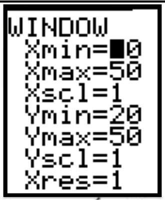
3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

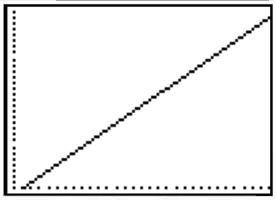
طريقة: لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى $(D):y=ax+b$ ندرس إشارة الفرق $[f(x)-(ax+b)]$.

الحل: .1



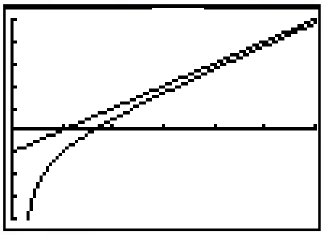






يظهر و أن المنحني (C_f) يقترب من مستقيم من أجل قيم لـ x كبيرة بالقدر الكافي و منه يمكن أن نخمن بوجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=$ و منه المستقيم $(D):y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.



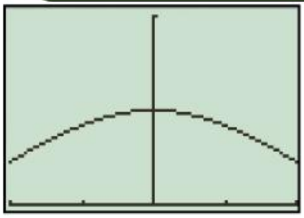
.3 $[f(x)-(x-1)]=-\dfrac{1}{x}$ و منه من أجل كل x من $]0;+\infty[$،

$[f(x)-(x-1)]<0$. إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D).

نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

1. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

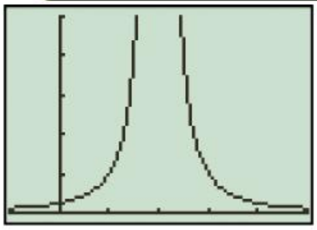
تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و l عدد حقيقي.
القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0.



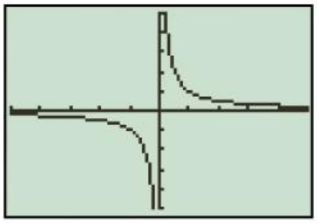
مثال: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني.
تبين شاشة الحاسبة البيانية أنه كلما اقترب x من 0 إلا و اقتربت $f(x)$ من 1.
بإجراء تكبيرات أو باستعمال جداول قيم بواسطة الحاسبة يتضح أكثر أنه يمكننا جعل $f(x)$ قريب من 1 بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 0 بالقدر الكافي. لدينا إذن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.
(يمكن إثبات صحة التخمين بإتباع نفس المنهجية المتبعة في النشاط الأول)

2. نهاية غيرمنتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$.
القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى x_0.



مثال1: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$
يتضح جليا أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 2 بالقدر الكافي. لدينا هكذا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$



مثال2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x}$. نعتبر الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين على الترتيب على $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ بـ $f_1(x)=f_2(x)=f(x)$
من الواضح أن $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=+\infty$
نقول في هذه الحالة أن نهاية f عند 0 من اليسار هي $-\infty$ و أن نهاية f عند 0 من اليمين هي $+\infty$ و نكتب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $x=a$.
القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يعني أن نهاية الدالة f عند x_0 (من اليسار أو من اليمين) هي $+\infty$ أو $-\infty$.

تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=(x+1)^2-2$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى 1.

1. ضع تخمينا.

2. في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[1,99;2,01]$ ؟

3. r عدد حقيقي حيث $0<r<1$.

- في أي مجال يجب اختيار x بحيث $f(x)\in[2-r;2+r]$ ؟
- ماذا تستنتج علما أنه يمكن اختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ؟

الحل:

1. يظهر و أنه كلما اقترب x من 1 اقترب $f(x)$ من 2 أي من العدد $(1+1)^2-2$.

2. $1,99\le f(x)\le 2,01$ يعني $3,99\le (x+1)^2\le 4,01$. يمكن اختيار x بحيث $1,998\le x+1\le 2,002$ أي $0,998\le x\le 1,002$ و منه $x\in[0,998\,;\,1,002]$.

3. * $2-r\le f(x)\le 2+r$ يعني $4-r\le (x+1)^2\le 4+r$. يمكن اختيار x بحيث $\sqrt{4-r}\le x+1\le\sqrt{4+r}$ أي $-1+\sqrt{4-r}\le x\le -1+\sqrt{4+r}$
ومنه $x\in\left[-1+\sqrt{4-r}\,;\,-1+\sqrt{4+r}\right]$.

* يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من 2 بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي 2.

تمرين محلول2: لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}$

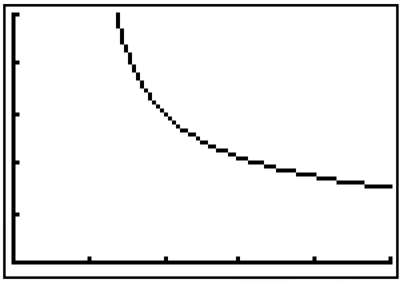
نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى 1.

1. مثل منحنى الدالة f على شاشة حاسبة بيانية ثم ضع تخمينا بخصوص نهاية f عند 1.

2. A عدد حقيقي موجب تماما.

- في أي مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x)\ge A$ ؟
- أثبت صحة التخمين الموضوع في السؤال1.

الحل:



1. نخمن بأن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.

2. $f(x)\ge A$ يعني $\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}\ge A$ أي $\sqrt{x}-1\le\dfrac{3}{A}$
أي $x-1\le\dfrac{9}{A^2}$ و أخيرا $x\le 1+\dfrac{9}{A^2}$.

حتى يكون $f(x)\ge A$ نختار x في المجال $\left]1;1+\dfrac{9}{A^2}\right[$.

علما أنه يمكن أخذ A كبيرا بالقدر الذي نريد يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.

↲ تتمات على النهايات

1. بعض نهايات الدوال المرجعية

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}=+\infty$ * $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x}=-\infty$

2. العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

- نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين" (ح ع ت)

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

قواعد إجرائية
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

تمرين محلول1: أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1. $f(x)=-x^3+2x-2$ ، $D_f=\mathbb{R}$
2. $f(x)=3x^2+x-3$ ، $D_f=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{2-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2\right)=+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

تمرين محلول2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة x^2+x-2.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. لكثير الحدود x^2+x-2 جذران هما -2 و 1. و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة 3 نجد:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	-	0	+	

2. $\lim\limits_{x\to-2}(2x+3)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)=0$ و بما أنه من أجل $x<-2$ ، $x^2+x-2>0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-2}(2x+3)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)=0$ و بما أنه من أجل $-2<x<1$ ، $x^2+x-2<0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5$ ، $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x-2\right)=0$ و بما أنه من أجل $-2<x<1$ ، $x^2+x-2<0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5$ ، $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x-2\right)=0$ و بما أنه من أجل $x>1$ ، $x^2+x-2>0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

← نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة

1. نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f = v \circ u$.

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ و إذا كانت $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \sin\left(\frac{®}{2} + \frac{1}{x}\right)$ و نريد حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

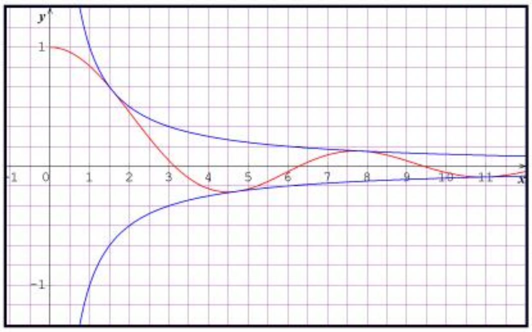
نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x) = \frac{®}{2} + \frac{1}{x}$ و $v(x) = \sin x$ $(f = v \circ u)$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \frac{®}{2}$ و $\lim\limits_{x \to \frac{®}{2}} v(x) = 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2. النهايات بالمقارنة

مبرهنة1: f، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \le f(x) \le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



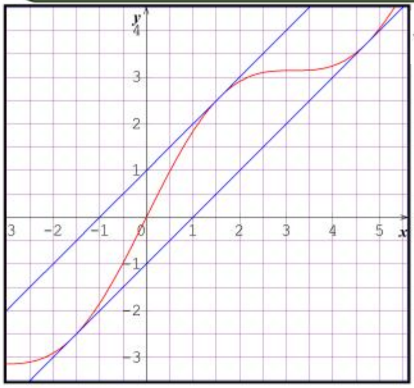
نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1 \le \sin x \le 1$ و منه فإن

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

مبرهنة2: f، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

مبرهنة3: f، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \le g(x)$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.



ملاحظة: تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \sin x$

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1 \le \sin x \le 1$ و منه فإن

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $x - 1 \le x + \sin x \le x + 1$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - 1) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty}(x + 1) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;-\frac{1}{2}]\cup]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

الحل:

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ $(f=v\circ u)$

* بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\sqrt{2}$. نجد كذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$.

* بما أن $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}u(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}v(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}f(x)=0$.

* بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}u(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=+\infty$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=1+\frac{\cos x}{x^2}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le1+\frac{1}{x^2}$

2. أستنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\le\cos x\le1$ و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $-\frac{1}{x^2}\le\frac{\cos x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $1-\frac{1}{x^2}\le1+\frac{\cos x}{x^2}\le1+\frac{1}{x^2}$ أي $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le1+\frac{1}{x^2}$

2. بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x}{2+\sin x}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le1$

2. استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\le\sin x\le1$ و منه $1\le2+\sin x\le3$ أي $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le1$

2. لدينا $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}$ ومن أجل x من $]-\infty;0]$ لدينا $\frac{x}{2+\sin x}\le\frac{x}{3}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{3}=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

لدينا $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}$ ومن أجل x من $[0;+\infty[$ لدينا $\frac{x}{2+\sin x}\ge\frac{x}{3}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ـ الاستمرارية

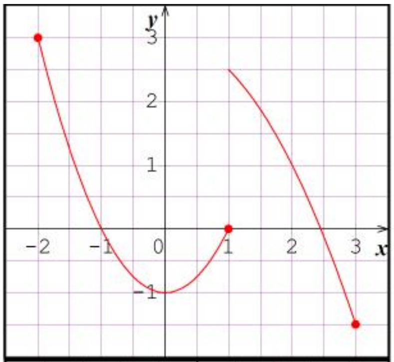
1. تعريف الاستمرارية

تعريف: f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f.
القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$.

(f مستمرة عند a) يعني $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)\right)$

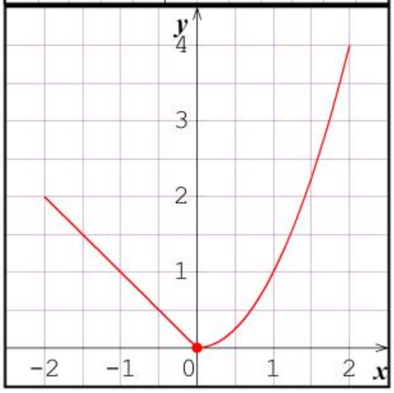
ملاحظة: القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.

التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).



مثال1:

الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.
في حين نلاحظ أنها مستمرة على كل من المجالين $[-2;1]$ و $]1;3]$.



مثال2:

الدالة f المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=-x & \text{إذا كان } x\in]-2;0] \\ f(x)=x^2 & \text{إذا كان } x\in]0;2[\end{cases}$$

و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $]-2;2[$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.

2. خواص (تقبل دون برهان)

نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، sin و cos مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة:

- الدالة $x\mapsto 2x^2-3x+4$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x\mapsto \dfrac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$.

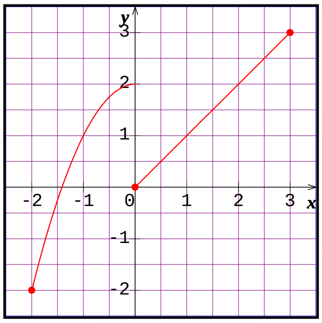
تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+2 & \text{إذا كان } x\in[-2;0[\\ f(x)=x & \text{إذا كان } x\in[0;3] \end{cases}$$

1. مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

الحل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=2$ و لدينا من جهة ثانية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=0$. إذن لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.

2. الدالة غير مستمرة عند 0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.

نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x^2+x+1)\cos x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل:

الدالتان $x\mapsto\cos x$ و $x\mapsto x^2+x+1$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ بـ: $f(x)=xE(x)+1$

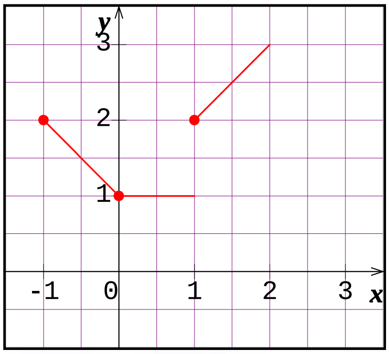
حيث الدالة $x\mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول)

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.

2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحنى الممثل للدالة f.

3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$؟ على المجال $[-1;2[$؟

الحل



1. من أجل $x\in[-1;0[$ لدينا $E(x)=-1$ ومنه $f(x)=-x+1$

من أجل $x\in[0;1[$ لدينا $E(x)=0$ ومنه $f(x)=1$

من أجل $x\in[1;2[$ لدينا $E(x)=1$ ومنه $f(x)=x+1$

2. انظر الشكل المقابل.

3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

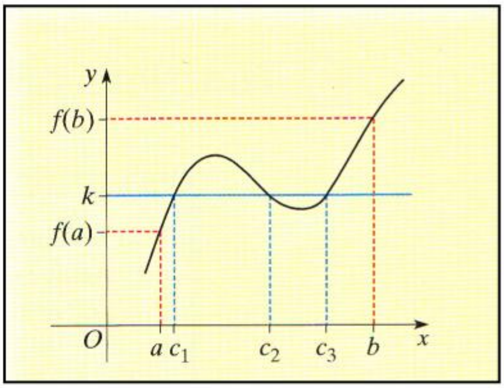
الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;2[$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

مبرهنة القيم المتوسطة

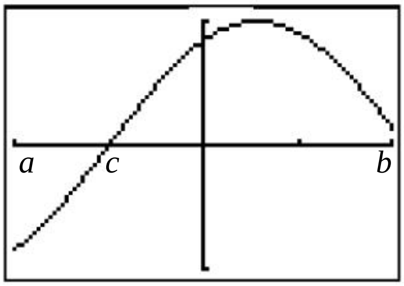
1. مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

2. التفسير البياني



f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحني (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.
(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).

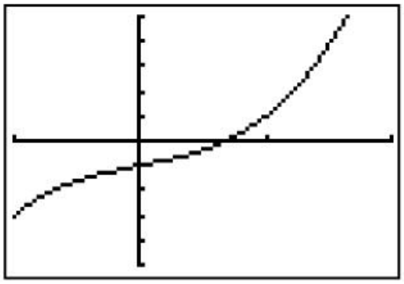


حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$ أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

3. المعادلة $f(x)=k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.



مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=x^3+x-1$
f دالة كثير حدود فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا $f(0)=-1$ و $f(1)=1$، العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ ومنه، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

تمرين محلول1: برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;1]$.

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.
- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

الحل: يمكن كتابة المعادلة $x^3-2x=-2$ على الشكل $f(x)=-2$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ:

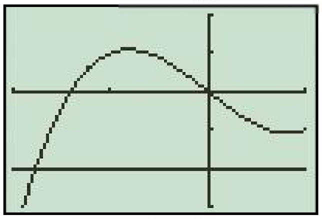
$f(x)=x^3-2x$ (يمكن اختيار كتابة أخرى مماثلة)

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و من تم على $[-2;1]$.

لدينا $f(-2)=-4$ و $f(1)=-1$ كما نلاحظ أن العدد-2 محصور بين العددين-4 و -1.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;1]$.

ملاحظة: يمكن مراقبة النتيجة باستعمال حاسبة بيانية بحيث يتم تمثيل الدالة f و المستقيم ذا المعادلة $y=-2$ ثم ملاحظة تقاطعهما.

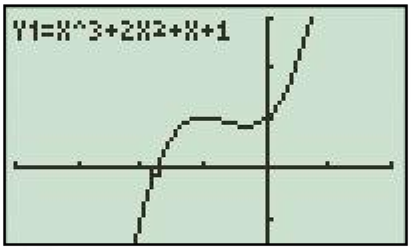


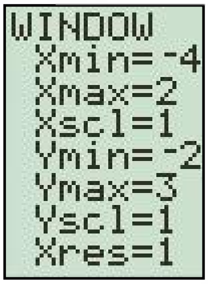
تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=x^3+2x^2+x+1$

1. أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة f.
2. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في مجال يطلب تحديده.

الحل:

1. نحصل مثلا على الشكل المقابل.





2. يوحي الشكل بأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا محصورا بين -2 و -1.

بما أن f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;-1]$.

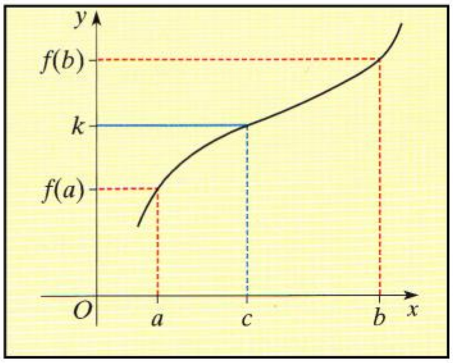
لدينا من جهة ثانية $f(-2)=-1$ و $f(-1)=1$ و بما أن 0 محصور بين-1 و 1 أي بين $f(-2)$ و $f(-1)$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

← الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

1. الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a;b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.



البرهان:

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$.

و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c، محصور بين a و b و يحقق $f(c')=k$.

يكون لدينا حينئذ $c \neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على المجال $[a;b]$.

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=k$.

2. ملاحظات

ملاحظة1: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	k	↗ $f(b)$

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	k	↘ $f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a;b]$.

ملاحظة2: تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

تذكير: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-1;+\infty[$ و لدينا $\lim_{x \to -1} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)=0$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي k من $]0;+\infty[$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]-1;+\infty[$.

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـِ: $f(x)=2x^3+2x^2-12x+1$

1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. أرسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باختيار نافذة مناسبة.

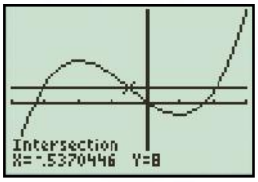
3. بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$.

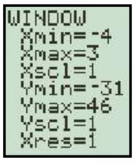
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.

الحل:

1. من أجل كل x من $[-4;3]$، $f'(x)=6(x+2)(x-1)$

x	-4		-2		1		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-31	↗	21	↘	-6	↗	46





أنظر الشكل المقابل.

2. لدينا $f(-2)=21$ ، $f(1)=-6$ و $-6\le 8\le 21$. f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;1]$.إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=8$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2;1]$.و بما أن f متناقصة تماما على $[-2;1]$ فإن c وحيد.

3. لتعيين حصرا للحل c يمكننا، بعد تمثيل المستقيم ذي المعادلة $y=8$، إظهار قيم مقربة لإحداثيي نقطة التقاطع و هكذا نقرأ $c\approx -0,5370446$ و منه نستنتج الحصر التالي: $-0,54<c<-0,53$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=-x^3-2x+5$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~.

2. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنى الممثل للدالة f ثم عين حصرا للعدد ~ سعته 10^{-1}.

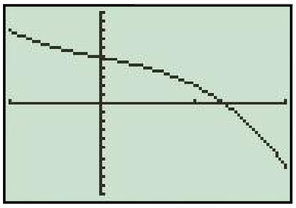
3. عين حسب قيم x إشارة الدالة f.

الحل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-(3x^2+2)$ و بالتالي لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)<0$.إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

لدينا كذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. كما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها كثير حدود.

نستنتج مما سبق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ .



A	B
x	f(x)
1	2
1,1	1,469
1,2	0,872
1,3	0,203
1,4	-0,544
1,5	-1,375
1,6	-2,296
1,7	-3,313

2. نثبت بإتباع مثلا نفس الطريقة السابقة أو باستعمال مجدول أو باستعمال جدول قيم مع اختيار الخطوة $0,1$ أن $1,3<\sim<1,4$.

3. من أجل $x\in]-\infty;\sim[$، $f(x)>0$
و من أجل $x\in]\sim;+\infty[$، $f(x)<0$.

إزالة حالة عدم التعيين

1. بالاختزال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$

- أحسب $\lim\limits_{x\to-2}(x^3+2x^2+x+2)$ و $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+x-2)$. هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند -2 ؟
- قم بتحليل كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 .
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$، $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.
- استنتج نهاية الدالة f عند -2 .

تطبيق: أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

2. باستعمال التحليل

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة ؟ لماذا ؟
- بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=x\left(2+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)$.
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2-\sqrt{x}$.

3. باستعمال المرافق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$

- تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$.
- بين أنه من أجل كل x من $[2;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}$
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}$.

4. باستعمال العدد المشتق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$

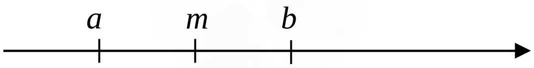
- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟
- باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto\cos x$ عين نهاية الدالة f عند 0.

تطبيق: أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $[-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف

المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$ فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال $[a;b]$.

نعلم أن $m=\dfrac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a;b]$.



1. ماذا يمكن القول عن ~ إذا كان $f(a)\times f(m)<0$ ؟
2. ماذا يمكن القول عن ~ إذا كان $f(a)\times f(m)>0$ ؟

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

تعيين حصر لـ ~:

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-3x-3$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال $[2;3]$.
2. بحساب $f(m)$ ، حيث m هو مركز $[2;3]$، عين حصرا لـ ~ سعته $0,5$.
3. بتعويض 2 و 3 بحدي الحصر السابق و بإتباع نفس المنهجية أوجد حصرا لـ ~. ما هي سعته ؟
4. ما هي سعة الحصر المحصل عليه بعد n مرحلة علما أنه في كل مرحلة يتم قسمة السعة على 2 ؟

استعمال مجدول:

1. لمتابعة العملية السابقة أنجز ورق الحساب أسفله بإتباع الخطوات التالية:

- نحجز في الخلية $D2$: $=(B2+C2)/2$
- نحجز في الخلية $E2$: $B2\wedge3-3*B2-3$ ثم ننقلها نحو كل من الخليتين $F2$ و $G2$.
- في الخليتين $B3$ و $C3$ نحجز على الترتيب: $=SI(E2*G2<0;B2;D2)$ و $=SI(E2*G2<0;D2;C2)$ ثم نسحب نحو الأسفل في كل عمود من أعمدة ورقة الحساب.

برامج لحاسبة بيانية:

$TI\ 82-83$

```
Prompt A, B, E
While B – A ≥ E
(A + B)/2 → C
A → X
Y1 → F
C → X
Y1 → G
If F × G ≤ 0
Then
C → B
Else
C → A
End
End
Disp A, B
```

$TI\ 89-92$

```
Dicho()
Prgm
Local c
Prompt a, b, e
While b – a ≥ e
(a + b)/2 → c
If y1(a) *y1(b) ≤ 0 Then
c → b
Else
c → a
EndIf
EndWhile
Disp a, b
EndPrgm
```

$Casio\ Graph$

```
? → A
? → B
? → E
While B – A ≥ E
A → X
Y1 → F
(A + B)/2 → X
Y1 → G
If F × G ≤ 0
Then X → B
Else X → A
IfEnd
WhileEnd
A◢
B
```

2. ابتداء من أي قيمة لـ n تكون سعة حصر العدد ~ أصغر من 10^{-5} ؟

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a	b	m=(a+b)/2	f(a)	f(b)	f(m)	b-a
2	0	2	3	2,5	-1	15	5,125	1
3	1	2	2,5	2,25	-1	5,125	1,640625	0,5
4	2	2	2,25	2,125	-1	1,640625	0,220703	0,25
5	3	2	2,125	2,0625	-1	0,220703	-0,41382	0,125
6	4	2,0625	2,125	2,09375	-0,41382	0,220703	-0,10269	0,0625
7	5	2,09375	2,125	2,109375	-0,10269	0,220703	0,057461	0,03125
8	6	2,09375	2,109375	2,101563	-0,10269	0,057461	-0,023	0,015625
9	7	2,101563	2,109375	2,105469	-0,023	0,057461	0,017134	0,007813
10	8	2,101563	2,105469	2,103516	-0,023	0,017134	-0,00296	0,003906

موضوع محلول

التمرين : حسب بكالوريا

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد للمستوي ، وحدة الرسم هي $1cm$.

نعتبر الدالة u المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ نسمي $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني .

1. أ- عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$.

ب- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا : $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$.

2. أ- بيّن أنّ $\left[u(x)+2x\right]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)>0$.

استنتج إشارة $\left[u(x)+2x\right]$.

جـ- فسّر هذه النتائج بيانيا .

نقبل أنّ الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أرسم $\mathcal{C}$ ومستقيمه المقارب المائل .

حل مختصر

1. أ- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$.

ب- $u(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

2. أ- من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)+2x=\sqrt{x^2+1}+x$ ومنه

حسب أ- $u(x)+2x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$ إذن

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[u(x)+2x\right]=0$.

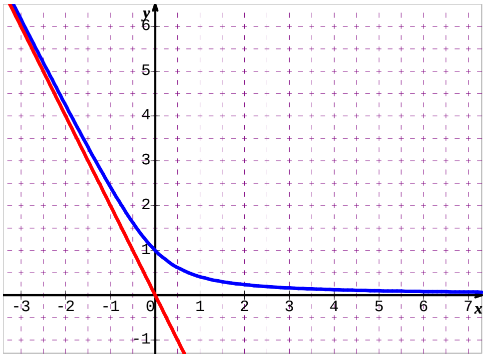
ب- من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

وبالتالي إذا كان $x\le 0$ فإن $u(x)>0$ ، و إذا كان $x\ge 0$ فإن $u(x)>0$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)>0$.

وحسب 1. أ- من أجل كل حقيقي x، $u(x)+2x=\dfrac{1}{u(x)}$ إذن $u(x)+2x>0$

جـ- المستقيم D ذي المعادلة $y=-2x$ هو مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}$ ، و $\mathcal{C}$ يقع فوق المستقيم D .



تعاليق

نلاحظ أن هناك نهاية لدالة مركبة.

استعمال المرافق لإزالة حلة عدم التعيين .

إذن يكون حامل محور الفواصل مقاربا أفقيا للمنحني $\mathcal{C}$.

$u(x)+2x>0$ معناه $u(x)>-2x$ وبالتالي يقع $\mathcal{C}$ فوق D .

لاحظ أنّ $u(0)=1$.

موضوع موجه

تنبيه

في بعض الاستدلالات نتبع طرائق استقرائية ، أي عند تحليل قضية يطلب تبريرها (تكون شرطا كافيا) نجدها صحيحة .

التمرين.

ليكن b عددا حقيقيا موجبا تماما .

1. عبّر بدلالة b عن عدد A_1 حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من A_1 يكون $\frac{1}{x}<b$.
2. عبّر بدلالة b عن عدد A_2 حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من A_2 يكون $\frac{1}{2x+1}<b$.
3. لتكن f دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x من هذا المجال يكون : $\frac{-1}{2x+1}\leq f(x)\leq\frac{1}{x}$.

أ - عيّن عددا A ، بدلالة b ، حيث من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من أو يساوي A يكون $f(x)\in]-b;b[$.

ب - ما هي الخاصية على الدالة f التي برهنت في السؤال السابق ؟

جـ - اقترح تبريرا آخر لهذه الخاصية باستعمال مبرهنة درست يطلب كتابتها كليا وبدقة .

توجيهات

1. عين شرطا على x حتى يكون $\frac{1}{x}<b$ ثمّ استنتج A_1 .
2. يمكن استعمال النتيجة السابقة حتى يكون الشرط $\frac{1}{2x+1}<b$ كافيا لضمان الشرط $2x+1>A_1$.
3. **أ** - لكي يكون $f(x)\in]-b;b[$ يكفي أن يكون $\frac{1}{x}<b$ و $\frac{-1}{2x+1}>-b$.

ب - تذكر مفهوم النهاية .

جـ - $\frac{-1}{2x+1}\leq f(x)\leq\frac{1}{x}$ استعمل المبرهنة حول النهاية والحصر .

تمارين تطبيقية

1 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$$

1) أوجد عددا حقيقيا A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]2,9;3,1[$.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=3$ مقارب للمنحني C_f الممثل لدالة f.

3) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

2 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

1) أوجد عددا حقيقيا A حيث إذا كان $x<A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,9;1,1[$.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني C_f الممثل لدالة f.

3) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

3 اثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$

4 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-3$

اثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

5 لتكن الدالة f المعرفة

على $]-\infty;1[$ بـ $f(x)=\sqrt{1-x}$

اثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

6 لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x+\frac{1}{x-1}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم.

1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحني C_f عند $+\infty$.

2) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

7 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=2x-1-\frac{2}{x^2+1}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم.

1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحني C_f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

- في التمارين من **8** إلى **11** اذكر إن كان منحنى الدالة f يقبل المستقيم Δ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم حدد وضعية المنحني بالنسبة إلى Δ.

8 أ) $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ، $\Delta: y=1$

ب) $f(x)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}$ ، $\Delta: y=-\frac{1}{3}$

9 أ) $f(x)=2x+1+\frac{5}{x-3}$ ، $\Delta: y=2x+1$

ب) $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}$ ، $\Delta: y=-\frac{1}{2}x$

10 أ) $f(x)=x+3-\frac{2}{|x|}$ ، $\Delta: y=x+3$

ب) $f(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1$ ، $\Delta: y=-x+1$

11 أ) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}$ ، $\Delta: y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

ب) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$ ، $\Delta: y=x$

2 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيق

12 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+3$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

1) ضع تخمينا لسوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

2) في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]6,99;7,01[$ ؟

3) $\sim$ عدد حقيقي حيث $0<\sim<1$

• في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]7-\sim;7+\sim[$ ؟

• علما أننا نختار $\sim$ صغير بالقدر الذي نريد ، ماذا تستنتج؟

13 - خمن النهاية عند 4 للدالة f المعرفة بـــ:

$$f(x)=\frac{x+2}{x-2}$$

- أوجد مجالا I مركزه 4 بحيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)\in\,]2,95;3,05[$

14 خمن النهاية عند 2 للدالة f المعرفة بـــ:

$f(x)=\dfrac{3x+4}{(x-2)^2}$ ، ثم أوجد عددا حقيقيا a بحيث إذا كان $x\in\,]2-a;2+a[$ فإن $f(x)>10^3$

15 لتكن الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

1) الشكل التالي هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f على شاشة حاسبة بيانية

• ماذا تخمن بالنسبة سلوك الدالة f عندما يؤول x إلى 2؟

2) A عدد حقيقي موجب تماما

• في أ مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x)\leq -A$ ؟

• أثبت صحة التخمين السابق.

3) ماذا يمكن القول عن المستقيم الذي معادلته $x=2$ بالنسبة للمنحنى (C_f)؟

16 1) ادرس النهاية عند $-\infty$، عند $+\infty$ و عند 1 للدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$

2) حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

17 f هي الدالة العددية المعرفة بـــ: $f(x)=\dfrac{-3x}{x+2}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

2) حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

3 - تتمات على النهايات

• في التمارين من **18** إلى **22** و في كل حالة من الحالات ادرس نهاية الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس النهاية على يمين و على يسار a

18 أ) $f(x)=2x^3-x+1$ عند $-\infty$، عند $+\infty$

ب) $f(x)=-3x^4+2x+4$ عند $-\infty$، عند $+\infty$

ج) $f(x)=-x^3+x^2+x+1$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

19 أ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند -1

ب) $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x-2}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 2

ج) $f(x)=\dfrac{-4x+1}{3-x}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 3

20 أ) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$

ب) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 2

ج) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 0

21 أ) $f(x)=2x-1+\dfrac{3}{x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$، عن 0

ب) $f(x)=3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$، عند -1

ج) $f(x)=x^2+x-\dfrac{1}{x-3}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$، عند 3

22 أ) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(4-x)}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$، عند 1 ، عند 4

ب) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{3-x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$، عند -1 ، عند 3

ج) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{(x+2)^2}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$، عند -2

• في التمارين من **23** إلى **28** ، في كل حالة من الحالات وباستعمال العمليات على النهايات ادرس نهاية

الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس إن كان ضروريا النهاية على يمين و على يسار a .

23 أ) $f(x)=2x^2+\sqrt{x}+1$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+2\sqrt{x}$ عند $+\infty$ ، عند 1

24 أ) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ عند 4

ب) $f(x)=(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)$ عند $-\infty$ ، عند 0

25 أ) $f(x)=\dfrac{2}{x}-\cos x$ عند 0 ، عند $+\infty$

ب) $f(x)=\sin(2x)+x$ عند $\dfrac{®}{4}$ ، عند $+\infty$

26 أ) $f(x)=x^3+x^2-x-1$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\dfrac{x+2}{3-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

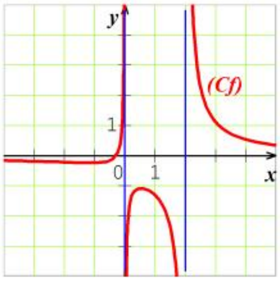
27 أ) $f(x)=\sqrt{x}-1-2x$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1-\sqrt{x}}{x^2+2}$ عند $+\infty$

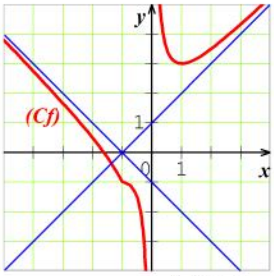
28 أ) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$ عند $-\infty$

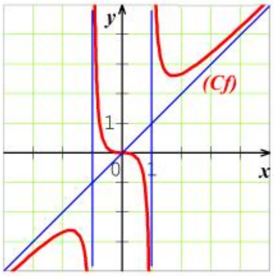
29 المنحني C_f هو التمثيل البياني الممثل لدالة f في كل حالة من الحالات الثلاث عين D مجموعة تعريف الدالة f ثم خمّن النهايات في أطراف المجموعة D .



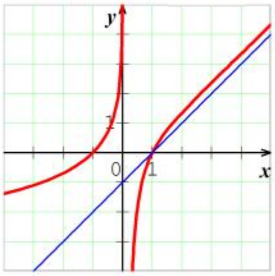
الحالة (1)



الحالة (2)



الحالة (3)



الحالة (4)

4 - نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة

30 احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\sqrt{\dfrac{3x+4}{x-3}}$ ، 2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\sqrt{\dfrac{3-6x}{1-x}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^3+x-3}$

31 f هي الدالة المعرفة على $]-2;2[$ بـ:

$$f(x)=\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$$

احسب نهاية الدالة f عند -2 و عند 2 .

32 احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{x+4}{x^2-3}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{®x-1}{2x}\right)$ ،

$\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\dfrac{®}{2}x\right)+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(®\dfrac{\sin x}{x}\right)$

33 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-1$:

$$\frac{-1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$$

هل تقبل الدالة $f:x\mapsto\dfrac{\cos x}{x+1}$ نهاية عند $+\infty$ ؟

34 f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x>1$ ،

$$\frac{3x+\cos x}{x}\le f(x)\le\frac{3x+7}{x-1}$$

هل تقبل f نهاية عند $+\infty$ ؟

35 f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\ge0$:

$$\left|f(x)-3\right|\le\frac{1}{x^2+1}$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

36 f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x<0$:

$$f(x)\le-2x^3$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

37 f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$$f(x)\ge\frac{1}{2}x^4+x$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

38 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$$

2) هل تقبل الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{3+2\cos x}$ نهاية عند $+\infty$؟.

39 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$$

2) هل تقبل الدالة $f : x \mapsto x^2 - \sin 3x$ نهاية عند $+\infty$ ؟

40 هل تقبل الدالة $f : x \mapsto x^2 + 2x\sin x$ نهاية عند $+\infty$ ؟ و عند $-\infty$؟

41 f دالة معرفة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{2x+1}$$

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

2) هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

5 - الاستمرارية

42 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \ ; & x \in [-2;1[\\ f(x) = x - 1 \ ; & x \in [1;4[\end{cases}$$

1) مثل بيانيا الدالة f في معلم. هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2;4[$؟ لماذا؟

3) اذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

43 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 \ ; & x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5 \ ; & x > 2 \end{cases}$$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 2 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

44 ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + 2 \ ; & x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 \ ; & x > 1 \end{cases}$$

45 f دالة عددية معرفة كما يلي:

$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x-1}$ إذا كان $x \neq 1$ و $f(1) = 3$

1) ادرس استمرارية f عند 1 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

46 لتكن الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R} - \{1\}$ على الترتيب كما يلي:

$f(x) = 2x^3 - x + 1$ و $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$

ادرس استمرارية f و g .

47 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \left(x^2 - x\right)\sin x$$

لماذا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

48 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

ادرس استمرارية f .

49 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي:

$$f(x) = x\left(x + E(x)\right)$$

حيث $x \mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية:

$$[-2;-1[\ ، \ [-1;0[\ ، \ [0;1[$$

2) ارسم في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنى الممثل للدالة f .

3) هل الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$؟

6 - مبرهنة القيم المتوسطة

50 برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3 - 4x = -2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$

51 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 \quad ; \; 0<x\leq 1 \\ f(x)=-2x+3 \; ; \; 1\leq x<2 \end{cases}$$

1) هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا في المجال $[0;2]$ ؟

2)تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في $[0;2]$.

52 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$$

1) احسب $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(-1)$

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$

53 f هي الدالة المعرفة على $[-3;6]$ بـ :

$$f(x)=x^3-12x$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=30$.

54 بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا.

55 بين أن المعادلات التالية تقبل على الأقل حلا في المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $2x^3+1=0$ ، $I=[-1;0]$

2) $x^5+3x^4-6x^2-1=0$ ، $I=[1;2]$

3) $x^4+4x-3=0$ ، $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$

4) $-x^3+3x^2=3$ ، $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$

5) $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ ، $I=[0;®]$

56 لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$

و جدول تغيراتها هو الآتي:

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما.

57 إليك جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$

لماذا المعادلة $f(x)+2=0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$؟

7 - الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

58 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2]$ بـ:

$$f(x)=2x^3-3x^2-1$$

1) احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) ارسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باستعمال نافذة مناسبة.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$.

4) باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.

59 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في $\mathbb{R}$.

3) باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذا الحل.

60 نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;2]$ بـ:

$$f(x)=x^4-x^2+1$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا ~ في $]1;2[$. 3) باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} لـ ~

61 بين أن المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$.

62 بين أن المعادلة $\frac{1}{x+2}=2\cos x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-\frac{®}{2};0\right]$.

63 لتكن الدالة f المعرفة على $[0;®]$ بـ:

$$f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد ~ من $[0;®]$ بحيث $f(~)=\sqrt{2}$

64 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-x^3+3x^2-1$$

1) ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) أ) أحسب f' مشتقة الدالة f ثم ادرس إشارتها.

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا على كل مجال من المجالات التالية: $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$

65 f الدالة معرفة على $[0;®]$ بـ: $f(x)=2+\frac{1}{2}\sin x$

- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد ~ من $[0;®]$ بحيث $f(~)=~$

66 لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$$

1) بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $D=[0;2]$

2) لتكن الدالة g المعرفة على D بـ: $g(x)=f(x)-x$

- بين أن الدالة g متناقصة تماما على D.
- احسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D.

67 نعتبر الدالتين $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ و $g:x\mapsto -x^3$

- بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-\frac{7}{8}<x_0<-\frac{3}{4}$.

تمارين للتعمق

1 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

68 f هي الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-3}$$

1) أوجد عددا حقيقيا A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,99;1,01[$.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى C_f الممثل لدالة f، ثم ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى Δ.

69 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x^4+2x^3+1$$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. أوجد عددا حقيقيا $A>0$ حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)>10^6$

70 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$$

1) ادرس نهاية الدالة f عند 1.

2) أوجد مجالا I مركزه 1 حيث من أجل كل x من I ، $f(x)>10^6$

2 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

71 لتكن الدالة f حيث: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$

و (C) تمثيلها البياني.

عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث : (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$ و مستقيما مقاربا مائلا معادلته

$y=2x+3$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$

72 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

1) عين a ، b ، c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$

2) استنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له

3) حدّد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى Δ .

73 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$

2) استنتج وجود مستقيم مقارب مائل Δ للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بين أنه يوجد عددان حقيقيان ~ و بحيث

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\sim$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\sim x\right]=$

ج) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا Δ' عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

74 f و g الدالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^+$ على الترتيب بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

و $g(x)=\sqrt{x^2+4x}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

• ما هو التخمين الذي تضعه حول السلوك التقاربي للدالتين f و g عند $+\infty$ ؟

3) حدّد بدون حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]$.

ماذا تستنتج ؟

75 f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

2) ادرس الوضعية النسبية لـــ (C) و Δ .

76 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\dfrac{3}{2}x\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x\right]$.

4) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ و Δ' يطلب تعيين معادلتيهما.

5) حدّد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من Δ و Δ' .

المنحنيات المتقاربة

77 f هي الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2)أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$

ب) اشرح لماذا المنحنى (C) و المنحنى (P) الذي معادلته $y=x^2$ " يتقاربان شيئا فشيئا " عندما يؤول x إلى $+\infty$.

نقول في هذه الحالة أن المنحنيين (C) و (P) متقاربان عند $+\infty$.

ج) ارسم (C) ثم (P).

78 f هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=3x^2-\frac{2}{x-1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) ابحث عن منحن (P) مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ ،ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P) .

2) هل (C) و (P) متقاربان عند $-\infty$.

79 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

ابحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ،ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P).

80 f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم

.ابحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ ، ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P).

3 ـ تتمات على النهايات

81 f هي الدالة المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1;4\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$$

1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من D:

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-4}$$

2) ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة التعريف.

82 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$ ، 2) $f(x)=\dfrac{3x}{(x+1)^2}$ ،

3) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

5) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}$ ، 6) $f(x)=\dfrac{(x+2)^3-8}{x}$

83 باستعمال المرافق احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+3}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

حيث $a>0$ و $b>0$

84 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \ ، \ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} \ ،$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} \ ، \ \lim_{x\to 3}\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$$

85 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \ ، \ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} \ ، \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

86 علما أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \ ، \ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x} \ ، \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} \ ،$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{4x} \ ، \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} \ ، \ \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}$$

87 احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}$ ، 2) $\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ ،

3) $\lim_{x\to -3^-}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}$ ، 4) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

5) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ ، 6) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$

88 باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{3}$ لكل من الدالتين $x\mapsto \sin 3x$ و $x\mapsto 2\cos x-1$ ،

احسب النهاية التالية $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}$

89 باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ لكل من الدالتين $x\mapsto \tan x$ و $x\mapsto 2\cos x-\sqrt{2}$ ، احسب النهاية التالية $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

90 بين باستعمال طريقة مناسبة أن :

$$\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2}$$

و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=2$

و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=2$

4 ـ نهاية دالة مركبة ـ النهايات بالمقارنة

91 باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{2x-4}}$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$

3) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-x+3}$ ، 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

92 باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

1) $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ، 2) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)$ ، 4) $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)$

5) $\lim_{x\underset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}$ ، 6) $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\times 2\pi\right)$

93 نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x>1$ بـ: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1) بين أنه إذا كان $x>1$ فإن: $\frac{1}{\sqrt{x+1}}>\frac{1}{\sqrt{2x}}$

2) استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

94 1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$$0\le\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) استنتج $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

95 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$-2\le\cos x+\sin x\le 2$ ،

ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x+\sin x}{x^2}$

96 1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$:

$$\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$$

2) استنتج النهايتين التاليتين:

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\left(x+1\right)}$

97 باستعمال نهاية حصر دالتين ، عين النهايتين التاليتين:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+4\left(-1\right)^x}{x} \text{ ، } \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos x}{x-1}$$

98 من أجل $x>0$ ، قارن $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$.

استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+5}-x$

99 من أجل $x>1$ ، قارن $\sqrt{2x^2-1}$ و $2x$.

استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-1}-3x$

100 من أجل كل $x>0$ ، قارن $\sqrt{2x^2+x+1}$ و $x\sqrt{2}$.

استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+x+1}-x$

101 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

$$f\left(x\right)=\frac{x\left(1+\sin x\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$f\left(x\right)\leq-4x^2$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$

5 - الاستمرارية

102 ادرس استمرارية الدالة f عند x_0 في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) $$x_0=0\ ;\begin{cases}f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\ ;\ x\neq 0\\ f\left(0\right)=0\end{cases}$$

2) $$x_0=0\ ;\begin{cases}f\left(x\right)=\dfrac{\left|x\right|}{x}\times\sqrt{\left|x\right|}\ ;\ x\neq 0\\ f\left(0\right)=2\end{cases}$$

103 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases}f\left(x\right)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}\ ;\ x>0\\ f\left(x\right)=\dfrac{1-x^2}{x-2}\ ;\ x\leq 0\end{cases}$$

بين لن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

104 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases}f\left(x\right)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\ ;\ x\neq 0\\ f\left(0\right)=\sim\end{cases}.$$

عين قيمة العدد $\sim$ حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

105 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases}f\left(x\right)=x^2+2x-a\ ;\ x>2\\ f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-a+b}{x}\ ;\ x\leq 2\end{cases}$$

حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان.

عين علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند2.

6 - مبرهنة القيم المتوسطة-الدوال المستمرة والرتيبة تماما

106 f دالة مستمرة على المجال $\left[a;b\right]$ بحيث

$f\left(a\right)<ab$ و $f\left(b\right)>b^2$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $\left[a;b\right]$ بحيث

$f\left(c\right)=bc$.

107 f دالة مستمرة على المجال $\left[0;1\right]$ بحيث

$f\left(0\right)=0$ و $f\left(1\right)=1$

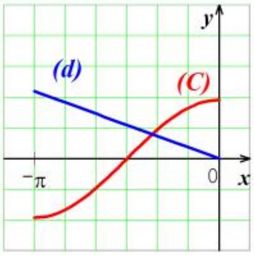
بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث

$$f(c)=\frac{1-c}{1+c}$$

108 f: دالة مستمرة معرفة على المجال $I=[0;1]$ بحيث من اجل كل x من I ، $f(x)\in I$.

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي ~ من I بحيث

$$f(\sim)=\sim$$



109 في الشكل المقابل المنحني (C) هو التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \cos x$ و (d) هو التمثيل البياني للدالة $x\mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ على المجال $I=[-®;0]$.

1) خمّن عدد حلول المعادلة $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ في المجال I

2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال I كما يلي :

$$f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

أ) تحقق من أن الدالة f تقبل الاشتقاق على I و احسب $f'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) استنتج أن المعادلة $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا واحدا ~ في المجال I .

110 n عدد طبيعي غير معدوم.

1) بين أن المعادلة $x^{n+1}-2x^n+1=0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 .

2) هل المعادلة $x^8-2x^7+1=0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل.

مسائل

111 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I,J)$.

1) أ) عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$: $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f و المستقيم (d) الذي معادلته $y=x-2$ ؟ برر .

ج) حدّد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) ، لتكن A نقطة تقاطع C_f و (d) .

3) ارسم C_f و (d) .(تؤخذ الوحدة $2cm$ على (Ox) و $1cm$ على (Oy)).

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ على المجال $]-\infty;1[$.استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد ~ .

5) استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي.

6) أ) نريد إيجاد نتيجة السؤال 5) باستعمال الحساب
بين أن فواصل نقط تقاطع المنحني C_f مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة (E) التالية:

$$(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$$

ب) جد حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .

112 f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

بـ : $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) بين أن الدالة f فردية

2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

3) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$. حدّد وضعية (C) بالنسبة لـ Δ

4) باستعمال نتيجة السؤال 1) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

5) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $g(x)=-f(x)$

• عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C').

113 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها .

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بين أن المستقيمين $\Delta: y=x+1$ و $\Delta': y=-x-1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال $]1;+\infty[$ و ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على المجال $]-\infty;-1[$.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا ~ على المجال $]-1;1[$ ، وأعط حصرا لـــ ~ سعته 10^{-1} .

114 نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على المجموعة $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$$

و $$g(x)=x-\sqrt{x^2-1}$$

و C_f و C_g تمثيلاهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

ب) عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.استنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا.

ج)بين أن المستقيم $\Delta: y=2x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

2) أ) احسب $f(x)\times g(x)$ ثم استنتج نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟

ج) قارن بين $g(x)-2x$ و $f(x)$.

استنتج $\lim_{x\to-\infty} g(x)-2x$، أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

3) نعتبر المنحني $(\Gamma)=C_f\cup C_g$.

بين أن معادلة (Γ) هي $y^2-2xy+1=0$

4) ليكن الشعاع $\vec{u}$ من المستوي حيث $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$.

نرمز بـــ $(x;y)$ لاحداثيتي النقطة M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

و بـــ $(x';y')$ احداثياتها في المعلم $(O;\vec{i},\vec{u})$

أ) عبر عن x و y بدلالة x' و y' .

ب) عين معادلة (Γ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{u})$.

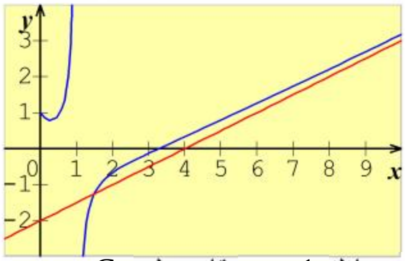
ج) ما طبيعة (Γ) .

إختيار من متعدد

115 عين الإجابة الصحيحة دون تبرير

في الشكل الموالي لدينا الرسم البياني C_f لدالة f معرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\frac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x^2-1)}$ و المستقيم Δ الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x-2$



1) أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـــ C_f

ب) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـــ C_f

ج) C_f لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا و لا عموديا.

2) من أجل كل من $]1;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{2}x+a+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}$

أ) $a=-2$ ، $b=2$ ، $c=-3$

ب) $a=2$ ، $b=-2$ ، $c=-3$

ج) $a=1$ ، $b=2$ ، $c=3$

3) C_f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته:

أ) $y=\frac{1}{2}x+1$ ب) $y=\frac{1}{2}x+2$ ج) $y=\frac{1}{2}x-2$

4) أ) C_f يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$

ب) C_f يقطع المستقيم المقارب في النقطة $B\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$

ج) C_f لا يقطع المستقيم المقارب في أية نقطة.

5) على المجال $]0;1[$ ، المعادلة $f(x)=1$ تقبل:

أ) حلا واحدا ب) حلين متمايزين ج) ثلاثة حلول.

116 f معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بـ: $f(x)=\frac{3x^2-5x}{x-5}$

1) $\lim_{x\to5} f(x)=-\infty$ 2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{5\}$:

$$f(x)=3x+10+\frac{50}{x-5}$$

4) المستقيمان اللذان معادلتاهما $x=5$ و $y=3x+10$ مقاربان لمنحنى الدالة f.

صحيح أم خاطئ

117 إليك جدول تغيرات دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	0	-	
$f(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

نرمز بـــ C_f إلى منحنى الدالة f الممثل في معلم. أجب بصحيح أو خاطئ على كل جملة من الجمل التالية:

1) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـــ C_f .

2) محور التراتيب مقارب لـ C_f .

3) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع C_f في نقطة واحدة.

4) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في المجال $]0;+\infty[$.

5) على المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)\leq 3$

118 f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ،إذن:

أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ب) من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)<f(0)$

ج) منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل على الأقل في نقطة.

119 C_f هو المنحنى الممثل لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد و متجانس و Δ المستقيم الذي معادلته $y=1-x$

1) إذا كان Δ مقاربا لـــ C_f عند $-\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) إذا كان Δ مقاربا لـــ C_f عند $+\infty$ فلا يوجد مستقيم مقارب أفقي لـــ C_f .

3) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ فلا يمكن لـــ Δ أن يكون مقاربا لـــ C_f .

4) إذا كان Δ مقاربا لـــ C_f عند $+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)+x=1$

120 (1 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ (2 $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$

(3 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=1$ (4 $\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{®}{2}\frac{\sin x}{x}\right)=1$

02 الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة

- توظيف المشتقات لحل مشكلات.
- استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة والمنحني الممثل لها (التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الانعطاف،...).
- حساب مشتق دالة مركبة.
- حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ ، $y'' = f(x)$. حيث f دالة مألوفة

يعبر التفاضل عن المعدل الذي تتغير به قيمة y نتيجة تغير قيمة x توجد بينهما علاقة رياضية أو دالة رياضية . وتعرف المشتقة بأنها ميل المماس لمنحنى $f(x)$ عند أي نقطة بشرط وجود هذه المشتقة أو هي السرعة اللحظية أو **معدل** التغيير اللحظي للدالة . نستخدم الرمز Δ للدلالة على التغير في الكمية . ويكون معدل التغير هو نهاية نسبة تغير y **إلى** نسبة تغير x : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. يمكن أن نكتب مشتق y بالنسبة لـ x : (ترميز لايبنز) $\frac{dy}{dx}$ و هو المفضل عند الفيزيائيين .

يمكن التعبير عن المشتق بعدة طرق : $f'(x)$ ، $\frac{d}{dx}f(x)$ ، $\frac{df}{dx}$ ، $D_x f$ ، $\dot{x}$.

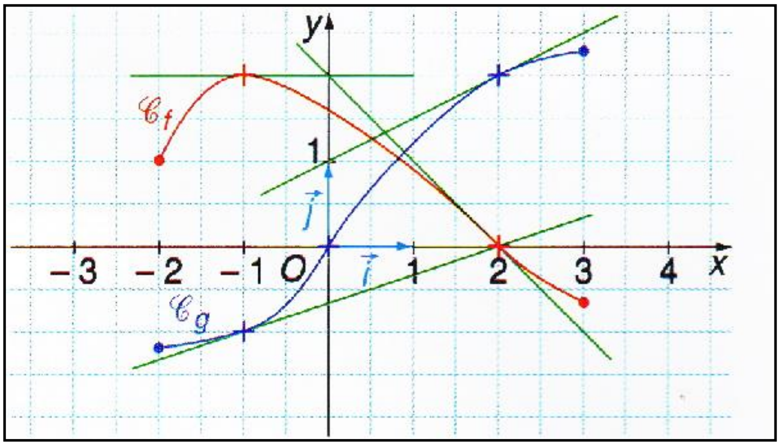
غوتفريد لايبنتز
1646 - 1716

غوتفريد فيلهيلم من لايبنتز (أيضا **لايبنتز**) 1646 - 1716 فيلسوف ألماني، عالم طبيعة، عالم رياضيات، دبلوماسي، مكتبي، ومحامي.

يرتبط اسم لايبنتز بالتعبيرِ "دالة رياضية (1694)"، التي كان يصف بها كل كمية مُتَعَلِّقة ب منحنى، مثل ميل المنحنى أونقطة معينة على المنحنى.

يعتبر لايبنتز مع نيوتن أحد مؤسسي علم التفاضل و التكامل و بخاصة تطوير مفهوم التكامل و قاعدة الجداء ، كما طور مفهوم الحديث لمبدأ انحفاظ الطاقة.

نشاط أول



رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين لدالتين f و g معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ و بعض مماساتهما.

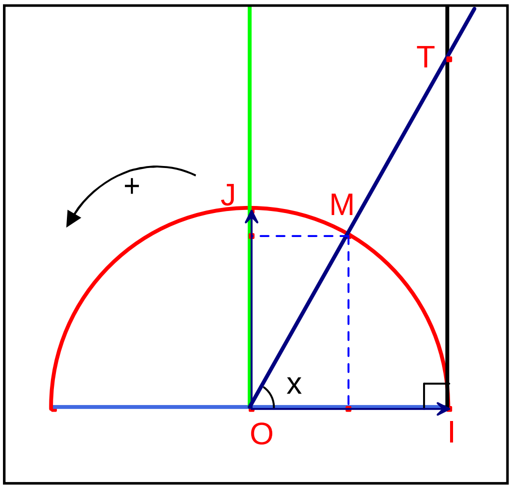
1. أحسب الأعداد المشتقة التالية:

- $*\ (f)'(-1)$ $\quad$ $*\ (g)'(-1)$ $\quad$ $*\ (f)'(2)$ $\quad$ $*\ (g)'(2)$
- $*\ (f+g)'(-1)$ $\quad$ $*\ (fg)'(2)$ $\quad$ $*\ \left(\dfrac{3}{f}\right)'(-1)$ $\quad$ $*\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

2. من أجل كل x من المجال $[0;2]$ نضع: $h(x)=f(2x-1)$

أحسب $h'(0)$ و $h'\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

نشاط ثان



1) في الشكل المقابل، M نقطة من القوس $\overset{\frown}{IJ}$ لنصف الدائرة المركزية المرفقة بالمعلم $(O;I,J)$.

x قيس بالراديان للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$ و لتكن النقطة T تقاطع المستقيم (OM) مع المستقيم العمودي على (OI) في I.

- ما هي القيم التي تأخذها x ؟
- ما هي قيم x التي يكون من أجلها $IT=0$ ؟ $IT=1$ ؟
- حدد القوس الذي يشمل النقط M بحيث يكون $IT>1$.
- عبر عن المسافة IT بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

- أحسب $f(0)$ ، $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ و $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
- باستعمال السؤال 1 أعط تفسيرا هندسيا لـ $f(x)$.
- بواسطة قراءة على الدائرة المثلثية ضع تخمينا حول اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
- تحقق من صحة تخمينك باستعمال حاسبة بيانية.
- أحسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة المحصل عليها.

نشاط ثالث

u و v دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $[0;+\infty[$ على الترتيب بـ $u(x)=x^2+x+1$ و $v(x)=\sqrt{x}$

1) تعيين الدالة المركبة $v \circ u$

لدينا المخطط التالي: $a \xrightarrow{u} b=u(a) \xrightarrow{v} v(b)=v\circ u(a)$

- بين أن الدالة $v\circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$.
- من أجل كل عدد حقيقي a، عبر بدلالة a عن $v\circ u(a)$.

2) حساب $u'(a)$ و $v'(b)$

- الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة v قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$. عين الدالتين u' و v'.
- أرسم و أتمم الجدول الموالي (تدور النتائج إلى 10^{-3}). يمكنك استعمال مجدول.

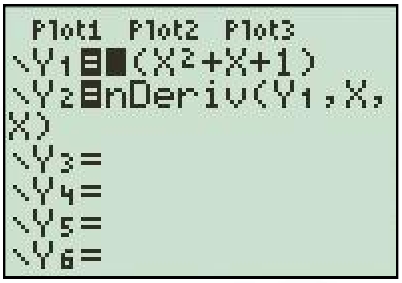
	A	B	C	D
1	a	b=u(a)	u'(a)	v'(b)
2	-2			
3	-1,5			
4	-1			
5	-0,5			
6	0			
7	0,5			
8	1			
9	1,5			
10	2			

3) حساب $(v\circ u)'(a)$

- أنقل ثم باستعمال حاسبة بيانية أتمم الجدول الموالي:

(تدور النتائج إلى 10^{-3})

a	$(v\circ u)'(a)$
-2	
$-1,5$	
-1	
$-0,5$	
0	
$0,5$	
1	
$1,5$	
2	



- خمن علاقة بين $u'(a)$ ، $v'(b)$ من جهة و $(v\circ u)'(a)$ من جهة ثانية.

الاشتقاقية

1. العدد المشتق - الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

لدينا إذن: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و ذلك بوضع $x=a+h$

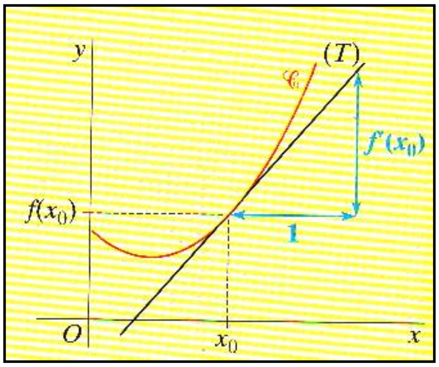
ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

2. مماس منحني دالة

تعريف و خاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$



3. المشتقات المتتابعة

تعاريف: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f''. إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f و نرمز لها بالرمز f'''. تسمى الدوال f'، f''، f'''،...، $f^{(n)}$،... المشتقات المتتابعة للدالة f.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}$

لدينا: $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ، $f''(x)=6x-\dfrac{2}{x^3}$ ، $f'''(x)=6+\dfrac{6}{x^4}$.

4. الاشتقاقية و الاستمرارية

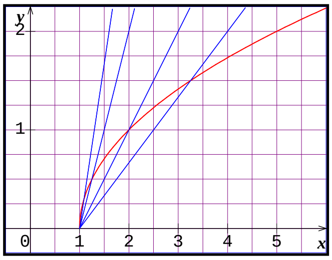
خاصية: إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال.

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا فمثلا الدالة: $x\mapsto|x|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للاشتقاق عند0. لدينا $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ بينما النسبة $\dfrac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{|h|}{h}=-1$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{|h|}{h}=1$.

المحصل عليها: $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)^2$ ، $g(x)=\sqrt{x-1}$ ، $k(x)=2x\left|x-1\right|$

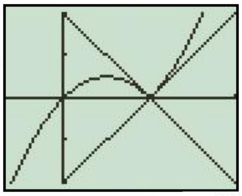
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h\left(h^2+4\right)=0$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1)=0$.

المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 و هو موازي لمحور الفواصل.



إذن الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 2 . بما أن نهاية النسبة $\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}$ هي $+\infty$ فإن معامل توجيه المستقيم (AM) حيث $A(1;0)$ و M نقطة من $\left(C_g\right)$ فاصلتها $1+h$ يصبح كبيرا جدا لما يؤول h إلى 0 و هذا يعني أن $\left(C_g\right)$ يقبل عند النقطة $A(1;0)$ مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.

النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.



*من أجل $h>0$ ، $\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}=\dfrac{2(h+1)|h|}{h}=2(h+1)$

و من أجل $h<0$ ، $\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}=\dfrac{2(h+1)|h|}{h}=-2(h+1)$

نلاحظ أن هذه النسبة تقبل نهاية من اليمين عند 0 مساوية لـ 2 و نهاية من اليسار عند 0 مساوية لـ -2 .

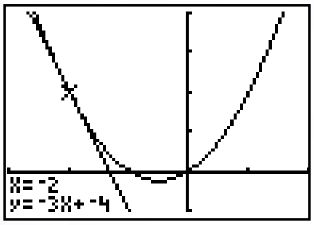
نقول أن k تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين و من اليسار و أن عددها المشتق من اليمين عند 1 هو 2 و عددها المشتق من اليسار عند 1 هو -2 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1 (النسبة $\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0).

المنحني $\left(C_k\right)$ يقبل عند النقطة $A(1;0)$ نصفي مماسين معاملا توجيههما 2 و -2 .

1. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني $\left(C_f\right)$ و (Δ) مماس $\left(C_f\right)$ عند النقطة A ذات الفاصلة (-2).

2. عين معادلة لـ (Δ).

الحل



1. أنظر الشكل المقابل.
2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=2x+1$ و منه $f'(-2)=-3$

بتطبيق الدستور: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ مع $a=-2$ نجد $y=-3x-4$.

المشتقات و العمليات

1. مشتقات دوال مألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

2. المشتقات والعمليات على الدوال

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$ ← (الدالة v لا تنعدم على I) → $\frac{u}{v}$	
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

نتائج:

* الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
* الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

3. مشتقة الدالة: $x \mapsto u(ax+b)$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$. u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I.
الدالة $f: x \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J و لدينا: $f'(x) = au'(ax+b)$

أمثلة:

* الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f'(x) = a\cos(ax+b)$$

* الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \cos(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$g'(x) = -a\sin(ax+b)$$

الدرس

$h(x)=\frac{\sin x}{x}$ ، $g(x)=(x+1)\sqrt{x}$ ، $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-x+3$

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+6x-1$$

$$g'(x)=\sqrt{x}+(x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$$

فإن الدالة h تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$h'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=f(-x)$ و $h(x)=f(2x-1)$

بدون تعيين الدالتين g و h عين الدالتين g' و h'.

$$g'(x)=-f'(-x)=-\frac{1}{(-x)^2+(-x)+1}=-\frac{1}{x^2-x+1}$$

$$h'(x)=2f'(2x-1)=2\times\frac{1}{(2x-1)^2+(2x-1)+1}=-\frac{2}{4x^2-2x+1}$$

بين أن الدالة f_n تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ثم عبر عن $f'_{n+1}(x)$ بدلالة n و $f_n(x)$.

فالدالة f_n جداؤهما تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$.

لدينا: $f_{n+1}(x)=x^{n+1}\sqrt{x}$ و منه $f'_{n+1}(x)=(n+1)x^n\sqrt{x}+x^{n+1}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

و بالتالي $f'_{n+1}(x)=(n+1)x^n\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^n\sqrt{x}=\left(n+\frac{3}{2}\right)x^n\sqrt{x}$

و نجد هكذا: $f'_{n+1}(x)=\left(n+\frac{3}{2}\right)f_n(x)$

اتجاه تغير دالة

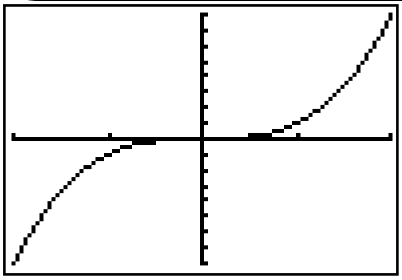
1. المشتقة و اتجاه تغير دالة

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.



ملاحظة: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=3x^2$ و منه:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

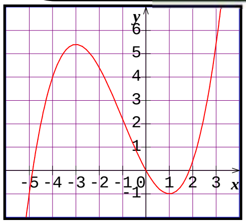
2. القيم الحدية المحلية

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

*القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\le f(x_0)$.

*القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\ge f(x_0)$.

*القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.



مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $[-6;4]$ بـ $f(x)=\frac{1}{5}\left(x^3+3x^2-9x\right)$

و ليكن في الشكل المقابل تمثيلها البياني. $f(-3)=\frac{27}{5}$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

و $f(1)=-1$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f.

مبرهنة (دون برهان): f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

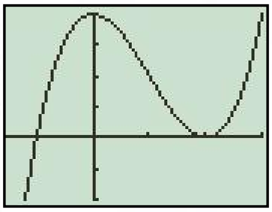
x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

1. أدرس اتجاه تغير f. أحسب $f\left(-1\right)$. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارتها على $\mathbb{R}$.

2. باستعمال السؤال **1** أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $\left]-\infty;0\right[$ بـ $g\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-3x-\dfrac{4}{x}$

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'\left(x\right)=3x^2-6x=3x\left(x-2\right)$. $f'\left(x\right)$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه 0 و 2 و بالتالي فإشارته من نفس إشارة $\left(-3\right)$ بين الجذرين أي سالبة على المجال $\left[0;2\right]$

لدينا: $f\left(-1\right)=\left(-1\right)^3-3\left(-1\right)^2+4=0$



x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
إشارة $f'\left(x\right)$		+		+	0	−	0	+	
$f\left(x\right)$		↗	0	↗	4	↘	0	↗	

من جدول التغيرات نستنتج أن $f\left(x\right)\leq 0$ على $\left]-\infty;-1\right]$ و $f\left(x\right)\geq 0$ على $\left[-1;+\infty\right[$.

2. الدالة g قابلة للاشتقاق على $\left]-\infty;0\right[$ و لدينا: $g'\left(x\right)=x-3+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}$

إذن إشارة $g'\left(x\right)$ هي من نفس إشارة $f\left(x\right)$ على $\left]-\infty;0\right[$ أي سالبة على $\left]-\infty;-1\right]$ و موجبة على $\left[-1;0\right[$.

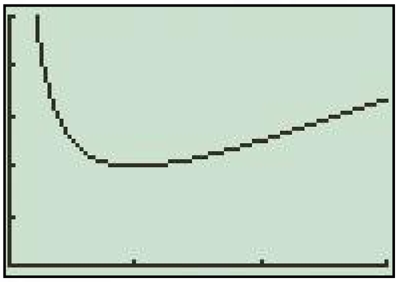
نستنتج هكذا أن الدالة g متناقصة تماما على $\left]-\infty;-1\right]$ و متزايدة تماما على $\left[-1;0\right[$.

$$B=0{,}999999+\frac{1}{0{,}999999} \quad \text{و} \quad A=0{,}999998+\frac{1}{0{,}999998}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$ و لدينا: $f'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$. و بالتالي فإن إشارة $f'\left(x\right)$ هي من نفس إشارة $\left(x^2-1\right)$ الذي يقبل جذرين هما $\left(-1\right)$ و 1 و منه

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	-	0	+	

نستنتج هكذا أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]0;1\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[1;+\infty\right[$



نلاحظ أن $A=f\left(0{,}999998\right)$ و $B=f\left(0{,}999999\right)$

و بما أن العددين $0{,}999998$ و $0{,}999999$ ينتميان إلى المجال $\left]0;1\right]$

مع $0{,}999998<0{,}999999$ فإن $f\left(0{,}999998\right)>f\left(0{,}999999\right)$

و هكذا فإن $A>B$

اشتقاق دالة مركبة

1. مشتقة الدالة $v \circ u$

مبرهنة (دون برهان): إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2(x^2+3)^2 + 1$

نلاحظ أن $f = v \circ u$ حيث $u : x \mapsto x^2+3$ و $v : x \mapsto 2x^2+1$ و منه $f'(x) = v'(x^2+1) \times u'(x)$

بعد الحساب نجد: $f'(x) = 4(x^2+3) \times 2x = 8x(x^2+3)$

2. تطبيقات

- **مشتقة الدالة** $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

البرهان: نضع $f = \sqrt{u}$ و منه $f = v \circ u$ حيث $v : x \mapsto \sqrt{x}$

الدالة v تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. بما أن من أجل كل x من I، $u(x) > 0$ فإن f تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $f' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

- **مشتقة الدالة** $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(u^n)' = n u' u^{n-1}$.

البرهان: نضع $f = u^n$ و منه $f = v \circ u$ حيث $v : x \mapsto x^n$

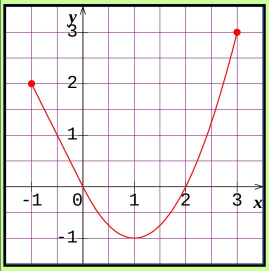
الدالة v $(n \geq 2)$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $v'(x) = nx^{n-1}$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

$$f' = nu^{n-1} \times u' = nu'u^{n-1}$$

- **مشتقة الدالة** $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)^n]}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I

و لدينا: $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.



1. عين بيانيا إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g'(x)$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;3]$ بـ $f(x)=[g(x)]^2$.

أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

1. نلاحظ أن منحنى الدالة g يقع فوق محور الفواصل من أجل $x\in[-1;0]\cup[2;3]$ و تحته من أجل $x\in[0;2]$
و منه $g(x)\geq 0$ من أجل $x\in[-1;0]\cup[2;3]$ و $g(x)\leq 0$ من أجل $x\in[0;2]$.
بما أن الدالة g متناقصة تماما على $[-1;1]$ و متزايدة تماما على $[1;3]$ و تقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة 1 فإن $g'(x)<0$ من أجل $]-1;1[$ و $g'(x)>0$ من أجل $x\in]1;3]$ و $g'(1)=0$.

2. الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$ و منه فالدالة $f=g^2$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$
و لدينا: $f'(x)=2g'(x)g(x)$. باستعمال الجدول الموالي نحصل على إشارة $f'(x)$

x	-1		0		1		2		3
$g(x)$		+	0	-	|	-	0	+	
$g'(x)$		-	|	-	0	+	|	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

تمرين محلول2: عين مشتقات الدوال الآتية:

1. $f:x\mapsto(2x^2-x+3)^4$ على $\mathbb{R}$.

2. $g:x\mapsto\dfrac{1}{(x^2-1)^3}$ على $]1;+\infty[$.

3. $h:x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ على $]2;+\infty[$.

1. نلاحظ أن $f=u^4$ مع $u(x)=2x^2-x+3$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $u'(x)=4x-1$
إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'=4u'u^3$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=4(4x-1)(2x^2-x+3)^3$

2. نلاحظ أن $g=\dfrac{1}{u^3}$ مع $u(x)=x^2-1$ كما أن $u(x)\neq 0$ من أجل x من $]1;+\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $u'(x)=2x$. إذن g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $g'=-\dfrac{3u'}{u^4}$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=-\dfrac{3(2x)}{(x^2-1)^4}=-\dfrac{6x}{(x^2-1)^4}$

3. نلاحظ أن $h=\sqrt{u}$ مع $u(x)=x^2-4$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ مع $u(x)>0$. إذن h قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ و لدينا $h'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ومنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $h'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

التقريب التآلفي – طريقة أولر

1. التقريب التآلفي

خاصية: f دالة معرفة على مجال مفتوح I.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة $\pounds$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\pounds(h)$ مع $\lim_{h\to 0}\pounds(h)=0$.

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$

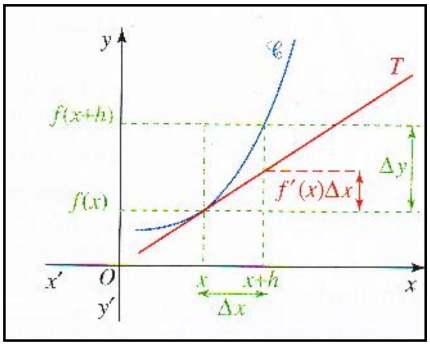
يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـِ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f.

البرهان: ليكن x من I، من المعطيات لدينا f قابلة للاشتقاق عند x و منه $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

بوضع $\pounds(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ يكون لدينا $\lim_{h\to 0}\pounds(h)=f'(x)-f'(x)=0$

إذن $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\pounds(h)+f'(x)$ و منه $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\pounds(h)$.

الكتابة التفاضلية: بوضع: $\Delta x=(x+h)-x$ و $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ تكتب المساواة $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\pounds(h)$ كما يلي: $\Delta y=f'(x)\Delta x+\Delta x\,\pounds(\Delta x)$



و منه التقريب $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0.

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية: $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ أو $dy=f'(x)dx$.

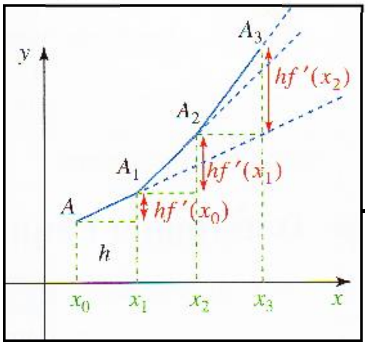
يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية و بصفة عامة نكتب: $\frac{df}{dx}$ بدلا من f'

و $\frac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' وهكذا $\frac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$.

2. طريقة أولر

تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و $y_0=f(x_0)$. ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا: $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$.

انطلاقا من النقطة $A_0(x_0;y_0)$ بحيث $f'(x_0)\neq 0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1;y_1)$ ذات الفاصلة $x_1=x_0+h$ و التي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ والمار من A_0 و بالتالي:



$y_1=f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$

من أجل h قريب من 0 فإن النقطة $A_1(x_1;y_1)$ قريبة من (C_f) منحنى f.

بنفس الطريقة يمكن إنشاء، انطلاقا من A_1، النقطة $A_2(x_1+h;f(x_1)+hf'(x_1))$.

و هكذا يمكن على التوالي إنشاء النقط $A_n(x_n;y_n)$ حيث $x_n=x_{n-1}+h$

و $y_n=f(x_{n-1})+hf'(x_{n-1})$ مع $n\geq 1$. بربط النقط A_0، A_1، A_2، .... نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـِ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة. و نحصل على أكثر دقة كلما كان h أقربا إلى 0.

1. ما هو تغير حجمها لما يرتفع نصف قطرها بـــ $1mm$ ؟

2. ما هو تغير مساحتها في نفس الظروف ؟

1. ليكن V حجم الكرة بـِـ cm^3 و ليكن R نصف قطرها بــ cm. لنعين ΔV تغير حجم الكرة الحاصل بسبب $\Delta R = 0,1$ تغير نصف القطر في حالة $R = 8cm$. لدينا: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ و منه $\frac{dV}{dR} = \frac{4}{3}\pi\left(3R^2\right) = 4\pi R^2$
أي $dV = 4\pi R^2 dR$ و بما أن $\Delta R = 0,1$ (قريب من 0) يمكننا أن نكتب $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$
و هكذا نجد: $\Delta V = 4\pi\left(8\right)^2\left(0,1\right) \approx 80$ و منه يرتفع الحجم بحوالي $80cm^3$.

2. لتكن S مساحة الكرة بـــ cm^2 و منه $S = 4\pi R^2$ و بالتالي $dS = 8\pi R dR$ يمكننا أن نكتب $\Delta S = 8\pi R \Delta R$ من أجل $\Delta R \approx 0$. و هكذا $\Delta S \approx 20$. ترتفع المساحة بحوالي $20cm^2$.

1. باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h = 0,5$ شكل جدولا يتضمن القيم التقريبية لــ $f\left(x\right)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;5]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f . تدور النتائج إلى $0,01$. عين قيمة مقربة للعدد $f\left(4\right)$.

2. باختيار خطوة جديدة $h = 0,1$ عين قيمة مقربة للعدد $f\left(4\right)$.

3. نبرهن أن $f\left(x\right) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 1$. تحقق أن $f\left(0\right) = 1$ و $f'\left(x\right) = \sqrt{x}$. أحسب $f\left(4\right)$ ثم قارن النتيجة مع القيم المقربة المحصل عليها سابقا بالخطوتين $0,5$ و $0,1$.

1. لدينا: $f\left(0,5\right) \approx f\left(0\right) + 0,5f'\left(0\right) \approx 1$ ، $f\left(1\right) \approx f\left(0,5\right) + 0,5f'\left(0,5\right) \approx 1 + 0,5\sqrt{0,5} \approx 1,354$

x	f(x)
0	1,000
0,5	1,000
1	1,354
1,5	1,854
2	2,466
2,5	3,173
3	3,964
3,5	4,830
4	5,765
4,5	6,765
5	7,826

لدينا $f\left(4\right) \approx 5,765$.

2. نجد باستعمال مجدول أو برنامج حاسبة بيانية $f\left(4\right) \approx 6,227$.

3. من الواضح أن $f\left(0\right) = 1$ كما أن $f'\left(x\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{x} = \sqrt{x}$

لدينا $f\left(4\right) = \frac{2}{3} \times 4\sqrt{4} + 1 = \frac{19}{3}$ **و باستعمال حاسبة نجد** $f\left(4\right) \approx 6,333$. نلاحظ أن القيمة المقربة المحصل عليها **بالخطوة** $0,1$ أقرب من القيمة المضبوطة لِـ $f\left(4\right)$ من القيمة المقربة المحصل عليها **بالخطوة** $0,5$.

دراسة دالة مثلثية

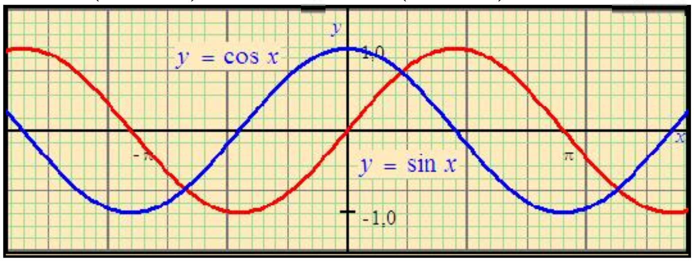
1. تذكير حول الدالتين " جيب " و " جيب التمام "

* الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ معرفتان على $\mathbb{R}$.

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $x + 2\pi$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا $\cos(x+2\pi) = \cos x$ و $\sin(x+2\pi) = \sin x$

نقول أن الدالتين $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ دوريتان دورهما 2π .

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$



2. الدالة " ظل "

تعريف: الدالة " ظل " و التي نرمز إليها بالرمز " tan " معرفة بـِ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح $(k \in \mathbb{Z})$.

خواص: * من أجل كل x يختلف عن $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ، $\tan(x+\pi) = \tan x$. إذن الدالة "ظل " دورية دورها π.

* من أجل كل x يختلف عن $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ، $\tan(-x) = -\tan x$. إذن المنحني الممثل للدالة "ظل" متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

دراسة الدالة "ظل": *من الخاصيتين السابقتين يمكن اقتصار دراسة الدالة "ظل" على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

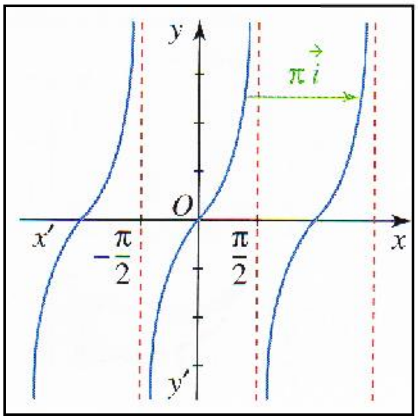
*من أجل كل x يختلف عن $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ، $(\tan)'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

بما أن $(\tan)'(x) > 0$ فإن الدالة "ظل" متزايدة تماما على كل مجال معرفة فيه.

*لدينا $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ و $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ و بما أن من أجل كل x من $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، $\cos x > 0$ فإن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = \dfrac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة "ظل".

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\dfrac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$	$+$ $\quad$ ‖
$\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$ ‖



متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. بين أن الدالة f دورية دورها π و أن محور التراتيب محور تناظر للمنحني (C).

2. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. أرسم المنحني (C) على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ثم على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x+\pi)=\sin^2(x+\pi)=(-\sin x)^2=\sin^2 x=f(x)$ و منه الدالة f دورية دورها π.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(-x)=\sin^2(-x)=\left[\sin(-x)\right]^2=(-\sin x)^2=\sin^2 x=f(x)$ و منه الدالة f زوجية و بالتالي فإن محور التراتيب محور تناظر للمنحني (C).

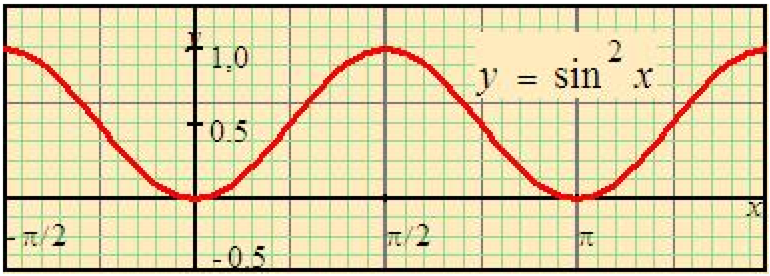
2. بما أن الدالة $x\mapsto\sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (جداء دالتين) فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ و لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=2\sin x\cos x$

و بما أن العددين $\sin x$ و $\cos x$ موجبان على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ مع $\sin 0=0$ و $\cos\frac{\pi}{2}=0$ فإن $f'(x)\geq 0$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

و بالتالي فالدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

3. نرسم في البداية المنحني الممثل للدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ثم باستعمال التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نرسم المنحني على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ و بما أن الدالة f دورية دورها π نقوم بانسحاب شعاعه $\pi\vec{i}$ لرسم المنحني (C) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.



على $\mathbb{R}$ نجري انسحابات متتالية أشعتها $k\pi\vec{i}$ حيث k عدد صحيح (من $\mathbb{Z}$)

المقارنة بين دوال وتعيين الأوضاع النسبية لمنحنياتها

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0;®]$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{x^3}{6}$ و $g(x)=\sin x$

و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. مماس مشترك

بين أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة O يطلب تعيين معادلة له.

2. دراسة الأوضاع النسبية للمنحنيات (C_f) و (C_g) و (T)

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0;®]$ بـ $u(x)=\sin x-x$

- أدرس اتجاه تغير الدالة u
- استنتج إشارة $u(x)$ على $[0;®]$ محددا وضعية المنحني (C_g) بالنسبة للمماس (T).

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0;®]$ بـ $v(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$

- أحسب $v'(x)$ ثم $v''(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;®]$.
- عين إشارة $v''(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة v'.
- عين إشارة $v'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة v.
- حدد إشارة $v(x)$.
- بين أنه من أجل كل x من $[0;®]$، $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x$
- حدد الأوضاع النسبية للمنحنيات (C_f)، (C_g) و (T).
- أنشئ في نفس المعلم $(O;I,J)$ المنحنيات (C_f)، (C_g) و (T).

طريقة

عندما يتعذر إيجاد إشارة المشتقة مباشرة يمكن دراسة اتجاه تغير الدالة المشتقة لتحديد إشارتها.

تطبيق1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2\cos x-2+x^2$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f' على $\mathbb{R}$.
- استنتج تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.
- قارن بين الدالتين $u:x\mapsto \cos x$ و $v:x\mapsto 1-\frac{x^2}{2}$

تطبيق2: نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ

$f_n(x)=(1+x)^n-1-nx$ حيث $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f_n على $[0,+\infty[$.
- أثبت صحة " متباينة برنولي " التالية:

1705/8/16 – 1654/12/21

جاكوب برنولي

من أجل كل x من $[0,+\infty[$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $(1+x)^n\ge 1+nx$

دراسة دالة صماء

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$

- أدرس اتجاه تغير الدالة g.
- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\sim$ يطلب تعيينه. استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

نعتبر المستقيمين $(D):y=-3x$ و $(D'):y=x$

- أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. استنتج جدول تغيرات الدالة f.
- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+3x\right]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.
- بين أن المستقيم (D') مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) و (D'). أرسم (C_f)، (D) و (D').

تقريب دالة بواسطة مجدول أو حاسبة بيانية

لتكن f دالة تحقق $f(1)=0$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

1. بإتباع " طريقة أولر " أنجز ورقة الحساب الموالية باختيار خطوة $h=0,01$ ثم أكمل الجدول التالي:

x	قيمة مقربة لـ f(x)
1	0
1,01	0,01
1,02	0,01990099
1,03	0,029704912
1,04	0,03941365
1,05	0,049029034
1,06	0,058552844
1,07	0,067986806
1,08	0,0773326
1,09	0,08659186
1,1	0,095766172
1,11	0,104857081
1,12	0,11386609
1,13	0,122794661
1,14	0,131644219

x	$f(x)\approx$
2	0,695653
3	
4	
5	

2. أنشئ تقريبا لمنحني الدالة f على المجال $[1;5]$.
3. أعد إنجاز نفس الجدول السابق باختيار خطوة $h=0,001$. قارن بين النتائج المحصل عليها مع تلك التي تقدمها الحاسبة باستعمال اللمسة LN

موضوع محلول

تمرين :

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=ax+\dfrac{b}{4x+2}$

مع a و b عددان حقيقيان.

1. أ. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب. بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من المجموعة D_f .

جـ. عين العددين a و b بحيث من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(0)=\dfrac{7}{2}$ و $f(0)=-\dfrac{3}{2}$.

2. أ. أحسب النهايات عند حدود المجموعة D_f .

ب. برّر أنه من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(x)>0$.

جـ. أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3. نسمي $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

أ. برهن أن المستقيم ذي المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$.

ب. أكتب معادلة لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ. برهن أنّ النقطة μ ذات الإحداثيتين $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني $\mathcal{C}_f$. أرسم المنحني $\mathcal{C}_f$.

حل مختصر

1. أ. $D_f=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

ب. لدينا من أجل كل $x\in D_f$ ، $4x+2\neq 0$ إذن الدالة الناطقة $x\mapsto\dfrac{b}{4x+2}$ تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ؛ الدالة كثير حدود $x\mapsto ax$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ولدينا مجموع هاتين الدالتين هو الدالة f ؛ إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f .

جـ. $f'(x)=a-\dfrac{4b}{(4x+2)^2}$ ؛ $f'(0)=\dfrac{7}{2}$ معناه $a-b=\dfrac{7}{2}$ ؛ $f(0)=-\dfrac{3}{2}$ معناه $\dfrac{b}{2}=-\dfrac{3}{2}$ وبالتالي نجد $b=-3$ و $a=\dfrac{1}{2}$.

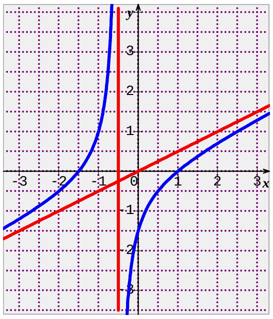
2. أ. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-\frac{1}{2}}f(x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{1}{2}}f(x)=-\infty$.

ب. $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{12}{(4x+2)^2}$ مجموع عددين موجبين تماما إذن من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(x)>0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3. أ. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}|f(x)|=+\infty$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)-\dfrac{1}{2}x=0$ إذن المستقيم ذي المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$.

ب. معادلة المماس هي $y=\dfrac{7}{2}x-\dfrac{3}{2}$.



M نقطة من $\mathcal{C}_f$ حيث $(x;y)$ إحداثيتيها في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ و $(x';y')$ إحداثيتيها في المعلم $\left(\mu;\vec{i};\vec{j}\right)$

من $\overrightarrow{\mu M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\mu}$ ينتج $x'=x+\dfrac{1}{2}$ و $y'=y+\dfrac{1}{4}$ ثم نجد $y'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{4x+2}+\dfrac{1}{4}$ ؛

ونبرهن أن الدالة $y'=\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{1}{x'}$ ، $g:x\mapsto\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{x}$ هي فردية .

تعاليق

استعمال المبرهنة حول مشتق مجموع دالتين .

للحصول على النتائج نطبق المبرهنات على النهايات .

تطبيق مباشر للمعادلة المعروفة $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ مع العلم أن المعاملات أعطيت في 1.

جـ-

استعملنا طريقة تغيير المعلم من المبدأ O إلى المبدأ μ ؛ يمكن استعمال طرق أخرى

موضوع موجه

تنبيه

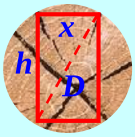
تمارين الإستمثال (التوسع إلى أبعد حد) يطلب فيها تعيين القيم المثلى (العظمى أو الصغرى) وهذا يؤدي بنا إلى إنشاء دالة نستخرج من دراستها القيم الحدّية حسب المطلوب .

نستفيد من الاستمثال في الحياة الاقتصادية (مثل شراء كمية كبيرة من البضائع بأقل ثمن) .نريد في الموضوع المقترح استخراج روافد خشبية من جذع شجرة بدون تبذير .

تمرين. (بكالوريا)

من جذع شجرة دائري المقطع قطره D ، نريد الحصول على رافد مستطيل المقطع قاعدته x وارتفاعه h .

نحصل على المقاومة القصوى (العظمى) في الانحناء كلما كان المقدار xh^2 كبيرا مع $h > x$.



I) f هي الدالة المعرفة على المجال $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ بـ : $f(x) = -x^3 + \dfrac{9}{4}x$.

$\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث يؤخذ $\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\| = 2cm$.

1. أحسب $f'(x)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة f .
2. أكتب معادلة لـ t_1 مماس المنحني $\mathscr{C}$ عند النقطة O ثم معادلة لـ t_2 مماس المنحني $\mathscr{C}$ عند نقطته A ذات الفاصلة $\dfrac{3}{2}$ ؛ ثم أدرس على المجال $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ الوضعية النسبية للمنحني $\mathscr{C}$ بالنسبة لـ t_1 وبالنسبة لـ t_2 .
3. أنشئ المماسين t_1 و t_2 ثم المنحني $\mathscr{C}$.

II) تطبيق : نضع $D = 1{,}5m$. (D هو قطر المقطع الدائري لجذع الشجرة)

1. اشرح لماذا $x^2 + h^2 = \dfrac{9}{4}$.
2. أحسب xh^2 بدلالة x .
3. استعمل الجزء **I)** لإيجاد x و h بحيث تكون للرافد أقصى مقاومة للانحناء .

توجيهات

I) 1. حلل $f'(x)$ إلى جداء عاملين ثم استنتج إشارته بسهولة .

2. طبّق مباشرة معادلة المماس ولدراسة الوضعية ، أدرس إشارة العبارة $f(x) - t(x)$ حيث $y = t(x)$ هي معادلة للمماس .

II) 1. استعمل مبرهنة فيثاغورس لإيجاد العلاقة بين x ، h و D .

2. استخرج h^2 من العلاقة السابقة ثم قم بتعويضها تحصل على $xh^2 = f(x)$.

3. استعمل جدول تغيرات الدالة f لتعيين القيمة الحدّية العظمى .

تمارين تطبيقية

1 ـ الاشتقاقية

1 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

أ ـ تحقق أنه من أجل كل h غير معدوم يكون :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}.$$

ب ـ استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 مبيّنا $f'(1)$.

(أنظر التمرين المحلول 1)

2 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$.

أثبت أنّ الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

3 f: دالة قابلة للاشتقاق عند -1 حيث $f'(-1)=2$

علما أن المنحني الممثل في معلم للدالة f ، يمر بالنقطة $A(-1;-3)$.

أكتب معادلة لمماس هذا المنحني عند النقطة A .

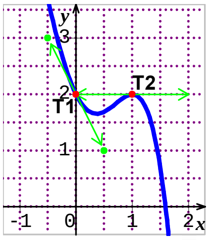
4 ليكن $\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عند 0 .

المستقيم T ذو المعادلة $y=2-3x$ ، هو المماس للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة $A(0;2)$.

1) حدد $f(0)$ و $f'(0)$.

2) فسر هندسيا العدد $\frac{f(x)-2}{x}$ من أجل $x\neq0$.

3) برر وجود $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}$.



5 إليك التمثيل البياني لدالة f ، T_1 و T_2 مماسان له .

1) حدد القيم التالية: $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(1)$.

2) أكتب معادلة لكل من المستقيمين T_1 و T_2 .

6 $\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني لدالة f يشمل النقطة $A(-2;3)$

T المماس للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة A والموازي للمستقيم ذي المعادلة $3x-2y+1=0$.

أكتب معادلة للمستقيم T .

7 $\mathcal{C}_f$ منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=x^2+|x-1|$.

1) أثبت أنه من أجل $h\neq0$ لدينا :

$$\frac{f(1+h)-1}{h}=h+2+\frac{|h|}{h}.$$

2) هل العبارة $\frac{f(1+h)-1}{h}$ تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 ؟

3) أعط تفسيرا هندسيا للجواب عن السؤال 2) ؛ ثم أكتب معادلتي نصفي المماسين للمنحني $\mathcal{C}_f$ في هذه الحالة .

8 f الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\sqrt{x+2}$.

1) أحسب $\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(-2+h)}{h}$.

2) هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين -2 ؟

فسر هندسيا إجابتك .

9 I مجال من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a ، و f: دالة قابلة للاشتقاق عند a حيث $f'(a)=l$ مع $l\in\mathbb{R}$.

نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

إذا كان $x\in I-\{a\}$ و $g(a)=l$.

أ ـ أثبت أن الدالة g مستمرة عند a .

ب ـ من أجل $x\in I-\{a\}$ ، أكتب $f(x)$ بدلالة x و $g(x)$.

جـ ـ أحسب $\lim_{x\to a}f(x)$. ماذا تستنتج ؟

10 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ :

$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$.

1) برهن أنه من أجل $h\neq0$ ،

$$\frac{f(1+h)-2}{h}=\frac{h^2+3h+3}{(1+h)\sqrt{1+h}+1}-2.$$

2) بيّن أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 .

3) استنتج أن الدالة f مستمرة عند 1 .

11 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=3x+|x^2-4|$.

1) تحقق من أن الدالة f مستمرة عند -2 .

2) برهن أنه من أجل $h\in\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup\left]0,\frac{1}{2}\right[$ ،

$$\frac{f(-2+h)+6}{h}=3+\frac{|h|}{h}(4-h)$$.

3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 .

2 ـ المشتقات والعمليات عليها

12 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، برّر أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أعط عبارة مشتقتها . مع اعتبار x و m عددان حقيقيان .

أ ـ $f(x)=x^5+\frac{1}{2}x^4-3x^3+x^2+4x-6$.

ب ـ $f(x)=\frac{2x^3+x^2-4x-6}{4}$.

جـ ـ $f(x)=2mx^3+3m^3x^2-m^2x+m-2$.

د ـ $f(m)=2mx^3+3m^3x^2-m^2x+m-2$.

13 أحسب الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية مبيّنا مجموعة التي تجرى الحسابات عليها .

أ ـ $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$. ب ـ $f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^2+x+3}$.

جـ ـ $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$. د ـ $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

من التمرين 14 إلى 17 ، المطلوب حساب الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى D.

14 أ ـ $f(x)=x+x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$.

ب ـ $f(x)=\sin x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$.

جـ ـ $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ؛ $D=\mathbb{R}^*$.

15 أ ـ $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ ؛ $D=]0;®[$.

ب ـ $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ ؛ $D=\left]-\frac{®}{2};\frac{®}{2}\right[$.

جـ ـ $f(x)=\frac{\cos x}{-1+\sin x}$ ؛ $D=\left[0;\frac{®}{2}\right[$.

16 أ ـ $f(x)=\cos\left(-3x+\frac{®}{5}\right)$ ؛ $D=\mathbb{R}$.

ب ـ $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+®\right)$ ؛ $D=\mathbb{R}$.

جـ ـ $f(x)=3x\sin\left(-x+\frac{®}{5}\right)$ ؛ $D=\mathbb{R}$.

17 أ ـ $f(x)=(2x+4)^5$ ؛ $D=\mathbb{R}$.

ب ـ $f(x)=\sqrt{x-4}$ ؛ $D=[4;+\infty[$.

جـ ـ $f(x)=\sqrt{-2x+4}$ ؛ $D=]-\infty;2]$.

18 المستوي منسوب إلى معلم .

f ، g و h دوال معرفة كالتالي :

$f(x)=x^2-3x+4$ معرفة على $\mathbb{R}$.

$g(x)=1+\frac{1}{x}$ معرفة على $\mathbb{R}^*$.

$h(x)=-4x+6\sqrt{x}$ معرفة على $[0;+\infty[$.

برهن أنّ منحنيات هذه الدوال تقبل نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

19 في كل من الحالات التالية ، أحسب الدوال المشتقة المتتابعة الأولى ، الثانية والثالثة للدالة f مبيّناً في كل مرّة المجموعة التي تجرى عليها الحساب .

أ ـ $f(x)=2x^3-x^2+5x-1$.

ب ـ $f(x)=x\sqrt{x}$.

جـ ـ $f(x)\frac{1}{2x-1}$.

20 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\cos x$.

أ) عيّن f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f .

ب) أعط تخمينا ، حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n، لعبارة $f^{(n)}(x)$.

21 نعتبر الدالة $f:x\mapsto x^n$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.

ـ من أجل $n=1$ أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

ـ من أجل $n=2$ أحسب $f'(x)$، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$.

ـ من أجل $n=3$ أحسب $f'(x)$، $f''(x)$، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$.

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، أعط تخمينا حول أصغر قيمة للعدد p التي يكون من أجلها $f^{(p)}(x)=0$

22 من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ نضع $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2+\frac{1}{x}$ ؛ $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ الدالتان المشتقتان ذاتين الرتبة العدد الطبيعي غير المعدوم n.

عين أصغر عدد n الذي من أجله يكون $f^{(n)}=g^{(n)}$.

23 نعتبر الدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=\sin \omega x$ و $g(x)=\cos \omega x$ مع $\omega \in \mathbb{R}$.

أ ـ بيّن أن $f''(x)=-\omega^2 f(x)$.

ب ـ بيّن أن $g''(x)=-\omega^2 g(x)$.

جـ ـ من أجل كل عددين حقيقيين a و b نضع :
$$h(x)=af(x)+bg(x)$$
بيّن أنّ $h''(x)=-\omega^2 h(x)$.

24 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،
$\sqrt{1+x^2}\times f'(x)=f(x)$.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،
$(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$.

3 ـ اتجاه تغيّر دالة

25 في كل من الحالات التالية أدرس اتجاه تغير الدالة f.

أ ـ $f(x)=2x^4-27x+7$.

ب ـ $f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$.

جـ ـ $f(x)=x+\cos x$.

د ـ $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.   هـ ـ $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

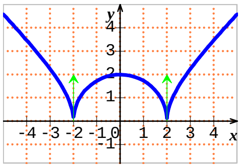
26 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x-1$.

1) أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ، من أجل $x\in\mathbb{R}$.

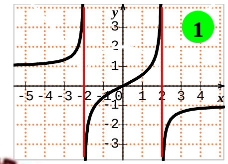
2) أ ـ استنتج إشارة $f'(x)$.

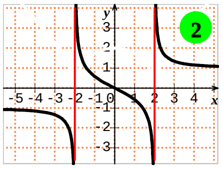
ب ـ أنجز جدول تغيرات الدالة f .

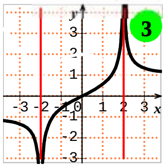
27 الشكل المقابل هو المنحنى $\mathscr{C}_f$ لدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من المجموعة $\mathbb{R}-\{-2;2\}$.



من بين المنحنيات الثلاث ، ما هو الذي يمثل f' الدالة المشتقة للدالة f ؟







28 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$$f(x)=2x^3+12x^2+1$$

1) أدرس تغيرات الدالة f ونهايتيها عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) هل الدالة f تقبل قيم حدّية محلية ؟

3) هل الدالة f محدودة على $\mathbb{R}$ ؟

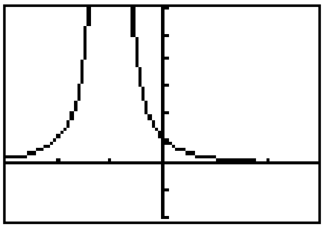
29 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ :
$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$
مع a و b عددين حقيقيين.

الهدف من التمرين هو إيجاد إن أمكن a و b حيث يكون $f(-1)$ قيمة حدّية محلية عظمى معدومة .

1) لماذا $f'(-1)=0$ و $f(-1)=0$ ؟

2) أوجد إذن a و b ، ثم تحقق أن الدالة المحصل عليها تحقق الهدف .

30 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ :
$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$
$\mathscr{C}$ هو تمثيلها البياني المرسوم على شاشة الحاسبة البيانية .



1.شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. استنتج تغيرا ت الدالتين التاليتين (مع الشرح)
$f_1:x\mapsto\dfrac{-2}{(x+1)^2}$ ، $f_2:x\mapsto 2-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

31 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=x^3-3x+1$.

1) عيّن النهايتين للدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أدرس تغيرات الدالة f ؟

3) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول .

4) أعط حصرا بتقريب إلى 10^{-1} لكل حل .

32 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+4$.

1) أنجز جدول تغيرات الدالة f .

2) ما هو عدد حلل المعادلة $f(x)=0$ ؟

3) أعط حصرا لكل حل بتقريب 10^{-1} .

33 n عدد طبيعي غير معدوم ، a عدد حقيقي .

1) أدرس حسب شفعية n، تغيرات الدالة $f_n : x \mapsto x^n$.

2) أدرس النهايات للدالة f_n عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3) ناقش حسب قيم n و a ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x ، $x^n = a$.

4 ـ اشتقاق دالة مركبة

34 الدوال المقترحة أدناه معرفة على $\mathbb{R}$ ؛ المطلوب حساب الدالة المشتقة لكل منها .

أ) $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)^3$.

ب) $g(x)=\left(2x^2+x-1\right)^4$.

ج) $h(t)=\left(t^3-t+1\right)^5$. د) $t(u)=\dfrac{1}{\left(u^2+3\right)^8}$.

في التمارين 32 ، 33 و 34 ؛ المطلوب حساب الدالة المشتقة للدالة المقترحة f المعرفة على المجال I المعطى.

35 أ) $f(x)=\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^3$ و $I=]1;+\infty[$.

ب) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{3x+4}\right)^3$ و $I=\left]-\infty;-\dfrac{4}{3}\right[$.

ج) $f(x)=\dfrac{(3x+2)^3}{(4x+2)^2}$ و $I=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$.

د) $f(x)=(4x-2)^2(3x-2)^3$ و $I=\mathbb{R}$.

36 أ) $f(x)=\sin\left(1-x^2\right)$ و $I=\mathbb{R}$.

ب) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ و $I=\mathbb{R}^*$.

ج) $f(x)=\cos^3 x$ و $I=\mathbb{R}$.

د) $f(t)=\tan^3 t$ و $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

37 أ) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ و $I=\mathbb{R}$.

ب) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$ و $I=\mathbb{R}$.

ج) $f(t)=\sqrt{\dfrac{2-t}{1+t}}$ و $I=]-1;2[$.

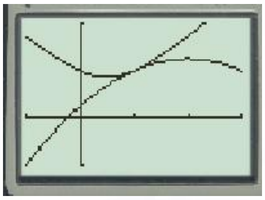
د) $f(x)=\sqrt{\cos x}$ و $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

38 لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة .

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ومن أجل كل $x \in I$ ، $f^n(x)=nf'(x)f^{n-1}(x)$.

2) برهن أنه يمكن تمديد هذه القاعدة من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n.

39 باستعمال حاسبة بيانية مثلنا المنحنيين الذين معادلتيهما



$y=\sqrt{x^2-x+1}$

و $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x+\dfrac{1}{4}$.

1) ما هو التخمين الذي يمكن وضعه حول المنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

2) f و g الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ و $g(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+x+\dfrac{1}{4}$.

أ ـ برهن أنّ الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ب ـ أحسب $f(1)$ ، $g(1)$ ، $f'(1)$ و $g'(1)$.

ج ـ برهن التخمين الموضوع سابقا .

40 $\mathcal{C}_f$ هو التمثيل البياني ، في معلم متعامد ومتجانس ، للدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{4x^2+3}$.

أ) برهن أنّ محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى $\mathcal{C}_f$.

ب) أحسب الدالة المشتقة للدالة f . أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

ج) برهن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=2x$ هو مقارب للمنحي $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$.

د) أرسم المنحنى $\mathcal{C}_f$ ومستقيمه المقارب .

5 ـ التقريب التآلفي

41 برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية :

أ) $(1+x)^3\approx 1+3x$. ب) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}$.

ج) $\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x$. د) $\sin x\approx x$.

42 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2$.

أ) عين التقريب التآلفي لعبارة $f\left(2+h\right)$ من أجل h قريب من 0 ؛ مبيّنا الارتياب المرتكب .

ب) أحسب ذهنيا قيمة مقربة للعدد $2,029^2$.

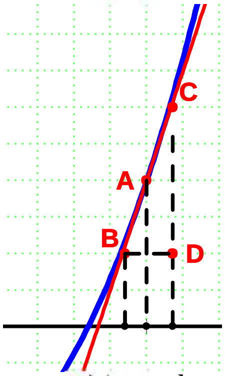
43 أعط تقريبا تآلفيا لعبارة $f\left(a+h\right)$ من أجل $|h|$ قريب من 0؛ مبيّنا الارتياب المرتكب من أجل $|h|<10^{-3}$.

1) $f\left(x\right)=3x^2-5x+1$ و $a=2$.

2) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-2}$ و $a=-2$.

3) $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}$ و $a=-1$.

44 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر (C_f) منحنى دالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فاصلة النقطة A، و (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A .



B و C نقطتان من (C_f) فاصلتاهما x_0-h و x_0+h على الترتيب حيث $h>0$ وقرب من 0 . D نقطة حيث (BD) يعامد (CD).

1) أعط قيمة مقربة لمساحة الشكل الهندسي BCD (شبه مثلث قائم) ، بدلالة $f'(x_0)$ و h .

2) أحسب هذه القيمة من أجل $h=0.03$ ومعامل توجيه المستقيم (T) هو 9 .

45 بدون حساب وباستعمال التقريب التآلفي ، عيّن العدد المشتق للدالة f عند a ، في كل من الحالتين التاليتين :

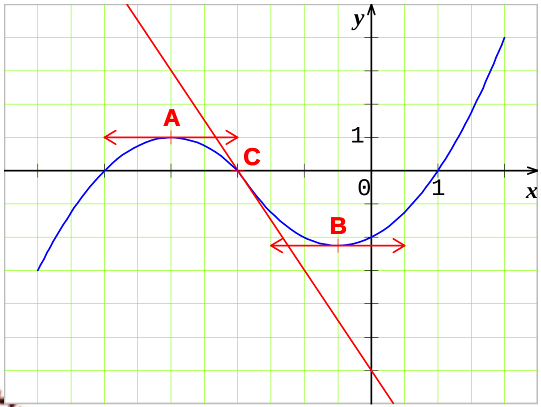
أ ــ $f:x\mapsto 1-2x+3x\tan x$ و $a=0$.

ب ــ $f:x\mapsto 2x+\left(x+1\right)^2\sqrt{x^4+3}$ و $a=-1$.

تمارين للتّعمّق

1 ـ الاشتقاقية

46



المنحني البياني $\mathcal{C}_f$ التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

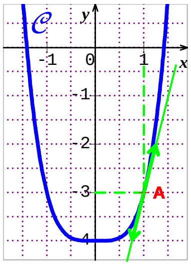
1. عين مجموعة تعريف الدالة f .

2. بقراءة بيانية عيّن العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\dfrac{1}{2}$ ، -3 و -2 علما أنّ ترتيب النقطة B هو $-\dfrac{9}{4}$.

4.استنتج معادلات المماسات للمنحنى $\mathcal{C}_f$ عند A ، B و C.

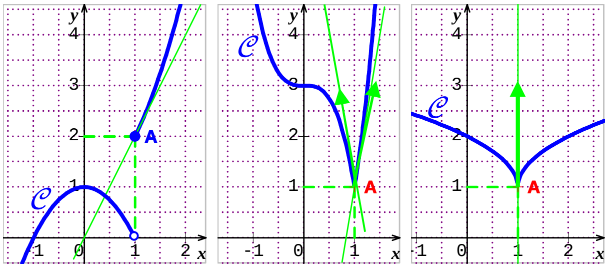
5. هل توجد مماسات أخرى للمنحنى $\mathcal{C}_f$ موازية لمماسه عند النقطة C ؟

47 في كل حالة $\mathcal{C}$ هو التمثيل البياني لدالة f و A نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها 1.



أ) هل الدال f تقبل الاشتقاق عند 1؟

ب) عين العدد المشتق في حالة وجوده.



48 الدالة f معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $f\left(x\right)=\sqrt{4-x^2}$.

1) لاحظ على شاشة الحاسبة البيانية ، منحنى الدالة f وأعط تخميناتك عول قابلية الاشتقاق عند -2 وعند 0 .

2) برهن كل تخمين باستعمال تعريف الاشتقاقية .

في التمرينين أذكر إن كانت الدالة المقترحة f قابلة للاشتقاق عند 0 .

49 أ) $f\left(x\right)=x\sqrt{x}$.   ب) $f\left(x\right)=x^2\sqrt{x}$.

50 أ) $f\left(x\right)=x|x|$.

ب) $f\left(x\right)=x^2\sin\dfrac{®}{\sqrt{x+1}}$.

51 الدالة f معرّفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f\left(0\right)=0$

ومن أجل كل $x\neq 0$ ، $f\left(x\right)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$.

1) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟

2) أحسب $f'\left(x\right)$ من أجل $x\neq 0$.

52 $\mathcal{C}_f$ هو المنحني الممثل في معلم متعامد ومتجانس ، للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=|x^2-1|$.

1) أرسم المنحني $\mathcal{C}_f$ عين نقطته A ذات الفاصلة -1 .

2) أ) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين -1 .

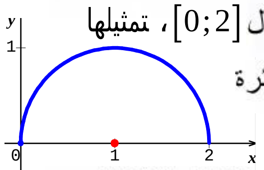
ب) عيّن معادلة ، على اليمين ، لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة A ، ثم أرسمه .

3) أ) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار -1 .

ج) عيّن معادلة ، على اليسار ، لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة A ، ثم أرسمه .

4) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند -1 .

53 f الدالة المعرّفة على المجال $[0;2]$، تمثيلها البياني $\mathcal{C}$ هو عبارة عن نصف دائرة كما هو مبيّن في الشكل .



1) بقراءة بيانية، برّر أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

2) برّر أنّ : تكون النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ ، إذا وفقط إذا ، كانت $(x-1)^2+y^2=1$ و $y\geq 0$.

أكتب عبارة $f(x)$ من أجل كل $x\in[0;2]$.

3) جد بالحساب النتيجة المحصل عليها في السؤال 1) .

2 ـ المشتقات والعمليات عليها

54 لتكن f الدالة : $x\mapsto\sqrt{x}\sin x$.

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) برّر أن الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال .

3) برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 مبيّنا قيمة $f'(0)$.

4) أعط تعريف الدالة f' على المجموعة D_f .

55 a و b عددان حقيقيان . نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ ؛ نسمي $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في معلم .

هل يوجد عددان a و b حيث تكون لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$ ، معادلة $y=4x+3$ عند نقطته ذات الفاصلة 0 ؟

56 a عدد حقيقي . نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ax^3+3x^2+3x$.

هل يوجد عدد a حيث تكون للدالة f قيمة حدّية محلية ، من أجل $x=1$ ؟

57 ليكن $\mathcal{C}$ المنحني ذي المعادلة :

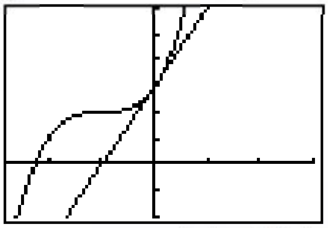
$$xy+4x+3y+7=0$$

برهن أن النقطة $A(-2;1)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ ، وأنّ $\mathcal{C}$ يقبل مماسا عند النقطة A يطلب تعيين معادلة له .

58 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=x^3+3x^2+3x+3$$

على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f والمماس T عند النقطة A التي فاصلتها 0.



1. عين معادلة للمماس T.

2. خمن على الشاشة وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس T.

3. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)-(3x+3)=x^2(x+3)$$

4. ادرس إشارة $f(x)-(3x+3)$ ثم استنتج وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس T.

59 لتكن a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a>0$ وليكن $\mathcal{P}$ القطع المكافئ ذي المعادلة $y=ax^2+bx+c$.

1) ليكن x_0 عدد حقيقي ، و M_0 نقطة من $\mathcal{P}$ فاصلتها x_0 عيّن معادلة للمماس T للمنحني $\mathcal{P}$ عند النقطة M_0 .

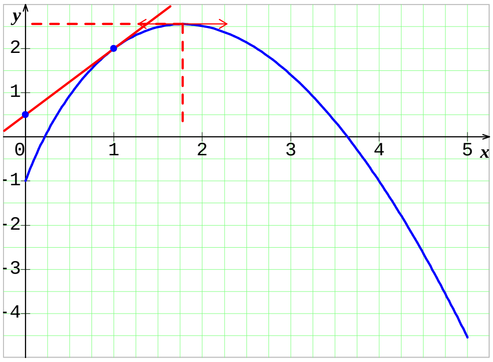
2) برهن أنّ $\mathcal{P}$ يقع فوق كل مماساته .

3) عين مجموعة النقط M ، ذات الإحداثيات $(x;y)$ ، حيث يوجد مماس للمنحني $\mathcal{P}$ عند النقطة M .

60 1) عيّن مجموعة تعريف الدالة $f:x\mapsto\dfrac{3+x^3}{1-x}$ ثم أحسب دالتها المشتقة .

2) استنتج الدالة المشتقة للدالة $g:x\mapsto\dfrac{3-x^3}{1+x}$ مبيّنا المجموعة التي تقام فيها الحساب .

61 الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;5[$



المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\frac{16}{9}$.

1.بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2.حل بيانيا في المجال $]0;5[$ المتراجحات التالية (القيم المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-1})

أ) $f(x) \geq 0$ ، ب) $f'(x) \geq 0$ ، ج) $f(x) \leq 1$.

3. نقبل أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;5[$:

$$f(x) = a + bx\left(2 - \sqrt{x}\right)$$

a و b عددان حقيقيان نريد حسابهما.

أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;5[$ ،

$$f'(x) = b\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال 1 عيّن a و b .

62 n عدد طبيعي غير معدوم ، و x عدد حقيقي يختلف عن 1.

1) بسط المجموع $1 + x + x^2 + ... + x^n$.

2) استنتج تبسيطا للعبارة :

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$$

63 جسم يتحرك على المحور (Ox) . نضع $x(t)$ فاصلة الجسم عند اللحظة t ، القانون الزمني للحركة يعطى بالعلاقة $x(t) = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.

برهن أن التسارع متناسب مع الفاصلة .

64 من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ نضع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $f^{(n)}$ المشتقة ذات الرتبة العدد الطبيعي غير المعدوم n للدالة f.

برهن ، باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$.

65 الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x\cos x$.

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

66 الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ :

$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

1) جد عددين حقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ ،

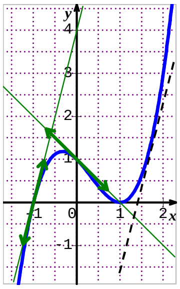
$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

2) n عدد طبيعي غير معدوم .

باستعمال النتيجة السابقة ، أعط عبارة لِـ : $f^{(n)}(x)$.

3 ـ اتجاه تغيّر دالة

67 في الشكل المقابل ، $\mathscr{C}_f$ هو المنحني الممثل في معلم متعامد ومتجانس لدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؛ والمماسان لـ $\mathscr{C}_f$ عند نقطتيه A و B، فاصلتيهما -1 و 0 .



1) بقراءة بيانية ، عيّن القيّم $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$.

2) حل بينيا ، في المجال $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$:

أ) المعادلة $f(x) = 0$.

ب) المعادلة $f'(x) = -1$.

ج) المتراجحة $f'(x) \geq 4$.

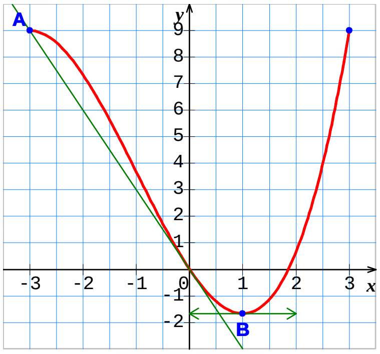
68 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، تقبل الاشتقاق مرّتين وتحقق الشرطين التاليين :* $f(0)=0$ ؛ $f'(0)=1$.
*f' (الدالة المشتقة الأولى للدالة f) متزايدة على $[0;+\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty;0]$.
أرسم منحن للدالة f .

69 f هي الدالة المعرفة على $I=]1;+\infty[$ بـ :
$f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$.
1) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I .
2) أ ـ استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال $]1;2[$.
ب ـ أعط قيمة مقرّبة إلى 10^{-1} للحل ~ .

70 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=x^4-6x^2-8x$.
أ) أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .
ب) أدرس إشارة كثير الحدود
$p(x)=4(x-2)(x+1)^2$
ج) عيّن الدالة المشتقة f' للدالة f.
د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f.

71 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-2x^2-4$
أ ــ أدرس تغيرات الدالة f .
ب ــ برهن أن -6 هو عنصر حاد من الأسفل للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

72 **بكالوريا**



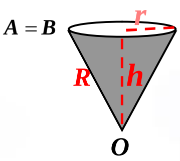
الشكل الموالي هو التمثيل البياني $\mathscr{C}$ لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$
المنحني $\mathscr{C}$ يحقق الشروط التالية :
يمر بمبدأ المعلم O ، و يشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا و يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O .
1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA)؟
2.نفرض أن f معرفة على $[-3;3]$ بـ:

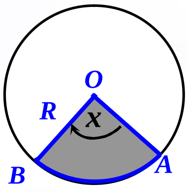
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية .
أ- بين باستعمال الشروط السابقة أن :
$a=\frac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$
ب-حال $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f.

73 f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :
$f_m(x)=\frac{x^2+mx}{x^2-1}$ مع m عدد حقيقي .
أ) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m لا تقبل قيم حدّية محليّة ؟
ب) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m تقبل قيمتين حدّيتين محليتين إحداهما صغرى والأخرى عظمى ؟

74 A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية . k عدد حقيقي من المجال $[-1;1]$.
نسمي G_k مرجّح النقط المثقلة (A,k^2+1) ، (B,k) و $(C,-k)$.
1) مثل النقط A ، B ، C و I منتصف القطعة $[BC]$.
وأنشئ النقطتين G_1 و G_{-1} .
2) أ ــ برهن أنّه من أجل كل $k\in[-1;1]$ ، يكون :
$\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.
ب ــ أنشئ جدول تغيّرات الدالة f المعرّفة على $[-1;1]$ بـ : $f(x)=-\frac{x}{x^2+1}$.
ج ــ استنتج مجموعة النقط G_k لما k يمسح $[-1;1]$.

75 نعتبر قرصا مركزه O ونصف قطره R ، انقص منه قطاعا زاويا $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ قياسه x مقدرا بالراديان ، عندما نلصق القطعتين $[OA]$ و $[OB]$ مع بعضهما نحصل على مخروط دوراني نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h .





1) عبّر عن r و h بدلالة x و R .

2) برهن أن حجم المخروط الدوراني معرف بالعلاقة :

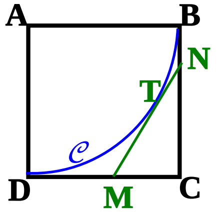
$$V(x)=\frac{R^3}{24®^2}x^2\sqrt{4®^2-x^2}\ .$$

3) أ ـ أدرس تغيرات الدالة V على المجال $]0;2®[$.

ب ـ من أجل أي قيمة للعدد x يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن ؟ أحسبه بدلالة R .

76 $ABCD$ مربع ضلعه 1 .

$\mathscr{C}$ هو الربع الدائرة ذات المركز A ونصف القطر AB ، المرسوم داخل المربع .



T نقطة من $\mathscr{C}$ مختلفة عن B و D . المماس لـ $\mathscr{C}$ عند T يقطع $[DC]$ في M ويقطع $[BC]$ في N .

نضع $x=DM$ و $y=BN$.

1) أ ـ برهن أنّ : $MN^2=x^2+y^2-2x-2y+2$.

ب ـ برهن أنّ : $MN=MT+TN=x+y$.

جـ ـ مما سبق ، عبّر عن y بدلالة x .

د ـ أحسب إذن MN بدلالة x .

2) f هي الدالة المعرّفة على $]0;1[$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

أ ـ أدرس تغيرات الدالة f .

ب ـ ما هي وضعية النقطة M التي من أجلها المسافة MN أصغر ما يمكن ؟

4 ـ اشتقاق دالة مركبة .

77 جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على $D_u=[-2;3]$

x	-2		2		1		0		-1		3
$u'(x)$		+	0	-	¦	-	0	+	¦	+	
$u(x)$	2	↗	3	↘	0	↘	-1	↗			2 / 0

1) عيّن إشارة $u(x)$.

2) نعتبر الدوال f ، g ، h و k المعرفة كما يلي :

$$f=u^2\ ;\ g=u^3\ ;\ h=\frac{1}{u}\ ;\ k=\sqrt{u}$$

أ) عيّن مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال f ، g ، h و k .

ب) عبّر عن كل من $f'(x)$ ، $g'(x)$ ، $h'(x)$ و $k'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$.

ج) استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال f ، g ، h و k .

78 1) أحسب الدالة المشتقة للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

2) استنتج الدالة المشتقة لكل من الدوال المقترحة التالية :

أ) $g:x\mapsto\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$. ب) $h:x\mapsto\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$.

ج) $u:x\mapsto\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$. د) $v:x\mapsto\dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$.

79 1) إذا كانت دالة f زوجة وقابلة للاشتقاق فما هي شفعية دالتها المشتقة f' ؟

2) إذا كانت دالة g فردية وقابلة للاشتقاق فما هي شفعية دالتها المشتقة g' ؟

80 في كل من الحالات التالية أحسب الدالة المشتقة للدالة f المقترحة مبيّناً في كل مرّة المجموعة التي تجرى عليها الحسابات .

أ) $f(x)=\cos^3 2x$. ج) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4(-3x)}$.

ب) $f(x)=\sin^3 3x$. د) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3(-4x)}$.

5 ـ دراسة الدوال .

81 لتكن الدالة f المعرّفة بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$.

نسمي $\mathscr{C}_f$ المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f . استنتج أن المنحني $\mathscr{C}_f$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا .

2) بين أن المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هو مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}_f$.

3) أدرس وضعية المنحني $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب له المائل .

4) أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني $\mathcal{C}_f$ مع حامل محور الفواصل.

5) أكتب معادلة للمماس Δ عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

6) أنشئ Δ ثم المنحني $\mathcal{C}_f$.

82 f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x(x+1)}{x-2} .$$

$\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم .

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أ ـ برّر أن المستقيم d ذي المعادلة $y=x+3$، هو مقارب مائل للمنحني $\mathcal{C}_f$. أدرس الوضعية النسبية لـ $\mathcal{C}_f$ بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل .

ب ـ أرسم d ثمّ $\mathcal{C}_f$.

3) أ ـ استعمل $\mathcal{C}_f$ ، عيّن حسب قيّم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $x^2+(1-m)x+2m=0$.

ب ـ استنتج حسب قيّم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $\cos(2u)+2(1-m)\cos u+4m+1=0$ مع $u\in[0;2$®$[$.

83 لتكن الدالة f المعرّفة بـ: $f(x)=\dfrac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}$.

نسمي $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس .

1) عين مجموعة تعريف الدالة f

2) عين الأعداد الحقيقية a، b و c ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة تعريف الدالة f :

$$f(x)=a+\frac{b}{2x-1}+\frac{b}{x-2}.$$

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم أكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $\mathcal{C}_f$.

4) أكتب معادلة لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني $\mathcal{C}_f$ وحامل محور الفواصل.

6) أرسم المنحني .

84 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x)=\left(x^2-2x\right)^n$.

1) أحسب نهايتي الدالة f_n عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f_n (ميّز الحالتين n زوجي ثم فردي) .

3) نسمي $\mathcal{C}_n$ المنحني الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس .

أ ـ تحقق من أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحني $\mathcal{C}_n$.

ب ـ برّر أنّ $\mathcal{C}_n$ يمرّ من أربع نقط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي n . أحسب إحداثيات هذه النقط .

أرسم في نفس المعلم المنحنيين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_7$.

85 نعتبر الدالة f المعرّفة بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$

يرمز $\mathcal{C}$ إلى المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيّرات الدالة f . استنتج معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمحني $\mathcal{C}$.

2) أكتب معادلة لمماس المنحني $\mathcal{C}$ عند نقطته ذات الفاصلة 5 .

3) أثبت أن المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحني $\mathcal{C}$. أرسم المنحني $\mathcal{C}$.

4) نعتبر الدالة f_m المعرّفة بـ :

$$f_m(x)=\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$$ حيث m وسيط حقيقي .

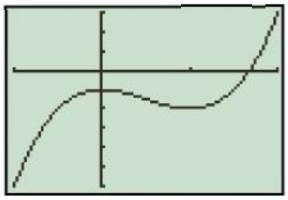
ـ أدرس تغيرات الدالة f_m واستنتج المستقيمين القاربين لمنحنها $\mathcal{C}_m$.

ـ بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات $\mathcal{C}_m$.

ـ ما هو المنحني الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(4;1)$ ؟

86 I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ :
$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$
و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.

1) لاحظ (C_g) على شاشة الحاسبة البيانية ثم ضع تخمينا حول عدد جذورها و حول إشارتها.



2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ محصورا بين $1,6$ و $1,7$.

4) استنتج ، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ
$$f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$$
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ (الوحدة: $4cm$).

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين.

2) بين أنه من كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين معادلة لـِ (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة0.

5) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+1[$،
$$f(x)-(-x+1)=\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}.$$

6) بعد دراسة إشارة $f(x)-(-x+1)$ استنتج وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (Δ). ماذا تلاحظ ؟

7) ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f).

87 نعتبر الدالة f المعرفة على D_f بـ :
$$f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$
حيث $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ؛ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

3) بين أنه من أجل كل x من D_f،
$$f(x)=x+1+\frac{x}{x^2-1}$$

4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة$y=x+1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال $]-1;1[$ يطلب إيجاد، باستعمال حاسبة بيانية، حصر له سعته $0,1$.

6) أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).

7) من ملاحظة (C_f) خمن وجود مركز تناظر للمنحني (C_f) ثم أثبت صحة أو عدم صحة تخمينك.

88 I) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ :
$$f(x)=\frac{x^3-3x-6}{2(x+2)}.$$
$\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1) برهن أنّه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل $x\neq 2$ ، تكون $f(x)=a(x-1)^2+\dfrac{b}{(x+2)}$.

2) أ ـ أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
ب ـ أنشئ جدول تغيّرات الدالة f .

II) نسمي Γ القطع المكافئ ذي المعادلة $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ حيث $x\neq 2$.

P و M نقطتان من Γ و $\mathscr{C}$ على الترتيب ، لهما الفاصلة x مشتركة .

1) أحسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{PM}$.

استنتج أنّ ، لما x يؤول إلى $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ فإنّ المسافة PM تؤول إلى 0. فسّر هذه النتيجة هندسيا .

2) أرسم في نفس الشكل المنحنيين Γ و $\mathcal{C}$.

89 α عدد حقيقي موجب تماما . f_α الدالة المعرّفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بـ :

$f_\alpha(x)=x+\dfrac{2\alpha}{x}+\dfrac{\alpha^2}{x^3}$ ، $\mathcal{C}_\alpha$ تمثيلها البياني في معلم .

1) أ ــ أدرس نهايتي الدالة f_α عند حدود المجال I .

ب ــ برهن أنّه يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}_\alpha$ وأدرس وضعيتيهما النسبية .

2) أ ــ أدرس تغيّرات الدالة f_α على المجال I .

ب ــ برهن أن f_α تقبل قيمة حدّية تبلغها عند عدد حقيقي x_α .

3) P_α نقطة من $\mathcal{C}_\alpha$ فاصلتها x_α .

أ ــ برهن أنّ مجموعة النقط P_α محتواة في المستقيم ذي المعادلة $y=\dfrac{16}{9}x$.

ب ــ ما هي مجموعة النقط P_α عندما يمسح α المجال I.

90 بكالوريا

f هي الدالة المعرّفة على المجموعة $\mathcal{D}_f$ بـ :

$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$.

مع $\mathcal{D}_f=]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ ؛ و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين للدالة f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

2) بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=2x+3$ ، هو مستقيم مقارب للمنحنى $\mathcal{C}$ بجوار $(+\infty)$.

3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟ عند -4 ؟

4) أحسب $f'(x)$ من أجل $x\in\mathcal{D}_f-\{-4;0\}$.

5) أنشئ جدول التغيّرات للدالة f .

6) أرسم المستقيم المقاربة ثمّ المنحنى $\mathcal{C}$.

91 بكالوريا

F دالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $F(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $F'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

نقبل أنّ الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

نسمي $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1) G الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$G(x)=F(x)+F(-x)$.

أ ــ برّر أنّ G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأحسب $G'(x)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$.

ب ــ أحسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية .

2) H الدلة المعرّفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بـ :

$H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

أ ــ برّر أنّ H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من أجل $x\in I$.

ب ــ برهن أنه من أجل كل $x\in I$ ، $H(x)=2F(1)$.

ج ــ استنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=2F(1)$.

د ــ ماذا ينتج عن المنحنى $\mathcal{C}$ ؟

3) T الدالة المعرّفة على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـ :

$T(x)=F(\tan x)-x$.

أ ــ أحسب $T'(x)$. ماذا ينتج عن الدالة T ؟

ب ــ أحسب $F(1)$.

4) أنجز جدول تغيّرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

5) أرسم المنحنى $\mathcal{C}$ ، مستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1 .

92 f هي الدالة المعرّفة على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـ :

$f(t)=2\tan t+1$.

$\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

أ ــ عين معادلة للمماس T للمنحنى $\mathcal{C}$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب ــ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $\mathcal{C}$ بالنسبة لـ T .

93 نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=\sin^2 x$.

وليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ ــ برهن أنّ الدالة f دورية ذات الدور π .

ب ــ برهن أنّ محور التراتيب هو محور للمنحنى $\mathcal{C}$.

ج ــ أدرس تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

د ــ أرسم المنحني الذي يمثل الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ثم على المجال $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

94 f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

. $f(x)=\sin 3x-3\sin x$

1) قارن بين $f(x)$ وكل من $f(x+2\pi)$ ، $f(-x)$ و $f(\pi-x)$.

برهن إذن أنه يكفي دراسة الدالة f على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

. $f'(x)=-6\sin x\sin 2x$

3) أدرس تغيّرات الدالة f على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4) أرسم منحنى الدالة f على $[-2\pi;2\pi]$.

95 نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

. $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x$

وليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ ــ برهن أنّ الدالة f دورية ذات الدور 2π .

ب ــ برهن أنّ محور التراتيب هو محور للمنحنى $\mathcal{C}$.

2) أ ــ عيّن f' الدالة المشتقة للدالة f .

ب ــ برّر أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

. $f'(x)=\sin(x)\left[1-2\cos(x)\right]$

ج ــ أدرس إشارة $f'(x)$ من أجل $x\in[0;\pi]$.

3) أ ــ أنجز جدول تغيرات للدالة f على $[0;\pi]$.

ب ــ أرسم المنحنى الذي يمثل الدالة f على $[-\pi;\pi]$.

ج ــ كيف يمكن استنتاج المنحنى $\mathcal{C}$.

96 الهدف من التمرين هو تقريب محلي بجوار 0 للدالة tan مع كثيرات الحدود .

نعتبر الدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ بـ :

. $g(x)=x+\frac{2x^3}{3}$ و $f(x)=x+\frac{x^3}{3}$

باستعمال حاسبة بيانية أعط تخمينا حول وضعية منحنيات الدوال f ، g و tan .

الجزء الأول :

1) أ ــ أدرس على المجال $I=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ ، تغيرات الدالة

. $u:x\mapsto \tan x-x$

ب ــ استنتج إشارة $\tan x-x$ على المجال I .

2) أ ــ برّر أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال I حيث $\tan^2\alpha=\sqrt{2}-1$.

ب ــ استنتج إشارة $\tan^2 x+1-\sqrt{2}$ على المجال I .

ج ــ أدرس تغيّرات الدالة $v:x\mapsto \tan x-x\sqrt{2}$

واستنتج إشارة $v(x)$ على المجال I .

الجزء الثاني :

1) أدرس تغيّرات الدالة $x\mapsto \tan x-x-\frac{x^3}{3}$ على المجال I ، واستنتج أنه من أجل كل $x\in I$ ،

. $x+\frac{x^3}{3}\le \tan x$

2) بإتباع نفس الطريقة للسؤال 1) برّر أنه من أجل كل $x\in I$ ، $\tan x\le x+\frac{2x^3}{3}$.

3) من شفعية الدالة tan ، برّر أنه من أجل كل $x\in\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$ ، $x+\frac{x^3}{3}\le \tan x\le x+\frac{2x^3}{3}$.

97 f هي الدالة المعرّفة على المجموعة $\mathcal{D}$ للأعداد الحقيقية x حيث $x\ne\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ، بـ :

. $f(x)=\tan(2x)$

1) أ ـ برهن أن الدالة f دورية ذات الدور $\frac{\pi}{2}$.

ب ـ برهن أنه من أجل كل x من $\mathcal{D}$ ،

. $f(-x)=-f(x)$

استنتج أنّ المنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس ، متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم .

2) أ ـ أحسب $f'(x)$ من أجل $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$.

ب ـ استنتج جدول تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$.

3) أ ـ عين معادلة للمماس T للمنحنى عند مبدأ المعلم .

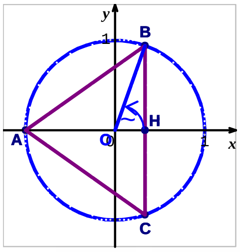
ب ـ أدرس وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى T على $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$.

4) أرسم T والمنحني الذي يمثل الدالة f على $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$.

واشرح كيف ينتج المنحني $\mathcal{C}$.

مسائل

98 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.



مثلث ABC متساوي الساقين رأسه $A\left(-1;0\right)$ ، محيط بالدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 .

النقطة B تقع فوق المحور $\left(Ox\right)$، و H المسقط العمودي للنقطة A على $\left(BC\right)$.

ليكن θ قيسا رئيسيا موجبا مقدّرا بالراديان للزاوية $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$.

1) ــ عين إحداثيتي النقطة B .

ــ عبّر عن المسافتين BH و AH بدلالة θ .

ــ استنتج بدلالة θ مساحة المثلث ABC .

2) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\left[0;\pi\right]$ بـ :

$f\left(x\right)=\sin x\left(1+\cos x\right)$.

أ ــ عين الدالة المشتقة للدالة f وبرهن أنه من أجل كل $x\in\left[0;\pi\right]$ $f'\left(x\right)=2\cos^2 x+\cos x-1$.

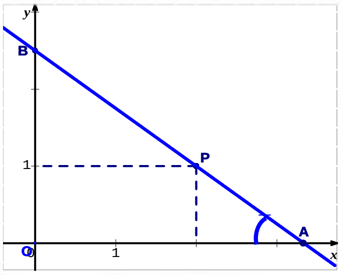
استنتج أنه من أجل كل $x\in\left[0;\pi\right]$ ،

$f'\left(x\right)=\left(2\cos-1\right)\left(\cos x+1\right)$.

ب ــ أدرس اشارة $f'\left(x\right)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) برهن أنه توجد قيمة للعدد θ التي من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن ، المطلوب تحديد هذه المساحة . ما هي إذن طبيعة المثلث ABC .

99 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.



نعتبر النقطة p ذات الإحداثيتين $\left(2;1\right)$.

مستقيم يشمل النقطة p يقطع كل من $\left(Ox\right)$ و $\left(Oy\right)$ في النقطتين A و B على الترتيب ؛ حيث ترتيب النقطة يكون أكبر من 1 .

نضع α القياس بالراديان للزاوية $\widehat{OAB}$ والذي يحقق $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

1) أحسب بدلالة $\tan\alpha$، فاصلة النقطة A ، ترتيب النقطة B ، ثمّ مساحة المثلث OAB .

2) لتكن الدالة f المعرّفة على $\left]0;+\infty\right[$ بـ :

$f\left(x\right)=\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(1+2x\right)$. أدرس اتجاه تغيّر f .

استنتج أن الدالة f تقبل قيمة حدّية صغري يطلب تحديدها.

3) استنتج ممّا سبق أصغر مساحة ممكنة للمثلث OAB.

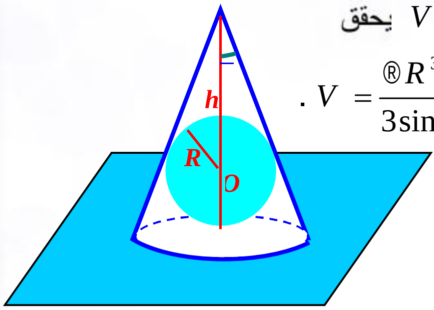
أرسم المستقيم $\left(AB\right)$ في هذه الحالة .

100 نضع كرة ذات نصف القطر R داخل مخروط دوراني، قياس نصف الزاوية إلى رأسه هي α حيث $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

نفرض أن الكرة والمخروط الدوراني متماسان .

ونقبل أن حجمه V يحقق

$V=\frac{\pi R^3\left(1+\sin\alpha\right)^2}{3\sin\alpha\left(1-\sin\alpha\right)}$.



الهدف من التمرين هو تعيين ارتفاع المخروط الدواراني بحيث يكون حجمه أصغر ما يمكن .

1) برهن أن الارتفاع h والحجم V للمخروط الدوراني يحققان العلاقة : $V=\frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\left]0;1\right[$ بـ :

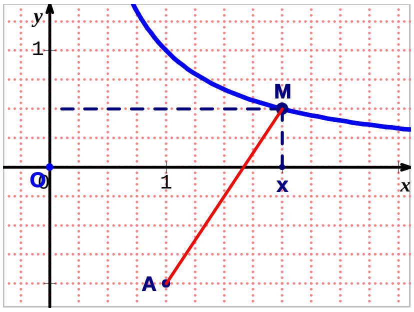
$f\left(x\right)=\frac{\left(1+x\right)^2}{x\left(1-x\right)}$.

3) أ ــ استنتج من السؤال السابق ، أنه يوجد مخروط دوراني له أصغر حجم ؛ نرمز بـ α_0 إلى قياس نصف الزاوية إلى رأسه . حدّد القيمة V_0 لأصغر حجم .

ب ـ أحسب الارتفاع h_0 للمخروط الدوراني الذي له أصغر حجم .

101 في الشكل لدينا منحن ذي المعادلة $y=\frac{1}{x}$ مع $x>0$.

A و M نقطتان حيث $A(1;-1)$ و $M\left(x;\frac{1}{x}\right)$.



الهدف من التمرين هو تعيين إن أمكن نقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

1) أ ـ برّر أنه إذا أخذت AM أصغر قيمة فإن AM^2 تأخذ أصغر قيمة .

ب ـ أحسب بدلالة x ، $d(x)$ حيث $d(x)=AM^2$.

2) برهن أنه من أجل كل $x>0$ ، $d'(x)=\frac{2f(x)}{x^3}$

حيث f هي دالة كثير حدود من الدرجة الرابعة .

3) دراسة الدالة f .

أ ـ أدرس تغيرات الدالة f على $I=]0;+\infty[$.

ب ـ برهن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال I . عيّن حصرا للعدد ~ نصف قطره 10^{-2}.

ج) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال I .

4) استنتج مما سبق تغيرات الدالة d وأعط خلاصة .

5) برّر أنه إذا كانت M أقرب من النقطة A فإن المستقيم (AM) يكون عموديا على مماس المنحني المعطى سابقا في نقطته M .

102 في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2;0;0)$ ، $B(-1;\sqrt{3};0)$ و $C(-1;-\sqrt{3};0)$.

1) مثل النقط A ، B و C في المستوي $p(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) برهن أنّ المثلث ABC تقايس أضلاع مركزه O .

3) أ ـ عيّن مجموعة النقط M من الفضاء المتباعدة المسافتين لكل من النقطتين A و B .

ب ـ عيّن مجموعة النقط N من الفضاء المتباعدة المسافتين لكل من النقطتين B و C.

ج ـ برهن أن مجموعة النقط P من الفضاء المتباعدة المسافات لكل من النقط A ، B و C هي حامل المحور $(O;\vec{k})$.

4) برهن أنه توجد نقطة وحيدة D راقمها موجب حيث يكون الرباعي $ABCD$ منتظما وأحسب إحداثياتها .

5) لتكن M نقطة كيفية من القطعة المستقيمة $[CD]$.

نضع $\overrightarrow{CM}=\alpha\overrightarrow{CD}$ مع $\alpha\in[0;1]$.

أ ـ برهن أنّ $\cos\widehat{AMB}=\frac{2\alpha^2-2\alpha+1}{2(\alpha^2-\alpha+1)}$.

نعرّف الدالة f على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha^2-2\alpha+1}{2(\alpha^2-\alpha+1)}=1-\frac{1}{2(\alpha^2-\alpha+1)}.$$

ب ـ أدرس تغيرات الدالة f .

ج ـ استنتج وضعية النقطة M التي من أجلها تكون الزاوية $\widehat{AMB}$ أكبر ما يمكن .

د ـ ما هي القيمة لأكبر زاوية $\widehat{AMB}$ ؟

103 I) f الدالة المعرفة على $[0;1[$ بـ :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}.$$

1) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 .

2) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) نسمي $\mathcal{C}_1$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أكتب معادلة للمماس T للمنحني $\mathcal{C}_1$ عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$.

4) في نفس المعلم أرسم $\mathcal{C}_1$ ، T ثمّ المنحني $\mathcal{C}_2$ نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى محور الفواصل .

5) نضع $\Gamma = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ ولتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوي . برهن أنّ $M \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان

$$(E)\ \dots\ x\left(x^2+y^2\right)-y^2=0$$

المنحني Γ يسمى المنحني اللبلابي لديكلويس (cissoïde de Dioclès) .

II) I النقطة ذات الإحداثيتين $(1;0)$ ، $\mathcal{C}$ الدائرة ذات القطر $[OI]$ و Δ المماس للدائرة $\mathcal{C}$ عند النقطة I .

d المستقيم الذي يشمل النقطة O ومعامل توجيهه العدد الحقيقي t .

1) عيّن إحداثيتي M نقطة تقاطع الدائرة $\mathcal{C}$ والمستقيم d حيث $M \neq O$.

2) عيّن إحداثيتي M' نقطة تقاطع المنحني Γ والمستقيم d حيث $M' \neq O$.

أحسب إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين Δ و d .

3) استنتج طريقة لإنشاء المنحني Γ نقطة بنقطة انطلاقا من النقطتين M و N .

أنشئ المنحني Γ

III) 1) المستقيم (IM') يقطع محور التراتيب في P .

أ ـ برهن أنّ : $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NI}.\overrightarrow{NO} = NI^2$ ، و $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OI} = OI^2$.

ب ـ استنتج أنّ : $NI^2 = OM' \times NO$ ، و $OI^2 = OM \times ON$.

ج ـ برهن أنّ : $\dfrac{OP}{NI} = \dfrac{OM'}{M'N} = \dfrac{OM'}{OM}$.

د ـ استنتج من السؤالين ب و ج ، أنّ : $OP \times OI^2 = OP = IN^3$.

2) نختار $OP = 2$ وبالتالي يكون $IN = \sqrt[3]{2}$.

اشرح كيف يمكن للمنحني اللبلابي لِـ **ديوكلي** أن يحل المشكل التالي : ليكن مكعّبا ذي الحرف a ، أنشئ حرفا x لمكعب حيث يكون حجمه ضعف حجم المكعب الأول .

104 1) g هي الدالة المعرّفة على $[0;\text{®}]$ بـ :

$g(x) = x\cos x - \sin x$.

أ ـ أدرس تغيّرات الدالة g وأنشئ جدول تغيّراتها .

ب ـ استنتج إشارة $g(x)$ على $[0;\text{®}]$.

2) لتكن الدالة f المعرّفة على $[0;\text{®}]$ بـ :

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ من أجل $x \neq 0$ و $f(0)=1$.

أدرس تغيّرات الدالة f على $[0;\text{®}]$.

3) الهدف من السؤال هو دراسة قابلية الاشتقاق عند 0 للدالة f .

أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد موجب x ،

$0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$.

من أجل ذلك نعتبر الدالة ¨ المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

¨ $(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$.

أحسب المشتقات المتتابعة ¨ $'(x)$ ، ¨ $''(x)$ و ¨ $'''(x)$ واستنتج إشارة ¨ .

ب ـ برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 وأحسب $f'(0)$.

4) أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f في معم متعامد ومتجانس حيث تأخذ وحدة الرسم $3cm$.

105 1) g هي الدالة المعرّفة بـ :

$g(0)=0$ و $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ من أجل $x \neq 0$

أ ـ برهن أنّ g تقبل الاشتقاق عند 0 .

ب ـ $\mathcal{C}$ هو منحنى الدالة g الممثل في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. تحقق من أنّ محور الفواصل هو مماس للمنحني $\mathcal{C}$ عند المبدأ O .

2) أ ـ برهن أنّ $g\left(\dfrac{1}{k\text{®}}\right)=0$ من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$.

ب ـ ~ عدد حقيقي موجب تماما وصغير بقدر ما نريده. لماذا يوجد عدد غير منته من الأعداد $\dfrac{1}{k\text{®}}$ تنتمي إلى المجال $[0;\sim]$ ، مع $k \in \mathbb{Z}$.

3) هل صحيح أنّ مماس في نقطة A للمنحني $\mathcal{C}$ ، لا يقطع $\mathcal{C}$ إلاّ في النقطة A وهذا بجوار A .

اختيار من متعدد

106 في كل سؤال اقتراحات موضوعة يمكن أن تكون أكثر من جملة صحيحة؛ المطلوب اختيار الجمل الصحيحة مبرّرا ذلك.

1) f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

أ- إذا قبلت f قيمة حدّية عظمى عند a من المجال I ، فإنّ $f'(a)=0$.

ب- إذا كانت $f'(a)=0$ ، فإنّ f تقبل قيمة حدّية عند a.

جـ- الدالة f مستمرة على المجال I .

2) f هي الدالة المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{x^3-x+1}$.

أ- المعادلة $x^3-x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

ب- الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha;+\infty[$.

جـ- الدالة f تقبل الاشتقاق على $]\alpha;+\infty[$.

د- من أجل كل عدد حقيقي موجب k، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا .

107 في الشكل $\mathcal{C}_f$ هو منحنى الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ومماسين عند كل من النقطتين O و A.

في كل السؤال ، بالضبط اقتراح واحد صحيح المطلوب تعيّينه .

1) العدد المشتق للدالة f عند 0 يساوي :

أ- -2 . ب- 0. جـ- 1. د- 4 .

2) أ- $f(0)=2$. ب- $f(1)=0$.

جـ- $f'(0)=0$. د- $f'(1)=0$.

3) أ- القيمة الحدّية العظمى للدالة f هي 2 .

ب- $f'(2)>0$.

جـ- القيمة الحدّية الصغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ ، هي 0 .

4) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. ب- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

جـ- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$. د- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(1)$.

أصحيح أم خاطئ ؟

108 f دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث يعطى جدول تغيراتها .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

ميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة مبرّرا ذلك.

1) من أجل كل $x\in]0;1]$ ، $f(x)\le1$.

2) المستقيم ذو المعادلة $x=0$ هو مماس لمنحني الدالة f.

3) إذا كان $a>1$ ، فإنّ $f(a)\le1$.

4) يكون مماس منحنى الدالة f عند نقطته ذات الفاصلة 1 موازيا لحامل محور التراتيب .

5) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$.

109 أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبرّرا ذلك

1) الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=x\sqrt{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

3) الدالة f المعرفة على $I=\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$ بـ : $f(x)=1-\tan x$ متناقصة تماما على I .

4) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^{13}$.

110 المطلوب التمييز بين الجمل الصحيحة والخاطئة مبرّرا ذلك.

1) إذا كان $f'(2)=-4$ فإنّ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-4$

2) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة g المعرّفة بـ : $g(x)=f(\tan x)$ تقبل الاشتقاق على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ولدينا $g'(x)=f'(\tan x)$

3) المعادلة $\tan x=x$ تقبل ما لانهاية من الحلول على $\mathbb{R}$.

4) إذا كان $f'=g'$ على مجال I فإن $f-g$ هي دالة ثابتة على المجال I .

03 الدوال الأسية و اللوغاريتمية

الكفاءات المستهدفة

- توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.
- حل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية، الدوال اللوغاريتمية.

تتدخل الدوال الأسية في مجالات عديدة علمية، اقتصادية و اجتماعية و يتم استعمالها لنمذجة الظواهر التي تكون فيها نسبة التغير $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ متناسبة مع y كما تسمح في الإحصاء من التعبير عن القوانين الأساسية.

زمن فاعلية دواء

حينما نحقن مريضا بمضاد حيوي فإن الكمية المحقونة A للدواء تتناقص مع مرور الزمن t وفق الدالة f حيث:

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{24}}$$

1) ما كمية الدواء المتبقية في الدم بعد مرور 8 ساعات ؟
2) لأسباب صحية تعطى كل 8 ساعات حقنة واحدة. مثّل بيانيا كمية الدواء في دم المريض خلال 72 ساعة.
3) تبدأ فاعلية الدواء حينما تبلغ كميته في الدم 2,2A . متى تبلغ هذه الحالة ؟
4) عندما تبلغ الكمية 3,65A يصبح الدواء خطرا على صحة المريض. هل الوتيرة السابقة في إعطاء الحقن تشكل خطرا على المريض ؟
5) بعد أسبوع من العلاج تقرر إعطاء الحقن كل 24 ساعة. مثّل بيانيا التغيرات الجديدة لكمية الدواء في الدم لمدة أسبوع ابتداء من هذا التغيير.

لن تجد أية صعوبة في نهاية الفصل للإجابة عن الأسئلة السابقة.

نشاط أول

مقدمة: تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية و البيولوجية والاقتصادية و غيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f'. سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع و هي دالة تساوي دالتها المشتقة.

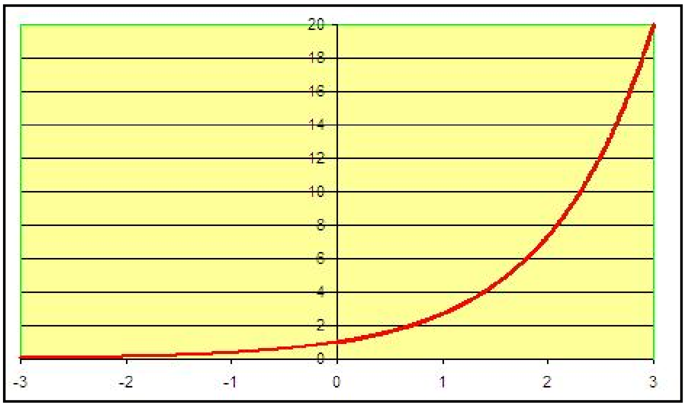
فرضية: نقبل أنه توجد دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين التاليين:

$$f'=f \quad (1) \qquad \text{و} \qquad f(0)=1 \quad (2)$$

1) باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0,005$ أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f.

نذكر أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن $f'=f$ فإن $f(x_0+h)\approx f(x_0)(1+h)$

لدينا كذلك $f(x_0-h)\approx f(x_0)-hf'(x_0)$ و بما أن $f'=f$ فإن $f(x_0-h)\approx f(x_0)(1-h)$



h	x	f(x-h)=f(x)*(1-h)	x	f(x+h)=f(x)*(1+h)
0,005	0	1	0	1
	-0,01	0,995	0,01	1,005
	-0,01	0,990025	0,01	1,010025
	-0,02	0,985074875	0,02	1,015075125
	-0,02	0,980149501	0,02	1,020150501
	-0,03	0,975248753	0,03	1,025251253
	-0,03	0,970372509	0,03	1,030377509
	-0,04	0,965520647	0,04	1,035529397
	-0,04	0,960693044	0,04	1,040707044
	-0,05	0,955889578	0,05	1,045910579
	-0,05	0,95111013	0,05	1,051140132
	-0,06	0,94635458	0,06	1,056395833
	-0,06	0,941622807	0,06	1,061677812
	-0,07	0,936914693	0,07	1,066986201

2) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x)f(-x)$

- بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)f(-x)=1 \quad (3)$
- برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0 \quad (4)$

3) نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g'=g$ و $g(0)=1$. بما أن الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$، نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $k(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

- بين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$.

4) ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

- بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x)=f(y)$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)f(y) \quad (5)$
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)} \quad (6)$

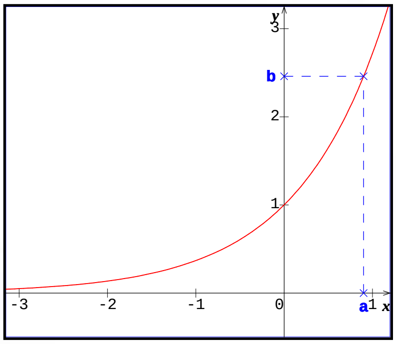
5) ليكن n عددا صحيحا نسبيا و لتكن j الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $j(x)=\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}$

- عين الدالة المشتقة للدالة j .
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx)=[f(x)]^n$ $\quad(7)$

تعريف: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ الدالة الأسية (النيبيرية).
و نرمز إليها بالرمز" exp ".
من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\exp(x)$

6) أكتب باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)، … ، (7).

نشاط ثان



الدالة الأسية مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، من أجل كل عدد حقيقي b
من $]0;+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $\mathbb{R}$ بحيث $e^a=b$.
بوضع $a=\ln(b)$ نكون بذلك قد عرفنا دالة جديدة.

تعريف: تسمى هذه الدالة " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " و نرمز إليها بالرمز " ln ".

1) حساب بعض الصور

- أحسب الأعداد التالية: $\ln(1)$، $\ln(e)$، $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$ و $\ln(e^2)$.
- عين قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln(2)$.
- بين أن $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln(2)$ ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2) التمثيل البياني

نعتبر في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدالتين " exp " و " ln ".

- ماذا يمكن القول عن النقطتين $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ حيث x، y عددان حقيقيان.
- a عدد حقيقي و b عدد حقيقي موجب تماما.بين أن النقطة $M(a;b)$ تنتمي إلى المنحني (C) إذا وفقط إذا كانت النقطة $M'(b;a)$ تنتمي إلى المنحني (C').
- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C') ؟
- أرسم المنحني (C) ثم المنحني (C') في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) وضع تخمينات

- خمن اتجاه تغير الدالة " ln " على المجال $]0;+\infty[$.
- خمن نهايتي الدالة " ln " عند 0 و عند $+\infty$.

الدالة الأسية

1. عموميات

يسمح النشاط الأول من استخلاص النتائج التالية:

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.

نرمز إلى هذه الدالة بالرمز" exp " و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

نتائج: * $\exp(0)=1$.

* من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp'(x)=\exp(x)$.

2. خواص جبرية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

(1) $\exp(x)\neq 0$ (2) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ (3) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

(4) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. (5) $\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$.

البرهان: أنظر النشاط الأول.

3. العدد e و الترميز e^x

- العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.
- من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\left[\exp(1)\right]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$

تقرأ e^x: " أسية x ".

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- $e^0=1$
- $\exp'(x)=e^x$
- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^xe^y$
- $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1. بين أن الدالة f فردية.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\dfrac{1}{e^x}-1}{\dfrac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\dfrac{1-e^x}{e^x}}{\dfrac{1+e^x}{e^x}}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$. إذن الدالة f دالة فردية.

2.
$$\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{(e^x+1)^2}{(e^{2x}+1)}$$

و منه $\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\dfrac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^{2x}+1)}=\dfrac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}=f(2x)$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(-x)+f(x)=2$. فسر بيانيا النتيجة.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$

الحل: ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

1. $f(-x)+f(x)=\dfrac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3-e^x}{1+e^x}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{2e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{2(e^x+1)}{e^x+1}$.

و منه $f(-x)+f(x)=2$

المنحني الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0;1)$.

2. $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1=\dfrac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

↲ الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$

1. حلول المعادلة $f' = kf$

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.
توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = kf$ و $f(0)=1$. f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$.

البرهان:

الوجود: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{kx}$.
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=ke^{kx}=kf(x)$ كما أن $f(0)=e^0=1$.
و بالتالي الدالة f تحقق $f'=kf$ و $f(0)=1$.

الوحدانية: نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g'=kg$ و $g(0)=1$. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$. الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$،
$h'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{[f(x)]^2}=\dfrac{kg(x)f(x)-kf(x)g(x)}{[f(x)]^2}=0$. إذن h ثابتة على $\mathbb{R}$ مع $h(0)=\dfrac{g(0)}{e^0}=1$. و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)=1$. إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$.

2. دوال تحول المجموع إلى جداء

مبرهنة: الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:
من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=f(x)f(y)$
هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

البرهان:

- لتكن f دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: من أجل كل x، y من $\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)f(y)$.
بأخذ $x=0$ و $y=0$ نحصل على $f(0)=[f(0)]^2$ أي $f(0)[1-f(0)]=0$ أي $f(0)=0$ أو $f(0)=1$.
إذا كان $f(0)=0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=f(x)\times 0=0$ مما يعني أن f معدومة و هذا مرفوض و بالتالي $f(0)=1$.
من أجل كل y ثابت، لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)f(y)$. باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x+y)=f'(x)f(y)$. من أجل $x=0$ لدينا: $f'(y)=f'(0)f(y)$
بوضع $k=f'(0)$ يكون لدينا من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f'(y)=kf(y)$. إذن $f'=kf$ و $f(0)=1$
و منه حسب المبرهنة السابقة لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=e^{kx}$.
- عكسيا: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{kx}$. باستعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية نحصل على:
من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=e^{k(x+y)}=e^{kx+ky}=e^{kx}\times e^{ky}=f(x)f(y)$

تمرين محلول:

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.

الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ هي الدوال: $x \mapsto Ce^{kx}$ حيث C عدد حقيقي ثابت.

1. أنجز برهانا لهذه المبرهنة.

2. عين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x)-2f(x)=0$.

3. من بين الدوال f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ عين تلك التي منحناها البياني يمر من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$.

الحل:

1. إذا كانت f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ce^{kx}$ فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=C\times ke^{kx}=k\left(Ce^{kx}\right)=kf(x)$ و منه $f'=kf$.

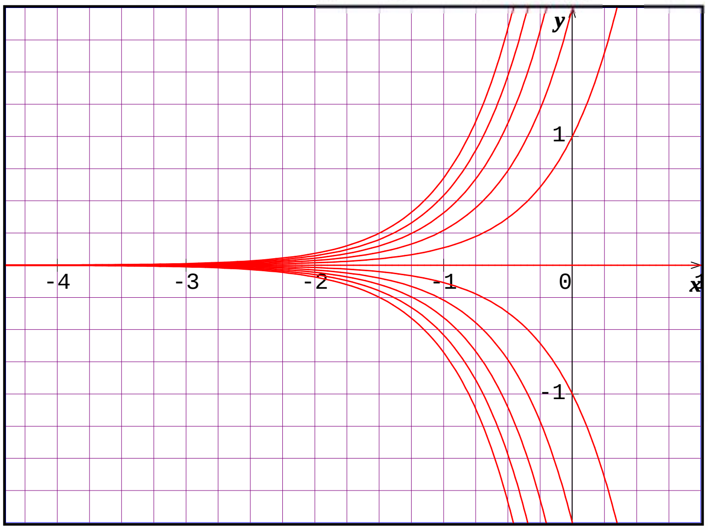
عكسيا إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=\dfrac{f'(x)e^{kx}-kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}}=0$

و منه الدالة g ثابتة على $\mathbb{R}$. بوضع $g(x)=C$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $f(x)=g(x)e^{kx}$ يكون لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=Ce^{kx}$.

2. $f'(x)-2f(x)=0$ تعني $f'(x)=2f(x)$ و منه $f'=kf$ مع $k=2$.

الدوال f هي إذن الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$ حيث C عدد حقيقي ثابت.



التمثيلات المقابلة هي لدوال f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$

3. نبحث إذن عن الدالة f حيث $f(x)=Ce^{2x}$ مع $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$ و بما أن $f\left(\frac{1}{2}\right)=Ce^{2\left(\frac{1}{2}\right)}=C\times e$

يكون لدينا $C\times e=e^2$ أي $C=e$. و منه $f(x)=e\times e^{2x}=e^{2x+1}$.

إذن الدالة الوحيدة f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ و التي يمر منحناها البياني من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$ هي الدالة:

$$x \mapsto e^{2x+1}$$

دراسة الدالة الأسية

1. اتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{x}>0$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{x}=e^{2\times\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}$ و بما أن $e^{x}\neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{x}>0$.

خاصية2: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp'(x)=e^{x}$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp'(x)>0$.

نتائج:
- من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^{a}<e^{b}$ يعني $a<b$ و $e^{a}=e^{b}$ يعني $a=b$.
- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^{x}<1$ يعني $x<0$ و $e^{x}>1$ يعني $x>0$.

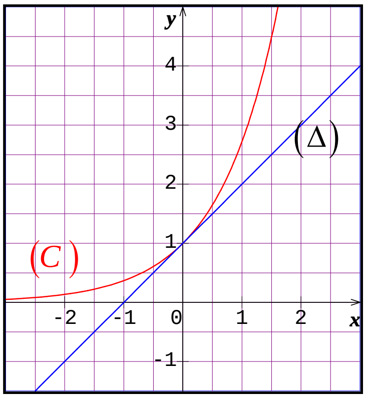
2. النهايات

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$. (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

البرهان:
- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{x}-x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^{x}-1$.
و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $e^{x}\geq 1$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$.
إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)\geq 0$ أي $e^{x}\geq x$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$.
- من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{x}=\frac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty\right)$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

3. جدول تغيرات - التمثيل البياني

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
e^{x}	0	1	$+\infty$



- المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.
- لدينا $\exp'(0)=1$ و $e^{0}=1$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $(\Delta): y=x+1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{exp(0+x)-\exp(0)}{x}=\exp'(0)=1$ إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1}$

نتيجة: الدالة $x\mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto e^{x}$ بجوار 0.
أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^{x}\approx 1+x$.

تمرين محلول1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$e^{2x}+3=0$ (1) $\quad e^{-2x+1}-1=0$ (2) $\quad e^{-2x-1}-e^{x}<0$ (3) $\quad e^{2x}>2-e^{x}$ (4)

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)}$ تعني $u(x)\geq v(x)$.

الحل:

(1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}>0$. إذن $S=\varnothing$.

(2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^{0}$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S=\{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1}<e^{x}$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\dfrac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x}+e^{x}-2\leq 0$. بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود $X^{2}+X-2$ هما -2 و 1 و منه $X^{2}+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^{x}<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X>1$ تعني $e^{x}>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^{*}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

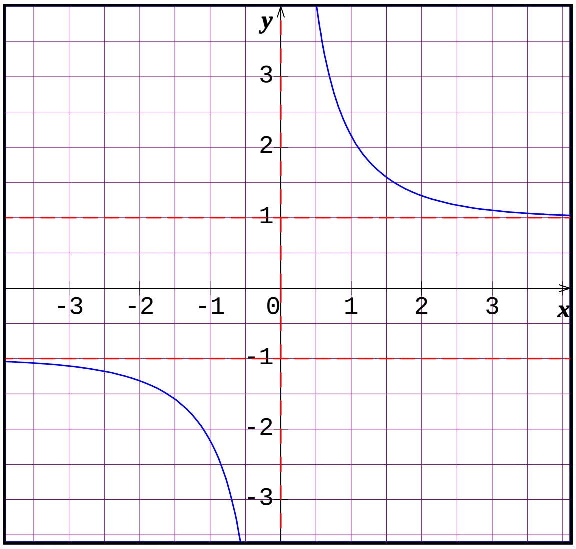
1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C).

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحنى (C) معلم متعامد و متجانس.

الحل: (1

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.
- نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}\left(1+e^{-x}\right)}{e^{x}\left(1-e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.



- لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+1\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}-1\right)=0$.

نعلم أن $e^{x}<1$ يعني $x<0$ و $e^{x}>1$ يعني $x>0$

و بالتالي $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$.

يقبل المنحنى (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x=0$، $y=-1$ و $y=1$.

(2 f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\dfrac{-2e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$.

دراسة الدالة $\exp\circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-x+2}$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\exp$ " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=x^2-1$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{2+\ln x}$

أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}(2+\ln x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to -\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to 0}e^{2+\ln x}=0$
  و بالتالي $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$
- لدينا: $\lim\limits_{x\to +\infty}(2+\ln x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to +\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}e^{2+\ln x}=+\infty$
  و بالتالي $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

ملاحظة: يمكن ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=e^{2+\ln x}=e^{2}e^{\ln x}=e^{2}x$

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2. عين نقط المنحني (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\dfrac{x}{3}$

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

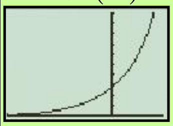
بما أن $e^{2x}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. يكون المماس عند نقطة من (C) فاصلتها x موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x)=\dfrac{1}{3}$

يكون لدينا إذن $\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\dfrac{1}{3}$ أي $6e^{2x}=e^{2x}+1$ و هذا يعني $e^{2x}=\dfrac{1}{5}$ أي $2x=-\ln 5$ و منه $x=-\dfrac{\ln 5}{2}$

و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C) فاصلتها $x=-\dfrac{\ln 5}{2}$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

تمرين محلول3: المنحني المرسوم على الحاسبة هو للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^3+3x+1}$



1. خمن عدد حلول المعادلة $f(x)=2$.

2. اثبت صحة تخمينك معينا حصرا للحل سعته 10^{-2}.

الحل:

1. يظهر و أن للمعادلة $f(x)=2$ حلا.

2. * الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

* الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=3\left(x^2+1\right)e^{x^3+3x+1}$

و بما أن $3\left(x^2+1\right)>0$ و $e^{x^3+3x+1}>0$ فإن $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. لدينا $f(-1)=e^{-3}\approx 0,5$ و $f(0)=e\approx 2,71$. نلاحظ أن $f(-1)<2<f(0)$. إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا ~ محصورا بين -1 و 0. تعطينا الحاسبة $-0,11<\sim<-0,10$.

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. اللوغاريتم النيبيري لعدد

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$.
يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز" $\ln a$ ".

مثال: * العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 2$ هو إذن $\ln 2$.

2. تعريف الدالة " $\ln$ "

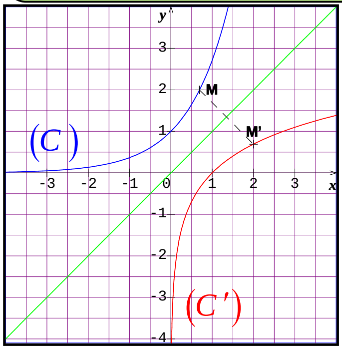
تعريف: نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز" $\ln$ " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $x = e^y$ يعني $y = \ln x$.
2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln x} = x$.
3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\ln\left(e^x\right) = x$.
4. بما أن $e^0 = 1$ فإن $\ln 1 = 0$ و بما أن $e^1 = e$ فإن $\ln e = 1$.

ملاحظة: نعبر عن النتيجة "1" بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" هي الدالة العكسية للدالة الأسية "exp".

خاصية: في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).

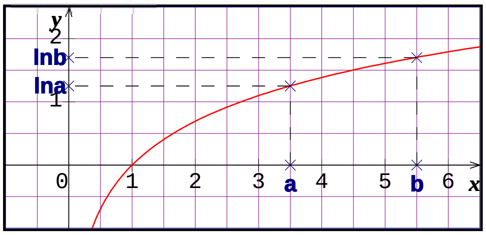


البرهان: نرمز بـ (C) إلى منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ و بـ (C') إلى منحنى الدالة $x \mapsto \ln x$.
بما أن $y = e^x$ يعني $x = \ln y$ فإن القول أن النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى (C) يعني أن النقطة $M'(y;x)$ تنتمي إلى (C').
و بما أن $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ فإن المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى هذا المستقيم.

3. اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

خاصية: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان كيفيان من $]0;+\infty[$ حيث $a < b$. $a < b$ يعني $e^{\ln a} < e^{\ln b}$ و بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $\ln a < \ln b$.



نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1. $\ln a = \ln b$ يعني $a = b$.
2. $\ln a < \ln b$ يعني $a < b$.
3. $\ln a > 0$ يعني $a > 1$ و $\ln a < 0$ يعني $0 < a < 1$ كما أن $\ln 1 = 0$.

تمرين محلول1: عين مجموعتي تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$g(x)=\ln\left(x^2\right) \quad \text{و} \quad f(x)=\ln(x+1)$$

طريقة: يكون لـِ $\ln a$ معنى إذا و فقط إذا كان العدد الحقيقي a موجب تماما.

الحل:

- تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+1>0$ أي $x>-1$ و منه مجموعة تعريف f هي $]-1;+\infty[$.
- تكون g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ أي $x\neq 0$ و منه مجموعة تعريف g هي $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

تمرين محلول2: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$\ln(2x-1)=2 \quad (1)$ ، $\ln(x-1)\geq -3 \quad (2)$ ، $\ln(x+2)\leq 5 \quad (3)$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $\ln[u(x)]=p$ (على التوالي متراجحة من الشكل $\ln[u(x)]<p$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x)=e^p$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<e^p$).

الحل:

1. لدينا $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. (1) تعني $2x-1=e^2$ أي $x=\frac{1+e^2}{2}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+e^2}{2}\right\}$
2. لدينا $D=]1;+\infty[$. (2) تعني $x-1>e^{-3}$ أي $x>1+e^{-3}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left]1+e^{-3};+\infty\right[$
3. لدينا $D=]-2;+\infty[$. (3) تعني $x+2\leq e^5$ أي $x\leq e^5-2$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left]-2;e^5-2\right]$

تمرين محلول3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$\ln\left(x^2-1\right)=\ln(x) \quad (1)$ ، $\ln\left(x^2-1\right)\leq\ln(x) \quad (2)$

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)]=\ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)]<\ln[v(x)]$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x)=v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<v(x)$).

الحل:

1. تكون المعادلة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2-1>0$ و $x>0$ و منه $D=]1;+\infty[$.

(1) تعني $x^2-1=x$ أي $x^2-x-1=0$. حلول المعادلة $x^2-x-1=0$ هما $x'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ، $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D . و هكذا مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=]1;+\infty[$. لدينا (2) تعني $x^2-x-1\leq 0$. مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x-1\leq 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ و بالتالي فمجموعة حلول المتراجحة (2) هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $\left]1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

الخواص الجبرية

1. الخاصية الأساسية

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان من $]0;+\infty[$. نضع $\sim=\ln(ab)$ و نضع $=\ln a+\ln b$ و بالتالي:
$e^{\sim}=ab$ و $=e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=ab$ e . إذن $e^{\sim}=e$ و منه $=\sim$ أي $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

2. نتائج

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

البرهان:

* من أجل a من $]0;+\infty[$ ، $a\times\frac{1}{a}=1$ و منه $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=0$ أي $\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)=0$ و منه $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

* من أجل a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا:
من أجل كل أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ، .... ، a_n من $]0;+\infty[$ ، $\ln(a_1a_2...a_n)=\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n$.

نتيجة2: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(a^n)=n\ln a$.

البرهان: a عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ و n عدد صحيح نسبي.

نميز الحالات التالية:

1. الحالة الأولى: $n\geq 0$

نستعمل البرهان بالتراجع. و من أجل ذلك نسمي $P(n)$ الخاصية $\ln(a^n)=n\ln a$.

- من أجل $n=0$ لدينا: $\ln(a^0)=\ln(1)=0=0\ln a$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.
- فرضية التراجع: نفرض صحة $P(n)$ من أجل n حيث $n\geq 0$ أي $\ln(a^n)=n\ln a$.
- وراثية الخاصية ابتداء من الرتبة 0: نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\ln(a^{n+1})=(n+1)\ln a$. لدينا:

$\ln(a^{n+1})=\ln(a^n\times a)=\ln(a^n)+\ln a=n\ln a+\ln a=(n+1)\ln a$ و منه $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $\ln(a^n)=n\ln a$.

2. الحالة الثانية: $n<0$

$\ln(a^n)=\ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right)=-\ln(a^{-n})=-(-n)\ln a=n\ln a$ لأن $-n>0$.

نتيجة3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$.

البرهان: من أجل a من $]0;+\infty[$ ، $\ln a=\ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right]=2\ln\left(\sqrt{a}\right)$ و منه $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$.

تمرين محلول1: حل المعادلتين التاليتين:

$\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2 \quad (1)$ و $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2 \quad (2)$

طريقة: الكتابة $\ln a+\ln b$ تفرض أن يكون $a>0$ و $b>0$ بينما الكتابة $\ln(a\times b)$ تفرض أن يكون $ab>0$ و يعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبين معا.

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.
(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$. -3 و 2 حلول هذه المعادلة تنتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{-3;2\}$.
2. تكون المعادلة (2) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)>0$ و $(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]1;+\infty[$.
(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$. من بين -3 و 2 حلول هذه المعادلة، الحل 2 هو الوحيد الذي ينتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{2\}$.

تمرين محلول2: حل المتراجحتين التاليتين:

$\ln(x-1)(x+2)\le 2\ln 2 \quad (1)$ و $\ln(x-1)+\ln(x+2)\le 2\ln 2 \quad (2)$

طريقة: لمعاينة حلول متراجحة يمكنك استعمال محور.

الحل:

1. مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.
(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)\le\ln 4$ أي $x^2+x-6\le 0$.
مجموع الحلول هي $[-3;2]\cap D=[-3;-2[\cup]1;2]$

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]1;+\infty[$.
(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)\le\ln 4$ أي $x^2+x-6\le 0$.
مجموع الحلول هي $[-3;2]\cap D=]1;2]$

تمرين محلول3: حل المعادلة التالية: $2[\ln(x)]^2+\ln(x)-6=0$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $a[\ln(x)]^2+b\ln(x)+c=0$ مع $a\neq 0$ نضع $X=\ln x$.
نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

الحل: مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0;+\infty[$.

بوضع $X=\ln x$ نحصل على المعادلة $2X^2+X-6=0$ ذات الحلين -2 و $\frac{3}{2}$.

$\ln x=-2$ تعني $x=e^{-2}$ و $\ln x=\frac{3}{2}$ تعني $x=e^{\frac{3}{2}}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{e^{-2};e^{\frac{3}{2}}\right\}$

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. النهايات

خواص: نهاية الدالة " $\ln$ " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad (1) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\ln x=-\infty \quad (2)$$

البرهان:

- ليكن A عددا حقيقيا موجبا تماما. الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و منه إذا كان x عددا حقيقيا يحقق $x>e^A$ فإن $\ln x>A$ و هكذا فإن المجال $]A;+\infty[$ يشمل كل قيم $\ln x$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. و هذا يعني أن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.
- من أجل x من $]0;+\infty[$ ، نضع $X=\dfrac{1}{x}$ و منه $\ln X=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$. لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}0}X=+\infty$ و من النتيجة (1) لدينا: $\lim_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$ و هكذا فإن $\lim_{x\to 0}\ln x=\lim_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$.

2. الاستمرارية و الاشتقاقية

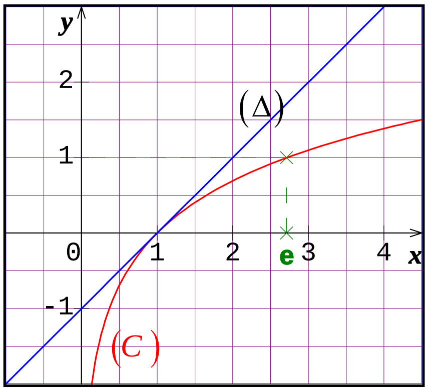
خواص: الدالة " $\ln$ " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

البرهان:

- نقبل بدون برهان أن الدالة " $\ln$ " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{\ln x}$. f هي مركب الدالة " $\ln$ " متبوعة بالدالة " $\exp$ " فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\ln'(x)\times e^{\ln x}$ و بما أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{\ln x}=x$ فإن $f'(x)=\ln'(x)\times x$ من جهة و $f'(x)=1$ $(f(x)=x)$ من جهة ثانية. نستنتج هكذا أن $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

3. جدول تغيرات الدالة " $\ln$ "

x	0 1 $+\infty$
$\ln'(x)$	‖ +
$\ln x$	‖ $-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$



- المنحني (C) الممثل للدالة " $\ln$ " يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta):y=x-1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\ln'(1)=1$ إذن $\lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$ أو $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

نتيجة: الدالة $h\mapsto h$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $h\mapsto\ln(1+h)$ بجوار 0 .

أي من أجل h قريب من 0 لدينا : $\ln(1+h)\approx h$.

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

2. عين الدالة f'. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

3. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

الحل:

1. نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}(-\ln x)=+\infty$.

لدينا $f(x)=\ln x\left[(\ln x)-1\right]$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

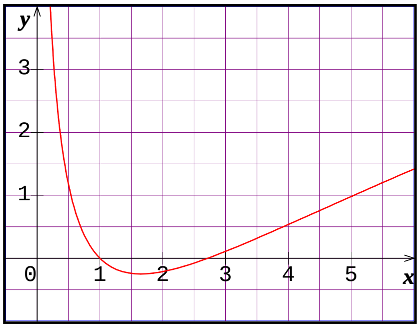
2. بما أن الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(2\ln x-1)$. بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(2\ln x-1)$. لدينا $2\ln x-1\geq0$ تعني $\ln x\geq\frac{1}{2}$ أي $x\geq e^{\frac{1}{2}}$ ومنه:

- من أجل كل x من $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$، $f'(x)\leq0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$.
- من أجل كل x من $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$، $f'(x)\geq0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

3. باستعمال قيم مساعدة نحصل على التمثيل البياني للدالة f.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	-	0	+	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

x	$f(x)$
$-0,5$	
1	
e	
3	
4	
5	



تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x+2)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

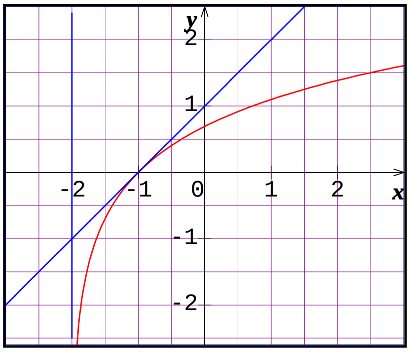
عين نقطة (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$. أرسم (C_f) وهذا المماس.

الحل: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x+2}$.

يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x موازيا لـ $(\Delta):y=x$ لما يكون $f'(x)=1$ أي $\frac{1}{x+2}=1$ و منه $x=-1$ مع $f(-1)=0$.

معادلة المماس عند النقطة $A(-1;0)$ هي: $y=x+1$.

(C_f) هو صورة منحنى الدالة" $\ln$ " بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.



دالة اللوغاريتم العشري

1. دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\log$ " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظة: $\log 1 = 0$ و $\log 10 = 1$.

2. خواص

خاصية1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log(ab) = \log a + \log b$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان من $]0;+\infty[$. لدينا:

$$\log(ab) = \frac{\ln(ab)}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} + \frac{\ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$$

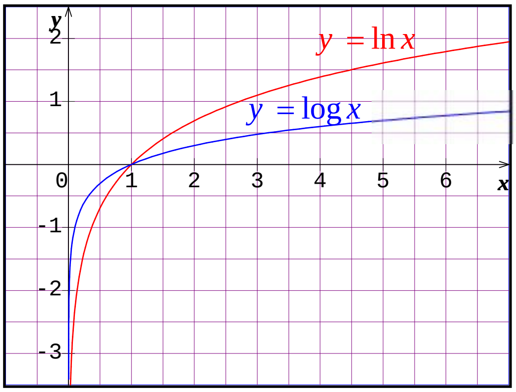
نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة " $\ln$ " تبقى محققة من قبل الدالة " $\log$ " ومنه:

1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(a^n) = n\log a$.

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(10^n) = n$ لأن $\log 10 = 1$.

خاصية2: الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.



البرهان: من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\log x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$

و بما أن $\ln 10 > 0$ فإن للدالتين " $\log$ " و " $\ln$ " نفس اتجاه التغيرات.و بما أن الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

يستنتج التمثيل البياني للدالة " $\log$ " انطلاقا من التمثيل البياني للدالة " $\ln$ ".

نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \le x \le 10^{n+1}$ فإن $n \le \log x \le n+1$

مثال:

نعتبر العدد الحقيقي x بحيث $x = 3{,}87 \times 10^7$.

لدينا $10^7 < x < 10^8$ و منه $\log 10^7 < \log x < \log 10^8$

نجد هكذا أن $7 < \log x < 8$

ملاحظة:

لدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة و هامة في مختلف المواد و بصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء و الجغرافيا.

تمرين محلول1: نعتبر العدد الطبيعي n حيث: $n = 3^{10518}$

1. عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.

2. استنتج الحصر التالي: $10^{5018} \leq n < 10^{5019}$.

3. حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n.

الحل:

قدرة ذاكرة الحاسبات لا تسمح باعتبار أعداد كبيرة جدا بقدر العدد n.

1. لدينا $\log\left(3^{10518}\right) = 10518\log 3$. تعطي الحاسبة:

$E\left(10518\log 3\right) = 5018$.

2. من $E\left(\log n\right) = 5018$ نستنتج الحصر: $5018 \leq \log n < 5019$

و يمكن كتابة هذا الحصر كما يلي: $\log\left(10^{5018}\right) \leq \log n < \log\left(10^{5019}\right)$

و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $10^{5018} \leq n < 10^{5019}$.

3. يثبت الحصر السابق أن الكتابة العشرية للعدد n تتكون من 5019 رقما.

تمرين محلول2: التركيز المولي (المولارية) بشوارد H^+ لمحلول و الذي نرمز إليه بـ $\left[H^+\right]$ هو عدد مولات H^+ في 1 لتر من هذا المحلول. نعبر غالبا عن هذا التركيز بأس عشري سالب: $\left[H^+\right] = 10^{-pH}$ إلا أنه يفضل استعمال pH المعرف بالعلاقة: $pH = -\log\left[H^+\right]$.

1. ما قيمة pH محلول يحتوي على $5\times10^{-8}\ moles$ من شوارد H^+ في اللتر الواحد ؟

2. ما هو التركيز المولي بشوارد H^+ لمحلول متعادل $\left(pH = 7\right)$ ؟

الحل:

1. لدينا $\left[H^+\right] = 5\times10^{-8}$ و منه $pH = -\log\left[5\times10^{-8}\right]$ أي $pH = -\left[\log 5 + \log\left(10^{-8}\right)\right]$

و بالتالي: $pH = -\log 5 + 8$. نجد هكذا: $pH \approx 7{,}3$.

2. $\left(pH = 7\right)$ يعني $-\log\left[H^+\right] = 7$ أي $\log\left[H^+\right] = -7$ و منه $\left[H^+\right] = 10^{-7}\ moles$.

تمرين محلول3: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$\log x = 2\ \ (1)$ $\qquad$ $\log x \leq -4\ \ (2)$ $\qquad$ $\log x > 3\ \ (3)$

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x = 2$ تعني $\log x = \log\left(10^2\right)$ أي $x = 10^2$. إذن مجموعة الحلول هي: $S = \left\{10^2\right\}$.

2. تكون المتراجحة (2) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x \leq -4$ تعني $\log x \leq \log\left(10^{-4}\right)$ و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

فإن $x \leq 10^{-4}$. إذن مجموعة الحلول هي: $S = \left]0;10^{-4}\right]$.

3. تكون المتراجحة (3) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x > 3$ تعني $\log x > \log\left(10^3\right)$ و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $x > 10^3$.

إذن مجموعة الحلول هي: $S = \left]10^3;+\infty\right[$.

الدرس

دراسة الدالة $\ln\circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\ln\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty$ أي $\lim_{x\to 2}f(x)=-\infty$
- لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$ أي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $u(x)=\frac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على I و علما ان الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة المركبة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=u'(x)\times(\ln)'[u(x)]=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}$

أي من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

مثال: * مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ هي $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

* مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\ln(e^x+1)$ هي $g'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)$

أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا من جهة: $\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)=2$ و بما أن $\lim\limits_{X\to2}\ln X=\ln 2$ فإن $\lim\limits_{x\to1}\ln(x^2+1)=\ln 2$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to1}\ln(x^2-1)=-\infty$

نستنتج مما سبق أن $\lim\limits_{x\to1}\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\right]=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$. لدينا إذن حالة عدم التعيين.

من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$. بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=1$ و علما أن $\lim\limits_{X\to1}\ln X=0$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أحسب $f'(x)$

2. عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

الحل:

1.من أجل كل x من $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$، $f'(x)=1+3\times\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{2x+5}{2x-1}$.

2.لدينا: $f(1)=1$ و $f'(1)=7$. لدينا $(\Delta):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(\Delta):y=7x-6$.

تمرين محلول3: جدول التغيرات المقابل هو دالة u

استنتج جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $]-3;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\ln[u(x)]$

x	-3	1	$+\infty$
$u(x)$	3 ↘	e	↗ $+\infty$

الحل: نلاحظ من جدول تغيرات الدالة u أنه من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $u(x)\geq 0$ و منه فالدالة u موجبة تماما على المجال $]-3;+\infty[$. إذن للدالتين u و $f=\ln\circ u$ نفس مجموعة التعريف. نعلم بالإضافة إلى ذلك أن لهما نفس اتجاه التغير. لدينا $f(-3)=\ln[u(-3)]=\ln 3$ و $f(1)=\ln[u(1)]=\ln e=1$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[u(x)]=+\infty$

x	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	$\ln 3$ ↘	1	↗ $+\infty$

الدوال $x \mapsto e^{-\mathrm{a}x}$ حيث $\mathrm{a} > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a، نعتبر الدوال f_{a} المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_{\mathrm{a}}(x) = e^{-\mathrm{a}x}$$

نرمز بـ (C_{a}) إلى المنحنيات الممثلة للدوال f_{a} في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة f_{a} عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال f_{a} ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (C_{a}) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_{a}) و $(C_{\mathrm{a}'})$ من أجل عددين حقيقيين a و a' حيث $0 < \mathrm{a} < \mathrm{a}'$.

الدوال $x \mapsto e^{-\mathrm{a}x^2}$ حيث $\mathrm{a} > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a، نعتبر الدوال g_{a} المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

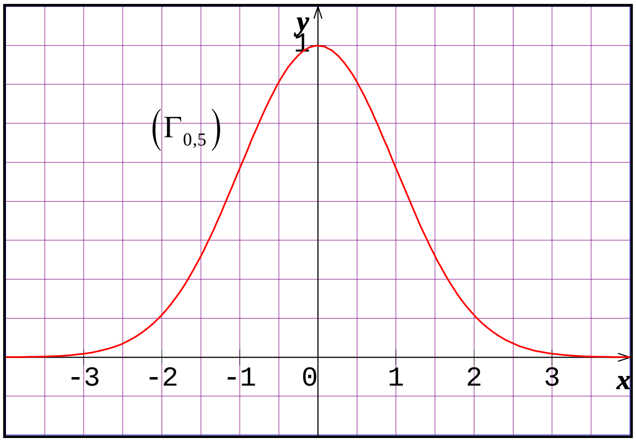
$$g_{\mathrm{a}}(x) = e^{-\mathrm{a}x^2}$$

نرمز بـ (Γ_{a}) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_{a} في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_{a} عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_{a} ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (Γ_{a}) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_{a}) و $(\Gamma_{\mathrm{a}'})$ من أجل عددين حقيقيين a و a' حيث $0 < \mathrm{a} < \mathrm{a}'$.

ملاحظة: تسمى المنحنيات (Γ_{a}) بمنحنيات غوص $(Gauss)$ و يتم استعمالها في الاحتمالات و الإحصاء

و لعل أكثرها استعمالا هو المنحني $(\Gamma_{0,5})$ ذو المعادلة $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ و الذي يأخذ شكلا ناقوسيا.



كارل فريديريك غوص

1777 م – 1855 م

المعادلة التفاضلية من الشكل $y'=ay+b$

حل المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هو تعيين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=af(x)+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$.

ملاحظة: العديد من المسائل في العلوم التجريبية، الاقتصاد، الكهرباء و الميكانيك تؤدي إلى دراسة هذا النوع من المعادلات التفاضلية و التي غالبا ما نكتبها على الشكل: $\dfrac{dy}{dx}=ay+b$

1. المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$

مبرهنة: a عدد حقيقي غير معدوم.
الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

البرهان: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E)\quad y'=ay$ حيث $a\neq 0$

- أثبت أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي هي حل للمعادلة التفاضلية (E).
- نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E). أثبت أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=e^{-ax}g(x)$ دالة ثابتة. استنتج أن $g(x)=Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $3y'-2y=0$.

2. المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع a غير معدوم.
الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

البرهان: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E')\quad y'=ay+b$ حيث $a\neq 0$

- أثبت أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي كيفي هي حل للمعادلة (E').
- نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E'). لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=g(x)+\dfrac{b}{a}$
  - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $h'(x)=ah(x)$.
  - استنتج من مبرهنة الجزء 1 عبارة $h(x)$ و من ثم عبارة $g(x)$.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y'-2y=3$.

خاصية: من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية $(x_0;y_0)$، المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تقبل حلا وحيدا f معرفة على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرط: $f(x_0)=y_0$.

البرهان: إذا كانت $f(x)=Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ بين أن $C=e^{-ax_0}\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)$.

تطبيق: نعتبر المعادلة التفاضلية $(1)\quad 2y'+y=1$

1. حل المعادلة (1),
2. عين الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(-1)=2$.
3. أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم في معلم متعامد و متجانس تمثيلها البياني.

دالتا تجب و جيب الزائديتان

تعريف: نسمي الدالة تجب الزائدية و الدالة جيب الزائدية الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ و اللتين نرمز إليهما على التوالي بـ ch و sh حيث:

$$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

1. دراسة الدالة ch

- بين أن الدالة ch دالة زوجية.
- أدرس نهاية الدالة ch عند $+\infty$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة ch على المجال $[0;+\infty[$.شكل جدول تغيراتها.

2. دراسة الدالة sh

- بين أن الدالة sh دالة فردية.
- أدرس نهاية الدالة sh عند $+\infty$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة sh على المجال $[0;+\infty[$.شكل جدول تغيراتها.

3. التمثيلات البيانية

ليكن، في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$، (C_c) و (C_s) التمثيلين البيانيين للدالتين ch و sh على الترتيب.

- أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_c) و (C_s).
- أدرس نهاية الدالة $f:x\mapsto ch(x)-sh(x)$ عند $+\infty$. ما ذا تستنتج ؟

تعريف: القول عن منحنيين (C_f) و (C_g) ممثلين على التوالي لدالتين f و g أنهما متقاربان عند $+\infty$ $(-\infty)$ يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0\right)$.

- أرسم في نفس المعلم المنحنيين (C_c) و (C_s).

4. دساتير

- بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$ch(a+b)=ch(a)ch(b)+sh(a)sh(b)$$
$$sh(a+b)=sh(a)ch(b)+sh(b)ch(a)$$

- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا:

$$ch(2a)=ch^2(a)+sh^2(a) \quad \text{و} \quad sh(2a)=2sh(a)ch(a)$$

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch^2(a)-sh^2(a)=1$
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch(2a)=2ch^2(a)-1$
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch(2a)=2sh^2(a)+1$

التمثيل البياني لدوال مرفقة بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

1. بالنسبة لكل دالة من الدوال التالية اشرح كيف يتم الحصول على منحنييها البياني (C) انطلاقا من التمثيل البياني (Γ) للدالة اللوغاريتمية النيبيرية ثم أرسم (C).

أ) $f(x)=1+\ln x$ ب) $g(x)=-\ln x$

جـ) $h(x)=\ln(x+2)$ د) $k(x)=1+\ln(x-1)$

2. نعتبر الدالتين ¨ و · المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$¨(x)=\ln(|x|)$ و $·(x)=|\ln(|x|)|$

نرمز إلى منحنييهما البيانيين على التوالي بـ $(C_{¨})$ و $(C_{.})$.

- بين أن المنحني $(C_{¨})$ متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب ثم أرسمه.
- أرسم المنحني $(C_{.})$ انطلاقا من المنحني $(C_{¨})$.

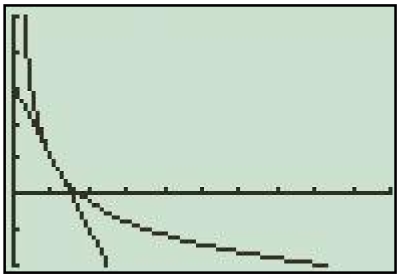
دراسة دالة تتضمن عبارتها اللوغاريتم النيبيري

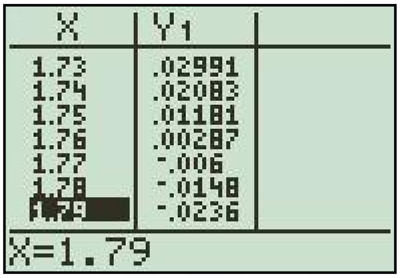
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا ~. تحقق أن $1<~<2$.
4. باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا للعدد ~ سعته $0,01$.
5. ليكن (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 1.
   - عين معادلة للمماس (Δ) و أكتبها على الشكل: $y=ax+b$.
   - أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=f(x)-(ax+b)$.
   - استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المماس (Δ).
6. ارسم المماس (Δ) و المنحني (C).





موضوع محلول

تمرين : بكالوريا

I. f و g دالتان معرفتان على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln(1+x)-x \quad \text{و} \quad g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

1. ادرس تغيرات كل f و g على $[0;+\infty[$.

2. استنتج أنه من أجل كل $x\ge 0$: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$

II. نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفة كما يلي: $u_1=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3. نضع $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$

و $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}$

باستعمال الجزء I ، بين أن: $S_n-\frac{1}{2}T_n\le\ln u_n\le S_n$

4. احسب S_n و T_n بدلالة n. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$

5. **أ-** بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة ، لتكن ℓ نهايتها.

جـ- نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $v_n\le w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ "

• بين إذن أن: $\frac{5}{6}\le\ln\ell\le1$. استنتج حصرا لـــ ℓ .

حل مختصر

I. 1. لدينا $f'(x)=\frac{-x}{1+x}$ ، الدالة f متناقصة على $[0;+\infty[$ و $f(0)=0$ ، و منه f سالبة ، من جهة أخرى $g'(x)=\frac{x^2}{1+x}$ ، إذن الدالة g متزايدة على $[0;+\infty[$ و $g(0)=0$ ، ومنه g موجبة.

2. من f سالبة نستنتج أن $\ln(1+x)\le x$ و من g موجبة نستنتج أن: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)$ و بالتالي $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$

II. 3. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\le\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2}\le\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\le\frac{1}{2^2}$

و $\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^3}\le\ln\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\le\frac{1}{2^3}$ ... $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n}\le\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\le\frac{1}{2^n}$

بجمع هذه المتباينات طرفا إلى طرف نحصل على $S_n-\frac{1}{2}T_n\le\ln u_n\le S_n$

4. $S_n=1-\frac{1}{2^n}$ و $T_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{3}$

5. أ- $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ و منه (u_n) متزايدة تماما.

ب- $\ln u_n\le S_n$ و منه $u_n\le e^{S_n}$ و لكن S_n محدودة من الأعلى بـ 1 بالتالي $u_n\le e$

إذن (u_n) متقاربة و تتقارب نحو نهاية ℓ .

جـ- ℓ موجب و $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\ell$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n-\frac{1}{2}T_n\right)\le\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ و منه $\frac{5}{6}\le\ln\ell\le1$ أي $e^{\frac{5}{6}}\le\ell\le1$

تعاليق

• f' سالبة على $[0;+\infty[$

• g' موجبة على $[0;+\infty[$

II. 1. و **2** نستعمل قاعدة البرهان بالتراجع.

4. S_n مجموع n حدا لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $\frac{1}{2}$.

T_n مجموع n حدا لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الأول $\frac{1}{4}$.

• $u_n>0$

• (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى

• الدالة ln مستمرة على $]0;+\infty[$

موضوع موجه

تنبيه

عندما نريد معرفة إشارة دالة نلجأ أحيانا إلى دراسة تغيراتها دون أن نحسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها كما هو الشأن في السؤال1 من التمرين. الهدف هنا هو توظيف هذه الإشارة لدراسة تغيرات دالة أخرى و هي الدالة المعرفة في السؤال2 من التمرين.

تمرين:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $g(x)=(1-x)e^{x}-1$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها (لا يطلب حساب النهايات).

ب-استنتج إشارة $g(x)$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}\leq\dfrac{1}{1-x}$

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $f(x)=e^{x}+\ln(1-x)$

أ- اشرح لماذا الدالة f معرفة على $]-\infty;1[$؟

ب- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند1 .

جـ- ادرس تغيرات الدالة f. (يمكن استعمال نتائج السؤال1)

د- ارسم بدقة المنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

توجيهات

1. **أ-** طبق عملية مشتق جداء دالتين.

ب- لمعرفة إشارة $g(x)$ ليس من الضروري حساب نهايات g عند $-\infty$ و عند1.

و لا تنس تحديد القيم الحدية للدالة g .

2. **أ-** الدالة $\ln$ معرفة على $]0;+\infty[$.

3. **جـ -** إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة $g(x)$ على $]-\infty;1[$.

د – ارسم المستقيمات المقاربة في حالة وجودها و أبرز القيم الحدية .

تمارين تطبيقية

1 ـ الدالة الأسية

1 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف الدالة f للمتغير الحقيقي x :

1) $f(x)=e^{-x}$ ؛ 2) $f(x)=e^{x^2+x}$ ؛

3) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ؛ 4) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ ؛

5) $f(x)=\dfrac{1}{xe^{x}}$ ؛ 6) $f(x)=e^{x}-e^{-x}$.

2 بسط العبارات التاية:

1) $\left(e^{x}\right)^{3}\times e^{-5x}$ ، 2) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{-2x}}$ ، 3) $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{2x}}$

3 بين من أجل كل عدد حقيقي x ما يلي:

1) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ 2) $\dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}}=e^{-x}-e^{-2x}$

3) $\dfrac{e^{4x}+1}{e^{2x}}=(e^{x}+e^{-x})^{2}$ 4) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

4 u متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n=\dfrac{e^{n-1}}{e^{n}}$

- بين أن u متناقصة تماما.

5 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{2x}=1$ ، 2) $e^{-5x}=e$ ، 3) $e^{x}=e^{-2x}$

6 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التاليتين:

1) $e^{-x^2}=\dfrac{1}{e}$ 2) $e^{x+3}=e^{\frac{4}{x}}$

7 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{x^2}=e^{-3(x+1)}$ ، 2) $e^{\frac{x+4}{6-x}}=e^{\frac{1}{x}}$

3) $e^{2x+1}-(e^{x})^{3}=0$.

8 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{3x}\le 1$ ، 2) $e^{x}>e^{2}$ ، 3) $e^{x}<e^{-2x}$

9 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{2x^2}\le e^{5x+3}$ 2) $e^{x+1}>e^{-\frac{2}{x}}$ ،

3) $e^{x^2}>\left(e^{3}\right)^{4}e^{-x}$ 4) $e^{x-x^2}\ge 1$

10 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة و المتراجحة التاليتين:

1) $\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)=0$

2) $\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)>0$

2 ـ الدوال الأسية $x\mapsto e^{kx}$

11 في كل حالة من الحالات التالية، عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

1. $f'=3f$ و $f(0)=1$
2. $f'=-f$ و $f(0)=1$
3. $f'=\dfrac{1}{2}f$ و $f(0)=1$

12 f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$f'=kf$ و $f(0)=\alpha$

مع k و α عددان حقيقيان و $\alpha\neq 0$

لتكن الدالة g المعرفة بـــ: $g=\dfrac{1}{\alpha}f$

1. تحقق أن $g'=kg$ و $g(0)=1$
2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=\alpha\exp(kx)$

13 في كل حالة من الحالات التالية، عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

1. $f'=-6f$ و $f(0)=-1$
2. $f'=-2f$ و $f(0)=\dfrac{1}{2}$
3. $f'=\sqrt{2}f$ و $f(0)=2$

14 f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$f'=2f$ و $f(0)=1$.

بتطبيق طريقة أولر أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لـــ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;2]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f باختيار خطوة h حيث:

1) $h=0,2$ ، 2) $h=0,1$

15 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و غير معدومة حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x+y)\ f(x)\times f(y)$

1. أ- بين أن $f(0)=1$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)\times f(-x)=1$

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$$

ب - استنتج إشارة الدالة f .

16 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x+y)\ f(x)\times f(y)$

1. أ - من أجل كل عدد حقيقي x، عبر عن $f(2x)$ ، $f(3x)$ ، $f(4x)$ بدلالة $f(x)$

ب - من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، خمّن عبارة $f(nx)$ بدلالة $f(x)$. نقبل هذه النتيجة فيما يلي.

2. نضع $k=f(1)$. بين أنه أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

أ) $f(n)=k^n$ ، ب) $\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n=k$

• استنتج $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{1}{4}\right)$ بدلالة k .

3 - دراسة الدالة الأسية

17 ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

1) $f(x)=e^{-x}$ 2) $f(x)=2e^{2x}$

3) $f(x)=e^{x}+e^{-x}$ 4) $f(x)=x+e^{2x}$

18 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=1+e^{x}+e^{2x}$

ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

19 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-e^{x}$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. أ - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)=e^{2x}\left(1-e^{-x}\right)$$

ب - استنتج نهاية f عند $+\infty$.

• في التمارين من **20** إلى **23** ادرس نهاية الدالة f عند a حيث a يمثل 0 أو $-\infty$ أو $+\infty$:

20 $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$ ، عند $-\infty$ و عند $+\infty$

21 $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{2x}$ ، عند 0

22 $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(e^{3x}-1\right)$ ، عند 0 و عند $+\infty$.

23 $f(x)=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ ، عند $-\infty$ و عند $+\infty$

(يمكنك وضع $X=\dfrac{1}{x}$)

24 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{2x}}{x}$

1. اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=e^{x}\times g(x)$.

2. استنتج نهاية الدالة f عند 0.

25 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

26 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=x-\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. بين أن المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لمنحني الدالة f عند $+\infty$.

3. بين أن الدالة f فردية.

4. أ - استنتج $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب - استنتج أن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

27 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x+1-e^{-x}$

1. بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x+1$ مقارب للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

2. ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى D .

28 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-x+2+3e^{-2x}$

بين أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

• في التمارين من **29** إلى **36** ، احسب الدالة المشتقة f' للدالة f على المجال I .

29 $f(x)=xe^{x}$ ، $I=\mathbb{R}$

30 $f(x)=(2x-3)e^{x}$ ، $I=\mathbb{R}$

31 $f(x)=\left(x^{2}+x+1\right)e^{x}$ ، $I=\mathbb{R}$

32 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ ، $I=\mathbb{R}^*$

33 $f(x)=\dfrac{3e^x-2}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

34 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-x}$ ، $I=\mathbb{R}$

35 $f(x)=(1+\cos x)e^x$ ، $I=\mathbb{R}$

36 $f(x)=(e^x-1)(e^x+2)$ ، $I=\mathbb{R}$

• في التمارين من **37** إلى **39** ، احسب الدالة المشتقة f' للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$.

37 1) $f(x)=e^{2x+3}$ 2) $f(x)=(-x-1)e^{-x}$

38 1) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{x}{2}}}$ 2) $f(x)=(x^2-1)e^{2x}$

39 1) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ 2) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

مساعدة: الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على مجموعة قابلية اشتقاق الدالة u و دالتها المشتقة هي: $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

40 باستعمال التقريب التآلفي لـــ e^h من أجل h قريب من الصفر ، أعط قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية:

1) $e^{0,1}$ 2) $\dfrac{1}{e^{0,002}}$ 3) $\dfrac{e^{1,999}}{e^2}$

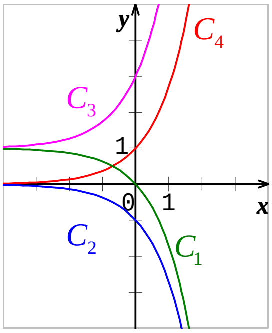
41 1. ارسم في معلم متعامد و متجانس المنحني (C) الممثل للدالة $f:x\mapsto e^x$.

2. استنتج رسم منحنيات الدوال التالية:

أ) $f_1:x\mapsto e^x+1$ ب) $f_2:x\mapsto -e^x$

ج) $f_3:x\mapsto e^x-2$ د) $f_4:x\mapsto |e^x-2|$

42 إليك التمثيل البياني لأربعة منحنيات في معلم متعامد و متجانس



ارفق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني:

$f:x\mapsto e^x$ ، $g:x\mapsto -e^x$ ،

$h:x\mapsto 1-e^x$ ، $k:x\mapsto 1+2e^x$

43 f :دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+1+e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة f .
2. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. أنشئ في معلم متعامد التمثيل البياني للدالة f .

44 f :دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{-x}$$

1. أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2. أ- بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة f في معلم يقبل مستقيما مقاربا D عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ب- ادرس وضعية المحني (C) بالنسبة للمستقيم D .

3. أرسم المستقيم D و المحني (C).

45 f :دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$

1. بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.
2. عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
3. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها.
4. شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

46 f :دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{4e^x+3}{2(e^x+1)}$

و (C) المنحني الممثل لها في معلم

1. لماذا المستقيمان Δ و D اللذان معادلتاهما على الترتيب $y=\dfrac{3}{2}$ و $y=2$ مقاربان للمنحني (C)؟

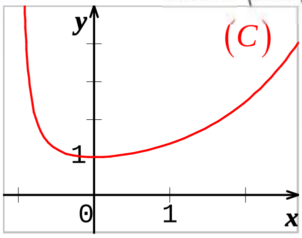
2. أ- احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

ب- ادرس تغيرات f .

ج- ارسم Δ ، D و (C).

47 f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$

و (C) المنحني الممثل لها في معلم متعامد.



(انظر الشكل المقابل).

1. a عدد حقيقي من $]-1;+\infty[$. اكتب معادلة المماس T_a للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها a.
2. بين أنه توجد قيمتين لـــ a بحيث يكون المماس T_a يشمل مبدأ المعلم .

48 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-x}-x-2$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. بين أن المنحي الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.
4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا ~ حيث $-0,45<\sim<-0,44$.
5. استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

49 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة f .

ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.فسر النتائج هندسيا.

2) بين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C) .

3) عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة A .

4) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

أ) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g .

ج) استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

د) استنتج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم T .

5) ارسم T و (C) .

50 إليك نص تمرين و الحل المقترح من قبل تلميذ.

أعد صياغة هذا الحل آخذاَ بعين الاعتبار ملاحظات المصحح.

التمرين: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-2e^x$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب - شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. ارسم في معلم متعامد ومتجانس منحنى الدالة f .

الحل المقترح:

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

علل هذه النتيجة

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ اذن $f(x)=e^x(e^x-2)$

2) أ- من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=2e^{2x}-2e^x$

$=2e^x(e^x-1)$

اذن: متزايدة على $[0;+\infty[$

ومتناقصة على $]-\infty;0]$

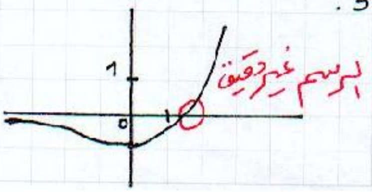
جوّز اشارة $f'(x)$

ب)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	?	$\searrow$	?	$\nearrow$	?

هذا الجدول غير كامل

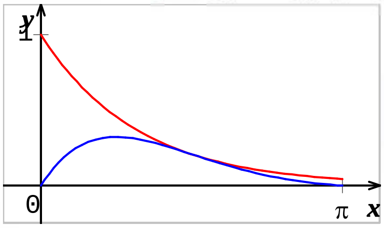
3.



51 f و g دالتان معرفتان على $[0;®]$ كما يلي:

$f(x)=e^{-x}\sin x$ و $g(x)=e^{-x}$

1. في الشكل الموالي و باستعمال راسم منحنيات مثلنا المنحنيين البيانيين للدالتين f و g .



• بين أن المنحنيين يشتركان في نقطة A .

2.بين أن المنحنيين يقبلان في النقطة A مماسا مشتركا.

4 ـ الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

• في التمارين من 52 إلى 56 عين مجموعة تعريف الدالة f للمتغير الحقيقي x :

52 1) $f : x \mapsto \ln(x+1)$

2) $f : x \mapsto \ln(-2x+3)$

3) $f : x \mapsto 2\ln(x^2+1)$

4) $f : x \mapsto \ln|x|$.

53 1) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

2) $f : x \mapsto \ln(x^2-4)$

3) $f : x \mapsto \ln(x+1)-\ln(x-2)$

4) $f : x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$.

54 1) $f : x \mapsto \ln\sqrt{2-3x}$ ؛ 2) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{\ln x}$ ؛ 4) $f : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$.

55 1) $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ ؛ 2) $f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$ ؛

3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}-\ln x$ ؛ 4) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

56 1) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x-1}$ ؛ 2) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2\ln x+1}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x}$ ؛ 4) $f : x \mapsto \ln|x+1|-\ln|x|$.

57 هل الدالتان f و g المعرفتان على $]0;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\ln(x+1)-\ln x$ و $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

متساويتين؟

58 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ) $\ln x = 2$ ، ب) $\ln x = -3$ ،

ج) $7\ln x = 2$ ، د) $\ln x + \ln 3 = 0$

59 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(2x-3)=\ln(x+4)$ ؛ 2) $\ln(x^2+x)=1$

3) $\ln|1-x|=\ln 3$ ؛ 4) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=-1$.

60 نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x حيث:

$$P(x)=-2x^3+3x^2+11x-6$$

1) تحقق من أن $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

3) استنتج مجموعة حلول المعادلة :

$$-2(\ln x)^3+3(\ln x)^2+11\ln x-6=0$$

4) $-2e^{3x}+3e^{2x}+11e^x-6=0$

61 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\ln x<1$ ؛ 2) $\ln 2x>-1$ ؛

3) $\ln(2x+3)<5$ ؛ 4) $\ln(1-x)\le 2$ ؛

5) $\ln x>\ln(2x-1)$ ؛ 6) $x\ln x-\ln x\ge 0$.

5 ـ الخواص الجبرية

62 اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

1) $\ln 14-\ln 7$ ؛ 2) $\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{2}{3}$ ؛

3) $\dfrac{\ln 100}{\ln 10}$ ؛ 4) $\ln(10000)+\ln(0,01)$ ؛

5) $e^{\ln 5}+e^{-\ln 3}$ ؛ 6) $e^{1+\ln 2}$ ؛ 7) $e^{-2\ln 3}$.

63 بسط ما يلي :

• $A=\ln e^3-\ln e^2$ • $B=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$

• $C=\ln 2+\ln(8e)-\ln\left(4e^2\right)$

• $D=\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)^2-\ln^2\left(\dfrac{1}{e}\right)$

64 اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

• $A=3\ln 2-\ln 5+\dfrac{1}{2}\ln 8$

• $B=2\ln(0,1)-3\ln(0,01)+\ln 2$

• $C=2\ln(100)-\ln\left(\dfrac{1}{10}\right)$

65 اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

• $A=\ln a-\ln b+2\ln c$

• $B=\dfrac{1}{2}\ln a-\dfrac{3}{2}\ln b+\ln\dfrac{a}{b}$

• $C=\ln(a+1)-\frac{1}{2}\ln b+\frac{3}{2}\ln(a+b)$

66 اكتب على شكل مجموع أو فرق ما يلي :

• $A=\ln(1400)$ • $B=\ln(2500000)$

67 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $2\ln(x-3)=\ln 4$

2) $\ln x+\ln(x-1)=\ln 2+\ln 3$

3) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

4) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

5) $\ln x+\ln(4-x)=\ln(2x-1)+\ln 3$

6) $\ln(x+1)=-1+\ln(x-1)$

68 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$

2) $\ln(x^2-2x)>\ln(4x-5)$

3) $\ln x+\ln(x+1)\le\ln(x^2-2x+2)$

4) $\ln(35-8x)\ge 3\ln 2+\ln(x)^2$

69 ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0;+\infty[$

1) $\ln x-\ln 3$ 2) $(\ln x+1)(\ln x-1)$

3) $\ln x(\ln x-1)$ 4) $2x\ln(1-x)$

5) $-x^2\ln(x+1)$

70 نعتبر كثير الحدود p للمتغير الحقيقي x حيث:

$$p(x)=x^4-25x^2+144$$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=0$

2) استنتج حل المعادلتين:

أ) $(\ln x)^4-25(\ln x)^2+144=0$

ب) $[\ln(\ln x)]^4-25[\ln(\ln x)]^2+144=0$

71 نعتبر كثير الحدود $P(x)=4x^2-4x-3$

1) عين جذور $P(x)$.

2) استنتج حل المعادلتين التاليتين:

أ) $4(\ln x)^2-4\ln x-3=0$

ب) $\ln(4x-3)=\ln(x+3)-\ln x$

72 نعتبر كثير الحدود f للمتغير الحقيقي x حيث:

$$f(x)=2x^2-x-1$$

1) عين جذور $f(x)$

2) أ- حل $2(\ln x)^2-\ln x-1$

ب- استنتج مجموعة الحلول في $\mathbb{R}$ للمتراجحة

$$2(\ln x)^2-\ln x-1\le 0$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\ln x+\ln(2x-1)>0$

73 حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية:

1) $\begin{cases}x+y=60\\ \ln x+\ln y=\ln 1000\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+2y=16\\ \ln\frac{x}{y}=-\ln 3\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=169\\ \ln x+\ln y=\ln 60\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^3+y^3=9\\ \ln x+\ln y=\ln 2\end{cases}$

74 بكالوريا

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول t التالية:

$$2t^2-5t+2=0$$

2. حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية: $\begin{cases}2e^{2x}-5e^x+2=0\\ e^x\times e^y=1\end{cases}$

75 بكالوريا

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x التاليتين:

1. $e^{x+2}-e-2e^{-x}=0$

2. $\ln|2x+1|+\ln|x-1|=\ln 2$

76 عين أصغر عدد طبيعي n في الحالات التالية:

أ) $\left(\frac{1}{2}\right)^n\le 0,02$ ب) $0,8^n\le 0,01$

ج) $(1,2)^n\ge 1040$ د) $21000(1+0,035)^n\ge 30000$

77 (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=2$ وأساسها $\frac{3}{2}$

ابتداءً من أية رتبة تكون حدود المتتالية أكبر من 10^5 ؟

6 - دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

78 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

ادرس نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

79 f دالة معرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{\ln x}$$

ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

80 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=2(\ln x)^2-\ln x-3$$

1. ادرس نهاية الدالة f عند 0.
2. من اجل $x>1$، ضع $\ln x$ كعامل مشترك في $f(x)$، ثم عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

• في التمرينين **81** و **82**، احسب النهايات المطلوبة

81 أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\ln x$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln x$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-2\ln x$ ؛ د) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x+5-\ln x$

82 • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3+\ln x}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(x^2)}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)\ln x$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)\ln(-x)$

83 f دالة معرفة على $]e;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

1. بين انه من أجل كل $x>e$ ، $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\ln x}+1}{\frac{1}{\ln x}-1}$
2. عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

84 f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln(\ln(x-1))$$

1. بين لماذا الدالة f معرفة من أجل كل $x>2$ ؟
2. باستعمال نهاية دالة مركبة ، عين نهايات الدالة f عند 2 و عند $+\infty$.

85 احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ ؛

$\lim\limits_{x\to0} 2\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$.

86 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \;;\; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

• في التمرينين **87** و **88** حدد مجموعة التعريف و مجموعة قابلية الاشتقاق ثم احسب المشتقة $f'(x)$ للدوال f المعطاة:

87 • $f(x)=x+\ln x$ • $f(x)=2x^2-\ln(x)$

• $f(x)=-x+\ln 2+\ln x$ • $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

• $f(x)=(\ln x)^2+\ln x-2$ • $f(x)=x\ln x$

• $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ • $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

88 • $f(x)=\ln(-2x-1)$

• $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln(1-x))^2$

• $f(x)=x(2-\ln x^2)$

• $f(x)=\ln(2x^2+x-6)$

• $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

• $f(x)=\dfrac{2x-1+\ln x}{x}$

مساعدة : مشتقة الدالة $f:x\mapsto\ln(u(x))$ هي الدالة

$$f':x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$$

89 تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال D ثم احسب دالتها المشتقة:

1) $f(x)=(\ln x)^2+\ln x$ ، $D=]0;+\infty[$

2) $f(x)=x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}$ ، $D=]0;+\infty[$

3) $f(x)=x\ln|x|-2x+3$ ، $D=]-\infty;0[$

4) $f(x)=-\dfrac{x}{2}+x\ln x$ ، $D=]0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x-1}$ ، $D=]e;+\infty[$

90 في كل حالة من الحالات التالية عين معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ عند النقطة التي فاصلتها x_0 .

1) $f(x)=-x+1+\ln x$ ؛ $x_0=e$

2) $f(x)=x^2-2+3\ln x$ ؛ $x_0=1$

3) $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+\frac{e}{\ln x}\right)$ ؛ $x_0=e$

91 لتكن الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=3\ln(2+x)+x^2-3x$$

بين أن المنحني C الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.

92 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ارسم المنحني C الممثل للدالة $\ln$ ثم استنتج رسم المنحني Γ الممثل للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=2-\ln x$$

- حدّد التحويل الهندسي المستعمل.

2) نفس السؤال من أجل $g(x)=\ln(x-1)+2$ على المجال $]1;+\infty[$.

93 لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=2x+3+\ln x$$

بين أن الدالة f هي مجموع دالتين لهما نفس اتجاه التغير، واستنتج تغيرات f.

94 لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x^2-2+\ln x$$

1. ادرس تغيرات الدالة f بدون حساب المشتقة.
2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f.

95 ادرس تغيرات الدالة f على المجال D وذلك باستعمال اتجاه تغير مركب دالتين:

1) $f(x)=\ln(x-3)$ ؛ $D=]3;+\infty[$

2) $f(x)=\ln(1-x)$ ؛ $D=]-\infty;1[$

3) $f(x)=\ln(2x^2)$ ؛ $D=]0;+\infty[$

4) $f(x)=\ln|x-2|$ ؛ $D=]2;+\infty[$

5) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$ ؛ $D=]2;+\infty[$

• في التمرينين **96** و **97** و في كل حالة من الحالات ادرس تغيرات الدالة f على المجال D باستعمال المشتقة

96 1) $f(x)=-\frac{3}{2}x+\ln(2x)$ ؛ $D=]0;+\infty[$

2) $f(x)=2x-\ln(1-x)$ ؛ $D=]-\infty;1[$

3) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\ln(x-1)$ ؛ $D=]1;+\infty[$

4) $f(x)=2x+\ln x-\ln(x-1)$ ؛ $D=]1;3]$

97 1) $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ؛ $D=]-\infty;0[$

2) $f(x)=x+1+\frac{\ln x}{x}$ ؛ $D=]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$ ؛ $D=]0;+\infty[$

4) $f(x)=\ln(1-x)+\ln(x+5)$ ؛ $D=]-5;1[$

7- دالة اللوغاريتم العشري

98 نعتبر العدد الطبيعي n حيث $n=2^{1234}$

1. عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.
2. استنتج الحصر التالي: $10^{371}\leq n<10^{372}$.
3. حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n.

99 علما أن $\log(3,81)\approx 0,58092$ ، استنتج بدون باستعمال الحاسبة قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية: $\log(381)$ ، $\log(0,381)$ ، $\log(3,81\times10^{-3})$.

100 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\log x=5$ ؛ 2) $\log x=-3$ ؛ 3) $\log x=0,01$

101 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\log x>4$ 2) $\log x<-10$

3) $\log x\geq 0,1$ 4) $\log x<\log(1-x)$

7- المعادلات التفاضلية

102 حل المعادلات التفاضلية التالية

1) $y'=3y$ 2) $y'+2y=0$

3) $2y'+5y=0$ 4) $\frac{1}{2}y'=4y$

103 1) حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=0$

2) عين الحل الخاص f الذي يحقق $f(\ln 4)=1$

104 f هي حل المعادلة التفاضلية $2y'+y-5=0$

هل المنحني الممثل للدالة f يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا

معادلته $y=\frac{5}{2}$ ؟

105 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=3e^{-2x}-4$$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة .

106 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2e^{-5x}$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة .

107 نعتبر الدالة m المعرفة على $[0;+\infty[$ التي ترفق بالعدد t ،العدد $m(t)$ حيث $m(t)$ هي كتلة الملح بالغرام المحتواة في محلول ملحي(ماء+ملح)عند اللحظة t بالدقائق

نقبل أن الدالة m هي حل للمعادلة التفاضلية $(E):5y'+y=0$ و أن الشرط الابتدائي هو $m(0)=300$.

1.أ- حل المعادلة (E).

ب- بين أنه من أجل كل $t\in[0;+\infty[$ ، $m(t)=300e^{-\frac{t}{5}}$

2. عين العدد t_0 حيث $m(t_0)=150$.

3.نقبل أنه لا يمكن الكشف عن وجود الملح خلال اللحظة t إلاّ إذا كان $m(t)\le 10^{-2}$.

ابتداء من أية لحظة يكون ممكنا الكشف عن وجود الملح؟

تمارين للتعمق

108 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية

(C) هو التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عين a ، b و c بحيث المنحني (C) يشمل النقطة O و الدالة المشتقة f' تنعدم من أجل $x=\ln\frac{3}{4}$ و المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C).

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$$

أ) • احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C)؟

• احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ (يمكن وضع e^{x} كعامل مشترك)

•ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

ب)حدد نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل.

• عين معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها0.

ج) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C).

د) ارسم (C).

109 الهدف من هذا التمرين إثبات أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

أ- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln x-\sqrt{x}$$

1) احسب $f'(x)$ و بين أن $f'(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

2) استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ (حساب النهايات غير مطلوب)

3) برر إذن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln x<\sqrt{x}$

ب- 1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$:

$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) عين $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$.استنتج $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$

110 نعتبر المعادلتين التفاضليتين:

$$(E_1):y'-2y=0 \quad \text{و} \quad (E_2):y'=y$$

1.أ- حل المعادلتين (E_1) و (E_2).

ب- •عين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) بحيث $f_1'(0)=4$

•عين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) بحيث $f_2(0)=1$.

2.لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2e^{2x}-e^{x}$

أ- ادرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب-استنتج وجود مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلته.

ج- احسب g' مشتقة الدالة g .

د-ادرس إشارة g' ثم شكل جدول تغيرات g.

3. حدد نقط تقاطع المنحني الممثل للدالة g مع محوري الإحداثيات.

4. أنشئ المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد.

111 بكالوريا

الجزء1: نعتبر الدالة f المعرفة على $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\ln(1+2x)$

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

2. عين نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\frac{1}{2}$.

3. نعتبر الدالة g المعرفة على I بـ: $g(x)=f(x)-x$

أ- ادرس تغيرات g على I .

ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين: 0 و حل آخر نرمز له بـــ ~ حيث $~\in[1;2]$

ج- استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x\in I$.

4. بين انه من أجل كل $x\in]0;~[$ ، $f(x)\in]0;~[$

الجزء2: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بـــ: $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\in]0;~[$

2. برهن بالتراجع أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

3. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

112 بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f(x)=\ln(x)\times\ln(1-x);\, x\in]0;1[\end{cases}$$

نرمز بـــ (C) إلى المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس الوحدة: $10cm$

نقبل أن $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim_{x\to 1} f(x)=0$ ، وكذلك النتيجة التالية: من اجل $~>0$ ، $\lim_{x\to 0} x^{~} lnx=0$

1. أ- عين نهاية $\frac{\ln(1-x)}{x}$ عندما يؤول x إلى 0.

ب- استنتج نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما يؤول x إلى 0.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C)؟

2. بين أنه من أجل كل $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$:

$$f\left(\frac{1}{2}-x\right)=f\left(\frac{1}{2}+x\right)$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C)؟

3. لتكن ¨ الدالة f المعرفة على $]0;1[$ كما يلي:

$$¨(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$$

أ- احسب $¨'(x)$ ، ثم بين المساواة التالية:

$$¨''(x)=\frac{2x-1}{x(1-x)}$$

استنتج تغيرات الدالة ' ¨ على المجال $]0;1[$.

ب- بين أن ' ¨ تنعدم عند قيمتين $~_1$ و $~_2$ على $]0;1[$ (لا نريد حساب هاتين القيمتين). أعط إشارة '¨ على $]0;1[$.

ج- عين نهاية $¨(x)$ عندما يؤول x إلى 0 و نهاية $¨(x)$ عندما يؤول x إلى 1. احسب $¨\left(\frac{1}{2}\right)$

• استنتج إشارة $¨(x)$ على المجال $]0;1[$.

4. أ- بين أن $f'(x)$ لها نفس إشارة $¨(x)$ على $]0;1[$.

ب- شكل جدول تغيرات f .

ج- بين أنه من أجل كل $x\in]0;1[$:

$$0<\ln(x)\times\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$$

د- ارسم (C)

113 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x-1}{x}\times\ln x$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x-1+\ln x$$

ب- تحقق أن $g(1)=0$. استنتج حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب- استنتج تغيرات f .

ج- ادرس نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

د- شكل جدول تغيرات f.

3.ارسم على شاشة الآلة الحاسبة ثم على الورقة المنحنى (C).

114 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^x+1\right)$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1.أ- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب-عين الدالة المشتقة للدالة f .

ج-ادرس إشارة $f'(x)$.استنتج تغيرات f .

2.أ- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ب- ارسم المستقيم D والمنحني (C).

3.k عدد حقيقي موجب تماما

ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x}-e^x+1-k=0$

أ) بالحساب. ب) باستعمال تغيرات الدالة f.

115 f دالة معرفة على $]-1;1[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1.أ-عين مشتقة الدالة f .

ب-استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;1[$.

2.أ- ادرس نهايات الدالة f عند1- و عند 1 .

ب-استنتج وجود مستقيمات مقاربة للمنحني (C).

3.أ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب-بين أن مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحني (C).

ج- أنشئ لمنحني (C) و المماس لـــ(C) عند النقطة التي فاصلتها0.

4.أ- انطلاقا من الدراسة السابقة ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي y ، المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا واحدا.

ب-عبر بالحساب ، عن x بدلالة y .

ج- نرمز بـــ(C')إلى المنحني الممثل للدالة.

اشرح لماذا المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=x$ ؟

د-ارسم (C')في نفس المعلم السابق.

116 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1.أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1} \quad \text{و} \quad f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

ب-ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ج-بين أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 اللذين معادلتاهما على الترتيب $y=x+1$ و $y=x-1$ مقاربان لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

د- حدد وضعية المنحني (C)بالنسبة إلى كل من Δ_1 و Δ_2 .

2.أ- بين أن الدالة f فردية.

ب- ادرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$.

3.ارسم Δ_1 ، Δ_2 ، المماس للمنحني (C)عند النقطة التي فاصلتها 0 ، ثم المنحني (C) .

117 بكالوريا

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x^2-2,2x+2,2\ln(x+1)$$

• مثل على شاشة الحاسبة البيانية المنحني البياني للدالة f باختيار النافذة: $-2\le x\le 4$ و $-5\le y\le 5$

• انقل على ورقتك شكل المنحني الذي تحصلت عليه.

2. حسب هذا التمثيل البياني ماذا يمكنك أن تخمن:

أ-بالنسبة لتغيرات الدالة f ؟

ب-بالنسبة لعدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

3.نريد الآن دراسة الدالة f .

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f .

ب- ادرس نهايات الدالة f عند -1 و عند $+\infty$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- استنتج من هذه الدراسة عدد حلول المعادلة: $f(x)=0$.

د- هل نتائج السؤالين 3.أ و 3.ب تؤكد التخمين الذي وضعته في السؤال2؟

4.نريد أن نمثل على شاشة الحاسبة البيانية منحنى الدالة f على المجال $[0,1;0,2]$ لغرض المشاهدة.

أ- ما هي القيم الحدية للدالة f التي تقترحها حتى تكون مطابقة لنتائج السؤال3.ج على نافذة آلتك الحاسبة؟

ب- باستعمال الحاسبة عين قيمة مقربة بالزيادة إلى 10^{-2} للحل الأكبر ~ للمعادلة $f(x)=0$.

118 f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحققان الشروط الثلاثة التالية:

(1) من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$[f(x)]^2-[g(x)]^2=1$$

(2) من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=g'(x)$

(3) $f(0)=1$

1.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)\neq 0$

ب- احسب $g(0)$

2.باستعمال الشرط(1) و تطبيق الاشتقاق ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)=f'(x)$

3.نضع $u=f+g$ و $v=f-g$

أ- احسب $u(0)$ و $v(0)$

ب- بين أن $u'=u$ و $v'=-v$

ج-عين الدالتين u و v .

4.استنتج عبارتي $f(x)$ و $g(x)$.

119 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$

1.أ- ادرس نهاية f عند $+\infty$.

ب- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحني (C).

ج- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم D .

2.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$:

$$f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$$

ب استنتج أنه أجل كل عدد حقيقي $x>0$، $f'(x)>0$

ج- حدّد $f'(0)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

3. أ- ارسم D و المنحني (C).

ب- عين النقطة A من (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم D .

120 **الجزء1:**

1. ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(t)=e^t-t-1$$

ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$؟

2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي t، $e^t\geq t+1$ و $e^t>t$

الجزء2: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2-2\ln(e^x-x)$$

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=x^2-2x-2\ln(1-xe^{-x})$$

ب- نقبل أن $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ ، احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

2. أ- اشرح لماذا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(e^x-x-1)}{e^x-x}$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(نقبل أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$)

3.في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة: $3cm$)، نعتبر القطع المكافئ P الذي معادلته $y=x^2-2x$ و (C) المنحنى الممثل للدالة f .أ- بين أن $f(x)-(x^2-2x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$.

• **عندما يكون** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)-f_2(x)=0$ ، **نقول أن المنحنين الممثلين للدالتين** f_1 **و** f_2 **متقاربان عند** $+\infty$.

ب- ادرس الوضعية النسبية لمنحنيين P و (C).

4.عين معادلة لكل من المماسين D و D' على الترتيب للمنحنيين P و (C) عند النقطة التي فاصلتها0.

5.ارسم في نفس المعلم ، المنحنيين P و (C) و المماسين D و D' .

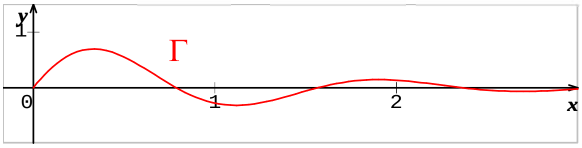
122 بكالوريا

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=e^{-x}\cos(4x)$$

الشكل الموالي هو تمثيلها البياني Γ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$



نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=e^{-x}$

و نرمز بـ C إلى تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$$

ب- استنتج نهاية f عند $+\infty$.

2. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين Γ و C .

3. نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=f\left(n\frac{\text{®}}{2}\right)$

أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و ادرس تقاربها.

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$f'(x)=e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$$

ب - استنتج أن المنحنيين Γ و C لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5.أعط قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس T للمنحنى Γ عند النقطة التي فاصلتها $\frac{\text{®}}{2}$

• أتمم الشكل السابق برسم المماس T و المنحنى C .

مسائل

122 بكالوريا

الجزء1 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=(2x-1)e^{-2x}$$

و نرمز بـ (C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، الوحدة $2cm$.

1. أ-نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}=0$.احسب نهاية f عند $+\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى C ؟

ب - احسب نهاية f عند $-\infty$.

2.احسب $f'(x)$ و ادرس إشارة f على $\mathbb{R}$

3.شكل جدول تغيرات f .

4.أ- عين إحداثيات النقطة A ، نقطة تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل.

ب -ادرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

الجزء2:

1.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f''(x)=4(2x-1)e^{-2x}$$

حيث f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

ب - حل المعادلة $f''(x)=0$

2. لتكن B النقطة من المنحنى (C) التي فاصلتها $\frac{1}{2}$.عين معادلة للمماس T للمنحنى (C) عند B .

3.نريد دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس T، من أجل ذلك نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=f(x)=\left(-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}\right)$$

أ- عين $g'(x)$ و $g''(x)$.

ب- ادرس إشارة $g''(x)$ حسب قيم x .

استنتج اتجاه تغير الدالة g' على $\mathbb{R}$.

ج- استنتج إشارة $g'(x)$ ثم اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

د- عين إذن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس T .

4. في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$، مثل النقطتين A و B ، ثم ارسم المماس T و المنحني (C).

123 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}$$

Γ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1.ادرس شفعية الدالة f .ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني Γ؟

2.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $e^{-x}\leq e^{x}$.

3.أ- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$.

4. نعتبر الدالتين g و h المعرفتان على $[0;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=\frac{1}{e^{x}} \quad \text{و} \quad h(x)=\frac{1}{2e^{x}}$$

في الشكل الموالي مثلنا المنحنيين البيانيين Γ_1 و Γ_2 للدالتين g و h على الترتيب في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

$h(x)\leq f(x)\leq g(x)$.

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيات Γ، Γ_1 و Γ_2؟

انقل الشكل السابق و ارسم في هذا الشكل المنحني Γ محددا مماسه عند النقطة التي فاصلتها 0.

124 **بكالوريا**

الجزء1: نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$u(x)=2x^{3}-1+2\ln|x|$$

1.ادرس تغيرات الدالة u على $\mathbb{R}^*$.

2. ادرس نهايات الدالة u عند 0 و $+\infty$.

3.نعتبر المعادلة $u(x)=0$

أ- بين أن هذه المعادلة تقبل حلا واحدا ~ حيث ~ $\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

ب- أعط حصرا بعددين كسريين للعدد ~ من الشكل $\frac{n}{10}$ و $\frac{n+1}{10}$ حيث n عدد طبيعي.

4.استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الجزء2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=2x-\frac{\ln|x|}{x^{2}}$$

نرمز بـ(C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.ادرس نهايات الدالة f عند 0 ، $-\infty$ و $+\infty$.

(نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^{2}}=0$)

2.احسب $f'(x)$.

3.ادرس اتجاه تغير لدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4.أ- بين أن $f(~)=3~-\frac{1}{2~^{2}}$.

ب- باستعمال حصر ~ في الجزء1 -3) بين أن :

$1,6<f(~)<2,1$ (لا يطلب رسم المنحني (C))

الجزء3: لتكن النقطة $M(x;y)$ و $M'(x';y')$ حيث M' هي نظير M بالنسبة لمحور التراتيب.

1.عين x' و y' بدلالة x و y .

2. أ- بين أنه إذا كانت تتغير على المنحني (C) فإن النقطة M' تتغير على المنحني (Γ) الذي معادلته $y=-2x-\frac{\ln|x|}{x^{2}}$

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (Γ) .

125 بكالوريا

الجزء1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

و نرمز بـِ (C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، الوحدة $2cm$.

1. ادرس شفعية الدالة f.ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C)؟

2.ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وتغيرات f على $[0;+\infty[$.

3.مثل المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الجزء2: نعتبر النقطة A من المستوي إحداثياتها $(1;0)$، نهتم بأصغر مسافة AM حيث M نقطة من المنحنى (C).

1. لتكن M فاصلتها x. عين بدلالة x المسافة AM.

2.نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=(x-1)^{2}+\frac{(e^{x}-e^{-x})^{2}}{2}$$

أ- احسب $g'(x)$

ب-احسب $g''(x)$ حيث g'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة g

• بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$g''(x)=e^{2x}+e^{-2x}+2$$

ج-استنتج تغيرات الدالة g' على $\mathbb{R}$.

د- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\sim$ من المجال $[0;1]$ يحقق $g'(\sim)=0$ ، ثم تحقق أن $0,46<\sim<0,47$

•عين إشارة $g'(x)$ حسب قيم x.

هـ - ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ (لا يطلب حساب النهايات عند $-\infty$ و عند $+\infty$).ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$؟

3.نقبل أن المسافة AM تكون صغرى عند النقطة $M_{\sim}$ من المنحنى (C) التي فاصلتها $\sim$.

مثل النقطة $M_{\sim}$ في الشكل.

4.باستعمال بين أن:

$$\sim-1=-\frac{1}{2}f(2\sim)$$

ثم $g(\sim)=\frac{1}{4}\left[f(2\sim)\right]^{2}+\left[f(\sim)\right]^{2}$

استعمل تغيرات f و النتيجة $0,46<\sim<0,47$ لحصر العدد $g(\sim)$، استنتج حصرا للمسافة $AM_{\sim}$ سعته 2×10^{-2}.

126 بكالوريا

الهدف من هذه المسألة هو دراسة تغيرات الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}}$

الجزء1:

1 .نعتبر الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$$

أ) نقبل أن $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$.استنتج نهاية $g(x)$ لما x يؤول إلى 1.

ب) احسب $g'(x)$ من أجل x ينتمي إلى المجال $]1;+\infty[$.

ج) حل في المجال $]1;+\infty[$ المتراجحة:

$$1-\ln(x-1)>0$$

د) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]1;+\infty[$.

هـ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا $\sim$ في المجال $[e+1;e^{3}+1]$ و ادرس إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]1;\sim[$ و $]\sim;+\infty[$.

2. ¨ هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$¨(x)=\frac{\ln(x^{2}-1)}{x}$$

أ) ادرس نهاية الدالة ¨ عند1.نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}¨(x)=0$

ب) احسب $¨'(x)$ و بين أن إشارة $¨'(x)$ هي نفس إشارة $g(x^{2})$ على المجال $]1;+\infty[$.

ج) بين أن ¨ متزايدة على المجال $\left]1;\sqrt{\sim}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\sqrt{\sim};+\infty\right[$.

الجزء2:

1.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)=¨(e^{x})$$

2.استنتج: أ) نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى 0.

ب) نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

ج) اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $\ln\left(\sqrt{\sim}\right)$.

3.بين من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)\le\frac{2\sqrt{\sim}}{\sim-1}$$

4.انقل الجدول التالي و أتممه معطيا القيم مقربة إلى $0,01$

x	$0,1$	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$f(x)$						

5. مثل بيانيا الدالة f في معلم متعامد حيث وحدة الأطوال $5cm$ على محور الفواصل و $10cm$ على محور التراتيب. نأخذ 10 كقيمة مقربة للعدد ~ .

127 من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما k ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f_k(x)=\ln(e^x+kx)-x$$

نرمز بـــ $\mathscr{C}_k$ إلى منحنى الدالة f_k في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الأطوال $5cm$ على محور الواصل و $10cm$ على محور التراتيب.

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln(x+1)-x$$

أ- ادرس تغيرات الدالة g (لا يطلب حساب النهايات).

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب a ،

$$\ln(a+1)\le a$$

2. أ- احسب $f_1'(x)$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f_1 .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$f_1(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$$

جـ- نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$. عين $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .

3. أ- احسب $f_k'(x)$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f_k .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$$

جـ- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k .

د- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$f_k(x)\le\frac{k}{e}$$

4. حدّد معادلة المماس T_k للمنحني $\mathscr{C}_k$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

5. ليكن p و m عددان حقيقيان موجبان تماما حيث $p<m$ ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathscr{C}_p$ و $\mathscr{C}_m$.

6. ارسم T_1 ، T_2 ، $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$.

128 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=1+x\ln(x+2)$$

نرمز بــ $\mathscr{C}_f$ إلى منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الأطوال $4cm$.

الجزء1: دراسة تغيرات الدالة f

1. أ- f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f و f'' هي دالتها المشتقة الثانية. احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$.

ب- ادرس تغيرات f' على المجال $]-2;+\infty[$.

جـ- عين نهايات f' عند -2 و عند $+\infty$.

2. أ- بين أنه على المجال $]-2;+\infty[$ المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا واحدا ~ ينتمي إلى المجال $[-0,6;-0,5]$ ..

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x .

3. أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-2;+\infty[$.

ب- عين نهايات f عند -2 و عند $+\infty$.

جـ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

الجزء2 :وضعية المنحنى $\mathscr{C}_f$ بالنسبة إلى مماساته.

ليكن x_0 عدد حقيقي من المجال $]-2;+\infty[$. نسمي T_{x_0} المماس لـــ $\mathscr{C}_f$ عند النقطة التي فاصلتها x_0 .

من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$ ، نضع:

$$d(x)=f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$$

1. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-2;+\infty[$ ،

$$d'(x)=f'(x)-f'(x_0)$$

ب- مستعملا تزايد الدالة f' ، أعط إشارة $d'(x)$ حسب قيم x . استنتج تغيرات d على المجال $]-2;+\infty[$.

2. عين الوضعية النسبية لـــ $\mathscr{C}_f$ و T_{x_0} .

الجزء 3: رسم المنحني

1. عين معادلة للمستقيم T_0 ، مماس المنحني $\mathscr{C}_f$ عند النقطة التي فاصلتها 0 ، ارسم T_0 .

2. جد الأعداد الحقيقية x_0 بحيث تكون المماسات تمر بالمبدأ ثم ارسم هذه المستقيمات.

3. ارسم المنحني $\mathscr{C}_f$ من أجل قيم x المحصورة بين -1 و 2 .

نأخذ ~ $\simeq -0,54$ و $f(\text{~})\simeq 0,8$.

اختيار من متعدد

129 اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة لكل سؤال.

.1 المعادلة $e^{2x}-3e^{x}-4=0$ تقبل في $\mathbb{R}$:

1) 0 حلا . 2) حلا واحدا. 3) حلين. 4) حلين على الأكثر

.2 العبارة $-e^{-x}$:

1) لا تكن أبدا سالبة 2) سالبة دائما

3) سالبة إذا كان x موجب 4) سالبة إذا كان x سالب

.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}=$

1) $-\dfrac{1}{2}$ 2) 1 3) 2 4) $+\infty$

.4 المعادلة التفاضلية $y=2y'-1$ تقبل كمجموعة حلول:

1) $x\mapsto ke^{2x}-1$ حيث $k\in\mathbb{R}$

2) $x\mapsto ke^{\frac{1}{2}x}+1$ حيث $k\in\mathbb{R}$

3) $x\mapsto ke^{\frac{1}{2}x}-1$ حيث $k\in\mathbb{R}$

4) $x\mapsto ke^{2x}+\dfrac{1}{2}$ حيث $k\in\mathbb{R}$

130 لكل سؤال عين الإجابة(أو الأجوبة) الصحيحة

.1 لتكن الدوال f ، g و h للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$f(x)=\ln(x-2)$ ، $g(x)=\ln(x^{2}+1)$ ، $h(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

أ) $f(x)$ و $g(x)$ لهما معنى من أجل كل عدد حقيقي x .

ب) $h(x)$ لها معنى إذا كان $x>0$.

ج) $f(3)=0$.

د) $h(e)=e$.

هـ) من أجل كل $x>2$: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ln\dfrac{x-2}{x^{2}+1}$

.2 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

أ) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)=x^{2}+2+2\ln x$

ب) على $]0;+\infty[$ إشارة g' هي إشارة $x-1$.

ج) على $]0;+\infty[$ g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3.

د) f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

هـ) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا ~ حيث $]1;2[\ni$ ~

أصحيح أم خاطئ ؟

131 هل العبارات التالية صحيحة أو خاطئة؟ برّر الجواب

1) الدالة $f:x\mapsto\ln(2-x)$ معرفة على $]2;+\infty[$

2) الدالة $f:x\mapsto\ln(-2x)$ متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

3) إذا كانت $f(x)=\ln(3-3x)$ على $]-\infty;1[$ فإن :

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}$$

4) إذا كانت الدالة f متزايدة تماما و موجبة على مجال D فإن $\ln f$ متناقصة على D .

5) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق و موجبة على مجال D فإن $(\ln|f|)'=-\dfrac{f'}{f}$

6) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x^{2}\ln x$ العدد المشتق للدالة f عند e هو $3e$

132 اذكر دون تبرير إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة.

1) الدالة $\ln$ موجبة تماما على $]1;+\infty[$.

2) الدالة $f:x\mapsto\ln[-x(x+1)]$ معرفة على $]-1;0[$. 3) الدالة $f:x\mapsto\ln(x^{2}-1)$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

4) المعادلة $\ln x^{2}=\ln(3x+4)$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

5) إذا كانت $f(x)=x\ln x$ فإن $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$

6) المتراجحة $1+\ln(2-x)\geq0$ تقبل كمجموعة حلول المجال $]-\infty;2[$.

133 حدّد إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة ، برّر الأجوبة.

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{-x}$.

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\times f(-x)\leq0$

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)+f(x)=e^{-x}$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\leq e^{-1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

5) الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند $x=1$.

6) الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=-y$.

04 التزايد المقارن

الكفاءات المستهدفة

- معرفة و تفسير النهايات الشهيرة الخاصة بالدوال الأسية و اللوغاريتمية.
- حل مشكلات بتوظيف دوال القوى.

مبدأ باريتو

في سنة 1875 م اكتشف باريتو (اقتصادي ايطالي 1848 – 1923) القانون الذي يحمل اسمه من خلال دراسة توزيع مداخيل العائلات بسويسرا كما أسفرت دراسات مماثلة في دول أخرى على أن توزيع المداخيل يخضع لنفس القانون. عدد العائلات N التي مداخيل كل منها r في مجتمع ما هو دالة متناقصة بدلالة r يعبر عنها بعلاقة من الشكل $N=\frac{k}{r^{a}}$ حيث a و k ثابتان موجبان مرتبطان بالمجتمع المدروس.

يمكن تطبيق قانون باريتو مثلا على توزيع المؤسسات حسب عدد عمالها أو على توزيع المراكز الهاتفية حسب عدد المنخرطين.

مساحة جلد حيوان

من الغريب التفكير في حساب مساحة جلد حيوان و هو حي ! لكن يصبح الأمر يسيرا إذا علمت أن لمساحة جلده علاقة بوزنه و هو ما اكتشفه كل من كيبلار ، برودي و ووستال سنة 1947 .إذ أنهم بعد تجارب و دراسات توصلوا الى الدالة التالية التي تربط المساحة A بالسنتيمتر المربع بالوزن P بالغرام:

$A=9,85p^{0,64}$.

1) أدرس تغيرات الدالة $p\mapsto A(p)$.
2) عين $\ln A$ بدلالة $\ln p$ ثم مثل بيانيا الدالة $\ln p\mapsto \ln A(p)$.
3) ما هي نظريا ، مساحة جلد حيوان يزن 750 غراما ؟

نشاط أول

1) تعريف القوى الحقيقية للعدد 3

- ليكن n عددا صحيحا نسبيا.

أكتب العدد $\ln\left(3^n\right)$ بكيفية أخرى ثم استنتج أن $3^n = e^{n\ln 3}$.

الدستور $3^n = e^{n\ln 3}$ يمنحنا فكرة تمديد مفهوم القوى. هذا التمديد يفرض علينا طرح السؤال التالي:

كيف يمكن تعريف 3^x من أجل كل عدد حقيقي x ؟

نضع، تعريفا، من أجل كل عدد حقيقي x، $3^x = e^{x\ln 3}$

- عين، باستعمال حاسبة، المدور إلى 10^{-2} لكل عدد من الأعداد التالية:

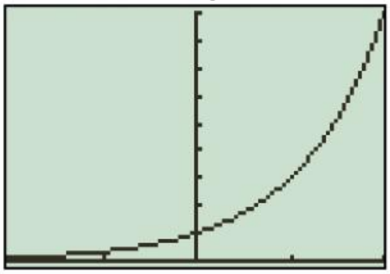
$$3^{\frac{1}{3}} \quad ، \quad 3^e \quad ، \quad 3^{-\frac{2}{5}} \quad ، \quad 3^{\sqrt{2}}$$

2) بعض الدساتير

بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n،

أ) $3^x \times 3^y = 3^{x+y}$ ب) $\left(3^x\right)^n = 3^{nx}$ جـ) $\frac{3^x}{3^y} = 3^{x-y}$

3) دالة جديدة



- أرسم على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto 3^x$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة f.
- عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

تعريف: تسمى الدالة $x \mapsto 3^x$ " الدالة الأسية ذات الأساس 3.

نشاط ثان

1. دراسة الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = x^3$

õ أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

õ أرسم (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

2. المعادلة $x^3 = 3$

õ بين أن المعادلة $x^3 = 3$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال $[0;+\infty[$.

õ باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد ~.

نتيجة: العدد ~ هو إذن العدد الموجب الوحيد الذي يحقق: $~^3 = 3$.

يسمى العدد ~ الجذر التكعيبي للعدد 3 و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[3]{3}$.

تعريف: يمكن تعميم التعريف السابق للحصول على التعريف التالي:

نسمي الجذر التكعيبي للعدد الموجب a العدد الموجب الوحيد الذي مكعبه يساوي a و نرمز غليه بالرمز $\sqrt[3]{a}$.

3. حساب بعض الجذور التكعيبية

- عين الأعداد التالية: $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt[3]{125}$ ، $\sqrt[3]{1000}$ ، $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$.
- عين حصرا سعته 10^{-2} للعددين: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{11}$.
- برهن العلاقات التالية:

أ) $\sqrt[3]{16} = 2 \times \sqrt[3]{2}$ ب) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10}$ جـ) $\dfrac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{3}$.

4. باستعمال قوى حقيقية للعدد 3

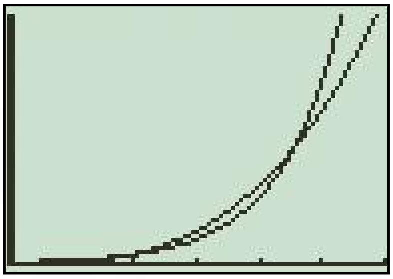
لقد عرفنا في النشاط الأول العدد $3^{\frac{1}{3}}$. بين أن $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$.

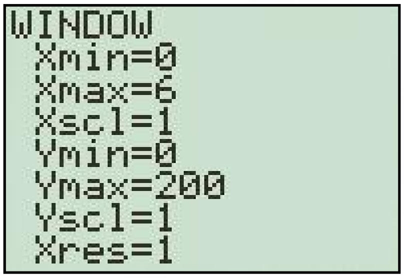
نشاط ثالث

1. أنجز ورقة الحساب الموالية ثم قارن بين الأعداد $\exp(x)$ ، $\ln(x)$ ، x ، x^2 ، .... ، x^{15}.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	exp(x)	ln(x)	x	x^2	x^3	x^4	x^9	x^15
2	0	1	#NOMBRE!	0	1	1	1	1	1
3	20	485165195	2,99573227	20	400	8000	160000	5,12E+11	3,2768E+19
4	40								
5	60								
6	80								
7	100								
8	120								
9	140								
10	160								
11	180								
12	200								

2. رسمنا في ما يلي على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين الممثلين للدالتين $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x^3$





خمن الأوضاع النسبية للمنحنين السابقين من أجل القيم الموجبة للمتغير x. يمكنك تغيير النافذة للحصول على وضعيات أخرى.

3. نعتبر الدوال $x \mapsto x$ ، $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \ln x$

- بعد تمثيل هذه الدوال على شاشة حاسبة بيانية ضع تخمينات حول أوضاعها النسبية.
- قارن بين $\ln x$ و x ثم بين $\ln x$ و x^2 من أجل قيم كبيرة للمتغير x.

قوى عدد حقيقي موجب تماما

تمهيد: ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما و ليكن n عددا صحيحا نسبيا.

نعلم أن $\ln\left(a^{n}\right)=n\ln a$ و بالتالي $a^{n}=e^{n\ln a}$.

وبما أن $\ln e=1$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{x}=e^{x\ln e}$.

1. تعاريف

تعريف1: نضع $a^{b}=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

ملاحظة: يقرأ a^{b}: " a أس b " أو " a قوى b "

مثال: $2^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\ln 2}\approx 3,3219$

تعريف2: a عدد حقيقي موجب تماما.

تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=a^{x}=e^{x\ln a}$، الدالة الأسية ذات الأساس a.

2. قواعد الحساب

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a، b و من أجل كل عددين حقيقيين x، y لدينا:

$(1)\ \ln\left(a^{x}\right)=x\ln a$ $\quad (2)\ a^{x}a^{y}=a^{x+y}$ $\quad (3)\ a^{-y}=\dfrac{1}{a^{y}}$. $\quad (4)\ \dfrac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$.

$(5)\ \left(a^{x}\right)^{y}=a^{xy}$. $\quad (6)\ (ab)^{x}=a^{x}b^{x}$. $\quad (7)\ \dfrac{a^{x}}{b^{x}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}$.

البرهان: أنظر التمرين رقم 6(يتم إنجاز مختلف البراهين باستعمال العلاقة $a^{x}=e^{x\ln a}$).

3. الدالة " الجذر النوني "

x	0	$+\infty$
x^{n}	0 $\nearrow$	$+\infty$

تمهيد: الدالة $f_{n}:x\mapsto x^{n}$، حيث n عدد طبيعي غير معدوم، مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ كما أن $f_{n}(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_{n}(x)=+\infty$. إذن من أجل كل عدد حقيقي موجب a، المعادلة $x^{n}=a$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;+\infty[$.

مبرهنة وتعريف: من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^{n}=a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$.

تسمى الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث $x\mapsto\sqrt[n]{x}$، الدالة الجذر النوني.

مثال: $\sqrt[n]{0}=0$ ، $\sqrt[n]{1}=1$ ، $\sqrt[3]{8}=2$ ، $\sqrt[4]{81}=3$ ، $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$.

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

البرهان: نعلم أن $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n}=a$ و بما أن $\sqrt[n]{a}$ هو الحل الموجب الوحيد للمعادلة $x^{n}=a$ فإن $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: نضع اصطلاحا: $0^{\frac{1}{n}}=0$.

تمرين محلول1: اختزل كتابات الأعداد التالية:

$c=3^{-\frac{1}{3}}\times 9^{\frac{2}{3}}$ $\quad b=(0,25)^{1,5}$ $\quad a=256^{\frac{1}{4}}$

الحل:

- $a=256^{\frac{1}{4}}=\left(2^8\right)^{\frac{1}{4}}=2^{8\times\frac{1}{4}}=2^2=4$.
- $b=(0,25)^{-1,5}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(2^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}=2^{(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)}=2^3=8$
- $c=3^{-\frac{1}{3}}\times 9^{\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}\times\left(3^2\right)^{\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}\times 3^{2\times\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{4}{3}}=3^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=3$

تمرين محلول2:

1. عين الدالة المشتقة للدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـ $g(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$.

الحل:

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln x}$.

الدالة f_n هي مركب الدالة $x\mapsto\frac{1}{n}\ln x$ متبوعة بالدالة الأسية وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f_n'(x)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{x}e^{\frac{1}{n}\ln x}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{x}\times x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$. نلاحظ أن طريقة الحساب تبقى نفسها المطبقة بالنسبة لدوال القوى ذات أس صحيح.

من الواضح أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f_n'(x)>0$ و منه فالدالة الجذر النوني متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2. نلاحظ أن الدالة g هي مركب الدالتين $u:x\mapsto x^2-1$ متبوعة بالدالة f_3. و بما أن الدالة u متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ و الدالة f_3 متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$.

تمرين محلول3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$(0,31)^{2x}<3 \quad (2)$ $\qquad 3^x+2\times 3^{-x}=3 \quad (1)$

الحل:

1. (1) تعني $3^x+\frac{2}{3^x}=3$ أي $3^{2x}-3\times 3^x+2=0$. بوضع $X=3^x$ نحصل على $X^2-3X+2=0$ ذات الحلين 1 و2. $3^x=1$ تعني $\ln 3^x=\ln 1$ أي $x\ln 3=0$ و بالتالي $x=0$.

أما $3^x=2$ فتعني $x\ln 3=\ln 2$ أي $x=\frac{\ln 2}{\ln 3}$. و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{0;\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

2. $(0,31)^{2x}<3$ تعني $\ln\left[(0,31)^{2x}\right]<\ln 3$ أي $2x\ln(0,31)<\ln 3$ و هذا يعني أن $x>\frac{\ln 3}{2\ln(0,31)}$ لأن $\ln(0,31)<0$ و بالتالي مجموعة الحلول هي $\left]\frac{\ln 3}{2\ln(0,31)};+\infty\right[$.

دراسة الدوال: $x \mapsto a^x$ و $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

1. الدالة $x \mapsto a^x$

نضع من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 و من أجل x من $\mathbb{R}$، $f_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$

- **اتجاه التغير**: الدالة f_a هي مركب الدالة $u : x \mapsto x\ln a$ متبوعة بالدالة الأسية. و بما أن الدالتين u و "exp" قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f_a'(x) = \ln a \times e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$.

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $a^x > 0$ و بالتالي فإشارة $f_a'(x)$ من نفس إشارة $\ln a$. و منه النتائج التالية:

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ و منه الدالة f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
* إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ و منه الدالة f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- **النهايات**: نميز حالتين حسب إشارة $\ln a$

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln a = +\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty$
* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln a = -\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = 0$
* إذا كان $a > 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln a = -\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = 0$
* إذا كان $a > 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln a = +\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$

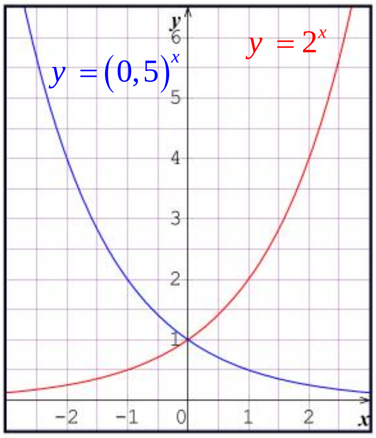
- **جدول التغيرات و التمثيل البياني:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $0 < a < 1$	$+\infty$ ↘	0

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $a > 1$	0 ↗	$+\infty$

$f_a(1) = a$

$f_a(0) = 1$



ملاحظة : إذا كان $a = 1$ فإن $f_1(x) = 1$ و منه الدالة f_1 ثابتة.

2. الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، و من أجل x من $[0;+\infty[$ ، $g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

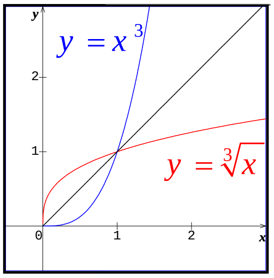
g_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $g_n'(x) = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$ و منه $g_n'(x) > 0$. إذن g_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	‖	$+$
$g_n(x)$	0 ↗	$+\infty$

ملاحظة

الدالة g_n غير قابلة للاشتقاق عند0.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{n}\ln x} = +\infty$



تمرين محلول1:

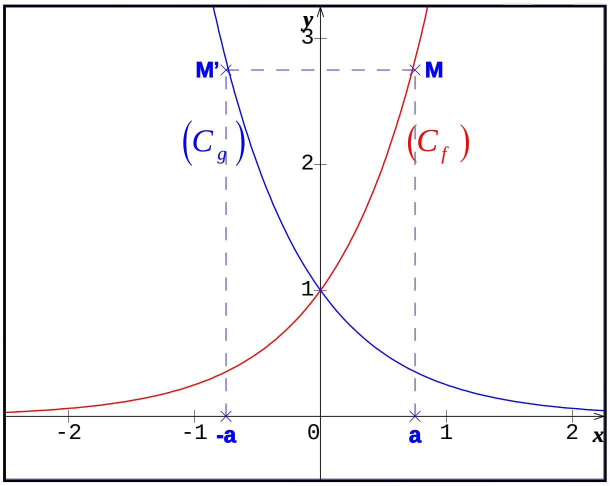
1. أرسم في معلم متعامد و متجانس المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين على التوالي للدالتين f و g حيث:

$$f(x)=4^x \quad \text{و} \quad g(x)=(0,25)^x$$

2. بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب $(y'y)$.

طريقة: لإثبات أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى $(y'y)$ يمكننا أن نبين أن: $g(-x)=f(x)$ أو $f(-x)=g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

الحل:



1. الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

2. من أجل كل a من $\mathbb{R}$ لدينا: $g(-a)=(0,25)^{-a}=e^{-a\ln(0,25)}$ و منه $g(-a)=e^{-a\ln\frac{1}{4}}=e^{a\ln 4}=4^a$. إذن $g(-a)=g(a)$. و منه (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى $(y'y)$.

تمرين محلول1: أكتب العبارات التالية بواسطة أس ناطق.

(1) $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$ (2) $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+1}$ (3) $h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}}$

الحل:

1. $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}=(x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{1+\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}$.

2. $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+1}=(x^2+2x+1)^{\frac{1}{3}}=\left[(x+1)^2\right]^{\frac{1}{3}}=(x+1)^{2\times\frac{1}{3}}=(x+1)^{\frac{2}{3}}$.

3. $h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}}=\dfrac{x+1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}}=(x+1)(x+1)^{-\frac{1}{4}}=(x+1)^{1-\frac{1}{4}}=(x+1)^{\frac{3}{4}}$.

تمرين محلول1: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين: (1) $\sqrt[3]{x}=4$ (2) $\sqrt[5]{x+1}\le 2$

الحل:

1. مجموعة تعريف (1) هي $[0;+\infty[$.

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، (1) تعني $x=4^3$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\{4^3\}$.

2. مجموعة تعريف (2) هي $[-1;+\infty[$.

من أجل كل x من $[-1;+\infty[$، (2) تعني $x+1\le 2^5$ أي $x\le 2^5-1$ و بالتالي $x\le 31$.

مجموعة الحلول هي إذن: $S=[-1;31]$.

التزايد المقارن

1. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x$

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ و (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

البرهان:

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$. لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x) = e^x - x$ و $f''(x) = e^x - 1$. بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f''(x) \geq 0$ فإن الدالة f' متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f'(0) = 1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x) \geq 0$ و منه فالدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f(0) = 1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x) \geq 0$. نستنتج أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 0$ و بالتالي فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$. باستعمال النهايات بالمقارنة و علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ كما نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.
2. نضع $X = -x$. إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$ و منه: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{X\to+\infty} -Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{e^X} = 0$

2. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ و (2) $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$

البرهان:

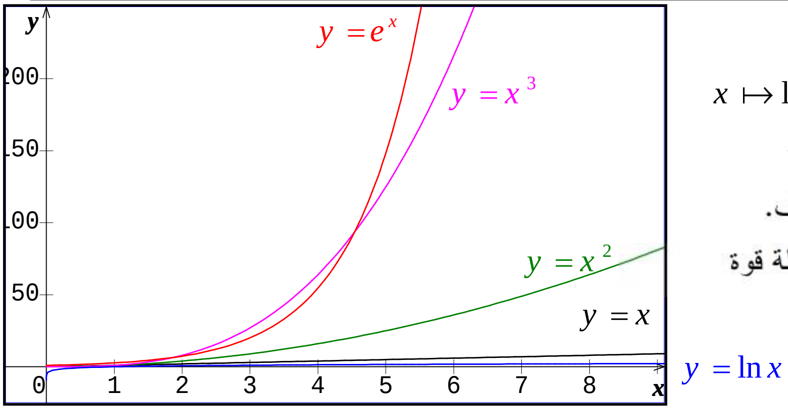
1. من أجل $x > 0$ نضع $X = \ln x$ و منه $x = e^X$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$
2. نضع $X = \dfrac{1}{x}$ و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} X = +\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}\ln\dfrac{1}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{\ln X}{X} = 0$

3. التزايد المقارن مع الدالة $x \mapsto x^n$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ (2) $\lim\limits_{x\to0} x^n \ln x = 0$

البرهان: أنظر التمرين رقم 39

خلاصة: كل الدوال $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف.
عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة و تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.



تمرين محلول1: أحسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x\right)$ 2) $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{x}$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

الحل:

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^{x}}{x}-1\right)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ و من تم $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x}}{x}-1\right)=+\infty$.

2. $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2xe^{x}-e^{x}\right)=0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

تمرين محلول2: أحسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)$ 2) $\lim_{x\to0}(x+2)\ln x$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to0}x\ln x=0$

الحل:

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left[1-\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و من تم $\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\ln x}{x}\right]=1$.

2. $\lim_{x\to0}(x+2)\ln x=\lim_{x\to0}\left(x\ln x+2\ln x\right)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to0}x\ln x=0$ و $\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$.

تمرين محلول3: أحسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{x^{2}+x+1}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x^{2}-x+3}$ 3) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^{3}+2x-1\right)e^{x}$ 4) $\lim_{x\to0}\left(x^{2}+x\right)\ln x$

الحل:

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{x^{2}+x+1}=\lim_{x\to+\infty}2\frac{e^{x}}{x^{2}}\times\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1}=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{2}}=+\infty$.

2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x^{2}-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}\times\frac{x^{2}}{2x^{2}-x+3}=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{2x^{2}-x+3}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}=0$.

3. $\lim_{x\to-\infty}\left(x^{3}+2x-1\right)e^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x^{3}e^{x}+2xe^{x}-e^{x}\right)=0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

4. $\lim_{x\to0}\left(x^{2}+x\right)\ln x=\lim_{x\to0}\left(x^{2}\ln x+x\ln x\right)=0$ لأن $\lim_{x\to0}x^{n}\ln x=0$.

تمرين محلول4: أحسب النهاية التالية: $\lim_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^{x}-3e^{2x}\right]$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^{x}-3e^{2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}\left(2\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}-3\right)=-\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.

دراسة دالة لوغاريتمية

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+1+\ln x$

1. عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال $]0;+\infty[$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للعدد ~ سعته $0,01$.
5. حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(0)=0 \text{ و من أجل كل } x \text{ من }]0;+\infty[\text{ ، } f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الأطوال هي $4cm$.

1. بين أن الدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$.
2. هل تقبل الدالة f الاشتقاق عند 0 ؟ فسر بيانيا النتيجة.
3. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f.
4. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. تحقق أن $f(\sim)=-\sim$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
5. ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ في المعلم $(O;I,J)$.
   - أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C) و (Γ).
   - أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$. فسر بيانيا النتيجة. أرسم المنحنيين (C) و (Γ).

مسألة استمثال

ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

مسألة: نهدف إلى تعيين (إن وجدت) نقط المنحني (Γ) الأقرب من المبدأ O.

1. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=x^2+\ln x$
   - عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.
   - أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
   - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال $]0;+\infty[$. عين قيمة مقربة للعدد ~.
   - حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=x^2+(\ln x)^2$

   أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. حل المسألة المطروحة.

مقارنة الأعداد الطبيعية n^{n+1} و $(n+1)^n$

الهدف: مقارنة العددين الطبيعيين n^{n+1} و $(n+1)^n$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. علما أن التعامل مع القوى غالبا ما يتطلب إدخال اللوغاريتم بين أن:

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad \text{يعني} \quad \frac{\ln(n)}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

2. اختر دالة مناسبة يمكن أن تسمح دراسة اتجاه تغيراتها من المقارنة بين العددين $\frac{\ln(n)}{n}$ و $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$

أدرس تغيرات هذه الدالة ثم استنتج.

الدوال $x \mapsto x^{\sim}$ $(\sim \in \mathbb{R})$

نعتبر الدالة $f_{\sim}$ المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f_{\sim}(x) = x^{\sim} = e^{\sim \ln x}$ حيث $\sim$ عدد حقيقي.

1. ماذا يمكن القول عن الدالة $f_{\sim}$ في حالة $\sim = 0$ ؟ في حالة $\sim = 1$ ؟

في ما يلي نفرض $\sim \neq 0$ و $\sim \neq 1$.

2. أدرس نهايتي الدالة $f_{\sim}$ عند 0 و عند $+\infty$. نميز الحالتين: $\sim < 0$ و $\sim > 0$.
3. بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f_{\sim}'(x) = \sim x^{\sim -1}$. ماذا تلاحظ ؟
4. نفرض $\sim < 0$
   - أدرس اتجاه تغير الدالة $f_{\sim}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
   - أرسم $(C_{\sim})$ التمثيل البياني للدالة $f_{\sim}$ في الحالات التالية:

$\sim = -2$ ،$\sim = -1$ ،$\sim = -\frac{1}{2}$ ،$\sim = -0{,}3$.

5. نفرض $\sim > 0$ و نعتبر الدالة $g_{\sim}$ المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$g_{\sim}(0) = 0$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g_{\sim}(x) = f_{\sim}(x)$

   - عين نهاية الدالة $g_{\sim}$ عند $+\infty$.
   - بين أن الدالة $g_{\sim}$ مستمرة عند 0.
   - أدرس قابلية اشتقاق الدالة $g_{\sim}$ عند 0. نميز الحالتين: $0 < \sim < 1$ و $\sim > 1$.
   - أدرس اتجاه تغير الدالة $g_{\sim}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
   - أدرس النهاية $\lim_{x \to +\infty} \frac{g_{\sim}(x)}{x}$. يتم تمييز حالتين. أعط تفسيرا للنتائج.
   - أرسم $(\Gamma_{\sim})$ التمثيل البياني للدالة $g_{\sim}$ في الحالات التالية:

$\sim = 0{,}3$ ،$\sim = 0{,}5$ ،$\sim = 1{,}5$ ،$\sim = 2$.

نموذج ديموغرافي

نهدف إلى نمذجة تطور مجتمع من الطفيليات في زراعة بأحد الحقول.

نرمز بـ $N(t)$ إلى عدد الطفيليات بالمئات عند اللحظة t (بالأيام).

أسفرت بعض الملاحظات على النتائج التالية:

t	0	1	3	6	10
$N(t)$	10	11	12	15	18

- فريق أول من البيولوجيين نمذج هذا التطور بالدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(t)=10\times(1,07)^{t}$$

- و نمذج فريق ثان نفس التطور السابق بالدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(t)=\frac{100}{1+9\times(1,07)^{-t}}$$

1. دراسة بيانية

- باستعمال جداول حاسبة بيانية و باختيار الخطوة1 عين قيم الدالتين f و g على المجال $[0;10]$.
- في معلم متعامد (الوحدات: $1cm$ يمثل يوما واحدا على محور الفواصل و $1cm$ يمثل مائة من الطفيليات على محور التراتيب و نبدأ التدريج ابتداء من 9 على محور التراتيب) مثل جدول القيم السابق و الجداول المحصل عليها بالحاسبة.

2. دراسة الدالة f

- اشرح لماذا الفريق الأول يعتبر أن عدد الطفيليات يرتفع يوميا بنسبة 7% .
- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.
- أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.
- أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة f على المجال $[0;80]$.

3. دراسة الدالة g

- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0;+\infty[$.
- أدرس نهاية الدالة g عند $+\infty$.
- أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة g على المجال $[0;80]$.

4. التركيب:

قارن بين النموذجين المقترحين من قبل كل فريق من فريقي البيولوجيين.

> يستعمل الفريق الأول نموذج " *Malthus* " و الذي يعتبر أن نسبة التطور تبقى ثابتة بينما يعمل الفريق الثاني وفق نموذج " *Verhulst* " الذي يفرض أن نسبة التطور تنقص و من تم لا يتعدى المجتمع حدا معينا.

فاتورة الهاتف

تعيين دالة: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بــ:

$$f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{3}}+3$$ حيث a و b عددان حقيقيان.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$ حيث وحدتا الطول هما $1cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور التراتيب.

1. أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من $[0;+\infty[$.
2. عين a و b علما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند 4 و أن النقطة $A(0;2)$ تنتمي إلى المنحني (C)

دراسة دالة: نفرض في ما يأتي $a=1$ و $b=-1$. لدينا إذن:

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$

1. أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
2. حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ).
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
4. أعد رسم الجدول الموالي ثم أملئه (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

5. أرسم المستقيم المقارب (Δ) و المنحني (C).

دراسة اقتصادية: سجلت في الجدول الموالي مبالغ فواتير استهلاك الهاتف (سنويا) مقدرة بعشرات الآلاف من الدنانير من قبل إحدى الثانويات بحيث يمثل x_i رتبة السنة بينما يمثل y_i مبلغ فاتورة تلك السنة.

السنة	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65	3,55	3,50

نبحث عن دالة تسمح بنمذجة هذه الظاهرة بشكل مناسب.

نقول عن دالة f أنها مقبولة إذا كان من أجل كل x_i، $|f(x_i)-y_i|\le 0,1$.

1. مثل في المعلم السابق $(O;I,J)$ النقط $M_i(x_i;y_i)$.
2. بين أن الدالة f مقبولة لنمذجة الظاهرة السابقة.
3. صرح المسير المالي للثانوية أنه لو استمر تطور استهلاك الهاتف وفق النموذج السابق فإنه يترقب أن مبلغ الفاتورة سوف لا يتعدى مستقبلا $30\,000\,DA$.

هل أنت موافق مع هذا التصريح ؟ علل إجابتك.

موضوع محلول

تمرين : (من بكالوريا)

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بـ $f(x)=x(\ln x)^2$

1.أ- بين أنه من أجل $x>0$ $f(x)=4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$.

ب-عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

2.بين أن f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة و أحسب $f'(x)$.

3.ادرس تغيرات f .

4.ليكن $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس الوحدة: $20cm$. أنشئ $\mathcal{C}$ على المجال $]0;1]$.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بـ $g(x)=-2x\ln x$

Γ تمثيلها البياني في نفس المعلم.

1.عين نهايات g عند حدود مجموعة تعريفها.

2.ادرس تغيرات g .

3.أ-بين أنه من أجل كل $x>1$: $f(x)-g(x)=xf'(x)$

ب.استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}$ و Γ .

4.أنشئ Γ على المجال $]0;1]$ في نفس المعلم.

III. ليكن $x_0\in]0;+\infty[$.

1.بين أن معادلة المماس T لـ $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y=xf'(x_0)+g(x_0)$.

ما هما إحداثيتي نقطة تقاطع المماس T مع محور التراتيب؟

2.استعمل السؤال السابق لإعطاء طريقة لإنشاء المماس T .

تطبيق : أنشئ المماس للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها $0,6$.

حل مختصر

I. 1 أ- نستعمل $\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x$ و $x=\sqrt{x}^2$

.2 $f'(x)=\ln x(\ln x+2)$

.3

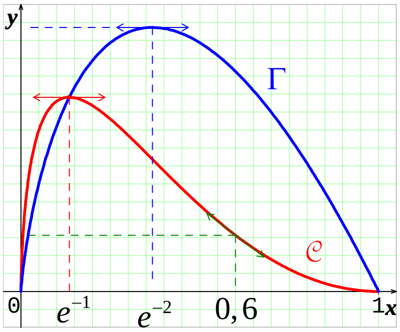
x	0	e^{-2}		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	$0\nearrow$	$+\infty$

.4 انظر الشكل

II . 2. $g'(x)=-2(\ln x+1)$. الدالة g متزايدة تماما على $]0;e^{-1}[$ و متناقصة تماما على $]e^{-1};+\infty[$ و تنعدم من أجل $x=e^{-1}$

.3 ب- $\mathcal{C}$ و Γ يتقاطعان في النقطتين اللتين إحداثيتاهما $(e^{-2};4e^{-2})$ و $(1;0)$.
$\mathcal{C}$ فوق Γ في المجالين $]0;e^{-2}[$ و $[1;+\infty[$ و $\mathcal{C}$ تحت Γ في $[e^{-2};1]$

III. لإنشاء T ، نمثل النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$ ، نمثل النقطة $A(0;g(x_0))$ ثم نربط بين النقطتين.



الشكل

تعاليق

f. **1.** أ نضع $X=\sqrt{x}$ و نطبق نهاية مركب دالتين

.1 ب - $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0}f(x)=0$

.2 طبق مشتق جداء دالتين

II. 1. $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to0}g(x)=0$

ff. **3** أ- يمكن التحقق بسهولة

III. 1. لاحظ أن $f(x_0)-g(x_0)=x_0f'(x_0)$

.2 نقطة تقاطع المماس T مع محور التراتيب فاصلتها 0 و ترتيبها $0f'(x_0)+g(x_0)=g(x_0)$ ، إذن إحداثيتي نقطة التقاطع $(0;g(x_0))$

• المماس T عند النقطة M_0 التي فاصلتها x_0 من $\mathcal{C}$ يمر بـــ M_0 و يقطع محور الترتيب في النقطة التي إحداثياتها $(0;g(x_0))$

موضوع موجه

تنبيه

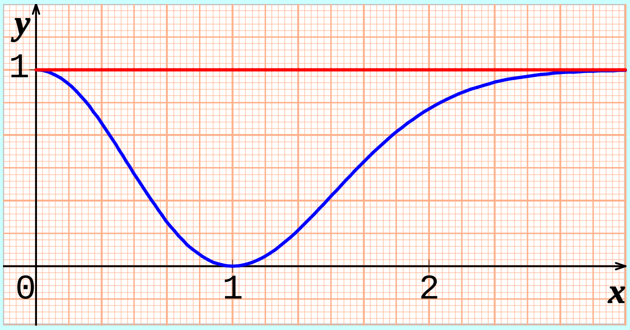
نحن بصدد تطبيق القواعد العملية التي رأيناها في الدرس على مثال يهدف إلى حساب مشتقة أو تعيين نهاية.

يجب ألاّ نكتفي بمعرفة القواعد معرفة جيدة فحسب بل ينبغي أيضا تفعيلها و إدراك الوضعيات التي تطبق فيها.

تمرين: (من بكالوريا)

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1-x^2e^{1-x^2}$

تمثيلها البياني $(\mathcal{C})$ و وستقيمها المقارب Δ الذي معادلته $y=1$ ممثلان في الشكل التالي:



1. برّر الخواص التالية المقروءة على التمثيل البياني:

أ- المستقيم Δ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$.

ب- المنحني $(\mathcal{C})$ تحت المستقيم Δ على $[0;+\infty[$.

جـ- الدالة f متناقصة على $[0;1]$ و متزايدة على $[1;+\infty[$.

2. k عدد حقيقي معطى. عين عدد حلول المعادلة $f(x)=k$ على المجال $[0;+\infty[$.

توجيهات

1. أ- برهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. عبارة $f(x)$ تجعلك تفكر في القواعد العملية للتزايد المقارن عند $+\infty$ لـ e^x و x^n و لكن هنا لا تطبق هذه القواعد مباشرة.

ب - ادرس إشارة $f(x)-1$

جـ- احسب مشتقة الدالة f مستعملا العمليات على اشتقاق مجموع ، جداء و مركب دالتين. حلل $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

2. يمكنك تشكيل جدول تغيرات الدالة f أو استعمال المنحني $(\mathcal{C})$.

تمارين تطبيقية

1 ـ قوى عدد حقيقي موجب تماما

1 باستعمال الحاسبة ، رتب الأعداد التالية:

$3^{-\sqrt{2}}$ ، $20736^{0,25}$ ، $12^{\sqrt{3}}$ ، $5^{3,6}$

2 رتب ترتيبا تصاعديا الأعداد التالية:

$100^{\frac{1}{12}}$ ، $80^{\frac{1}{9}}$ ، $13^{\frac{1}{2}}$ ، $15^{\frac{1}{4}}$ ، $28^{\frac{1}{3}}$

3 اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

$c=5^{\frac{1}{\ln 25}}$ ، $b=2^{\frac{1}{\ln 8}}$ ، $a=5^{-\frac{1}{\ln 5}}$.

4 اكتب الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 3

$b=\left(3^{-4}\right)^{\frac{1}{3}}\times 27^{-\frac{1}{3}}$ ، $b=3^{-\frac{5}{4}}\times 81^{\frac{5}{3}}$ ، $a=9^{\frac{3}{2}}\times 27^{\frac{1}{4}}$

5 x عدد حقيقي ، بسط العبارات التالية:

1) $9^{x}+2\times 3^{2x+1}$ 2) $\dfrac{125^{x}+5^{3x+1}}{25^{x}}$

6 للبرهان على هذه الخواص نستعمل $a^{x}=e^{x\ln a}$ مع تطبيق الخواص الجبرية للدالة $x\mapsto e^{x}$

مثلا للبرهان أن $a^{x}a^{y}=a^{x+y}$ لدينا:

$$a^{x}a^{y}=e^{x\ln a}e^{y\ln a}=e^{x\ln a+y\ln a}=e^{(x+y)\ln a}=a^{x+y}$$

7 حل المعادلات التالية:

1) $12^{x}=3$ 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}=\dfrac{1}{8}$

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=3$ 4) $5^{x-1}=2^{x}$

5) $3^{x}=4^{2x+1}$ 6) $5^{1-3x}=\dfrac{1}{125}$

8 نعتبر المعادلة (E) التالية: $2^{x^{2}-6x}=128$

1. بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $x^{2}-6x-7=0$

2. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

9 حل المعادلتين التاليتين:

1) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^{2}-3x}=49$ 2) $\left(\sqrt{5}\right)^{3-x^{2}}=5^{x}$

10 نعتبر المعادلة (E) التالية: $4^{x}+5.2^{x}+6=0$

1) بين أنه بوضع $X=2^{x}$ المعادلة (E) تؤول إلى المعادلة $X^{2}+3X-4=0$ .... (E')

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E'). استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

11 حل المعادلتين التاليتين:

1) $-2.9^{x}5.3^{x}=2$ 2) $2.5^{x}-5^{1-x}=9$

12 حل المتراجحات التالية:

1) $3^{x}>5$ 2) $\left(\sqrt{3}\right)^{x}<e$ 3) $\circledR^{x}>2$

4) $5^{-x}<5^{2x}$ 5) $\dfrac{2^{x}}{2^{x}+1}<\dfrac{1}{3}$ 6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}\leq 2$

13 نعتبر المتراجحة (E) التالية: $2^{x^{2}+4}\geq 2^{5x}$

1) . بين أن (E) تكافئ المتراجحة $x^{2}-5x+4\geq 0$

2) استنتج مجموعة حلول (E).

14 نعتبر المتراجحة $3^{2x}-7.3^{x}+6\leq 0$

1) بين أنه بوضع $X=3^{x}$ المتراجحة (E) تؤول إلى $X^{2}-7X+6\leq 0$ .... (E')

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E'). استنتج مجموعة حلول (E).

• في التمارين من **15** إلى **17** حل المعادلة و المتراجحة المقترحتين

15 1) $4^{x}+2^{x+1}-3=0$ 2) $4^{x}+2^{x+1}-3\leq 0$

16 1) $2^{2x+1}-10.2^{x}+12=0$

2) $2^{2x+1}-10.2^{x}+12>0$

17 1) $3^{x+1}+2.3^{-x}=7$ 2) $3^{x+1}+2.3^{-x}\geq 7$

2) $2^{2x+1}-10.2^{x}+12>0$

18 1) احسب المجموع $S_{n}=1+2+2^{2}+2^{3}+...+2^{n}$ بدلالة n .

2) من أجل قيم للعدد n يكون $S_{n}\geq 10^{10}$؟

19 عند رمي قطعتي نقد متزنتين n مرة (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 1)، احتمال عدم الحصول على الثنائية $(6;6)$ هو $p_{n}=\left(\dfrac{35}{36}\right)^{n}$

من أجل قيم للعدد n يكون $p_{n}\leq 0,01$ ؟

20 بسط الأعداد التالية دون استعمال الحاسبة:

$a=\sqrt[9]{521}$ $b=\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$

$c=\sqrt{\sqrt[3]{4096}}$ $d=\sqrt[5]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[15]{3^{12}}$

21 احسب الأعداد التالية:

$$a=\frac{\sqrt[5]{4}\times\sqrt[2]{8}\times\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}\ ،\ b=\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$$

• في التمارين من **22** إلى **24** بسط كتابة الأعداد التالية:

22 $A=\sqrt[3]{2^5}\times\sqrt[7]{2^3}$ $\quad B=\sqrt[3]{2^5}\times(\sqrt[4]{2^7})^2$

23 $A=\dfrac{\sqrt[3]{8^2}\times\sqrt[4]{32}}{8.\sqrt[8]{4}}$ $\quad B=\sqrt[10]{1024}-2^{-2}\sqrt[6]{2}$

24 $A=\dfrac{\sqrt{9}\times\sqrt{27}\sqrt[3]{9^2}}{(\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}}$ $\quad B=5^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{25}$

25 اكتب الأعداد التالية على شكل أس ناطق

1) $(x-3)^2\sqrt{x-3}$ ؛ $x\geq 3$

2) $\sqrt[8]{(x+2)^3}$ ؛ $x\geq -2$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$ ؛ $x\geq -1$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[7]{2x-4}}$ ؛ $x>2$

26 باستعمال المساواة $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

بين أن: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=3^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$

27 1) انشر $(2+\sqrt{2})^3$ و $(2-\sqrt{2})^3$

2) استنتج تبسيطا للعبارة $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

28 x عدد حقيقي موجب ، اكتب كل من الأعداد التالية على الشكل $x^{\frac{p}{q}}$:

$A=\sqrt{\sqrt{x}}\times\sqrt[3]{x}$ ؛ $B=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[10]{x^3}}$ ؛ $C=x^{-2}\left(\sqrt{x}\right)x^{\frac{1}{3}}$

29 حل المعادلات و المتراجحات التالية:

1) $\sqrt[3]{5-3x}=2$ ؛ $\sqrt[3]{5-3x}>2$

2) $x^{\frac{2}{3}}=x$ ؛ $x^{\frac{2}{3}}<x$

3) $\sqrt[5]{x+1}=\dfrac{1}{2}$ ؛ $\sqrt[5]{x+1}\geq\dfrac{1}{2}$

30 حل الجملتين التاليتين:

$$\begin{cases}x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{3}{4}}=8\\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{3}{2}}=40\end{cases}\quad \text{و} \quad \begin{cases}2^x-3^y=5\\ 3.2^x+3^y=24\end{cases}$$

31 نعتبر المعادلة (E) التالية: $x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}-6=0$

1) بين أنه بوضع $X=x^{\frac{1}{3}}$ المعادلة (E) تؤول إلى المعادلة $X^2+X-6=0$ .... (E')

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E'). استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

2 . دراسة الدوال: $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

32 عين مشتقات الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$

1) $x\mapsto 3^x$ $\quad$ 2) $x\mapsto\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ $\quad$ 3) $x\mapsto\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$

33 ادرس النهاية عند $-\infty$ وعند $+\infty$ للدالتين التاليتين:

1) $f(x)=(0,25)^x$ $\quad$ 2) $f(x)=\left(\dfrac{2\text{®}}{3}\right)^x$

34 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$

1. ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

2. أ- عين الدالة المشتقة للدالة f .

ب - استنتج تغيرات الدالة f .

35 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=(0,7)^x$ و $g(x)=(1,2)^x$

1. شكل جدول تغيرات الدالتين f و g .

2. ارسم المنحنيين الممثلين للدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس.

36 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+x}$

1. بين أن f هي مركب دالة كثير حدود و دالة أسية ذات أساس a .

2. ادرس ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

37 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3^{2x}}{2^x}$

ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

38 نعتبر المعادلة (E) التالية: $2^x+3^x=5^x$

1. بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$

2. ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$$

3 ـ التزايد المقارن

39 1. أ- بين أن: $\frac{e^x}{x^n}=e^{x-n\ln x}$

ب- احسب نهاية $x-n\ln x$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

جـ - استنتج نهاية $\frac{e^x}{x^n}$ لما x يؤول إلى $+\infty$

2. أ- بوضع $U=x^n$ ، بين أن: $\frac{\ln x}{x^n}=\frac{1}{n}\times\frac{\ln U}{U}$

ب- استنتج نهاية $\frac{\ln x}{x^n}$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

3. أ- بوضع $U=\frac{1}{x}$ ، بين أن $x^n\ln x=-\frac{\ln U}{U^n}$

ب- استنتج نهاية $x^n\ln x$ لما x يؤول إلى0.

4. أ- بوضع $U=-x$ ، بين أن $x^ne^x=-\frac{U^n}{e^U}$

ب- استنتج نهاية x^ne^x لما x يؤول إلى $-\infty$

40 ادرس النهاية عند $+\infty$ للدالتين التاليتين:

1) $f(x)=x^2+1-e^x$ 2) $f(x)=\frac{e^x-x}{x^2}$

41 باستعمال تبديل المتغير ، ادرس النهاية عند $+\infty$ للدالتين التاليتين

1) $f(x)=\frac{e^{3x+1}}{x}$ 2) $f(x)=\frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

• في التمارين من **42** إلى **44** عين النهاية عند $+\infty$ للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ،

42 1) $f(x)=x^2+x-\ln x$ 2) $f(x)=\frac{\ln x-2x}{4x^2}$

43 1) $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$ 2) $f(x)=\frac{\ln(x^2+x)}{x}$

44 1) $f(x)=e^x-x^3$ 2) $f(x)=x^3-\ln x$

45 احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(\ln x)^3}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

46 احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+2}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e\ln x}{x^2+x}$

3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{e^{-2x}}$ 4) $\lim_{x\to-\infty}(1+2x)e^{3x}$

47 1. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(2x-1)e^x$

عين نهاية f عند $-\infty$

2. g دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $g(x)=\sqrt{x}e^{-2x}$

عين نهاية g عند $+\infty$.

48 احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to-\infty}(e^{1-x}-x^2+1)$ 2) $\lim_{x\to-\infty}(2x^2-1)e^{3x-1}$

3) $\lim_{x\to-\infty}(e^{1-x}-x^2+1)$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{\ln x}$

49 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2e^{-x}$

1. ادرس نهايات f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2. ادرس تغيرات f .شكل جدول تغيراتها.

3. ارسم المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

50 احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-3e^x+2}$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}$

3) $\lim_{x\xrightarrow{>}0}x(\ln x)^3$ 4) $\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\ln(x^2-x)$

51 احسب النهايات التالية:

$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$ ؛ $\lim_{x\to-\infty}(x+2)-2\ln|2x+1|$

$\lim_{x\to+\infty}-x+1+e^{2x}-e^x$ ؛ $\lim_{x\to-\infty}(2x^2-3x)e^x$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}-x-4\ln(x+1)^2$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$

$\lim_{x\to+\infty}(2x+3)e^x-e^{2x}$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^2+e^x}$.

52 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{3^x}{x^2}$

1. أ) ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب) ادرس نهاية الدالة f عند0.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$:

$$f(x)=\frac{e^{x\ln 3}}{[x\ln 3]^2}\times[\ln 3]^2$$

استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

53 عين مجموعة قابلية الاشتقاق للدالة f ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين:

(1 $f(x)=\frac{-2}{\sqrt[3]{x}}$ (2 $f(x)=\sqrt[5]{x^2+1}$

54 f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-6\sqrt[3]{x}$
بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن من أجل كل $x\in\left]2\sqrt{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)$.

55 f دالة معرفة على بـ $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x}$
1.حدّد مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. عين $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم شكل جدول تغيرات f .
3.عين معادلة المماس للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها4.

56 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt[3]{1+2x^2}$
1.بين أن الدالة f زوجية.
2.ادرس نهاية f عند $+\infty$.استنتج نهاية f عند $-\infty$.
3.بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ احسب $f'(x)$.
4.استنتج تغيرات الدالة f .

57 f دالة معرفة على $]-\infty;1[$ بـ $f(x)=(1-x)^{\frac{3}{2}}$
1.ادرس نهاية f عند $+\infty$ وَ عند 1.
3.بين أن f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;1[$ احسب $f'(x)$.
3.استنتج تغيرات الدالة f .
4.ارسم المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

58 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3e^{-x}$
1.عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2.ادرس تغيرات f و شكل جدول تغيراتها.
3.ارسم التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

59 إليك نص سؤال ، و الإجابة المقترحة من طرف تلميذ أعد صياغة هذا الحل آخذا بعين الاعتبار ملاحظات المصحح.

السؤال: f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=\frac{\ln(x^2+3)}{x}$$

ادرس نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

إجابة التلميذ:

* لدينا: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+3)}{x}=\frac{\ln 3}{0}=+\infty$

ترميز خاطئ

* من أجل $x>0$:

$$f(x)=\frac{\ln x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x}=\frac{\ln x^2+\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x}=2\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

ماهي نهاية $\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x}$ عندهم؟

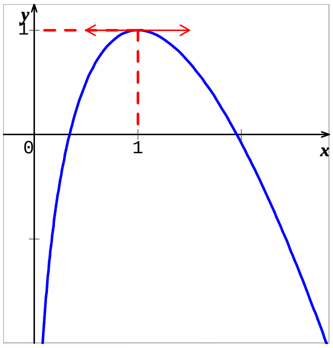
تمارين للتعمق

60 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=ax+(bx+c)\ln x$$

حيث a، b و c أعداد حقيقية و $(\mathcal{C})$ هو المنحني الممثل للدالة f



1.باستعمال المنحني $(\mathcal{C})$ و علما أن $f(2)=2-3\ln 2$ بين أن $a=c=1$ و $b=-2$
2.نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$g(x)=x+(1-2x)\ln x$

أ-عين نهاية g عند0.

ب - عين نهاية g عند $+\infty$.

2.أ-عين الدالة المشتقة للدالة g.

ب-ادر على $]0;+\infty[$ إشارة x و إشارة $-2\ln x$ و إشارة $\frac{1-x}{x}$ ،ثم

استنتج إشارة $g'(x)$ و تغيرات g .

جـ - شكل جدول تغيرات g

3. ليكن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$

أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(1-2x)\ln x=0$ وأعط تفسيرا بيانيا لهذه الحلول.

ب- استنتج وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم Δ .

61 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=xe^{-x}$$

نرمز بـــ(Γ) إلى التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة: $10cm$

الجزء1:

1.أ- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

جـ- أنشئ (Γ).

2. أ- بين انه من أجل كل عدد حقيقي m من $\left]0;\frac{1}{e}\right[$ ،

المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين.

ب- في الحالة $m=\frac{1}{4}$ ، نرمز إلى الحلين بـــ ~ و ~ حيث

~ < ~.حين حصرا سعته 10^{-2} للعدد ~ .

جـ- حل المعادلة $f(x)=m$ في الحالة $m=0$ و $m=\frac{1}{e}$.

الجزء2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

~= $u_{\sim}$ و $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$ حيث ~ هو العدد المعرف في الجزء1 . 2 .ب.

1.أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ- هل المتتالية (u_n)متقاربة؟ إذا كان الجواب نعم عين نهايتها.

2. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=\ln u_n$

أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=w_n-w_{n+1}$

ب- نضع $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$

بين أن: $S_n=w_0-w_{n+1}$

جـ- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

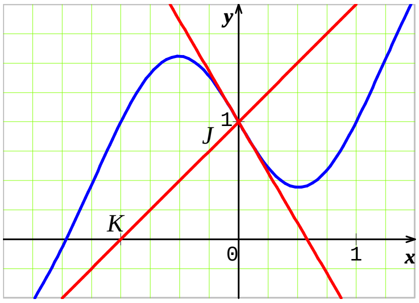
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول v_0،

$v_0>0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_ne^{-v_n}$.

هل توجد قيمة لـــ v_0 تختلف عن ~ حيث من أجل كل عدد طبيعي $n\geq1$ يكون لدينا $u_n=v_n$؟ إذا كان الجوب نعم عينها.

62 **البحث عن دالة**

في الشكل التالي لدينا التمثيل البياني $(\mathcal{C})$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و كذلك مستقيمه المقارب D و المماس T للمنحني $(\mathcal{C})$عند النقطة التي فاصلتها0.نعلم أن النقطة $J(0;1)$ مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C})$ و المستقيم D يشمل النقطتين $K(-1;0)$ و J. المماس T معادلته $y=(1-e)x+1$.



1. عين معادلة للمستقيم D .

2. نفرض أنه يوجد عددين حقيقيين m و p و دالة ¨ معرفة على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)=mx+p+¨(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} ¨(x)=0$

أ- بين أن $m=p=1$.

ب- باستعمال النقطة J بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x،

$f(x)+f(-x)=2$.

جـ- استنتج بعد التعبير عن $f(x)$ و $f(-x)$ أن الدالة ¨ فردية.

د-استنتج من السؤال ب- أن f' ، مشتقة الدالة f ، زوجية.

3. نفرض الآن أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$\ddot{}\left(x\right)=(ax+b)e^{-x^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

أ- باستعمال شفعية الدالة ¨ ، بين أن $b=0$.

ب- احسب $f'(x)$.

جـ- مستعملا معامل توجيه المماس T بين أن $a=-e$.

د- استنتج عبارة $f(x)$.

63 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$$

1.احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. بين ان المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$ (استعمل العلاقة $(a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$).

2.احسب $f'(x)$ من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$. استنتج أن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

3.بين أن منحنى الدالة f يقبل في النقطة $M(-1;0)$ نصف مماس مواز لمحور التراتيب.

4.لتكن f'' الدالة المشتقة الثانية للدالة f. بين أنه من اجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f''(x)=2x(x^3+1)^{\frac{5}{3}}$

5.حدّد معللا جوابك نقطة انعطاف منحنى الدالة

64 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$

و $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=5cm$.

الجزء1: لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=e^x-x-1$$

1.ادرس تغيرات g على $\mathbb{R}$ و استنتج إشارة $g(x)$.

2.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x-x>0$.

الجزء2:

1.أ- احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب-فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

2.أ- احسب $f'(x)$ حيث f' هي مشتقة الدالة f.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3.أ- عين معادلة المماس T للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها0.

ب-باستعمال الجزء1، ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمماس T.

4.ارسم المماس T ، المستقيمات المقاربة و المنحني $(\mathcal{C})$.

65 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ إذا كان $x>0$ و $f(0)=0$

نرمز بـ $(\mathcal{C})$ إلى المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الأطوال هي $5cm$.

الجزء1: نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{1+x^2}$$

1.احسب g' مشتقة الدالة g ،بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$

2.ادرس إشارة $g'(x)$ حسب قيم x. عين نهايات g عند $+\infty$ و عند 0.

3.شكل جدول تغيرات g.

4.استنتج انه يوجد عدد حقيقي وحيد ~ يحقق $g(\sim)=0$. تحقق أن: $0,5<\sim<0,6$.

استنتج من الأسئلة السابقة إشارة $g(x)$ حسب قيم x. (لا يطلب إنشاء منحنى الدالة g).

الجزء2:

1.أ-احسب نهاية $xf(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$.

(يمكن وضع $X=\frac{1}{x^2}$).

ب-استنتج أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

جـ- بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=g(x)$.

د- شكل جدول تغيرات f على المجال $]0;+\infty[$.

2. بين أن نهاية $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=0$. ماذا تستنتج؟

ب-ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

جـ- عين معادلة المماس للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة O.

3.ارسم $(\mathcal{C})$.

66 دراسة دالة

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ:

$$f(x)=(x+1)^2e^{-x}$$

و $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الرسم: $2cm$.

1.احسب f' مشتقة f. بين أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x^2)$. استنتج تغيرات الدالة f.

2.بين أن : أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و استنتج المستقيم المقارب لــ $(\mathcal{C})$.

3.ارسم المنحني $(\mathcal{C})$، مثل بصفة خاصة النقط من $(\mathcal{C})$ التي فواصلها -2 ، -1 ، 0 ، 1 و 3.

4.أ- بقراءة بيانية ،اذكر، حسب قيم العدد الحقيقي k عدد حلول المعادلة $f(x)=k$.

ب- بين أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا واحدا ~.بين أن $~\in[-2;-1]$.

جـ- بين أن ~ يحقق العلاقة: $~=-1-\sqrt{2}e^{\frac{~}{2}}$.

67 دراسة دالة

I . نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^x$

و $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.ادرس تغيرات f،حدّد النهايات عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2.عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

3.ارسم المنحني $(\mathcal{C})$.

II . نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$g(x)=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^x|$$

نرمز بـــ (Γ) إلى تمثيلها البياني.

1.حدد نهايات الدالة gعند $-\infty$، عند $+\infty$ و عند 0.

2.احسب $g'(x)$، و عين إشارتها باستعمال إشارة $f(x)$ و إشارة $f'(x)$.شكل جدول تغيرات f.

3.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x،

$$g(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

بين أن المستقيمD الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحني (Γ).

ادرس وضعية (Γ) بالنسبة إلى D من أجل كل عدد حقيقي $x>0$.

4. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي سالب تماما x،

$$g(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$$

بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مقارب للمنحني (Γ)

ادرس وضعية (Γ) بالنسبة إلى Δ من أجل كل عدد حقيقي $x<0$.

5.ارسم (Γ)، D و Δ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

68 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

و $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.أ- ادرس تغيرات f على $]0;+\infty[$.

ب-عين نهايات f عند حدود مجموعة التعريف.

نرمز بـــ T إلى المماس للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها1.نريد دراسة وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المماس T.

2.اكتب معادلة للمستقيم T.

3.نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x-1-f(x)$$

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$،

$$g'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)\right]$$

ب-احسب $g'(1)$ و ادرس إشارة $g'(x)$ كل من المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$.

جـ- احسب $g(1)$، وباستعمال اتجاه تغير الدالة g ،ادرس إشارة $g(x)$.

د- استنتج وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المماس T.

4. ارسم T ثم $(\mathcal{C})$.

69 بكالوريا

I . g دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(1+x^2)$$

1.بين أنه على المجال $[1;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا ~ ، أعط حصرا لــ ~ سعته 10^{-1}.

2.حدّد إشارة $g(x)=0$ على المجال $[0;+\infty[$.

II . f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ إذا كان $x>0$ و $f(0)=0$

1. أ- ما هي نهاية $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما يؤول x إلى 0؟

ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$ و جد معادلة المماس T للمنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0

2.أ-تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$$f(x)=2\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

ب- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3.أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج تغيرات الدالة f .

جـ- أنشئ T ثم $(\mathscr{C})$.

مسائل

70 بكالوريا

I. 1.بين أنه من أجل كل $x>0$ ، $e^{2x}-1>0$.

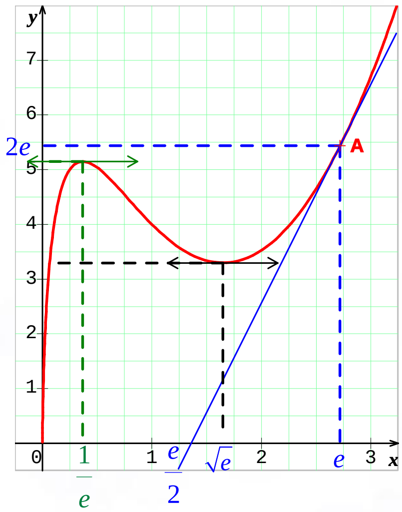
2. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بــ :

$$g(x)=\frac{1}{e^{2x}-1}$$

أ-عين نهايات الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.فسر بيانيا النتائج المحصل عيها.

ب-احسب $g'(x)$. ادرس اتجاه تغيرا الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

II . نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$.في الشكل الموالي مرسوم تمثيلها البياني $\mathscr{C}$ في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ و مماسه عند النقطة A التي فاصلتها e يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\dfrac{e}{2}$.



نقبل أن $f(x)=2x\left(a(\ln x)^2+b\ln x+c\right)$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية

1.احسب $f'(x)$ بدلالة a ، b و c .

2.باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل،عين $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ ، $f'(\sqrt{e})$ و $f'(e)$.

3.استنتج أن $f(x)=2x\left(2(\ln x)^2-3\ln x+2\right)$.

4.عين نهاية f عند 0 (يمكن وضع $t=-\ln x$

5.عين نهاية f عند $+\infty$.

6.بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ،

$$f'(x)=2(\ln x+1)(2\ln x-1)$$

7.ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات f .

III . 1.لتكن الدالة ¨ المعرفة على $[0,1;0,3]$ بـ :

$$¨(x)=f(x)-g(x)$$

1.أ- بين انه من أجل كل $x\in[0,1;0,3]$ ، $¨'(x)>0$

ب- بين أن المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل حلا واحدا ~ على المجال $[0,1;0,3]$.

2.بين انه من أجل $x>0$ ، $f(x)>0$.

3.نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h=g\circ f$

أ- عين نهايات الدالة h عند 0 و عند $+\infty$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة h على $]0;+\infty[$.

جـ- بين أن $h(\sim)=(g\circ g)(\sim)$

د- عين قيمة مقربة إلى 10^{-4} للعدد $h(\sim)$

71 بكالوريا

1. لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:
$$g(x)=-1+x+2\ln x$$
أ-ادرس اتجاه تغير الدالة g.

ب- احسب $g(1)$ ثم عين إشارة على $]0;+\infty[$.

جـ- استنتج أن:إذا كان $0<x<1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$

و إذا كان $x>1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$

2. نعتبر الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=x-x^2\ln x$ إذا كان $x>0$ و $f(0)=0$

نرمز بـ $\mathcal{C}$ على المنحني الممثل للدالة f م متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الأطوال $2cm$.

أ- احسب $f'(x)$ و تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$

ب- شكل جدول تغيرات f

جـ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا $\sim$ حيث $\frac{7}{4}<\sim<2$

3. ا- تحقق أن المماس Δ للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة O معادلته $y=x$

ب- ادرس وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة لـ Δ.

جـ- ارسم Δ و $\mathcal{C}$.

4. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0\in]0;1[$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها.

72 **الجزء الأول:** نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$

1. أ) احسب $g'(x)$ من أجل x من المجال $]0;+\infty[$ ثم ادرس تغيرات g .

2.أ) استنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$

ب) بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ،
$$h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$$
3. بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ،
$$(x-1)\ln x\geq 0$$
4.استنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:
$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$
و ليكن $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

1.أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.فسر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2.أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:
$$f'(x)=\frac{h(x)}{x}$$
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. ليكن Δ المماس للمنحني $\mathcal{C}_f$ في النقطة $A(1;1)$

أ) عين معادلة ديكارتية للمستقيم Δ .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:
$$f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$$
جـ) ادرس إشارة $f(x)-x$ ثم استنتج الوضعية النسبية للمنحني $\mathcal{C}_f$ و المستقيم Δ .

4.أنشئ Δ و $\mathcal{C}_f$.(نقبل أن $\mathcal{C}_f$ يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و $1,5$).

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0=\sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

1.برهن بالتراجع أنه من أجل كل طبيعي n ، $0<u_n<1$

2.بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3.استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

73 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$$

و ليكن $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد .

الجزء الأول:دراسة دالة مساعدة

1.لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=xe^x+1$

ادرس تغيرات h و بين أن $h(x)>0$ من أجل x من $\mathbb{R}$.

2.لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x)=x+2-e^x$$

أ- عين نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

جـ -بين ن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.نرمز بـ $\sim$ و إلى هذين الحلين حيث $> \sim$.

بين أن $1,14<\sim<1,15$.

د- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: دراسة تغيرات الدالة f و رسم المنحني $\mathcal{C}$:

1.عين نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3.أ- بين أن: $f(\sim)=\frac{1}{\sim+1}$.

ب-باستعمال حصر $\sim$ عين حصرا للعدد سعته 10^{-2}.

4.عين معادلة للمماس (T) للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

5.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$$

حيث $u(x)=e^x-xe^x-1$

ب- ادرس تغير الدالة u و استنتج إشارة $u(x)$.

جـ -استنتج وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس (T) .

6.ارسم $\mathcal{C}$ و (T) .تؤخذ وحدة الطول $2cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور التراتيب. نقبل أن $-1,85< \quad <-1,84$ و $-1,19<f(\quad)<-1,18$.

74 بكالوريا

الجزء الأول: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ إذا كان $x>0$ و $f(0)=0$

و ليكن $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.وحدة الأطوال $5cm$.

1.بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني $\mathcal{C}$.

2.أ- من أجل $x>0$ احسب $\frac{f(x)-f(0)}{x}$

ب- ادرس نهاية هذه العبارة لما x يؤول إلى 0 .

جـ - ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟ بالنسبة للمنحني $\mathcal{C}$؟

3.بين أنه من أجل $x>0$: $f'(x)=\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$

4. ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول التغيرات.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=f(x)-xf'(x)$$

1.بين أنه المعادلتين $g(x)=0$ و $x^3+x^2-2x+1=0$ متكافئتان على المجال $]0;+\infty[$.

2.بين أن المعادلة $x^3+x^2-2x+1=0$ تقبل حلا واحدا $\sim$ ثم باستعمال الحاسبة عين حصرا لـ $\sim$ سعته 10^{-2}.

3. نضع $A=\frac{f(\sim)}{\sim}$.أعط حصرا لـA سعته 2×10^{-1}

و بين أن $A=f'(\sim)$

4. من أجل كل $a>0$ نرمز بـ(T_a) إلى مماس المنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها a.

بين أن معادلة (T_a) هي $y=Ax$

ارسم المماس (T_a) ثم المنحني $\mathcal{C}$.

5.استنتج من الأسئلة السابقة أن لكل المماسات (T_a) للمنحني $\mathcal{C}$(عند نقط فواصلها غير معدومة)،فقط المماس (T_a) يمر بالمبدأ O .

6. نقبل أن المماس (T_a) أعلى المنحني $\mathcal{C}$ في المجال $]0;+\infty[$.

أ- بقراءة بيانية ، و بدون تبرير عين عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ حسب قيم العدد الحقيقي المعطى m .

ب- عين بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=mx$ حسب قيم العدد الحقيقي المعطى m .

اختيار من متعدد

75 لكل سؤال عدة اقتراحات يمكن أن تكون صحيحة، عينها مع تعليل الجواب

f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x2^{-x}$ ، و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1. أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

ج) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ د) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2. من اجل كل عدد حقيقي x:

أ) $f'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$

ب) $f'(x)=(1-x)2^{-x}$

ج) $f'(x)=(1-x\ln 2)2^{-x}$

3. أ) من اجل كل عدد حقيقي x: $f(x)\le\frac{3}{4}$

ب) المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبلين حلين فقط.

ج) المماس T للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها 0 فوق المنحني $\mathcal{C}$.

4. g هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=\ln f(x)$

أ) من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ، $g(x)<0$

ب) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

ج) الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;\frac{1}{\ln 2}\right[$

د) المعادلة $g(x)=-0{,}5$ تقبل حلين في المجال $]0;+\infty[$

76 لكل سؤال عين الإجابة(أو الأجوبة) الصحيحة المقترحة.

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x+2\frac{\ln x}{x}$$

1. إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)=x^2+2-2\ln x$

2. على $]0;+\infty[$ شارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(x-1)$.

3. على $]0;+\infty[$ g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي3.

4. f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

5. المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[1;2]$

6. منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$.

أصحيح أم خطأ ؟

77 اذكر إن كانت النهايات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(-x+3)e^{-x}$

1.من أجل كل $x>0$ ، $f(x)\ge -x+3$.

2.محور الفواصل مقارب لمنحنى الدالة f.

3.مشتقة الدالة f هي $f'(x)=(2-x)e^{-x}$

4. الدالة g تقبل قيمة حدية واحدة.

5.من أجل كل $m\neq e^2$ ، المعادلة $f(x)=m$ إما لا تقبل حلا أو تقبل حلين.

6. الدالة f حل للمعادلة التفاضلية $y'-y=7e^{-x}$

78 f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{-x}$

اذكر إن الخواص التالية صحيحة أم خاطئة و علل اختيارك

1. من كل عدد حقيقي x : $f(x)f(-x)\le 0$

2. من كل عدد حقيقي x : $f'(x)+f(x)=e^{-x}$

3. من كل عدد حقيقي x : $f(x)\le 1$

4. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

5. $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$

6. المنصف الأول هو المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة التي فاصلتها0.

79 لكل خاصية من الخواص التالية ، اذكر إن كانت صحيحة أم خاطئة معللا إجابتك.

1. من اجل كل عدد حقيقي x، $\ln(2^x)=x$

2. يوجد عدد حقيقي a موجب حيث من اجل كل عدد حقيقي x، $\ln(a^x)=x$

3. من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و x ، $a^{\frac{\ln x}{\ln a}}=x$

4. يوجد عدد حقيقي x حيث $2^{x-1}=3$

5. من اجل كل عدد حقيقي موجب x، $\sqrt[100]{x}\le x$

6. يوجد عدد حقيقي موجب x حيث x $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\neq x$

7. من أجل كل عددين حقيقيين x و y ،

$$2^{x+y}=\sqrt{2^{2x}\times 2^{2y}}$$

05 الدوال الأصلية

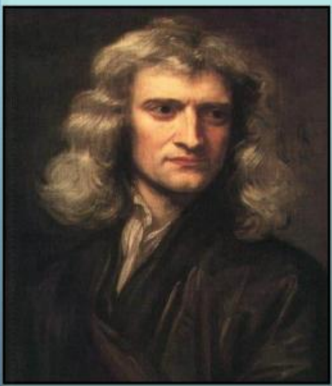
الكفاءات المستهدفة

- تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال.
- تعيين الدوال الأصلية لدوال مألوفة.
- تعيين الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة معطاة للمتغير.
- حل معادلات تفاضلية من الشكل $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$.

يعتبر الانجليزي إسحاق نيوتن و الألماني قوتفريد ولالم ليبنز مكتشفي الحساب التفاضلي و التكاملي.
توصل نيوتن إلى مفهومي المشتقة و الدالة الأصلية (العملية العكسية لحساب المشتقة) عن طريق علم الحركة.
فهو يعتبر المشتقة "" سرعة "" و دالة أصلية "" مسافة "".
بالعكس من ذلك فقد توصل ليبنز إلى اكتشافاته بواسطة الهندسة و اختيار ترميزا مناسبا.

ولالم ليبنز
1646 م – 1716 م

إن هذا الاكتشاف المزدوج خلق بين الرجلين
و بين مدرستيهما صراعا حول الأولوية.



إسحاق نيوتن
1642 م – 1727 م

نشاط أول

1) نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{2x-3}{x+3}-x \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$$

- تحقق أنه من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$
- اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $G'(x)=f(x)$

نقول أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على $]-3;+\infty[$.

تعريف: f و F دالتان معرفتان على مجال I و f قابلة للاشتقاق على I.

إذا كان من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$ نقول أن:

- o f هي الدالة المشتقة للدالة F.
- o F دالة أصلية للدالة f على I.

2) نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

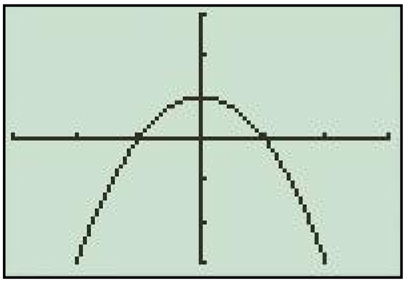
$$H(x)=x^2-3x+2 \quad \text{و} \quad h(x)=2x-3$$

- بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.
- عين دالة أصلية أخرى للدالة h على $\mathbb{R}$.

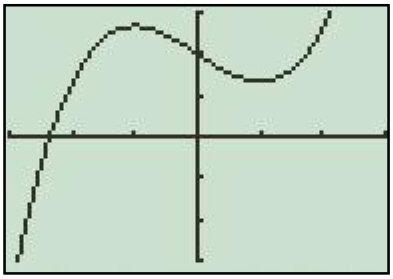
3) عين دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية على المجال المعطى I:

* $f_1(x)=x$ و $I=\mathbb{R}$. $f_2(x)=x^2$ و $I=\mathbb{R}$. $f_3(x)=-\frac{1}{x^2}$ و $I=]0;+\infty[$.
* $g_1(x)=3x$ و $I=\mathbb{R}$. $g_2(x)=x^2+2x-1$ و $I=\mathbb{R}$. $g_3(x)=\frac{2}{x^2}$ و $I=]0;+\infty[$.

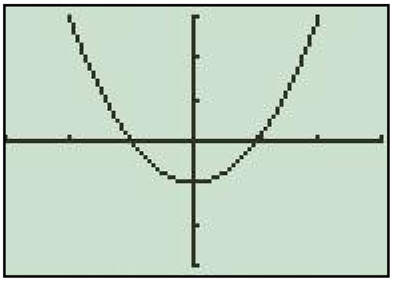
4) رسمنا في الشكل المقابل على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.
من بين التمثيلات البيانية التالية يوجد التمثيل البياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. عينه مع التبرير.

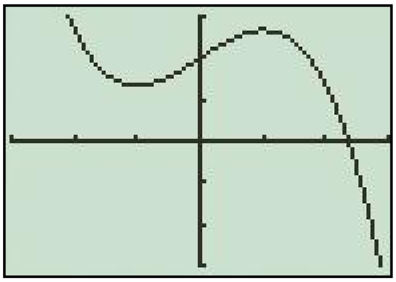


(1)



(2)





(3)

نشاط ثان

تسير سيارة على طريق سيار مستقيم بسرعة $90\,km.h^{-1}$.

بالحفاظ على تسارع ثابت لمدة $5s$ (5 ثوان) و صلت سرعتها إلى $135\,km.h^{-1}$.

نريد حساب المسافة المقطوعة d خلال هذه الثواني الخمس.

من أجل ذلك نختار مبدأ الأزمنة بالثانية، اللحظة التي تبدأ فيها بالتسارع و نرمز بـِ $x(t)$ إلى المسافة، بالمتر، المقطوعة بين اللحظتين 0 و t. نذكر أن:

- السرعة $v(t)$، المعبر عليها بـِ $m.s^{-1}$، عند اللحظة t هي: $v=\dfrac{dx}{dt}$.
- التسارع الثابت، المعبر عليه بـِ $m.s^{-2}$، هو: $a=\dfrac{dv}{dt}$.

1. أحسب a.
2. عين دالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;5]$ بحيث: $\dfrac{df}{dt}=a$.
3. استنتج أن: $v(t)=2,5t+25$ على المجال $[0;5]$.
4. عين بدلالة t عبارة $x(t)$ ثم أحسب المسافة المقطوعة d.

نشاط ثالث

لتكن f دالة معرفة على مجال I.

1. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I.

بين أن الدالة: $G:x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي هي كذلك دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2. لتكن F و G دالتين أصليتين للدالة f على المجال I. بين أن الدالة $F-G$ دالة ثابتة على المجال I.

3. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I و ليكن x_0 عددا حقيقيا من المجال I.

بين أنه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على المجال I بحيث $G(x_0)=y_0$ علما أن y_0 عدد حقيقي ثابت.

4. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I و ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال I.

بين أن العدد $F(b)-F(a)$ لا يتغير إذا استبدلنا الدالة الأصلية F بدالة أصلية أخرى G للدالة f على I.

الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f.

من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

مثال: * الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^2-3x+1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x-3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x)=2x-3=f(x)$.

*الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^2-3x-\sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f

لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x)=2x-3=f(x)$.

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

خواص (دون برهان):

*إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.

*إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال:

$x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3x^2+4x-2$. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^3+2x^2-2x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

3. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

البرهان: بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I، لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية.

إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد حقيقي.

الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k.

توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ و لدينا:

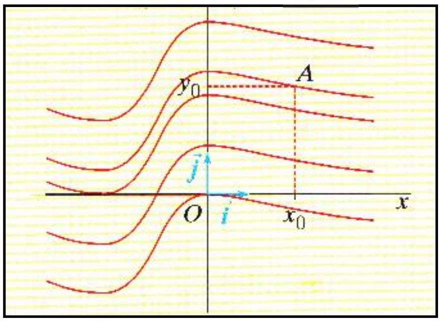
$$F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$$

التفسير البياني:

التمثيلات البيانية في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدوال الأصلية للدالة f

تستنتج من أحدها بواسطة انسحابات شعاعها $k\vec{j}$ حيث k عدد حقيقي.

واحد فقط من بين هذه التمثيلات البيانية يمر من النقطة $A(x_0;y_0)$.



تمرين محلول1: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x \quad \text{و} \quad f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

طريقة: لإثبات أن F دالة أصلية لـِ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$.

الحل: F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$$

و منه:

$$F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

و بالتالي:

$$F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لـِ f على المجال $]-1;+\infty[$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x+\cos x$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(®)=-1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto x^2+\sin x+k$ حيث k عدد حقيقي.

2. لدينا من جهة $F(x)=x^2+\sin x+k$ و لدينا من جهة ثانية $F(®)=-1$.

$F(®)=-1$ يعني $®^2-0+k=-1$ و منه $k=-1-®^2$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2+\sin x-1-®^2$

تمرين محلول3: نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2}$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل: __الطريقة الأولى__: نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ و $G'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

__الطريقة الأولى__: نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)-\left(\frac{2x-1}{x-2}+x\right)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

حساب الدوال الأصلية

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$

2. خواص

* إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لـ f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية لـ $f+g$ على I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k\in\mathbb{R})$.

3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$u'u^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$

تمرين محلول1: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=x^3-3x+5$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\frac{2}{x^2}$ و $I=]-\infty;0[$ * $h(x)=\frac{3}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$

الحل: * دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ :

$$F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-3\times\frac{1}{2}x^2+5x=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$$

* دالة أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بـ :

$$G(x)=2\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x}$$

* دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بـ :

$$H(x)=3\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}=-\frac{3}{2x^2}-2\sqrt{x}$$

تمرين محلول2: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=(x+1)\left(x^2+2x+5\right)^2$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $I=\mathbb{R}$

طريقة: لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\frac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

- يظهر و أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x)=x^2+2x+5$.

لدينا $u'(x)=2x+2$ أي أن $u'(x)=2(x+1)$ و منه $x+1=\frac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)\times\left[u(x)\right]^2$ أي أن $f=\frac{1}{2}\times u'u^2$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3$ أي $F(x)=\frac{1}{6}\left(x^2+2x+5\right)^3$.

- يظهر و أن الدالة g من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x)=x^2+1$.

لدينا $u'(x)=2x$ أي أن و منه $3x=\frac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x)=\frac{3}{2}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي أن $g=\frac{3}{2}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $G(x)=\frac{3}{2}\times2\sqrt{u(x)}=3\sqrt{u(x)}$

أي $G(x)=3\sqrt{x^2+1}$.

المعادلات التفاضلية

1. تعاريف

تعاريف: معادلة تفاضلية هي معادلة:

1. المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز y، z أو حرف آخر.
2. تظهر فيها بعض مشتقات y (المشتقة الأولى y' أو مشتقات من رتبة أكبر y'' ...).
3. نسمي حلا لمعادلة تفاضلية (E) في مجال I كل دالة تحقق (E) في I.

مثال: الدالة $y: x \mapsto 1+\sin x$ هي حل في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية: $y' = \cos x$.

2. المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هي الدوال y حيث: $y = F(x) + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

البرهان: من الواضح أن الدوال y التي تحقق $y' = f(x)$ هي الدوال الأصلية للدالة f على I و منه إذا كانت F دالة أصلية لـِ f على I فإن كل الدوال الأصلية لـِ f على I هي الدوال $x \mapsto F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x^2}$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y = -\frac{1}{x} + c$ مع c ثابت حقيقي.

3. المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = f(x)$ هي الدوال y حيث: $y = G(x) + c_1 x + c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

البرهان: نعلم أن $y'' = (y')'$ و منه $y'' = f(x)$ تعني $(y')' = f(x)$ أي $y' = F(x) + c_1$ حيث: F دالة أصلية للدالة f على I و c_1 عدد حقيقي ثابت. لدينا من جهة ثانية:

$y' = F(x) + c_1$ تعني $y = G(x) + c_1 x + c_2$ حيث G دالة أصلية للدالة F على I. c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

(الدالة F قابلة للاشتقاق على I فهي إذن مستمرة على هذا المجال و بالتالي فهي تقبل دوال أصلية على I)

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \sin x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y = -\sin x + ax + b$. a، b ثابتان.

4. المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = -\mu^2 y$

مبرهنة (دون برهان): إذا كان μ عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -\mu^2 y$ هي الدوال y حيث: $y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

ملاحظة: يمكننا ان نتأكد من أن الدوال y حيث: $y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$ ، مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان، حلول للمعادلة التفاضلية $y'' = -\mu^2 y$ و ذلك باشتقاق الدالة y مرتين.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -2y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y = c_1 \cos\left(x\sqrt{2}\right) + c_2 \sin\left(x\sqrt{2}\right)$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

تمرين محلول1:

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $\quad y' = 3x^2 - 2x + 5$.

2. عين F حل المعادلة التفاضلية (E) بحيث: $F(1) = -2$.

الحل:

1. دالة أصلية للدالة $x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ هي الدالة $x \mapsto x^3 - x^2 + 5x$ و بالتالي فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال y حيث: $y = x^3 - x^2 + 5x + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2. لدينا $F(x) = x^3 - x^2 + 5x + c$ و $F(1) = -2$ و منه $1^3 - 1^2 + 5\times1 + c = -2$ أي $c = -7$.

إذن الحل F الذي يحقق الشرط $F(1) = -2$ هي الدالة F حيث: $F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$.

تمرين محلول2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $\quad y'' = 2\cos\left(2x + \frac{®}{4}\right)$.

الحل:

دالة أصلية للدالة $x \mapsto 2\cos\left(2x + \frac{®}{4}\right)$ هي الدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{®}{4}\right)$ و دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{®}{4}\right)$ هي الدالة $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{®}{4}\right)$ بالتالي فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال y حيث: $y = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{®}{4}\right) + c_1 x + c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

تمرين محلول3: نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $\quad y'' + ®^2 y = 0$.

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E).

2. عين الحل F الذي يحقق الشرطين: $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

الحل:

1. نلاحظ أولا أن $y'' + ®^2 y = 0$ تعني $y'' = -®^2 y$ و منه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -®^2 y$ هي الدوال y حيث: $y = c_1 \cos ®x + c_2 \sin ®x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

2. لدينا: $F(x) = c_1 \cos ®x + c_2 \sin ®x$ و $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

لدينا: $F'(x) = -®c_1 \sin ®x + ®c_2 \cos ®x$ و بالتالي:

$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \\ F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} c_1 \cos\frac{®}{2} + c_2 \sin\frac{®}{2} = \frac{2}{3} \\ -®c_1 \sin\frac{2®}{3} + ®c_2 \cos\frac{2®}{3} = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} \\ -®c_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + ®c_2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

إذن $\begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases}$ ومنه $c_2 = \frac{2}{3}$ و $c_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. نجد هكذا: $F(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\cos ®x + \frac{2}{3}\sin ®x$

دراسة دالة أصلية

أ- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ماذا تستنتج ؟
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. عين معادلة (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
4. أرسم (Δ) و (C_f).

ب- لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ بحيث $F(0)=0$. تعيين عبارة $F(x)$ غير مطلوب.

1. فسر وجود الدالة F على المجال $]0;+\infty[$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة F على المجال $]0;+\infty[$.
3. نعتبر الدالتين H و K المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ بـــ:

$$K(x)=F(x)-\frac{2}{3}x \quad \text{و} \quad H(x)=F(x)-x$$

- أدرس اتجاه تغير الدالتين H و K على المجال $]0;+\infty[$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\frac{2}{3}x\le F(x)\le x$. استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.

4. بين أن المعادلة $F(x)=$® تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا ~ ثم بين أن ®$\le$~$\le\frac{3}{2}$®.

تعيين دوال أصلية لدالة

أ- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها. ماذا تستنتج ؟
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. استنتج، حسب قيم x، إشارة $f(x)$.
3. أرسم في معلم المنحي (C) الممثل للدالة f.

ب- لتكن F، G و H الدوال الأصلية للدالة f على الترتيب على المجالات $]-\infty;-1[$، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$.

4. ما هو اتجاه تغير كل من F، G و H على مجموعة تعريف كل منها ؟
5. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$، $f(x)=\dfrac{1}{2(x-1)^2}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}$
6. استنتج عبارة كل من F، G و H على مجموعة تعريف كل منها.
7. شكل جدول تغيرات كل من F، G و H مع تحديد النهايات.
8. أرسم في نفس المعلم التمثيلات البيانية للدوال F، G و H.

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $f: x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

تطبيق1: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ، $I=]0;+\infty[$.
2. $f(x)=e^{ax+b}$ ، $I=\mathbb{R}$.
3. $f(x)=\left(-x+\dfrac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$ ، $I=\mathbb{R}$.
4. $f(x)=\cos(2x)e^{\sin(2x)}$ ، $I=\mathbb{R}$.

تطبيق2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=4xe^{2x}$

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto u'(x)/u(x)$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $f: x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

تطبيق1: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ، $I=]-2;+\infty[$.
2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ، $I=]1;+\infty[$.
3. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ، I =]0;®[.
4. $f(x)=\dfrac{-2e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$.

تطبيق2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $]-2;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{(x+2)^2}$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-2;+\infty[$.

تطبيق2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x-1}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=a+\dfrac{be^x}{e^x-1}$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

موضوع محلول

تمرين : (بكالوريا)

I. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-4} \ .$$

1.بين أن f زوجية ثم ادرس تغيراتها.

2.بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x)=1+\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x+2}$$

3.عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

II. لتكن الدالة g المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ:

$$g(x)=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

$\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1.بين أن g فردية ثم ادرس تغيراتها .

2.بين أن المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له .

3. ارسم المنحني $\mathcal{C}$.

4.احسب مشتقة الدالة h المعرفة من أجل كل $x\neq -a$ حيث $h(x)=(x+a)\ln|x+a|-x$ ، a عدد حقيقي .

5.استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]2;+\infty[$

حل مختصر

I. 1. من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ، $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}-\{-2;2\}$

و $f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2-4}=\frac{x^2}{x^2-4}=f(x)$ و منه f دالة زوجية

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$: $f'(x)=\frac{-8x}{(x^2-4)^2}$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و متزايدة على المجالين على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;0]$

2. $f(x)=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

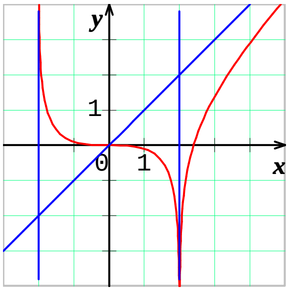
3. مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي:

$F(x)=x+\ln|x-2|-\ln|x+2|=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+k$ ، k ثابت حقيقي

II .1 $g'(x)=f(x)$ ، إذن $g'(x)$ تنعدم عند 0 ، تكون موجبة على $]-\infty;-2[$ و $]2;+\infty[$ و سالبة على $]-2;0]$ و $]2;+\infty[$.

2.لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

إذن المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$



4. $h'(x)=\ln|x+a|$

$g(x)=x+\ln|x-2|-\ln|x+2|$

فتكون دالة أصلية للدالة g على $]2;+\infty[$ هي:

$$G(x)=\frac{1}{2}x^2+(x-2)\ln|x-2|-(x+2)\ln|x+2|$$

تعاليق

• بما أن f دالة زوجية ، نقتصر دراستها على $[0;2[\cup]2;+\infty[$

• لا تنس التنبيه إلى أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من مجالات تعريفها.

• تحقق أن عناصر D متناظرة بالنسبة إلى الصفر و أن $g(-x)=-g(x)$ ،اقتصر دراسة g على $[0;2[\cup]2;+\infty[$

• لاحظ أن إشارة $f(x)$ هي إشارة x^2-4

• طبق خواص الدوال الأصلية

• يمكن ملاحظة أنه إذا كان $x>2$ فإن $|x-2|=x-2$ و $|x+2|=x+2$

موضوع موجه

تنبيه

في الجزء I من التمرين نريد دراسة تغيرات الدالة الأصلية لدالة معطاة دون معرفة عبارتها الجبرية بالنسبة لنهايات هذه الدالة الأصلية عند $-\infty$ و عند $+\infty$ تنقصنا المعومات لحسابها .

في الجزء **II** من التمرين، نعين دالة أصلية G للدالة g دون أن تكون g مكتوبة على أحد الأشكال المعروفة $\frac{u'}{u^n}$ ، $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ،... و لكن الشكل العام لهذه الدالة الأصلية معلوم.

تمرين: الجزءان I و II مستقلان

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1.بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$.

2. نفرض أن $F(0)=0$

عين معادلة للمماس (T) للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة O التي فاصلتها0.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$.

4. ادرس إشارة F على $\mathbb{R}$.

5. احسب F'' المشتقة الثانية للدالة F على $\mathbb{R}$.

6. ادرس إشارة F'' واستنتج وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس (T).

II . لتكن الدالة G المعرفة كما يلي $G(x)=(ax+b)\ln x$.

1. عين العددين الحقيقيين a و b كي تكون الدالة G أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة g المعرفة بـ :

$$g(x)=\frac{2x-3+2x\ln x}{x}$$

2. استنتج دالة أصلية للدالة g تنعدم من أجل e .

توجيهات

I .1 الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2. معادلة المماس هي : $y=F'(0)(x-0)+F(0)$ لا حظ أن $F'(x)=f(x)$

3. اتجاه تغير الدالة F يتوقف على معرفة إشارة $F'(x)$.

4. الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $F(0)=0$ (شكل جدول تغيرات الدالة F لتلاحظ إشارة F).

5. $F''(x)=f'(x)$ و مشتقة الدالة $\sqrt{u}$ هي $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

II. 1. ضع $G'(x)=g(x)$ فتجد $a=2$ و $b=-3$

2. مجموعة الدوال الأصلية H للدالة g هي الدوال من الشكل $H(x)=G(x)+k$ و بوضع الشرط $H(0)=e$ تجد الدالة الأصلية المطلوبة.

تمارين تطبيقية

1 - الدوال الأصلية

1 في كل حالة من الحالات التالية بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D

.1 $F: x \mapsto \frac{x^2-3x}{x^2+1}$ ، $f: x \mapsto \frac{3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2}$ ،

$D=\mathbb{R}$

.2 $F: x \mapsto \frac{x+1}{x^2+3}$ ، $f: x \mapsto \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$ ،

$D=\mathbb{R}$

.3 $F: x \mapsto \frac{x^2-5x+7}{x-2}$ ، $f: x \mapsto \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ ،

$D=]-\infty;2[$

.4

$F: x \mapsto \frac{-x^2+x-4}{x^2+3x-1}$ ، $f: x \mapsto \frac{-4x^2+10x+11}{(x^2+3x-1)^2}$ ،

$D=]1;+\infty[$

.5 $F: x \mapsto \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$ ، $f: x \mapsto \frac{3x+1}{2x\sqrt{x}}$ ،

$D=]0;+\infty[$

2 الدوال f ، g ، h ، k ، F ، G ، H و K معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=x-\frac{1}{x^2}$ ، $g(x)=\frac{9}{x^4}$ ، $h(x)=-15x^2$

$k(x)=-10x^4+2x-1$ ، $F(x)=4-5x^3$ ،

$G(x)=-2x^5+x^2-x+3$ ، $H(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}$ ،

$K(x)=-\frac{3}{x^3}+1$

- أرفق بكل دالة من الدوال f ، g ، h ، k دالة أصلية F ، G ، H أو K .

3 F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$F(x)=x^2+\frac{1}{x}$

و
$$G(x)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{x}-1 & ; \quad x\in]-\infty;0[\\ x^2+\frac{1}{x}+2 & ; \quad x\in]0;+\infty[\end{cases}$$

.1بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

.2 هل يوجد عدد حقيقي ثابت c حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $G(x)=F(x)+c$ ؟

.3اشرح النتيجة المحصل عليها.

4 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{4x^3}$$

.1تحقق أن الدالة F المعرفة بـــ :

$F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}$ أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

.2عين الدالة الأصلية G للدالة f و التي تنعدم من اجل $\frac{11}{8}$.

5 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=3x+\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}$$

.1تحقق أن الدالة F المعرفة بـــ:

$F(x)=\frac{3}{2}x^2+\ln x-\ln(x^2+1)$ أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

.2 عين الدالة الأصلية G للدالة f و التي تنعدم من اجل1.

- في التمارين من **6** إلى **10** تحقق أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال I ثم عين الدالة الأصلية على I التي تنعدم من أجل x_0 .

6 $F(x)=2\sqrt{x^2+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، $x_0=\sqrt{3}$

7 $F(x)=\cos\left(2x-\frac{®}{3}\right)$ ، $I=\mathbb{R}$

$f(x)=-2\sin\left(2x-\frac{®}{3}\right)$ ، $x_0=\frac{®}{6}$

8 $F(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x-1)^2}$ ، $I=]1;+\infty[$

$f(x)=\frac{1}{(x-1)^3}$ ، $x_0=2$

9 $F(x)=e^{-x^2+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

$f(x)=-e^{-x^2+1}$ ، $x_0=0$

10 $F(x)=x(\ln x-1)$ ، $I=]0;+\infty[$

$f(x)=\ln x$ ، $x_0=1$

- في التمارين من **11** إلى **16**،اذكر إن كانت الدالتان F

و G أصليتان لنفس الدالة f على المجال المعطى:

11 $F(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ ، $G(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ ، $I=]-1;+\infty[$

12 $F(x)=\dfrac{3}{x-1}$ ، $G(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ ، $I=]1;+\infty[$

13 $F(x)=\tan^2 x$ ، $G(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ، $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

14 $F(x)=\dfrac{x}{2x^2-3x+5}$ ، $G(x)=\dfrac{4x^2-5x+10}{2x^2-3x+5}$ ، $I=\mathbb{R}$

15 $f(x)=\dfrac{2x^2+8x-5}{\left(x^2+x+3\right)^2}$ ، $F(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x+3}$ ، $I=\mathbb{R}$

16 $f(x)=\dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ ، $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ ، $I=]0;+\infty[$

17 F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$F(x)=\dfrac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}$ و $G(x)=\dfrac{-6x-2}{x^2+x+1}$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}$

أ) بحساب الفرق $F(x)-G(x)$ ، ب) باستعمال المشتقة

2 - حساب الدوال الأصلية

18 جد الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ للدوال التالية:

1) $f(x)=x^4-4x^3+3x^2-6x+1$

2) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{3}$

3) $f(x)=-3\sin x+2\cos x+1$

4) $f(x)=-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)+2\sin(\pi+x)$

5) $f(x)=x^2+2x-e^x$

19 جد الدوال الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ للدوال التالية:

1) $f(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4}$

3) $f(x)=1+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}$

4) $f(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+x-1$

5) $f(x)=e^{-x}+\dfrac{2}{x}$

20 عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال I :

1) $f(x)=5x^4-6x^3-x+3$ ، $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=-\cos x+3\sin x$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=x^2-x+\dfrac{1}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$

4) $f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{3x^3}-1$ ، $I=]0;+\infty[$

5) $f(x)=3^x-2^x$ ، $I=\mathbb{R}$

• في التمرينين **21** و **22** تعرّف على الشكل $u'u^n$ للدالة f $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ وعين مجموعة دوالها الأصلية على المجال I

21 1) $f(x)=(x-1)^4$ ، $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{(x+2)^3}{5}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=3(3x+4)^5$ ، $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=e^x\left(e^x+1\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x)^2$ ، $I=]0;+\infty[$

22 1) $f(x)=x^2\left(x^3+1\right)^4$ ، $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=3\cos x\sin^2 x$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\tan^3 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ ، $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) $f(x)=-20x\left(8-\dfrac{x^2}{2}\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$

• في التمرينين **23** و **24** ، تعرف على الشكل $\dfrac{u'}{u^n}$ $(n\in\mathbb{N},n>2)$ وعين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

23 1) $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^7}$ ، $I=]2;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}$ ، $I=]-1;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{2}{(2x-1)^3}$ ، $I=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ ، $I=]1;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

24

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{6x^2}{(x^3+1)^4}$ ؛ $I=]-1;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ ؛ $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) $f(x)=\dfrac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}$ ؛ $I=[0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x+2)^2}$ ؛ $I=[1;+\infty[$

• في التمرينين **25** و **26** ، تعرف على الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ و عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

25

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ ؛ $I=]1;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$ ؛ $I=]2;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$ ، $I=]3;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+3$ ، $I=]-\infty;2[$

5) $f(x)=\dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$

26

1) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$ ، $I=]3;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ ، $I=]0;\pi[$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+3}}$ ، $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{\sqrt{x^4+x^2}}$ ، $I=]0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ، $I=]1;+\infty[$

27 تعرف على الشكل $\dfrac{u'}{u}$ و عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ؛ $I=]1;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ؛ $I=]0;\pi[$

28 تعرف على الشكل $u'e^u$ و عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

1) $f(x)=e^{4x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=xe^{-x^2}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $I=]0;+\infty[$

4) $f(x)=\sin x\, e^{\cos x}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}$ ؛ $I=]-1;+\infty[$

29 تعرف على الشكل المناسب للدالة f ثم عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

1) $f(x)=2x^3(x^4+2)^3$ ؛ $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}$ ؛ $I=]-\infty;-1[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^2}{x^3+1}$ ؛ $I=]-1;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}$ ؛ $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

5) $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$ ؛ $I=]1;+\infty[$

30 عين دالة أصلية على $\mathbb{R}$ لكل من الدوال التالية:

1. $f(x)=\sin^2 x$
2. $f(x)=\cos^2 x$
3. $f(x)=\sin x\cos x$

3 - المعادلات التفاضلية

• في التمارين من **31** إلى **34** ، حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية

31
1) $y'=2x^{2}+x-1$.
2) $y'=2x+1-\dfrac{1}{x^{2}}$
3) $y'=\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}}$
4) $y'=3\sin(2x)$

32
1) $y''=4x^{3}-3x^{2}-1$
2) $y''=\cos(2x+3)$
3) $y''=\dfrac{x^{4}+x^{3}+1}{x^{2}}$
4) $y''=\cos(2x)-2\sin x$

33
1) $y''+y=0$
2) $y''+9y=0$
3) $4y''+\circledR^{2}y=0$

34 حل المعادلة التفاضلية $4y''+121y=0$ ، ثم عين الحل F الذي يحقق الشرطين التاليين:
$F(2)=1$ و $F'(-1)=2$

35 1. حل المعادلة التفاضلية $9y''+4y=0$.
2. عين الحل الخاص F لهذه المعادلة الذي يحقق ما يلي:
المنحنى الممثل للدالة F يشمل النقطة $A\left(\dfrac{\circledR}{2};\sqrt{3}\right)$ و يقبل في هذه النقطة مماسا معامل توجيهه $-\dfrac{2}{3}$.
3. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x :
$$F(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\circledR}{6}\right)$$
4. حل المعادلة $F(x)=0$ ثم علم صور حلولها على الدائرة المثلثية.

تمارين للتعمق

36 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[$ كما يلي:
$$f(x)=\frac{2x-1}{x^{2}(x-1)^{2}}$$
1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$: $f(x)=\dfrac{a}{x^{2}}+\dfrac{b}{(x-1)^{2}}$
2. استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;1[$ تحقق: $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=6$.

37 نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ :
$$f(x)=\frac{x^{3}+3x}{(x^{2}-1)^{3}}$$
1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:
$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^{3}}+\frac{b}{(x+1)^{3}}$$
2. استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$
3. استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ تحقق: $F(0)=1$.

38 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:
$$f(x)=\frac{3x+2}{(x+1)^{2}}$$
1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^{2}}$
2. استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

• في التمارين من **39** إلى **41** $f(x)$ عين دالة أصلية للدالة f على المجال المعطى

39 $f(x)=\dfrac{x^{2}-2x}{(x-1)^{2}}$ ، $I=]1;+\infty[$
اكتب $f(x)$ على الشكل $\left[f(x)=a+\dfrac{b}{(x-1)^{2}}\right]$

40 $f(x)=\dfrac{3x^{2}+4x-25}{x^{2}+x+6}$ ، $I=]2;+3[$
اكتب $f(x)$ على الشكل $\left[f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}+\dfrac{c}{x-2}\right]$

41 $f(x)=\dfrac{2x^{2}+3x+2}{x+1}$ ، $I=]-\infty;-1[$
اكتب $f(x)$ على الشكل $\left[f(x)=ax+b+\dfrac{3}{x+1}\right]$

42 f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\cos^{3}x$.
1. تحقق أن $f(x)=\cos x-\cos x\sin^{2}x$
2. عين دالة أصلية للدالة f $\mathbb{R}$.

43 f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=\sin x+\sin^{3}x$.

1. تحقق أن $f(x)=2\sin x-\sin x\cos^2 x$

2. عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

44 f: دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=\sin^3 x\cos^2 x$.

1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=\sin x\left(a\cos^2 x+b\cos^4 x\right)$

2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

45 f: دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=\sin^4 x\cos^5 x$.

1.بملاحظة أن $f(x)=\cos x\left(\sin^4 x\cos^4 x\right)$ ، اكتب $f(x)$ على الشكل:
$$f(x)=\cos x\left(a\sin^4 x+b\sin^6 x+c\sin^8 x\right)$$

2.استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

46 نريد تعيين دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto \sin^4 x$ على $\mathbb{R}$.

1. احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f و f'' هي الدالة المشتقة للدالة f' .

2.عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 2x$

3. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

47 عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـ: $f:x\mapsto \tan^{2004}x+\tan^{2008}x$

48 بكالوريا

u و v دالتان معرفتان على $I=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ كما يلي:
$$u(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad \text{و} \quad v(x)=\frac{1}{\cos^4 x}$$

1. تحقق أنه من أجل كل x من I :
$$u'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$$

2. جد دالة أصلية للدالة v على I و التي تنعدم من أجل 0

49 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=x\cos x$

1. بين أن : $f(x)+f''(x)=-2\sin x$

2.استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

50 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=x\sin x$

1. تحقق أن الدالة f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F(x)=ax\cos x+b\sin x$

2.عين الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=\frac{\pi}{2}$.

51 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=x^2e^{2x}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2.استنتج دالة أصلية للدالة f و التي تنعدم من أجل $x=0$

52 إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال D و إذا كان $r\in\mathbb{Q}$ فإن الدالة g حيث $g=f^r$ قابلة للاشتقاق على D و $g'=rf'f^{r-1}$

تطبيق: عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال D

أ) $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $D=]0;+\infty[$

ب) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ ؛ $D=\mathbb{R}$

جـ) $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}$ ؛ $D=]-1;+\infty[$

53 لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:
$$f(x)=\frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x-1}$$

1.عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=e^x+a+\frac{be^x}{e^x-1}$

2.استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

54 من بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ كما يلي:
$$f(x)=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

1. عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $g:x\mapsto (x+a)\ln|x+a|-x$ حيث a حقيقي معطى

2.استنتج دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \ln|x+a|$

3.عين دالة أصلية للدالة f على $]2;+\infty[$.

55 من بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:
$$f(x)=\frac{6e^x}{e^{2x}-1}$$

1. عين العددين الحقيقيين ~ و بحيث يكون من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{\sim e^x}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x+1}$

2.استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

56 من بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$$

1.احسب الدالة المشتقة الثانية f'' للدالة f .

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$$

3.استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

57 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=e^x\cos x$$

1.احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

2. جد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=af''(x)+bf'(x)$

3.استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

58 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^3e^{2x}$$

جد دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث:

$$F(x)=P(x)e^{2x}$$

و P هو كثير حدود من الدرجة الثالثة.

59 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=e^{a\,x}(\sim\cos\ x+\ \sin\ x)$$

حيث a ، ~ ، ، ¯ و أعداد حقيقية ثابتة.

1. احسب $f'(x)$

2. نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=e^{-x}(\sin x-5\cos x)$$

باستعمال نتيجة السؤال الأول جد دالة أصلية G للدالة g التي تحقق $G(0)=3$.

مسائل

60 بكالوريا

f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة كما يلي:

$$f(x)=1+\frac{3}{4x^2}-\frac{3\ln x}{2x^2}$$

$(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

I . 1. أ- عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب- احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

جـ - احسب $f\left(\sqrt{e}\right)$

د- عين المستقيمين المقاربين للمنحنى $(\mathcal{C})$ و تقاطعهما مع المنحنى $(\mathcal{C})$.

هـ - ارسم $(\mathcal{C})$.

2. أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $f(x)>0$

3. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي k و جود و عدد حلول المعادلة ذات المجهول x :

$$4(k-1)x^2-3+6\ln x=0$$

II . لتكن الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3\ln x}{2x}$

1. احسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.فسر لنتيجة بيانيا.

2.احسب $g'(x)$ من اجل كل x من $]0;+\infty[$.

3. استنتج تغيرات الدالة g على $]0;+\infty[$.

4. عين معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) الممثل للدالة g عند النقطة التي فاصلتها 1.

5. بين أن المنحنى (Γ) يقبل نقطة انعطاف يطلب نعيين إحداثياتها.

6. احسب $g(1)\times g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ثم تحقق أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا محصورا بين $\dfrac{1}{2}$ و 1 .

7. أ- بين أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا D يطلب تعيين معادلة له.

ب- ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة إلى المستقيم D .

8. ارسم (T) ، D و (Γ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

61 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=e^{-x}\sin x$$

1. أ- احسب المشتقات المتتابعة للدالة f إلى غاية الرتبة 4 .

ب- جد علاقة بين الدالة f و مشتقتها ذات الرتبة 4 التي نرمز لها بالرمز $f^{(4)}$

استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n ،

نضع: $u_n=F\left[(2n+1)\circledR\right]-F\left[2n\circledR\right]$

أ- احسب u_0

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n=\frac{e^{-2n\circledR}}{2}\left(e^{-\circledR}+1\right)$$

جـ - بين أن المتتالية (u_n) هندسية ، حدّد أساسها .

استنتج نهاية المتتالية (u_n).

اختيار من متعدد

62 لكل الأسئلة التالية ، إجابة واحدة صحيحة، ما هي ؟

.1 f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$F(x)=\frac{1}{2x}-\frac{3}{x+1}$$

F هي دالة أصلية لدالة f على $]0;+\infty[$

دالة أصلية أخرى G للدالة f على $]0;+\infty[$ معرفة بـــ :

أ) $G:x\mapsto -x+\dfrac{6x^2+x+1}{2x(x+1)}$ ، ب) $G:x\mapsto\dfrac{6x^2+x+1}{2x(x+1)}$

جـ) $G:x\mapsto -\dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{x+1}$

2 f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=2x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$$

دالة أصلية F للدالة f على $]-1;+\infty[$ معرفة بـــ :

أ) $F(x)=\dfrac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$ ، ب) $F(x)=\dfrac{-x+1}{(x+1)^2}$

جـ) $F(x)=\dfrac{x^3-x+1}{(x+1)^2}-1$

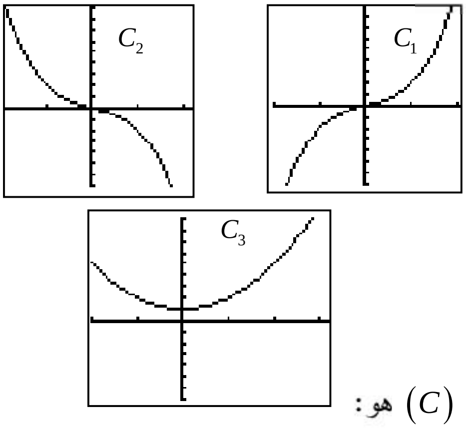
.3 f دالة موجبة على مجال D و F دالتها الأصلية على هذا المجال، إذن:

أ) F متزايدة تماما على D. ب) F متناقصة تماما على D

جـ) F ليست رتيبة تماما على D .

.4 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-1-x^2$

أحد المنحنيات التالية C_1 ، C_2 و C_3 هو منحني بياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$



المنحني (C) هو :

أ) C_1 ب) C_2 جـ) C_3

أصحيح أم خطأ ؟

63 اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك

.1 دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة f المعرفة بـ:

$f(x)=\dfrac{3x^3+2}{2x^2}$ هي الدالة F المعرفة بـ:

$$F(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{x}$$

.2 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث إشارة $f(x)$ معطاة بـــ:

x	$-\infty$	~	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

إذا كانت F دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f فإن $F(\sim)$ قيمة حدية صغرى لـــ F على $\mathbb{R}$.

.3 f دالة سالبة تماما على $[1;3]$. إذا كانت F دالة أصلية على $[1;3]$ فإن: $F(2,1)>F(2,2)$.

.4 دالتان مختلفتان يمكن أن تكونا دالتين أصليتين لنفس الدالة.

.5 دالة يمكن أن تكون أصلية لدالتين مختلفتين .

.6 الدالتان F و G المعرفتان على $]0;+\infty[$ بـ :

$$F(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}} \quad \text{و} \quad G(x)=1+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

أصليتان لنفس الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

.7 الدالة f التي دالتها المشتقة f' معرفة بـــ:

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

.8 f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

الدالة f تقبل دالة أصلية F على $]0;+\infty[$ تحقق $F(2)=0$.

.9 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$

الدالة f تقبل دالة أصلية F متزايدة على $\mathbb{R}^+$.

.10 F دالة أصلية لدالة f معرفة و مستمرة على مجال I

إذا كانت f موجبة على مجال $[a;b]$ فإن $F(a)>F(b)$

06 الحساب التكاملي

الكفاءات المستهدفة

- توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى.
- استعمال التكامل بالتجزئة.
- توظيف خواص التكامل لحساب دوال أصلية.
- حساب حجوم لمجسمات بسيطة.
- توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة.

ثابت بن قرة.. إقليدس العرب

ولد ثابت بن قرة (سنة 221 هـ = 834 م) في حران من أرض الجزيرة شمال العراق، بتركيا الآن.

برع ثابت في علم الهندسة حتى قيل عنه إنه أعظم هندسي عربي على الإطلاق، وقال عنه "يورانت ول": إنه أعظم علماء الهندسة المسلمين؛ فقد ساهم بنصيب وافر في تقدم الهندسة، وهو الذي مهد لإيجاد علم التكامل والتفاضل، كما استطاع أن يحل المعادلات الجبرية بالطرق الهندسية، وتمكن من تطوير وتجديد نظرية فيثاغورث، وكانت له بحوث عظيمة وابتكارات رائدة في مجال الهندسة التحليلية؛ فقد ألف كتابا في الجبر، شرح فيه العلاقة بين الجبر والهندسة، وكيفية التوفيق بينهما، واستطاع أن يعطي حلولا هندسية لبعض المعادلات التكعيبية، وهو ما أفاد علماء الغرب فيما بعد في تطبيقاتهم وأبحاثهم الرياضية في القرن السادس عشر.

و يجدر بنا أن نذكر أن ثابت بن قرة مهد لحساب التكامل وذلك عندما وجد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره و حين حل معادلة من الدرجة الثالثة بطريقة هندسية و ذلك في كتابه مدخل إلى كتاب إقليدس.


ثابت بن قرة

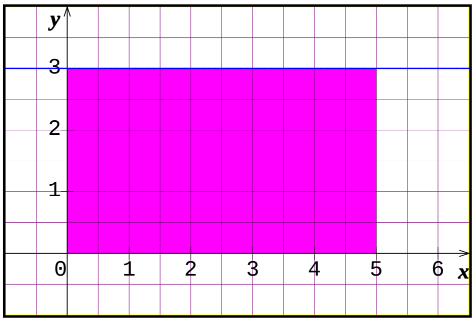
<u>ومن مؤلفات ثابت الرياضية والهندسية:</u>

- كتاب في الشكل الملقب بالقطاع.
- كتاب في مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة.
- كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها.
- مساحة المجسمات المكافية.
- قول في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية.

نشاط أول

الجزء الأول

نزود المستوي في كل ما سيأتي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $1cm$.

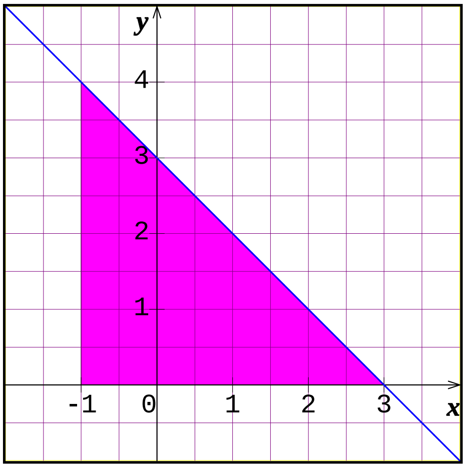


1) نعتبر الدالة f_1 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f_1(x)=3$.

و ليكن (C_1) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـِ A_1 إلى مساحة الحيز الملون تحت المنحني (C_1) بين العددين 0 و 5.

- أحسب بـِ cm^2 المساحة A_1.
- عين دالة أصلية F_1 للدالة f_1 على $\mathbb{R}$.
- أحسب $F_1(5)-F_1(0)$.

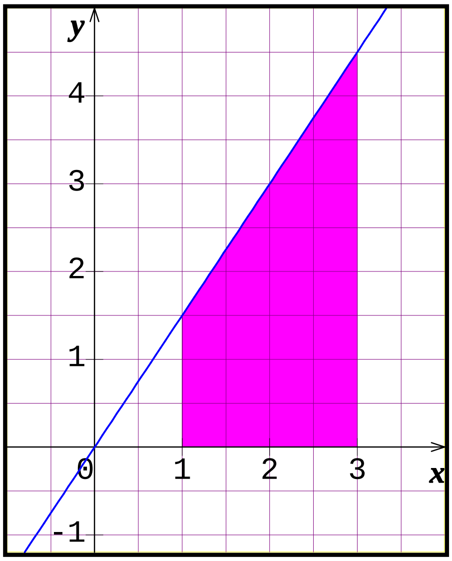


2) نعتبر الدالة f_2 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f_2(x)=-x+3$.

و ليكن (C_2) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـِ A_2 إلى مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_2)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=3$.

- أحسب بـِ cm^2 المساحة A_2.
- عين دالة أصلية F_2 للدالة f_2 على $\mathbb{R}$.
- أحسب $F_2(3)-F_2(-1)$.



3) نعتبر الدالة f_3 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f_3(x)=\frac{3}{2}x$.

و ليكن (C_3) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـِ A_3 إلى مساحة الحيز مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث $1\leq x\leq 3$ و $0\leq y\leq f_3(x)$

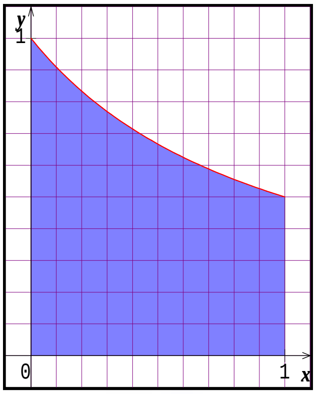
- أحسب بـِ cm^2 المساحة A_3.
- عين دالة أصلية F_3 للدالة f_3 على $\mathbb{R}$
- أحسب $F_3(1)-F_3(3)$.

4) ماذا تلاحظ في الحالات الثلاث ؟ ضع تخمينا.

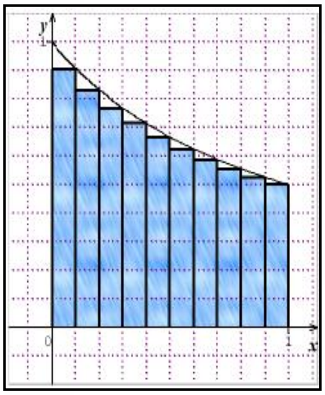
الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

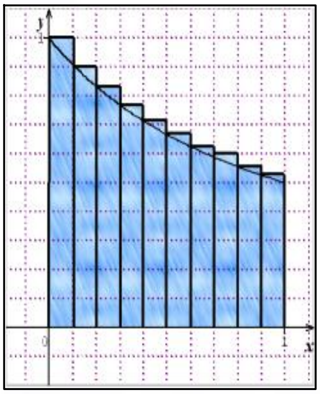
و ليكن (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



(1)



(2)



(3)

1) هل يمكن، باستعمال قاعدة في الهندسة، حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل (1) ؟

2) أحسب A' مساحة الحيز الملون في الشكل (2) و A'' مساحة الحيز الملون في الشكل (3).

يمكنك استعمال الجدول التالي:

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$							
$f(x)$										
المساحة										

3) استنتج حصرا للمساحة A.

4) تحقق ما إن كانت النتيجة المحصل عليها متلائمة مع تخمينك الذي وضعته في السؤال 4 من الجزء الأول.

نشاط ثان

نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;2]$ بـ $g(x)=-x+2$. و ليكن (d) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقطة $A(-1;3)$ و لتكن النقطة A' مسقطها العمودي على محور الفواصل.

نعتبر نقطة M من المنحنى (d) فاصلتها x و نرمز بـ M' إلى مسقطها العمودي على محور الفواصل.

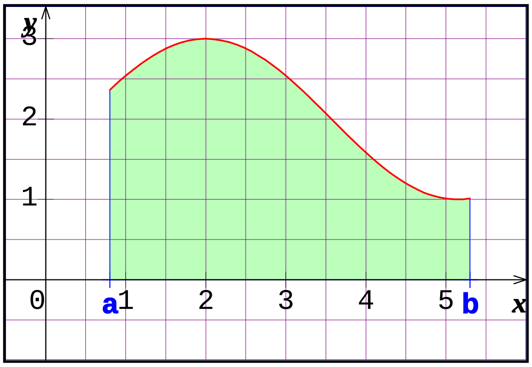
نرمز بـ $G(x)$ إلى مساحة شبه المنحرف $AA'M'M$.

1. أنجز شكلا مناسبا.
2. نفرض أن $-1\le x\le 2$
   - أحسب $G(x)$ بدلالة x ثم تحقق أن $G'(x)=g(x)$.
   - أحسب $G(-1)$. ماذا تستنتج ؟
3. نفرض أن $x\le -1$
   - أحسب $G(x)$ بدلالة x. ماذا تلاحظ ؟
   - أحسب $G(-1)$. ماذا تستنتج ؟

تكامل دالة

1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـ f على I.
مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.



ملاحظات:

1. الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.
2. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OAKB$ حيث K هي النقطة التي إحداثياها $(1;1)$.

2. تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I. إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل x من I، $G(x)=F(x)+k$.

لدينا: $G(b)-G(a)=\left[F(b)+k\right]-\left[F(a)+k\right]=F(b)-F(a)$

نلاحظ هكذا أن العدد $F(b)-F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I.

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.
يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لـ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$. نقرأ: "التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x".

ملاحظة:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

2. يمكن استبدال المتغير x بأحد الحروف t، q،... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد و F دالة أصلية لـ f على I. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$، $x=b$ و $y=0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$.

تمرين محلول1: أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-1}^{2}(-3x^2+1)dx$ **2)** $\int_{0}^{1}e^{2x-1}dx$ **3)** $\int_{-®}^{®}\sin x dx$

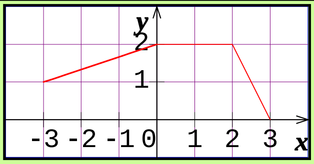
الحل:

.1 $\int_{-1}^{2}(-3x^2+1)dx=[-x^3+x]_{-1}^{2}=(-6)-(0)=-6$.

.2 $\int_{0}^{1}e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}[e^{2x-1}]_{0}^{1}=\frac{1}{2}[(e)-(e^{-1})]=\frac{e^2-1}{2e}$.

.3 $\int_{-®}^{®}\sin x dx=[-\cos x]_{-®}^{®}=(1)-(1)=0$.

تمرين محلول2: التمثيل البياني المقابل هو لدالة f .



أحسب التكاملات التالية: **1)** $\int_{-3}^{2}f(x)dx$ **2)** $\int_{-3}^{3}f(x)dx$ **3)** $\int_{0}^{3}f(x)dx$

الحل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $[-3;3]$.

(1 $\int_{-3}^{2}f(x)dx=3\times\frac{1+2}{2}+4=\frac{17}{2}$ (2 $\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{17}{2}+\frac{1\times 2}{2}=\frac{19}{2}$ (3 $\int_{0}^{3}f(x)dx=2\times 2+\frac{1\times 2}{2}=5$

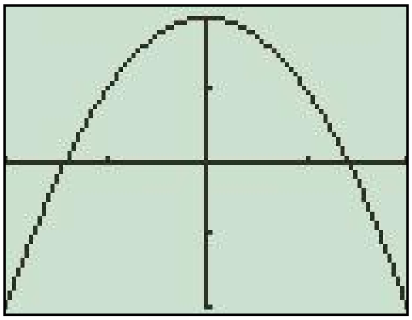
تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2$

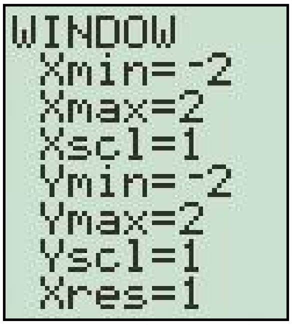
.1 أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C) الممثل الدالة f.

.2 أحسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز المحدد بـ (C) و المستقيمات $x=-1$ ، $x=1$ و $y=0$.

.3 المعلم الذي مثلت فيه الدالة f متعامد حيث الوحدات كما يلي: $2cm$ على محور الفواصل و $1,5cm$ على محور التراتيب.أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

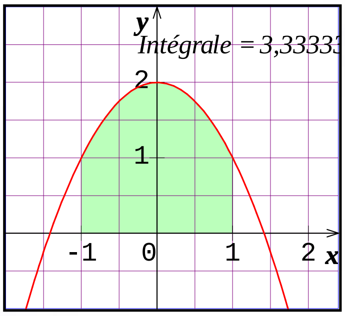
الحل:





.1 أنظر الشكل المقابل.

.2 الدالة f موجبة على المجال $[-1;1]$ و دالة أصلية لها على $[-1;1]$ هي الدالة F حيث: $F(x)=2x-\frac{1}{3}x^3$



مساحة الحيز، بوحدة المساحة $(u.a)$، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي:

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}(u.a)$$

.3 وحدة المساحة هي $2cm\times 1,5cm$ أي $3cm^2$ و بالتالي فإن مساحة الحيز، بـ cm^2، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي: $\frac{10}{3}\times 3cm^2$ أي $10cm^2$

خواص التكامل

1. علاقة شال

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

البرهان: إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\left[F(b)-F(a)\right]+\left[F(c)-F(b)\right]=\left[F(c)-F(a)\right]=\int_a^c f(x)dx$$

نتائج: من الواضح أن $\int_a^a f(x)dx=0$ ومنه إذا أخذنا $c=a$ نحصل على $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2. الخطية

خاصية: f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي.من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$(1)\quad \int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx\quad(2)$$

البرهان: العلاقة (1): نعلم أنه إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب للدالتين f و g على المجال I فإن الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.و منه:

$$\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]dx=\left[F(x)+G(x)\right]_a^b=\left[F(b)+G(b)\right]-\left[F(a)+G(a)\right]$$

$$=\left[F(b)-F(a)\right]+\left[G(b)-G(a)\right]=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

العلاقة (2): نتبع منهجية مماثلة علما أنه إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن kF دالة أصلية لـ kf على I.

3. المقارنة

خواص: f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

البرهان:

العلاقة (1): إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$. و بما أن $f(x)\geq 0$ على $[a;b]$ فإن F متزايدة على $[a;b]$ و بالتالي $F(a)\leq F(b)$ أي $F(b)-F(a)\geq 0$ و منه $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

بالنسبة لبرهان العلاقة (2) يكفي أن نلاحظ أن $g(x)-f(x)\geq 0$ و نطبق النتائج السابقة.

تمرين محلول1: أحسب التكامل التالي: $\int_0^3 |x^2-1|dx$

طريقة: نكتب، حسب قيم x، عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة لنتمكن من تعيين دوال أصلية للدالة f .

الحل: x^2-1 كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه -1 ، 1 و بالتالي:

- من أجل كل x من $[0;1]$، $x^2-1\le 0$ إذن $|x^2-1|=-x^2+1$.
- من أجل كل x من $[1;3]$، $x^2-1\ge 0$ إذن $|x^2-1|=x^2-1$.

باستعمال علاقة شال يكون لدينا: $\int_0^3|x^2-1|dx=\int_0^1|x^2-1|dx+\int_1^3|x^2-1|dx=\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^3(x^2-1)dx$

و منه $\int_0^3|x^2-1|dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^3=\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)-0\right]+\left[\left(\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=\frac{22}{3}$

تمرين محلول2: نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

أحسب $A+B$ و $A-B$ ثم استنتج A و B .

الحل:

$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$.

$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

لدينا $A+B=\frac{\pi}{4}$ و $A-B=\frac{1}{2}$. بعد حل هذه الجملة نجد $A=\frac{\pi+2}{8}$ و $B=\frac{\pi-2}{8}$.

تمرين محلول3: نعتبر التكامل $I=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$

1. بين أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\le 1$.
2. استنتج حصرا للعدد I .

الحل:

1. من أجل كل t من $[0;1]$، $1+t^2\ge 1$ و منه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2}\le 1$.
2. بما أن $0<1$ و بتطبيق خاصية المحافظة على الترتيب نستنتج أن $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\le\int_0^1 1dt$

و بما أن $\int_0^1 1dt=[t]_0^1=1$ فإن $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\le 1$. من الواضح كذلك أنه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2}>0$

و منه $I>0$. نستنتج هكذا الحصر التالي: $0<I\le 1$.

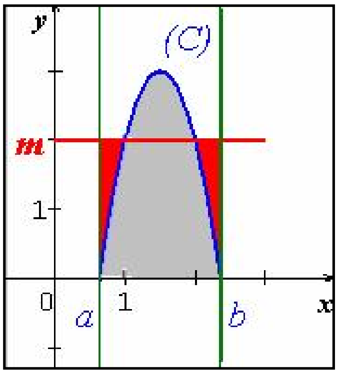
القيمة المتوسطة

1. القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

التفسير البياني في حالة دالة موجبة: نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.



ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$.

$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يعني $m(b-a)=\int_a^b f(x)dx$

نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

و هكذا فإن m، القيمة المتوسطة لـ f على $[a;b]$، هي " ارتفاع " المستطيل الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

نلاحظ أن للحيزين الملونيين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.

2. حصر القيمة المتوسطة

خواص: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $m\le f(x)\le M$ فإن:

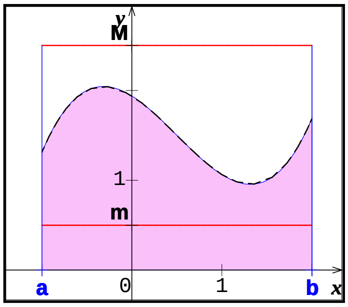
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

البرهان: من أجل كل x من $[a;b]$ لدينا: $m\le f(x)\le M$ و منه و باستعمال خاصية المقارنة يكون لدينا:

$\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx$ أي $m\int_a^b dx\le\int_a^b f(x)dx\le M\int_a^b dx$ و بما أن $\int_a^b dx=b-a$ نحصل على

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل x من I، $|f(x)|\le M$ فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M|b-a|$.



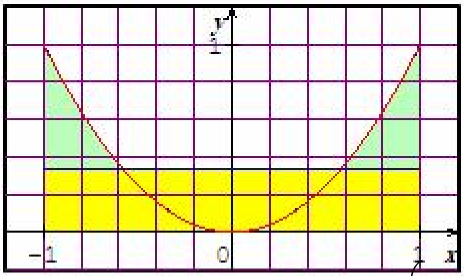
التفسير البياني في حالة f موجبة و $m\ge 0$: مساحة الحيز تحت المنحني الممثل لـ f بين a و b محصورة بين مساحتي المستطيلين اللذين ارتفاعهما m و M و عرضهما $b-a$. كما أن القيمة المتوسطة » هي الأخرى محصورة بين a و b.

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بـ $f(x)=x^2$

1. أرسم التمثيل البياني (C) للدالة f في معلم متعامد و متجانس ثم أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;1]$.

2. فسر بيانيا النتيجة.

الحل:



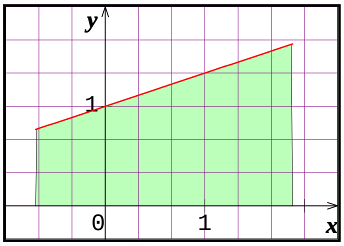
.1 $\text{«} = \dfrac{1}{1-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2dx = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{1} = \dfrac{1}{3}$.

.2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$ ، $x=1$ و $y=0$ تساوي مساحة المستطيل $ABCD$ الذي بعداه 2 و $\dfrac{1}{3}$ علما أن $A(1;0)$ ، $B\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$ ، $C\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$ و $D(-1;0)$.

تمرين محلول2: لتكن f دالة تآلفية موجبة على مجال $[a;b]$ حيث $a<b$.

برهن أن القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$ هي الوسط الحسابي للعددين $f(a)$ و $f(b)$.

الحل: نفرض أن $f(x)=mx+P$ حيث m و p عددان حقيقيان مع $m\neq 0$.



بما أن f موجبة على المجال $[a;b]$ فإن $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ هي مساحة الحيز المحدد بالمنحني الممثل للدالة f (قطعة مستقيمة) و المستقيمات التي معادلاتها على الترتيب $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$. الحيز هنا شبه منحرف و بالتالي لدينا:

$\text{«} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \dfrac{1}{b-a}\times(b-a)\times\dfrac{f(a)+f(b)}{2} = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

نذكر أن الوسط الحسابي للعددين $f(a)$ و $f(b)$ هو $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;e-1]$.

2. استنتج حصرا لـ $f(x)$.

3. استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\displaystyle\int_1^{e-1} f(x)dx$

الحل:

.1 لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}>0$. إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و منه على المجال $[0;e-1]$.

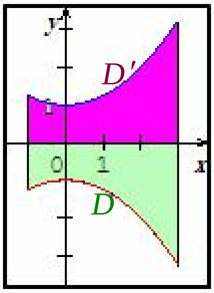
.2 نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;e-1]$ ، $f(0)\leq f(x)\leq f(e-1)$ أي $1\leq f(x)\leq 2$.

.3 بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\leq \displaystyle\int_1^{e-1} f(x)dx \leq 2(e-2)$.

التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

1. تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.



نرمز بـِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بـِ A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f}) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.

بما أن f سالبة على $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a;b]$ و بالتالي $A'=\int_a^b -f(x)dx$

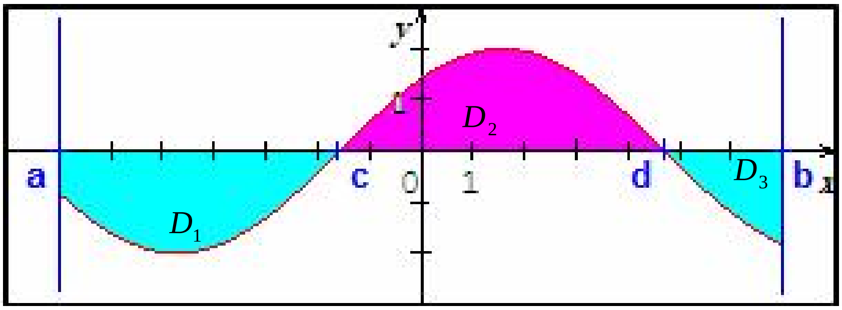
الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$.

و بالتالي فإن $A=\int_a^b -f(x)dx$ أو $\int_a^b f(x)dx=-A$. نقول أحيانا أن $\int_a^b f(x)dx$ هي المساحة الجبرية للحيز D فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$.

2. تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

لتكن مثلا f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.



نلاحظ مثلا في الشكل أعلاه أن f موجبة على $[c;d]$ و سالبة على المجالين $[a;c]$ و $[d;b]$.

نرمز بـِ A_1 إلى مساحة الحيز D_1، بـِ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و بـِ A_3 إلى مساحة الحيز D_3.

لدينا $A=A_1+A_2+A_3$ و بما أن $A_1=-\int_a^C f(x)dx$ ، $A_2=\int_c^d f(x)dx$ و $A_3=-\int_d^b f(x)dx$

فإن $A=-\int_a^C f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$

ملاحظة:

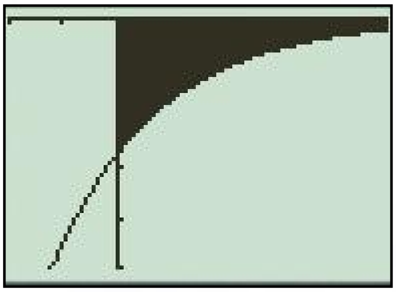
بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بمنحن ممثل لدالة f تغير إشارتها على $[a;b]$ نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-e^{-0,5x+1}$

1. حدد إشارة $f(x)$ ثم أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C) الممثل للدالة f.

2. ليكن α عددا حقيقيا موجبا تماما. أحسب $a(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $0\le x\le\alpha$ و $f(x)\le y\le 0$. أدرس نهاية $a(\alpha)$ لما يؤول α إلى $+\infty$.

الحل:



1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)<0$.

2. $a(\alpha)=\int_0^{\alpha}-f(x)dx=\int_0^{\alpha}e^{-0,5x+1}dx=\left[-2e^{-0,5x+1}\right]_0^{\alpha}$

و منه $a(\alpha)=-2\left(e^{-0,5\alpha+1}-e\right)(u.a)$.

بما أن $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(-0,5\alpha+1)=-\infty$ و علما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$

فإن $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}e^{-0,5\alpha+1}=0$ و منه $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}a(\alpha)=2e(u.a)$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.

2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.

3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحي (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\pi$ و $y=0$.

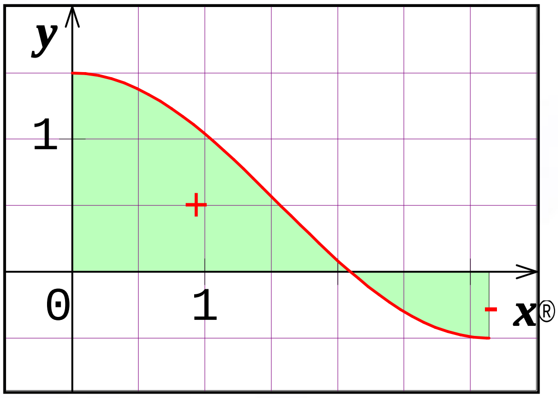
الحل:

1.للدالة f نفس اتجاه تغير الدالة $x\mapsto\cos x$ فهي إذن متناقصة تماما على المجال $[0;\pi]$.

لدينا $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(\pi)=-\frac{1}{2}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في $[0;\pi]$

$f(x)=0$ تعني $x=\frac{2\pi}{3}$.نستنتج أنه من أجل كل x من $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$، $f(x)\ge 0$

و من أجل كل x من $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$، $f(x)\le 0$.



2.أنظر الشكل المقابل.

3.لدينا $A=A_1+A_2$ حيث $A_1=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}f(x)dx$

و $A_2=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}-f(x)dx$.

$A_1=\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$ و $A_1=-\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$

و منه $A=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)u.a$.

توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

1. المكاملة بالتجزئة

مبرهنة: لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I.
من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

البرهان: الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على I و منه الدالة الجداء uv قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $(uv)'=u'v+uv'$. الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على I فهما إذن مستمرتان على I. لدينا كذلك الدالتان u' و v' مستمرتان على I و منه الدوال $u'v$ ، uv' و مجموعهما $(uv)'$ **مستمرة على** I. بحساب التكامل من a **إلى** b **نحصل على:** $\int_a^b (uv)'(x)dx=\int_a^b\left[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right]dx$ و باستعمال خواص الخطية نجد:

$\int_a^b (uv)'(x)dx=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$ **و علما أن الدالة** uv دالة أصلية للدالة $(uv)'$ **فإن**

$\left[u(x)v(x)\right]_a^b=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$ و هكذا نصل إلى النتيجة:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

2. الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة

مبرهنة: f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I.

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة $F:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$

البرهان: نضع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ و منه إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على المجال I يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)-G(a)$ و بالتالي: من أجل كل x من I، $F'(x)=G'(x)=f(x)$

نستنتج أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I. بالإضافة إلى ذلك لدينا: $F(a)=G(a)-G(a)=0$.

إذن الدالة F هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a.

ملاحظة: من الواضح أنه إذا كانت $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ فإن $F'(x)=f(x)$.

مثال: نعلم أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$ كما نعلم أن $\ln(1)=0$ و بالتالي لدينا:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

تمرين محلول1: باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب:

$$I=\int_0^1 (x-1)e^x\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x\,dx$$

طريقة: لاستعمال المكاملة بالتجزئة نكتب f على الشكل $u\times v'$.

الحل:

1. نضع $u(x)=x-1$ ، $v'(x)=e^x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=e^x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $I=\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

و منه $I=1-\left[e^x\right]_0^1=1-(e-1)=-e$. إذن $I=-e$.

ملاحظة: كان بالإمكان وضع $u(x)=e^x$ ، $v'(x)=x-1$ و من تم $u(x)=e^x$ ، $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.

2. نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\sin x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=-\cos x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $J=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\cos x\,dx$

و منه $J=-\frac{\pi}{6}+\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. إذن $J=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

تمرين محلول2: عين، باستعمال المكاملة بالتجزئة، الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ و التي تنعدم عند 1.

طريقة: يمكنا دائما وضع $u(x)=u(x)v'(x)$ حيث $v'(x)=1$.

الحل:

الدالة $x\mapsto \ln x$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$. و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند1 هي الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $F(x)=\int_1^x \ln(t)\,dt$.

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $F(x)=\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x \frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-\int_1^x dt$

و منه $F(x)=x\ln x-\left[t\right]_1^x=x\ln x-(x-1)=x\ln x-x+1$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $F(x)=x\ln x-x+1$.

ملاحظة: الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto x\ln x-x+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

و بصفة عامة نثبت بإتباع نفس الطريقة أن الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \ln(x+a)$ على المجال $]-a;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto (x+a)\ln(x+a)-x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

بعض تطبيقات الحساب التكاملي

1. حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة

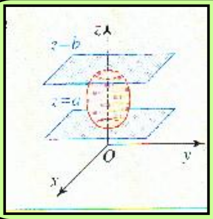
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$.

وحدة الحجوم $(u.v)$ هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O;I,J,K)$.

نعتبر في الفضاء مجسما محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$.

خاصية1: لتكن $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو مواز للمستوي (xOy) راقمه z حيث $a<z<b$.

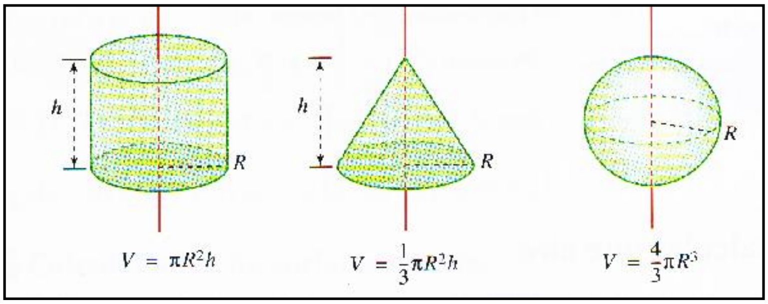
نقبل أن حجم المجسم بوحدة الحجوم هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b S(z)dz$



أمثلة:

لدينا في الشكل المقابل كل من:

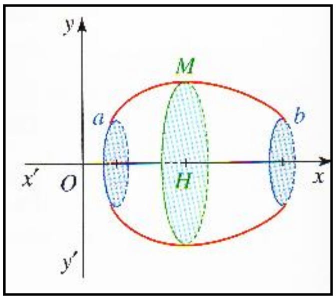
- حجم الكرة.
- حجم المخروط الدوراني.
- حجم الاسطوانة الدورانية.



حالة خاصة: حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$

ليكن (C) المنحني الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a;b]$. دوران المنحني (C) حول المحور $(x'x)$ يولد مساحة دورانية محورها $(x'x)$ التي بدورها تحدد مجسما دورانيا محوره $(x'x)$. لتكن $M(x;f(x))$ نقطة من المنحني (C).

مقطع المجسم الناتج عن دوران المنحني (C) حول المحور $(x'x)$ بمستو مار من M و عمودي على $(x'x)$ هو قرص مساحته $\pi \times HM^2$ أي $\pi \times [f(x)]^2$.



خاصية2: حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$

2. المسافة المقطوعة على مستقيم

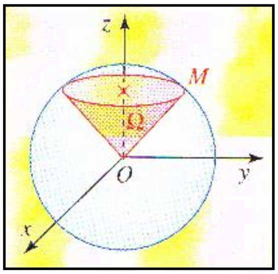
نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة عند اللحظة t. تعرف السرعة اللحظية $v(t)$ لهذه النقطة المتحركة عند اللحظة t بالعلاقة: $v(t)=\frac{dx}{dt}=x'(t)$ أي $dx=v(t)dt$.

خاصية: المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 $(t_1<t_2)$ سرعتها اللحظية $v(t)$ هي:

$$x=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

تمرين محلول1: برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو: $V=\frac{4}{3}®R^{3}$

الحل:



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$ الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R.

مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $-R<z<R$ هي دائرة مركزها $\Omega(0;0;z)$ و نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=R$.

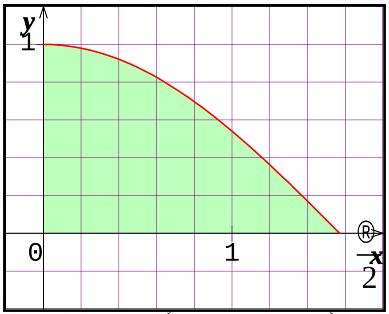
لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^{2}=R^{2}-z^{2}$ و منه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي: $S(z)=®(R^{2}-z^{2})$. الحجم هو إذن: $V=\int_{-R}^{R}S(z)dz=\int_{-R}^{R}®(R^{2}-z^{2})dz$ و بالتالي:

$V=®\left[R^{2}z-\frac{1}{3}z^{3}\right]_{-R}^{R}=®\left[\left(R^{3}-\frac{1}{3}R^{3}\right)-\left(-R^{3}+\frac{1}{3}R^{3}\right)\right]$ و منه $V=\frac{4}{3}®R^{3}u.v$.

تمرين محلول2: ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto\cos x$ على المجال $\left[0;\frac{®}{2}\right]$.

1. أحسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل $(x'x)$.

2. أحسب v الحجم المولد بدوران المنحني (C) حول محور الفواصل $(x'x)$.



الحل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $\left[0;\frac{®}{2}\right]$.

.1 $a=\int_{0}^{\frac{®}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_{0}^{\frac{®}{2}}=1$ إذن $a=1u.a$

.2 $v=\int_{0}^{\frac{®}{2}}®[f(x)]^{2}dx=®\int_{0}^{\frac{®}{2}}\cos^{2}x\,dx$

نعلم أن $\cos^{2}x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ و منه دالة أصلية للدالة $x\mapsto\cos^{2}x$ هي الدالة $x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ على ℝ

و هكذا نجد $v=®\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_{0}^{\frac{®}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{®}{2}-0\right)=\frac{®^{2}}{4}$. و منه $v=\frac{1}{4}®^{2}u.v$.

تمرين محلول3: من أجل $t>0$، سرعة نقطة متحركة هي: $V(t)=2t+e^{t}\,(m.s^{-1})$

أحسب x المسافة المقطوعة من قبل هذه النقطة المتحركة بين اللحظتين $t_{1}=1s$ و $t_{2}=2s$.

الحل: نعلم أن $x=\int_{t_{1}}^{t_{2}}v(t)dt$ و منه $x=\int_{1}^{2}(2t+e^{t})dt$. دالة أصلية للدالة $t\mapsto 2t+e^{t}$ على ℝ هي الدالة $t\mapsto t^{2}+e^{t}$

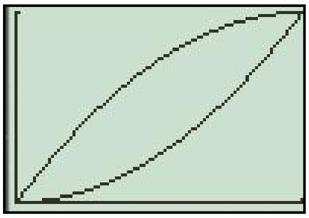
و منه $x=\left[t^{2}+e^{t}\right]_{1}^{2}=(4+e^{2})-(1+e)=e^{2}-e+3$.

إذن المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t_{1}=1s$ و $t_{2}=2s$ هي $(e^{2}-e+3)m$.

مساحة حيز محدد بمنحنيين

نعتبر دالتين f و g مستمرتين على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في معلم متعامد $(O;I,J)$.

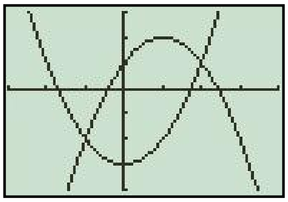
نهدف إلى حساب، في وضعيات مختلفة، A مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=a$ و $x=b$.



1. المثال الأول: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;1]$ كما يلي:

$$f(x)=-x^2+2x \quad \text{و} \quad g(x)=x^2$$

- مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g).
- برهن أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\geq g(x)$
- برر النتيجة: $A=\int_0^1[f(x)-g(x)]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.



2. المثال الثاني: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2-3 \quad \text{و} \quad g(x)=-x^2+2x+1$$

- مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g).
- أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) مع تعيين a، b فاصلتي نقطتي تقاطعهما.
- نسمي (C'_f) و (C'_g) محولتي المنحنيين (C_f) و (C_g) على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $3\vec{j}$.

و ليكن (D') الحيز المحدد بالمنحنيين (C'_f)، (C'_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=a$ و $x=b$.

برر لماذا للحيزين (D) و (D') نفس المساحة.

- برهن أن $A=\int_{-1}^{2}[f(x)-g(x)]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.

نتيجة: إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq g(x)$ فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

3. تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $2cm$.

1. أدرس تغيرات الدالة f محددا نهايتيها عند 0 و عند $+\infty$.
2. بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
3. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (Δ).
4. أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f)، (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{e}$ و $x=e$.

دالة معرفة بتكامل

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$

1. عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$. تحقق أن $2<\alpha<\frac{7}{4}$.
4. باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا للعدد α سعته 10^{-3}.
5. حدد، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(0)=0$ و من أجل كل $x\neq 0$، $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث أن الوحدة هي $2cm$.

1. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0.
2. تحقق أن الدالة f فردية ثم أدرس نهايتها عند $+\infty$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f.
4. عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
5. بين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $\ln(x+1)\leq x$.
6. استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ). أرسم (C).

الجزء الثالث

نرمز بـ F على الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1. بين أن الدالة F زوجية.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة F.
3. بين أن $0\leq F(1)\leq\frac{1}{2}$.
4. بين أنه من أجل كل t من $[1;+\infty[$، $\frac{\ln(t^2)}{t}\leq\frac{\ln(t^2+1)}{t}\leq\frac{\ln(2t^2)}{t}$.
5. من أجل كل x من $[1;+\infty[$، أحسب $\int_1^x\frac{\ln(t)}{t}dt$.
6. استنتج نهاية كل من $F(x)$ و $\frac{F(x)}{x}$ عند $+\infty$.
7. بأخذ $F(1)\approx 0,4$ أرسم المنحني (C).

موضوع محلول

تمرين : (بكالوريا)

1.نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=\ln x-\frac{2}{x}$$

يعطى جدول تغيراتها كما يلي:

x	0	$2,3$	x_0	$2,4$	$+\infty$
g		$-\infty$	0		$+\infty$

بين جميع خواص الدالة g المبينة في جدول التغيرات.

2.لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{5\ln x}{x}$

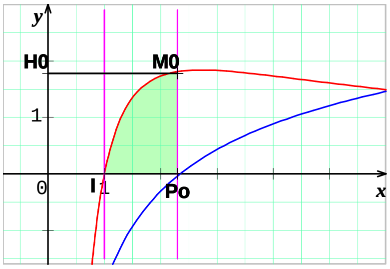
أ- بين أن $f(x_0)=\frac{10}{x_0^{\,2}}$ حيث x_0 هو العدد المبين في جدول التغيرات.

ب- ليكن a عدد حقيقي .من أجل $a>0$ عبر عن $\int_1^a f(t)\,dt$ بدلالة a .

3.نرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ الممثلين للدالتين f و g على الترتيب.نسمي I النقطة التي إحداثياتها $(1;0)$، P_0 نقطة تقاطع $\mathcal{C}_g$ و محور الفواصل ، M_0 النقطة من $\mathcal{C}_f$ التي لها نفس فاصلة P_0 و H_0 المسقط العمودي لـــ M_0 على محور التراتيب. $\mathcal{D}_1$ حيز المستوي المحدد بـــ المنحني $\mathcal{C}_f$ و القطعتين $[IP_0]$ و $[P_0M_0]$. $\mathcal{D}_2$ حيز المستوي المحدد بالمستطيل الذي بعداه OI و OH_0.

بين أن الحيزين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ لهما نفس المساحة ثم أعط حصرا لهذه المساحة سعته $0,2$

حل مختصر



1 . من أجل كل $x>0$ $g'(x)>0$

نحسب $g(2,3)\approx-0,037$ و $g(2,4)\approx 0,042$. g مستمرة على $[2,3;2,4]$ و بما أن و بما أن $g(2,3)\times g(2,4)<0$ فإنه يوجد $x_0\in]2,3;2,,4[$ بحيث $g(x_0)=0$

2. أ- من تعريف x_0 لدينا $\ln x_0=\frac{2}{x_0}$ فيكون $f(x_0)=\frac{5\ln x_0}{x_0}=\frac{10}{x_0^2}$

ب- دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ هي: $F:x\mapsto\frac{5}{2}(\ln x)^2$

$$\int_1^a f(t)\,dt=\left[\frac{5}{2}(\ln x)^2\right]_1^a=\frac{5}{2}(\ln a)^2$$

3. مساحة الحيز $\mathcal{D}_1$ هي $\int_1^{x_0} f(t)\,dt=\frac{5}{2}(\ln x_0)^2=\frac{5}{2}\left(\frac{2}{x_0}\right)^2=\frac{10}{x_0^2}$

ترتيب x_0 يساوي ترتيب النقطة M_0 ، $f(x_0)=\frac{10}{x_0^2}$

مساحة الحيز $\mathcal{D}_2$ هي $f(x_0)\times 1=\frac{10}{x_0^2}$ ، إذن الحيزين لهما نفس المساحة $\frac{10}{x_0^2}$

انطلاقا من $x_0\in]2,3;2,,4[$ نجد $1,7<\frac{10}{x_0^2}<1,9$

تعاليق

1. $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

بالنسبة للنهايات طبق نهاية مجموع دالتين

2. ب- لاحظ أن:

$f(x)=a\,h(x)$ حيث $h(x)$ دالة من الشكل $u(x)\times u'(x)$

$$\int_1^a f(t)\,dt=F(a)-F(1)$$

3. x_0 هو فاصلة نقطة تقاطع $\mathcal{C}_g$ و محور الفواصل $(g(x_0)=0)$

$$\frac{10}{(2,4)^2}\approx 1,74$$

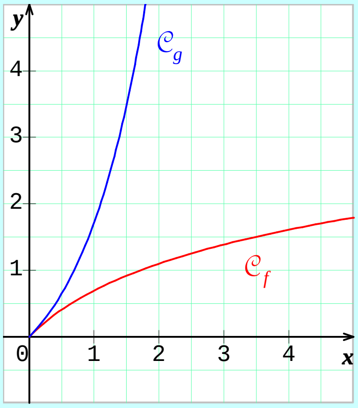
$$\frac{10}{(2,3)^2}\approx 1,89$$

موضوع موجه

تنبيه

تتطلب التمارين المرتبطة بمفهوم التكامل الإلمام بالتعاريف والخواص المقدمة في الدرس.في هذه التمارين، نلاحظ أن بعض تلك التمارين يتناول الجانب الهندسي(تفسير التكامل كمساحة) في حين يعالج بعضها الآخر الجانب الجبري (حساب التكامل).ينبغي استخلاص الروابط بين الجانبين و معرفة كيفية الانتقال من أحدهما إلى الآخر.

تمرين: (بكالوريا)



نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=e^x-1 \quad \text{و} \quad f(x)=\ln(x+1)$$

نرمز بـــ $\mathscr{C}_f$ و $\mathscr{C}_g$ التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.تحقق أن المنحنيين $\mathscr{C}_f$ و $\mathscr{C}_g$ لهما مماس مشترك عند النقطة O.

حدّد وضعية المنحني $\mathscr{C}_f$ بالنسبة إلى هذا المماس.

2.بين أن المنحنيين $\mathscr{C}_f$ و $\mathscr{C}_g$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=x$.

3.ليكن a عددا حقيقي موجب تماما.نريد حساب بطريقتين مختلفتين العدد $I(a)=\int_0^a \ln(x+1)\,dx$

ا- بين أن $I(a)=a\ln(a+1)-\int_0^{\ln(a+1)}(e^x-1)\,dx$

ب- استنتج قيمة $I(a)$

جـ- أوجد من جديد قيمة $I(a)$ باستعمال المكاملة بالتجزئة.

توجيهات

أ- يجب إتباع التنبيهات في النص.انقل التمثيل البياني لكي تكمله فيما بعد حسب تسلسل الأسئلة.

1. المماسات تمر بالنقطة O، تحقق أن لها نفس معامل التوجيه .لتحديد الوضعية اكتب معادلة المماس T على الشكل $y=\sim x+$ ثم ادرس إشارة $f(x)-(\sim x+\ \ )$.

2. من اجل x و y من $[0;+\infty[$، بين أن $y=f(x)$ تكافئ $x=g(y)$

و هذا يعني أن $M(x;y)\in\mathscr{C}_f$ إذا و فقط إذا كانت $M(x;y)\in\mathscr{C}_g$.

3. أ- في الشكل ، لون الحيز المطلوب ، بالتناظر حيز آخر له نفس المساحة ، عبر عن مساحته كفرق مساحتين معروفتين.

ب- يمكنك تعيين دالة أصلية للدالة g على $[0;+\infty[$ ثم حساب $I(a)$.

جـ- ضع $u(x)=\ln(x+1)$ و $v'(x)=1$.

تمارين تطبيقية

1 ـ تكامل دالة

1 $\mathcal{C}$ هو المنحني الممثل لدالة f. احسب مساحة الحيز تحت المنحني $\mathcal{C}$

1) f معرفة على $\left[\frac{1}{2};3\right]$ بـ $f(x)=2x-1$

2) f معرفة على $[-4;-2]$ بـ $f(x)=-2x-3$

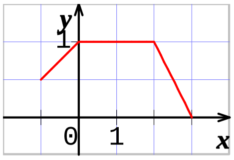
2 f هي الدالة المعرفة على $[-1;4]$ بـ

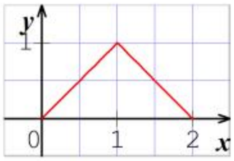
$$f(x)=|x-1|$$

1. هل f مستمرة على $[-1;4]$؟

2. $\mathcal{C}$ هو المنحني الممثل لدالة f. احسب مساحة الحيز تحت المنحني $\mathcal{C}$.

3 في كل شكل من الشكلين التاليين ، $\mathcal{C}$ هو المنحني الممثل لدالة f. احسب تكامل f على مجموعة تعريفها مستعملا المساحة .





4 f دالة معرفة على $[-1;1]$ بـ :

$$f(x)=\begin{cases}-2x\ ;\ x\in[-1;0]\\ x^2\ ;\ x\in[0;1]\end{cases}$$

1. أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f .

2. هل الدالة f مستمرة على $[-1;1]$.

3. احسب مساحة الحيز تحت المنحني $\mathcal{C}$.

5 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-3;3]$ بـ

$$f(x)=\begin{cases}0,5x+1,5\ ;\ -3\le x\le -1\\ x+2\ ;\ -1<x<0\\ -\frac{2}{3}x+2\ ;\ 0\le x\le 3\end{cases}$$

1. ارسم المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f .

2. هل f مستمرة على $[-3;3]$ ؟

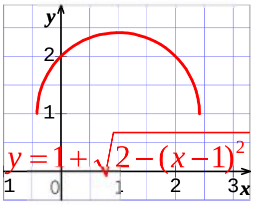
3. احسب مساحة الحيز تحت المنحني $\mathcal{C}$.

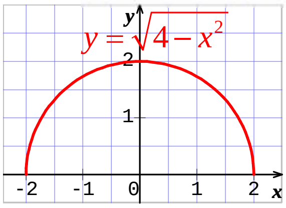
4. عبر عن هذه المساحة بتكامل.

6 في كل حالة الدالة f ممثلة بالمنحني $\mathcal{C}$ المعرف بمعادلته.

1. بين أن $\mathcal{C}$ هو نصف دائرة ، حدّد مركزها و نصف قطرها.

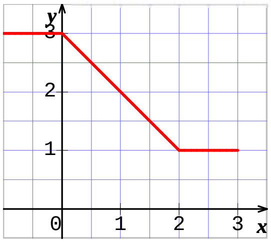
2. استنتج تكامل الدالة f على مجموعة تعريفها.





مساعدة: معادلة الدائرة التي مركزها $\mu(a;b)$ و نصف قطرها r هي $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

7 f هي الدالة المعرفة بتمثيلها البياني في الشكل المقابل.



احسب $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ ، $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ ، $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

8 احسب التكاملات التالية:

$\int_{0}^{1}(3x+1)\,dx$ ، $\int_{1}^{3}(-x+3)\,dx$ ، $\int_{-5}^{-2}(0.4x+3)\,dx$

• في التمارين من **9** إلى **16** احسب التكاملات:

9 1) $\int_{0}^{2}\left(0,01x^2-x\right)dx$ (2 $\int_{1}^{2}(x+1)^3\,dx$

3) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2t-1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ (4 $\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

10 1) $\int_{1}^{2}2x\left(x^2-1\right)dt$ (2 $\int_{1}^{10}\frac{dt}{\sqrt{t}}$

3) $\int_{3}^{4}\frac{5x}{\left(x^2-2\right)^3}dx$ (4 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x dx$

11 1) $\int_{0}^{1}(3x-6)\left(x^2-4x+1\right)^3 dx$ (2 $\int_{0}^{3}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

3) $\int_{1}^{2}\frac{t^3}{t^4+1}dt$ (4 $\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

12

1) $\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ (2) $\int_{0}^{3}\frac{1}{(2t+1)^{2}}dt$

3) $\int_{\frac{\circledR}{6}}^{\frac{\circledR}{2}} cox\,dx$ (4) $\int_{0}^{\circledR}\sin(2t)\,dt$

13

1) $\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$ (2) $\int_{0}^{\circledR}\sin\left(t+\frac{\circledR}{4}\right)dt$

3) $\int_{-2}^{-1}\frac{x-2}{x}dx$ (4) $\int_{-2}^{2}\frac{x}{x^{2}-9}dx$

14

1) $\int_{1}^{2}\frac{1}{2x+3}dx$ (2) $\int_{0}^{1}3e^{4x}\,dx$

3) $\int_{-1}^{1}e^{4t+5}\,dt$ (4) $\int_{0}^{1}t\,e^{t^{2}-1}\,dt$

15

1) $\int_{1}^{2}\frac{2x+1}{x^{2}+x-1}dx$ (2) $\int_{-\frac{\circledR}{4}}^{\frac{\circledR}{3}}\sin x\cos x\,dx$

3) $\int_{0}^{1}3t\,e^{t^{2}+1}\,dt$ (4) $\int_{\frac{\circledR}{6}}^{\frac{\circledR}{4}}\frac{\cos x}{\sin^{2}x}dx$

16

1) $\int_{1}^{3}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2}}dx$ (2) $\int_{0}^{1}2^{3x}\,dx$

3) $\int_{0}^{1}(3t^{2}+1)e^{2t^{3}+2t}\,dt$ (4) $\int_{0}^{1}\frac{3x}{x^{2}+\sqrt{2}}dx$

17 1. جد عددين حقيقيين a و b حيث من اجل كل عدد حقيقي x من $\square-\{-3;3\}$ $\frac{1}{x^{2}-9}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+3}$

2.استنتج $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^{2}-9}dx$

18 1. جد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c حيث من اجل كل عدد حقيقي x من $\square-\left\{\frac{1}{2};2\right\}$:

$$\frac{4x^{2}-5x}{2x^{2}-5x+2}=a+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{x-3}$$

2.استنتج $\int_{3}^{4}\frac{4x^{2}-5x}{2x^{2}-5x+2}dx$

19 1. جد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c حيث من اجل كل عدد حقيقي x من $\square-\{1\}$:

$$\frac{x^{2}+2x-3}{x-1}=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

2.استنتج $\int_{2}^{3}\frac{x^{2}+2x-3}{x-1}dx$

20 1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{1+e^{x}}=1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

2.استنتج $I=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^{x}}dx$

21 f معرفة على المجال $[-1;1]$ بـ $f(x)=\sqrt{1-x^{2}}$

1.تحقق من أن $\mathcal{C}_f$ المنحنى الممثل للدالة f هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 1 و الواقع فوق محور الفواصل.

2. استنتج أن $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^{2}}\,dx=\frac{\circledR}{4}$.

22 2. لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x-\frac{4}{(x+1)^{2}}$$

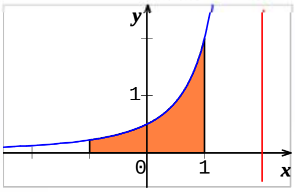
و C_f تمثيلها البياني في الشكل المقابل

1. احسب $\int_{1}^{3}f(x)dx$

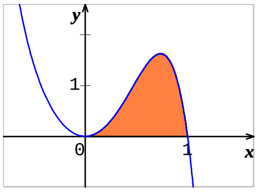
2.فسر بيانيا هذه النتيجة.

3.احسب $\int_{0}^{3}f(x)dx$

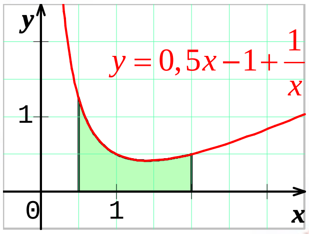
23 في الحالات الأربع التالية،احسب مساحة الحيز الملون مقدرة بوحدة المساحات

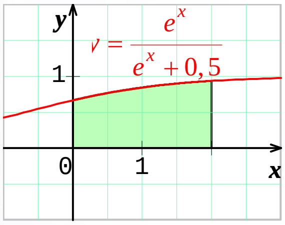


$y=\frac{2}{(x-2)^{2}}$



$y=-5x^{2}\left(x^{3}-1\right)$

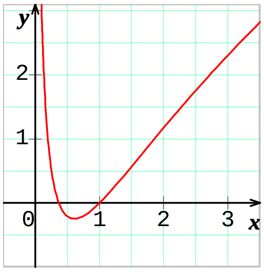




24 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln x+(\ln x)^2$$

و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (الشكل)



1.بين أن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x(\ln x)^2-x\ln x+x$$

أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

2. ~ عدد حقيقي أكبر تماما من 1.احسب $A(\sim)$ المساحة للحيز المحدد بالمنحني C_f و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sim$.

3.عين قيمة ~ بحيث يكون $A(\sim)=2\sim-1\ u.a$.

2 . خواص التكامل

25 f دالة مستمرة على $[0;3]$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;3]$ ، $\frac{1}{3}x+1\le f(x)\le 2$

1.فسر بيانيا المتباينتين.

2.أعط حصرا لمساحة الحيز تحت المنحني الممثل للدالة f

26 احسب في كل حالة من الحالات التالية باستعمال خواص التكامل ، التكاملات التالية:

1) $I=\int_1^e \ln t\,dt+\int_1^e\left(t+\ln\frac{1}{t}\right)dt$

2) $J=\int_1^e \ln(1+t^2)dt+\int_e^1 \ln(1+t^2)\,dt$

3) $J=\int_1^{\frac{®}{6}}\cos 2x\,dx-\int_1^{\frac{7®}{6}}\cos 2x\,dx$

• في التمارين من **27** إلى **29** f و g دالتان معرفتان على $[5;10]$ حيث $\int_5^{10}f(t)\,dt=4$ و $\int_5^{10}g(t)\,dt=-5$

احسب التكاملات التالية:

27 1) $\int_5^{10}(f+g)(t)\,dt$ 2) $\int_5^{10}\left(\frac{5}{2}f\right)(t)\,dt$

28 1) $\int_5^{10}(f-g)(t)\,dt$ 2) $\int_5^{10}(2f+3g)(t)\,dt$

29 1) $\int_5^{10}\left(-f+\frac{2}{3}g\right)(t)\,dt$ 2) $\int_5^{10}(2f-g)(t)\,dt$

30 احسب التكامل I حيث:

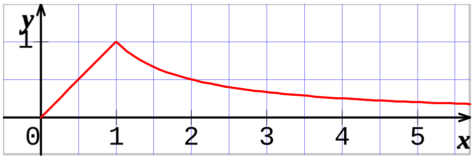
$$I=\int_{-1}^{1}[|x|+|x+1|]\,dx$$

31 احسب $\int_{\frac{®}{3}}^{\frac{3®}{2}}|\sin t|\,dt$.

32 f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=\begin{cases}x\ ;\ 0\le x\le 1\\ \frac{1}{x}\ ;\ x>1\end{cases}$$

و $\mathcal{C}$ هو تمثيلها البياني في الشكل التالي:



احسب التكاملين التاليين:

$$I=\int_0^3 f(x)\,dx \text{ و } J=\int_2^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

33 قارن، بدون حساب، بين التكاملين I و J :

1) $I=\int_0^1 te^t\,dt$ ؛ $J=\int_0^1 t^2e^t\,dt$

2) $I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ ؛ $J=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

3) $I=\int_1^2 u\sin u\,du$ ؛ $J=\int_1^2 u^2\sin u\,du$

34 بدون حساب التكاملات التالية عين إشارتها:

1) $\int_2^3\sqrt{x-1}\,dx$ 2) $\int_{-3}^{-2}\sqrt{2-x}\,dx$

3) $\int_0^3(t^2+t+1)\,dt$ 4) $\int_{-4}^{-1}\frac{1}{t-2}dt$

4) $\int_0^2 -e^{-u+1}\,du$ 5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\ln(u+1)\,du$

35 بين أن من اجل كل $t\in\left[-\frac{\circledR}{4};0\right]$:

$$1\le\frac{1}{\cos t}\le\sqrt{2}$$

2.استنتج أن $\frac{\circledR}{4}\le\int_{-\frac{\circledR}{4}}^{0}\frac{1}{\cos t}\,dt\le\circledR\frac{\sqrt{2}}{4}$

3 ـ القيمة المتوسطة

36 احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في الحالتين التاليتين:

$f(x)=2x+3$ ، $I=[-1;1]$

$f(x)=|x|$ ، $I=[-2;2]$

37 بين ما يلي:

1) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\,dx\ge-\frac{\ln 2}{2}$

2) $\int_{1}^{2}\frac{1}{1+x^{3}}\,dx\le\frac{1}{2}$

3) $-\frac{\circledR}{2}\le\int_{\frac{\circledR}{2}}^{\circledR}\sin(x^{2}+1)\,dx\le\frac{\circledR}{2}$

38 1. بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$:

$$\frac{x^{2}}{2}\le\frac{x^{2}}{x+1}\le x^{2}$$

2. استنتج حصرا للتكامل $\int_{0}^{1}\frac{x^{2}}{x+1}\,dx$

39 أثبت ما يلي:

1) $\int_{1}^{4}\cos(x^{2})\,dx\le 3$ 2) $\int_{0}^{1}x^{2}\cos(x)\,dx\le\frac{1}{3}$

3) $\int_{0}^{1}\cos(x)\,dx\ge\frac{1}{2}$

40 1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب t :

$$1-t\le\frac{1}{t+1}\le 1$$

2.استنتج أن $x-\frac{x^{2}}{2}\le\ln(x+1)\le x$

• في التمارين من **41** إلى **43** المطلوب:

1.ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;1]$

2.بين أنه كل عدد حقيقي x من $[0;1]$:

$$f(0)\le f(x)\le f(1)$$

3. استنتج حصرا للتكامل $\int_{0}^{1}f(x)\,dx$

41 $f(x)=e^{x}-1$

42 $f(x)=-\frac{1}{x+1}$

43 $f(x)=\ln(x+2)$

• في التمرينين **44** و **45** بين الحصر المعطى:

44 1) $\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^{3}}\,dx\le 1$

2) $\frac{9}{4}\le\int_{0}^{9}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\le 9$

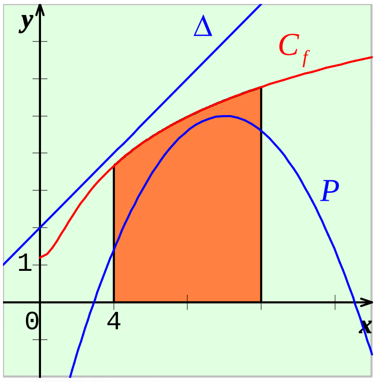
45 1) $\sqrt{2}\le\int_{1}^{2}\sqrt{x^{3}+1}\,dx\le 3$

2) $\frac{2}{e^{4}}\le\int_{0}^{2}e^{-x^{2}}\,dx\le 2$

3) $2\ln 3\le\int_{2}^{4}\ln(x^{2}-1)\,dx\le 2\ln 3+2\ln 5$

46 في الشكل التالي لدينا:

- المنحنى C_f الممثل لدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$
- القطع المكافئ P الذي معادلته $y=-\frac{1}{10}x^{2}+2x-5$
- المستقيم Δ الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+2$



نعتبر المساحة A مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث:

$4\le x\le 12$ و $0\le y\le f(x)$

1. باستعمال الشكل بين أن:

$$\frac{1}{10}x^2+2x-5\le f(x)\le\frac{1}{2}x+2$$

2.استنتج حصرا للمساحة A

47 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\int_0^1(1+x^n)\,dx$

1.بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2.هل (u_n) متقاربة؟

48 احسب القيمة المتوسطة « على المجال $[-1;1]$

للدالة $f:x\mapsto\sqrt{1-x^2}$

49 في كل حالة من الحالات التالية « هي القيمة المتوسطة لدالة مستمرة f على المجال I.احسب التكامل المطلوب

1) $« =2$ ، $I=[1;4]$ ، $\int_1^4 f(x)\,dx$

2) $« =\ln 2$ ، $I=[1;3]$ ، $\int_1^3 f(x)\,dx$

3) $« =\frac{2}{®}$ ، $I=\left[-\frac{®}{4};\frac{®}{4}\right]$ ، $\int_0^{\frac{®}{4}} f(x)\,dx$ و f زوجية

50 جد حصرا للقيمة المتوسطة للدالة f على المجال المعطى في كل حلة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ، $I=[0;1]$

2) $f(x)=\ln x$ ، $I=[1;e]$

3) $f(x)=e^{x^2}$ ، $I=\left[1;\sqrt{2}\right]$

51 من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع:

$$I_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$$

1.بين أن $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{1}{n}$

2.هل المتتالية (I_n) متقاربة ؟

52 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ

$f(x)=\frac{x}{x+1}$ و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_n=\int_0^n f(x)\,dx$$

1. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$: $u_n>\frac{n-1}{2}$

هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

4 ـ التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

• في التمارين من **53** إلى **55** تحقق أن الدالة f مستمرة وسالبة على المجال $I=[a;b]$ ثم احسب $\int_a^b f(x)\,dx$

53 $f(x)=2x-3$ ، $I=[-3;-1]$

54 $f(x)=x^2+2x-3$ ، $I=[-1;0]$

55 $f(x)=-x^3+x$ ، $I=[-2;1]$

56 f دالة معرفة على المجال $[2;5]$ بـ $f(x)=x-3$

احسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محو الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=2$ و $x=5$.

57 f معرفة على المجال $I=[-2;3]$ بـ :

$$f(x)=\begin{cases}-x & ; x\in[-2;2]\\ 2x-6 & ; x\in[2;3]\end{cases}$$

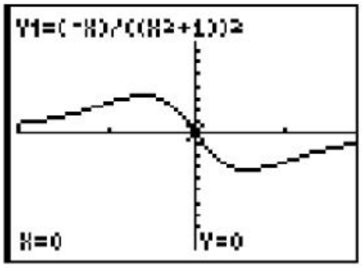
ارسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ثم احسب $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

58 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1;5]$ بـ :

$$f(x)=\begin{cases}x+1\,; -1\le x\le 0\\ -x+1\,; 0<x\le 3\\ x-5\,; 3<x\le 5\end{cases}$$

احسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f الممثل في معلم متعامد ، محو الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=-1$ و $x=5$.

59 المنحني المرسوم (C) معادلته $y=\frac{-x}{\left(x^2+1\right)^2}$



1. عين المساحة A_1 لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)، محور الفواصل و المستقيم D الذي معادلته $x=1$.

2. أ- اكتب معادلة المماس T للمنحني (C) عند المبدأ.

ب- حدّد وضعية (C) بالنسبة إلى T .

ج- احسب المساحة A_2 للمثلث المحدد بـ T ، محور الفواصل و المستقيم D (مقدرة بوحدة المساحات)

3. استنتج المساحة A لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)، المماس T و المستقيم D (مقدرة بوحدة المساحات).

4. أ- احسب $I(\lambda)=\int_0^{\lambda}\frac{-x}{(x^2+1)}dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

ب- عين نهاية $I(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$. فسر بيانيا هذه النتيجة.

5 ـ توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

60 1. x عدد حقيقي موجب تماما. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$

2. استنتج دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x^2}$ على $]0;+\infty[$

• في التمارين من **61** إلى **64** وباستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب التكاملين I و J

61 1) $I=\int_1^e x\ln x\,dx$ 2) $J=\int_2^e \ln(x-1)\,dx$

62 1) $I=\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$ 2) $J=\int_0^1 xe^x\,dx$

63 1) $I=\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,dx$ 2) $J=\int_2^3\frac{x}{\sqrt{2x-3}}dx$

64 1) $I=\int_1^2(x-2)e^x dx$ 2) $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}3x\sin 3x\,dx$

65 1. نضع: $I=\int_0^1\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$ و $J=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$

باستعمال المكاملة بالتجزئة عبر عن I بدلالة J.

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

ب- استنتج قيمة J.

3. احسب قيمة I.

66 باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين ،احسب التكاملين التاليين:

$$I=\int_0^1 x^2e^x dx \quad \text{و} \quad I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx$$

67 من أجل كل عدد طبيعي n نضع

$$I_n=\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين احسب I_n بدلالة n .

• في التمارين من **68** إلى **70** f دالة مستمرة على المجال I يشمل a. باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية F للدالة f على I بحيث $F(a)=0$

68 $I=]0;+\infty[$ ، $a=1$ ، $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

69 $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$ ، $f(x)=2xe^{-x}$

70 $I=]0;+\infty[$ ، $a=1$ ، $f(x)=x^2\ln x$

71 نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2x\,dx$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2x\,dx$

1. احسب $I+J$.

2. أ- تحقق أن $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos(2x)x\,dx$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب $I-J$

3. استنتج قيمة كل من I و J .

5 ـ بعض تطبيقات الحساب التكاملي

72 ليكن (C) التمثيل البياني على المجال $[0;1]$ للدالة

$$f:x\mapsto x^2-3x+2$$

1. أحسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل $(x'x)$.

2. أحسب v الحجم المولد بدوران المنحني (C) حول محور الفواصل $(x'x)$.

73 ليكن (C) التمثيل البياني على المجال $[0;1]$ للدالة

$$f:x\mapsto(x-1)e^x$$

1.أحسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل $(x'x)$.

2.أحسب v الحجم المولد بدوران المنحني (C) حول محور الفواصل $(x'x)$.

تمارين للتعمق

• في التمرينين **74** و **75** استعمل شفعية الدالة f لتعيين قيمة التكامل المعطى:

74 1) $\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{1+t^2}dt$ 2) $\int_{-3}^{3}(x^3+\sin x)dt$

75 1) $\int_{-1}^{1}\frac{e^t-1}{e^t+1}dt$ 2) $\int_{-0,7}^{0,7}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dt$

• في التمارين من **76** إلى **82** احسب التكاملات

76 1) $\int_{0}^{1}7x\left(x^2+1\right)dx$ 2) $\int_{0}^{3}\frac{x+2}{\left(x^2+4x\right)^3}dx$

77 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos(2t)dt$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{1+\cos^2 t}dt$

78 1) $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2t+1}}dt$ 2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

79 1) $\int_{1}^{3}e^{3x+5}dx$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\sin x\, e^{\cos x}dx$

80 1) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\,dt$ 2) $\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{x+2}dx$

مساعدة: $\frac{x^2-1}{x+2}=ax+b+\frac{c}{x+2}$

81 1) $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$ 2) $\int_{-1}^{3}\frac{e^{2t}-e^t+3}{2e^t}dt$

82 1) $\int_{-1}^{3}\frac{e^{2t}-e^t+3}{2e^t}dt$ 2) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

مساعدة: لاحظ أن $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

83 1. احسب التكامل $I_1=\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx$

2 . ليكن $I_2=\int_{0}^{1}\frac{x^3}{1+x^2}dx$ احسب I_1+I_2 ثم استنتج قيمة I_2.

84 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(1-x)e^x$

1.بين انه من اجل كل عدد حقيقي x:

$f(x)+f''(x)=2f'(x)$ حيث f' و f'' هما على الترتيب المشتقة الأولى و المشتقة الثانية للدالة f.

2.استنتج قيمة التكامل $\int_{0}^{1}f(x)dx$

85 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$$

1.بين انه من اجل كل عدد حقيقي x،

$$f'(x)+2f(x)=\frac{2e^{-x}}{1+2e^{-x}}$$

حيث f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$\frac{2e^{-x}}{1+2e^{-x}}=e^{-x}-2-2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$$

3.استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

4. λ عدد حقيقي موجب تماما. احسب المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\lambda$.

86 ليكن التكامل $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$

1.احسب التكامل $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$

2. احسب $I+J$ ثم استنتج قيمة I.

87 r عدد حقيقي موجب تماما. $\mathcal{C}$ هو المنحني الذي معادلته $y=\sqrt{r^2-x^2}$

1.حدّد مجموعة النقط M التي إحداثياتها $(x;y)$ حيث $0\le x\le r$ و $0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}$.

2.استنتج $\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ و $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

88 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2+x}{1-x}$$

1.أ- عين الأعداد الحقيقية a، b ، c و d بحيث من أجل كل $x\neq 1$ يكون ، $f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{1-x}$

ب- احسب $I=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

2.احسب باستعمال المكاملة بالتجزئة،التكامل J حيث:

$$J=\int_0^{\frac{1}{2}}(3x^2-12x+1)\ln(1-x)\,dx$$

89 **من بكالوريا**

f :دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{xe^x}{1+e^x}$

1.بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x ،

$$\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$$

2.استنتج حصرا لمساحة حيز المستوي المكون من مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث:

$0\leq y\leq f(x)$ و $1\leq x\leq$ ª

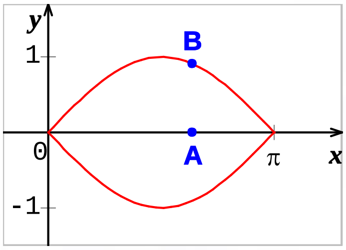
90 $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي. $\mathscr{C}_f$ هو التمثيل البياني للدالة sin على $[0;\pi]$

1.لكل عدد حقيقي x من $[0;\pi]$، نرفق النقطتين A و B اللتين فاصلتهما x تقعان على الترتيب على محور الفواصل و على المنحني $\mathscr{C}_f$.

القطعة $[AB]$ تدور حول المحور $(O;\vec{i})$ تولد قرصا في الفضاء.

عبر عن مساحة هذا القرص بدلالة x .

2.احسب حجم المجسم المولد بدوران المنحني $\mathscr{C}_f$ حول محور الفواصل.



• في التمارين من **91** إلى **96** باستعمال المكاملة بالتجزئة ، جد دالة أصلية F للدالة f المعرفة على المجال I تنعدم من أجل القيمة a

91 $f(t)=\ln(t^2)$ ، $I=]0;+\infty[$ ، $a=1$

92 $f(t)=(2t+1)\sin t$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$

93 $f(t)=\ln(t+2)$ ، $I=]-2;+\infty[$ ، $a=0$

94 $f(t)=(t+1)^2e^{2t}$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=-1$

استعمل المكاملة بالتجزئة مرتين.

95 $f(t)=\cos t e^{-2t}$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$

استعمل المكاملة بالتجزئة مرتين

96 $f(t)=(\ln t)^2$ ، $I=]0;+\infty[$ ، $a=1$

استعمل المكاملة بالتجزئة مرتين.

97 من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $u_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$

1.بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{e^{nx}}{1+e}\leq\frac{e^{nx}}{1+e^x}\leq\frac{e^{nx}}{2}$

2.استنتج حصرا للعدد u_n ثم بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^n}=0$

98 **من بكالوريا**

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ

$$f(x)=1-\frac{\ln(x^2)}{x}$$

1.ادرس تغيرات الدالة f.

2.ادرس وضعية المنحني $\mathscr{C}$ الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=1$.

3. 3.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$

4.احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحني $\mathscr{C}$ و المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$ ، $x=\alpha$ و $y=1$

5.بين أن $A(\alpha)=\frac{\alpha^2}{4}$ ثم استنتج حصرا لــ $A(\alpha)$

99 من بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=2e^{\frac{1}{2}x+1}-x-2$$

1.ادرس إشارة $f(x)-(-x-2)$ على $\mathbb{R}$.

2.احسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f و المستقيمات التي معادلاتها: $y=-x-2$ ، $x=0$ و $x=\lambda$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

3.نعرف متتالية عددية (u_n) على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u_n=A(n)+4e$ علما أن $A(n)$ هي المساحة $A(\lambda)$ من أجل $\lambda=n$.

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية ، عين حدها الأول و أساسها.

100 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

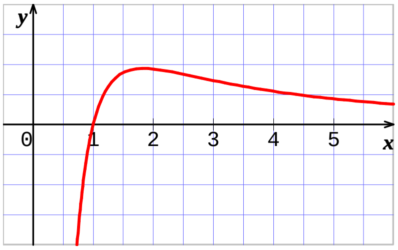
$$f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$$

1. بين انه من أجل كل $x>1$: $\frac{\ln x}{x^2}\leq f(x)\leq\frac{\ln x}{x}$

2. أ- احسب $I=\int_2^4\frac{\ln x}{x}dx$ و $J=\int_2^4\frac{\ln x}{x^2}dx$ (يمكن استعمال المكاملة بالتجزئة لحساب J.)

ب- استنتج حصرا لـ $K=\int_2^4 f(x)\,dx$

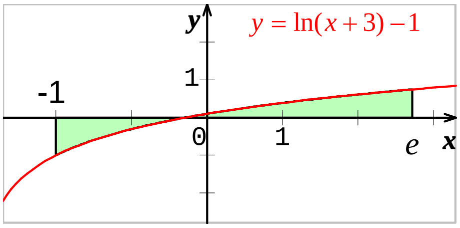
3. الشكل التالي هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد حيث الوحدة هي $1cm$ على محور الفواصل و $4cm$ على محور التراتيب.نعتبر مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $2\leq x\leq 4$ و $0\leq y\leq f(x)$ و نرمز بـ A إلى مساحتها.



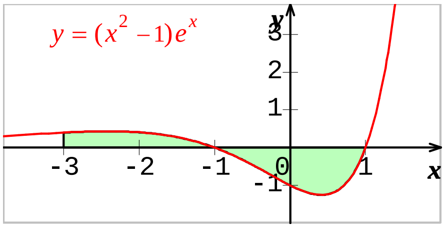
- باستعمال الحصر الموجود في السؤال 2.ب) أعط حصرا لـ A بـ cm^2 .

في التمرينين **101** و **102** احسب بـ وحدة المساحات $(u.a)$ مساحة الحيز الملون

101



102



103 F و G دالتان أصليتان على $]0;+\infty[$ للدالتين $t\mapsto\cos(\ln t)$ و $t\mapsto\sin(\ln t)$ على الترتيب و اللتان تنعدمان عند 1 .

الهدف من هذا التمرين تعين هاتين الدالتين الأصليتين انطلاقا من التكاملين $F(x)=\int_1^x\cos(\ln t)\,dt$

و $G(x)=\int_1^x\sin(\ln t)\,dt$

1. بين باستعمال المكاملة بالتجزئة أن :

$$F(x)=x\cos(\ln x)-1+G(x)$$

و $G(x)=x\sin(\ln x)-F(x)$

2.استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$

104 الهدف من هذا التمرين هو البرهان أن:

$$\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx=\frac{\pi}{8}$$

1. لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي:

$$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$$

أ- بين أن مستمرة و موجبة على $[0;1]$

ب-احسب $f'(x)$ من أجل كل $x\in[0;1]$.

جـ - استنتج تغيرات الدالة f على $[0;1]$.

2. $\mathcal{C}$ هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.I نقطة إحداثياتها $\left(\frac{1}{2};0\right)$

أ- M نقطة من $\mathscr{C}$ فاصلتها x $(0 \le x \le 1)$. احسب IM^2.

ب- بين أن $\mathscr{C}$ هي نصف دائرة .حدّد مركزها و نصف قطرها. ارسم $\mathscr{C}$

3.أ- فسر هندسيا التكامل $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$

ب- استنتج المطلوب.

105 بكالوريا

الهدف من هذا التمرين حساب التكاملات التالية:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ، \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$$

و $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1.لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي :

$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$$

أ- احسب مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$

ب- استنتج f' مشتقة الدالة f .

جـ- احسب قيمة I .

2. أ- بدون حساب J و K ، تحقق أن $J+2I=K$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة على K بين أن:

$$K = \sqrt{3} - J$$

جـ- استنتج قيمتي J و K .

106 بكالوريا

من اجل كل عدد طبيعي n ،نعتبر العددين الحقيقيين

$$I_n = \int_0^{\frac{®}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx \quad و \quad J_n = \int_0^{\frac{®}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$$

1.احسب I_0 و J_0

2.نضع $n \ge 1$

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن:

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{®}{2}} \end{cases}$$

ب- استنتج عبارتي I_n و J_n بدلالة n .

107 بكالوريا

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \end{cases} \quad \text{من أجل } n \ge 2$$

و $v_n = u_n - \ln n$ من أجل $n \ge 1$

1.أ- احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

ب- بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

2. أ-بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم k :

$$\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \le \frac{1}{k}$$

ب- استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$:

$$u_n - 1 \le \ln n \le u_n - \frac{1}{n} \quad و \quad 0 \le v_n \le 1$$

3. أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n).

4. بين أن المتتالية (v_n) متقاربة.نرمز بـ ¥ إلى نهاية المتتالية (v_n).(لا نريد حساب ¥).

ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

108 بكالوريا

f دالة معرفة على $[0;2]$ بـ $f(x) = (x-2)e^x$

$\mathscr{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.ادرس تغيرات f ثم ارسم $\mathscr{C}$.

2.S هي جزء المستوي المحدد بالمنحني $\mathscr{C}$ و محور الفواصل .احسب القيمة المضبوطة لمساحة S ، ثم أعط قيمة تقريبية إلى 10^{-2} بالزيادة لهذه المساحة.

3. بالدوران حول المحور $(x'x)$ ، $\mathscr{C}$ تولد مجسما حجمه V

أ- جد الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث تكون الدالة المعرفة بـ $G(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$ أصلية للدالة f^2 على □.

ب- استنتج القيمة المضبوطة للحجم V ، ثم أعط قيمة تقريبية إلى 10^{-3} بالزيادة لهذا المساحة.

109 بكالوريا

1. لتكن الدالة f المعرفة على □ بـ $f(x)=x^2e^{1-x}$.

ليكن $\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$

أ - عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب - بين أن f قابلة للاشتقاق على □ و عين دالتها المشتقة f' .

جـ - شكل جدول تغيرات f و ارسم المنحني $\mathscr{C}$.

2. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نعرف التكامل I_n كما يلي: $I_n=\int_0^1 x^ne^{1-x}dx$

أ - عين علاقة بين I_{n+1} و I_n .

ب - احسب I_1 ثم I_2 .

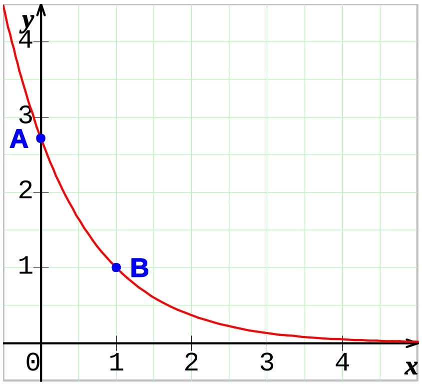
جـ - أعط تفسيرا هندسيا للتكامل I_2

3. أ- بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$ و من اجل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $x^n\le x^ne^{1-x}\le x^ne$

ب - استنتج حصرا لــ I_n ، ثم نهاية I_n لما يؤول n إلى $+\infty$

110 بكالوريا

مثلنا في الشكل التالي في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحني البياني لدالة f قابلة للاشتقاق على □ حل المعادلة التفاضلية $y'+y=0$ حيث $f(0)=e$.



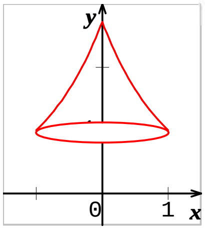
1. عين $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

2. ليكن t عدد حقيقي من المجال $[1;e]$

حل في □ المعادلة ذات المجهول x : $e^{1-x}=t$

3. لتكن A النقطة التي فاصلتها 0 و B النقطة التي فاصلتها 1 من المنحني .

نعتبر المجسم المحصل بدوران قوس المنحني AB حول محور التراتيب كما هو مبين في الشكل،



نرمز بـ v إلى حجم هذا الجسم

نقبل أن $v=® \int_1^e (1-\ln t)^2dt$

احسب v باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين.

111 بكالوريا

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$:

$$\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\le\frac{1}{x+n}\le\frac{1}{n}$$

2. أ- احسب $\int_0^1\frac{1}{x+n}dx$

ب - استنتج انه من أجل كل $n\in □^*$:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\le\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\le\frac{1}{n}$$

3. نسمي U المتتالية المعرفة على $□^*$ بـ:

$$U(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}-\ln n$$

بين أن المتتالية U متناقصة (يمكن استعمال السؤال 2.ب))

4. نعتبر المتتالية V المعرفة بـــ:

$$V(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

بين أن V متزايدة.

5. بين أن U و V تتقاربان نحو نفس النهاية ℓ .عين قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد ℓ .

u متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\ge2$

بـ $u_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\int_1^n\frac{1}{x}dx$

1. أنشئ في معلم متعامد و متجانس المنحني الممثل للدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

2. أ- على المجالات $[1;2]$ ، $[2;3]$ و $[3;4]$ أنشئ على الترتيب المستطيلات R_1 ، R_2 و R_3 التي ارتفاعاتها $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ المستطيلات R'_1 ، R'_2 و R'_3 التي ارتفاعاتها

1، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$.

- استنتج أن $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\le\int_{1}^{4}\frac{dx}{x}\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

ب- n عدد طبيعي حيث $n\ge 2$ نعتبر بنفس الطريقة السابقة المجالات $[1;2]$، $[2;3]$،..... $[n-1;n]$ و المستطيلات R_1، R_2، ..... R_{n-1} التي ارتفاعاتها $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، ..... $\frac{1}{n}$ و المستطيلات R'_1، R'_2، .... R'_{n-1} التي ارتفاعاتها 1، $\frac{1}{2}$ ، ...... $\frac{1}{n-1}$

- تحقق أن :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\le\int_{1}^{4}\frac{dx}{x}\le 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}$$

-حدّد ماذا يمثل كمساحة كل حد من المتباينة.

3.استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$، $0\le u_n\le 1$

4.أ- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$، $\frac{1}{n+1}\le\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{n}$

ب- استنتج أن المتتالية u متناقصة.

جـ- بين أن المتتالية u متقاربة.نرمز بـ C إلى نهايتها.

5.v هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$ بـ: $v_n=u_n-\frac{1}{n}$

أ- بين باستعمال السؤال 4.أ- أن المتتاليتين u و v متجاورتان.

ب- استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$،

$$0\le u_n-C\le\frac{1}{n}$$

معلومة : العدد الحقيقي C يسمى ثابت أولر $(EULER)$.

مسائل

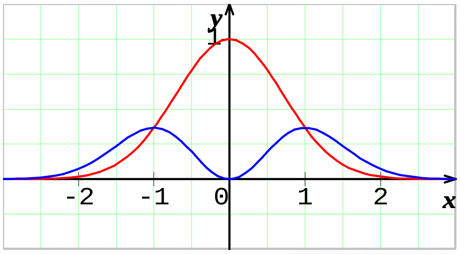
112 بكالوريا

الجزء A :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على ℝ كما يلي:

$$f(x)=e^{-x^2} \quad \text{و} \quad g(x)=x^2e^{-x^2}$$

$\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$



1.ميز في الشكل المنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ (مع التبرير)

2.ادرس شفعية الدالتين f و g .

3.ادرس اتجاه تغير الدالتين f و g .احسب النهايتين عند $+\infty$.

4.ادرس الوضعية النسبية لـــ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

الجزءB : نعتبر الدالة G المعرفة على ℝ كما يلي:

$$G(x)=\int_{0}^{x}t^2e^{-t^2}dt$$

1.ماذا يمثل G بالنسبة إلى الدالة g ؟

2. من اجل $x>0$ ، أعط تفسيرا لـــ $G(x)$.

3.ادرس تغيرات الدالة G على ℝ.

نعرف الدالة F على ℝ بـ $F(x)=\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt$

4. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x،

$$G(x)=\frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$$

يمكن البدء بالمقارنة بين مشتقتي الدالتين G و الدالة $x\mapsto F(x)-xe^{-x^2}$

نقبل أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عند $+\infty$ و أن هذه النهاية هي مساحة الحيز A المحدد بالمنحني $\mathcal{C}_f$ و المحورين $(O;\vec{i})$ و $(O;\vec{j})$ مقدرة بوحدة المساحات.

5. أ- بين أن الدالة G تقبل نهاية عند $+\infty$ يطلب تعيينها.

ب- فسر باستعمال المساحة العدد $N=\int_{0}^{1}(1-t^2)e^{-t^2}dt$

جـ- نقبل أن نهاية الدالة G عند $+\infty$ تمثل المساحة P (مقدرة بوحدة المساحات) للحيز D المحدد بالمنحني $\mathcal{C}_g$ و المحور $(O;\vec{i})$.

برّر بيانيا أن $\int_{0}^{1}(1-t^2)e^{-t^2}dt\ge\frac{\ell}{2}$.

113 بكالوريا

الجزءA:

نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E)\ldots\ y'+y=e^{-x}$

1.بين أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=xe^{-x}$ حل للمعادلة (E)

2.حل المعادلة التفاضلية $(E_0)\ \ldots\ y'+y=0$

3.بين أن الدالة v المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تكون حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $v-u$ حلا للمعادلة (E_0).

4. استنتج جميع حلول المعادلة (E)

5.عين الدالة f_2 حل المعادلة (E) التي تأخذ القيمة 2 من أجل 0.

الجزء B:

k عدد حقيقي معطى، نرمز بـــ f_k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_k(x)=(x+k)e^{-x}$

نرمز بـــ $\mathscr{C}_k$ إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين نهايات f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2.احسب f'_k من أجل كل عدد حقيقي x.

3.شكل جدول تغيرات الدالة f_k

الجزء C:

نعتبر متتالية التكاملات (I_n) المعرفة بـــ $I_0=\int_{-2}^{0}e^{-x}\,dx$

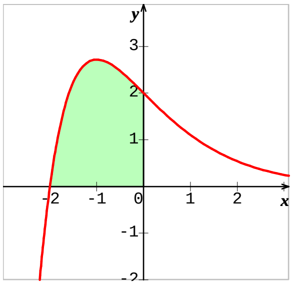
ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $I_n=\int_{-2}^{0}x^n e^{-x}\,dx$

1.أ- احسب القيمة المضبوطة لـــ I_0.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $I_{n+1}=(-2)^{n+1}e^2+(n+1)I_n$

جـ- استنتج القيم المضبوطة لـــ I_1 و I_2.

2. التمثيل البياني الموالي $\mathscr{C}_k$ هو لدالة f_k المعرفة في الجزءB .



أ- باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل ،عين قيمة k المرفقة بالمنحنى $\mathscr{C}_k$.

ب- لتكن S مساحة الجزء المضلل(مقدرة بوحدة المساحات).عبر عن S بدلالة I_0 و I_1 ثم استنتج القيمة المضبوطة للمساحة S.

114 بكالوريا

نهتم في هذه المسألة بدراسة متتالية تتقارب نحو e^2

نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$

التكامل $I_n=\int_0^2\frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$

1.احسب I_1.

2. بين انه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$:

$0\leq I_n\leq\frac{2}{n!}(e^2-1)$.

3. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $I_{+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

4. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+I_n$

5. نضع ، من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_n=\frac{2^n}{n!}$

أ- احسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$: $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$

ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$: $0\leq u_n\leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

6. استنتج نهاية المتتالية u ثم نهاية المتتالية (I_n).

7. بين أن : $e^2=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}\right)$

115 بكالوريا

1.من أجل كل عدد حقيقي k $(k\geq 0)$، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=x+\frac{1-ke^x}{1+ke^x}$

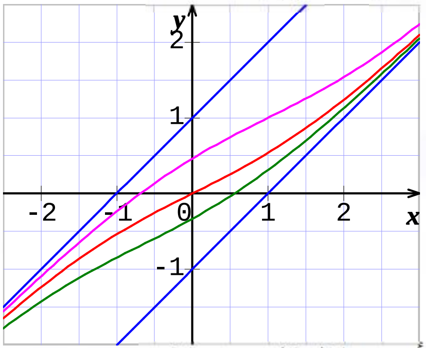
أ-بين أن من أجل كل عدد حقيقي k $(k\geq 0)$، الدالة f_k هي حل للمعادلة التفاضلية $(E):2y'=(y-x)^2+1$

ب -استنتج اتجاه تغير الدالة f_k

2.نرمز بـ $\mathcal{C}_k$ إلى التمثيل البياني للدالة f_k في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشكل الموالي رسمنا المستقيمين d و d' اللذين معادلتاهما على الترتيب $y=x-1$ و $y=x+1$ و كذلك عدة منحنيات $\mathcal{C}_k$ مرفقة لقيم خاصة لـ k.

عين العدد k المرفق للمنحنى $\mathcal{C}$ الذي يشمل O، ثم العدد k المرفق للمنحنى $\mathcal{C}'$ الذي يشمل النقطة $A(1;1)$.



3.أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$(1)\ldots\ldots\quad f_k(x)=x-1+\frac{2}{1+ke^x}$$

و

$$(2)\ldots\quad f_k(x)=x+1-\frac{2ke^x}{1+ke^x}$$

ب - من أجل كل $k>0$ ، استنتج :

- وضعية المنحنى $\mathcal{C}_k$ بالنسبة إلى المستقيمين d و d'.
- المستقيمات المقاربة للمنحنى $\mathcal{C}_k$.

4. حالة خاصة: $k=1$

أ - بين أن f_1 دالة فردية.

ب - لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$F(x)=\int_0^x f_1(t)\,dt$$

- فسر هندسيا العدد $F(x)$ في الحالتين $x>0$ و $x<0$.
- عين إذن شفعية الدالة مستعملا التفسير البياني.

جـ - شكل جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

د - احسب $F(x)$ مستعملا الشكل الأنسب لـ $f(x)$.

116 **بكالوريا**

نعتبر الدوال f_n المعرفة على $[0;1]$ بـ :

$$f_0(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$$

و من أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$:

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x+x^2}$$

نضع $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

الجزء A:

1.ادرس تغيرات الدالة f_0

أنشئ المنحنى الممثل للدالة f_0 في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $6cm$ محدّدا المماسات عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و 1 على الترتيب.

2.من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$، نضع

$$f(x)=-f_0'(x)$$

احسب الدالة المشتقة للدالة f و بين أن f متزايدة على المجال $[0;1]$.

استنتج أنه من اجل كل x من $[0;1]$: $\frac{1}{3}\le f(x)\le 1$

الجزءB: في هذا الجزء لا نريد حساب I_n.

1.احسب $I_0+I_1+I_2$ و I_0+2I_1

2. ادرس ، من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل كل عدد حقيقي $x\in[0;1]$، إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$

استنتج أن المتتالية (I_n) متناقصة.

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل كل عدد حقيقي $x\in[0;1]$، $0\le f_n(x)\le x^n$

استنتج أن: $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$.

عين نهاية المتتالية (I_n).

4.أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_n=\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}\,dx$

(f هي الدالة المعرفة في الجز **2.A**)

ب - باستعمال الحصر المعطى في السؤال **2. A** ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$\frac{1}{3(n+2)}\le\int_0^1 f(x)x^{n+1}\,dx\le\frac{1}{n+2}$$

بين أن :

$$\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{3(n+1)(n+2)}\le I_n\le\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

جـ - ابتداءً من أي عدد n_0 يكون هذا الحصر يقترب بالزيادة إلى I_n من $0,01$ ؟

د - عين إذن القيمة المقربة إلى $0,01$ بالزيادة لـ I_n من أجل $n=n_0$.

إختيار من متعدد

117 اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة مع التبرير.

لتكن الدالة f المعرفة على $\square$ بـ: $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

و f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f الدالة f'' معرفة بـ:

أ) $f''(x)=\int_0^x -2te^{-t^2}dt$

ب) $f''(x)=\int_0^x -2xe^{-x^2}dx$

ج) $f''(x)=-2xe^{-x^2}$

د) $f''(x)=e^{-x^2}$

118 السؤال يتضمن 5 أجوبة ، واحد منها على الأقل صحيح، المطلوب تعيين الأجوبة الصحيحة مع التبرير

لتكن الدالة F المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

لا نريد حساب قيمة هذا التكامل

أ) F متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ب) F قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$.

جـ) من اجل كل $x\in[0;+\infty[: F(x)\le x$

د) من اجل كل $x\in[0;+\infty[: F(x)\ge \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$

هـ) $F(2)\ge \frac{2}{3}$

119 السؤال يتضمن 4 أجوبة ، واحد منها على الأقل صحيح، المطلوب تعيين الأجوبة الصحيحة مع التبرير

نعتبر متتالية لتكاملا التالية $I_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ حيث $n\in\square$

1) $I_0=\left[\ln(1+e^x)\right]_0^1$

2) $I_1=\left(\frac{1+e}{2}\right)$

3) من أجل كل $n\in\square^* : I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n}(e^n-1)$

4) المتتالية (I_n) متناقصة.

أصحيح أم خطأ ؟

120 اذكر إن كانت النهايات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a;b]$

أ) إذا كان $\int_a^b f(t)\,dt\le\int_a^b g(t)\,dt$ فإن $f\le g$ على $[a;b]$

ب) إذا كان $\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b g(t)\,dt$ فإن $f=g$ على $[a;b]$

جـ) $\int_1^2 \frac{x^2e^x\ln(x^2+1)}{1+x^4}dx\ge 0$

121 هل الخواص التالية صحيحة أم خاطئة(برّر)

لتكن f الدالة المعرفة على $\square$ بـ $f(x)=(x+1)e^{2x}$

أ) الدالة f هي حل لمعادلة التفاضلية $y'-2y=e^{2x}$

ب) المعادلة $f(x)=-\frac{1}{16}$ تقبل بالضبط حلين.

جـ) من أجل كل عدد حقيقي $\sim$ ،نضع $I(\sim)=\int_{\sim}^{-1} f(t)dt$

من أجل كل $\sim$ $I(\sim)=-\frac{1}{4e^2}-\frac{2\sim+1}{4}e^{2\sim}$

د) $\lim\limits_{x\to-\infty} I(\sim)=+\infty$

122 اذكر إن كانت كل خاصية من الخواص التالية صحيحة أم خاطئة معللا إجابتك.

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$

أ) من أجل $x>0$ ، $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$

ب) دالة أصلية للدالة $g:\mapsto\frac{1}{x(x+1)}$ على $]0;+\infty[$ هي الدالة G المعرفة بـ: $G(x)=\ln\frac{x}{x+1}$

جـ) التكامل $\int_1^{\sim} f(x)dx$ يساوي :

$$2\ln2-\frac{\ln(1+\sim)}{\sim}+\ln\frac{\sim}{\sim+1}$$

د) $\lim\limits_{\sim\to0} I(\sim)=2\ln2-1$

هـ) $\ln(1+\sim)=\ln\left[\sim\left(1+\frac{1}{\sim}\right)\right]=\ln\sim+\ln\left(1+\frac{1}{\sim}\right)$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} I(\sim)=+\infty$

07 الإحتمالات الشرطية

الكفاءات المستهدفة

- إيجاد قانون احتمال لمتغير عشوائي .
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الإنحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- التعرف على استقلال أو ارتباط حادثتين .
- توظيف دستور الاحتمالات الكلية لحل مسائل في الاحتمالات تتعلق بالسحب من أكثر من كيس .
- نمذجة وضعيات بالاعتماد على التجارب المرجعية للسحب أو الإلقاء .

على لوحة غالتون (Galton) ، احتمال أن تصل كرية إلى نقطة ما يساوي نسبة عدد المسارات الممكن المرور عبرها إلى عدد المسارات الكلية . على الشكل ، في الصف السادس ، للكرية 10 حظوظ من أصل 32 حظ كي تصل إلى النقطة A و 10 حظوظ من 32 كي تصل الى النقطة B . لاحظ أن

مجموع الاحتمالات في الصف السادس (و في كل صف) يساوي 1

للوصول إلى النقطة C في الصف الموالي يجب على الكرية أن تمر بـــ A أو B . في كل حالة لها حظ من حظين . نتحصل على ما يلي :

احتمال أن تصل الكرية إلى C هو :

$$\frac{1}{2}\times\frac{10}{32}+\frac{1}{2}\times\frac{10}{32}=\frac{20}{64}$$

و هكذا نتحصل على كسور مقاماتها هي قوى العدد 2 و أبسطتها هي الأعداد المشكلة لمثلث باسكال و هي أيضا معاملات ثنائي الحد لنيوتن .

و باستعمال عددا كبيرا جدا من الكريات ، منحنى توزيع الكريات يتشكل على هيئة جرس يعرف باسم ناقوس غوص و ينص قانون غوص على ": عندما يكون عدد الكريات المستعملة كبيرا كبرا لانهائيا منحنى التوزيع يستقر على هيئة نهائية تسمى منحنى غوص (منحنى على شكل ناقوس " التوزيع المستمر العشوائي ")

نشاط أول

نرمي أربعة مرات متتابعة قطعة نقد متوازنة .

1) أكتب قائمة المخارج (16 نتيجة ممكنة)

2) ماهي الحاثة الأكبر إحتمالا (A أم B) حيث
"A" الحصول على وجهين و ظهرين "

نشاط ثان

يحتوي صندوق على 37 قريصة لا نميز بينها باللمس ، منها 18 قريصة حمراء .نعتبر اللعبتين التاليتين :

اللعبة الاولى

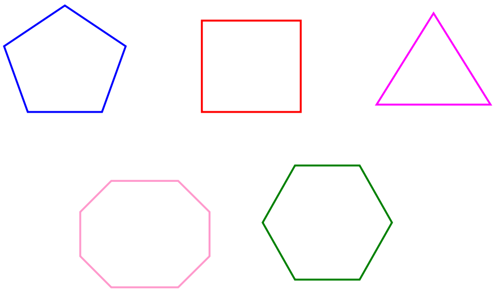
يدفع اللاعب 10 دنانير و يسحب قريصة واحدة عشوائيا . إذا كانت القريصة المسحوبة حمراء يربح 10 دنانير و إلا خسر ما دفعه .

اللعبة الثانية

يدفع اللاعب 10 دنانير و يحدّد رقما قبل السحب ثم يسحب القريصة و يربح 350 دينارا إذا كان الرقم المسحوب هو المحدد سابقا إلا خسر ما دفعه .

- قارن بين اللعبتين (الربح المتوسط)

نشاط ثالث



1) ماهو عدد أقطار مضلع ذي n رأسا ؟

2) نفرض أن كل قطرين من هذه الأقطار لا يتوازيان .
إذا كانت كل ثلاثة أقطار منها لا تشترك في نقطة واحدة .
- فما هو عدد نقط تقاطع هذه الأقطار ؟
- تحقق من النتيجة من أجل $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$

نشاط رابع

- ماهو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 إذا كانت هذه الأرقام تتكون من :

1) 3 أرقام ؟ 2) 3 أرقام مختلفة ؟ 3) 6 أرقام مختلفة ؟

نشاط خامس

يتكون قسم من 20 تلميذا . أحمد تلميذ من هذا القسم .

1) نريد اختيار تلميذين من القسم ،

- أحسب a عدد الطرق الممكنة

(أي عدد اللجان ذات تلميذين و التي يمكن تشكيلها من بين تلاميذ القسم كلهم) .

2) نريد اختيار تلميذين شريطة أن لا يكون أحمد أحدهما .

- أحسب b عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة .

3) نريد اختيار تلميذين شريطة أن يكون أحمد أحدهما .

- أحسب c عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة .

4) حدد العلاقة بين الأعداد الطبيعية a ، b و c .

نشاط سادس

يتوزع 400 تلميذ من الأقسام النهائية في ثانوية ما الى فوجين A و B و ذلك حسب اللغة الحية التي يدرسونها(إنجليزية أو ألمانية) .

يوضح الجدول التالي هذا التوزيع بالنسبة للبنين (G) و البنات (F)

ألمانية (D)	إنجليزية (A)	اللغة الحية
50	130	بنون G
80	140	بنات F

تم اختيار تلميذ عشوائيا من بين قوائم تلاميذ السنة النهائية

1) أحسب إحتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا.

(نرمز لهذا الإحتمال بالرمز $P(F)$)

2) أحسب إحتمال أن يكون التلميذ المختار يدرس اللغة الألمانية .

3) علما أن التلميذ المختار بنت.، ماهو احتمال أن تكون تدرس الألمانية ؟

4) قارن النتيجة السابقة مع $\dfrac{P(D\cap F)}{P(F)}$

حيث $P(D\cap F)$ هو احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا و تدرس الألمانية

العـــد (القوائم ، الترتيبات ، التبديلات)

1. قوائم عناصر مجموعة منتهية :

تعريف: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي $(p \geq 1)$
نسمي قائمة ذات p عنصرا من E كل متتالية مرتبة من p عنصرا من عناصر E
إذا أردنا أن تكون هذه العناصر المرتبة متمايزة مثنى مثنى عندئذ لا يمكن للقائمة أن تحتوي أكثر من n عنصرا و هذا ما يقتضي أن يكون $n \geq P \geq 1$

➢ من أجل كل عدد طبيعي p $(p \geq 1)$ عدد قوائم E ذات p عنصرا يساوي n^p بينما يكون عدد قوائم E ذات p عنصرا المتمايزة العناصر مثنى مثنى هو $n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)$ ، هذا الجداء يحوي p عاملا .

2. التفسير

في الحالة الأولى (عدم اشتراط تمايز العناصر) يكون لكل عنصر من عناصر القائمة n إمكانية و منه فإن عدد القوائم هو $n \times n \times n \times ... \times n$ ، (p مرة) أي n^p

في الحالة الثانية (قوائم عناصرها متمايزة مثنى مثنى) يكون للعنصر الأول n امكانية ثم $(n-1)$امكانية للعنصر الثاني و $(n-2)$ للعنصر الثالث ... و أخيرا $n-p+1=n-(p-1)$ امكانية للعنصر الأخير الذي رتبته p
باستعمال مبدأ الضرب يكون عدد هذه القوائم $n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)$

ملاحظة: نسمي القائمة التي عناصرها متمايزة مثنى مثنى ترتيبة و يرمز لعدد الترتيبات ذات p عنصرا من بين n عنصرا بالرمز A_n^p و نكتب $A_n^p = n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)$

مثال: 1) ما عدد الأعداد ذات 3 أرقام و التي يمكن تشكيلها من الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ؟
2) ما عدد الأعداد ذات 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و التي يمكن تشكيلها من الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ؟

الحل: 1) كل عدد هو قائمة ذات 3 عناصر من بين الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5
عدد الأعداد هو $5 \times 5 \times 5 = 125$
2) كل عدد هو ترتيبة ذات 3 عناصر متمايزة من بين الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6
عدد الأعداد هو $6 \times 5 \times 4 = 120$

3. تعريف

ترتيبة ذات n عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا تسمى تبديلة ذات n عنصرا عدد التبديلات إذن هو $n(n-1)(n-2)\times....\times 2 \times 1$ و يرمز له بالرمز $n!$ و يقرأ مفكوك n أو (n عاملي)

ملاحظة: يمكن كتابة عدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالشكل $\dfrac{n!}{(n-p)!}$

تمرين محلول1:

1) ما عدد الأعداد ذات **3** أرقام مختلفة مثنى مثنى و التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام **2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9** ؟

2) من بين هذه الأعداد . ما عدد الأعداد

أ) الزوجية ؟ ب) مضاعفات **5** ؟ ج) الأصغر من **500** ؟

طريقة: مادام العناصر متمايزة (مختلفة) مثنى مثنى فالأمر إذن يتعلق بترتيبات

الحل: 1) كل عدد ذي 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى هو ترتيبة ذات 3 عناصر من بين 6 عناصر و بالتالي فعدد الأعداد هو $A_5^3 = 6\times5\times4 = 120$

2) أ) من بين هذه الأعداد تكون الأعداد الزوجية هي التي رقم آحادها 2 أو 6

- الأعداد التي رقم آحادها 2 هي ترتيبات ذات عنصرين من بين خمسة عناصر (باعتبار أن 2 ثابت ثم نرتب رقمي العشرات و المئات) و بالتالي عددها هو $A_5^2 = 5\times4 = 20$

(نفس الشيء بالنسبة للأعداد التي آحادها 6)

و منه عدد الأعداد الزوجية هو $2\times A_5^2 = 40$

مئات	عشرات	آحاد
		2

مئات	عشرات	آحاد
		6

ب) عدد الأعداد المضاعفة للعدد 5 هو عدد الترتيبات ذات عنصرين من بين 5 عناصر (رقم الآحاد 5) عدد هذه الأعداد هو $A_5^2 = 5\times4 = 20$

مئات	عشرات	آحاد
		5

ج) الأعداد التي هي أصغر من 500 هي الأعداد التي رقم مئاتها 2 أو 3

و بالتالي فإن عددها هو $2\times A_5^2 = 40$

مئات	عشرات	آحاد
2		

مئات	عشرات	آحاد
3		

تمرين محلول2:

1) ماهو عدد القوائم ذات **n** عنصرا $(n \geq 1)$ و التي يمكن تشكيلها من العنصر " نعم " ، " لا "

2) استنتج عدد أجزاء مجموعة ذات **n** عنصرا (**n** عدد طبيعي)

الحل 1) عدد القوائم هو $2\times2\times2\times...\times2$ (n مرة) أي هو 2^n

2) ليكن A جزءا من المجموعة (من بين n عنصرا) إما ينتمي إلى الجزء A أو لا ينتمي

كل جزء من A هو قائمة ذات n عنصرا من العنصرين " ينتمي " ، " لا ينتمي " و بالتالي فإن عدد الأجزاء هو 2^n

تمرين محلول3:

1) ماهو عدد الوضعيات التي يمكن أن يجلس بها **8** أشخاص حول طاولة مستديرة (من بجانب من ؟)

الحل 1)

كل وضعية هي تبديلة ذات 8 عناصر و بالتالي فعدد الوضعيات هو **!8**

التوفيقات – دستور ثنائي الحد

1. تعريف : E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي حيث $(n \geq P \geq 0)$

نسمي **توفيقة** ذات p عنصرا من عناصر E كل **جزء** من E ذي p عنصرا من عناصر E

نرمز لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p أو الرمز $\binom{n}{p}$

➢ نلاحظ أن $C_n^1 = n$ أي أن عدد الأجزاء التي تحوي عنصرا واحدا من مجموعة ذات n عنصرا هو n

بينما $C_n^n = 1$ إذ لا يوجد إلا جزء واحد يحوي كل العناصر و هو المجموعة نفسها و كذلك $C_n^0 = 1$ لأن الجزء الوحيد الذي لا يحوي أي عنصر هو الجزء الخالي

2. مبرهنة : من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq P \geq 0)$

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\times\ldots\times(n-p-1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

تفسير : من كل توفيقة ذات p عنصرا يمكن تشكيل $P!$ ترتيبة ذات p عنصرا . لكن عدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو $\frac{n!}{(n-p)!}$ و بالتالي $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

مثال : نريد تشكيل لجنة ذات 6 تلاميذ من بين 49 تلميذا ، ما عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟

كل لجنة هي توفيقة ذات 6 عناصر من بين 49 عنصر و بالتالي فإن عدد اللجان هو

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 13983816$$

3. خواص : 1) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq P \geq 0)$ لدينا $C_n^p = C_n^{n-p}$

2) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n-1 \geq P \geq 1)$ لدينا $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

تفسير : 1) عدد الأجزاء التي تحوي p عنصرا هو عدد متمماتها التي تحوي (n-p) عنصرا .

2) عدد الأجزاء ذات p عنصر التي تحوي العنصر a هو C_{n-1}^{p-1}

وعدد الأجزاء ذات p عنصرا و التي

لا تحوي العنصر a هو C_{n-1}^p و بالتالي فعدد الأجزاء

ذات p عنصر هو $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ و هو C_n^p .

ملاحظة : تمكننا الخاصية الثانية من حساب C_n^p

إذا علمنا C_{n-1}^{p-1} و C_{n-1}^p كما هو مبين في الشكل

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$

4. دستور ثنائي الحد : A و b عددان طبيعيان ، n عدد طبيعي $(n \geq 1)$ لدينا

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a\, b^{n-1} + b^n$$

يعطى البرهان في التمرين (29)

تمرين محلول1:

1) باستعمال الحاسبة ، أحسب $9!$ ، $15!$ ، $37!$

2) باستعمال الحاسبة ، أحسب C_{12}^{3} ، C_{16}^{5} ، C_{16}^{11}

الحل:

1) باستعمال الحاسبة Ti83 مثلا أدخل أولا العدد 9 ثم اضغط على **Math** **PRB** ثم اختر **4 : !** ENTER

```
9!
          362880
```

و بنفس الطريقة نجد

```
15!
 1.307674368E12
```

```
37!
 1.376375309E43
```

Math **PRB** **3 : nCr** ENTER

```
12 nCr 3
             220
```

و بنفس الكيفية نحصل على

```
16 nCr 5
            4368
```

و $C_{16}^{5} = C_{16}^{11}$ " **الخاصية (1)** "

تمرين محلول 2 :

يحتوي صندوق على 5 كريات سوداء و 4 كريات بيضاء ، كل الكريات متشابهة لا نميز بينها باللمس . نسحب في آن واحد 3 كريات

1) ماعدد السحبات الممكنة ؟ **2)** ماعدد السحبات الممكنة التي تحوي كرية سوداء على الأقل ؟

الحل:

2) يمكن أن نحسب عدد السحبات التي لا تحوي أي كرية سوداء (أي لا تحوي سوى الكريات البيضاء) و هو عدد التوفيقات ذات 3 عناصر من 4 أي $C_{4}^{3} = 4$

ثم نستنتج عدد السحبات التي تحوي كرية سوداء على الأقل و هو $84 - 4 = 80$

تمرين محلول 3 :

أحسب المجموعين : $A = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \frac{1}{2^{k}}$ $\qquad B = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \frac{3^{n-k}}{4^{k}}$

الحل: باستعمال منشور ثنائي الحد نلاحظ أن

$A = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n}$ و $B = \left(3+\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{13}{4}\right)^{n}$

نمذجة تجربة عشوائية :

عندما يكون عدد مخارج تجربة عشوائية منتهيا ، نعرّف على مجموعة المخارج $E=\{x_1,x_2,....,x_r\}$ ، قانون احتمال و ذلك باعطاء متتالية أعداد $(p_1,p_2,....,p_r)$ تحقق $\sum_{i=1}^{r} p_i=1$ و $p_i\geq 0$ من أجل كل i $(r\geq i\geq 1)$

مثال : يحتوي صندوق 6 كريات (ثلاثة منها تحمل الرقم 1 و كريتان تحملان الرقم 2 و كرية تحمل الرقم 3) الكريات لا نميز بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كرية واحدة

هناك عدة اختيارات ممكنة للأعداد p_i تحقق الشروط السابقة ، لكن النموذج المختار لا يكون مناسبا إلا في حالة اقتراب التكرارات الإحصائية من الأعداد p_i عندما يكون عدد التجارب أكبر

إنّ الحدس يقودنا إلى النموذج التالي

المخرج x_i	1	2	3
الإحتمال p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- في حالة تساوي الأعداد p_i نقول أن قانون الإحتمال متساوي التوزيع (أو نقول تساوي الاحتمال)

أي (من أجل كل i لدينا $p(x_i)=p_i=\frac{1}{r}$

- نذكر أن أمل قانون الاحتمال هو العدد $« = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i$ ، تباينه العدد $V=\sum_{i=1}^{r} p_i\,(x_i-«)^2$ و انحرافه المعياري هو العدد $± = \sqrt{V}$
- و نذكر أن الحادثة هي كل جزء من E و أن $\{x_i\}$ تدعى حادثة أولية ، E الحادثة الأكيدة و ¤ هي الحادثة المستحيلة
- احتمال حادثة A هو مجموع احتمالات كل المخارج التي تنتمي إلى A $(p(¤)=0)$ و في حالة تساوي احتمال يئول حساب احتمال A أي $p(A)$ الى مسألة عد .

مبرهنة :

في حالة تساوي احتمال على E يكون لدينا من أجل كل حادثة A

$$p(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$$

- أخيرا نذكر ببعض الخواص

الخاصية	لغة الحوادث	أجزاء E
$1\geq p(A)\geq 0$	A حادثة كيفية	A
$p(¤)=0$	الحادثتان الأكيدة و المستحيلة	E ، ¤
$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$	A ، B غير متلائمتين	$A\cap B=¤$
$p(\overline{A})=1-p(A)$	$\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A	$\overline{A}$
$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$	A و B كيفيتان	A ، B

تمرين محلول:

نفرض أنه في مدينة ما ، إحتمالي ميلاد ذكر أو أنثى متساويان نختار عشوائيا عائلة ذات 5 أطفال ، أحسب احتمال :

1. **من بين الأطفال الخمسة يوجد 4 ذكور على الأقل**
2. **عدد الإناث أكبر من عدد الذكور**
3. **ثلاثة أطفال على الأقل متتابعون من نفس الجنس**

الحل:

اختار خمسة أطفال يعني تشكيل قائمة ذات 5 عناصر من العنصرين F و G ، F " أنثى " G " ذكر "

مثلا : FGFGG هو اختيار عدد الاختيارات الممكنة هو عدد القوائم أي $2^5 = 32$

1) لتكن الحادثة A " يوجد 4 ذكور على الأقل "

نسمي A_1 " يوجد 4 ذكور " A_2 " يوجد 5 ذكور "

إذن $p(A_1) = \frac{C_5^4}{2^5}$ و $p(A_2) = \frac{C_5^5}{2^5}$

نعلم أن $A = A_1 \cup A_2$ و بالتالي $p(A) = p(A_1) + p(A_2)$

$$= \frac{3}{16}$$

$A_1 = \{GGGGF, GGGFG, GGFGG, GFGGG, FGGGG\}$ $A_2 = \{GGGGG\}$

2) نسمي الحادثة B " عدد الإناث أكبر من عدد الذكور "

نسمي B_1 " يوجد 5 إناث " B_2 " يوجد 4 إناث " B_3 " يوجد 3 إناث "

نعلم أن $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ إذن $p(B) = p(B_1) \cup p(B_2) \cup p(B_3)$

$$= \frac{1 + C_5^4 + C_5^3}{2^5} = \frac{1}{2}$$

3) نسمي الحادثة C " ثلاثة أطفال على الأقل من نفس الجنس متتابعون "

و اعتبرنا الإناث مثلا يكون لدينا $\{FFFGG, GFFFG, GGFFF, GFFFF, FFFFF\}$

نفس الشيء بالنسبة للذكور و بالتالي

$$p(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

المتغير العشوائي ، الأمل الرياضياتي و التباين لمتغير عشوائي

متغير عشوائي X هو دالة عددية معرفة على مجموعة المخارج E و مزودة باحتمال P

X يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n$ بالاحتمالات $p_1, p_2, ..., p_n$ معرف كما يلي $p_i = p(X = x_i)$

إرفاق القيم p_i بالقيم x_i هو تعريف قانون احتمال جديد على E' هذا القانون يرمز له بـــ P' أو P_x و يسمى قانون X .

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو الأمل الرياضياتي لقانون احتماله P_x و كذلك التباين و الانحراف المعياري ونرمز لها على الترتيب بالرموز $E(X)$ ، $Var(X)$ ، $\pm(X)$

خواص الأمل الرياضياتي و التباين لمتغير عشوائي :

$E(X)$ هو معدل القيم x_i مرفقة بالقيم p_i بالمقارنة مع مجال الاحصاء $E(X)$ هو $\overline{x}$ و في ميدان الألعاب هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة ، فانعدام $E(X)$ يدل على أن اللعبة عادلة و $E(x) \succ 0$ يعني أن اللعبة مربحة و في حالة $E(X) < 0$ فهي ليست في مصلحة اللاعب كما في مجال الاحصاء فإن التباين و الانحراف المعياري مقياس تشتت .

يمكن أن نبرهن بسهولة مايلي :

مبرهنة :

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعية و a عدد حقيقي

لدينا $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ و $E(aX) = aE(X)$

حيث $E(X+Y)$ و $E(aX)$ هما الأملان الرياضياتيان لكل من X+Y و aX

ينتج من المبرهنة السابقة الخواص التالية :

X متغير عشوائي و a ، b عددان حقيقيان ، لدينا

$$E(X+b) = E(X) + b$$

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\pm(aX) = |a| \pm(X) \quad \text{و} \quad Var(aX) = a^2\, Var(X)$$

$$\pm(X+b) = \pm(X) \quad \text{و} \quad Var(X+b) = Var(X)$$

ملاحظة برهان ما سبق ينتج مباشرة من التعريف (بحسابات بسيطة نتحقق من المساويات في المبرهنة والخواص)

تمرين محلول 1:

صندوق يحوي كريتين لا نميز بينهما في اللمس ، إحداهما بيضاء و الأخرى سوداء . نسحب 3 مرات و بالإرجاع كرية واحدة . نرمز للكرية البيضاء بالرمز B و للكرية السوداء بالرمز N

مجموعة المخارج هي $E = \{BBB, BBN, BNB, NBB, BNN, NBN, NNB, NNN\}$

إذا كان سحب الكرية البيضاء يؤدي إلى ربح 20 دينارا و سحب الكرية السوداء يؤدب إلى خسارة 10 دنانير

فإن الدالة $X : E \to \mathbb{R}$ **التي ترفق بكل مخرج الربح المناسب تأخذ القيم : 30- ، 0 ، 30 ، 60**

و لكل قيمة لـــ X (مثل 30) يمكن اعتبار الحادثة $(X = 30) = \{BBN, BNB, NBB\}$ **التي احتمالها** $\left(\frac{3}{8}\right)$

نحصل على قانون احتمال جديد على المجموعة $E' = X(E)$ نسميه قانون المتغير X

الربح x_i	-30	0	30	60
الإحتمال $p_i = p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الأمل الرياضياتي لـ **X**

$$E(X) = -30\times\frac{1}{8} + 0\times\frac{3}{8} + 30\times\frac{3}{8} + 60\times\frac{1}{8}$$
$$= \frac{120}{8} = 15$$

التباين هو

$$Var(X) = \frac{1}{8}(-30-15)^2 + \frac{3}{8}(0-15)^2 + \frac{3}{8}(30-15)^2 + \frac{1}{8}(60-15)^2$$
$$= \frac{5400}{8} = 675$$

و يمكن حساب $Var(X)$ بالقانون $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

الإنحراف المعياري هو

$$\pm(X) = \sqrt{\mathrm{Var(X)}}$$
$$= \sqrt{675} \approx 25,98$$

تمرين محلول 2:

نرمي 3 أحجار نرد مكعبة غير مزورة مرقمة من 1 إلى 6 و نسجل مجموع الأرقام الظاهرة على الأوجه العلوية في كل رمية .

- ماهو معدل المجاميع الممكنة ؟

الحل: لتكن X ، Y و Z المتغيرات العشوائية التي تأخذ كقيم الأرقام المحصل عليها على الأحجار الثلاثة

و بالتالي يكون T = X + Y + Z هو المجموع المحصل عليه

بما أن $E(T) = E(X) + E(Y) + E(Z)$ و $E(X) = E(Y) = E(Z) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5$

نحصل على $E(T) = 10,5$

الإحتمالات الشرطية :

1. تعريف

لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $p(A)\neq 0$. نعرّف على E احتمالا جديدا يرمز له بالرمز p_A

حيث من أجل كل حادثة B نكتب $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

p_A يسمى الاحتمال الشرطي علما أن A محققة

$p_A(B)=p(A/B)$ و تقرأ " **إحتمال B علما أن A محققة** "

<u>مثال:</u>

صندوق يحوي **5** قريصات مرقمة بالأرقام **0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8** و **3** قريصات مرقمة بالأرقام **1 ، 3 ، 5**

لا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا على التوالي و دون ارجاع قريصتين من الصندوق

- ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين ؟

<u>الحل:</u>

نسمي A الحادثة " **القريصة المسحوبة الأولى تحمل رقما زوجيا** " و B الحادثة " **القريصة الثانية تحمل رقما فرديا** "

واضح أن $p(A)=\dfrac{5}{8}$ و نريد حساب $p(A\cap B)$ أي $p(A)\times p(B/A)$

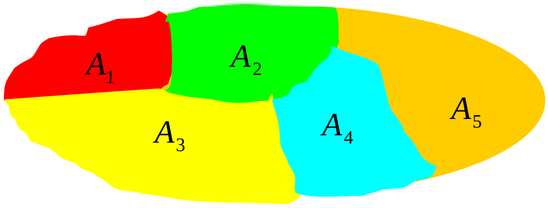
لكن $p(B/A)$ هو احتمال سحب رقما زوجيا من الصندوق الذي لا يحوي إلا أربعة أرقام زوجية من بين 7 أرقام

أي $p(B/A)=\dfrac{4}{7}$

و بالتالي $p(A\cap B)=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{5}{14}$

2. دستور الاحتمالات الكلية :

1.2. تجزئة مجموعة : نسمي تجزئة مجموعة أجزاء لهذه المجموعة كلها ليست خالية منفصلة مثنى مثنى (لا يوجد جزءان لهما عنصر مشترك) و اتحادهما المجموعة الكلية



1) $A_i\neq ¤$ (2 $A_i\cap A_j=¤$

3) $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=E$

2.2. لتكن $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$ حوادث احتمالاتها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة E .

لدينا من أجل كل حادثة B

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+.....+p(A_n\cap B)$$

مع $p(A_k\cap B)=p(A_k)\times p_{A_k}(B)$ من أجل كل k حيث $1\leq k\leq n$

لاحظ أن العائلة $\{A_k\cap B;1\leq k\leq n\}$ تشكل تجزئة للحادثة B .

تمرين محلول 1: يحتوي صندوق على **6** كرات حمراء و **3** كرات خضراء لا نميز بينها عند اللمس .
نسحب كرتين على التوالي و دون إرجاع .
لتكن الحادثة **A** " الكرة المسحوبة الأولى حمراء " و **b** الحادثة " الكرة المسحوبة الثانية خضراء "
أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ثم استنتج $p(A\cap B)$

الحل:

الكريات لا نميز بينها عند اللمس (حالة تساوي إحتمال) و بالتالي $p(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

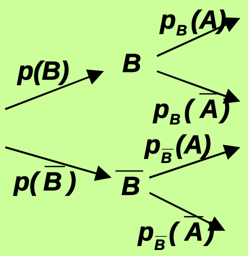
إذا تحققت الحادثة A تصبح الوضعية في الصندوق كالتالي : 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء

ومنه $p_A(B)=\frac{3}{8}$ و بالتالي $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$

تمرين محلول 2: حساب الإحتمالات الشرطية باستعمال الشجرة (العنكبوتية)

نعتبر صندوقين أحدهما U_1 يحوي **5** كرات خضراء و **3** كرات حمراء و الآخر U_2 يحوي **3** كرات خضراء و **6** كرات حمراء . كل الكرات لا نميز بينها باللمس .
نرمي حجر نرد مكعب غير مزور ، مرقم من **1** الى **6** . إذا تحصلنا على أحد الرقمين **5** أو **6** نسحب كرة عشوائيا من الصندوق U_1 و في الحالات الأخرى نسحب كرة من الصندوق U_2
نسمي **A** الحادثة " الكرة المسحوبة خضراء " و نسمي الحادثة **B** " نحصل على أحد الرقمين **5** أو **6** "

1) أحسب $p(B)$ Y $p(\overline{B})$
2) أحسب $p_B(A)$ و استنتج $p_B(\overline{A})$
3) أحسب $p_{\overline{B}}(A)$ و استنتج $p_{\overline{B}}(\overline{A})$
4) أكمل الشجرة بالقيم العددية المحصل عليها
5) استنتج $p(A)$



الحل:

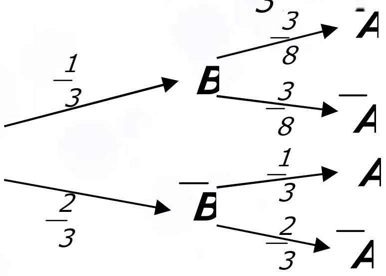
1) النرد غير مزور (حالة تساوي احتمال) ومنه $p(B)=\frac{1}{3}$; $p(\overline{B})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

2) إذا تحققت B فإن السحب يتم من الصندوق U_1 و في هذه الحالة احتمال الحصول على كرة خضراء هو $\frac{5}{8}$
(لأننا في حالة تساوي احتمال) أي $p_B(A)=\frac{5}{8}$ و بالتالي $p_B(\overline{A})=\frac{3}{8}$

3) إذا تحققت $\overline{B}$ يتم السحب من الصندوق U_2 و منه $p_{\overline{B}}(A)=\frac{1}{3}$ و بالتالي $p_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{2}{3}$

4) $p(A)=p(B)\times p_B(A)+p(B)\times p_{\overline{B}}(A)$

$$p(A)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{31}{72}$$



الحوادث المستقلة و المتغيرات العشوائية المستقلة

1. تعريف

نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتان إذا و فقط إذا كان

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

إذا كان $p(A) \neq 0$ فإن $p(B/A) = p(B)$

2. تعريف

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الفضاء E .

لتكن x_1 ، x_2 ،.....، x_n قيم المتغير **X** و y_1 ، y_2 ،.....، y_m قيم المتغير **Y**

نقول أن X و Y مستقلان عندما تكون الحادثتان $(X = x_i)$ **و** $(Y = y_j)$ **مستقلتان من أجل كل i و j**

حيث $(1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m)$

- في حالة استقلال الحوادث يكون احتمال قائمة النتائج هو جداء احتمالات كل النتائج (يحصل هذا عموما في التجارب العشوائية المكررة) .
- متغيران عشوائيان مرتبطان بتجربتين مختلفتين مستقلان .

مثال :

نرمي n مرة (n عدد طبيعي أكبر من 1) حجر نرد مكعب غير مزور أوجهه مرقمة من 1 الى 6

- ماهو احتمال الحادثة A حيث **A " نحصل مرة واحدة على الأقل رقم فردي "**

الحل :

لو فكرنا في الإجابة المباشرة (الحصول على رقم فردي واحد فقط أو رقمين فرديين فقط أو .... أو كل الارقام فردية) فإن الحساب سيكون طويلا و معقدا نوعا ما ، وعليه نفضل استعمال الخاصية التي تنص على ما يلي.

" مجموع احتمالي حادثتين متعاكستين يساوي 1 "

$\overline{A}$ **هي الحادثة " لا نحصل إلا على الأرقام الزوجية "**

$$p(\overline{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times ..... \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

و منه

$$p(A) = 1 - p(\overline{A})$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

تمرين محلول 1:

1) **A** و **B** حادثتان مستقلتان . بين أن

أ) A و $\overline{B}$ مستقلتان   ب) $\overline{A}$ و B مستقلتان   ج) $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلتان

2) يرمي قاذفان **T** و **S** في نفس الوقت هدفا معينا . الحادثتان **A** " **S** يصيب الهدف " ، **B** " **T** يصيب الهدف " مستقلتان و احتمالاهما $p_S = \frac{4}{5}$ و $p_T = \frac{7}{8}$ على الترتيب

- أحسب إحتمال الحوادث التالية :

أ) **S** و **T** يصيبان الهدف   ب) **S** فقط يصيب الهدف   ج) الهدف لم يصب   د) الهدف يصاب

هـ) قاذف واحد يصيب الهدف

الحل:

1) أ) لدينا $p(A\cap\overline{B}) = p(A) - p(A\cap B)$ لأن $A\cap\overline{B} = A - A\cap B$

و منه $p(A\cap\overline{B}) = p(A) - p(A)\times p(B)$ و بالتالي $p(A\cap\overline{B}) = p(A)\left[1 - p(B)\right]$

أي $p(A\cap\overline{B}) = p(A)\times p(\overline{B})$

ب) بنفس الطريقة نجد $p(\overline{A}\cap B) = p(\overline{A})\times p(B)$

ج) لدينا $p(\overline{A}\cap\overline{B}) = p(\overline{A\cup B}) = 1 - p(A\cup B) = 1 - \left[p(A + p(B) - p(A\cap B)\right]$

أي $p(\overline{A}Ç\overline{B}) = 1 - P(A) - p(B) + p(A)\times p(B)$

$= (1 - p(A))(1 - p(B)) = p(\overline{A})\times p(\overline{B})$

2) أ) $p = p_S \times p_T = \frac{7}{10}$ ب) $p = p_S(1 - p_T) = \frac{4}{5}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{10}$ ج) $p = (1 - p_S)(1 - p_T) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{40}$

د) $p = p_S + p_T - p_S\times p_T = \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{7}{10} = \frac{37}{40}$ هـ) $p = p_S(1 - p_S) + p_T(1 - p_T) = \frac{11}{40}$

تمرين محلول 2:

نرمي ثلاث مرات قطعة نقود متوازنة

نرمز بـــ X_1 لعدد مرات ظهور " وجه " في الرمية الأولى (X_1 يأخذ القيمتين **0** أو **1**)

و نرمز بالرمز X_2 لعدد مرات ظهور " وجه " في الرميتين الثانية و الثالثة .

- تحقق أن X_1 و X_2 هما متغيران عشوائيان مستقلان

الحل:

واضح أن قانوني احتمال X_1 و X_2 هما

X_1	0	1
$p(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X_2	0	1	2
$p(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

يمكن أن نتحقق بسهولة أن $(X_1 = x_i)$ و $(X_2 = x_j)$ مستقلان من أجل $0 \le i \le 1$ و $0 \le j \le 2$

مثلا $p(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ لأن $E_1 = \{P;F\}$ و $p(X_1 = 1\ ,\ X_2 = 2) = \frac{1}{8}$ لأن المخارج هي

$E = \{FFF;FFP;FPF;PFF;PPF;PFP;FPP;PPP\}$ مع F يرمز للوجه و P يرمز للظهر

❶ تواريخ الميلاد : (استعمال نماذج مرجعية)

عدد تلاميذ قسم ما 34 تلميذا . هل من المعقول الرّهان على أن تلميذين على الأقل لهما نفس تاريخ الميلاد ؟

① **النمذجة :** نفرض أن عدد أيام كل سنة هو 365 يوما و أن مواليد التلاميذ متساوية الاحتمال على مدار أيام السنوات يمكن نمذجة تواريخ ميلاد التلاميذ بـــ 34 سحبة عشوائية على التوالي و بالإرجاع لكرية واحدة من صندوق يحوي 365 كرية مرقمة من 1 الى365 . (الكريات لا نميز بينها باللمس)

② **الحساب :** الحادثة الملائمة هي A مجموعة القوائم ذات 34 عنصرا و التي تشمل على الأقل عنصرين متساويين من العناصر 1 الى 365 .

أ) نضع p_n احتمال الحادثة A في قسم عدد تلاميذه n (n عدد طبيعي أكبر من 2)

املأ الجدول التالي

N	15	20	23	30	50	57
p_n						

ماذا تلاحظ ؟ فسّر .

تطبيق : لإعداد مجوهرات ، يضع صائغ 3 حبّات من اللؤلؤ داخل وعاء و يمزجها بذهب مذاب ثم يضعها في قوالب للحصول على ثلاث قطع .

1) أثبت أن احتمال أن كل قطعة تحوي حبّة لؤلؤ على الأقل هو **0,75** .

2) ما عدد حبّات اللؤلؤ التي يجب وضعها داخل الوعاء حتى يكون الإحتمال السابق أكبر من **0,99** ؟

❷ إستعمال شجرة الإحتمالات

نعتبر صندوقين أحدهما U_1 يحوي 6 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و الآخر U_2 يحوي 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء . كل الكرات لا نميز بينها باللمس .

نأخذ صندوقا عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا . إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ما احتمال أن تكون قد سُحبت من الصندوق U_1 ؟

① **النمذجة و الترميز :** نضع U_i الحادثة " **الصندوق المختار هو** U_i " حيث $i \in \{1;2\}$

نضع **B** الحادثة " **الكرة المسحوبة بيضاء** " و **N** الحادثة " **الكرة المسحوبة سوداء** "

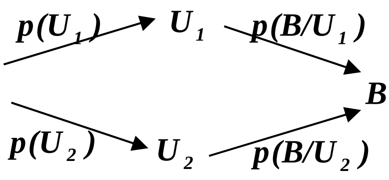
- نريد حساب $p(U_i/B)$ و هو ما يقتضي حساب $p(B)$ و $p(U_i \cap B)$

② **الحساب :**

➢ املأ الشجرة بقم الإحتمالات

➢ احسب $p(B)$

➢ استنتج $p(U_1 \cap B)$



تطبيق : اختبارات الكشف عن مرض ما تتم كما يلي :

➢ احتمال أن يكون لشخص مريض إختبار موجب هو 0,99 .

➢ احتمال أن يكون لشخص سليم اختبار سالب هو 0,99 .

لتكن p نسبة المرض في مجتمع ما . أحسب بدلالة p احتمال أن يكون شخص مريضا إذا كان اختباره موجبا .

3 الإحتمالات في علم الوراثة (قانون هاردي و نبرج 1908)

حينما يكون لمورّث شكلان A و a يمكن أن يكون للفرد ثلاثة أنماط وراثية : AA ، Aa أو aa

نعتبر الجيل الأول الذي تكون فيه نسب هذه الأنماط الوراثية p_0 ، q_0 و r_0 على الترتيب .

نقبل أن الأزواج تتشكل عشوائيا و أن الأنماط الوراثية المعتبرة عشوائية .

1) عبر بدلالة p_0 ، q_0 و r_0 عن الإحتمال p_1 لكي يكون لطفل من الجيل الثاني النمط AA وعن إحتمالي q_1 و r_1 لكي يكون له النمط Aa أو aa .

2) أثبت أن p_1 ، q_1 و r_1 تكتب بدلالة $p_0 - r_0 = \sim$ فقط و استنتج p_2 ، q_2 و r_2 (نفس النسب بالنسبة للجيل الثالث) . التعليق ؟

توضيحات :

إذا كنت الأنماط الوراثية للوالدين AA و Aa فإن قانون النمط الوراثي للولد هو

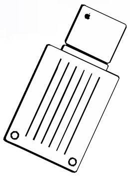
النمط الوراثي	AA	Aa
الإحتمال	0,5	0,5

إذا كنت الأنماط الوراثية للوالدين Aa و Aa فإن قانون النمط الوراثي للولد هو

aa	Aa	AA
0,25	0,5	0,25

4 المفاتيـــــح USB

تعطى النتائج مدورة إلى 10^{-3} . مصنع أجهزة الحواسيب (الإعلام الآلي) ينتج مفاتيح USB حيث 4 % من المفاتيح غير صالحة . تصنف المفاتيح بعد فرزها إلى ثلاث مجموعات



- مفاتيح تحمل ختم المصنع
- مفاتيح لا تحمل ختم المصنع
- مفاتيح للإتلاف

1) وحدة الفرز ترفض 3 % من المفاتيح الصالحة بالخطأ و ترفض 95 % من المفاتيح غير الصالحة .

أ) ماهو الاحتمال p_1 حتى تقبل وحدة الفرز مفتاحا غير صالح .

- ماهو الاحتمال p_2 حتى ترفق وحدة الفرز مفتاحا صالحا .
- ماهو الاحتمال p_3 حتى يحدث خطأ في الفرز.

ب) تحقق أن p_4 احتمال قبول مفتاح USB يساوي 0,933

2) يتم الفرز في خمس مراحل متتابعة . يوضع ختم المصنع على المفتاح إذا تم قبوله في المراحل الخمسة كلها و يتلف إذا رفض على الأقل في مرحلتين و إلا يقبل المفتاح لكن دون ختم . أحسب الإحتمالات التالية :

- p_5 إحتمال قبول المفتاح دون ختم
- p_6 إحتمال قبول المفتاح و ختمه
- p_7 إحتمال إتلاف المفتاح

[يعتبر الفرع الثاني مقدمة للفصل الموالي و تمهيدا لقانون برنولي]

موضوع محلول

لصيانة أجهزة التدفئة تراقب شركة عن بعد خلال فصل الصيف الأجهزة .

نعلم أن 20% من الأجهزة هي تحت الضمان . من بين الأجهزة التي تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية أحداها $\frac{1}{100}$ ، و من بين الأجهزة التي ليست تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية أحدها $\frac{1}{10}$.

نسمي G الحادثة " المدفئة تحت الضمان "

1) أحسب احتمال الحوادث التالية :

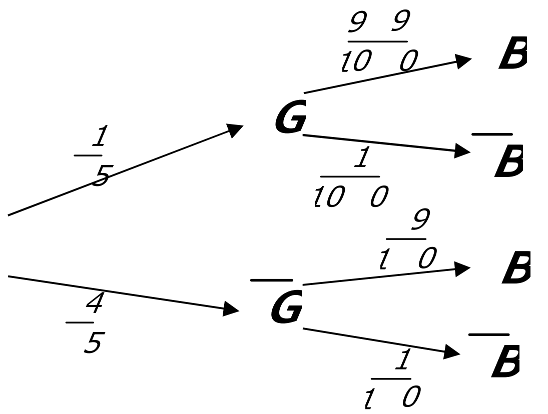
A " المدفئة تحت الضمان و هي غير صالحة " ، B " المدفئة غير صالحة "

2) في سكن ما المدفئة غير صالحة . بين أن احتمال أنها تحت الضمان هو $\frac{1}{41}$

3) المراقبة مجانية إذا كانت المدفئة تحت الضمان ، و يقدر ثمن المراقبة بـــ 800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي صالحة بينما يقدر بـــ 2800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي صالحة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة ثمن تكلفة مراقبة مدفئة . عين قانون احتمال X و أمله الرياضياتي .

حل مختصر



$$P(A)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{500} \quad (1$$

$$P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{100}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{41}{500}$$

$$P_B(G)=\frac{P(G\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1}{41} \quad (2$$

(3

$$E(X)=800\times\frac{18}{25}+2800\times\frac{2}{25}=800DA$$

تعاليق

☜ كلما وجدت تفريعات نبادر إلى تكوين الشجرة المناسبة .

☜ لحساب احتمال حادثة ما

* نتتبع المسارات المؤدية إليها عبر فروع الشجرة .
* احتمال الحادثة هو جداء الاحتمالات الموجودة على أسهم المسارات المناسبة

☜ لاحظ أن مجموع الاحتمالات هو 1

موضوع موجه

I) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي : $U_1=\frac{1}{2}$ و العلاقة التراجعية $U_{n+1}=\frac{1}{6}U_n+\frac{1}{3}$.

لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل $n\geq 1$ كما يلي $V_n=U_n-\frac{2}{5}$

- تحقق أن المتتالية (V_n) هي هندسية يطلب تحديد أساسها . أكتب U_n بدلالة n

II) نعتبر حجر نرد A و B حيث A يحوي 3 أوجه حمراء و 3 أوجه بيضاء بينما يحوي B ، 4 أوجه حمراء و وجهين أبيضين . نأخذ عشوائيا أحد الحجرين و نرميه ، إذا حصلنا على وجه أحمر نحتفظ بنفس الحجر و إذا تحصلنا على وجه أبيض نغير الحجر و نرمي مرّة ثانية و هكذا ...

نسمي A_n الحادثة " نستعمل الحجر A في الرمية n" و $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية لها كما نسمي R_n الحادثة " نستعمل الحجر R في الرمية n" و $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية لها و نرمز بالرمزين $\boldsymbol{a_n}$ ، $\boldsymbol{r_n}$ لاحتمالي الحادثتين A_n و R_n على الترتيب .

1) عين $\boldsymbol{a_1}$

2) عين $\boldsymbol{r_1}$ (يمكن استعمال شجرة الإحتمالات)

3) بملاحظة أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $R_n=(A_n\cap R_n)\cup(R_n\cap\overline{A_n})$ و بين أن $\boldsymbol{r_n}=-\frac{1}{6}a_n+\frac{2}{3}$

4) تحقق أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $A_{n+1}=(A_n\cap R_n)\cup(\overline{A_n}\cap\overline{R_n})$

5) استنتج أجل كل $n\geq 1$ يكون $\boldsymbol{a_{n+1}}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{3}$ ثم أكتب $\boldsymbol{a_n}$ بدلالة n

6) استنتج عبارة $\boldsymbol{r_n}$ بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{r_n}$

توجيهات

I) متى نقول عن متتالية أنها هندسية ؟ .

II) 2) يمكن استعمال شجرة الاحتمالات

3) بملاحظة أن : $(R_n\cap A_n)$ و $(R_n\cap\overline{A_n})$ غير متلائمتين

و أن $p(R_n\cap A_n)=p(A_n)\times p_{A_n}(R_n)$

و أن $p(R_n\cap\overline{A_n})=p(\overline{A_n})\times p_{\overline{A_n}}(R_n)$

5) في الرمية $n+1$ نرمي A . يعني أن الرمية n ، رمينا A و حصلنا على وجه أحمر أو رمينا B و حصلنا على وجه أبيض

تطبيقات مباشرة للدرس

1 يحوي صندوق 32 كرية (لا نفرق بينها عند اللمس) نسحب 8 كريات عشوائيا.

1) إذا تم السحب في آن واحد . ما عدد الحالات الممكنة ؟

2) ا) إذا تم السحب على التوالي دون إرجاع . ما عدد الحالات الممكنة ؟

2) ب) إذا تم السحب على التوالي مع الإرجاع . ما عدد الحالات الممكنة ؟

2 أحسب المجاميع التالية

$$A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^k} \qquad B=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{3^{n-k}}{4^k}$$

3 نعتبر الصندوقين A و B .

* الصندوق A يضم 3 كرات حمراء ، 3 كرات سوداء و 5 كرات خضراء .

* الصندوق B يضم 7 كرات حمراء ، كرتين خضراوين و 4 كرات سوداء .

جميع الكرات متشابهة و لا نستطيع التفريق بينها باللمس

نسحب كرة من الصندوق A ثم كرة من الصندوق B .

1- لتكن V حادثة " سحب كرة خضراء من الصندوق A "

- أحسب $p(V)$

2- نعتبر الحوادث التالية :

N " سحب كرة سوداء من الصندوق B "

R " سحب كرة حمراء من الصندوق B "

V' " سحب كرة خضراء من الصندوق B "

- أحسب $p(N)$ ، $p(R)$ ، $p(V')$

3- نسحب كرة من الصندوق A و نتركها جانبا ثم نسحب كرة من الصندوق B .

- أحسب إحتمال الحادثة " سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B "

4 يشارك رشيد في لعبة حظ حيث إحتمال الفشل فيها 0,6 . قرر رشيد المحاولة 5 مرات متتابعة (نعتبر أن المحاولات مستقلة عن بعضها البعض) . نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق كل 5 محاولات بعدد مرات الفوز .

1. عرف قانون الإحتمال للمتغير X

2. أوجد الأمل الرياضي و الانحراف المعياري لـــ X

3. ما هو إحتمال الحادثتين :

A " دوما يفشل في المحاولات الخمسة "

B " يفوز مرة واحدة على الأقل في المحاولات الخمسة "

5 يضم صندوق 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

لتكن الحادثة A " الكرة الأولى حمراء " و الحادثة B " الكرة الثانية خضراء "

- أحسب $P(A)$ ، $P_A(B)$ ثم استنتج $P(A\cap B)$

6 نعتبر صندوقين ، يضم الأول 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و يضم الثاني كرتين بيضاوين و 5 كرات سوداء . الكرات كلها متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس .

نرمي قطعة نقود مرة واحدة ، فإذا ظهر الوجه نسحب عشوائيا كرة من الصندوق الأول ، أما إذا ظهر الظهر على قطعة النقود نسحب كرة من الصندوق الثاني .

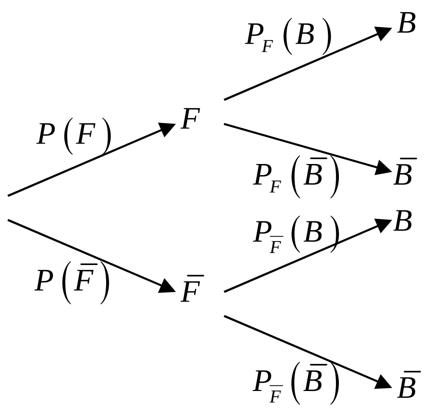
لتكن F الحادثة " ظهور الوجه " و B الحادثة " الكرة المسحوبة بيضاء "

1- أحسب $P(F)$ و $P(\bar{F})$

2- أحسب $P_F(B)$ و استنتج $P_F(\bar{B})$

3- أحسب $P_{\bar{F}}(B)$ و استنتج $P_{\bar{F}}(\bar{B})$

4- أكمل الشجرة (العنكبوتية) بالنتائج المحصل عليها



7 دفع لاعب x DA و أخذ حجري نرد عاديين و رماهما.إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين هو 7 ، يربح 20DA و إلا لا يربح أي شيئ .
كم يجب على اللاعب أن يدفع في البداية حتى يكون الأمل الرياضياتي معدوما؟

8 يضم صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1،2، 3 و ثلاث قريصات صفراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق ، ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت القريصة المسحوبة بيضاء و إلا يساوي 0 . وليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة برقم القريصة المسحوبة

1) عرف قانوني الإحتمال لكل من X و Y
2) أحسب الامل الرياضي لكل من X و Y
3) برهن أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان
4) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X×Y و أحسب أمله الرياضي.

9 نرمي زهرة نرد رمية واحدة و لتكن X العلامة التي تحدد كمايلي :

a. العلامة (10-) إذا ظهر الرقم 1
b. العلامة (10) إذا ظهرت الأرقام 6
c. العلامة (0) في الحالات الأخرى

نفرض أن زهرة النرد غير متوازنة بحيث احتمال ظهور الأوجه 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12 .

- عرّف قانون الاحتمال للعدد X في هذه الحالة

العــد

10 بسط الأعداد التالية دون استعمال الآلة الحاسبة

$$a=\frac{8!}{6!} \qquad b=\frac{11!}{9!\times 2!}$$
$$c=\frac{13!-12!}{12!} \qquad d=\frac{4}{12!}-\frac{4}{11!}+\frac{4}{10!}$$

11 أكتب على أبسط شكل ممكن العبارات التالية (n عدد طبيعي أكبر من 1)

$$a=\frac{n!}{(n+1)!} \qquad b=\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$$
$$c=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!} \qquad d=\frac{n!}{n}-(n-1)!$$

12 أكتب باستعمال العاملي (!) كلا من

$$a=5\times6\times7\times8\times9$$
$$b=n(n-1)(n-2) \quad ,n\in\mathbb{N},n\succ 2$$
$$d=\frac{1\times3\times4\times7\times9\times11}{2\times4\times6\times8\times10} \qquad c=\frac{9\times10\times11\times12}{5\times6\times7}$$

13 1) بكم طريقة يمكن اختيار تلميذين من 26 تلميذا ؟
2) بكم طريقة يمكن اختيار مسؤول عنهم ثم نائب له ؟

14 في الرهان الرياضي المسمى " لوطو + " يختار المشارك 6 أرقام من بين 49 رقما (كرات مرقمة من 1 إلى 49) .

1) ما عدد الاختيارات الممكنة ؟
2) علما أن هناك حالة واحدة فقط للفوز بستة أرقام صحيحة ما عدد الحالات الممكنة للفوز بأربع أرقام ممكنة ؟

15 يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء . نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد.
ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

أ) كرة بيضاء ؟ ب) كرة بيضاء على الأقل ؟
جـ) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أن $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad X_n=n^2+9n+21$
ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n=10713$

16 يضم صندوق 15 كرة منها 6 بيضاء تحمل الأرقام (1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3) و 5 خضراء تحمل الأرقام (1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2) و 4 حمراء تحمل الأرقام (1 ،3، 3 ، 3) . نسحب 3 كرا ت في آن واحد . ما هو عدد الحالات الممكنة لسحب :

1) 3 كرات من نفس اللون؟ 2) 3 كرات تحمل نفس الرقم؟ 3) 3 كرات مجموع أرقامها 6 ؟ 4) 3 كرات واحدة على الأقل منها تحمل رقما فرديا ؟

17 في كل حالة من الحالات التالية ، ما عدد الكلمات (سواء لها معنى أو ليس لها معنى) ذات n حرف المشكلة من حروف الكلمات المعطاة ؟

أ) $n=3$ و الكلمة هي " **علم** "

ب) $n=5$ و الكلمة هي " **معسكر** "

ج) $n=5$ و الكلمة هي " **مهيمن** "

د) $n=6$ و الكلمة هي " **تلمسان** "

هـ) $n=6$ و الكلمة هي " سلسبيل "

يتنافس 10 لاعبين في دورة لتنس الطاولة .

18 - بكم طريقة يمكن تنظيم الدور الأول ؟

(الدور الأول يتكون من 5 مباريات)

19 من بين 5 جزائريين و 10 سعوديين و 10 فلسطنيين

1) نختار ثلاث شخصيات من جنسيات عربية مختلفة ، ما عدد الثلاثيات الممكنة ؟

2) نفس النؤال من أجل شخصيتين بدل 3 شخصيات

20 في أحد رفوف المكتبة نريد تنظيم 4 كتب إسلامية و 3 كتب ثقافية و 5 كتب رياضيات (شكرا !) .

1) ما عدد الكيفيات الممكنة إذا أردنا أن تكون كتب نفس الموضوع متجاورة ؟

1) إذا كان في آن واحد . ما عدد الحالات الممكنة ؟

2) 1) إذا كان على التوالي دون إرجاع . ما عدد الحالات الممكنة ؟

3) 1) إذا كان على التوالي مع الإرجاع آن واحد . ما عدد الحالات الممكنة ؟

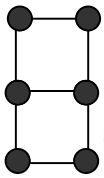
في رحلة ما قررنا أخذ كتابين يعالجان موضوعيم مختلفين من هذه الكتب للمطالعة . ما عدد الإختيارات الممكنة ؟

من صندوق يحوي 49 كرية مرقمة من 1 الى 49 ، منها 6 كريات حمراء و الباقي بيضاء . نسحب في آن واحد 6 كريات ما عدد الطرق الكلية ؟

1) ما عدد الطرق الممكنة للحصول على 3 كريات بيضاء و 3 كريا حمراء ؟

2) هل عدد الطرق التي لا تشمل الكريات ذات اللون الأحمر أكبر من عدد الطرق التي تشمل اللون الاحمر.

21 يكتب الحرف بطريقة براي (BRAILLE) بثقب ورقة في نقطة واحدة على الأقل من النقط الستة المبينة في الشكل



1) ما عدد الحروف المشكلة بثلاث ثقوب ؟

2) ما عدد الحروف المشكلة بخمسة ثقوب

3) ما عدد الحروف التي يمكن الحصول عليها سواء لها معنة بخط براي أو ليس لها معنى ؟

22 يتكون رقم الهاتف من 9 أرقام . الرقم الاول هو 0 و الأرقام الثمانية الاخرى كيفية .

1.ماعدد أرقام الهواتف الكلية ؟

2.ماعدد أرقام الهواتف التي تضم :

أ) 3 مرات الرقم 1 ؟

ب) على الأقل ثلاث مرات الرقم 1 ؟

ج) مرتين الرقم 5 ومرة واحدة الرقم 2 ؟

د) 5 أرقام زوجية فقط ؟

3.ما عدد أرقام الهواتف التي لا تضم الرقمين 6 و9؟

23 نضع بين يدي طفل ثلاثة أقلام ملونة أخضر ، أحمر و أصفر و نطلب منه تلوين الأوجه الستة لعلبة مكعبة الشكل . ما عدد الكيفيات الممكنة للتلوين ؟

يتكون قسم من مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة .

24 يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا

1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

2) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث ؟

أ) يكون الأمين تلميذة ؟

ب) التلميذ X موجودا في اللجنة ؟

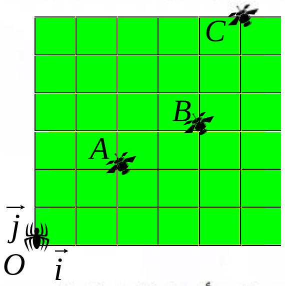
ج) يكون الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة ؟

د) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين ؟

3) نفرض أن الرئيس تلميذا والأمين تلميذة وأن التلميذ X لا يريد الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة Y .

- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف ؟

25 **شباك العنكبوت**



الشكل التالي يمثل شباك عنكبوت لصقت به ثلاث حشرات و العنكبوت في النقطة O

1) ما عدد المسارات التي يمكن أن تسلكها العنكبوت للوصول للحشرة A ؟

2) ما عدد المسارات إذا أرادت العنكبوت بداية وجبتها بالحشرة B ؟

3) ما عدد المسارات إذا أرادت العنكبوت بداية وجبتها بالحشرة C ؟

4) ما عدد المسارات إذا أرادت العنكبوت الإنتقال الى الحشرة C بعد إلتهامها للحشرة A فقط ؟

5) ما عدد المسارات إذا أرادت العنكبوت الوصول الى الحشر C بعد إلتهامها لكل من A و B على الترتيب ؟

26 أوجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية:

$a: C_n^3 = 56$ $\quad b: 9C_n^2 = 2C_{2n}^2$

$c: C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

27 أثبت صحة المساواة التالية

1) $C_{2n}^{n} = 2C_{2n-1}^{n-1}$ مع n عدد طبيعي أكبر من 1

2) $C_n^m = C_{n-2}^{m-2} + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m}$

مع n و m عددين طبيعيين

28 حل في $\mathbb{N}^2$ الجمل التالية

1) $\begin{cases} C_{x+1}^{y} = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\begin{cases} 2C_x^{2} = C_y^{1} \\ C_{x+y-5}^{2} = 4 \end{cases}$

ثنائي الحـد

29 1) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

2) ليكن x و y عددان حقيقيان أنشر كلا من :

$a)\ (2x+1)^6 \quad b)\ (2-x)^5 \quad c)\ (1+x)^4$

30 ليكن x عدد حقيقي أنشر كلا من :

$$a)\ (-x+2y)^5$$

$$b)\ \left(\frac{1}{3}+x\right)^5$$

$$c)\ \left(3x+\frac{1}{3}y\right)^5$$

31 أحسب $(2-i)^7$ و $(2+i)^7$ ثم استنتج أن $(2-i)^7+(2+i)^7$ هو عدد حقيقي $(i^2=-1)$

32 ليكن n عدد طبيعي . أحسب المجاميع التالية :

$a)\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k 5^{n-k} \qquad a)\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$

$a)\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \qquad a)\sum_{k=0}^{n} C_n^k$

33 n و m عددان طبيعيان حيث $n \geq m$

1) أثبت أن $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$ ثم أحسب

$$A = 1+2C_n^2+\dots+mC_n^m+\dots+nC_n^n$$

2) أثبت أن $mC_{n+1}^m = (n+1)C_n^{m-1}$ ثم أحسب

$$B = 1+\frac{1}{2}C_n^1+\dots+\frac{1}{m+1}C_n^m+\dots+\frac{1}{n+1}C_n^n$$

34 1) أثبت أن $C_n^m = C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$ ثم استنتج أن

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \dots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$$

2) أحسب المجاميع التالية

$$S_1 = 1+2+3+...+n$$

$$S_2 = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + (n-1)n$$

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

35 ليكن المنشور التالي $\left(x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$

1) أكتب الحد الذي درجته 10 .

2) أوجد معامل الحد التاسع

3) أوجد الحد الثابت

36 n عدد طبيعي ، ليكن المنشور التالي $(1+x)^n$

1) إذا علمت أن الحد الثالث في المنشور هو $28x^2$ فأوجد n .

2) من أجل قيمة n المحصل عليها ، أوجد قيمة x حتى يكون الحد الخامس هو 1120 .

3) من أجل $n = 15$ ،

أحسب قيمة العدد الطبيعي m حتى يكون الحدان اللذان رتبتاهما(m-1) و(2m+3) متساويي المعامل .

الإحتمال و المتغير العشوائي

37 ليكن X المتغير العشوائي المعرف كمايلي :

~	-1	2	3	4
$P(X = \sim)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

2) أحسب $P(X \prec 1)$ و $P(X \geq \frac{5}{2})$

3) أحسب $P(X^2 \leq 2)$

4) أحسب $P(X^2 - 6X + 8 \prec 0)$

38 يحوي كيس 5 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما .

1) حدد مجموعة القيم الممكنة للمتغير X .

2) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

3) أحسب الامل الرياضياتي $E(X)$

4) أحسب التباين $V(X)$

5) أوجد $P(X \geq 25)$

39 يحوي صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و ثلاث قريصات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 أيضا . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق القريصة البضاء بالرقم (1+) و القريصة السوداء بالصفر ، و نعتبر أيضا المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل قريصة الرقم الذي تحمله .

2) عرّف قانون الإحتمال لكل من X و Y

3) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ و $E(Y)$

4) أثبت أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان

5) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X \times Y$ و أحسب أمله الرياضياتي ثم التباين .

40 يحوي كيس أربع قريصات تحمل الأرقام 1، 2 ،3، a ($a \in \mathbb{N}$) . نسحب قريصة واحدة و نعتبر P_k هو احتمال سحب القريصة ذات الرقم k

1.أحسب الأعداد الحقيقية P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a

إذا علمت أنها بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$ (تعطى كسورا غير قابلة للإختزال)

2. ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل قريصة مسحوبة بالرقم الذي تحمله . أوجد قيمة العدد a إذا علمت أن الامل الرياضياتي هو $\frac{43}{9}$

41 يحتوي كيس على 20 كرة مرقمة من 1 الى 20 لا نفرق بينها عند اللمس .

1- نسحب كرة من الكيس ، ما هو إحتمال الحصول على :

أ- كرة تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

ب- كرة تحمل عددا ليس من مضاعفات 5 ؟

2- نسحب في هذه المرة كرتين في آن واحد ، ما هو إحتمال الحصول على :

أ- كرتين تحملان عددين مضاعفين للعدد 4 ؟

ب- كرتين إحداهما تحمل عددا مضاعفا للعدد 3 و الثانية تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

3- نسحب الآن 3 كرات في آن واحد ، ما هو إحتمال الحصول على :

أ- ثلاث كرات تحمل أعددا مضاعفة للعدد 4 ؟

ب- ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي ؟

42 يحوي كيس 10 كرات متماثلة . خمس منها بيضاء تحمل الأرقام (1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3) و ثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام (1 ، 2 ، 3) و كرتان حمراوان تحملان الرقمين (3 ، 3) . نسحب عشوائيا ثلاث كرات في آن واحد

1- ما احتمال الحصول على :

أ) كرة بيضاء و كرتين حمراوين ؟

ب) كرة حمراء على الأقل ؟

جـ) ثلاث كرات مجموع أرقامها يفوق العدد 7 ؟

43 زهرة نرد غير متوازنة أوجهها تحمل الأرقام 1،2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 إحتمالات ظهورها في رمية واحدة هي P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 على الترتيب

1.علما أن الأعداد P_3 ، P_5 ، P_6 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية ، أوجد الأعداد P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 .

2.نرمي زهرة النرد هذه مرة واحدة .

أ- ما احتمال ظهور رقم زوجي ؟

ب- ما احتمال ظهور رقم مضاعف لـــ 3 ؟

3.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال و احسب أمله الرياضياتي ثم التباين و الإنحراف المعياري .

44 في سباق 400 متر تتابع ، كل فريق يتشكل من 4 عداءين . يريد المدرب تشكيل فريق للمشاركة في مسابقة من بين 10 عداءين مع تحديد ترتيب الإنطلاق للعداءين الأربعة المختارين

1- كم من فريق يمكن للمدرب أن يشكله ؟

تنبيه " فريقين مشكلين بنفس العناصر مع اختلاف في ترتيب انطلاق كل عنصر هما فريقان مختلفان "

2- ما إحتمال أن يكون عداء ما ضمن الفريق المختار ؟

3- تم الآن اختيار العداءين الأربعة . لكن فجأة أصيب ثلاثة عداءين من العشرة بوعكة صحية . ما احتمال اضطرار المدرب الى تغيير الفريق المختار ؟

45 A ، B، C معاملات لمعادلة من الدرجة الثانية يتم تحديدها من خلال رمي حجر نرد ثلاث مرات متتابعة أحسب احتمال الحوادث التالية :

X " المعادلة الناتجة تقبل حلين حقيقيين "

Y " المعادلة الناتجة تقبل حلين مركبين "

Z " العدد (1-) حل للمعادلة الناتجة "

46 نريد تقدير كثافة السمك في إحدى البحيرات . من أجل ذلك قمنا باصطياد 1000 سمكة و وضعنا عليها علامات مميزة و أعدناها حية الى البحيرة ثم قمنا باصطياد 1000 سمكة بعد ذلك (بفرض أن شروط و ظروف الإصطياد متشابهة) .

1- أحسب $p(n)$ احتمال الحصول في الصيد الثاني على 100 سمكة تحمل العلامة المميزة مبينا أن الحساب يضطرنا لفرض $n \succ 1900$

2- باعتبار الفرضية محققة ، أدرس اتجاه تغير $p(n)$ و قارن العدد 1 بالنسبة $\frac{p(n)}{p(n-1)}$ ثم استنتج قيمة n التي من أجلها يكون $p(n)$ أعظميا .

3- إعط تقديرا للعدد n علما أن في الصيد الثاني وّجدت 100 سمكة تحمل العلامة المميزة

الإحتمال الشرطي و الحوادث المستقلة

47 في ثانوية ما ، 25 % من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15 % منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و 10 % مستواهم ضعيف في المادتين معا .

نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية :

1) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء ، ما إحتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات أيضا ؟

2) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات ، ما إحتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء أيضا ؟

3) ما إحتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات أو في مادة الفيزياء ؟

48 يضم صندوق ثلاث قطع نقدية . قطعة عادية (تحمل وجه وظهر) و قطعة تحمل وجهين و القطعة الثالثة مغشوشة بحيث إحتمال ظهور الوجه هو 3/1 . نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق و نرميها مرة واحدة .

أحسب ل إحتمال الحصول على وجه .

49 ثلاثة صناديق A ، B ، C حيث :

الصندوق (A) يضم 3 كريات حمراء و 5 كريات سوداء

الصندوق (B) يضم كريتين حمراوين و كرية سوداء

الصندوق (C) يضم كريتين حمراوين و 3 كريات سوداء

نأخذ عشوائيا أحد الصناديق و نسحب منه عشوائيا كرية واحدة . إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء فما إحتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق من الصندوق (A) ؟

50 يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين .

نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع .

نرمز بـ B_i للحادثة " الكرة المسحوبة في المرّة i بيضاء "

- أحسب الإحتمال $p(B_1)$ ثم مباشرة $p(B_2 / B_1)$

و استنتج $p(B_2 \cap B_1)$

51 نضع داخل كيس 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء.

1) نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد

أ) ما احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء ؟

ب) ما احتمال الحصول على 3 كرات سوداء ؟

2) نسحب 4 كرات عشوئيا و في آن واحد

أ)ما احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء؟

ب)مااحتمال الحصول على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء ؟

3) نسحب الآن 3 كرا ت عشوائيا و في آن واحد

- ما احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل ؟

4) نسحب الآن 3 كرات في آن واحد و لا نعيدها للكيس ثم نسحب من الباقي 4 كرات في آن واحد .

- ما احتمال أن تكون الكرا تالثلاثة الأولى بيضاء و من بين الكرات الأربعة المسحوبة بعد ذلك كرة واحدة بيضاء فقط

52 A ، B كيسان . يضم A كرة حمراء و كرة خضراء.

الكيس B يضم 3 كرات حمراء و كرة واحدة خضراء .

نسحب كرة من الكيس A و نضعها داخل الكيس B ثم نسحب كرة من الكيس B .

- ما احتمال الحصول على :

1) كرتين من نفس اللون .

2) كرة حمراء في السحبة الأولى بشرط أن تكون الكرة الثانية سوداء .

53 يضم صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 الى 10 .
نسحب قريصتين على التوالي مع الإرجاع .
1) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 .
2) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن مجموعهما 10 .

54 يضم صندوق كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء . نسحب عشوائيا كرة واحدة . إذا كانت بيضاء ، نعيدها الى الصندوق و نضيف كرة بيضاء أخرى و إذا كانت سوداء
نعيدها الى الصندوق مع إضافة كرة سوداء أخرى ثم نعيد عملية السحب مرة ثانية .
أحسب إحتمال الحوادث التالية :
A "يوجد 3 كرات سوداء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "
B "يوجد 5 كرات بيضاء في الصندوق قبل السحبة الثالثة"

55 يتكون قسم من 25 % من البنات و 75 % من الأولاد .
نفترض أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم تلاميذ جيدون . نأخذ عشوائيا تلميذا من القسم .
1- ما احتمال أن يكون : أ- بنتا ؟ ب- ولدا ؟
جـ - جيدا ؟
2- ماهو احتمال أن يكون ذلك التلميذ بنتا علما أنها عنصرا جيدا ؟

56 يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 الى 5 و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 .
- نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد .
1- أحسب إحتمال الحوادث التالية :
A " الكرتان تحملان رقمين فرديين "
B " الكرتان من نفس اللون "
C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "
- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟
2- ما إحتمال الحوادث التالية :
D " الكرتان من لونين مختلفين "
E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "
3- علما أننا سحبنا كرتين من لونين مختلفين . ما إحتمال أن يكون رقماهما فرديين ؟

57 A ، B ، C ثلا ث صناديق تحوي كرات بالشكل التالي A (5 كرات بيضاء) ، B (3 كرات بيضاء و كرتين سوداوين) ، C (كرة بيضاء و 4 كرات سوداء) .
يرمي اللاعب زهرة نرد عادية و حسب الرقم المحصل عليه يسحب عشوائيا من أحد الصناديق بالطرقة التالية .
* إذا كان الرقم هو 1 يسحب من الصندوق (A) .
* إذا كان الرقم هو 2 أو 3 يسحب من الصندوق (B) .
* إذا كان الرقم هو 4 أو 5 أو 6 يسحب من الصندوق (C).
1- إذا طلب منه سحب كرة واحدة فقط . ما احتمال أن يسحب كرة بيضاء ؟
2) إذا طلب منه سحب كرتين في آن واحد .
أ- ما احتمال أن يسحب كرتين بيضاوين ؟
ب- ما احتمال أن يسحب كرتين سوداوين من (B) ؟
3- أعد الإجابة عن الأسئلة السابقة من أجل الصناديق التالية :
A(5 كرات بيضاء و كرة سوداء) ، B(3 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء) ، C(3 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء) ؟

58 (X) ، (Y) راميا قوس ، كل منهما يسدد سهما نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق (I – II – III) .
نفرض أن كل رامي يصيب في كل رمية منطقة واحدة و واحدة فقط .
إذا علمت أن :

- إحتمالات إصابة الرامي (X) المناطق I – II – III على الترتيب هو $\frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{7}{12}$

- إحتمالات إصابة الرامي (Y) المناطق I – II – III متساوية .

1- الرامي (X) يسدد سهمه ثلاث مرات متتابعة :

أ- ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة III ؟

ب- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III بهذا الترتيب ؟

جـ- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III ؟

2- نختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي (X) ضعف احتمال اختيار الرامي (Y) .

أ- في حالة تسديد رمية واحدة . ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III ؟

ب- علما أن رمية واحدة قد سُدّدت و أصابت المنطقة III ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي (X) ؟

59 عمر و يوسف صديقان حميمان . تعاهدا على أن لا يفترقا أبدا ، حتى الموت . لكن يوسف المسكين يعاني من مرض خطير قال بشأنه الأطباء أن إحتمال أن يعيش يوسف عشر سنوات قادمة هو 0.5 .

- " لكل أجل كتاب " - إذا كان إحتمال أن يعيش عمر هذه المدة هو 0.7 فأحسب:

1- إحتمال أن يعيشا معا هذه المدة.

2- إحتمال ان يعيش عمر وحده هذه المدة.

3- إحتمال أن يعيش واحد منهما فقط هذه المدة.

4- إحتمال ان يعيش يوسف وحده هذه المدة.

5- إحتمال ان لا يعيشا معا هذه المدة.

6- إحتمال أن لا يعيشا هذه المدة.

7- أحسب مجموع الاحتمالات التي حصلت عليها . ماذا تستنتج ؟

60 نعتبر في م المعادلة التالية: $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$

1- أوجد z_1 ، z_2 ، z_3 حلول المعادلة و اكتب الشكل المثلثي لكل واحد منها .

2- أحسب الجذور التربيعية لكل حل من حلول المعادلة .

3- زهرة نرد متجانسة الأوجه ، كل وجه فيها يحمل جذرا تربيعيا من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) . نرمي زهرة النرد هذه مرتين متتابعتين .

أ) ما احتمال الحصول على جذرين مربع كل منهما يساوي الآخر ؟

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل عمليتي رمي بطويلة جداء العددين المركبين المحصل عليهما .

1- عرف قانون الإحتمال للمتغير X

2- احسب أمله الرياضياتي .

61 (A) ، (B) صندوقان . الصندوق (A) يحوي 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء أما الصندوق (B) فيحوي 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق (B) و نسجل لونها و نعيدها الى الصندوق (B) الذي نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها أيضا .

1- ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2- ما إحتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟

3- X متغير عشوائي يرفق كل كرة بيضاء بالعلامة (α+) و كل كرة سوداء بالعلامة (- α) .

أ- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $E(X) = 1$

4- نضيف الى الصندوق (B) ، n-3 كرة سوداء و نعيد عملية السحب المبينة أعلاه .

أ- ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

ب- كم من كرة سوداء ينبغي إضافتها الى الصندوق (B)
حتى يكون إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو 0,25 ؟

62 يسدد رامي ثلاث رميات متتالية نحو هدف (أنظر الى الشكل) .

إذا علمت أن إحتمال إصابة هذا الرامي للهدف هو 0,7 .

1- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف ثلاث مرات ؟

2- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف مرتين فقط ؟

3- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف مرة واحدة على الأقل ؟

4- إذا علمت أن الهدف مقسم الى ثلاث مناطق (الشكل) بحيث إحتمال أن يصيب هذا الرامي المنطقة (1) هو 0,1 و احتمال أن يصيب المنطقة (2) هو 0,2 و احتمال أن يصيب المنطقة (3) هو 0,4 فأحسب احتمال .

أ- أن يصيب المنطقة (1) ثلاث مرات ؟

ب- أن تصيب كل رمية منطقة واحدة فقط ؟

5- ليكن تا المتغير العشوائي الذي يرفق إصابة المنطقة (1) بالعلامة 10 و المنطقة (2) بالعلامة 7 و المنطقة (3) بالعلامة 5 و إذا أخطأ الهدف كلية كانت العلامة صفر .

- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي تا ثم أحسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

63 في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم زوجيا سمح له برمية أخرى و هكذا و تنتهي اللعبة بعد 10 رميات إجباريا أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا .

1- ما إحتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الاولى؟

2- ما إحتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية ؟

3- إذا أراد اللاعب أن يكون إحتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات الذي لا ينبغي تجاوزه ؟

4- تقتضي هذه اللعبة أن يدفع اللاعب 1DA مقابل كل محاولة (و لا يدفع مادام يحصل على رقم زوجي) على أن يربح 5DA إذا حصل على رقم زوجي .

أ- ما إحتمال أن يربح اللاعب 20 DA ؟

ب- ما إحتمال أن لا يخسر و لا يربح ؟

5) تعدل اللعبة بالكيفية التالية : صاحب الرقم الزوجي يربح 5 DA و صاحب الرقم الفردي يخسر 2 DA و على كل لاعب أن يحاول 3 مرات فقط إلزاميا .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل محاولة بالمبلغ المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال ثم أحسب امله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

64 يريد أحمد أن يتصل بسعيد هاتفيا لكنه - لسوء حظه - نسي الرقم تماما ، فقرر عبثا القيام ببعض المحاولات و ذلك بتشكيل أعداد من 6 أرقام . إذا كان P هو إحتمال أن يصيب مبتغاه في المحاولة الأولى.

تعطى النتائج على الشكل ($n\times10^{-6}$)

1- أحسب P .

2- تذكر أحمد أمرا هاما ، الرقم الصحيح يضم رقمين زوجيين متمايزين فقط . أحسب أنت P إن استطعت .

3- بعد قليل تذكر أحمد شيئا آخر . من بين الأرقام الفردية يوجد رقمان فقط من مضاعفات 3."إن كنت ذكيا" أحسب P.

4- و ها هو أحمد بنفسه يؤكد لك أن الرقمين الزوجيين مجموعهما يساوي 10 . فهل بإمكانك الآن حساب P ؟

5- سأل أحمد أخاه علي . هل تعرف رقم هاتف سعيد ؟ قال علي : لا ، لكني أعرف أنه يضم أربعة أرقام فردية منها إثنان متساويان و متتابعان . ساعدهما أنت بحساب P.

6- و يصرخ أحمد لقد تذكرت . إن أحد الرقمين الزوجيين هو 8 و ترتيبه الاول و الرقم الأخير هو 7 . هل تتكرم أنت بحساب P ؟

7- و بعد عدة محاولات إستطاع أحمد الإتصال بسعيد الذي ضحك كثيرا لسماعه القصة و قال له يا أحمد تذكر دائما أن مجموع أرقام هاتفي يساوي 30 و هو مكون من أربعة أرقام متساوية مثنى مثنى و متتابعة فإلى اللقاء .

- إن فهمت القصة فما رقم هاتف سعيد ؟

65 في دراسة خاصة بحالة سيارات مدينة ما .تبين أن :

12 % من السيارات ذات مكابح ضعيفة

- من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة هناك 20 % لها إضاءة ضعيفة

- من بين السيارات ذات المكابح القوية هناك 8 % لها إضاءة ضعيفة.

و قصد سلامة الطرقات طلِب من شرطة المرور تكثيف المراقبة . نعتبر الحادثتين التاليتين :

L " السيارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها إضاءة قوية " و $\overline{L}$ الحادثة العكسية لها .

F " السيارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها مكابح قوية " و $\overline{F}$ الحادثة العكسية لها .

1- أحسب احتمال F ، احتمال $\overline{L}$ علما أن $\overline{F}$ محققة ثم احتمال $\overline{L}$ علما أن F محققة

2- أ- أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها مكابح ضعيفة و إضاءة ضعيفة أيضا .

ب- أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها مكابح قوية و إضاءة ضعيفة .

جـ- استنتج احتمال ان تكون السيارة الموقوفة من قبل الشرطة لها إضاءة ضعيفة .

3- علما أن سيارة ما روقبت و كانت لها إضاءة ضعيفة . ما احتمال أن تكون لها مكابح ضعيفة أيضا ؟

4- أ- برهن أن احتمال توقيف سيارة في حالة جيدة (مكابح قوية و إضاءة قوية) هو 0,8096

ب- إذا كانت شرطة المرور قد أوقفت 20 سيارة . ما إحتمال وجود سيارة واحدة ليست في حالة جيدة على الأقل؟

66 نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدها الأول

$$U_1 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad U_n = \frac{2}{5}U_{n-1} + \frac{1}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$$

1- برهن أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\} \quad U_n \in [0;1]$$

2- أ- أوجد العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (V_n) المعرفة بـ :

$U_n = V_n - \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. متتالية هندسية .

ب- أحسب U_n. **بدلالة n ثم استنتج** V_n بدلالة n

جـ- استنتج أن (U_n) متقاربة ، أحسب نهايتها .

3- A و B كيسان ، يضم الأول 6 كرات بيضاء و 4 سوداء و يضم الثاني 8 كرات بيضاء و كرتين سوداوين نأخذ عشوائيا كيسا و نسحب منه كرة واحدة ثم نعيدها الى نفس الكيس بالكيفية التالية :.

إذا كانت بيضاء نعيد من نفس الكيس السحب مرة أخرى و إذا كانت سوداء نعيد السحب من الكيس الآخر و هكذا نكرر العملية ن مرة .

نسمي " U_n إحتمال أن تكون السحبة رقم n من الكيس A "

أ – أحسب U_1 ، U_2 ، U_3.

ب- برهن أن $U_n = \frac{2}{5}U_{n-1} + \frac{1}{5}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

جـ – أحسب $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$.

67 (A) ، (B) لاعبان يتباريان في اللعبة التالية :

- في البداية يدفع كل من اللاعبين 1DA كمبلغا للعب و يرمي كل منهما قطعة نقدية عادية .

- إذا حصل (A) على وجه و (B) على ظهر تتوقف اللعبة و يُعلن (A) فائزا و يأخذ المبلغ المدفوع .
- إذا حصل (A) على ظهر و (B) على وجه تتوقف اللعبة و يُعلن (B) فائزا و يأخذ المبلغ المدفوع .
- الحالات الأخرى تعتبر تعادلا، يضاعف اللاعبان مبلغ اللعب و يبدءان في المحاولة من جديد .و هكذا تستمر اللعبة و لا تتوقف إلا بفوز أحدهما أو بعد حصول التعادل في المرة العشرين و حينها يستعيد كل لاعب مبلغه المدفوع
من أحل كل عدد طبيعي n محصور بين 1 و 20 نعتبر الحوادث التالية :

A_n. " اللعبة تنتهي في المحاولة النونية بفوز (A) "

B_n. " اللعبة تنتهي في المحاولة النونية بفوز (B) "

I_n. " المحاولة النونية هي تعادل "

نضع : $X_n = p(A_n)$ ، $Y_n = p(B_n)$،

$Z_n = p(I_n)$ " p هو رمز للاحتمال "

1- أ- أحسب X_1، Y_1، Z_1

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي ن محصور بين 1 و 19 لدينا : $X_{n+1} = \frac{1}{4}Z_n$. و $Y_{n+1} = \frac{1}{4}Z_n$.

و $Z_{n+1} = \frac{1}{2}Z_n$.

جـ- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي محصور بين 1 و 20 لدينا : $X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. و $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

و $Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

2- نعتبر المتغير العشوائي T = " مبلغ اللعب أثناء المحاولة التي تنهي اللعبة " (أي المبلغ الذي يحصل عليه الفائز أو المبلغ الذي يتقاسمه اللاعبان في حالة انتهاء اللعبة بالتعادل) .

إذا توقفت اللعبة في المحاولة k يكون حينها T = 2k .

أ- حدد أكبر قيمة لـــ T .

ب- أحسب p(T=202). (يمكنك ملاحظة أن المحاولة التاسعة عشر كانت تعادلا)

جـ- من أجل كل عدد طبيعي k محصور بين 1 و 19.فسّر الحادثة " T = 2k " بدلالة A_k و B_k و استنتج p(T=2k)

د- أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي T و انحرافه المعياري .

68 يحتوي صندوق على قريصات خضراء و قريصات بيضاء و أخرى حمراء (لا نميز بينها باللمس)
10 % من القريصات خضراء و عدد القريصات البيضاء 3 مرّات عدد القريصات الخضراء .
يسحب لاعب قريصة عشوائيا ، إذا كانت حمراء يأخذ ربحا قاعديا ، إذا كانت بيضاء يأخذ مربع الربح القاعدي و إذا كانت خضراء يخسر مكعب الربح القاعدي .

1) نفرض أن الربح القاعدي هو 20 دينارا

a) أكتب قانون الاحتمال للنتائج الممكنة .

b) أحسب الربح المتوسط المأمول بعد عدد كبير من السحبات .

2) نريد تعيين g_0 قيمة الربح القاعدي حتى يكون أمل الربح أكبر ما يمكن .

تعطى النتيجة بالدينار

ليكن X الربح القاعدي بالدينار .

a) بين أن المسألة تئول الى دراسة النهايات الدية للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ حيث

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$$

b) أدرس اتجاه تغيرات f على المجال $[0;+\infty[$ ، استنتج حلا للمسألة السابقة .

اختيار من متعدد

69 عشرة قريصات مرقمة من 1 إلى 10 ، نختار عشوائيا 3 منها . ما عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم زوجي واحد على الأقل ؟

a) 180   b) 330   c) 110

70 A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث
P(A) = 0,4 ، p(B) = 0,5 و $p(\overline{A\cup B}) = 0,35$
قيمة الاحتمال $p(A\cap B)$ هي:

a) 0,1   b) 0,25   c) المعطيات غير كافية للجواب

71 A ، B حادثتان من فضاء احتمالي حيث
$p(A\cap B)=\frac{1}{6}$ و $p_A(B)=\frac{1}{4}$
يكون p(A) مساويا :

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{24}$ c) $\frac{1}{12}$

72 X متغير عشوائي قانون احتماله هو:

x_i	1	2	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

الإنحراف المعياري لـــ X هو :

a) $\frac{3}{2}$ b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ c) 2

صحيح أم خاطئ

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير الجواب

73 !2006 ينتهي بـ 500 صفر

74 كل حادثتين مستقلتان هما حادثتان غير متلائمتين

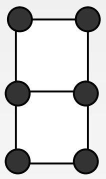
75 كل حادثتين غير متلائمتين هما حادثتان مستقلتان

76 عدد طرق وضع 10 كريات في 4 علب (دون ترك علبة فارغة) هو C_9^3

77 A ، b و C ثلاث أعداد طبيعية حيث $a+b<c$
$C_c^a \times C_{c-a}^b = C_c^b \times C_{c-b}^a$

78 يضم كيس 10 كرات منها السوداء و منها البيضاء من جهة و من جهة أخرى منها الثقيلة و منها الخفيفة . سحب طفل ثلاثة كرات من الكيس و راح يلعب بها .
نهتم بالكرات المسحوبة من قبل الطفل فإذا علمت أن الشرطين التاليين صحيحين :
* سحب الطفل على الأقل كرة بيضاء خفيفة .
* إذا سحب الطفل كرة ثقيلة فهي إذن سوداء
حدّد الجملة الصحيحة من الآتي :
1) يمكن إيجاد كرة سوداء خفيفة .
2) كل كرة خفيفة هي بيضاء.
3) لا يوجد أية كرة بيضاء خفيفة.
4) كل كرة سوداء هي ثقيلة.
5) كل الكرات يمكن أن تكون بيضاء.

79 يكتب الحرف بطريقة براي (BRAILLE) (الكتابة الخاصة بالكفيف) بثقب ورقة في نقطة واحدة على الأقل من النقط الستة المبينة في الشكل ، إذن يوجد



1) 6 حروف فقط ذات 5 ثقوب
2) 15 حرفا ذو 4 ثقوب
3) 6 حروف ذات 3 ثقوب
4) 2^6-1 حرفا في كتابة براي
5) !6 حرفا في كتابة براي.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

الجزء الثاني

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي

الشعب:

- رياضيات
- تقني رياضي
- علوم تجريبية

إشراف و تأليف

محمد فاتح مراد............................مفتش التربية والتكوين

المؤلفون:

- تاوريرت جمال — مفتش التربية والتكوين
- محمد قورين — مفتش التربية والتكوين
- عبد الحفيظ فلاح — أستاذ التعليم الثانوي
- عبد المؤمن موس — أستاذ التعليم الثانوي
- غريسي بلجيلالي — أستاذ التعليم الثانوي

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

أفريل 2007

بسم الله الرحمان الرحيم

مدخل

أعد هذا الكتاب استجابة لمتطلبات المنهاج الجديد الخاص بالسنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي الخاص بشعب الرياضيات ، التقني الرياضي والعلوم التجريبية الذي شرع في تطبيقه ابتداء من الدخول المدرسي 2007 – 2008 .

بالإضافة إلى الاحترام التام للمنهاج فقد حاولنا العمل بمختلف التوجيهات الواردة فيه كما حرصنا على تجسيد المقاربة بالكفاءات التي بني عليها من خلال اختيار أنشطة مناسبة سواء عند مقاربة مختلف المفاهيم أو عند إدماجها كما حظي استعمال تكنولوجيات الإعلام و الاتصال بالاهتمام اللازم.

يحتوي الكتاب على ستة (6) أبواب تمت هيكلتها بنفس الكيفية على النحو التالي:

- عرض للكفاءات المستهدفة إضافة إلى نبذة تاريخية.
- أنشطة تمهيدية.
- الدرس.
- طرائق و تمارين محلولة.
- أعمال موجهة.
- استعد للبكالوريا.
- تمارين و مسائل.
- اختبر معلوماتك.

أردنا أن نجعل من هذا الكتاب وسيلة عمل ممتعة و ناجعة في آن واحد، نتمنى أن يسمح لكم من التحضير الجيد لامتحان نهاية السنة.

و إذ لا يخلو أي كتاب من نقائص فإننا نرحب، بكل اهتمام، بانتقادات القراء التي تهدف إلى إثراء و تحسين الكتاب و هم مشكورون مسبقا على ذلك.

فهرس الكتاب

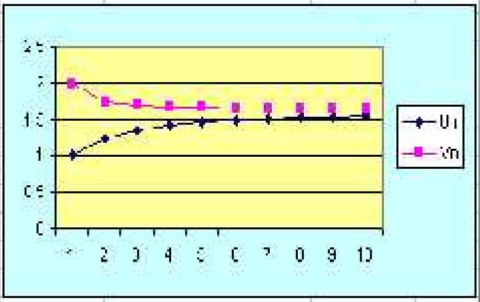
المتتاليات العددية 01

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية.
- إثبات خاصية بالتراجع.
- دراسة سلوك ونهاية متتالية.
- معرفة واستعمال مفهوم متتاليتين متجاورتين.
- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع.

تمت دراسة المتتاليات العددية الأولى من طرف اليونان ، مثل متتالية الأعداد الأولية.
أرخميدس قام بأعمال حول المتتاليات التي نهايتها تساوي ® .
في القرن الثالث عشر اكتشف الإيطالي ليونارد فيبو ناتشي المتتالية التراجعية البسيطة التي تحمل اسمه $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ مع $u_0 = 1$ و $u_1 = 1$ ، و التي تترجم تطور نمو تكاثر حيوانات .
المتتاليات الحسابية و الهندسية ظهرت في أوروبا و في الصين في القرون الوسطى .
في عصر النهضة درست المتتاليات المعروفة لدينا اليوم .

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	1	1	2
3	2	1,25	1,75
4	3	1,36111111	1,69144444
5	4	1,42361111	1,67361111
6	5	1,46361111	1,66361111
7	6	1,49138889	1,65805556
8	7	1,51179705	1,6546542
9	8	1,52742205	1,65242205
10	9	1,53976773	1,65007084
11	10	1,54976773	1,64976773



نشاط أول

في القديم كان اليونان يتعاملون جيدا مع المربع التام لعدد طبيعي و وصلوا إلى النتيجة التالية:

كلما جمعنا أعدادا فردية متتابعة و بالتتابع نحصل على مربع تام لعدد طبيعي .

و هكذا :1 مربع العدد 1 ، $1+3=4$ و 4 مربع العدد 2 ، $1+3+5=9$ و 9 مربع العدد 3 ، ...

1) أنجز ورقة المجدول الموالية بإتباع الخطوات التالية:

في العمود A و إبتداء من الخلية $A2$ أحجز الأعداد الفردية من 1 إلى 99 .

في الخلية $B3$ أحجز $\boxed{=A2+A3}$

في الخلية $B4$ أحجز $\boxed{=B3+A4}$

	A	B
1	العدد الفردي n	مجموع الأعداد الفردية المتتابعة
2	1	
3	3	4
4	5	9
5	7	16
6	9	25
7	11	36
8	13	49
9	15	64
10	17	81
11	19	100
12	21	121
13	23	144
14		
15		

2) أحسب $1+3+5+7+9+...+53+55$.

3) أحسب $1+3+5+7+9+...+85+87$.

4) خمن حساب $1+3+5+...+(2n-1)$ بدلالة n .

5) بفرض التخمين السابق صحيحا أثبت أن :

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

نقول أن الخاصية وراثية .

نشاط ثان

A. تقترح مؤسسة عمومية عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـــ $15000\ DA$ في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر بـــ 15% نسمي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى . نرمز بـــ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n\geq 1)$.

1) أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6 و u_7 .

2) أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) عين u_n بدلالة n .

4) ابتداء من أي سنة يفوق المرتب $25000\ DA$ ؟

B . تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـــ $15000\ DA$ الشهر الأول و زيادة في المرتب الشهري تقدر بـــ $1500\ DA$ بعد كل سنة نسمي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى .

نرمز بـ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n\geq 1)$.

1) أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 و v_7.

2) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) عين v_n بدلالة n .

4) ابتداء من أي سنة يفوق المرتب $25000\ DA$ ؟

نشاط ثالث

A. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{x+6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -6. فسر بيانيا النتيجة.
3. أحسب نهاية f عند $+\infty$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f.
5. أنجز جدول تغيرات الدالة f
6. عين قاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
7. أرسم (Δ) و (C_f).

B. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=-5$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$

1. تحقق أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n>0$.
2. باستعمال حاسبة بيانية عين u_1، u_2، u_3 و u_4.
3. باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود u_1، u_2، u_3 و u_4.
4. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
5. باستعمال الحاسبة البيانية خمن من أي عدد يقترب u_n أكثر فأكثر لما يصبح n كبيرا جدا.
6. إذا فرضنا أن تخمينك السابق صحيح أثبت صحة التخمين الذي وضعته في السؤال 4.

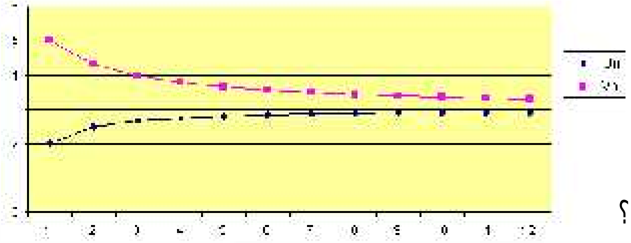
نشاط رابع

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n=\dfrac{3n+2}{n+1}$.

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n=\dfrac{3n+10}{n+2}$.

1. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة .
2. أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة .
3. عين نهاية المتتالية u_n-v_n .
4. الرسم المقابل يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين (u_n) و (v_n) باستعمال مجدول اكسال .

ماذا تلاحظ حول نهاية (u_n) وحول نهاية (v_n) ؟



الدروس

تذكير حول المتتاليات العددية .

1. تعريف .

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

2. اتجاه تغير متتالية عددية.

متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$على الترتيب) .

متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$على الترتيب) .

متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n\geq n_0$ ، $u_{n+1}=u_n$.

متتالية رتيبة: إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة(رتيبة تماما على الترتيب) .

3. المتتاليات الحسابية.

تعريف:نقول أن المتتالية (u_n)متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+r$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

$u_n=u_0+nr$ و $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\dfrac{u_0+u_n}{2}\right)$

4. المتتاليات الهندسية.

تعريف:نقول أن المتتالية (u_n)متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n\times q$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

$u_n=u_0\times q^n$ و $S=u_0+u_1+...+u_n=u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ مع $q\neq 1$ و إذا كان $q=1$ فإن $S=(n+1)u_0$.

نهاية متتالية هندسية.

- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q\leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

تمرين محلول1: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n-5n-1$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n). استنتج (u_n) بدلالة n .

الحل: • الحد الأول للمتتالية (v_n) هو v_0 ، $v_0=u_1-u_0=3-5(0)-1-3=-1$.

لدينا $u_{n+1}-u_n=-5n-1$. إذن : $v_n=-5n-1$

$v_{n+1}-v_n=-5(n+1)-1-(-5n-1)=-5$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n=-5$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0=-1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-1-5n$. $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=\frac{n}{2}(5+5-5n)=\frac{n}{2}(-2-5n)$.

$v_0=u_1-u_0$ ، $v_1=u_2-u_1$ ، ... ، $v_{n-1}=u_n-u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n=S+u_0$

و منه $u_n=\frac{n}{2}(-2-5n)+3$.

تمرين محلول2: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n، ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).
- ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n)؟
- أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S. استنتج نهاية (u_n).

الحل:

- $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3$

$v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

- $v_{n+1}-v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}$ إذن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
- $-1<\frac{1}{3}<1$ و منه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$. $\lim_{n\to+\infty}S=-\frac{3}{2}$. $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$.

الاستدلال بالتراجع.

1.مبدأ الاستدلال بالتراجع.

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n .

n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. تتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

ملاحظات: • عند الانتهاء من المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

• نترجم الشرط الثاني بالقول أن الخاصية وراثية أي أنها تنتقل من عدد طبيعي n إلى العدد الذي يتبعه $n+1$.

• التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 ضروري لأنه يمكن أن تكون خاصية وراثية دون أن تكون صحيحة،

مثلا : الخاصية " 3^n يقبل القسمة على 5 " خاصية خاطئة بالرغم من أنها وراثية .

$P(n_0)$ صحيحة — إذا كانت $P(n)$ صحيحة — فإن $P(n+1)$ صحيحة

المرحلة 1 — المرحلة 2

الخلاصة

من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 $P(n)$ صحيحة

2.متى يستعمل الاستدلال بالتراجع.

يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع لبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية.

مثال: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 4^n+2 مضاعف للعدد 3 .

الحل: الخاصية " 4^n+2 مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع .

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $4^0+2=1+2=3$ و 3 مضاعف للعدد 3 .

المرحلة 2 :نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي. أي: 4^n+2 مضاعف للعدد 3.

و نضع $4^n+2=3k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $4^n=3k-2$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $4^{n+1}+2$ مضاعف للعدد 3 .

$$4^{n+1}+2=4^n\times 4+2=(3k-2)\times 4+2$$

$$4^{n+1}+2=12k-8+2=3(4k-2)$$

و $3(4k-2)$ مضاعف للعدد 3 و منه $4^{n+1}+2$ مضاعف للعدد 3 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، 4^n+2 مضاعف للعدد 3 .

تمرين محلول1: أثبت باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 6 :

$$3^n \geq 100n$$

	A	B	C	D
1	n	3^n	100n	
2	0	1	0	
3	1	3	100	
4	2	9	200	
5	3	27	300	
6	4	81	400	
7	5	243	500	
8	6	729	600	
9	7	2187	700	
10	8	6561	800	
11	9	19683	900	
12	10	59049	1000	
13				

الحل: نسمي $P(n)$ الخاصية " $3^n \geq 100n$ "

المرحلة 1: نتأكد من صحة $P(6)$

من أجل $n=6$ ، $3^6=729$ و $6\times100=600$

و منه $3^6 \geq 6\times100$ و بالتالي $P(6)$ صحيحة .

المرحلة 2 : نفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي أكبر من أو يساوي 6 أي $3^n \geq 100n$ (فرضية التراجع) .

ونبرهن أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$ أي $3^{n+1} \geq 100(n+1)$.

لدينا $3^{n+1}=3\times3^n$.

من فرضية التراجع $3^{n+1} \geq 3\times100n$ و منه $3^{n+1} \geq 2\times100n+100n$.

من $n\geq6$ نستنتج أن $2\times100n \geq 1200$ و بالأخص $2\times100n \geq 100$.

من $3^n \geq 100n$ (فرضية التراجع) و $2\times100n \geq 100$ ، نستنتج $3^{n+1} \geq 100n+100$ و منه $3^{n+1} \geq 100(n+1)$.

أي أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 6 : $3^n \geq 100n$.

تمرين محلول2: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

الحل: الخاصية " $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع .

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $3^{2(0)+1}+2^{0+2}=3+4=7$ و 7 مضاعف للعدد 7 .

المرحلة 2 :نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي. أي: $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف لعدد 7.

و نضع $3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $3^{2n+1}=7k-2^{n+2}$.

و لنبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7 .

$$3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=3^{2n+1+2}+2^{n+2+1}$$
$$=3^{2n+1}\times3^2+2^{n+2}\times2$$
$$=\left(7k-2^{n+2}\right)\times3^2+2^{n+2}\times2$$
$$=7k\times9-2^{n+2}\times9+2^{n+2}\times2$$
$$=7k\times9+2^{n+2}\times(-7)$$
$$=7(k\times9-2^{n+2})$$

و منه $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

تقارب متتالية عددية.

نهاية متتالية عددية.

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $]\sim, +\infty[$

حيث $\sim$ عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{-4n+1}{3n+2}$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{-4x+1}{3x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{4}{3}$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{4}{3}$. إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظة: العكس غير صحيح :

مثال: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x\cos(2\pi x)}{x+1}$ ، الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

نلاحظ فعلا بأن $u_n = f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\cos(2\pi n) = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (نطبق النظريات علي النهايات) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ غير موجودة .

تعاريف: (u_n) متتالية عددية .

- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أنّ كل مفتوح $]\sim, +\infty[$ $(\sim \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]-\infty, \sim[$ $(\sim \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $]\sim, +\infty[$ و $\sim$ عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

تمرين محلول1: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{3n^2-5n+1}{n^2+5}$.

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: تكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و منه $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+5}$ و المعرفة على $\mathbb{R}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (u_n) لها نفس النهاية

مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

تمرين محلول2: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\sqrt{\dfrac{4n+3}{n+1}}$.

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n=f(v_n)$ حيث $v_n=\dfrac{4n+3}{n+1}$ و f الدالة العددية حيث $f(x)=\sqrt{x}$.

المعرفة على $[0;+\infty[$.

الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) هي الدالة g حيث $g(x)=\dfrac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $[0;+\infty[$.

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=4$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (v_n) لها نفس النهاية

مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=4$. و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{4}=2$.

تمرين محلول3: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$.

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\neq 1$.

تكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية ثم استنتج نهاية (u_n).

الحل: • نستعمل الاستدلال بالتراجع

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $u_0=3$ و الخاصية صحيحة.

المرحلة 2 :نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي موجب تماما. أي: $u_n\neq 1$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\neq 1$ و نبرهن بالخلف . نفرض $u_{n+1}=1$

أي $\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}=1$ و نستنتج أن $u_n=1$ و هذا تناقض مع فرضية التراجع .إذن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\neq 1$.

• $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$ و منه $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}$ و بالتالي $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n-1}{3u_n-3}=\dfrac{1}{3}$.

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ لأن $r>0$

و نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

↲ متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

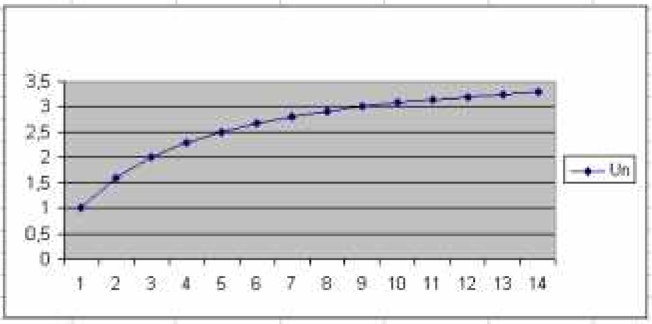
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \ge B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

مثال1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \dfrac{4n}{n+3}$

الجدول المقابل يعطي قيم المتتالية (u_n) من أجل قيم n من 1 إلى 14 و يعطي التمثيل البياني للمتتالية . انطلاقا من هذا نخمن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 1 هو عنصر حاد من الأسفل .

	A	B
1	n	Un
2	1	1
3	2	1,6
4	3	2
5	4	2,28571429
6	5	2,5
7	6	2,66666667
8	7	2,8
9	8	2,90909091
10	9	3
11	10	3,07692308
12	11	3,14285714
13	12	3,2
14	13	3,25
15	14	3,29411765
16		



نبرهن على صحة هذا التخمين.

نقارن بين $4n$ و $n+3$. $4n-(n+3)=3n-3=3(n-1)$ وبما $n \ge 1$ فإن $4n-(n+3) \ge 0$.

و منه $4n \ge (n+3)$ و بالتالي $\dfrac{4n}{n+3} \ge 1$ إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n \ge 1$.

و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .

مثال2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \dfrac{2n+3}{n}$.

المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 5 عنصر حاد من الأعلى .

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 2 عنصر حاد من الأسفل .

و منه المتتالية (u_n) متتالية محدودة .

مبرهنة: تقبل بدون برهان .

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

تمرين محلول1: (u_n) **متتالية معرفة في** $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n=\dfrac{n^2+n+9}{n}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) **محدودة من الأسفل.**

طريقة: لإثبات أن متتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي B (أو محدودة من الأعلى بعدد A)

يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية .

- استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq B$ (أو لإثبات $u_n\leq A$) .
- المقارنة بين u_n و B (أو u_n و A) بدراسة إشارة u_n-B (أو u_n-A) .
- إذا كانت $u_n=f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $[0;+\infty[$.

الحل:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث:

$$f(x)=\frac{x^2+x+9}{x} .$$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	↘	7	↗	

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x)\geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n\geq 7$ ، و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

تمرين محلول2: (u_n) **متتالية معرفة في** $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{2n^2+1}{n^2+4}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) **محدودة من الأعلى بالعدد 2.**

الحل:

نحسب الفرق u_n-2.

$u_n-2=\dfrac{2n^2+1}{n^2+4}-2$ و منه ، $u_n-2=\dfrac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4}$ أي $u_n-2=\dfrac{-7}{n^2+4}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{-7}{n^2+4}\leq 0$ و بالتالي:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-2\leq 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 2$.

إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 2 عنصر حاد من الأعلى .

متتاليتان متجاورتان.

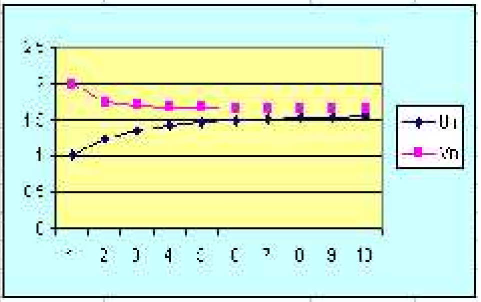
تعريف: تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت و فقط إذا إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

الجدول المقابل يعطي قيم المتتاليتين (u_n) و(v_n) من أجل قيم n من 1إلى 10 و يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين .انطلاقا من هذا نخمن أن المتتاليتين متجاورتان.

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	1	1	2
3	2	1,25	1,75
4	3	1,36111111	1,69444444
5	4	1,42361111	1,67361111
6	5	1,46361111	1,66361111
7	6	1,49138889	1,65805556
8	7	1,51179705	1,6546542
9	8	1,52742205	1,65242205
10	9	1,53976773	1,65087884
11	10	1,54976773	1,64976773



نبرهن على صحة هذا التخمين.

- $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right)$

أي $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

- $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$ أي $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ و منه:

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

أي $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2}$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

- $u_n - v_n = u_n - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$ و منه $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

إذن $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

بما أن (u_n)متزايدة ، (v_n)متناقصة و $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

مبرهنة: إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تمرين محلول1: (u_n) % (v_n) :

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .أحسب w_n بدلالة n .ما هي نهاية (w_n)؟

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

الحل:

1) لدينا $w_{n+1}=u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+2v_n}{3}-\dfrac{u_n+3v_n}{4}$

$w_{n+1}=\dfrac{4u_n+8v_n-3u_n-9v_n}{12}=\dfrac{u_n-v_n}{12}$ أي $w_{n+1}=\dfrac{1}{12}w_n$.

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0=11$.

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=11\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$. بما أن $-1<\dfrac{1}{12}<1$ (w_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$.

2) $t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=\dfrac{3(u_n+2v_n)}{3}+\dfrac{8(u_n+3v_n)}{4}$

أي $t_{n+1}=u_n+2v_n+2u_n+6v_n=3u_n+8v_n$ و منه $t_{n+1}=t_n$ و المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=t_0=44$.

3) • $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\dfrac{u_n+2v_n-3u_n}{3}$ و منه : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-2(u_n-v_n)}{3}=-\dfrac{2}{3}w_n$

إذن: $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{22}{3}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n<0$ و المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

• $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\dfrac{u_n+3v_n-4v_n}{4}$ ومنه : $v_{n+1}-v_n=\dfrac{(u_n-v_n)}{4}=\dfrac{1}{4}w_n$

إذن: $v_{n+1}-v_n=\dfrac{11}{4}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}-v_n>0$ و المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$ و أن $w_n=u_n-v_n$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى 0 . إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=t_0=44$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n+8v_n=44$

نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=4$.

دراسة متتالية تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. دراسة مثال: نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

1) باستعمال مجدول ، نحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Un	0	3	1,5	2,25	1,875	2,0625	1,96875	2,015625	1,992188	2,0039063	1,9980469	2,000977	1,999512	2,000244

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وحول تقاربها .

2) لتكن الدالة f لمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

أرسم (Δ) التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

أرسم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

ضع على محور التراتيب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 . هل تخميناتك تبدو صحيحة ؟

3) أحسب العدد ~ فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (D).

نضع $v_n = u_n - \sim$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .

عين نهاية (v_n) ونهاية (u_n) .

2. الحالة العامة:

لتكن المتتالية التراجعية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ حيث a و b عددان حقيقيان .

1) عين طبيعة المتتالية (u_n) من أجل $a = 0$.

2) أثبت أنه إذا كان $a = 1$ ، فإن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

3) نفرض $a \neq 1$ و $a \neq 0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ ، ليكن المستقيمان (D) و (Δ) المعرفين بالمعادلتين $y = x$ و $y = ax + b$ على الترتيب .

- ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (D) و (Δ) ؟
- عين ~ فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .
- لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي $v_n = u_n - \sim$ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

4) نضع $a = -1$ و نفرض أن u_0 غير معدوم .

أوجد الحدود السبعة الأولى بدلالة u_0 . ضع تخمينا ثم برهن صحة هذا التخمين .

متتالية متقاربة نحو العدد e.

1. تعيين حصر للعدد e^x .

1) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^x-(1+x)$.
أدرس تغيرات الدالة f .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1+x\le e^x \dots (1)$.

3) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أصغر تماما من 1 $(x<1)$:

$$e^x\le\frac{1}{1-x} \quad \dots (2)$$

2. تعيين حصر للعدد e .

n عدد طبيعي غير معدوم .

1) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أن : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e$.

2) باستعمال المتباينة (2) ، أثبت أن : $e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. e نهاية متتالية.

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، كما يلي :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0\le e-u_n\le\frac{3}{n}$.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو e .

3) باستعمال آلة حاسبة ، عين قيمة مقربة لكل من الأعداد : u_{100} ، u_{1000} ، u_{10000} .

تطبيق .

تكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$.

تكن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n=u_n+\frac{1}{n(n!)}$.

1) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

2) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3) أحسب $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$. ماذا تستنتج؟

4) أثبت أن (u_n) و (v_n) تتقاربان نحو e .

حساب مساحة.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.لتكن الدالة f لمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى $\left(C_f\right)$ ، محور الفواصل و المستقيمين (D) و (D') المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=2$.

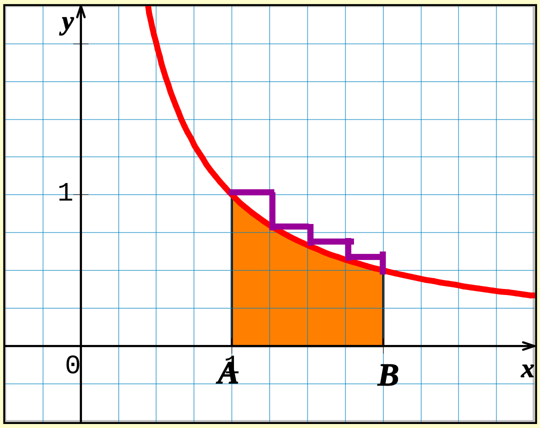
على محور الفواصل نضع النقطة A التي فاصلته 1 و النقطة B التي فاصلتها 2 .

ليكن n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .نجزئ القطعة $[AB]$ إلى n جزء متقايسة .

ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى $\left(C_f\right)$ والمحورين .

نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E .

و عليه لدينا $u_n \le S \le v_n$



1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 لدينا:

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1} .$$

2) أثبت أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة .

3) أثبت أن المتتالية $\left(v_n\right)$ متناقصة .

4) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)$.

ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة للمتتاليتين $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)$ ؟

5) عيّن عددا طبيعيا p حتى تكون u_p قيمة مقربة لـ S إلى 10^{-2} .

6) عيّن عددا طبيعيا q حتى تكون u_q قيمة مقربة لـ S إلى 10^{-4} .

7) باستعمال آلة حاسبة ، عيّن: u_{50} ، u_{500} .

متتالية متقاربة نحو العدد: $\ln(2)$.

الجزء الأول .

(u_n)متتالية عددية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} .$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

2) باستعمال مجدول ، أحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n).

الجزء الثاني .

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ حيث أن :

$$f(x) = \ln(x) .$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1 .$$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي p لدينا:

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

3) n عدد طبيعي غير معدوم .

a) أكتب الحصر السابق من أجل قيم p الآتية : n ، $n+1$ ، ... ، $2n-1$.

b) بجمع طرفا إلى طرف المتباينات المحصل عليها ، أثبت أن :

$$u_n \leq \ln(2) \leq u_n + \frac{1}{2n} .$$

4) أثبت أن (u_n) تتقارب نحو $\ln(2)$.

موضوع محلول

تمرين :

نعرف متتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n-2u_{n+1}=2n+3$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{-n}-2n+1$.

2. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+tn-1$.

أ- بيّن أنه إذا كان $t\neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة .

ب- لثبت أنه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

جـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B ، C و G حيث : $4\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+a\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ مع a عدد حقيقي.

عيّن a حتى تكون النقطة G مرجحا للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 و S_2 على الترتيب .

حل مختصر

1. نضع $p(n)$ الخاصية " $u_n=2^{-n}-2n+1$ " . الخاصية الابتدائية $p(0)$ محققة لأنه $u_0=2^{-0}-2\times 0+1=2$. نفرض أنّ الخاصية $p(k)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي k أي $u_k=2^{-k}-2k+1$ ، ولنبرهن صحة الخاصية $p(k+1)$ أي لنبرهن صحة المساواة $u_{k+1}=2^{-(k+1)}-2(k+1)+1$. من المعطيات لدينا $u_k-2u_{k+1}=2k+3$ معناه $u_{k+1}=\frac{1}{2}u_k-k-\frac{3}{2}$ ، وباستعمال فرضية التراجع نجد $u_{k+1}=\frac{1}{2}\left(2^{-k}-2k+1\right)-k-\frac{3}{2}$ ، معناه $u_{k+1}=2^{-k-1}-2k-1$ ويكافئ $u_{k+1}=2^{-k-1}-2k-2+1$ أي $u_{k+1}=2^{-(k+1)}-2(k+1)+1$. إذن الخاصية الوراثية $p(k+1)$ صحيحة

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2^{-n}-2n+1$.

2. أ. $v_n=u_n+tn-1=2^{-n}+(t-2)n$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{-n}=0$ وبما أن $t\neq 2$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}|t-2|n=+\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|=+\infty$. إذن (v_n) متباعدة .

ب. $v_{n+1}=2^{-n-1}+(t-2)(n+1)=\frac{1}{2}2^{-n}+(t-2)n+(t-2)$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+\frac{1}{2}(t-2)n+(t-2)$. من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n=0$ معناه $\frac{1}{2}(t-2)n+(t-2)=0$ ؛ وهذا يعني أن $t-2=0$ أي $t=2$.

إذن $t=2$ يكافئ أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0=u_0-1=1$.

جـ. $S_n=v_0\dfrac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}}$ أي $S_n=2-2^{-n}$.

3) $S_0=2$ ، $S_1=\frac{3}{2}$ و $S_2=\frac{7}{4}$ ؛ $2+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}\neq 0$ و $2\overrightarrow{GA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{GB}+\frac{7}{4}\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ معناه $4\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\frac{7}{2}\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ بما أنّ $4\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+a\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ فإن $a\overrightarrow{GC}=\frac{7}{2}\overrightarrow{GC}$ بما أنه لا يمكن لـ G أن تنطبق على النقط A ، B و C فإنّ $a=\frac{7}{2}$.

تعاليق

مبدأ التراجع يتضمّن شرطين بصحة الخاصية الابتدائية وصحة الخاصية الوراثية . ويستعمل في البرهان الخاصيات المتعلقة بعدد طبيعي .

تكون المتتالية (v_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l$ مع l عدد حقيقي .

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q يحقق من اجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=qv_n$.

يجب مراعاة عدد الحدود في المجموع .

بكل تحفّظ ، لاستعمال المرجّح يجب التحقق من أن مجموع المعاملات غير معدوم .

موضوع موجّه

تنبيه

الهدف من هذا التمرين هو تحديد نهاية مشتركة لمتتاليتين وتوظيف البرهان بالتراجع وخاصية تجاور متتاليتين .

تمرين

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ و $v_n = \dfrac{7}{u_n}$.

1. أحسب الحدود v_0 ، u_1 ، v_1 ، u_2 ، v_2 ، u_3 و v_3 .
أعط القيمتين الظاهرتين على شاشة الحاسبة للحدين u_3 و v_3 .

2. برّر بالتراجع أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n > 0$ و $v_n > 0$.

3. برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.
استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n - v_n \geq 0$.

4. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة والمتتالية (v_n) متزايدة .

5. أ. برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $u_n \geq \dfrac{21}{8}$.

ب. برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.
استنتج باستعمال البرهان بالتراجع أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n - v_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$.

6. استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان . ما هي نهايتهما المشتركة .

7. برر أن u_3 هو قيمة مقربة إلى 10^{-7} للعدد $\sqrt{7}$.
عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون u_n قيمة مقربة إلى 10^{-100} للعدد $\sqrt{7}$.

توجيهات

2. نبرهن على الخاصيتين معا و $u_{p+1} > 0$ نستنتج من $\dfrac{u_p + v_p}{2}$ و $v_{p+1} > 0$ من المعطيات

3. أكمل الحساب ...$\dfrac{1}{u_{n+1}}(u_{n+1}^2 - 7)$ $u_{n+1} - v_{n+1} =$. الاستنتاج باستعمال السؤال 2.

4. احسب العبارتين $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ واستعمل السؤال السابق .

5. أ. لاحظ $u_n \geq v_n \geq v_1$. وبالنسبة **ب.** لاحظ $4u_{n+1} \geq 4 \times \dfrac{21}{8} \geq 10$ واستعمل **3.**
واستعمل التراجع للبرهان على الخاصية $u_n - v_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$.

6. تعيين $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n - v_n)$ لديك $0 \leq u_n - v_n \leq \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$ ، ومن $v_n = \dfrac{7}{u_n}$ يكون $l^2 = 7$

7. يجب تبيان أنّ $\sqrt{7}$ هي قيمة مقربة إلى 10^{1-2^n} للعدد u_n .

تمارين تطبيقية

1 ـ تذكير بالمتتاليات العددية .

1 في كل حالة من الحالات التالية ، عين بيانيا الحدود الأولى للمتتالية (u_n) ، ثمّ أعط تخمينا حول اتجاه تغيرها ونهايتها .

أ. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$.

ب. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$.

جـ. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.

2 (u_n) متتالية حسابية أساسها r . (v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n على الترتيب بـ : $v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2}$ و $w_n = u_{3n} + \sqrt{7}$.

بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) حسابيتان مطلوب تعيين الأساس لكل منهما .

3 أحسب أقياس زوايا مثلث قائم حيث هذه الأقياس تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية .

4 (v_n) متتالية معرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

1) برر أن من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n > 0$.

2) (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = \frac{1}{v_n}$. بين أن (u_n) متتالية حسابية .

5 (u_n) متتالية حسابية حيث $u_3 = 13$ و $u_7 = 37$

أحسب u_{17} .

6 (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أحسب $u_1 + u_2 + ... + u_{20}$.

7 أحسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + ... + 10$.

8 من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = \frac{5^n}{7^{n+1}}$.

بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

9 (u_n) متتالية هندسية حيث $u_7 = \frac{1}{216}$ و $u_{10} = \frac{27}{1331}$ أحسب u_{30} .

10 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أحسب المجموع $u_1 + u_2 + ... + u_7$.

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $v_n = u_{2n}$.

أحسب المجموع $v_1 + v_2 + ... + v_n$.

11 (u_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها موجبة تماما حيث: $u_0 = 2$ و $u_1 = 9u_3$.

1) عين أساس المتتالية (u_n).

2) أحسب u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

2 ـ الاستدلال بالتراجع .

12 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

13 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

15 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

أ) $u_n > 1$.

ب) $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

16 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

17 تكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0,5$ و $u_{n+1} = (u_n)^2$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n < 1$ ،

2) استنتج تغيرات المتتالية (u_n) .

18 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 .

19 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n} - 1$ مضاعف للعدد 8 .

20 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

21 p_n هي الخاصية " $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3" .
هل الخاصية p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟

22 1) أثبت أنه إذا وجد عدد طبيعي n بحيث 9 يقسم $10^n + 1$ فإن 9 يقسم $10^{n+1} + 1$.

2) هل من أجل كل عدد طبيعي n ، $10^n + 1$ مضاعف للعدد 9 ؟

3 ـ تقارب متتالية عددية .

23 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

جد عددا طبيعيا n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن $-10^{-3} < u_n < 10^{-3}$.

24 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :
$u_n = n\sqrt{n}$.

جد عددا طبيعيا n_0 حيث إذا كان $n > n_0$، فإن $u_n > 10^6$.

25 المتتالية (u_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 3$. ابتداء من أي دليل يكون $u_n < 10^{-5}$ ؟

26 المتتالية (u_n) هندسية أساسها 3 وحدها الأول $u_0 = 1$. ابتداء من أي دليل يكون $u_n > 10^{12}$ ؟

في التمارين من 27 إلى 30 المطلوب حساب نهاية المتتالية Eu_nF المقترحة .

27 (1 $u_n = \dfrac{3n+2}{2n-1}$. (2 $u_n = \dfrac{5n-2}{4n-3}$.

(3 $u_n = 2n - \dfrac{2}{n+1}$. (4 $u_n = \dfrac{n}{3} - 4 + \dfrac{n+2}{n^2+1}$.

28 (1 $u_n = \dfrac{7n^2 - 3n + 2}{n^2 - n + 1}$.

(2 $u_n = \dfrac{-n^2 + 4n + 2}{(n+2)^2}$.

(3 $u_n = \dfrac{-3n + 12}{n^2 + 1}$.

(4 $u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{4n + 3}$.

29 (1 $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{2n+1}}$. (2 $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n+3}}$.

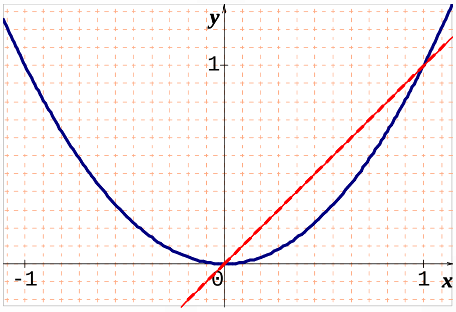
(3 $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+1}$. (4 $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$.

30 (1 $u_n = \sin\left(\dfrac{3\text{®}n+2}{2n+\text{®}}\right)$.

(2 $u_n = \cos\left(\dfrac{-3\text{®}n+2}{n+2\text{®}}\right)$.

(3 $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\text{®}}{17}$.

31 في الشكل لدينا $\mathcal{C}$ التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto x^2$ و Δ المستقيم ذو المعادلة $y = x$



(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

. $u_n = f(n)$ ، $v_{n+1} = f(v_n)$ و v_0 عدد حقيقي معلوم .

1) عين إحداثيي نقطتي تقاطع المنحني $\mathscr{C}$ والمستقيم Δ .

2) ما القول عن اتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

هل هي متقاربة ؟

3) بتمثيل الحدود الأولى للمتتالية (v_n), أعط تخمينا حول رتابتها ونهايتها في الحالات التالية :

$v_0 = 0,8$ ، $v_0 = -1,1$ و $v_0 = 1,1$

4) هل يمكن اختيار v_0 حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

4 ـ المتتاليات المحدودة .

32 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$.

من بين الأعداد الحقيقية التالية : 0 ؛ 6 ؛ 4,99999 ؛ 5 ، ما هي العناصر الحاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

في كل من التمارين من 33 إلى 36 ، أذكر إن كانت المتتالية (u_n) المقترحة تقبل عنصرا حادا من الأسفل، عنصرا حادا من الأعلى . هل هي محدودة ؟

33 أ ـ $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)$. ب ـ $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

جـ ـ $u_n = 1 + \frac{1}{n+2}$. د ـ $u_n = \frac{1}{1+n^2}$.

34 أ ـ $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. ب ـ $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$.

جـ ـ $u_n = \frac{-3}{\sqrt{3n+2}}$.

35 أ ـ $u_n = 2^n$. ب ـ $u_n = n\sqrt{3} - 2$.

جـ ـ $u_n = n^2 + n - 1$.

36 أ ـ $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$. ب ـ $u_n = n + \cos n$.

جـ ـ $u_n = (-1)^n \times n^2$.

37 1) أنجز جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

2) أثبت أن العدد $\frac{1}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 بـ : $u_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$.

5 ـ المتتاليتان المتجاورتان .

38 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{-1}{2n+4}$ و $v_n = \frac{1}{n+1}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة .

39 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{n-1}{n}$ و $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة .

40 في كل حالة من الحالتين المقترحتين أدناه ، هل المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين ؟

أ ـ (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$u_n = \frac{2n-3}{n+1}$ و $v_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

ب ـ (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ و $v_n = 3 - \frac{5}{n}$.

41 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

42 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

و $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

43 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

44 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$$

و $v_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

تمارين للتّعمّق

1 ـ تذكير بالمتتاليات العددية .

45 برهن أن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \frac{\ln n}{n}$ هي متناقصة ابتداء من الرتبة 3 .

46 أثبت أن المتتالية $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$ متناقصة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها .

47 أثبت أن المتتالية $u : n \mapsto \frac{n!}{7^n}$ متزايدة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها .

48 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$. برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة .

49 بكالوريا

1) (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول v_1 وأساسها r

أ ــ عين v_1 و r علما أن $\begin{cases} v_1+v_2+v_3=24 \\ v_4+v_5+v_6+v_7=74 \end{cases}$

ب ــ استنتج v_n بدلالة n وعين أصغر عدد طبيعي n يحقق $v_n > 6023$.

2) (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها d . نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n = u_1+u_2+...+u_n$.

عين u_1 و d حتى يكون $2S_n = n(3n+7)$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

50 (u_n) متتالية حسابية أساسها -5 و $u_0 = -4$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أحسب المجموع $S = u_{26}+u_{27}+...+u_{125}$.

51 لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4u_{n+1}-2u_n = 9$.

و لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 9$.

أ ـ أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 .

ب ـ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

جـ ـ جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د ـ أحسب بدلالة n المجموع $v_0+v_1+...+v_n$ ثمّ استنتج بدلالة n المجموع $u_0+u_1+...+u_n$.

52 لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0 = 14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n + 3$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n = u_n + 1$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث :

$S_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + ... + {u_n}^2$.

53 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 علما أنّ $u_0 = \frac{2}{9}$

أحسب المجموع $S = u_3+u_4+...+u_{10}$.

54 أحسب المجموع :

$$S = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + ... + 312,5$$

55 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد حقيقي n بـ :

$u_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$.

أحسب بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$.

56 لتكن المتتالية (u_n) ذات الحد الأول $u_1 = 1$ ، وحيث من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1، $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1، نضع : $v_n = u_n + 3$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

ـ أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

ـ أثبت أن $u_1 + u_2 + ... + u_n + 3n$ مضاعف للعدد 4 وهذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

57 (u_n) هي المتتالية المعرفة بـ $u_0 = \frac{1}{6}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2u_n + \frac{5}{3}$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 و v_2 .

2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

ـ أحسب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث :

$t_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ، $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

58 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \ , u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} : n \geq 1 \text{ من أجل كل } \end{cases} .$$

1) جد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = u_{n+1} - au_n$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها b .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = u_{n+1} - bu_n$.

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها a .

4) أكتب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

59 a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

1) بين أنه إذا كانت a , b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c) .$$

2) جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أنّ مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276 .

60 a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .

أحسب a ، b و c علما أن $\begin{cases} a+b+c = 36,75 \\ abc = 343 \end{cases}$.

61 a ، b و c ثلاث أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

نفرض أن a ، b و c تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q ؛ و $3a$, $2b$, c تشكل ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية . أحسب q .

62 a عدد حقيقي معطى .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = a$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$.

1) (v_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = 13u_n - 4$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q .

2) عبر عن v_n بدلالة a و n؛ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة a و n .

3) أحسب بدلالة a و n المجموع :

$$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

تمارين

63 يرمز $(\sim_n)$ إلى متتالية هندسية غير منتهية ، كل حدودها موجبة حيث حدّها الأول : $\sim_1 = 3$ ، و $\sim_3 + \sim_5 = \frac{15}{16}$.

1) عين أساس المتتالية $(\sim_n)$.

2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n = \sim_1 + \sim_2 + ... + \sim_n$.

3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع $\;_n = \ln(\sim_n)$ ($\ln$ هو اللوغاريتم النيبيري) .

أ ـ برهن أنّ $(\;_n)$ هي متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

ب ـ أحسب بدلالة n المجموع t_n حيث :

$t_n = \;_1 + \;_2 + ... + \;_n$

64 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$A_n = \underbrace{11...1}_{n\text{ رقم}}$

(عدد من n رقم مساويا لـ 1 مثلا $A_4 = 1111$) .

أحسب $s_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

65 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$A_n = \underbrace{33...3}_{n\text{ رقم}}$

(عدد من n رقم مساويا لــ 3 مثلا $A_5 = 33333$) .

أحسب $s_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$

66 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5u_n - 7n$ ؛ $v_n = u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16}$.

1) باستعمال مجدول إكسل نريد حساب الحدود العشر الأولى لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

ولهذا ، أحجز في الخلية $B1$ العدد 0 ثم باستعمال الفأرة واللمسة $ctrl$ نسحب إلى اليمين ؛ نحجز في الخلية $B2$ العدد 5 .

في الخليتين $C2$ و $B3$ وباستعمال اللمسة = نحجز العبارتين الموضوعتين في الشكل ثم أسحب كل منهما إلى اليمين باستعمال الفأرة واللمسة $ctrl$.

	A	B	C	D
1	n	0	1	2
2	u_n	5	5*B2-7*B1	
3	v_n	B2-7/4*B1-7/16		
4				

بملاحظتك للسطر الثالث ، أعط تخمينا لطبيعة المتتالية (v_n) .

2) برهن التخمين الموضوع في السؤال السابق ثم عبر عن v_n و u_n بدلالة n .

3) أحسب $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

67 (u_n) هي المتتالية المعرفة بـ $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sim u_n + \;$ ، $\sim$ و $\;$ عددان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

1) جد علاقة تربط بين العددين $\sim$ و $\;$ التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة .

2) نفرض أن المتتالية (u_n) ليست ثابتة ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n + ¥$ حيث ¥ عدد حقيقي غير معدوم .

أ ـ عين ¥ بدلالة $\sim$ و $\;$ حيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

ب ـ نضع $\sim = 3$ ، $\; = 2$ و $¥ = 1$.

أحسب المجموعين s_n و t_n حيث

$t_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ، $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

2 ـ الاستدلال بالتراجع .

68 بكالوريا

نضع $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أ ـ أحسب s_1 ، s_2 ، s_3 و s_4 .

ب ـ عبر عن s_{n+1} بدلالة s_n .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم
. $s_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

69 نضع $t_n=1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)$
حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أحسب t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 . عبر عن t_{n+1} بدلالة t_n .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $t_n=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

70 من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ،
نضع :
$$s_n=1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+...+(n-1)2^{n-2}$$
برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq2$ ،
$$s_n=(n-1)2^n-n\times2^{n-1}+1=1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n$$

71 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
$$1\times2\times3+2\times3\times4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

❖ الرمز $n!$ يقرأ عاملي n ومعرف بـ :
$$n!=1\times2\times3\times...\times n$$

72 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
$$1+2\times2!+3\times3!+...+n(n!)=(n+1)!-1 .$$

73 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $n!\geq2^{n-1}$.

74 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 لدينا : $2^n\geq n^2$.

75 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 , $5^n\geq4^n+3^n$.

76 متباينة برنولي ($Bernoulli$)
a عدد حقيقي موجب تماما .

1) برهن أنه آجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :
. $(1+a)^n\geq1+na$

2) استنتج أنه إذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.
(تبرير المبرهنة المقبولة في السنة الثانية)

77 1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، $3n^2\geq(n+1)^2$.

2) نسمي P_n الخاصية : " $3^n\geq2^n+5n^2$ " .

أ ـ ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n الذي من أجله تكون الخاصية P_n صحيحة ؟

ب ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 5 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

78 من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي P_n الخاصية :
. " $3^n\geq(n+2)^2$ "

1) من بين الخواص P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 عين منها الصحيحة .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

79 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^{\,2}+1}}$.

1) أحسب الحدود u_1 , u_2 , u_3 ؛ أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

80 الهدف التعبير عن u_n بدلالة n .
المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0=7$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=10u_n-18$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 .
لاحظ النتائج هي أعداد تتكون من أرقام وسطها أسفار ؛ أعط العلاقة بين عدد الأسفار و n .

2) أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n ، ثم برهن بالتراجع هذا التخمين .

81 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 . أعط تخمينا لعبارة $(3-u_n)$ بدلالة n.

2) برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقا ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

82 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4 - u_n$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5. أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{2n} = 3$ و $u_{2n+1} = 1$.

83 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع ، $s_n = 1+3+5+...+(2n-1)$.

1) أحسب s_1 ، s_2 ، s_3 و s_4 . أعط تخمينا لعبارة s_n بدلالة n.

2) برهن هذا التخمين بالتراجع .

3) لاحظ المجموع s_n وأعط برهانا آخرا للتخمين .

84 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = n + u_n$.

1) أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) استعمل البرهان بالتراجع لتعيين عبارة u_n بدلالة n.

85 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.

1) أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) استعمل البرهان بالتراجع لتعيين عبارة u_n بدلالة n.

86 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2$.

(v_n) المتتالية المعرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n + u_n$.

1) عبر عن u_n بدلالة n .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 1 + n^2$.

87 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > n^2$.

88 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 \in]0;1[$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n < 1$.

89 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n \le 2$.

أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

90 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

1) تحقق من أن الحدود u_1 ، u_2 و u_3 تنتمي إلى المجال $[0;4[$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n < 4$.

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

91 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n - 1{,}2$.

1) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > -3$.

92 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+3}$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 1$.

2) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

93 α عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=2\cos\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

1) أ ـ أحسب u_1 و u_2 .

ب ـ أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2\cos\frac{\alpha}{2^n}$.

94 (u_n) متتالية معرفة بـ :

$u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$.

1) باستعمال الآلة الحاسبة أحسب u_1 , u_2 و u_3 .

2) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم برهن هذا التخمين باستعمال البرهان بالتراجع .

95 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع :

$u_n=n\times 2^{n-1}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_1+u_2+...+u_n=1+(n-1)2^n$.

96 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم لدينا :

$u_1+u_2+...+u_n=\frac{n}{n+1}$.

2) استنتج قيمة المجموع

$\frac{1}{1427\times1428}+\frac{1}{1428\times1429}+...+\frac{1}{2007\times2008}$.

97 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عددان طبيعيان p_n و q_n حيث $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p_n+q_n\sqrt{3}$.

98 1) المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_1=1$ ، $u_2=3$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.

أ ـ أحسب الحدود u_3 , u_4 و u_5 . أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n .

ب ـ برهن بالتراجع هذا التخمين .

2) المتتالية (v_n) معرفة بـ $v_0=\frac{2}{5}$ ، $v_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+2}=5v_{n+1}-6v_n$.

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\frac{2^n+3^n}{5}$.

99 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ ، $u_1=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}+u_{n-1}=4u_n$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_n=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$.

100 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

برهن أن :

أ ـ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>-1$.

ب ـ المتتالية (u_n) رتيبة .

جـ ـ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\ge\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

101 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{u_n+4}{u_n-2}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

2) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

102 p الدالة كثيرات الحدود المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

تمارين

. $p(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{6}$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

. $p(x+1)-p(x)=x^2$

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

. $p(n)\in\mathbb{N}$

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$p(n+1)=1^2+2^2+...+n^2$

103 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_1=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=\dfrac{-1}{u_n-2}$.

أعط القيمة المضبوطة للحد u_{2006} .

104 برهن بالتراجع أنه كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 24 يمكن كتابته $n=5a+7b$ مع a و b عددين طبيعيين .

105 1) (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_1=\dfrac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)u_n$.

أ ـ أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) .

ب ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=\dfrac{n}{2^n}$.

2) k عدد طبيعي غير معدوم، (v_n) المتتالية المعرفة بـ $v_1=\dfrac{1}{k}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_{n+1}=\left(\dfrac{n+1}{kn}\right)v_n$.

أعط تخمينا لعبارة v_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع هذا التخمين .

3 ـ تقارب متتالية عددية .

في التمارين 106 إلى 108 المطلوب حساب نهاية المتتالية (u_n) المقترحة .

106 1) $u_n=e^{1-n}$. 2) $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)$.

3) $u_n=(n+2)e^{-n}$. 4) $u_n=\ln\left(3+e^{2-n}\right)$.

5) $u_n=\dfrac{e^n-6}{2e^n+1}$. 6) $u_n=\dfrac{e^{-n}-1}{2e^{-n}+1}$.

7) $u_n=\ln\left(\dfrac{e^n-3}{e^n+1}\right)$. 8) $u_n=\ln\left(\dfrac{e^n+2}{e^{2n}+1}\right)$.

107 1) $u_n=n^2\left(\sqrt{3+\dfrac{2}{n+1}}-\sqrt{3}\right)$.

2) $u_n=\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{3}n$.

3) $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n+2}}-\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$.

4) $u_n=\dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$.

108 أ. $u_n=\dfrac{2^n}{5^n}$. ب. $u_n=\dfrac{3{,}01^n}{3^n}$

.

جـ. $u_n=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{5^n}$.

109 (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3u_n+1}$ و $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$.

2) برهن أن (v_n) متتالية حسابية .

3) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

110 (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n-2$ و $v_n=u_n+3$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

2) عين نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (s_n) و (t_n) .

111 جد نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (v_n) ، (w_n) و (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ ؛ $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ ؛ $w_n = u_n - n$ ؛ $t_n = \dfrac{v_n - 1}{w_n - 1}$.

112 جد نهاية لكل من المتتاليات (u_n)، (v_n) و (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1}$ ؛ $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ ؛ $w_n = u_n - 3n$.

113 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \dfrac{1}{n!}$.

(نذكر من أجل $n \geq 1$ ، $n! = 1\times 2\times \ldots \times n$)

1) أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) .

2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$ ؛ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

114 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \dfrac{\cos(3n-\pi)}{\sqrt{n}}$.

تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

115 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = n + 1 - \cos\dfrac{n\pi}{5}$.

تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n \leq u_n \leq n+2$ ؛ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

116 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \left(\dfrac{n}{10} - 1\right)^n$.

1) أعط القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من المتتالية (u_n).

2) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 30 ، يكون $u_n \geq 2^n$ ؛ ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

117 1) أكتب برنامجا للمتتالية u المعرفة بـ $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

2) ابتداء من أي دليل تصبح حدود المتتالية مستقرة على شاشة الحاسبة .

ما هو التخمين الذي يمكن وضعه ؟

3) أثبت أنه إذا كانت المتتالية u متقاربة فإن نهايتها هي العدد الذهبي $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

118 عين نهاية المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1 = 0,57$ ، $u_2 = 0,5757$ ، ... ، $u_n = 0,\underbrace{57\ldots57}_{2n \text{ رقما}}$.

119 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

1) باستعمال مجدول أو حاسبة بيانية , أعط القيمة العشرية المقربة للحدود u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 ، ثم للحدود u_{10^n} حيث العدد n يتغير من 1 إلى 13 .

2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}$.

استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3) اشرح لماذا يظهر تناقض في النتيجتين للسؤالين السابقين .

120 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{14}{3}$.

1) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $x = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{14}{3}$.

3) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة ، فما هي نهايتها ؟

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 7$

أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

121 1) برهن أنه ابتداء من رتبة مطلوب تعينها ، يكون $2^n \leq (n-1)!$.

2) بين أن المتتالية ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ ، متقاربة .

122 a عدد حقيقي و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = a$ و العلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n^2}$.

1) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.

2) استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $|u_n| \leq \frac{|a|}{2^n}$.

3) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

123 نكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و العلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

1) أ ـ برر أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، u_n موجب تماما .

ب ـ إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فما هي نهايتها ؟

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ،

أنشئ المنحني الممثل للدالة $\mathscr{C}$ $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$ ، ثم المستقيم Δ ذي المعادلة $y = x$ (يقتصر الرسم على المجال $[0 ; 2{,}2]$) . مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

ما هو تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ ــ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية متقاربة ثم عبر عن v_n بدلالة n .

ب ــ عبر عن u_n بدلالة v_n ثم برر التخمين الموضوع سابقا .

124 نكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 5$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2) برر أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l أكبر من أو تساوي 2 .

3) بين أن l تحقق $l = \sqrt{2+l}$. استنتج قيمة l .

125 نعتبر المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto \ln(x+1) - x$ المعرفة على المجال $]-1 ; +\infty[$.

2) استنتج أن : من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ،

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

ثم من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(n+1) \leq u_n$.

ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3) أكتب برنامجا الذي يحدد أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n \geq 10$.

4 ـ المتتاليات المحدودة .

126 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n = \frac{1}{n}$.

1) أثبت أن 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n < v_n$.

3) هل المتتاليتين (u_n) و (v_n) محدودتين ؟

127 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$$u_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

1) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

2) أعط عبارة مختصرة للحد u_n .

3) هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

تمارين

128 المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} .$$

1) هل العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة ، استنتج أنها متقاربة .

3) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

129 تكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = e^{-u_n}$.

برهن أنه ابتداء من الدليل 2 تكون المتتالية (u_n) محدودة بالعددين 0 و 1 وهذا مهما كان اختيار الحد الأول u_0 .

130 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n} .$$

1) ما هو اتجاه التغير للمتتالية (u_n)؟

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة . هل العدد 1,333333 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)؟

131 تكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ u_0 عدد حقيقي معطى و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = u_n^{\,2} - 3u_n + 5 .$$

1) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ، ماذا تستنتج ؟

2) نفترض أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l . أكتب معادلة من الدرجة الثانية تكون محقق من أجل l .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة . هل هي محدودة ؟ ما القول عن $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ؟

132 تكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_n = 4u_n + ~$ حيث ~ عدد حقيقي .

أ ـ عين قيمة ~ بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

ب ـ باستعمال قيمة ~ المحصل عليها سابقا ، أكتب v_n بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n .

ج ـ هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

د ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \ldots + \frac{u_n}{4^n} .$$

برهن أن المتتالية (w_n) متقاربة .

5 ـ المتتاليتان المتجاورتان .

133 لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1) برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

2) استنتج عددا طبيعيا p حيث u_p تكون قيمة مقربة إلى 10^{-3} بالنقصان للنهاية l المشتركة بين المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

أعط قيمة u_p على شكل كسر غير قابل للاختزال وكذلك قيمته المقربة المحصل عليها بالحاسبة .

134 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0 = 0$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 1 \leq v_n$.

2) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان وجد نهايتهما المشتركة .

135 نعرف المتتاليتين (u_n) و (v_n) بـ: $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$.

1) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $w_n=u_n-v_n$.
برهن أن المتتالية (w_n) هندسية . عين نهايتها ثم عبر عن w_n بدلالة n .

2) عبر عن $u_{n+1}-u_n$ و $v_{n+1}-v_n$ بدلالة w_n ؛ استنتج اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ولهما نفس النهاية يرمز لها l .

4) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $t_n=3u_n+10v_n$.
برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة . استنتج قيمة l .

136 نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ :
$u_0=3$ ، $v_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،
$u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}$.

1) أحسب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $w_n=v_n-u_n$.
بين أن المتتالية (w_n) هندسية وعين نهايتها .

3) أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم استنتج أنهما مجاورتان .

4) برهن أن (t_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $t_n=\dfrac{1}{3}(u_n+2v_n)$.
برهن أن (t_n) متتالية ثابتة .
عين l ، النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

137 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ :
$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f . استنتج أنه إذا كان $x\in[1;2]$ ، فإن $f(x)\in[1;2]$.

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$.
باستعمال حاسبة بيانية مثل منحني الدالة و المستقيم ذي المعادلة $y=x$.
أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية :
من أجل كل عدد طبيعي n : " $1\le u_n\le 2$ " ؛ " $1\le v_n\le 2$ " ؛ " $u_n\le u_{n+1}$ " و " $v_n\ge v_{n+1}$ " .

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,
$v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$.
أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .
عين القيمة المضبوطة للعدد l .

138 a و b عددان حقيقيان حيث $0<a<b$.
المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0=a$ ، $v_0=b$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$ ، $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$.
(u_{n+1} يسمى الوسط الهندسي للحدين u_n و v_n ؛ v_{n+1} يسمى وسطهما الحسابي .)

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n\le v_n$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
$v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$.
استنتج أن $v_n-u_n\le\dfrac{1}{2^n}(b-a)$.

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) نفرض أن $a=2$ و $b=5$ ، والعدد l هو النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

استعمل نتيجة السؤال الثاني لتعيين القيمة المقربة إلى 10^{-3} للنهاية l .

139 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0=-1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$.

1) أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<v_n$.

ب ـ برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $x_n=u_n+av_n$ و $y_n=u_n+bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين.

جد a و b حيث تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتين ثم عبر عن x_n و y_n بدلالة n .

3) جد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

مسائل

140 تكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ والتي تحقق الخاصية التالية :

$$u_{n+2}=\frac{3}{35}u_{n+1}+\frac{2}{35}u_n .$$

1) هل توجد في المجموعة (E) متتالية ثابتة ؟ متتالية حسابية ؟ متتالية هندسية ؟

2) تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين ~ و تكون المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n=\sim\left(\frac{2}{7}\right)^n+\left(\frac{-1}{5}\right)^n$ هي عنصر من المجموعة (E) .

3) عين المتتالية (u_n) ذات الحد العام

$$u_n=\sim\left(\frac{2}{7}\right)^n+\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

علما أن $u_0=3$ و $u_1=-\frac{4}{35}$. أحسب نهاية هذه المتتالية .

141 I – 1) أدرس اتجاه تغير الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x) ;$$

$$g(x)=\ln(1+x)-x .$$

2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ؛

$$x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x \quad ...\ (1)$$

II – في هذا الجزء نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1=\frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) .$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>0$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) نضع : $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}$

و $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}$.

باستعمال العلاقة (1) برهن أن :

$$S_n-\frac{1}{2}T_n\le\ln u_n\le S_n .$$

4) أ ـ أحسب S_n و T_n بدلالة n .

ب ـ استنتج نهاية لكل من المتتاليتين (S_n) و (T_n) .

5) دراسة تقارب المتتالية (u_n) .

أ ـ برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب ـ استنتج أنها متقاربة .

جـ ـ نقبل النتيجة التالية: إذا كانت المتتاليتان $(\sim_n)$ و $(\ _n)$ متقاربتين حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $\sim_n \le \ _n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \sim_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} \ _n$.

أعط حصرا لنهاية المتتالية (u_n) .

142 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$u_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+...+\sin\frac{n}{n^2}$$

و $v_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) متقاربة ونهايتها هي $\frac{1}{2}$.

2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f:x\mapsto x-\sin x$ ؛

$g:x\mapsto -1+\frac{x^2}{2}+\cos x$ ؛

$h:x\mapsto -x+\frac{x^3}{6}+\sin x$.

أدرس اتجاه تغير لكل من الدوال f ، g و h مبينا أن كل من هذه الدوال موجبة .

3) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $1^3+2^3+...+n^3\le n^4$.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n-\frac{1}{6}\times\frac{1}{n^2}\le u_n\le v_n$.

4) أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة ، وما هي نهايتها ؟

143 I – لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1+x+\ln x$ ؛ ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا حيث $0,27\le \ \le 0,28$.

2) من أجل $x>0$ عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$.

ـ استنتج تغيرات الدالة f .

ـ أحسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

II – نريد دراسة المعادلة $f(x)=n$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) بين أنه من أجل كل n هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا $\sim_n$.

2) المقارنة بين $\sim_n$ و e^n .

أ ـ بين أن $f(e^n)\le n$ ، استنتج أن $\sim_n\ge e^n$.

ب ـ أثبت أن العلاقة $f(\sim_n)=n$ يمكن كتابتها على الشكل $\ln\left(\frac{\sim_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\sim_n}\ ...(1)$.

استعمل (أ ـ) لاستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sim_n}{e^n}$.

3) المقارنة بين $\sim_n$ و e^n+n .

نضع $\sim_n=e^n(1+\pounds_n)$ حيث $\pounds_n\ge 0\ ...\ (2)$.

أ ـ باستعمال العلاقة (1) عبر عن $(1+\pounds_n)\ln(1+\pounds_n)$ بدلالة n .

ب ـ بين أنه من أجل كل $t\ge 0$ ،

$$0\le(1+t)\ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}.$$

جـ ـ استنتج من (أ ـ) و (ب ـ) أنه من أجل كل $n\ge 1$ ، $0\le ne^{-n}-\pounds_n\le\frac{n^2}{2}e^{-2n}\ ...\ (3)$.

د ـ باستعمال (2) و (3) عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^n+n-\sim_n)$.

اختيار من متعدد

144 في كل سؤال اقتراحات موضوعة يمكن أن تكون أكثر من جملة صحيحة؛ المطلوب اختيار الجمل الصحيحة.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=0$ و من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+2}=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

نعرف المتتاليتين (v_n) و (w_n) بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$ و $w_n=u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

1) أ- المتتالية (v_n) حسابية. ب- المتتالية (w_n) حسابية.
جـ- المتتالية (v_n) هندسية. د- المتتالية (w_n) هندسية.

2) أ- $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. ب- $v_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
جـ- $w_n=1$.

3) أ- $u_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.
ب- $u_n=\frac{3}{5}(w_n-v_n)$.
جـ- المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية .
د- المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$.

145 في كل من السؤالين ، بالضبط اقتراحين صحيحين المطلوب تعيينهما .

1) المتتاليات التالية متقاربة :
أ- $\frac{2^n}{n^{2008}}$ و $n>0$. ب- $\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$.
جـ- $n\sin\frac{1}{n}$ و $n>0$. د- $\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ و $n>1$.

2) المتتاليات u ، v و w تمتاز بالخواص التالية :
$u_n\le v_n\le w_n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=1$.
أ- $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.
ب- المتتالية v محدودة من الأسفل .
جـ- من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1<v_n<1$.
د- لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية v تقبل نهاية أم لا .

أصحيح أم خطأ ؟

146 ميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة .

1) كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى .
2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة .
3) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي محدودة .
4) إذا كانت نهاية متتالية هي $+\infty$ فإن هذه المتتالية تكون غير محدودة من الأعلى .
5) كل متتالية متقاربة هي محدودة .
6) إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و تحققان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<v_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n<\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

147 أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبرّرا ذلك

1) إذا كان العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) وإذا كانت المتتالية (v_n) لا تقبل نهاية حقيقية ، فإنّ المتتالية (u_n+v_n) لا تقبل نهاية حقيقية .
2) إذا كان العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) وإذا كانت المتتالية (v_n) لا تقبل نهاية حقيقية ، فإنّ المتتالية $(u_n\times v_n)$ لا تقبل نهاية حقيقية .
3) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.
4) كل المتتالية تكون محدودة من الأسفل أو من الأعلى .

148 بكالوريا

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1{,}5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-1$.

المطلوب تمييز بن الجمل الصحيحة والخاطئة مبرّرا ذلك.

1) المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1 الذي هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الذين معادلتيهما $y=x$ و $y=2x-1$.
2) المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-1$ ، هي متتالية هندسية .
3) المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى .

02 القسمة في Z

الكفاءات المستهدفة

- إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا آخر.
- استعمال خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.
- استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.
- استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين.
- حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

نظرية الأعداد هو فرع من الرياضيات يهتم بخصائص الأعداد الصحيحة، سواء كانت طبيعية أو نسبية، و تتضمن عدة مسائل مفتوحة سهلة الفهم، حتى بالنسبة لغير المختصين. بصفة عامة، المجال الذي تدرسه هذه النظرية يهتم بفئة كبيرة من المسائل التي تأتي من دراسة الأعداد الطبيعية. من الممكن تقسيم نظرية الأعداد إلى عدة مجالات حسب الطريقة المستعملة ونوع المسألة. فهي فرع من فروع الرّياضيات تهتم بدراسة خواص وعلاقات الأعداد الصحيحة وتوسعاتها الجبرية والتحليلية.

عند الإطلاق، **نظرية الأعداد** تدرس قابلية القسمة و الأوليّة و التحليل (إلى جداء عوامل أولية). كما تدرس خواص التجزئة و ما قارب ذلك. و يوجد فروع أخرى نذكر منها نظرية الأعداد الجبرية التي تعتني باستعمال الطرق الجبرية لدراسة الأعداد الصماء و الأعداد المتسامية و نظرية التحليل في التوسعات الجبرية و غير هذا، و نظرية الأعداد التحليلية وهي تستغل طرق التحليل المركب (الأعداد المركبة) حين دراسة بعض خواص الأعداد الأولية.

المبرهنة البدائية للأعداد: في هذا المجال، تدرس الأعداد دون اللجوء لتقنيات آتية من فروع أخرى للرياضيات. مسألة قابلية القسمة ، خوارزمية إقليدس تمكن من حساب القاسم المشترك الأكبر ، تفكيك الأعداد إلى أعداد أولية ،البحث عن الأعداد المثالية والتقريب تنتمي لهذا المجال.

النتائج هي مبرهنة فيرما الصغرى و مبرهنة أولير ، ثم مبرهنة الباقي الصيني و قانون الانعكاس الرباعي . خاصيات الدوال الجذائية مثل دالة ميبيس ودالة أولير تمت دراستها ; وأيضا المتتاليات مثل عاملي و أعداد فيبوشي.

عدة مسائل المبرهنة البدائية للأعداد تبدو بسيطة تحتاج لتعمق في الرياضيات ومقاربات جديدة. كما في الأمثلة الآتية :

- حدسية غولدباخ الخاصة بالأعداد الزوجية كجمع عددين أوليين,
- حدسية كاتالان الخاصة بأس أعداد طبيعية متتالية,
- حدسية التوأمين الأولية التي تقول أن مجموعة الأعداد الأولية التوأم غير منتهية.
- حدسية سيراكيز الخاصة بمتتالية بسيطة.

مبرهنة المعادلة الديوفانتية تم البرهنة على أنها غير محددة (أنظر مسائل هيلبرت).

تستعمل أدوات الحساب و التحليل العقدي لدراسة مسائل حول الأعداد الطبيعية. مبرهنة الأعداد الأولية وفرضية ريمان هي بعض الأمثلة.

نشاط أول

صادف أول جانفي 2007 يوم الاثنين . انطلاقا من هذا يمكن تحديد يوم الأسبوع الذي يصادف أي يوم من السنوات السابقة أو اللاحقة :

1) نريد معرفة اليوم الذي صادف خمسة جويلية 1962 .

– ما هو عدد الأيام n التي تفصل بين أول جانفي 2007 وخمسة جويلية 1962 (لا يحسب إلا أحد التاريخين في المجموع كما تؤخذ السنة الكابسة التي عدد أيامها 366 بعين الاعتبار) ؟

– بقسمة العدد n الموجود سابقا على 7 ، أوجد عدد الأسابيع q التي مرت بين التاريخين .

– عين العدد r للأيام المتبقية بعد مرور هذه الأسابيع بين التاريخين.

– أكتب n بدلالة q و r .

– استنتج يوم الأسبوع الذي صادف خمسة جويلية 1962 .

2) بنفس الطريقة عين يوم الأسبوع الذي يصادف أول نوفمبر من السنة القادمة .

3) ما هو يوم الأسبوع الذي يصادف الاحتفال بمرور قرن عن تاريخ الاستقلال ؟

4) ما هو اليوم الذي صادف تاريخ ميلادك ؟

نشاط ثان

في العصور القديمة كان المصريون يحسنون عملية الضرب في العدد 2 . ومكنهم ذلك من حساب جداء عددين طبيعيين بسرعة .

مثلا لحساب 41×59 نلاحظ أن $1 + 8 + 32 = 41$

$1 \times 59 = 59$

$\times 2$

$2 \times 59 = 118$

$\times 2$

$4 \times 59 = 236$

$\times 2$

$8 \times 59 = 472$

$\times 2$

$16 \times 59 = 944$

$\times 2$

$32 \times 59 = 1888$

و نستنتج $59 \times 41 = 1888 + 472 + 59 = 2419$

بنفس الطريقة أحسب ما يلي :

1) 87×63

2) 48×125

3) 14×249

نشاط ثالث

تهتم صارة بجمع الطوابع البريدية و وزعت كل الطوابع التي جمعتها على حاويات شفافة .حيث أن كل حاوية تحتوي على نفس عدد الطوابع المحلية و نفس عدد الطوابع الأجنبية . و حصلت على التوزيع التالي 4 حاويات كل واحدة منها تحتوي على 18 طابعا محليا و 24 طابعا أجنبيا .

1) ما هو عدد الطوابع المحلية ؟ ما هو عدد الطوابع الأجنبية ؟
2) عين توزيعا آخر لهذه الطوابع البريدية .
3) ما هو أكبر عدد t من الحاويات التي يمكن استعماله . اذكر التوزيع المناسب لها .
4) عين كل التوزيعات الممكنة .
5) ماذا يمثل عدد التوزيعات بالنسبة إلى العدد t ؟

نشاط رابع

أكمل الجدول وفق المعطيات التالية

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

أفــقــيا

1) مربع تام مجموع أرقامه 25 .
2) عدد مضاعف لـــ 11.
3) عدد مضاعف لـــ87. باقي قسمة 88 على 7 .
4) عدد أولي . عدد أولي .
5) باقي قسمة 88 على 7 .
عدد يقبل القسمة على 30

عموديا

A) مربع تام جداء أرقامه 3024 .
B) عدد يقبل القسمة على 7 و مجموع أرقامه 19 .
C) عدد مضاعف لـــ 187. باقي قسمة 762 على 5.
D) عدد أولي . مكعب تام .
E) عدد يقبل القسمة على 10.

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1. تعريف

تعريف: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a .

نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b.

أمثلة: $48 = 8 \times 6$ و منه $6|48$

$48 = (-8)\times(-6)$ و منه $(-6)|48$

$(-65) = (-13)\times 5$ و منه $5|(-65)$

$(-65) = (-13)\times 5$ و منه $(-13)|(-65)$

ملاحظة: في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم .

2. خواص

خاصة1: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

البرهان: إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $b = ka$ و $c = k'b$ حيث k و k' عددان صحيحان و منه $c = (kk')a$ وبما أن kk' عدد صحيح فإن a يقسم c .

خاصة2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb

البرهان: إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح و منه $mb = mka = (mk)a$ وبما أن mk عددا صحيحا فإن a يقسم mb .

خاصة3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb

البرهان: إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح و منه $mb = mka = k(ma)$ وبما أن k عدد صحيح فإن ma يقسم mb .

تمرين محلول1: عين الأعداد الصحيحة n حيث :

11 يقسم $n+5$

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العدد الصحيح a يقسم عبارة $f(n)$ نستعمل تعريف قابلية القسمة .

الحل:

11 يقسم $n+5$ إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $n+5=11k$.

و منه $n=11k-5$.

الحلول هي الأعداد الصحيحة من الشكل $11k-5$ مع k عدد صحيح وهي قيم n المطلوبة .

تمرين محلول2: عين الأعداد الصحيحة n حيث :

$3n+5$ يقسم 8 .

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العبارة $f(n)$ تقسم العدد الصحيح a نساوي بين $f(n)$ و قواسم a.

الحل:

مجموعة قواسم 8 هي $\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$.

$3n+5$ يقسم 8 معناه $3n+5=-8$ أو $3n+5=-4$ أو $3n+5=-2$ أو $3n+5=-1$ أو $3n+5=1$

أو $3n+5=2$ أو $3n+5=4$ أو $3n+5=8$.

أي $3n=-13$ أو $3n=-9$ أو $3n=-7$ أو $3n=-6$ أو $3n=-4$ أو $3n=-3$ أو $3n=-1$

أو $3n=3$.

المعادلات $3n=-13$ ، $3n=-7$ ، $3n=-4$ و $3n=-1$ ليس لها حلول .

الحلول هي الأعداد الصحيحة -3 ، -2 ، -1 ، 1 .

تمرين محلول3: عين الأعداد الصحيحة n حيث :

$3n+8$ يقسم $n+6$

طريقة: لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث العبارة $f(n)$ تقسم العبارة $g(n)$ نرجع المسألة إلى أن عبارة $h(n)$ تقسم عددا صحيحا a.

الحل:

ليكن n عدد صحيح حيث $3n+8$ يقسم $n+6$.ومنه $3n+8$ يقسم $3n+18$. و بالتالي $3n+8$ يقسم

$(3n+18)-(3n+8)$ أي $3n+8$ يقسم 10. مجموعة قواسم 10هي $\{-10;-5;-2;-1;1;2;5;10\}$.

$3n+8$ يقسم 10 معناه $3n+8=-10$ أو $3n+8=-5$ أو $3n+8=-2$ أو $3n+8=-1$ أو $3n+8=1$

أو $3n+5=2$ أو $3n+8=5$ أو $3n+8=10$.

أي $3n=-18$ أو $3n=-13$ أو $3n=-10$ أو $3n=-9$ أو $3n=-7$ أو $3n=-3$ أو $3n=2$.

و منه $n=-6$ أو $n=-3$ أو $n=-1$

عكسيا هذه الأعداد حلولا (يكفي التعويض في $3n+8$ و $n+6$ و التأكد في كل مرة من أن $3n+8$ يقسم $n+6$).

الحلول هي الأعداد الصحيحة -6 ، -3 ، -1 .

خاصية4: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n، a يقسم $mb+nc$

البرهان: إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $b=ka$ و $c=k'a$ حيث k و k' عددان صحيحان و منه:

$$mb+nc=mka+nk'a$$

$$mb+nc=(mk+nk')a$$

بما أن $mk+nk'$ عدد صحيح فإن a يقسم $mb+nc$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

1. القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0\leq r<b$.

تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

البرهان: العدد a إما مضاعف لـ b و إما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي يوجد q عدد صحيح وحيد حيث $qb\leq a<(q+1)b$ و نستنتج من هذا أن $0\leq a-qb<b$.

نضع $r=a-qb$ و منه لدينا $a=bq+r$ مع $0\leq r<b$.

ملاحظة: يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b .
ونحصل على $a=bq+r$ و $0\leq r<|b|$.

2. القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد a .

مثال: مجموعة قواسم 8 هي $D_8=\{1;2;4;8\}$.

ملاحظات: مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .
$D_a\cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .
يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a\cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
و نرمز له بـ $PGCD(a;b)$.

ملاحظات: $PGCD(a;a)=a$ و $PGCD(1;a)=1$
$PGCD(0;a)=a$ (a غير معدوم) .

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

تمرين محلول1: يكن n عددا صحيحا.

يكن العددان الصحيحان $a=5n-2$ و $b=2n+3$.

أثبت أن كل قاسما مشتركا للعددين a و b يقسم العدد 19.

الحل:

يكن d قاسم مشترك للعددين a و b ، و منه d يقسم $5b-2a$ أي d يقسم $5\times(2n+3)-2\times(5n-2)$

أي d يقسم 19.

تمرين محلول2: عين الأعداد الصحيحة a و b حيث أن :

$4a^2-b^2=15$.

طريقة: لحل هذه المعادلة يمكن تحليل الطرف الأول إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى و استغلال قواسم الطرف الثاني.

الحل:

نلاحظ أنه إذا كان a و b حلين للمعادلة فإن $-a$ و $-b$ هما كذلك حلين للمعادلة إذن يمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط.

$4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$ و منه $(2a-b)(2a+b)=15$

و بالتالي $2a-b$ و $2a+b$ يقسمان 15.

$4a^2-b^2>0$ و بما أننا اعتبرنا $a>0$ و $b>0$ فإن $2a-b$ و $2a+b$ عددان موجبان و $2a+b>2a-b$.

مجموعة القواسم الموجبة للعدد 15 هي $\{1;3;5;15\}$.

$\begin{cases}2a+b=5\\2a-b=3\end{cases}$ أو $\begin{cases}2a+b=15\\2a-b=1\end{cases}$ و بالتالي $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=4\\b=7\end{cases}$.

إذا اعتبرنا أن الحلول هي الثنائيات $(a;b)$ و انطلاقا من الملاحظة الأولى نستنتج أن الثنائيات الآتية حلول للمعادلة:

$(4;7)$ ، $(-4;-7)$ ، $(4;-7)$ ، $(-4;7)$ ، $(2;1)$ ، $(-2;1)$ ، $(2;-1)$ ، $(-2;-1)$

تمرين محلول3: a عدد صحيح . باقي قسمة a على 10 هو 6 .

1. ما هو باقي قسمة العدد a على **5** ؟
2. ما هو باقي قسمة العدد a على **2** ؟

الحل:

$a=10k+6$ حيث k عدد صحيح .

.1
$$\begin{aligned}a&=10k+5+1\\&=5(2k+1)+1\end{aligned}$$

ومنه باقي قسمة a على 5 هو 1 .

.2 $a=2(5k+3)$ حيث k عدد صحيح .

ومنه باقي قسمة a على 2 هو 0 .

3. خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

خاصية1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b .
$PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$

البرهان: نضع $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(b;r) = d'$.

نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي . و منه $r = a - bq$.

d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $a - bq$ أي d يقسم r.

و منه d قاسم مشترك للعددين b و r .

d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $bq + r$ أي d' يقسم a .

و منه d' قاسم مشترك للعددين a و b .

إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r .

وبالتالي $d = d'$ أي $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

خوارزمية إقليدس

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و حيث $a > b$. بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ و $0 \leq r_1 < b$ حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان .

- إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a;b) = b$.
- إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان .
- إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = r_1$.
- إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1,r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 < r_2$ حيث q_3 و r_3 عددان طبيعيان .
- نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما . ونسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه:

$PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2) = \ldots = PGCD(r_n;0) = r_n$.

هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين تسمى **خوارزمية إقليدس**.

خاصية2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

مثال: تعيين $PGCD(1631, 932)$.

$1631 = 932 \times 1 + 699$

$932 = 699 \times 1 + 233$ و منه: $PGCD(1631;932) = 233$

$699 = 233 \times 3 + 0$

تمرين محلول 1: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في كل حالة من الحالات الآتية :

.1 $a=8700$ و $b=9150$.

.2 $a=691$ و $b=2007$.

.3 $a=1500$ و $b=250$.

طريقة: لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين يمكن استعمال خوارزمية إقليدس و وضع النتائج في جدول

الحل:

.1

الحاصل		1	19	3
المقسوم و القاسم	9150	8700	450	150
الباقي		450	150	0

إذن : $PGCD(8700;9150)=150$.

.2

الحاصل		2	1	9	2	7	1	3
المقسوم و القاسم	2007	691	625	66	31	4	3	1
الباقي		625	66	31	4	3	1	0

إذن : $PGCD(691;2007)=1$.

.3

الحاصل		6
المقسوم و القاسم	1500	250
الباقي		0

إذن : $PGCD(1500;250)=250$.

تمرين محلول 2: أوجد ثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حيث أن : $150x+108y=6$.

طريقة: لإيجاد الثنائية $(x;y)$ نستعمل خوارزمية إقليدس .

الحل

الحاصل		1	2	1	1	3
المقسوم و القاسم	150	108	42	24	18	6
الباقي		42	24	18	6	0

إذن : $PGCD(150;108)=6$.

$6=24-18$ و منه $6=24-(42-24)$ أي $6=24\times2-42$. و منه $6=(108-42\times2)\times2-42$

أي $6=108\times2-42\times5$ و منه $6=108\times2-(150-108)\times5$ أي $6=108\times7-150\times5$.

إذن $6=150\times(-5)+108\times7$.

خاصية3: a و b عددان طبيعيان غير معدومين ، k عدد طبيعي غير معدوم.

$$PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$$

البرهان: نضع $PGCD(a;b)=d$ و $PGCD(ka;kb)=d'$. d و d' عددان طبيعيان غير معدومين.

d يقسم a و منه kd يقسم ka . d يقسم b و منه kd يقسم kb و بالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه يمكن كتابة $d'=k'(kd)$ حيث k' عدد طبيعي .

كذلك d' يقسم ka و kb . و منه $k'kd$ يقسم ka و kb و بالتالي $k'd$ يقسم a و b وبالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و بالتالي $k'=1$. ومنه $d'=kd$.

إذن $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$.

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .

خاصية4: a و b عددان طبيعيان غير معدومين ، d قاسم مشترك للعددين a و b. نضع $a=da'$ و $b=db'$

يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

البرهان: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر.

- نضع $a=da'$ و $b=db'$

و منه
$$d=PGCD(a;b)=PGCD(da';db')$$
$$=d\times PGCD(a';b')$$

بما أن d غير معدوم فإن: $PGCD(a';b')=1$

- المسألة العكسية . نعتبر $PGCD(a';b')=1$.

$$PGCD(a;b)=d\times PGCD(a';b')=d$$

3. تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين.

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d=PGCD(|a|;|b|)$.

خاصية: a و b عددان صحيحان غير معدومين ، k عدد صحيح غير معدوم.

$$PGCD(ka;kb)=|k|PGCD(a;b)$$

ملاحظة: a و b عددان صحيحان غير معدومين.

إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a;b)=|b|$

تمرين محلول1: عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a+b=66 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a=6a'$ و $b=6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a+b=66$ تعني $6a'+6b'=66$ و منه $a'+b'=11$

$(a';b')\in\{(1;10),(2;9),(3;8),(4;7),(5;6),(6;5),(7;4),(8;3),(9;2),(10;1)\}$

و منه مجموعة الحلول هي :

$\{(6;60),(12;54),(18;48),(24;42),(30;36),(36;30),(42;24),(48;18),(54;12),(60;6)\}$

تمرين محلول2: عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a\times b=900 \\ PGCD(a;b)=5 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a=5a'$ و $b=5b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a\times b=900$ تعني $5a'\times 5b'=900$ و منه $a'\times b'=36$

$(a';b')\in\{(1;36),(4;9),(9;4),(36;1)\}$

و منه مجموعة الحلول هي : $\{(5;180),(20;45),(180;5),(45;20)\}$

تمرين محلول3: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين -1440 و -448

طريقة: لإيجاد $PGCD(-1440;-448)$ نبحث عن $PGCD(1440;448)$.

الحل

$PGCD(-1440;-448)=PGCD(1440;448)$

يمكن الملاحظة أن $1440=32\times 45$ و $448=32\times 14$

$PGCD(1440;448)=32\times PGCD(45;14)$

لنحسب $PGCD(45;14)$

2	1	4	3		الحاصل
1	2	3	14	45	المقسوم و القاسم
0	1	2	3		الباقي

إذن : $PGCD(45;14)=1$.

$PGCD(1440;448)=32\times PGCD(45;14)=32$

و منه $PGCD(-1440;-448)=32$

الثلاثيات الفيثاغورثية

اهتم فيثاغورث بالمثلثات القائمة التي أطوال أضلاعها أعداد طبيعية ، و من هنا الثلاثيات الفيثاغورثية هي الثلاثيات $(x;y;z)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حلول المعادلة $x^2+y^2=z^2$.

1. نعتبر المثلثات القائمة التي وترها يفوق الضلع الذي طوله y بـ 1.
   - أثبت أن $x^2=2y+1$.
   - أثبت أن $x=2n+1$ حيث n عدد طبيعي.
   - استنتج عائلة من الثلاثيات الفيثاغورثية.
   - استنتج الثلاثيات من هذه العائلة حيث $z\leq 50$.

2. نريد الآن تعيين الثلاثيات الفيثاغورثية كلها بدون وضع أي شرط . نضع d القاسم المشترك الأكبر للأعداد x ، y و z و نضع $x=da$ ، $y=db$ و $z=dc$. حيث a ، b و c أعداد طبيعية .
   - أثبت أن $x^2+y^2=z^2$ تعني $a^2+b^2=c^2$.
   - أثب أنه إذا كان أحد العددين a أو b زوجيا يكون الآخر فرديا.
   - نفرض $a=2k$ حيث k عدد طبيعي. أثبت أن $k^2=\left(\frac{c-b}{2}\right)\left(\frac{c+b}{2}\right)$.
   - نضع $\alpha=\frac{c+b}{2}$ و $\beta=\frac{c-b}{2}$. أثبت أن α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.
   - استنتج وجود عددين طبيعيين u و v حيث $u^2=\alpha$ و $v^2=\beta$.
   - أكتب a ، b و c بدلالة u و v . ثم x ، y و z بدلالة u ، v و d .
   - عكسيا أثبت أنه إذا وجدت أعداد طبيعية غير معدومة u ، v و d ($u>v$) حيث $x=2duv$ ، $y=d\left(u^2-v^2\right)$ و $z=d\left(u^2+v^2\right)$ فإن $(x;y;z)$ ثلاثية فيثاغورثية .
   - أعط الشكل العام الثلاثيات الفيثاغورثية.

تطبيق: اكتشف علماء الآثار في مصر بقرب من القاهرة عدد N من الركوم (جمع ركام) من الأحجار . كل ركام يحتوي على 348960150 حجرة مكعبة الشكل .و كانت هذه الأحجار تستعمل في بناء نصب شكله متوازي المستطيلات قائم ، ارتفاعه يساوي قطر قاعدته. نشير إلى أن العدد N أولي .
ما هي أطوال هذا النصب ؟

لمحة تاريخية:

فيثاغورث -المولود في إيطاليا (500-580ق.م) و اشتغل بالحساب والهندسة و هو القائل بان " هذا العالم كرة ناريه حيه"

التفكير بواسطة الحاسوب .

<u>مسألة :</u> n عدد طبيعي .

لتكن الأعداد $a=3n^2+12n+20$ ، $b=n+2$ و $c=3n+5$.

نريد تعيين باقي قسمة a على b و باقي قسمة a على c .

1. وضع تخمين بواسطة مجدول .

أ) أنجز ورقة المجدول الموالية بإتباع الخطوات التالية:

ب) في الخلية $B2$ أحجز 3*A2^2+12*A2+20 = ، في الخلية $C2$ أحجز $=A2+2$ ، في الخلية $D2$ أحجز $=MOD(B2;C2)$، في الخلية $E2$ أحجز $=3*A2+5$ ، في الخلية $F2$ أحجز $=MOD(B2;E2)$

حدد الخلايا $B2\ :\ F2$ ثم أنقل إلى تحت .

- ضع تخمينا حول باقي قسمة a على b و باقي قسمة a على c .

	A	B	C	D	E	F
1	n	a	b	باقي قسمة a على b	c	باقي قسمة a على c
2	0					
3	1					
4	2					
5	3					
6	4					
7	5					
8	6					
9	7					
10	8					
11	9					
12	10					
13	11					
14	12					
15	13					
16	14					
17	15					
18	16					
19	17					
20	10					
21	19					
22	20					
23						
24						
25						
26						

2. البرهان.

- أثبت أن b يقسم $3n^2+12n+12$.

استنتج أن b يقسم a إذا و فقط إذا كان b يقسم 8.

ما هو باقي قسمة a على b في كل حالة من الحالات الأخرى ؟

- تأكد أن $a=(3n+5)(n+2)+n+10$. ما هو باقي قسمة a على c ؟

موضوع محلول

التمرين :

1. أ) أنشر العبارة $(n+3)(3n^2-9n+16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.
استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3-11n+48$ قابلا للقسمة على $n+3$.
ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. بيّن أنه ، من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c ، تكون المساواة التالية صحيحة :
$PGCD(a;b) = PGCD(bc-a;b)$.

3. بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، تكون المساواة التالية صحيحة :
$PGCD(3n^3-11n; n+3) = PGCD(48; n+3)$

4. أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي 48 .
ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا .

حل مختصر

1. أ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :
$(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-9n^2+16n+9n^2-27n+48$
$(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-11n+48$.
بما أن $3n^2-9n+16$ هو مجموع أعداد صحيحة فإنه يكون عددا صحيحا وبالتالي $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$.
ب) مميز كثير الحدود $3x^2-9x+16$ هو $\Delta = -111$ ، ومعامل x^2 هو 3 (موجب)
إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $3x^2-9x+16>0$ ، ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-9n+16$ هو عدد صحيح موجب تماما أي هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. نفرض d قاسما للعددين a و b إذن d يقسم bc وبالتالي هو يقسم $bc-a$ ومنه d قاسم مشترك للعددين b و $bc-a$.
عكسيا ، نفرض d قاسما للعددين b و $bc-a$ إذن هو قاسم bc و $bc-a$ ومنه d يقسم الفرق $bc-(bc-a)$ أي d يقسم a وبالتالي d قاسم مشترك للعددين a و b .
خلاصة مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و $bc-a$ وبالأخص $pgcd(a;b) = pgcd(bc-a;b)$

3. نستعمل النتيجة السابقة بوضع : $a=48$ ، $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$
إذن $bc-a = 3n^3-11n$ ومنه $pgcd(48;n+3) = pgcd(3n^3-11n;n+3)$

4. أ) $48 = 2^4 \times 3$ ، مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 هي :
$\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$.
ب) $A = \dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ ؛ لدينا $n+3 \neq 0$ لكي يكون $A \in \mathbb{N}$ يجب أن يكون $3n^3-11n \geq 0$ و $n+3$ يقسم $3n^3-11n$.
$3n^3-11n \geq 0$ معناه $3n\left(n^2-\dfrac{11}{3}\right) \geq 0$ ويكافئ $n=0$ أو $n \geq \sqrt{\dfrac{11}{3}}$
أي $n=0$ أو $n \geq 2$.
ومن 3. $n+3$ يقسم $3n^3-11n$ معناه $pgcd(3n^3-11n;n+3) = n+3$
ينتج $pgcd(48;n+3) = n+3$ ويكافئ أنّ $n+3$ يقسم 48 ومعناه $n+3 \in \{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$
باعتبار $n=0$ أو $n \geq 2$ نجد $n \in \{0;3;5;9;13;21;45\}$

تعاليق

للبرهان على قابلية القسمة يجب أن يكون الحاصل $3n^2-9n+16$ عددا صحيحا .

يمكن استعمال الكتابة $3n^2-9n+16 = 3n(n-3)+16$ ونبيّن الحالات الأربعة $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ و $n \geq 3$.

لكي يكون لمجموعتين نفس العناصر يجب البرهان المباشر وكذلك البرهان العكسي .

إذا كانت مجموعتان متساويتين فإن لهما نفس العنصر الأكبر .

يمكن وضع $A = \dfrac{3n^3-11n+48-48}{n+3}$
أي $A = 3n^2-9n+16+\dfrac{-48}{n+3}$
ولكن النتيجة تعطي $A \in \mathbb{Z}$.
نذكر بالخاصية " b يقسم a إذا وفقط إذا كان $pgcd(a;b)=b$ " .

موضوع موجّه

تنبيه

في اختبار مادّة الرياضيات يجب مراعاة الوقت الذي نضعه لكل تمرين حيث يكون متناسبا مع النقطة الموضوعة له . وفي التمرين المتعلق بالحساب ، يكون أحيانا سؤال جديد الطرح ولكن تسبقه سلسلة من الأسئلة متدرجة حتى الوصول إلى الهدف ولهذا لا ينبغي التخوف والتسرع .

التمرين.

1. x عدد طبيعي . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k ،
$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})=x^k-1$$

2. أ. d و n عددان طبيعيان غير معدومين حيث d يقسم n .
برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ، العدد a^d-1 يقسم العدد a^n-1 .

ب. استنتج أن العدد $2^{2010}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9 .

3. أ. عين $PGCD(63;60)$.

ب. بين أن : $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$.

جـ. برهن أن : $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$.

د. استنتج القيمة لـ : $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$.

توجيهات

1. للحصول على النتيجة يكفي نشر العبارة الموجودة على يسار المساواة .

2. أ. ضع $x=a^d$ و $n=kd$ واستنتج من **1**..

ب. لاحظ أن $2010=3\times670=6\times335$ ونطبق النتيجة السابقة من أجل $a=2^3$ ثم $a=2^6$ وأخيرا استعمل خاصية التعدي في القسمة .

3. أ. استعمل خوارزمية أقليدس أو لاحظ $63=3\times21$ و $60=3\times20$ مع عددين متواليين أوليين فيما بينهما .

ب. أنشر العبارة .

جـ. بين باستعمال المساواة السابقة أن $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)$ يقسم a^3-1 ثم العكس .

د. الاستنتاج مباشر بوضع $a=2$.

تمارين تطبيقية

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1 عين مجموعة القواسم لكل من الأعداد الصحيحة التالية : 20 , 24 و 75 .

2 عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية حيث يكون $ab=39$.

3 عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $x^2-y^2=15$.

4 أ ــ أنشر العبارة $(x-2)(y-3)$.

ب ــ عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $xy=3x+2y$.

5 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية :

$x^2=4y^2+3$.

6 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية :

$5xy-y^2=49$.

7 ما هو عدد المضاعفات للعدد 53 المحصورة بين -1027 و 1112

8 1) عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a بحيث 7 يكون قاسما للعدد a و $a \le 50$.

2) ما هي الكسور المساوية لــ $\frac{33}{21}$, مقام لكل منها يكون عددا طبيعيا أصغر تماما من 50.

9 عين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها 13 قاسما للعدد $n+4$ و $|n| \le 22$.

10 عيّن كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $7+5n$ قاسما لِـ 12 .

11 عيّن الأعداد الطبيعية غير المعدومة n التي من أجلها يكون العدد $n+6$ يقبل القسم على n .

12 1) عيّن الأعداد الصحيحة n حيث يكون $6+5n$ يقسم 34 .

2) عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $6+5n$ قاسما للعدد $8+n$.

13 n عدد صحيح . نضع $a=3n+7$ و $b=n+1$

أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لِـ : a و b فإن d يكون قاسما للعدد 4 .

14 n عدد صحيح .

نضع $a=3n+7$ و $b=7n+2$

أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لِـ : a و b فإن d يكون قاسما للعدد 43 .

15 n عدد طبيعي غير معدوما ويختلف عن العدد 1 .

عين بدلالة n بعض القواسم للعدد n^3-n .

16 ليكن a و b عددين صحيحين .

برهن أنه إذا كان 2 يقسم a^2+b^2 فإن 2 يقسم $(a+b)^2$.

17 ليكن a و b عددين صحيحين غير معدومين .

أ) أنشر العبارة $(a+b)^3$

ب) برهن أنه إذا كان 3 يقسم a^3+b^3 فإن 3 يقسم $(a+b)^3$.

2 - القسمة الأقليدية

18 عين باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b في كل حالة من الحالات التالية :

أ - $a=118$ و $b=5$.

ب - $a=152$ و $b=7$.

جـ - $a=-118$ و $b=5$.

د - $a=-152$ و $b=7$.

19 عين الأعداد الطبيعية n الأصغر من 100 والذي يكون باقي قسمتها على 41 هو 5 .

تمارين

20 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث حاصل القسمة الأقليدية للعدد a على b هو 17 وباقيها هو 3 ، و $a-27=23b$. عيّن a و b .

21 n عدد طبيعي ، بقسمته على 7 أو على 3 نجد نفس الباقي .

عين القيم الممكنة للعدد الطبيعي n.

22 عين كل الأعداد الطبيعية الذي يكون من أجلها الباقي والحاصل لقسمتها على 7، متساويين

23 عين كل الأعداد الطبيعية الذي يكون من أجلها الحاصل هو ضعف الباقي عند قسمتها على 13 .

24 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث : $a+b=416$ وباقي القسمة الأقليدية لـــ a على b هو 61 . عين a و b .

25 باستعمال خوارزمية أقليدس عين $PGCD(a,b)$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ - $a=315$ و $b=117$.

ب - $a=1260$ و $b=528$.

جـ - $a=1380$ و $b=972$.

26 n عدد طبيعي غير معدوم .

ما هو القاسم المشترك الأكبر للعددين n و $3n$ ؟

ما هو القاسم المشترك الأكبر للعددين n و n^2 ؟

27 برهن أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة قواسم العدد $\mathrm{pgcd}(a,b)$.

28 a و b عددان طبيعيان غير معدومين

علمًا أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفس مجموعة القواسم لـــ $PGCD(a,b)$.

عين كل القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 .

29 ـــ عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 448 و 308 .

ـــ استنتج كل القواسم المشتركة للعددين 448 و 308 .

30 n عدد طبيعي حيث الباقيين للقسمة الأقليدية لكل من العددين 4294 و 3521 على n هما على الترتيب 10 و 11 . عين كل القيم الممكنة للعدد n.

31 n عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام .

عين العدد n حيث 37 و 53 هما على الترتيب ، الباقيان للقسمة الأقليدية للعددين 21685 و 33509 على n .

32 1) عين $PGCD(182,126)$

2) باستعمال خوارزمية أقليدس ، جد عددين صحيحين α و β يحققان : $182\alpha+126\beta=14$

3 ـ خواص القاسم المشترك الأكبر

33 أحسب باقي قسمة العدد 1399 على 82 ثمّ استنتج $PGCD(1399,82)$.

34 عين القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b في كل حالة من الحالات التالية :

أ - $a=-350$ و $b=-252$.

ب - $a=126$ و $b=-735$.

جـ - $a=-138$ و $b=575$.

35 عين $PGCD(54,82)$ ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين $PGCD(5400,8200)$.

من التمرين 36 إلى التمرين 41 ، عيّن كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين

36 $\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a,b)=9 \end{cases}$.

37 $\begin{cases} a+b=72 \\ PGCD(a,b)=9 \end{cases}$.

38 $\begin{cases} a+b=420 \\ PGCD(a,b)=84 \end{cases}$.

39 $\begin{cases} ab = 360 \\ PGCD(a,b) = 6 \end{cases}$.

40 $\begin{cases} ab = 2700 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$.

41 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$.

42 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ،

عيّن $PGCD(a,b)$.

ما يمكن قوله عن العددين a و b ؟

أ - $a = 55$ و $b = 36$.

ب - $a = 14$ و $b = 165$.

جـ - $a = 1155$ و $b = 872$.

43 1) عين $PGCD(140,143)$

2) استنتج $PGCD(a,b)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ — $\begin{cases} a = 140 \times 34 \\ b = 143 \times 34 \end{cases}$.

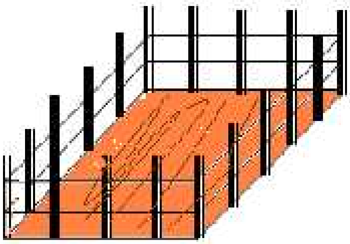
ب — $\begin{cases} a = 143 \times 82 \\ b = 140 \times 82 \end{cases}$.

44 لماذا لا يوجد عددان طبيعيان مجموعهما 500 وقاسمهما المشترك الأكبر هو 7 ؟

تمارين للتعمّق

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

45 بعدا قطعة أرضية مستطيلة الشكل هما $156\,m$ و $90\,m$.



يراد إحاطتها بسياج قائم بأوتاد (أعمدة) حديدية مغروسة في الأرض بنفس المسافة مثنى ، مثنى ؛ وفي كل زاوية القطعة يغرس وتد.

علما أن المسافة بين كل وتدين متتاليين ، هي عدد طبيعي مقدر بالمتر ، أقل من $5\,m$ وأكبر من $2\,m$.

ــ أحسب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط القطعة الأرضية .

46 نسمي قاسما تاما لعدد طبيعي ، كل قاسما له موجبا ويختلف عنه .

القول عن العددين الطبيعيين a و b أنهما وديان إذا كان a هو مجموع القواسم التامة للعدد b و b هو مجموع القواسم التامة للعدد a.

برهن أن العددين 220 و 284 وديان .

47 ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3 .

برهن أن : $n+5$ مضاعف لــ $n-2$ إذا وفقط إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$.

48 1) أحسب مجموع قواسم العدد 8 ثم مجموع قواسم 81.

2) ما هو عدد قواسم العدد 81×8 ؟

49 1) كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\dfrac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا .

2) عين الأعداد الطبيعية a حيث من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 , وعدد قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد a .

50 عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $xy - 4y - 12 = 0$.

51 في المستوي المنسوب إلى معلم ، نعتبر C_f منحنى الدالة f المعرفة على المجموعة $D =]-3;1[\cup]1;3[$

بـ : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 3}{x - 1}$. f

1) عين العدد الحقيقي a حتى يكون من أجل كل x من D:

$$f(x)=2x-1+\frac{a}{x-1}$$

2) عين نقط المنحني C_f التي إحداثيتها أعداد صحيحة .

52 n عدد طبيعي . نضع $a=n(n^2+5)$.

1) برهن أن a عدد زوجي .

2) برهن أن a مضاعف للعدد 3 .

53 a عدد طبيعي .

برهن أن العدد $a(a^2-1)$ مضاعف للعدد 6 .

54 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، رقم آحاد العدد n^5-n هو 0 .

استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p العددين n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد .

55 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون n^7-n يقبل القسمة على 14 .

56 1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$a=n^2+5n+4$ و $b=n^2+3n+2$

بين أن العدد $n+1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$.

57 n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$ و n^2+n+3 .

أ- بين أن a يقسم n^2-2n+1 .

ب- استنتج أن a يقسم $3n+2$.

جـ- بين إذن أن a يقسم 5 .

د- ما هي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a ؟

58 عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(x;y)$ التي يكون من أجلها العدد xy قاسما للعدد $x+y$.

59 n عدد طبيعي فردي . S مجموع أعداد طبيعية متتابعة وعددها n . بين أن العدد S يقبل القسمة على n .

من التمرين 60 إلى 65 استعمل البرهان بالتراجع .

60 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، n^3+11n يقبل القسمة على 6 .

61 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7^{2n}+3$ يقبل القسمة على 4 .

62 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $3^{6n-4}-2$ يقبل القسمة على 7 .

63 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n}-2^n$ يقبل القسمة على 7 .

64 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 4^n-1-3n يقبل القسمة على 9 .

65 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7\cdot 3^{5n}+4$ يقبل القسمة على 11 .

2 ـ القسمة الأقليدية

66 ما هو باقي القسمة الأقليدية للعدد 71 على 72 ؟

67 كتاب مكتوب عليه 4350 سطرا .

كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة ناقصة .

ما هو عدد الأسطر الموجودة على الصفحة الأخيرة ؟

68 علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100}=13k+35$. عين باقي قسمة 100^{100} على 13 .

69 الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين m و n على 17 هما على التوالي 8 و 12.

عين بواقي القسمة الأقليدية لكل من الأعداد $n+m$ ، $n\times m$ و m^2 على 17 .

70 عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة n الذي يكون باقي قسمتها على 43 مساويا لمربع الحاصل .

71 أ ـــ حول $241312s$ (ثانية) إلى أيام ، ساعات ، دقائق وثوان .

ب ــ أعط خوارزمية لتحويل عدد n من الثانية إلى أيام ، ساعات ، دقائق وثواني .

72 حاصل قسمة العدد 1517 على العدد الطبيعي b هو 75 . عين b وباقي هذه القسمة .

73 ليكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة.

بيّن أنه ، إذا كان q حاصل القسمة الأقليدية للعدد a على b ، و q' هو حاصل قسمة q على c ، فإن q' هو كذلك حاصل قسمة a على الجداء bc .

74 a عدد صحيح .

حاصل القسم الأقليدية للعدد $a-1$ على العدد الطبيعي غير المعدوم b هو q .

ما هو حاصل القسم الأقليدية للعدد ab^n-1 على b^{n+1}؟

75 أ) أنجز القسمة الأقليدية للعدد 76 على 17 .

ب) ليكن n عدد طبيعي ؛ ما هما حاصل وباقي لقسمة العدد $n+76$ على 17 ؟

ج) الحالة العامة : القسم الأقليدية لعدد a على b تعطي الحاصل q والباقي r .

عين الحاصل والباقي للقسمة الأقليدية للعدد $n+a$ على b.

76 a و b عددان طبيعيان و r باقي القسمة الأقليدية لعدد a على b .

أ) عيّن شرطا لازما وكافيا على a و b حيث يكون حاصل قسمة a على b مساويا للعدد r .

من أجل $a=24$ ، ما هي الأعداد الطبيعية التي تحق الشرط السابق ؟

77 أ) بيّن أنه ، إذا كان a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث a^2+b^2 عدد فردي فإن a و b مختلفين في الشفعية (أحدهما زوجي والآخر فردي).

ب) بيّن أنه ، إذا كان عددا فرديا n هو مجموع مربعين فإنه يكتب على الشكل $n=4k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$.

ج) استنتج عدد من الشكل $4k-1$ بحيث لا يكون مجموع لمربعين .

78 من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$u_n = 1+5+5^2+\ldots+5^n$.

أ- برر أن u_n عدد طبيعي .

ب- أحسب u_n بدلالة n .

جـ- استنتج باقي قسمة العدد 5^{n+1} على 4 ، من أجل n عدد طبيعي .

79 برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n, العدد $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7 .

استنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد a على 7 في كل حالة من الحالات التالية .

أ- $a=2^{3n}$. ب- $a=2^{3n+1}$. جـ- $a=2^{3n+2}$.

80 ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين .

1) برهن أن القواسم المشتركة للعددين a و (a^2+b) هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

ما القول عن $PGCD(a;a^2+b)$ و $PGCD(a;b)$.

2) برهن أن: $PGCD(a;b)=PGCD(a+b;2a+3b)$.

81 n عدد طبيعي .

نضع : $a=11n+3$ و $b=13n-1$.

1) بين أن $13a-11b=50$.

2) عين كل القيم الممكنة $PGCD(a;b)$.

3) عين ثنائية $(a;b)$ بحيث يكون $PGCD(a;b)=50$.

82 عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(a;b)$ التي تحقق الجملة التالية :

$$\begin{cases} 2a^2+b^2=20992 \\ PGCD(a;b)=16 \end{cases}$$

83 a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

نضع : $PGCD(a;b)=d$.

عين كل الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق $ab+5d^2=35d$.

84 a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

نضع : $x=7a-5b$ و $y=4a-3b$.

1) برهن أن $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(a;b)$.

2) عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(\alpha;\beta)$ حيث $(7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300$ و $PGCD(\alpha;\beta)=5$.

من التمرين 85 إلى التمرين 88 ، برهن من أجل كل عدد طبيعي n ، أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما .

85 $a=n+3$ و $b=2n+7$.

86 $a=3n+4$ و $b=8n+11$.

87 $a=9n+7$ و $b=5n+4$.

88 $a=7n^2+2$ و $b=4n^2+1$.

89 n عدد طبيعي غير معدوم .

1) عين القيم المكنة للعدد $PGCD(2n-1;9n+4)$.

2) برهن أنه إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $n+8$.

3) استنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $PGCD(2n-1;9n+4)=17$.

90 n عدد طبيعي .

نضع : $a=5n^2+14n+14$ ، $b=n+2$ و $c=5n+3$.

1) برهن أن b قاسم للعدد $5n^2+14n+8$.

2) استنتج أن b يقسم a معناه b يقسم 6 .

3) عين حسب قيم العدد n ، باقي قسمة العدد a على b؛ ثم باقي قسمة العدد a على c .

91 1) n عدد صحيح يختلف عن 1 .

نضع : $a=3n+5$ و $b=n-1$.

أ ــ تحقق أن $a=3b+8$.

ب ــ جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا .

2) نفرض أن n عدد طبيعي .

أ ــ برهن أن $PGCD(a;b)$ هو قاسم للعدد 8 .

ب - ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$.

92 n عدد طبيعي .

1) نضع : $\alpha=n^2+n$ و $\beta=n+2$.

أ ــ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(n;\beta)$.

ب ــ استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$.

2) نعتبر العددين a و b حيث :

$a=3n^3+5n^2+2n$ و $b=3n^2+8n+4$

أ ــ برهن أن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

ب ــ استنتج ، حسب قيم n ، أن $PGCD(a;b)$ هو $(3n+2)$ أو $2(3n+2)$.

جـ- عين α و β علما أن $PGCD(a;b)=41$.

93 n عدد طبيعي .

نضع : $a=9n+1$ و $b=9n-1$

1) جد علاقة بين a و b مستقلة عن العدد n .

عين $PGCD(a;b)$ في حالة n عدد زوجي ثم في حالة n عدد فردي .

3) استنتج باقي قسمة العدد $81n^2$ على 4 في حالة n عدد فردي .

94 n عدد طبيعي .

نضع : $a=7n^2+4$ و $b=n^2+1$.

1) برهن أن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم لـ 3 .

2) أ) اشرح لماذا يكون $n^2=3k+1$ في حالة $p\gcd(a,b)=3$ ؟

ب) بيّن ، باستعمال فصل الحالات أنّ هذا غير ممكن .

3) استنتج $p\gcd(a,b)$.

95 بكالوريا

نعتبر عددين طبيعيين غير معدومين x و y أوليين فيما بينهما . نضع $S=x+y$ و $P=xy$.

1) أ - برهن أن x و S أوليان فيما بينهما . وكذلك y و S أوليان فيما بينهما .

ب - باستعمال البرهان بالخلف ، برهن أنّ S و P أوليان فيما بينهما .

جـ - برهن أنّ العددين S و P من شفعيتين مختلفتين (أحدهما فردي والآخر زوجي).

2) عين القواسم الموجبة للعدد 84 .

3) عين الأعداد الأولية فيما بينها x و y حث $SP=84$

4) عين عددين طبيعيين a و b يحققان الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} a+b=84 \\ ab=d^3 \end{cases}$$ مع $d=p\gcd(a,b)$.

مسائل

96 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $s_n=1^3+2^3+\dots+n^3$.

في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية :

$PGCD(a;b)=1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2)=1$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $s_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) تحقق من أن : $PGCD(k;k+1)=1$.

برهن أن $PGCD(s_{2k};s_{2k+1})=(2k+1)^2$ من أجل k عدد طبيعي غير معدوم .

3) عين $PGCD(2k+1;2k+3)$ من أجل k عدد طبيعي .

4) أحسب $PGCD(s_{2k+1};s_{2k+2})$ من أجل $k\in\mathbb{N}$.

استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n ، $PGCD(s_n;s_{n+1})$

97 بكالوريا

a عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي (E) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكتب على الشكل $9+a^2$. مثلا : $10=9+1$ ، $13=9+4$ ...

1) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية : $9+a^2=2^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 4 .

أ - برهن أنه إذا قبلت المعادلة حلا a فإن a يكون فرديا.

ب - باستعمال القسمة على 4 برهن أن المعادلة لا تقبل حلا.

2) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية : $9+a^2=3^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 .

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $3^{2n}-1$ يقبل القسمة على 4 .

ب - استنتج الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين 3^{2n} و 3^{2n+1} على 4 .

جـ - برهن أنه إذا قبلت المعادلة حلا a فإن a يكون زوجيا ، واستنتج أن n يكون كذلك زوجيا .

د - حلل العدد $3^{2p}-a^2$ ثم استنتج أن المعادلة لا تقبل حلا.

3) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية : $9+a^2=5^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

أ ـ باستعمال القسمة على 3 برهن أنه إذا كان n فرديا فإن المعادلة لا تقبل حلا.

ب ـ في حالة n زوجي ، برهن أنه يوجد عدد طبيعي وحيد a الذي يكون من أجله يكون العدد $9+a^2$ من قوى العدد 5 .

98 1) a عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1 . p عدد طبيعي .

أ ـ أثبت أنه إذا كان d قاسما للعددين a^p-1 و $a^{p+1}-1$ فإن d يكون قاسما للعدد $a^p(a-1)$.

ب ـ أعط القيم الممكنة لـ $PGCD(4^{p+1}-1,4^p-1)$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=0$ و $u_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$.

أ - تحقق من أن العددين u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما .

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}=4u_n+1$$

جـ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n هو عدد طبيعي .

د - عين $PGCD(u_{n+1},u_n)$. (يمكن استعمال خوارزمية أقليدس) .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{3}$.

أ - برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية . أحسب u_n بدلالة n .

جـ - استنتج $PGCD(4^{p+1}-1,4^p-1)$ من أجل p عدد طبيعي .

99 نقول عن العدد الطبيعي p أنه أولي إذا قبل قاسمين بالضبط هما 1 و p .

نعتبر ، في المجموعة $\mathbb{N}^*$، المعادلة E ذات المجهولين x و y التالية : $x^2+y^2=p^2$ ... E حيث p أولي .

1) نضع $p=2$ بين أن المعادلة E لا تقبل حلول .

2) نفرض أن $p\neq 2$ و $(x;y)$ حل للمعادلة E .

أ - برهن أن العددين x و y أحدهما زوجي والآخر فردي.

ب - برهن أن p لا يقسم x ولا y .

جـ - برهن أن $PGCD(x^2,y^2)$ يقسم p^2 .

د - استنتج أن العددين x و y أوليان فيما بينهما .

3) نفرض أن p هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي $p=u^2+v^2$ مع u و v عددين طبيعيين غير معدومين

أ ـ تحقق أن $(|u^2-v^2|;2uv)$ هي حل للمعادلة E .

ب ـ أعط حلا للمعادلة E في حالة $p=5$ ثم في حالة $p=13$.

4) في كل حالة من الحالتين التاليتين بين أن p ليس مجموع مربعين وأن المعادلة E لا تقبل حلول .

أ ـ $p=3$. ب ـ $p=7$.

100 نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) المعرفتين بـ :

$x_0=1$ ؛ $y_0=8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$x_{n+1}=\frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1$$

$$y_{n+1}=\frac{20}{3}x_n+\frac{8}{3}y_n+5$$.

وفي المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر المستقيم (Δ) ذي المعادلة $5x-y+3=0$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، النقطة $M_n(x_n;y_n)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $x_{n+1}=4x_n+2$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $x_n\in\mathbb{N}$.

ـ استنتج أن $y_n\in\mathbb{N}$.

3) نضع $PGCD(x_n;y_n)=d$.

ما هي القيم الممكنة للعدد الطبيعي d .

4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$x_n=\frac{5}{3}\times 4^n-\frac{2}{3}$$.

ـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $5\times 4^n-2$ يقبل القسمة على 6 .

اختيار من متعدد

101 في كل سؤال اقتراح واحد صحيح ما هو؟

1) باقي قسمة العدد n على 7 هو r حيث :

أ- $r=7$. ب- $r=5$. جـ- $r=11$.

2) من بين الكتابات التالية ، ما هي التي تعرف بقسمة أقليدية ؟

أ. $63=9\times6+9$.

ب. $75=(-8)(-9)+3$.

جـ. $46=13\times3+7$.

3) من بين الكتابات التالية ، ما هي التي تعرف بقسمتين أقليديتين في نفس الوقت ؟

أ. $68=8\times7+12$.

ب. $70=11\times6+4$.

جـ. $33=13\times3-6$.

102 a و b عددان طبيعيان . من كل سؤال عين جوابا صحيحا مبرّرا اختيارك .

1) نفرض $a-12b=15$ و $3\leq b\leq15$.

أ- باقي قسمة العدد a على 12 هو 15

ب- $PGCD(a;12)$ هو 1 أو 3 .

جـ- $b-1$ قاسم للعدد a .

2) نضع العدد $a=2835$.

أ. العدد a يقبل القسمة على 11 .

ب- مجموعة القواسم المربعة التامة للعدد a هي: $\{1;9;81\}$.

جـ- العدد a هو جداء عددين أوليين في ما بينهما .

3) نضع $a=4487$ ، $b=14175$ و $F=\frac{a}{b}$.

أ- F كسر غير قابل للاختزال .

ب- يوجد كسر مساويا لـ F مقامه من قوى العدد 15.

جـ- مقلوب F عدد طبيعي .

103 n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

أ. $PGCD(n;n+1)=n$.

ب. $PGCD(n;n+1)=2$.

جـ. $PGCD(n;n+1)=1$.

أصحيح أم خطأ ؟

104 أذكر الجملة الصحة والجملة الخاطئة من بين الجمل التالية : a و b عددان طبيعيان .

1) $PGCD(18a,24a)=a$ مع $a\in\mathbb{N}^*$.

2) $PGCD(a,b)=PGCD(a,a-b)$.

3) $PGCD(a,b)=PGCD(a,a+b)$.

4) $PGCD(a,b)=PGCD(a,ab)$.

5) $PGCD(a,b)=PGCD(b,a)$ معناه $a=b$.

6) a و b غير معدومين . إذا كان $PGCD(a;b)=d$ فإن $d=\frac{a}{b}$.

105 ميز بين الأصح والخاطئ في كل اقتراح من الاقتراحات التالية :

1) جداء عددين من نفس الشفعية هو مضاعف للعدد 2 .

2) $PGCD(2008,1000)=PGCD(2008,8)$.

3) إذا كان 2 هو باقي قسمة عدد طبيعي n على 5 فإن 4 يكون باقي قسمة n^2 على 5 .

4) العدد $7^{2008}-1$ يقبل القسمة على 6 .

5) المعادلة $16x-24y=50$ تقبل على الأقل حلا $(x_0;y_0)$ في $\mathbb{Z}^2$.

6) الجملة $\begin{cases}x+y=33\\PGCD(x;y)=45\end{cases}$ تقبل على الأقل حلا $(x_0;y_0)$ في $\mathbb{Z}^2$.

106 a و b عددان طبيعيان غير معدومين . ميّز الجملة الصحيحة من الجملة الخاطئة .

1) إذا كان a يقسم b و b يقسم a فإن $a=b$.

2) إذا كان a و b يقسمان العدد غير المعدوم C فإن 5 هو نفس الباقي لقسمة $C+5$ على كل من a و b .

3) إذا كان a يقسم b فإن $PGCD(a;b)=a$.

4) إذا كان r هو باقي a على b فإن r^2 يكون باقي قسمة a^2 على b .

5) باقي قسمة مربع عدد طبيعي فردي على 4 هو 1 .

6) يوجد عدد طبيعي a حيث يكون $4a+3$ مربعا تاما .

الموافقات في Z 03

الكفاءات المستهدفة

- معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.
- نشر عدد طبيعي وفق أساس.
- الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β.

ابن البناء المراكشي:أحمد بن محمد بن عثمان الأزدي المعروف **بأبي العباس بن البناء المراكشي** (721-654هـ /1321-1256 م) هو عالم مراكشي متفن في علوم جمة، برز بصفة خاصة في الرياضيات، والفلك، والتنجيم، والعلوم الخفية، وكذلك في الطب. قضى أغلب فترات حياته في مسقط رأسه في مراكش، ولذا نسب إليها، وبها درس النحو والحديث والفقه، ثم ذهب إلى فاس و درس الطب والفلك والرياضيات. وكان من أساتذته ابن مخلوف السجلماسي الفلكي، وابن حجلة الرياضي. وقد حظي ابن البناء بتقدير ملوك الدولة المرينية في المغرب الذين استقدموه إلى فاس مراراً. وتوفي في مدينة مراكش عام 721هـ /1321م.

إسهاماته العلمية: من إسهامات ابن البناء في الحساب أنه أوضح النظريات الصعبة والقواعد المستعصية، وقام ببحوث مستفيضة عن الكسور، ووضع قواعد لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها، وقاعدة الخطأين لحل معادلات الدرجة الأولى، والأعمال الحسابية. وأدخل بعض التعديل على الطريقة المعروفة "بطريقة الخطأ الواحد" ووضع ذلك على شكل قانون.وجاء في دائرة المعارف الإسلامية أن ابن البناء قد تفوق على من سبقه من علماء الرياضة من العرب في الشرق وخاصة في حساب الكسور، كما عُدّ من أهم الذين استعملوا الأرقام الهندية في صورتها المستعملة عند المغاربة.

مؤلفاته: ألف ابن البناء أكثر من سبعين كتابا في الحساب، والهندسة، والجبر، والفلك، والتنجيم، ضاع أغلبها ولم يبق إلا القليل منها، وأشهرها : "كتاب الجبر والمقابلة" ؛"كتاب الفصول في الفرائض" ؛ "رسالة في المساحات" ؛ "كتاب الأسطرلاب واستعماله" .

نشاط أول

في هذا النشاط نريد اكتشاف بعض خواص القسمة الإقليدية على العدد 5.
أنجز ورقة المجدول الموالية بإتباع الخطوات التالية:

1) في العمود A و ابتداء من الخلية $A2$ أحجز الأعداد من 1 إلى 50 .
في الخلية $B2$ أحجز $=MOD(A2;5)$ (هذا يعني باقي قسمة العدد الموجود في الخلية $A2$ على 5)
حدد الخلية $B2$ ثم اسحب إلى تحت . ماذا نلاحظ ؟

2) في الخليتين $E2$ و $F2$ أحجز عددين طبيعيين ثم أحسب باستعمال المجدول في الخلايا $G2$، $H2$ ، $I2$ ، $J2$ ، $K2$ و $L2$ الأعداد $n+n'$ ، $n\times n'$ ، n^2، n^3 ، n'^2 ، n'^3 .

3) أحسب في الخلايا من $E3$ إلى $L3$ بواقي قسمة الأعداد المحصل عليها على 5 .

	A	B
1	n	الباقي
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	4	4
6	5	0
7	6	1
8	7	
9	8	
10	9	
11		
12		

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1					n	n'	n+n'	n*n'	n^2	n'^2	n^3	n'^3
2					632	174	806					
3				الباقي	2	4						
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												

4) أعد نفس العملية بأعداد أخرى.

5) ماذا يمكن تخمينه بالنسبة لقواعد حساب البواقي ؟

نشاط ثان

يقوم طفل بقفزات وفق محور حيث في كل قفزة يقطع 5 وحدات (الوحدة 10 cm) .
نسمي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية الأعداد الطبيعية المكونة من الأعداد التي يتوقف فيها الطفل بعد n قفزة علما أنه ينطلق من الوحدة الثانية .

1) عين u_n بدلالة n .

2) ما هو الفرق بين حدين متتابعين من المتتالية (u_n) ؟

3) ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

4) الفرق بين حدين من المتتالية (u_n) هو مضاعف أي عدد طبيعي ؟

5) ما هو باقي قسمة حد كيفي من المتتالية (u_n) على العدد 5 ؟

نشاط ثالث

عالميا ، يستعمل نظام التعداد العشري ، حيث يتركب العدد من الأرقام العشر 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5، 6 ، 7 ، 8 و 9 وهذا يسمى النظام ذي الأساس 10 .

في الحضارات القديمة استعمل مختلف نظم التعداد ، استعمل البابليون الأساس 60 ؛ الرومانيون الأساس 12 ؛ أمركا الوسطى الأساس 20 إلى آخره ... الآن يستعمل في الحاسوب النظام الثنائي (ذي الأساس 2) .

لكتابة عدد في النظام ذي الأساس 6 يجب استعمال 6 أرقام وهي من 0 إلى 5 .

1. عيّن الأعداد a ، b ، c و d بحيث يكون $3959 = a\times10^3 + b\times10^2 + c\times10 + d$.

2. أحسب العدد N حيث $N = 3\times6^4 + 0\times6^3 + 1\times6^2 + 5\times6^1 + 5\times6^0$.

الأرقام 3 ، 0 ، 1 ، 5 ، 5 تشكل عددا وهو الكتابة للعدد N في النظام ذي الأساس 6 ونرمز بـ :

$N = \overline{55103}$.

3. أنجز القسمات التالية :

شكل العدد المكون من البواقي المحصل عليها . ماذا تلاحظ ؟

نشاط رابع

1. أذكر البواقي الممكنة للقسمة الأقليدية على 5 .

2. عيّن باقي القسمة الأقليدية على 5 لكل من الأعداد الطبيعية التالية :

2^1 ، 2^2 ، 2^3 و 2^4 .

3. استعمل مجدول إكسال للحصول على بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل $n \in \{0,1,2,...,20\}$.

ملاحظة : استعمل الوظيفة " =MOD(a ; b) ' وتعني باقي قسمة العدد a على b .

4. أعط تخمينا لبواقي قسمة 2^n على 5 من أجل n عدد طبيعي .

5. باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{4p} - 1$ يقبل القسمة على 5 .

6. استنتج بواقي القسمة الأقليدية على 5 لكل من الأعداد التالية :

2^{4p} ، 2^{4p+1} ، 2^{4p+2} ، 2^{4p+3} مع p عدد طبيعي .

↵ الموافقات في $\mathbb{Z}$

1. تعريف .

تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n. و نرمز $a\equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n .

أمثلة: $27\equiv 92[5]$ ، $12\equiv 34[11]$ ، $24\equiv 3[7]$ ، $-20\equiv 1[7]$ ، $-59\equiv -3[8]$.

ملاحظات: من أجل كل عدد صحيح x ، $x\equiv 0[1]$.

ترميز آخر $a\equiv b(n)$.

2. مبرهنة .

مبرهنة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n ، إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـــ n .

البرهان: نفرض أن a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n .

و منه نضع $a=nq+r$ و $b=nq'+r$ حيث q و q' عددين صحيحين و $0\leq r<n$.

و منه
$$a-b=nq+r-nq'-r$$
$$=n(q-q')$$

بما أن $q-q'$ عدد صحيح فإن $a-b$ مضاعف لـــ n .

عكسيا : نفرض $a-b$ مضاعف لـــ n . يوجد عدد صحيح k حيث أن $a-b=kn$.

ليكن r باقي قسمة b على n .

لدينا $b=nq+r$.حيث q عدد صحيح و $0\leq r<n$.

و منه $a=b+kn=nq+r+kn=(q+k)n+r$.

بما أن $q+k$ عدد صحيح و $0\leq r<n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n .

ومنه a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

نتيجة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـــ n .

3. خواص .

خاصية1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n\geq 2)$.

كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n .

البرهان: a عدد صحيح و r باقي قسمته على n. $0\leq r<n$

نعلم أن $a=nq+r$ حيث q عدد صحيح . و منه $a-r=nq$.

و بالتالي $a-r$ مضاعف لـــ n .

نفس الباقي في القسمة على n .

1) $15 = 11 - 26$ و $5 \times 3 = 15$ إذن $[5] 11 \equiv 26$ صحيحة .

3) $446 = 32 - 478$ و $1 + 5 \times 89 = 446$ إذن $[5] 32 \equiv 478$ خاطئة .

4) $63 = 5 + 58$ و $7 \times 9 = 63$ إذن $[7] 5- \equiv 58$ صحيحة .

5) $3 + 5 \times 12 = 63$ و $^2(3 + 5 \times 12) = ^2 63$ و منه $9 + 3 \times 5 \times 12 \times 2 + ^2 5 \times ^2 12 = ^2 63$

أي $14 + (71 + 720) 5 = ^2 63$ إذن $[5] 14 \equiv ^2 63$ صحيحة .

6) $11 + 7 \times 19 = 144$ و $11 + 0 \times 19 = 11$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 19 إذن $[19] 11 \equiv 144$ صحيحة .

7) $1 + 12 \times 1430 = ^2 131$ و $1 + 12 \times 2 = 25$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 12 إذن $[12] 25 \equiv ^2 131$ صحيحة.

8) $6 + 7 \times 15799 = ^3 48$ و $1 + 7 \times 5 = 36$ لم نتحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 إذن $[12] 25 \equiv ^2 131$ خاطئة.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ أساسها l .

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_n = u_0 + nl$.

ليكن u_p و u_k حدين من هذه المتتالية ،

لدينا : $u_p = u_0 + pl$ و $u_k = u_0 + kl$ ، p و k عددان طبيعيان .

و منه $u_p - u_k = u_0 + pl - u_0 - kl$

و منه $u_p - u_k = pl - kl$

و منه $u_p - u_k = l(p - k)$

و بالتالي $u_p - u_k$ مضاعف للعدد l . و منه و منه $u_p \equiv u_k [l]$

خاصية2: n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a[n]$.

البرهان: a عدد صحيح . a و a لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n و منه $a \equiv a[n]$.

خاصية3: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان . إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$.

البرهان: a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv b[n]$.

$a \equiv b[n]$ يعني $a-b=kn$ (k عدد صحيح) ومنه $b-a=-kn$. بما أن $-k$ عدد صحيح فإن $b \equiv a[n]$.

خاصية4: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة. إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) فإن $a \equiv c[n]$.

البرهان: a ، b و c أعداد صحيحة حيث أن ($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$).

($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) يعني ($a-b=kn$ و $b-c=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

و منه و بالجمع نحصل على $a-c=(k+k')n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a \equiv c[n]$.

خاصية5: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:

إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $a+c \equiv b+d[n]$.

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$).

($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

ومنه و بالجمع نحصل على $(a+c)-(b+d)=(k+k')n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a+c \equiv b+d[n]$.

خاصية6: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة:

إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $ac \equiv bd[n]$.

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$).

($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

لدينا $ac-bd=ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b)=ak'n+dkn=(ak'+dk)n$

بما أن $ak'+dk$ عدد صحيح فإن $ac \equiv bd[n]$.

خاصية7: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان.

من أجل كل عدد صحيح k ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$.

البرهان: a و b عددان صحيحان حيث أن $a \equiv b[n]$. ليكن k عددا صحيحا .

$k \equiv k[n]$ إذن بتطبيق الخاصية 6 نحصل على $ka \equiv kb[n]$.

خاصية8: n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$.

البرهان: a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv b[n]$. (نستعمل البرهان بالتراجع)

من أجل $p=1$ لدينا $a \equiv b[n]$ ترديدة صحيحة (من المعطيات)

نفرض $a^k \equiv b^k[n]$ صحيحة من أجل عدد طبيعي $k \geq 1$.

بتطبيق الخاصية 7 ، $a^k \times a \equiv b^k \times b[n]$ أي $a^{k+1} \equiv b^{k+1}[n]$. إذن الخاصية وراثية ابتداء من $p=1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p . إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$.

على n ثم نضرب الطرفين في -1 ثم نضيف الترديد إلى $-b$.

الحل:

بقسمة العدد 5817 على 251 نحصل على $5817 \equiv 44[251]$.

نضرب الطرفين في -1 نحصل على $-5817 \equiv -44[251]$ (الخاصية 7) .

نعلم أن $251 \equiv 0[251]$ و منه $0 \equiv 251[251]$ (الخاصية 3) .

($-5817 \equiv -44[251]$ و $0 \equiv 251[251]$) إذن من الخاصية 5 نحصل على $-5817 \equiv 207[251]$.

إذن باقي قسمة -5817 على 251 هو 207 لأن $0 \leq 207 < 251$.

2) عين المجموعة L' مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $5x \equiv 3[7]$.

الحل:

1) في $x+4 \equiv 2[7]$ نطبق الخاصية 5 و منه $x+4-4 \equiv 2-4[7]$ و بالتالي $x \equiv -2[7]$

وبما أن $-2 \equiv 5[7]$ فإن $x \equiv 5[7]$ (الخاصية 4) .

عكسيا فأن $(7k+5)+4 \equiv 2[7]$ لأن $7 \equiv 0[7]$ و $9 \equiv 2[7]$.

إذن المجموعة L هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+5$ حيث k عدد صحيح

2) x عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 7 ، ثم نطبق الخاصية 7 .

نلخص النتائج في جدول .

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$5x \equiv$	0	5	3	1	6	4	2

عكسيا فأن $5(7k+2) \equiv 3[7]$ لأن $35 \equiv 0[7]$ و $10 \equiv 3[7]$.

إذن المجموعة L' هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+2$ حيث k عدد صحيح .

الحل:

نعين بواقي القوى المتتابعة للعدد 3^n على 5 .

$3^0 \equiv 1[5]$ ، $3^1 \equiv 3[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3^3 \equiv 2[5]$ ، $3^4 \equiv 1[5]$.

$3^4 \equiv 1[5]$ من الخاصية 8 $3^{4k} \equiv 1^k[5]$ أي $3^{4k} \equiv 1[5]$ ، k عدد طبيعي .

بتطبيق الخاصية 4 ، $3^{4k+1} \equiv 3[5]$ ($3^{4k} \equiv 1[5]$ و $3^1 \equiv 3[5]$) ، $3^{4k+2} \equiv 4[5]$ و $3^{4k+3} \equiv 2[5]$.

$4039 = 4 \times 1009 + 3$ من الشكل $4k+3$ إذن $3^{4039} \equiv 2[5]$

التعداد .

1. مبرهنة .

مبرهنة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a = q\,x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ... + r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث $0 < q < x$ و $0 \le r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0;1;2;.....;n-1\}$

البرهان: a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي العدد الطبيعي x غير المعدوم و الأكبر تماما من 1 .

ليكن r_0 باقي قسمة a على x . لدينا $a = c_0x + r_0$ حيث c_0 عدد صحيح و $0 \le r_0 < x$.

* إذا كان $c_0 < x$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_0 \ge x$ توجد ثنائية وحيدة $(c_1;r_1)$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_0 = c_1x + r_1$ مع $0 \le r_1 < x$ و $0 < c_1 < c_0$.

* إذا كان $c_1 < x$ لدينا $a = c_1x^2 + r_1x + r_0$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_1 \ge x$ توجد ثنائية وحيدة $(c_2;r_2)$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_1 = c_2x + r_2$ مع $0 \le r_2 < x$ و $0 < c_2 < c_1$.

* نواصل حتى يصبح حاصل القسمة q على x أصغر تماما من x .

نحصل تباعا على ما يلي :

$(1) \;...\; a = c_0x + r_0$ مع $0 \le r_0 < x$ و $0 < c_0 < a$.

$(2) \;...\; c_0 = c_1x + r_1$ مع $0 \le r_1 < x$ و $0 < c_1 < c_0$.

$(3) \;...\; c_1 = c_2x + r_2$ مع $0 \le r_2 < x$ و $0 < c_2 < c_1$.

....

$(n-1) \;...\; c_{n-3} = c_{n-2}x + r_{n-2}$ مع $0 \le r_{n-2} < x$ و $0 < c_{n-2} < c_{n-3}$.

$(n) \;...\; c_{n-2} = c_{n-1}x + r_{n-1}$ مع $0 \le r_{n-1} < x$ و $0 < c_{n-1} < c_{n-2}$.

نضرب المساواة (1)، (2)، (3)، ... ، $(n-1)$، (n) في 1 ، x ، x^2 ، ... ، x^{n-2} ، x^{n-1} على الترتيب و بجمع النتائج المحصل عليها طرف بطرف نحصل على :

$a = q\,x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ... + r_2x^2 + r_1x + r_0$ (مع وضع $c_{n-1} = q$) و منه المبرهنة محققة.

2. التعداد ذو الأساس x.

قاعدة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين :

1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $a \ge x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$a = q\,x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ... + r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث

$0 < q < x$ و $0 \le r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0;1;2;.....;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$.

الكتابة $a = \overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x. إذا كان $x = 10$ ، نكتب :

$a = q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0$

الحل:

$a=3\times7^2+6\times7+5=194$ و منه a يكتب 194 في النظام العشري .

الحل:

$2517=314\times8+5=39\times8^2+2\times8+5$

$2517=4\times8^3+7\times8^2+2\times8+7$

و منه a يكتب $\overline{4727}$ في النظام ذي الأساس 8 .

1) أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين.

- بالمرور عبر النظام العشري .
- مباشرة .

2) أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل:

1) • $a=6\times8^2+4\times8+3=419$ و منه a يكتب 419 في النظام العشري .

$419=209\times2+1=104\times2^2+1\times2+1$.

$419=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

• $a=6\times8^2+4\times8+3$

$a=3\times2\times8^2+2^2\times8+3$.

$a=3\times2^7+2^5+2+1$.

$a=(2+1)\times2^7+2^5+2+1$

$a=2^8+2^7+2^5+2+1$

و منه $a=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

2) $a=6\times8^2+4\times8+3$

$a=6\times2^2\times4^2+4\times2\times4+3$

$a=6\times4^3+2\times4^2+3$

$a=(2+4)4^3+2\times4^2+3$

$a=4^4+2\times4^3+2\times4^2+3$

$a=1\times4^4+2\times4^3+2\times4^2+0\times4+3$.

إذن a يكتب $\overline{12204}$ في النظام ذي الأساس 4.

قابلية القسمة

N عدد طبيعي يكتب $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ في النظام العشري a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_{n-1} أعداد طبيعية أصغر تماما من 10 و a_n عدد طبيعي غير معدوم أصغر تماما من 10 .

نريد تعيين شروط قابلية القسمة على كل من الأعداد 10 ، 2 ، 5 ، 3 ، 9 ، 4 و 11

1. • باستعمال الترديدة $10\equiv 0[10]$، أثبت أن $N\equiv a_0[10]$.
   • استنتج شروط قابلية القسمة على 10 .
   • من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 10: 25810 ، 4328367 ، 851α (ناقش تبعا لقيم الرقم الطبيعي α) .
2. • باستعمال الترديدة $10\equiv 0[2]$، أثبت أن $N\equiv a_0[2]$.
   • استنتج شروط قابلية القسمة على 2 .
   • من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 2 : 37891 ، 7318964 ، 378488 .
3. • باستعمال الترديدة $10\equiv 0[5]$، أثبت أن $N\equiv a_0[5]$.
   • استنتج شروط قابلية القسمة على 5 .
   • من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 5: 34915 ، 4417347 ، 266480 .
4. • باستعمال الترديدة $10\equiv 1[3]$، أثبت أن $N\equiv (a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0)[3]$.
   • استنتج شروط قابلية القسمة على 3 .
   • من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 3: 25881 ، 728548 ، 264493.
5. • باستعمال الترديدة $10\equiv 1[9]$، أثبت أن $N\equiv (a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0)[9]$.
   • استنتج شروط قابلية القسمة على 9 .
   • من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 9: 25881 ، 275841 ، 624599 ،
   • 8129736 ، 54756α (ناقش تبعا لقيم الرقم الطبيعي α) .
6. • عين تبعا لقيم العدد الطبيعي p باقي قسمة 10^p على 4 .
   • استنتج أن $N\equiv 10a_1+a_0[4]$.
   • ما هي كتابة $10a_1+a_0$ في النظام العشري ؟
   • استنتج شروط قابلية القسمة على 4 .
   • من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 4: 38924 ، 74820 ، 85930.
   • بنفس الطريقة استنتج شروط قابلية القسمة على 16 .
7. • باستعمال الترديدة $10\equiv -1[11]$:
   أثبت أن $N\equiv (-1)^n a_n+(-1)^n a_{n-1}+...+a_2-a_1+a_0[11]$
   • استنتج شروط قابلية القسمة على 11 .
   • من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 11: 3658721 ، 287392358 ، 51829941 ، 7345591 .

مفتاح حساب .

في نظام تحقّق من صحة البضائع توضع لصيقة عليها الترميز بالأعمدة والذي يشمل على 12 الرقم متبوع بالرقم الثالث عشر وهو المفتاح .

الجدول يعبّر عن الترميز بالأعمدة :

R	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}

حيث R هو المفتاح ؛ C_1 ، C_2 ، ... ، C_{12} هي أرقام الترميز وهي أعداد طبيعية محصورة بين 0 و 9.

1. كيفية تعيين المفتاح .

لمعرفة صحة اللصيقة ، يحسب المفتاح R بالطريقة التالية : $3S_i + S_p + R \equiv 0[10]$

حيث : $S_i = C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 + C_{11}$ ، $S_p = C_2 + C_4 + C_6 + C_8 + C_{10} + C_{12}$.

2. إيجاد المفتاح .

1. في اللصيقة المعطاة أعلاه لدينا : $R = 4$ ، $C_1 = 0$ ، $C_2 = 1$ ... إلخ .
تحقق من أنّ الترميز لهذه اللصيقة صحيح .

2. أحسب مفتاح المرفق للترميز التالي :

R	5	1	6	0	3	2	4	2	1	5	3	7

3. بيّن أنّ الترميزين التاليين لهما نفس المفتاح :

R	a	7	b	0	4	1	5	6	3	6	6	2

R	b	7	a	0	4	1	5	6	3	6	6	2

4. عيّن c حتى يكون الترميز على اللصيقة التالية صحيحا.

8	3	9	9	4	2	c	2	0	0	3	4	1

5. في اللصيقة الموالية استبدل رقمين بحرفين d و e .

1	d	e	9	3	6	7	3	5	8	0	2	1

بيّن أنّ : $e \equiv -3b - 1[10]$. استنتج القيم الممكنة للثنائية $(e;d)$

حل معادلة من الشكل $ax + by = c$.

1. دراسة مثال .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $5x - 8y = 3 \; ...(1)$.

- تأكد أن $(7;4)$ حل للمعادلة .
- أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $5x \equiv 3[8]$.
- عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x \equiv 3[8]$.
- أثبت أن كل حلول المعادلة (1) هي من الشكل $(8k+7;5k+4)$ حيث k عدد صحيح.

2. دراسة الحالة العامة .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $ax + by = c$. حيث a ، b ، و c أعداد طبيعية .

- أثبت أن المعادلة تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو c يقبل القسمة على $PGCD(a;b)$.
- أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن $ax \equiv c[b]$.
- أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن $by \equiv c[a]$.

3. تطبيق .

- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x + 12y = 5$.
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $20x - 45y = 5$.
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $6x - 8y = 9$.

موضوع محلول

تمرين : (بكالوريا)

1. أ - عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9 .

ب - برهن إذن أن $2005^{2005} \equiv 7[9]$.

2. أ - برّر أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $10^n \equiv 1[9]$.

ب - N عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري ، نسمي S مجموع أرقامه . برهن العلاقة التالية: $N \equiv S[9]$.

جـ - استنتج أن : يكون N قابلا للقسمة على 9 إذا وفقط إذا كان S قابلا للقسمة على 9 .

3. نفترض أن $A = 2005^{2005}$ ، نضع : B مجموع أرقام العدد A .

C مجموع أرقام العدد B . D مجموع أرقام العدد C .

أ - برر أن $A \equiv D[9]$.

ب - علما أن $2005 < 10000$ ، برهن أن العدد A يكتب في التعداد العشري على الأكثر بـ 8020 رقما . استنتج أن $B \le 72180$.

جـ - برهن أن $C \le 45$.

د - بدراسة قائمة الأعداد الطبيعية الأصغر من 45 ، عين عنصرا حادا للعدد D أصغر من 15 .

هـ - برهن أن $D = 7$.

حل مختصر

1. أ - $7 \equiv 7[9]$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^3 \equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $7^{3k} \equiv 1[9]$ وعليه $7^{3k+1} \equiv 7[9]$ ؛ $7^{3k+2} \equiv 4[9]$.

ب - $2005 \equiv 7[9]$ ومنه $2005^{2005} \equiv 7^{2005}[9]$. $7^{2005} = 7^{3\times668+1}$ إذن $7^{2005} \equiv 7[9]$ ومنه $2005^{2005} \equiv 7[9]$.

2. أ - $10 \equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $10^n \equiv 1^n[9]$ أي $10^n \equiv 1[9]$.

ب - نضع $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ ومنه $S = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$. $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$. بما أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $10^n \equiv 1[9]$ فإن $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 [9]$ أي $N \equiv S[9]$.

جـ - N يقبل للقسمة على 9 معناه $N \equiv 0[9]$ ومعناه $N \equiv S[9]$ ويكافئ $S \equiv 0[9]$ أي S يقبل للقسمة على 9 .

3. أ - من السؤال 2 - ب - ينتج $A \equiv B[9]$ ؛ $B \equiv C[9]$ و $C \equiv D[9]$ ومنه بالتعدي نستنتج $A \equiv D[9]$.

ب - $2005 < 10^4$ ومنه $2005^{2005} < 10^{8020}$ إذن $A < 10^{8020}$

لدينا $10^k = 1\underbrace{0\dots0}_{k\text{مرة}}$ إذن يكتب العدد 10^k بـ $(k+1)$ رقما ومنه كل عدد أصغر من 10^k يكتب بـ k رقما على الأكثر . بما أن $A < 10^{8020}$ فإن العدد A يكتب بـ 8020 رقما على الأكثر . كل رقم من العدد A يكون أصغر من أو يساوي 9 إذن $B \le 9 \times 8020$ أي $B \le 72180$.

جـ - $72180 < 10^5$ إذن $B < 10^5$ ؛ كل رقم من العدد B يكون أصغر من أو يساوي 9 إذن $C \le 5 \times 9$ أي $C \le 45$.

د - نضع $C = \overline{ab}$ في النظام العشري إذن $D = a + b$ لدينا $C \le 45$ إذن $0 \le a \le 4$ ولدينا أيضا $0 \le b \le 9$ ؛ ومنه $0 \le a + b \le 4 + 9$ أي $0 \le a + b \le 13$ ومعناه $D \le 13$.

جـ - لدينا $A \equiv D[9]$ معناه $D \equiv A[9]$ ولدينا $A \equiv 7[9]$ إذن $D \equiv 7[9]$ وبما أن $D \le 13$ فإن $D = 7$.

تعاليق

لاحظ في الموافقة الثانية $49 = 9 \times 5 + 4$ واستعمل في الرابعة خاصية الأس ، ثم خاصية الجداء في الموافقات المتبقية .

في هذا السؤال نبرهن على الخاصية المعروفة للقسمة على 9 وبنفس الطريقة نبرهن على الخاصية للقسمة على 3 .

خاصية التعدي:إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$.

مراعاة شروط حول الأرقام حسب أساس النظام .

$0 \le 9k + 7 \le 13$ معناه $k = 0$

موضوع موجّه

تنبيه

المطلوب قراءة السؤال لكي لا تخرج عن الموضوع أو تتوسع فيما هو غير مطلوب .
يمكن أن يتم حل تمرين بعدّة طرائق (البرهان بالتراجع ، الموافقات ...) ، لكن إجابتك مقيدة بالزمن وذا ينبغي تبني الطريقة التي يستغرق حلها أقصر مدّة ممكنة.
التمرين عموما متشعبا ومكوّنا من عدّة محاور كما هو حال التمرين الموالي ومع ذلك نجد تسلسلا وتوجيها في الأسئلة المطروحة .

تمرين. (بكالوريا)

في كل التمرين ، n يُعتبر عدد طبيعي غير معدوم .

1. أ) من أجل $1 \le n \le 6$ ، أحسب بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد n ، $3^{n+6}-3^n$ يقبل القسمة على 7 .

استنتج أنّ 3^{n+6} و 3^n لهما نفس الباقي لقسمتهما على 7 .

ج) باستعمال النتائج السابقة ، أحسب باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^{1000} على 7 .

د) في الحالة العامة ، كيف يمكن حساب البواقي لقسمة العدد 3^n على 7 من أجل n كيفي ؟

هـ) استنتج أنه من أجل كل عدد n ، العددان 3^n و 7 أوليان فيما بينهما .

2. نُعرّف $U_n = 1+3+3^2+...+3^{n-1}$ مع $n \ge 2$.

أ) بيّن أنه إذا كان U_n يقبل القسمة على 7 فإن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 7.

ب) عكسيا ، بيّن أنه إذا كان $3^n - 1$ يقبل القسمة على 7 فإن U_n يقبل القسمة على 7.

استنتج قيم n التي يكون من أجلها U_n يقبل القسمة على 7.

توجيهات

1. أ) للحصول على البواقي المطلوبة ، جد الباقي الأول والثاني ثم حاول أن تستعمل الخواص على الأسس $3^3 = 3\times 3^2$ ، $3^4 = \left(3^2\right)^2$ ...

ب) تجنب البرهان بالتراجع محاولا أن تحلل العبارة $3^{n+6}-3^n$.

ج) و د) ممّا سبق استنتج أن البواقي تشكل متتالية دورية . ثم جد باقي قسمة 1000 على دور هذه المتتالية .

هـ) فكّر في القاسم المشترك الوحيد هو 1 .

2. أ) استعمل مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية .

ب) تحقق من أن : $3^n - 1 = 7k$ معناه $2U_n = 7k$ ثم بيّن أن k عدد زوجي باعتبار أن U_n عدد طبيعي (يمكن استعمال بسهولة مبرهنة غوص الموجودة في المحور الثالث).

تمارين تطبيقية

1 ـ الموافقة في $\mathbb{Z}$

1 برر صحة العبارات التالية :

أ - $45 \equiv 3[7]$.   ب - $152 \equiv 2[3]$.

جـ - $29 \equiv -1[6]$.   د - $137 \equiv -3[5]$.

و - $-13 \equiv 2[5]$.   هـ - $-17 \equiv -7[10]$.

2 عين خمسة أعداد صحيحة x ، تحقق $37 \equiv x\,[4]$.
ما هو العدد الطبيعي x الذي يكون أصغر تماما من 4 ؟

3 عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث :
$n \equiv 4[7]$.

4 n عدد صحيح يحقق $n \equiv 140[12]$،
عين باقي قسمة العدد n على 12 .

5 x عدد صحيح ، باقي قسمته على 7 هو 2 .
عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية : $x+5$ ؛ $x-5$ ؛ $9x$ ؛ $-15x$ ؛ x^3 .

6 n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .
في كل حالة ، عين قيم العدد n التي تحقق الموافقة المقترحة .

أ ـ $46 \equiv 0[n]$ ؛

ب ـ $10 \equiv 1[n]$ ؛

جـ ـ $27 \equiv 5[n]$.

7 n و m عددان طبيعيان غير معدومين .
a و b عددان صحيحان .
أثبت أن $a \equiv b\,[n]$ يكافئ $am \equiv bm\,[nm]$

8 n عدد طبيعي . A ، B ، C ، a ، b و c أعداد صحيحة .
برهن أنه إذا كانت الفوارق $A-a$ ، $B-b$ و $C-c$ تقبل القسمة على n فإن الفرق $(ABC-abc)$ يقبل كذلك القسمة على n .

9 n و m عددان طبيعيان غير معدومين حيث :
$n \equiv 0[m]$.
a و b عددان صحيحان .
أثبت أنه إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإن $a \equiv b\,[m]$.

10 نضع : $a \equiv 30757[10]$ ؛ $b \equiv 15163[10]$ و $c \equiv 12924[10]$.

1) بسط الموافقات المعطاة .

2) استنتج العدد المحصور بين 0 و 9 ، والتي تكون الأعداد المقترحة أدناه توافقه بالترديد 10 .

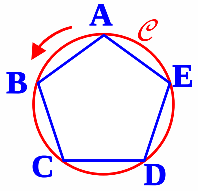
أ - $a+b+c$ ؛   ب - $a-b+c$ ؛

جـ - $a+b-c$ ؛   د - abc ؛

هـ - $ab+ac+bc$ ؛   و - $a^2+b^2+c^2$.

11 كم كانت تشير الساعة حيث :
أ ــ بعد 112 الساعة أشارت الثالثة ؟
ب ــ قبل 153 الساعة أشارت الثالثة ؟
(مع ذكر صباحا أم مساء)

12 المضلع المنتظم $ABCDE$ ، محيط بالدائرة $\mathscr{C}$.
M نقطة متحركة على الدائرة ، نقطة انطلاقها هي A .



نفرض الاتجاه المباشر هو اتجاه السهم .
جد نقطة الوصول للنقطة M في كل من الحالتين التاليتين :
أ ــ النقطة M تقطع 15123 قوسا متتابعة في الاتجاه المباشر .
ب ــ النقطة M تقطع 15132 قوسا متتابعة في الاتجاه غير المباشر .

13 عين باقي قسمة العدد 12^{1527} على 5 .

14 عين بواقي القسمة الأقليدية على 5 لكل من الأعداد : 371^{238} ؛ 579^{2008} ؛ 1429^{2009} ؛ 1954^{1962} .

15 جد بواقي القسمة الأقليدية على 9 للأعداد :
1754^{12} ، 34572^{457} و 375^{2009} .

16 برهن أن :
أ - $1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003}$ يقبل القسمة على 5 .
ب - $1^{2007}+2^{2007}+3^{2007}+4^{2007}+5^{2007}+6^{2007}$ يقبل القسمة على 7 .

جـ - $(1^{2008}-2^{2008}+3^{2008}-4^{2008}+5^{2008}-6^{2008}+7^{2008}-8^{2008})$ يقبل القسمة على 9 .

17 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+4^{2n+1}$ قابلا للقسمة على 4 .

18 برّر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون : $3532^n\equiv 0[2]$ ؛ $7254^n\equiv 0[9]$ ؛ $1785^n\equiv 0[5]$ ؛ $51502^n\equiv 0[11]$.

19 1) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 3286^{374} على 10.

2) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 76^{784} على 12.

20 1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $3^{2n}-2^n\equiv 0[7]$.

2) أثبت أنه إذا كان n عددا طبيعيا ليس مضاعفا للعدد 3 فإن $2^{2n}+2^n+1$ يقبل القسمة على 7 .

21 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

1) $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$

2) $3^{3n+1}+2^{n+1}$ يقبل القسمة على 5 .

22 n عدد طبيعي ، نضع : $\sim=(9n-1)10^n+1$.
برهن أن العدد $\sim$ مضاعف للعدد 9 .

23 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

1) $2^{6n+3}+3^{4n+2}$ يقبل القسمة على 17 .

2) $2^{5n+1}+3^{n+3}$ يقبل القسمة على 29 .

24 n عدد طبيعي .

1) جد ، تبعا لقيم n ، باقي قسمة n^2 على 4 .

2) برهن أنه إذا كان n عددا طبيعيا فرديا فإن : $n^2\equiv 1[8]$.

25 1) برهن أنه إذا كان n عددا طبيعيا فرديا فإن : $n^4\equiv 1[16]$.

2) برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي n ليس مضاعفا لعدد 5 فإن باقي قسمة n^4 على 5 هو 1 .

26 أ ـ x عدد صحيح . أتمم الجدول التالي :

$x\equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$2x\equiv$						$[5]$

ب ـ استنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث : $2x\equiv 3[5]$.

27 عين قيم الأعداد الطبيعية n ، التي يكون من أجلها العدد n^3+n-2 قابلا للقسمة على 7 .

28 من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع r_n باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 9.

1) أتمم الجدول التالي:

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n							

2) استنتج r_n من أجل كل عدد طبيعي n .

3) عين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 65^n على 9 .

4) استنتج باقي قسمة 65^{2011} على 9 .

29 أ - جد باقي قسمة العدد 4^5 على 11 .

ب - استنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد : 37^{5k} ؛ 37^{5k+1} ؛ 37^{5k+2} ؛ 37^{5k+3} و 37^{5k+4} مع $k\in\mathbb{N}$.

30 عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $2x=3y$.

31 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية : $2x-5y=1$.

32 حل في $\mathbb{Z}$ كل من الجملتين التاليتين :

أ ـ $\begin{cases} x\equiv 3[5] \\ x\equiv 1[6] \end{cases}$. ب ـ $\begin{cases} 2x\equiv 2[4] \\ 4x\equiv 1[3] \end{cases}$.

2 . التعداد

33 أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس العشري .

$a=12734$ ؛ $b=5723$ ؛ $c=503019$.

34 أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6 .

$a=\overline{234}$ ؛ $b=\overline{1523}$ ؛ $c=\overline{503012}$.

35 أكتب في النظام ذي الأساس 7 كل من الأعداد الطبيعية التالية :

$a=7^3+2\times 7^2+3\times 7+5$ ؛

؛ $b=5\times7^2+2\times7$

$c=6\times7^3+2\times7+1$.

36 a عدد طبيعي حيث $a>5$.

نضع : $N_a=4a^5+2a^3+a+3$ اكتب العدد N_a في النظام ذي الأساس a.

37 العددان $\overline{2306}$ و $\overline{1035}$ مكتوبان في النظام ذي الأساس x .

أ ــ ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد x ؟

ب ــ أنشر العددين وفق الأساس x .

38 الأعداد المقترحة مكتوبة في النظام العشري ، أعد كتابتها في النظام الثنائي . 2 ؛ 4 ؛ 7 و 33 .

39 يكتب العدد الطبيعي n في التعداد الثنائي $\overline{1101101}$. ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كما يلي : $\overline{214}$ ؟

40 ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه $\overline{2003}=\overline{21}\times\overline{43}$ ؟

41 أوجد في كل حالة أساس التعداد الذي يكون فيه :

أ - $\overline{411}=\overline{15}\times\overline{23}$ ؛

ب - $\overline{21}\times\overline{14}=\overline{324}$ ؛

جـ - $2888=\overline{412}\times\overline{31}$.

42 أ - في أي أساس تعداد x يكون $\overline{162}=\overline{77}+\overline{63}$ ؟

ب - أحسب في النظام العشري الجداء $\overline{77}\times\overline{63}$ علما أن $\overline{63}$ و $\overline{77}$ مكتوبان في النظام ذي الأساس x المحصل عليه في السؤال السابق .

جـ - أكتب الجداء $\overline{77}\times\overline{63}$ في النظام 8 .

43 في كل حالة من الحالتين المقترحتين أدناه ، عين الأساس a ، إن أمكن ، بحيث تكون الكتابة في النظام ذي الأساس a .

أ ــ $\overline{12}\times\overline{23}=\overline{276}$.

ب ــ $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$

44 أكتب في النظام الثنائي العددين 10 و 100 المكتوبين في النظام العشري .

45 ــ في أي أساس تعداد يكون $\overline{51}=\overline{13}+\overline{35}$ ؟

ــ أكتب المساواة السابقة في النظام الثنائي .

46 يكتب العدد n في النظام العشري 72881 .

أكتب العدد n في النظام ذي الأساس 12 ثم في النظام ذي الأساس 7 .

47 أكتب في النظام العشري العدد $\overline{3752}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 8 .

48 أكتب في النظام ذي الأساس 12 العدد $\overline{6175}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 9 .

49 أكتب في النظام ذي الأساس 7 العددين $\overline{234}$ و $\overline{1040}$ المكتوبين في النظام ذي الأساس 5 .

50 a عدد طبيعي حيث $a>1$.

أكتب الأعداد a ، a^2 و a^3 في النظام ذي الأساس a .

51 في النظام العشري ، A عدد طبيعي أكبر من 3 و S هو مجموع أرقامه .

أثبت أن A يقبل القسمة على 3 إذا وفقط إذا كان S يقبل القسمة على 3.

52 x و y عددان طبيعيان يكتبان في النظام العشري بنفس الأرقام ولكن في ترتيبين متعاكسين .

برهن أن الفرق $x-y$ مضاعف للعدد 9 .

53 في هذا التمرين الأعداد تكتب في النظام أساسها 4 .

1) أملئ الجدول التالي :

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

مثلا $1+2=3$ ، $2+3=1\times4+1=11$.

2) أنجز العملية التالية $3223+132$.

54 1) أنجز جدول الضرب في النظام ذي الأساس 4 .

2) أنجز العملية التالية 3223×123 .

55 أنجز ، في النظام ذي الأساس 5 ، العمليات التالية .

$\begin{array}{r} 3421 \\ +\ 230 \\ \hline \end{array}$ ، $\begin{array}{r} 431 \\ -132 \\ \hline \end{array}$ ، $\begin{array}{r} 213 \\ \times\ 14 \\ \hline \end{array}$.

56 أنجز ، في النظام ذي الأساس 12 ، العمليات التالية .

$\begin{array}{r} 39\ \bar{}7 \\ +\ 213 \\ \hline \end{array}$ ، $\begin{array}{r} 400\sim \\ -39\ \ 7 \\ \hline \end{array}$ ، $\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 41 \\ \hline \end{array}$.

تمارين للتعمّق

1 ـ الموافقات في $\mathbb{Z}$

57 أ - عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي قسمة 2^n على 10 .

ب - عين حسب قيم n ، رقم آحاد العدد 2^n.

جـ - عين رقم آحاد العدد $3548^9 \times 2534^{31}$.

58 ما هما الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} ؟

59 x و y عددان صحيحان .
برهن أن $xy\left(x^2-y^2\right)$ مضاعف للعدد 3 .

60 جد كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\left(n^3+3n^2+3n-7\right)$ قابلا للقسمة على 8 .

61 أ ـ كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $A=2^n-1$ قابلا للقسمة على 9 .

ب ـ نفترض أن n يحقق الشرط المعيّن في السؤال السابق ، برهن أن A يقبل القسمة على 7 . ما هو باقي قسمة A على 21 ؟

62 عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد 2^n-5 قابلا للقسمة على 9 .

63 عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون 10 قاسما للعدد $n^2+(n+1)^2+(n+3)^2$.

64 ما نلاحظه على السنة 2002 تمتاز بالخصوصية التالية : 2002^4+4 يقبل القسمة على 10 . ما هي السنوات الأخرى التي تحقق نفس الخصوصية ؟

65 برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي n لا يقبل القسمة على 5 فإن العدد $\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$ يكون مضاعفا للعدد 5.

66 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n(2n+1)(7n+1)$ يقبل القسمة على 6 .

67 n عدد طبيعي . نضع $A=n^2-n+1$

أ - عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد A على 7 .

ب - استنتج قيم العدد الطبيعي n ، التي يكون من أجلها العدد A قابلا للقسمة على 7 .

جـ - نضع : $B=2753^2-2753+1$ ، عين باقي قسمة العدد B على 7 .

68 عين جميع الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $\left(2n^3-n^2+2\right)$ يقبل القسمة على 7 .

69 أ ـ عيّن تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 4^n على 7 .

ب ـ استنتج ، حسب قيم n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد $851^{3n}+851^{2n}+851^n+2$ على 7 .

70 أ ـ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9 .

ب ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد 7^n+3n-1 قابلا للقسمة على 9 .

71 حل في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، المعادلة $3x\equiv 7[8]$.

72 برهن أنه لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق : $8x^2\equiv 16[3]$.

73 أ ـ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية على 7 للعددين 2^n و 3^n .

ب ـ حل في مجموعة العداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، المعادلة ذات المجهول x التالية : $2^x+3^x\equiv 0[7]$.

74 عين قيم العدد الطبيعي x التي من أجلها يكون $5^x-3^x+6\equiv 0[11]$.

75 أ ـ عين حسب قيم العدد الطبيعي x ، القيم التي توافق x^2 بترديد 5 .

ب ـ استنتج أن المعادلة $x^2-5y^2=3$ ذات المجهولين x و y ، لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$.

76 x و y عددان طبيعيان . نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $7x^2+2y^3=3$.

أ ـ أتمم الجدول التالي :

$y\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	$[7]$
$y^3\equiv$								$[7]$
$2y^3\equiv$								$[7]$

ب ـ استنتج أنه لا توجد أي ثنائية (x,y) تحقق المعادلة المعطاة .

77 نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، المعادلة ذات المجهولين x و y التالية : $3^x = 8 + y^2$.

1) ناقش حسب قيم x ، بواقي قسمة 3^x على 8 .
2) ناقش حسب قيم y ، بواقي قسمة y^2 على 8 .
3) برهن أنه إذا كان x فرديا فإن المعادلة المعطاة لا تقبل حلا .
4) نفترض أن $x = 2n$ ؛ حلل العبارة $3^{2n} - y^2$ ، ثم بين أن $3^n \le 8$.
5) استنتج الثنائية (x, y) التي تحقق المعادلة المعطاة .

78 ليكن p عددا طبيعيا أوليا وأكبر من أو يساوي 7 . نضع $n = p^4 - 1$.

1) برهن أنّ p يوافق -1 أو 1 بترديد 3 . استنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3 .
2) أثبت أنه يوجد عدد طبيعي k حيث يكون : $p^2 - 1 = 4k(k+1)$.
استنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16 .
3) باستعمال البواقي الممكنة لقسمة العدد p على 5 ، أثبت أن 5 هو قاسم للعدد n.

79 1) أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $1000n \equiv n[111]$.
ب ـ بدون استعمال الحاسبة ، استنتج أن الأعداد المقترحة تقبل القسمة على 111 .
111 111 ؛ 100 010 001 ؛ 100 010 000 001.
2) أثبت أن العدد 1 001 001 001 001 يقبل القسمة على 11 111.

80 1) في القسمة الأقليدية لـ : a على 8 الباقي هو 2 ؛ و a على 104 الباقي هو r .
أ - برهن أن $r \equiv 2[8]$.
ب - ما هي القيم المكنة لـ r ؟
2) في القسمة الأقليدية لـ : a على 13 الباقي هو 3؛ و a على 104 الباقي هو r .
أ - برهن أن $r \equiv 3[13]$.
ب - ما هي القيم المكنة لـ r ؟
3) في القسمة الأقليدية لـ :
a على 8 الباقي هو 2 ؛ a على 13 الباقي هو 3 ؛ و a على 104 الباقي هو r .
استنتج من 1) و2) قيمة r .

81 بكالوريا

1) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل كل واحدة من القيم 1 ، 2 ، 3 ، 4 و 5 للعدد الطبيعي n.
2) استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل كل عدد طبيعي n .
3) بين أن العدد $(5^{2008} - 5^{1428})$ يقبل القسمة على 11 .

82 بكالوريا

1) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل واحدة من القيم 1, 2, 3, 4, 5 و 6 للعدد الطبيعي n .
2) استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .
3) عين باقي القسمة الأقليدية على 7 للعدد $(3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2})$.

83 بكالوريا

1) عيّن باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل كل واحدة من القيم 1, 2, 3 و 4 للعدد الطبيعي n .
استنتج من ذلك بواقي القسمة الأقليدية على 5 للعدد 2^n ثم للعدد 3^n من أجل كل عدد طبيعي n .
2) جد باقي القسمة على 5 للعدد 2^{14} ثم للعدد 3^{10}.
3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(2\times 3^{4n+1} - 2^{4n})$ يقبل القسمة على 5.

84 بكالوريا

n عدد طبيعي .

1) أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2) عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 6^{2n} على 7 .
3) عين قيم الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلا للقسمة على 7 .

85 بكالوريا

ليكن n عددا طبيعيا .

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية 2^n على 5.

2) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية 2^n على 7.

3) عين قيم n التي من أجلها يكون باقي قسمة 2^n على كل من 5 و 7 هو 4.

86 عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 و $\left[1+(n-1)2^n\right]$ يقبل القسمة على 7 .

87 1) عيّن باقي القسمة الأقليدية على 5 لعدد 2^k من أجل القيم من 1 إلى 8 للعدد الطبيعي k .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، الباقي للقسمة الأقليدية للعدد 2^{4n} على 5 هو 1 .

استنتج باقي قسمة 17^{4n} على 5 .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3+17^{4n+2}+2^{4n+3}$ يقبل القسمة على 5

88 بكالوريا

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لعدد 4^n على 11 .

2) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث :

$\left(6\times1995^n+26^{10n+2}+7\right)$ يقبل القسمة على 11 .

89 بكالوريا

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $\left(26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3\right)$ يقبل القسمة على 7 .

3) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+5n\right)$ يقبل القسمة على 7 .

90 1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 13 .

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $4\left(3^{n+1}-1\right)$ مضاعفا للعدد 13 .

91 عيّن ، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الأقليدية للعدد $15\left(16^{n+1}-1\right)$ على 7 .

92 بكالوريا

1) أ ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لعدد 3^n على 10 .

ب ــ استنتج باقي القسمة الأقليدية على 10 لعدد $\left(63\times9^{2001}-7^{1422}\right)$.

2) أ ــ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)3^{2n+1}[10]$.

ب ــ عيّن قيم العدد الطبيعي ن حتى يكون :

$3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv0[10]$.

93 بكالوريا

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7 .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $\left(2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\right)$ قابلا للقسمة على 7 .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$u_n=2\times3^n+3\times4^n$.

ــ أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n=u_0+u_1+...+u_n$.

ــ ما هي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 ؟

94 بكالوريا

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 10 .

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ,

$\left(7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}\right)$ يقبل القسمة على 10 .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع :

$$S_n=1+7+7^2+...+7^n$$

ــ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4}\equiv S_n[10]$.

ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي السمة الأقليدية للعدد S_n على 10 .

2 . أنظمة التعداد

95 x و y عددان طبيعيان غير معدومين

أوجد الأعداد التي تكتب $\overline{yx}$ في النظام العشري ، و $\overline{xy}$ في النظام ذي الأساس 7 .

96 عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $n=\overline{xyz}$ في النظام ذي الأساس 7 و $n=\overline{zyx}$ في النظام ذي الأساس 11 .

97 بكالوريا

a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1 \le a \le b \le c$.

عيّن a ، b و c والجداء abc علما أنّ في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{555}$.

98 1) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة $45x-28y=130$ فإن x يكون زوجي و y يكون مضاعف للعدد 5 .

2) عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{2\sim\sim 3}$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $\overline{6 \quad 5}$ في النظام ذي الأساس 7 .

99 N عدد طبيعي يكتب $\overline{xyzx}$ في النظام ذي الأساس 11 ، و $\overline{yyxz}$ في النظام ذي الأساس 7 .

أكتب العدد N في النظام العشري .

100 في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي : $n=\overline{1271x}$.

1) عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8 .

2) عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11 .

101 عيّن عددين طبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n=\overline{27x85y}$ ، المكتوب في النظام العشري ، قابلا للقسمة على 3 وعلى 11 .

102 1) x عدد طبيعي .

برهن أن $3x \equiv 0[7]$ تكافئ $x \equiv 0[7]$

2) ليكن N و N' عددين طبيعيين مكتوبين في النظام العشري كما يلي :

$N=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ ، $N'=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}$.

برهن أن N يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان $N'-2a_0$ يقبل القسمة على 7 .

3) استعمل هذه الطريقة عدة مرات لتبرير بدون حاسبة إن كان العددان 105154 و 263572 يقبلان القسمة على 7 .

103 1) ليكن N و N' عددين طبيعيين مكتوبين في النظام العشري كما يلي : $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ ، $N'=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}$.

برهن أن N يقبل القسمة على 13 إذا وفقط إذا كان $N'+4a_0$ يقبل القسمة على 13 .

2) استعمل هذه الطريقة عدة مرات لتبرير بدون حاسبة ، إن كان العددان 1631216 و 48662029 يقبلان القسمة على 13 .

104 N عدد طبيعي يكتب في النظام العشري على الشكل $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$.

ــ بين أن العدد N يكون قابلا للقسمة على 11 إذا وفقط إذا كان $a_0-a_1+a_2-...+(-1)^n a_n$ مضاعفا لـ 11.

ــ هل الأعداد المقترحة أدناه تقبل القسمة على 11 ؟

أ - 72792973 ؛

ب - 43141408431 ؛

جـ - 531745586910.

105 a عدد طبيعي حيث $a>1$.

1) أنشر الجداء التالي : $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

2) استنتج أنه في كل نظام التعداد يكون العدد 10101 يقبل القسمة على 111 ، ثم عيّن حاصل هذه القسمة .

(نمثل $a-1$ بالرقم $\quad$)

106 1) a عدد طبيعي حيث $a>1$. في النظام التعداد ذي الأساس a ، بين أن العدد 1001 يقبل القسمة على 11

2) نمثل $a-1$ بالرقم $\quad$ ، عين حاصل قسمة 1001 على 11 .

3) تحقق من ذلك في النظام ذي الأساس 10 ثم في النظام ذي الأساس 12.

107 1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $a>3$، العدد 1331 المكتوب في النظام ذي الأساس a ، هو مكعب لعدد طبيعي .

2) عين الأساس النظام الذي يكون مكتوب فيه العدد 14641 ويكون القوة الرابعة لعدد طبيعي .

108 n عدد طبيعي حيث $n>1$. نضع $a=n^2+1$.

1) أكتب في النظام ذي الأساس a الأعداد التالية :

n^2+2 ؛ n^2+2n ؛ $(n^2+2)^2$ و n^4 .

- تحقق من ذلك من أجل الأساس $a=5$ ومن أجل $a=10$.

2) أكتب ، في النظام ذي الأساس a الأعداد التالية :

$u=n(n^2+2)$ ؛ $v=n^2(n^2+2)$ ؛ $x=u^2$ و $y=v^2$.

تمارين

مسائل

109 (I) ليكن N عددا طبيعيا فرديا وليس أوليا .
نفترض أن $N=a^2-b^2$ مع a و b عددين طبيعيين و $a>b$.
1) برهن أن a و b ليسا من شفعية واحدة (إذا كان أحدهما فردي فالآخر يكون زوجي)
2) برهن أن N يكتب على شكل جداء عددين طبيعيين p و q .
3) ما هي شفعية لكل من p و q .
(II) نقبل أن العدد 250507 ليس أوليا .
الهدف هو البحث عن الثنائيات من الأعداد الطبيعية (a,b) التي تحقق العلاقة (E) : $a^2-250507=b^2$.
1) ليكن x عددا طبيعيا .
أ - أعط في جدول ، البواقي الممكنة للعدد x بترديد 9 ؛ ثم البواقي للعدد x^2 بترديد 9 .
ب - علما أن $a^2-250507=b^2$ ، عيّن البواقي الممكنة للعدد $a^2-250507$ بترديد 9 ؛ ثم استنتج البواقي الممكنة للعدد a^2 بترديد 9 .
جـ - برهن أن الباقيان الممكنان للعدد a بترديد 9 ، هما 1 و 8 .
2) أ - برهن أنه إذا كانت الثنائية (a,b) تحقق العلاقة (E) فإن $a\geq 501$.
ب - برهن أنه لا توجد أي ثنائية من الشكل $(501,b)$ تحقق العلاقة (E) .
3) نفترض أن الثنائية (a,b) تحقق العلاقة (E) .
أ - برهن أن $a\equiv 505[9]$ أو $a\equiv 503[9]$.
ب - عيّن أصغر عدد طبيعي k حيث تكون الثنائية $(505+9k\ ,b)$ تحقق العلاقة (E) ، ثم أعط الثنائية التي تحقق (E) .
(III) 1) استنتج مما سبق ، تحليلا إلى جداء عاملين العدد 250507 .
2) هل العاملين أوليين فيما بينهما ؟

110 ليكن n عدد طبيعي حيث $n\geq 2$ ، نريد دراسة وجود ثلاثة أعداد طبيعية x ، y و z حيث $x^2+y^2+z^2\equiv(2^n-1)[2^n]$.
جزء I ـ دراسة حالتين خاصة .
1) في هذا السؤال نفترض أن $n=2$.
برهن أن 1 ، 3 و 5 تحقق الشرط المعطى .
2) في هذا السؤال نفترض أن $n=3$.
أ ـ ليكن m عدد طبيعي . أنقل وأتمم الجدول أدناه بالباقي r للقسمة الأقليدية للعدد m على 8 والباقي R للقسمة الأقليدية للعدد m^2 على 8 .

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

ب ـ هل يمكن إيجاد ثلاثة أعداد طبيعية x ، y و z حيث $x^2+y^2+z^2\equiv 7[8]$ ؟
الجزء II ـ دراسة الحالة العامة مع $n\geq 3$.
نفترض أنه توجد ثلاثة أعداد طبيعية x ، y و z حيث $x^2+y^2+z^2\equiv(2^n-1)[2^n]$.
1) برّر أن الأعداد x ، y و z كلها فردية أو من بينها عددين زوجيين فقط .
2) نفترض أن x و y زوجيان و z فردي .
أ - برهن أن $x^2+y^2+z^2\equiv 1[4]$.
ب - استنتج أن هناك تناقض .
3) نفترض أن x ، y و z كلها فردية .
أ - برّر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k يكون $k^2+k\equiv 0[2]$.
ب - استنتج أن $x^2+y^2+z^2\equiv 3[8]$.
جـ - استخلص .

111 عيّن رقم آحاد للجزء الصحيح للعدد الحقيقي $A=\dfrac{10^{1992}}{10^{83}+7}$ (يمكنك استعمال المتتالية الهندسية ذات الحد الأول 1 والأساس $(-7\times10^{-83}$

اختيار من متعدد

112 من أجل كل عدد طبيعي n نضع $p(n)=9^n$.
من بين الاقتراحات المعطاة عيّن الاقتراح الصحيح .

1) أ - $p(5)\equiv 1[11]$.
ب - $p(60)\equiv 2[11]$.
جـ - $p(2n+1)\equiv 2^{2n+1}[11]$.

2) نضع $N=p(3)+3p(1)+5$.
أ - $N=1035$.
ب - $N=\overline{1035}$ في النظام ذي الأساس 9 .
جـ - $N=\overline{1000305}$ في النظام ذي الأساس 3 .

3) أ - $p(2n)\equiv 0[p(n)+1]$.
ب - $p(2n)\equiv 1[p(n)+1]$.
جـ - $p(2n)\equiv 0[p(n)-1]$ مع $n\neq 0$.

113 كل سؤال يحتوي على ثلاث اقتراحات ، عين الاقتراح الصحيح .

1) a و b عددان صحيحان . n و m عددان طبيعيان حيث $nm\geq 2$. إذا كان $ab\equiv 0[nm]$ فإن :
أ - $a\equiv 0[nm]$ و $b\equiv 0[nm]$.
ب - $a\equiv 0[nm]$ أو $b\equiv 0[nm]$.
جـ - $ab\equiv 0[n]$ و $ab\equiv 0[m]$.

2) $a=2n^2+4n+16$ ؛ $b=2n+1$ مع $n\in\mathbb{N}$.
أ - من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $n+15$ هو باقي قسمة a على b.
ب - b هو حاصل قسمة a على $n+1$.
جـ - $a\equiv n+15[b]$.

114 في كل سؤال يطلب تعيين الجواب الصحيح .

1) يكتب العدد 2008 في النظام الثنائي على الشكل :
أ- 111101100 ؛ ب - 11111011000 ؛
جـ - 11110010110 .

2) يكتب العدد 1962 في النظام الثماني على الشكل :
أ- 3562 ؛ ب - 2653 ؛ جـ - 3652 .

3) يكتب العدد 1954 في النظام السادس عشر على الشكل:
أ- 7A2 ؛ ب - 72A ؛ جـ - 207A .

أصحيح أم خطأ ؟

115 بكالوريا

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبررا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$.

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y[17]$.

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في $\mathbb{Z}^2$ ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k;9+24k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .
إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27 .

116 a و b عددان صحيحان غير معدومين حيث :

$$a\equiv b[6]$$

الجمل المقترحة من بينها الصحيحة والخاطئ المطلوب تعيين الصحيحة مع التبرير وتعيين الخاطئة مع إعطاء مثال مضاد .

أ - العددان a و b لهما نفس الشفعية .
ب - a و b متوافقان بالترديد 3 .
جـ - إذا كان a و b زوجيين فإنهما متوافقان بالترديد 12.
د - العددان $2a$ و $2b$ متوافقان بالترديد 12 .

117 a عدد طبيعي . هل الجمل التالية صحيحة ؟

1) $a\not\equiv 0[5]$ فإن $a^4\equiv 1[5]$.

2) $a^2\equiv 0[25]$ أو $a^2\equiv 1[5]$ أو $a^2\equiv -1[5]$.

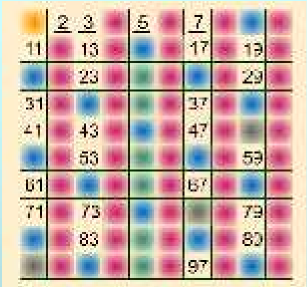
3) يكون العدد a قابلا للقسمة على 25 إذا وفقط كان العدد المكتوب في النظام العشري بالرقمين الأخرين للعدد a ، يقبل القسمة على 25 .

4) إذا كان $a\equiv 1[5]$ مع $a\geq 2$ فإن $a!\equiv 0[5]$.

الأعداد الأولية 04

الكفاءات المستهدفة

- التعرّف على أولية عدد طبيعي.
- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه.
- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك والقاسم المشترك الأكبر .
- استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر.
- استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر.
- استعمال مبرهنة بيزو.
- استعمال مبرهنة غوص ونتائجها



عالم الأعداد الأولية:لقد كانت الأعداد هي أول ما ظهر من علوم الرياضيات كونها أقرب هذه العلوم إلى واقع الإنسان ، و تمتلك بعض الأعداد خصائص سحرية و غريبة جعلتها تجذب بال العلماء و الرياضيين و منها الأعداد الأولية تمتلك الأعداد الأولية خصائص فريدة من نوعها من كونها غير منتظمة وبالتالي عدم إمكانية التخمين بها ، و لكونها أصل جميع الأعداد حسب النظرية الأساسية في الحساب .

أعداد ميرسين الأولية: يتكرر هذا الاسم كثيرا في عالم الأعداد الأولية ، و هي الأعداد من الشكل: $2^{p}-1$ ، ولعل الذي جذب الأنظار إلى هذه الأعداد هو سهولة التحقق من أوليتها في الحواسيب الثنائية ، لذلك أكبر الأعداد الأولية المعروفة حاليا من هذه الصورة من الأعداد .

قد كان عدد من الرياضيين السابقين يعتقدون أن العدد من الصورة $2^{n}-1$ يكون أوليا كلما كان n عددا أوليا ، و لكن في 1536 أثبت ريجيوس (Regius) أن العدد : $= 2047 = 23.89$ ليس أوليا حيث أنه حاصل ضرب 23×89 ، و في عام 1603 تحقق كاتالدي (Cataldi) أن العددان $2^{17}-1$ و $2^{19}-1$ أوليان ، و استنتج كاتالدي و بشكل خاطئ أن العدد $2^{n}-1$ يكون أوليا لكل : $n = 23,29,31,37$ ، حيث أثبت فيرمات في 1645 أن كاتالدي كان خاطئا بالنسبة للعددين $n = 23,37$ ، و أثبت أويلر في 1738 أن كاتالدي كان أيضا خاطئا بالنسبة للعدد $n = 29$ ، و في وقت لاحق أثبت أويلر أن كاتالدي كان مصيبا بالنسبة للعدد $n = 31$.

بمجيء الفرنسي مارين ميرسين (Marin Mersenne) 1588-1648 ، حيث وضع في مقدمة أحد كتبه أن العدد $2^{n}-1$ يكون أوليا عندما : $n = 2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$ ، و أنه مركبا لكل الأعداد $n < 257$ الصحيحة ، و رغم أن هذا التخمين من ميرسين كان خاطئا إلا أن اسمه ظل ملتصقا بهذه الأعداد حيث سميت باسمه

نشاط أول

يستعمل أحمد سيارته كل يوم للالتحاق بعمله وهو محترم لقانون السياقة . في الطريق المؤدي إلى مكان عمله يؤخره ضوءان ثلاثيا الألوان ينظمان السير غير متزامنين بانتظام ، المسافة بينهما $875m$. بعد دراسة معمّقة لاشتغال هذه الأضواء تبين له أن الضوء الأول يبقى أخضر مدة $50s$ و يبقى أحمر مدة $40s$. الضوء الثاني يبقى أخضر مدة $40s$ و يبقى أحمر $55s$.الضوءان ينتقلان للأخضر في آن واحد في منتصف الليل (نأخذ المبدأ منتصف الليل).
السرعة المتوسطة للسيارة بين الضوءين تقدر بـ $45km/h$. الضوء الأصفر يعتبر أحمر .


1) ما هي اللحظات بالثانية التي يمرّ فيها الضوء الأول إلى الأخضر؟
2) ما هي اللحظات بالثانية التي يمرّ فيها الضوء الثاني إلى الأخضر؟
3) عيّن المجموعة M_{90} مجموعة مضاعفات العدد 90 الأصغر من 86400 .
4) عيّن المجموعة M_{95} مجموعة مضاعفات العدد 95 الأصغر من 86400 .
5) عيّن $M_{90} \cap M_{95}$.
6) ما هي اللحظات بالثانية التي يمرّ فيها الضوءان إلى الأخضر في آن واحد ؟
7) ما هي أصغر لحظة غير معدومة بالثانية التي يمرّ فيها الضوءان إلى الأخضر في آن واحد ؟
8) يريد السائق المرور بالضوءين بين الساعة السابعة والساعة السابعة والنصف ما هي اللحظة التي يمكن اقتراحها له حيث يمرّ فيها الضوءان إلى الأخضر في آن واحد ؟
9) يريد السائق معرفة اللحظات t التي يمرّ فيها الضوء الأول إلى الأخضر و يمرّ الضوء الثاني إلى الأخضر إلا عندما يصل إليه .

a) ليكن u و v أعداد مرور الضوء الأول والضوء الثاني إلى الأخضر بين منتصف الليل وإحدى اللحظات t على الترتيب . عين t بدلالة u .

b) أثبت أن $t+70=95(v+1)$.

c) أثبت أن u و v يحققان المعادلة $18u-19v=5$.

d) أثبت أن $18(u+5)=19(v+5)$.

e) استنتج u و v ثم استنتج t (يمكن الاستعانة بتحليل 18 و 19 إلى جداء عوامل أولية).

f) ما هي ساعة المرور التي يمكن اقتراحها على السائق ؟ (بين الساعة 7 و الساعة 7 و النصف)

نشاط ثان

التشفير التآلفي يعتمد على ترقيم كل حرف من الحروف الأبجدية بعدد x ، ثم تعويض هذا العدد x المرفق بحرفه بالعدد y حيث $y \equiv ax+b[28]$ حيث a و b عددان طبيعيان و $0 \leq y \leq 27$

1. مثال: نأخذ $a=3$ و $b=7$.

الحرف	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	7	10	13	16	19	22	25	0	3	6	9	12	15	18
التشفير	ح	ك	ن	ف	ر	ث	ض	أ	د	ز	ي	م	ع	ق

الحرف	س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
x	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
y	21	24	27	2	5	8	11	14	17	20	23	26	1	4
التشفير	ت	ذ	غ	ج	و	ط	ل	س	ص	ش	خ	ظ	ب	هـ

1) ما هي الكلمة التي تشفيرها " كحي ".

2) عين تشفيرا للعبارة " **خمسة جويلية عيد الاستقلال** "

3) أثبت أن:إذا كان x و x' عددين طبيعيين حيث $0 \leq x \leq 27$ و $0 \leq x' \leq 27$ و كان: $3x+7 \equiv 3x'+7[28]$ فإن $x=x'$.

4) ليكن التشفير التآلفي المعرف بـ : $y \equiv 4x+5[28]$ و $0 \leq y \leq 27$ ، أذكر حرفين لهما نفس التشفير .

2. الحالة العامة:

ليكن التشفير التآلفي المعرف بـ : $y \equiv ax+b[28]$ حيث a و b عددان طبيعيان و $0 \leq x \leq 27$ و $0 \leq y \leq 27$.

1) أثبت أنه إذا كان a أوليا مع 28 فإن حرفين مختلفين من الحروف الأبجدية يشفران بحرفين مختلفين .
أي إذا كان x و x' عددين طبيعيين حيث $0 \leq x \leq 27$ و $0 \leq x' \leq 27$ و كان $ax+b \equiv ax'+b[28]$ فإن $x=x'$.

2) نفرض a غير أولي مع 28 و نضع $PGCD(a;28)=d$.
ليكن العدد k حيث $kd=28$. وليكن α الحرف الذي رتبته k . أثبت أنّ الحرفين أ و α لهما نفس التشفير.

3. تطبيق:

1) في التشفير التآلفي المعرف بـ : $y \equiv 13x+7[28]$ و $0 \leq y \leq 27$ ، نريد معرفة الحرف الذي تشفيره الحرف α الذي رتبته $y=17$.
أثبت أن الحرف الذي رتبته x المناسب لـ α يحقق المعادلة $28k-13x=18$. مع $0 \leq x \leq 27$ و حيث k عدد طبيعي.

2) حل المعادلة $28k-13x=18$ ، عين الحرف الذي تشفيره الحرف α .

الأعداد الأولية .

1. تعريف .

تعريف: القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه .

ملاحظات و نتائج:
- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لانهاية من القواسم .
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1 .
- 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد .
- 2 ، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي الأعداد أولية الأصغر من 25 .

2. خواص .

خاصية1: كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل على الأقل قاسما أوليا .

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .
- إذا كان n أوليا فإن n يقسم n والخاصية محققة .
- إذا كان n غير أولي فإن n يقبل على الأقل قاسما يختلف عن 1 وعن n . ليكن p أصغر قاسم للعدد n يختلف عن 1 وعن n.نفرض p غير أولي و منه يوجد عدد طبيعي d يقسم p حيث $1<d<p$. و بالتالي d يقسم n وهذا تناقض (لأن $d<p$ و p أصغر قاسم للعدد n) و منه p عدد أولي والخاصية محققة .

خاصية2: كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل قاسما أوليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$.

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا غير أولي أكبر تماما من 1 .

n يقبل قاسما d يختلف عن 1 وعن n ومنه $n = d \times d'$ حيث d' عدد طبيعي غير معدوم .

$d' \geq 2$ (لأن إذا كان $d'=1$ فإن $d=n$ و هذا تناقض)

نفرض $d \leq d'$ و منه $d^2 \leq d \times d'$ أي $d^2 \leq n$ و بالتالي $d \leq \sqrt{n}$.

من الخاصية 1: d يقبل على الأقل قاسما أوليا a وهو كذلك قاسم أولي للعدد n .

بما أن لدينا $a \leq d$ و $d \leq \sqrt{n}$ نستنتج أن $a \leq \sqrt{n}$.

خاصية3: مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

البرهان: نستعمل البرهان بالخلف .

نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن p أكبر عدد من مجموعة الأعداد الأولية .

نسمي N جداء كل الأعداد الأولية من 2 إلى p .

$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p$.

ليكن N' العدد الطبيعي حيث أن: $N' = N+1$. باقي قسمة N' على 2 ، 3 ، 5 ، ...أو p تعطي الباقي دوما 1 . إذن N' غير قابل للقسمة على 2 ، 3 ، 5 ، ...أو p .

إذا كان N' أوليا فإن $N'>p$ و هذا تناقض . إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر من p (الخاصية 1) و هذا تناقض .

إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

•إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
•إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .
* إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف و نقرّ أنّ n غير أولي .
* إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أنّ n أولي .

1) $\sqrt{349} \approx 18,68$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{349}$ هي 2 ، 3، 5، 7، 11، 13، 17 .
349 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 و 5 ثم $349 = 7 \times 49 + 6$ و $349 = 11 \times 31 + 8$
و $349 = 13 \times 26 + 11$ و $349 = 17 \times 20 + 9$
إذن 349 لا يقبل القسمة على 7، 11، 13 و 17 و منه 349 عدد أولي .

341 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 و 5 ثم $341 = 7 \times 48 + 5$ و $341 = 11 \times 31$
إذن 341 يقبل القسمة على 11 و منه 341 غير أولي .
3) $\sqrt{841} = 29$ بما أن $\sqrt{841}$ عدد طبيعي فإن 841 غير أولي .

يكن العدد الطبيعي $a = n^2 - 2n - 8$
هل توجد قيم لعدد n يكون من أجلها a عددا أوليا ؟

عددان طبيعيان أكبر تماما من 1 .

a ينعدم من أجل 2- و 4 .
إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ لدينا $a = (n+2)(n-4)$.
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $n + 2 \geq 2$. ثم من جل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 5 ، $n - 4 \geq 2$
إذن من أجل $n \geq 6$: a هو جداء العددين $(n+2)$ و $(n-4)$ الأكبر تماما من 1 و منه a غير أولي .
تبقى دراسة الحالتين $n = 4$ و $n = 5$.
•إذا كان $n = 4$ ، فإن $a = 0$ و منه a غير أولي .
•إذا كان $n = 5$ ، فإن $a = 7$ و منه a عدد أولي .
إذن a عدد أولي إذا و فقط إذا كان $a = 7$

2. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية.

مبرهنة: كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية .

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

n غير أولي فإن n يقبل القسمة على عدد أولي p_1 $(p_1 \geq 2)$ على الأقل و منه :
$n = p_1 \times n_1$ حيث $1 < n_1 < n$.

- إذا كان n_1 أوليا فإن المبرهنة محققة.
- إذا كان n_1 غير أولي فإن n_1 يقبل القسمة على عدد أولي p_2 $(p_2 \geq 2)$ على الأقل و منه :

$n_1 = p_2 \times n_2$ حيث $1 < n_2 < n_1$. و منه $n = p_1 \times p_2 \times n_2$.

نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول على $n_i = 1$ (i عدد طبيعي) .

الأعداد n_1 ، n_2 ، ... ، n_i متتالية متناقصة من أعداد طبيعية .

نحصل على $n = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ (k عدد طبيعي) و هو تحليل n إلى جداء عوامل أولية .

يمكن للأعداد p_1 ، p_2 ، ... ، p_k أن تتكرر في التحليل .

و عليه نحصل على $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$

حيث d_1 ، d_2 ، ... ، d_k أعداد طبيعية . نقول أن n محلل إلى جداء عوامل أولية .

ملاحظة : نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية .

خاصية: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1.
يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل a.

البرهان: n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 تحليله إلى جداء عوامل أولية $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$

- إذا كان l قاسما للعدد n فإن $n = l \times l'$ حيث l' عدد طبيعي. إذن كل قاسم أولي للعدد l هو قاسم أولي للعدد n و بالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد l يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل n ، و كل عامل أولي في تحليل l موجود في تحليل n بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل n.

إذن قواسم العدد n هي الأعداد الطبيعية من الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k}$ حيث :
$0 \leq d'_1 \leq d_1$ ؛ $0 \leq d'_2 \leq d_2$ ؛ ... ؛ $0 \leq d'_k \leq d_k$.

- عكسيا ليكن l عددا طبيعيا مكتوبا على الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k}$.

يمكننا أن نكتب $n = l\left(p_1^{d_1-d'_1} \times p_2^{d_2-d'_2} \times ... \times p_k^{d_k-d'_k}\right)$

لأن $\left(p_1^{d_1-d'_1} \times p_2^{d_2-d'_2} \times ... \times p_k^{d_k-d'_k}\right)\left(p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k}\right) = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$

و منه l يقسم n .

تمرين محلول: **1)** حلل العدد 9604 إلى جداء عوامل أولية .

2) عين مجموعة قواسم العدد 9604 .

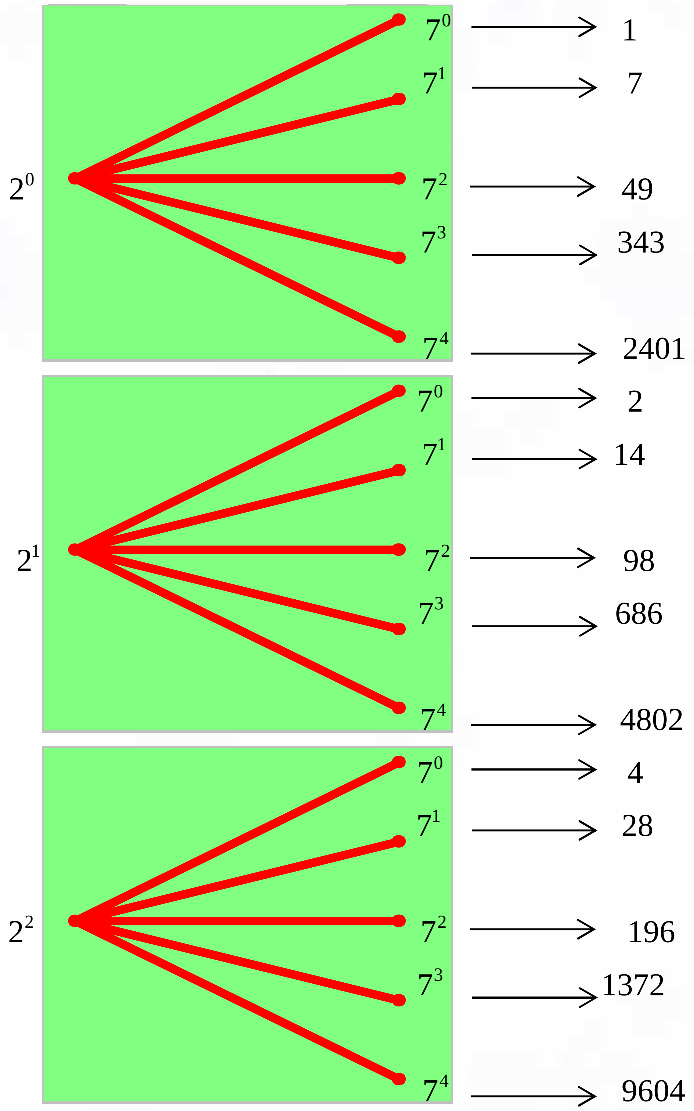
تحسب جداء الأعداد المحصل عليها .

الحل: 1) $9604 = 2^2 \times 7^4$

9604	2
4802	2
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

العدد 9604 يقبل 15 قاسم .

2) تكن D_{9604} مجموعة قواسم 9604 . لإيجاد المجموعة D_{9604} يمكن استعمال الشجرة الآتية .



$$D_{9604} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28; 49; 98; 196; 343; 686; 1372; 2401; 4802; 9604\}$$

المضاعف المشترك الأصغر لعددين.

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ M_a إلى مجموعة مضاعفات العدد a .

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6=\{0;6;12;18;24;...\}$.

ملاحظة: المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0 .

1. تعريف

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b.
$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b
يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.
و نرمز له $PPCM(a;b)$.

ملاحظات: $PPCM(a;a)=a$ و $PPCM(1;a)=a$

مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما .

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6=\{0;6;12;18;24;30;36;42;48;...\}$.
مجموعة مضاعفات 8 هي $M_8=\{0;8;16;24;32;40;48;...\}$.
$M_6 \cap M_8=\{24;48;72;96;...\}$ إذن $PPCM(6;8)=24$

2. تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين

تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين.
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m=PPCM(|a|;|b|)$.

3 . خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

خاصية: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.
$PPCM(ka;kb)=|k|PPCM(a;b)$.

البرهان: a و b عددان صحيحان غير معدومين. نضع $m=PPCM(a;b)$. و منه يوجد عددان صحيحان p و p' حيث $m=p\times a$ و $m=p'\times b$ و منه $km=kp\times a$ و $km=kp'\times b$ و بالتالي $|k|m$ مضاعف مشترك موجب تماما للعددين ka و kb و منه: $PPCM(ka;kb)\le|k|PPCM(a;b)...(1)$.
نضع $M=PPCM(ka;kb)$ و منه يوجد عددين صحيحين d و d' حيث $M=dk\times a$ و $M=d'k\times b$
و منه a يقسم $\frac{M}{k}$ و b يقسم $\frac{M}{k}$. و منه $\frac{M}{|k|}$ هو مضاعف مشترك موجب تماما للعددين a و b
و بالتالي $PPCM(a;b)\le\frac{M}{|k|}$. و منه: $|k|PPCM(a;b)\le PPCM(ka;kb)...(2)$.

من (1) و (2) نستنتج أن $PPCM(ka;kb)=|k|PPCM(a;b)$.

الحل:

نسمي M_{12} مجموعة مضاعفات 12 و M_{18} مجموعة مضاعفات 18. المجموعتان غير منتهيتين .

$M_{12}=\{0;12;24;36;48;60;72;84;96;108;...\}$ و $M_{18}=\{0;18;36;54;72;90;108;126;144;...\}$.

$M_{12}\cap M_{18}=\{0;36;72;108;144;180;...\}$ ، أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_{12}\cap M_{18}$ هو 36

إذن $PPCM\,(12;18)=36$.

الحل:

$56=2^3\times 7$ و $280=2^3\times 5\times 7$.

بما أن $PPCM\,(56;a)=280$ فإن a يقسم 280.

إذن تحليل a إلى جداء عوامل أولية من الشكل : $2^\alpha\times 5^\beta\times 7^\gamma$ حيث $0\le\alpha\le 3$ ، $0\le\beta\le 1$ ، $0\le\gamma\le 1$.

زيادة على هذا a لا يقسم 56 و إلا $PPCM\,(56;a)=56$. ومنه $\beta=1$.

إذن القيَم الممكنة للعدد a هي :

$a=2^0\times 5\times 7^0=5$ ؛ $a=2^1\times 5\times 7^0=10$

$a=2^0\times 5\times 7^1=35$ ؛ $a=2^1\times 5\times 7^1=70$

$a=2^2\times 5\times 7^1=140$ ؛ $a=2^2\times 5\times 7^0=20$

$a=2^3\times 5\times 7^0=40$ ؛ $a=2^3\times 5\times 7^1=280$

a و b عددان طبيعيان حيث أن :

$a=3^n(11^{n+2}-11^n)$ و $b=11^n\left(3^{n+1}-3^n\right)$.

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

الحل:

$a=3^n\times 11^n\times\left(11^2-1\right)=3^n\times 11^n\times 120$.

$b=11^n\times 3^n\times(3-1)=3^n\times 11^n\times 2$.

$PPCM\,(a;b)=PPCM\left(3^n\times 11^n\times 120;3^n\times 11^n\times 2\right)$.

$PPCM\,(a;b)=3^n\times 11^n\,PPCM\,(120;2)$.

و $PPCM\,(120;2)=120$.

إذن $PPCM\,(a;b)=3^n\times 11^n\times 120$.

أي $PPCM\,(a;b)=2^3\times 3^{n+1}\times 5\times 11^n$.

4 .حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

خاصية: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس .

البرهان: a و b عددان طبيعيان أكبرا من 1. p_1 ، p_2 ، ... ، p_n الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في تحليل b . نضع $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_n^{\beta_n}$.

حيث α_1 ، α_2 ، ... ، α_n ، β_1 ، β_2 ، ... ، β_n أعداد طبيعية .

كل قاسم مشترك d للعددين a و b له تحليل على الشكل : $d = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times \ldots \times p_n^{\gamma_n}$.

حيث γ_1 ، γ_2 ، ... ، γ_n أعداد طبيعية و $0 \leq \gamma_1 \leq \alpha_1$ و $0 \leq \gamma_1 \leq \beta_1$.

إذا كان δ_1 الأصغر من بين α_1 و β_1 فإن $0 \leq \gamma_1 \leq \delta_1$ بنفس الطريقة $0 \leq \gamma_2 \leq \delta_2$ ، ... ، $0 \leq \gamma_n \leq \delta_n$.

δ_2 الأصغر من بين α_2 و β_2 ، ... ، و δ_n الأصغر من بين α_n و β_n .

يكون d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا كان $\gamma_1 = \delta_1$ ، $\gamma_2 = \delta_2$ ، ... ، $\gamma_n = \delta_n$.

إذن $PGCD(a;b) = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times \ldots \times p_n^{\gamma_n}$

5 .حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.

خاصية: المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس.

البرهان: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر من 1. p_1 ، p_2 ، ... ، p_n الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في تحليل b . نضع $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_n^{\beta_n}$.

حيث α_1 ، α_2 ، ... ، α_n ، β_1 ، β_2 ، ... ، β_n أعداد طبيعية .

كل مضاعف مشترك m للعددين a و b له تحليل على الشكل : $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \ldots \times p_n^{\lambda_n}$.

حيث λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n أعداد طبيعية و $0 \leq \alpha_1 \leq \lambda_1$ و $0 \leq \beta_1 \leq \lambda_1$.

إذا كان ω_1 الأكبر من بين α_1 و β_1 فإن $0 \leq \omega_1 \leq \lambda_1$ بنفس الطريقة $0 \leq \omega_2 \leq \lambda_2$ ، ... ، $0 \leq \omega_n \leq \lambda_n$.

ω_2 الأكبر من بين α_2 و β_2 ، ... ، و ω_n الأكبر من بين α_n و β_n .

يكون m هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b إذا كان $\lambda_1 = \omega_1$ ، $\lambda_2 = \omega_2$ ، ... ، $\lambda_n = \omega_n$.

إذن $PPCM(a;b) = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \ldots \times p_n^{\lambda_n}$

6.العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

خاصية: جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر. بعبارة أخرى $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$

البرهان: باستعمال نفس الترميز السابق $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = p_1^{\gamma_1+\lambda_1} \times p_2^{\gamma_2+\lambda_2} \times \ldots \times p_2^{\gamma_n+\lambda_n}$

و بما أن γ_n هو الأصغر من بين α_n و β_n و λ_n هو الأكبر من بين α_n و β_n فإن $\gamma_n + \lambda_n = \alpha_n + \beta_n$

و منه $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \times p_2^{\alpha_2+\beta_2} \times \ldots \times p_2^{\alpha_n+\beta_n}$.

$$= a \times b$$

الحل:

نحلل العددين 5600 و 28840 إلى جداء عوامل أولية .

$5600 = 2^5 \times 5^2 \times 7$.

$28800 = 2^7 \times 3^2 \times 5^2$.

$PGCD(5600;28800) = 2^5 \times 5^2 = 800$.

$PPCM(5600;28800) = 2^7 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 201600$.

الحل:

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد $PGCD(4530;480) = 30$.

$PPCM(4530;480) \times PGCD(4530;480) = 4530 \times 480$.

و منه $PPCM(4530;480) = \dfrac{4530 \times 480}{PGCD(4530;480)}$.

$$PPCM(4530;480) = \frac{2174400}{30} = 72480$$

$$\begin{cases} a \times b = 18000 \\ PPCM(a;b) = 600 \end{cases}$$

الحل:

نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

نضع $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$ حيث a' و b' عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

و نعلم أن $PPCM(a;b) \times PGCD(a;b) = a \times b$.إذن $600 \times d = 18000$ و منه $d = 30$

الجملة تكتب :

$$\begin{cases} d^2 a' \times b' = 18000 \\ d \times a' \times b' = 600 \end{cases}$$

و نستنتج أن $a' \times b' = 20$ وبالتالي$(a' = 1$ و $b' = 20)$ أو $(a' = 4$ و $b' = 5)$ أو $(a' = 5$ و $b' = 4)$

أو $(a' = 20$ و $b' = 1)$.

الحلول هي الثنائيات

$(a;b) = (30;600)$ ، $(a;b) = (120;150)$ ، $(a;b) = (150;120)$ ، $(a;b) = (600;30)$.

مبرهنة بيزو .

مبرهنة: يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au+bv=1$$

البرهان: نفرض أنّ a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a;b)=1$ ومنه أحد العددين a أو b غير معدوم . نضع a غير معدوم .

تكن E مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $au+bv$ حيث u و v عددان صحيحان . المجموعة E غير خالية لأن a عنصر منها (بأخذ $u=1$ و $v=0$) كذلك $-a$ عنصر من E (بأخذ $u=-1$ و $v=0$) .أحد العددين a أو $-a$ موجب تماما .إذن المجموعة E تحتوي على عدد موجب تماما على الأقل . ليكن m أصغر هذه الأعداد الموجبة تماما ؛ يوجد إذن عددان صحيحان u_0 و v_0 حيث أن $m=au_0+bv_0$.

القسمة الإقليدية للعدد a على m تكتب $a=mq+r$ حيث q و r عددان طبيعيان و $0\le r<m$.

و منه : $r=a-mq$ و بالتالي $r=a-(au_0+bv_0)q=a(1-qu_0)+b(-qv_0)$ و منه r عنصر من المجموعة E (بأخذ $u=1-qu_0$ و $v=-qv_0$) بما أن m أصغر عنصر موجب تماما من E و $0\le r<m$ فإن $r=0$ و منه $a=mq$ و بالتالي m يقسم a . بنفس الطريقة نثبت أن m يقسم b .

إذن $m=1$ لأن a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما. وهذا يعني وجود u_0 و v_0 حيث $au_0+bv_0=1$.

عكسيا : نفرض $au+bv=1$ (a ، b ، u ، v أعداد صحيحة) نضع $d=PGCD(a;b)$.

d يقسم a و b و منه d يقسم $au+bv$ و بالتالي d يقسم 1 أي $d=1$ ، و منه a و b أوليان فيما بينهما .

ملاحظة: الثنائية $(u;v)$ ليست وحيدة .مثلا من أجل $a=3$ و $b=2$. $1\times3-1\times2=1$ و $-1\times3+2\times2=1$.

خواص .

خاصية1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au+bv=d$$

البرهان: a و b عددان صحيحان غير معدومين و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر. نضع $a=da'$ و $b=db'$ حيث a' و b' عددان صحيحان أوليان فيما بينهما . و منه وحسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث $a'u+b'v=1$. بضرب الطرفين في d، نحصل على: $da'u+db'v=d$ أي $au+bv=d$ وهو المطلوب.

خاصية2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

البرهان: ليكن p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p ، نضع $PGCD(a;p)=d$. بما أن p أولي فإن $d=1$ أو $d=p$ و d لا يقسم a إذن $d=1$ ، و منه p أولي مع a.

خاصية3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$.

البرهان: ليكن a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c ، إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة .

u ، v ، u' ، v' حيث : $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$. نضرب طرفا بطرف نحصل على:

$$a^2uu'+acuv'+abu'v+bcvv'=1 \text{ أي } a(auu'+cuv'+bu'v)+bc(vv')=1$$

و منه و حسب مبرهنة بيزو a و bc أوليان فيما بينهما .

أثبت أن العددين $A=4n-3$ و $B=5n-4$ عددان أوليان فيما بينهما .

الحل:

نحسب العدد $5A-4B$.

إيتيان بيزو $(1730-1783)$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو A و B عددان أوليان فيما بينهما .

الحل:

$135=55\times2+25$ ، $55=25\times2+5$ ، $25=5\times5$.

إذن $PGCD(135;55)=5$.

$5=55-25\times2$.

$25=135-55\times2$.

$5=55-(135-55\times2)\times2$.

$5=135\times(-2)+55\times5$ ، و منه $u=-2$ و $v=5$.

1) أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .

2) أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .

3) استنتج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما .

الحل:

1) نلاحظ أن :

$(2n+3)-2(n+1)=1$ إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $2n+3$ و $n+1$ أوليان فيما بينهما .

2) نلاحظ أن :

$(3n+4)-3(n+1)=1$ إذن وحسب مبرهنة بيزو فإن العددين $3n+4$ و $n+1$ أوليان فيما بينهما .

3) نلاحظ أن :

$(2n+3)(3n+4)=6n^2+17n+12$.

بما أن $n+1$ أولي مع كل من $2n+3$ و $3n+4$ فإن $n+1$ أولي مع جدائهما $6n^2+17n+12$ و هذا حسب الخاصية 3 .

مبرهنة غوص .

مبرهنة: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

البرهان: ليكن a و b عددين صحيحين غير معدومين أوليين فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$.

ليكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث a يقسم الجداء bc.

نضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في c ، نحصل على $cau+cbv=c$.

من المعطيات a يقسم الجداء bc و منه a يقسم الجداء bcv و بما أن a يقسم الجداء acu فإن a يقسم $acu+bcv$ أي a يقسم c .

خواص .

خاصية1: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .
إذا كان p يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b.

البرهان: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و ليكن p عددا أوليا ،حيث p يقسم الجداء ab.

- إذا كان p يقسم a الخاصية محققة.
- إذا كان p لا يقسم a فإن $PGCD(a;p)=1$ لأن p عدد أولي وقاسميه هما 1 و p .

إذن a و p أوليان فيما بينهما .

و بما أن p يقسم الجداء ab و هو أولي مع a و حسب مبرهنة غوص فإن p يقسم b .

و منه صحة الخاصية .

خاصية2: a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .
إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .

البرهان: لتكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة ،حيث a مضاعف للعددين b و c .

a مضاعف للعدد b إذن يوجد عدد طبيعي d حيث $a=db$.

a مضاعف للعدد c إذن يوجد عدد طبيعي d' حيث $a=d'c$.

إذن $db=d'c$.

c يقسم $d'c$ و منه c يقسم db.بما أن c أولي مع b و حسب مبرهنة غوص فإن c يقسم d .إذن يوجد عدد عدد طبيعي d'' حيث $d=d''c$.

نعوض في $a=db$ نحصل على $a=d''cb$ و منه a مضاعف للعدد bc

و منه صحة الخاصية .

مثال: العدد 116916 مضاعف لـــ 3 لأن $(1+1+6+9+1+6=24)$ و 24 مضاعف لـــ 3)

العدد 116916 مضاعف لـــ 4 لأن (16 العدد المكون من الآحاد و العشرات يقبل القسمة على 4)

بما أن 3 و 4 أوليين فيما بينهما فإن 116916 مضاعف لـــ 4×3 أي مضاعف لـــ12

2) تأكد أن الثنائية $(4;2)$ حل للمعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x-16y=4$.

3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x-16y=4$.

مارك غوص $(1777-1855)$

الحل:

1) $9x-16y=0$ و منه $9x=16y$.

16 يقسم $16y$ و بالتالي 16 يقسم $9x$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم x

نضع $x=16k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $9x=16y$ نحصل على $9(16k)=16y$ و منه $y=9k$

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k;9k)$ حيث k عدد صحيح .

2) $9\times4-16\times2=36-32=4$ و منه $(4;2)$ حل للمعادلة $9x-16y=4$.

3) بطرح 4 من طرفي المعادلة $9x-16y=4$ نحصل على $9x-16y-4=0$.

و نعلم أن $9\times4-16\times2=4$ إذن $9x-16y-(9\times4-16\times2)=0$، و منه $9(x-4)=16(y-2)$.

16 يقسم $16(y-2)$ و بالتالي 16 يقسم $9(x-4)$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $x-4$

نضع $x-4=16k$ حيث k عدد صحيح أي $x=16k+4$

بالتعويض في المساواة $9(x-4)=16(y-2)$ نحصل على $9(16k)=16(y-2)$ ومنه $y=9k+2$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k+4;9k+2)$ حيث k عدد صحيح .

2 و 3 أوليان فيما بينهما.

الحل: • نبرهن أن A يقبل القسمة على 2.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv0[2]$ أو $n\equiv1[2]$.

إذا كان $n\equiv0[2]$ فإن $A\equiv0[2]$.

إذا كان $n\equiv1[2]$ فإن $(5n+1)\equiv6[2]$ و $6\equiv0[2]$ و منه $(5n+1)\equiv0[2]$ و بالتالي $A\equiv0[2]$

إذن في الحالتين $A\equiv0[2]$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A\equiv0[2]$.

• نبرهن أن A يقبل القسمة على 3.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv0[3]$ أو $n\equiv1[3]$ أو $n\equiv2[3]$.

إذا كان $n\equiv0[3]$ فإن $A\equiv0[3]$.

إذا كان $n\equiv1[3]$ فإن $(5n+1)\equiv6[3]$ و $6\equiv0[3]$ و منه $(5n+1)\equiv0[3]$ و بالتالي $A\equiv0[3]$.

إذا كان $n\equiv2[3]$ فإن $(13n+1)\equiv27[3]$ و $27\equiv0[3]$ و منه $(13n+1)\equiv0[3]$ وبالتالي $A\equiv0[3]$.

إذن في الحالات الثلاث $A\equiv0[2]$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A\equiv0[3]$.

A يقبل القسمة على 2 و على 3 و بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن A يقبل القسمة على 6.

تعيين معاملي بيزو

a و b عددان طبيعيان حيث $a > b > 0$.

نعتبر المتتاليتين (r_n) ، (q_n) حيث $r_n = PGCD(a,b)$ و $a = q_1 b + r_1$ ، $b = q_2 r_1 + r_2$ ، $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ ...

$r_n = q_2 r_{n+1} + r_{n+2}$

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) حيث : $a = u_0 a + v_0 b$ ، $b = u_1 a + v_1 b$ و $r_n = u_{n+1} a + v_{n+1} b$

1) عين الثنائيتين (u_0, v_0) و (u_1, v_1) .

2) أحسب (u_2, v_2) بدلالة q_1 .

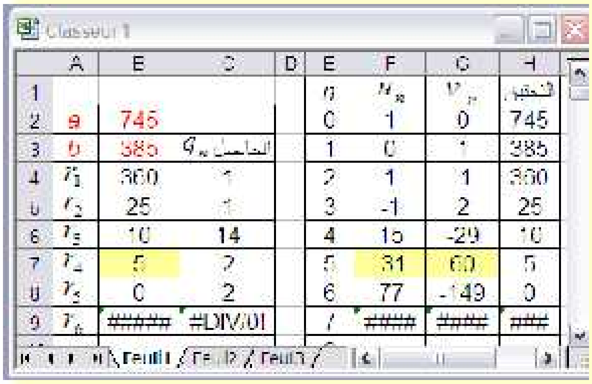
3) أحسب u_3 و v_3 بدلالة u_2 و v_2 و q_2 .

4) أعد العملية للحدين u_4 و v_4 .

5) أعط تخمينا لعبارتي u_{n+1} و v_{n+1} بدلالة q_n ، u_{n-1} ، u_n ، v_{n-1} و v_n .

6) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n$ و $v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$.

استعمال مجدول لتعيين معاملي بيزو .



Classeur1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1					n	u_n	v_n	التحقق
2	a	745			0	1	0	745
3	b	385	الحاصل q_n		1	0	1	385
4	r_1	360	1		2	1	1	360
5	r_2	25	1		3	-1	2	25
6	r_3	10	14		4	15	-29	10
7	r_4	5	2		5	31	60	5
8	r_5	0	2		6	77	-149	0
9	r_6	#####	#DIV/0!		7	####	####	###

في الخلية B_4 أحجز الوظيفة =MOD(B2;B3) ؛

وفي الخلية C_4 أحجز الوظيفة =ENT(B2/B3) ؛

نحدّد الخليتين B_4 و C_4 معا ثم نسحب إلى الأسفل .

ونحصل على $p\gcd(a,b) = 5$ الموجود في العمود B ،

وهو في الخلية سابقة للخلية التي تشمل العدد 0 .

في الخلية F_4 أحجز الوظيفة =F2-C4*F3 ؛

وفي الخلية G_4 أحجز الوظيفة =G2-C4*G3 ؛

بعد تحديّد الخليتين F_4 و G_4 نسحب إلى الأسفل ونحصل

على معاملي بيزو الموجودين في نفس السطر للعدد $p\gcd(a,b) = 5$.

للتحقيق نضيف العمود H ، ونحجز في الخلية H_2 الوظيفة =$B$2*F2+$B$3*G2 .

المبرهنة الصغيرة لِ فيرما

الهدف هو إثبات المبرهنة المسماة باسم:« مبرهنة فيرما Fermat الصغيرة ».

"إذا كان p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $\left(a^{p-1}-1\right)$ " وتسمى هذه النتيجة « المبرهنة الصغيرة لــ فيرما Fermat ».

الجزء الأوّل

1) تحقق أن : 7 يقسم 5^6-1 وأن 5 يقسم 8^4-1 وأن 5 يقسم 6^4-1 وأن 11 يقسم $9^{10}-1$.

2) تحقق من أن : 6 لا يقسم 11^5-1 و 3 لا يقسم 6^2-1 و 12 لا يقسم 3^9-1 . اشرح لماذا ؟

3) هل يمكن تطبيق هذه المبرهنة من أجل $p=4$ و $a=5$ ؟ في هذه الحالة الخاصية هل يقسم p العدد $\left(a^{p-1}-1\right)$ ؟ ماذا يمكن أن نستنتج ؟

الجزء الثاني

ليكن $a=9$ و $p=5$ ونسمي E المجموعة : $E=\{1\,;2\,;3\,;4\}$

1) من أجل كل عنصر k من E، نرمز بالرمز r_k إلى باقي القسمة الإقليدية للعدد ka على p .

عين r_1 ، r_2 ، r_3 ، r_4 ثم بيّن أنّ المجموعة $\{r_1;r_2\,;r_3;r_4\}$ هي E .

2) استنتج أنّ : $9\times18\times27\times36\equiv4\times3\times2\times1[5]$ وأنّ : $\left(9^4-1\right)(4\times3\times2\times1)\equiv0[5]$.

3) استنتج أنّ 5 يقسم العدد $\left(9^4-1\right)$.

الجزء الثالث

ليكن p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p . نسمي E المجموعة : $\{1;2;3;...;p-1\}$

1) نرمز بالرمز r_k إلى باقي القسمة الإقليدية للعدد ka على p . برّر أنه من أجل كل عنصر k من E ؛ $r_k\neq0$.

2) ليكن k و k' عنصرين من E بحيث : $r_k=r_{k'}$ أثبت أنّ $(k-k')a$ يقبل القسمة على p و أن $k=k'$.

3) نعتبر F مجموعة البواقي r_k عندما يتغيّر k في المجموعة E . بيّن أنّ F تشمل $(p-1)$ عنصرا وأن $E=F$.

4) باعتبار الجداء $a\times2a\times3a\times...\times(p-1)a$ و بملاحظة أن: $r_1\times r_2\times r_3\times...\times r_{p-1}=1\times2\times3\times...\times(p-1)$.

برهن أنّ : $\left(a^{p-1}-1\right)\left(1\times2\times3\times...\times(p-1)\right)\equiv0[p]$.

5) استنتج أنّ p يقسم $a^{p-1}-1$.

الجزء الرابع

بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي a ومن أجل كل عدد أولي p فإن العدد $\left(a^p-a\right)$ يقبل القسمة على p .

موضوع محلول

تمرين :

1. نعتبر المعادلة (E) : $109x - 226y = 1$
حيث x و y عددان صحيحان .
أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 . ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟
ب) برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(141+226k ; 68+109k)$ ، حيث k عدد صحيح .
جـ) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر من أو يساوي 226 ؛ ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e يحقق $109d = 1+226e$ (يطلب تعيين قيمتي d و e).

2. برهن أن 227 عدد أولي .

3. نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a \le 226$.
نعتبر الدالتين f و g لمجموعة A في نفسها .
f تُرفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{109} على 227 ؛ g تُرفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{141} على 227 .
أ) تحقق من أنّ $g[f(0)] = 0$.
ب) برهن أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ، $a^{226} \equiv 1[227]$.
جـ) استنتج من 1. ب) أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ، $g[f(a)] = a$. ما القول عن $f[g(a)] = a$ ؟

حل مختصر

1. أ) باستعمال خوارزمية أقليدس نحصل على $p\gcd(226,109)=1$.
حسب مبرهنة بيزو يوجد على الأقل عددان صحيحان x و y يحققان (E)
ب) نخمن من الثنائية $(141+226k ; 68+109k)$ أن $(141,68)$ حل خاص لمعادلة (E) وبالتحقيق نجد $109\times141-226\times68=1$. ومنه
$109x-226y=109\times141-226\times68$ أي $109(x-141)=226(y-68)$ نسميها (E') . 226 يقسم $109(x-141)$ و $p\gcd(226,109)=1$ إذن حسب غوص 226 يقسم $(x-141)$ أي $x-141=226k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض في (E') نجد $y-68=109k$ إذن $x=226k+141$ و $y=109k+68$ مع $k\in\mathbb{Z}$. وعكسيا بالتعويض $(141+226k ; 68+109k)$ في (E) نجد $109(141+226k)-226(68+109k)=1$.
جـ) $109d=1+226e$ معناه $109d-226e=1$. ومما سبق ينتج أن $d=226k+141$ و $e=109k+68$ وبما أن $0<d\le226$ معناه $0<226k+141\le226$ نجد $k=0$ أي $d=141$ و $e=68$.

2. $\sqrt{227}\approx15,07$ ، القواسم الأولية التي تكون أصغر من $\sqrt{227}$ هي 2، 3، 5، 7، 11، 13 والعدد 227 لا يقبل القسمة على أي منها إذن 227 أولي

3. أ) $0^{109}\equiv0[227]$ إذن $f(0)=0$ ، ومنه $[f(0)]^{141}=0$ إذن $[f(0)]^{141}\equiv0[227]$ أي $g[f(0)]=0$.
ب) 227 عدد أولي إذن هو أولي مع كل a حيث $0<a<227$ ومنه a لا يقبل القسمة على 227 ، وحسب المبرهنة الصغيرة لفرما $a^{226}\equiv1[227]$.
جـ) من أجل كل $a\in A-\{0\}$ ، $g[f(a)]\equiv[f(a)]^{141}[227]$ بما أن $f(a)\equiv a^{109}[227]$ فإن $[f(a)]^{141}\equiv(a^{109})^{141}[227]$ إذن $g[f(a)]\equiv a^{109\times141}[227]$ وحسب 1. ب) $109\times141=1+226\times68$
ومنه $a^{109\times141}=a(a^{226})^{68}$ وبما أن $a^{226}\equiv1[227]$ فإن $(a^{226})^{68}\equiv1[227]$ ، ومنه $a(a^{226})^{68}\equiv a[227]$ إذن $g[f(a)]\equiv a[227]$
وبالمثل $f[g(a)]\equiv[g(a)]^{109}[227]$ أي $f[g(a)]\equiv(a^{141})^{109}[227]$
ومنه $f[g(a)]\equiv a[227]$

تعاليق

يمكن استنتاج الحل الخاص من خوارزمية أقليدس .

المطلوب البرهان على عدد أولي وبالتالي برنامج الحاسبة غير كاف .

لكي نطبق المبرهنة الصغيرة لـ فيرما جب البرهان على الشرط أن a لا يقبل القسمة على العدد الأولي 227 . تطبيق خواص الموافقات وكذلك الخواص على القوى الطبيعية

موضوع موجّه

تنبيه

من الضروري تحديد الموضوع المطروح وأي مسلك يجب اتخاذه ، على سبيل المثال هنا ، للبرهان أنّ عددين أوّليان يجب التفكير في التحليل إلى جداء عوامل أولية أو استعمال مبرهنة بيزو .

السؤال على الدرس هو الأداة الرئيسية للاستدلال .

تمرين. (من بكالوريا)

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

1. برهن أنّه إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث $au+bv=1$ فإنّ a و b أوّليان فيما بينهما .

2. استنتج أنه إذا كان $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ ، فإنّ a و b أوّليان فيما بينهما .

3. المطلوب تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$.

كل ثنائية $(a;b)$ تحقق الشرط تسمى حلا .

أ) عين a عندما يكون $b=a$.

ب) تحقق من أنّ $(1;1)$ ، $(2;3)$ و $(5;8)$ هي ثلاث حلول خاصة .

ج) بيّن أنه إذا كانت $(a;b)$ حلا وإذا كان $a\neq b$ فإن $a^2-b^2<0$.

4. أ) بيّن أنه إذا كانت $(x;y)$ حلا خاصا يختلف عن $(1;1)$ فإنّ $(y-x;x)$ و $(y;y+x)$ هما كذلك حلان.

ب) استنتج من **3.** ب) ثلاث حلول أخرى .

5. نعتبر المتتالية (a_n) حدودها أعداد طبيعية غير معدومة والمعرفة بـ : $a_0=a_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(a_n;a_{n+1})$ هي حل .

استنتج أنّ العددين a_n و a_{n+1} أوّليان فيما بينهما .

توجيهات

1. يمكنك ، إن استعصى الأمر ، الاستعانة ببرهان مبرهنة بيزو .

2. تجنب النشر واعتبر أنّ 1 هو مربع لكل من العددين -1 و 1 .

3. ج) استعمل البرهان بالخلف لإثبات أنّ $ab>1$ و $a^2-b^2<0$ (مع $a\neq b$) .

4. أ) تجنب الحسابات الطويلة ، واستخرج الثنائيتين من العبارة x^2+xy-y^2 أو العبارة $-\left(x^2+xy-y^2\right)$.

5. استعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنّ $(a_n;a_{n+1})$ هي حل .

تمارين تطبيقية

1 ـ الأعداد الأوّلية .

1 باستعمال جدول إراطوستان عين الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 150 .

2 أ ـ ما هو عدد القسمات التي يمكن إجرائها على الأعداد الأولية المتتابعة لمعرفة أن العدد 1429 أولي ؟
ب ـ بدون استعمال حاسبة و لا جدول الأعداد الأولية بين أن 1429 ليس أوليا .

3 أ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير أولي وأكبر تماما من 1 يقبل قاسما a أوليا حيث $a \leq \sqrt{n}$.
ب ـ الأعداد الأولية الأصغر من 30 هي :
2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29 .
اشرح لماذا العدد 853 أوليا .

4 في كل حالة من الحالات التالية أذكر إن كان العدد أوليا .
أ ـ 251 .   ب ـ 341   ج ـ 1023 .

5 تعرف على الأعداد الأولية من بين الأعداد المقترحة التالية : 937 ، 3705 ، 1933 ، 3411 ، 1549 ، 4163 .

6 n عدد طبيعي أصغر من 150 ، لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الستة الأولى .
هل العدد n أولي ؟

7 برهن أنه إذا كان n عددا طبيعيا أوليا فإن $n+7$ يكون غير أولي .

8 n عدد طبيعي أولي أكبر تماما من 3 .
برهن أن n يكتب على الشكل $3k+1$ أو $3k-1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$. هل العكس صحيح ؟

9 ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5 .
أ ـ برهن أن p يكتب على الشكل :
$12k+1$ أو $12k-1$ أو $12k+5$ أو $12k-5$
مع $k \in \mathbb{N}$.
ب ـ ليكن $N = p^2+11$ باستعمال البرهان بفصل الحالات ، عين باقي قسمة N على 24 .

10 n عدد طبيعي أولي أكبر تماما من 3 .
أ ـ برهن أن $8n-1$ يوافق 0 أو 1 بترديد 3 .
ب ـ استنتج أنه إذا كان العدد $8n-1$ أوليا ، فإن العدد $8n+1$ ليس أوليا .

11 ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5 .
برهن أنه إذا كان p و $p+2$ عددين أوليين فإن $p+1$ يقبل القسمة على 6

12 p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 3 .
برهن أن p^2-1 يقبل القسمة على 8 .

13 n عدد طبيعي حيث $n \geq 5$.
أ ـ برهن أن أحد من الأعداد التالية :
$n+1$، $n+3$، $n+7$، $n+9$ ، $n+13$ ، $n+15$ ، يقبل القسمة على 5 .
ب ـ هل توجد قيم للعدد n التي تكون الأعداد الستة السابقة، أولية ؟

14 n عدد طبيعي و $a = n^2+3n+2$.
هل توجد قيم للعدد n التي يكون من أجلها العدد a أوليا ؟

15 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n^2+8n+15$ ليس أوليا .

16 n عدد طبيعي غير معدوم .
نضع $n! = 1\times2\times3\times...\times n$ (n عاملي)
1) b عدد طبيعي غير معدوم حيث $b \leq 2007$.
أ ـ $a = 2007!+b$ ، برهن أن العدد a ليس أوّليا .
ب ـ استنتج قائمة لـ 2007 عددا متتابعا ليس أوليا.
2) كيف يمكن إنشاء بالمثل ، قائمة لـ 3000 عددا متتابعا ليس أوّليا .

17 أ ـ تحقق من أن العدد 173 أولي .
ب ـ عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية حيث $x^2-y^2=173$.
ج ـ p عدد طبيعي أوّلي فردي . عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية حيث $x^2-y^2=p$.

18 أ ـ أنشر الجداء $(a^2-a+1)(a^2+a+1)$.
ب ـ عين ~ و   حتى يكون
$a^2-a+1=(a+~)^2+$.

جـ ـ يكن a عدد صحيح . هل يمكن للعدد a^4+a^2+1 أن يكون أوليا ؟

التحليل إلى جداء عوامل أولية :

19 عيّن كل القواسم الموجبة لكل من الأعداد : 360 ، 400 ، 1980 و 121 .

20 نعتبر العددين :
$b=2^3\times3^2\times7\times11$ ؛ $a=2^4\times3^5\times5\times7^2\times11$

1) برر أن العدد a يقبل القسمة على b .

2) ما هو حاصل قسمة العدد a على b ؟

21 ما هي قواسم مربع عدد طبيعي أولي ؟

22 1) حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 725 .

2) عين كل القواسم الموجبة للعدد 725 .

3) عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2-y^2=725$.

23 ليكن a عدد طبيعي . برهن أنه إذا قسم 2 العدد a^2 فإن 2 يكون قاسما للعدد a .

24 a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .
برهن أنه إذا كان العدد الأولي p يقسم a^2 فإن p يقسم a .

25 أ ــ كيف يمكن معرفة أن عددا N هو مربع تام من خلال تحليله إلى جداء عوامل أولية ؟

ب ــ عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $240n$ مربعا تاما .

ج ــ جد عددا مكون من أربع أرقام ، رقمه الأخير 9 وهو مربع تام ، يقبل القسمة على 147 .

26 1) حلل العدد $a=4312$ إلى جداء عوامل أولية .

2) ما هو أصغر عدد طبيعي بضربه بالعدد a نحصل على : أ ــ مربع تام ؟

ب ــ مضاعف موجب للعدد 1000؟

27 1) حلل العدد 4032 إلى جداء عوامل أولية .

2) عين العدد الطبيعي n حيث يكون: $n(n+1)=4032$.

2 ـ المضاعف المشترك الأصغر لعددين .

28 أحسب المضاعف المشترك للعددين a و b في كل من الحالات المقترحة التالية :

أ - $a=26$ و $b=12$.

ب - $a=18$ و $b=-15$.

جـ - $a=-12$ و $b=-13$.

د - $a=230$ و $b=128$.

هـ - $a=876$ و $b=1028$.

29 أحسب المجامع المقترحة أدناه ، استعمل المضاعف المشترك الأصغر ، وأعط النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال .

$\frac{13}{84}+\frac{9}{140}$ ؛ $\frac{23}{216}+\frac{55}{195}$ ؛ $\frac{19}{210}+\frac{82}{75}$.

30 في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد الطبيعي a غير المعدومة حيث :

أ ــ $ppcm(a,56)=392$.

ب ــ $ppcm(a,18)=630$.

جـ ــ $ppcm(a,42)=882$.

31 العدد الطبيعي n يوافق 3 بالترديد 35 وبالترديد 28 .

أ ــ برهن أن $n-3$ هو مضاعف مشترك للعددين 35 و 28 .

ب ــ ما هي أصغر قيمة للعدد n .

32 عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم بحيث يكون 7 هو باقي قسمته عل كل من العددين 52 و 64 .

33 n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب $ppcm(n,2n+1)$.

34 أحسب المضاعف المشترك الأصغر للعددين $2n+2$ و $4n+2$ ، مع n عدد طبيعي .

35 n عدد طبيعي غير معدوم.
عين $ppcm(a,b)$ حيث :
$a=(3^{2n}-1)(7^{2n}-1)$ و $b=(3^n+1)(7^n+1)$.

36 n عدد طبيعي أكبر من 3 .
$a=(6n^2-24)(n^2-9)$ ،
$b=(3n^2+3n-18)(n^2-n-6)$.

أ ــ برهن أن :
$ppcm(a,b)=(n^2-4)(n^2-9)\,ppcm(6,3)$.

ب ـــ عين $ppcm(a,b)$.

37 العدد d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ، ما هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a^2 و ab ؟

38 $a=256$ و $b=5040$.

أ ـــ حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين a و b ، ثم عيّن $p\gcd(a,b)$ و $ppcm(a,b)$.

ب ـــ عيّن $p\gcd(a,b)$ باستعمال خوارزمية أقليدس ، ثم استنتج $ppcm(a,b)$.

39 عين $p\gcd(a,b)$ و $ppcm(a,b)$ حيث : $a=460845$ و $b=372645$.

40 عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة المعطاة ، في كل من الحالتين التاليتين .

أ - $\begin{cases} a+b=60 \\ ppcm(a,b)=40 \end{cases}$.

ب ـــ $\begin{cases} a-b=22932 \\ ppcm(a,b)=98280 \end{cases}$.

41 عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة المقترحة في كل من الحالات التالية :

أ ـــ $ppcm(a,b)=21\times p\gcd(a,b)$.

ب ـــ $ppcm(a,b)-p\gcd(a,b)=187$.

ج - $ppcm(a,b)=p\gcd(a,b)$.

د ـــ $ppcm(a,b)+11p\gcd(a,b)=20$.

هـ - $ppcm(a,b)-9p\gcd(a,b)=13$ مع $a\le b$.

في التمارين 42 ، 43 و 44 المطلوب تعيّن كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية .

42 $p\gcd(a,b)=7$ و $ppcm(a,b)=84$.

43 $p\gcd(a,b)=14$ و $ppcm(a,b)=420$.

44 $p\gcd(a,b)=18$ و $ppcm(a,b)=90$.

45 n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 6 .

نضع : $a=3n+2$ ، $b=n-5$.

أ ـــ أحسب $a-3b$

استنتج أن $p\gcd(a,b)=p\gcd(b,17)$.

ب ـــ عين قيم العدد n التي يكون من أجلها $p\gcd(a,b)=17$ و $ppcm(a,b)\le 150$.

3 - مبرهنة بيزو .

46 n عدد طبيعي . أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما في كل من الحالتين التاليتين .

أ ـ $a=n$ ؛ $b=2n+1$.

ب ـــ $a=2n+3$ ؛ $b=3n+5$.

47 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون :

$PGCD(11n+3,7n+2)=1$ ؛ $PGCD(n,n^2+1)=1$.

48 n عدد طبيعي غير معدوم ؛

نضع $a=2n^2+4n+1$ و $b=n+2$.

باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

49 n عدد طبيعي غير معدوم .

أ ـــ تحقق من أن $(n^3+1)^2=n^2(n^4+2n)+1$.

ب ـــ استنتج أن العددين n^3+1 و n^4+2n أوليان فيما بينهما .

50 n عدد طبيعي غير معدوم .

أ ـــ حلل العدد $n(2n+1)-1$.

ب ـــ باستعمال مبرهنة بيزو ، جد القاسم المشترك الأكبر للعددين $n+1$ و $n(2n+1)$.

51 بيّن باستعمال خوارزمية أقليدس ، أن العددين 12 و 35 أوليان فيما بينهما .

استنتج ثنائية من $\mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة $12x+35y=1$.

52 أ ـــ أكتب خوارزمية أقليدس لتعيّن $PGCD(257,45)$.

ب ـــ انطلاقا من المساواة الأخيرة والتي يكون فيها الباقي غير معدوم ، أحسبه بدلالة البواقي السابقة له .

جـ ـــ عيّن ثنائية من الأعداد الصحيحة (u,v) حيث يكون $257u+45v=PGCD(257,45)$.

53 $a=1050$ و $b=735$.

أ ـــ باستعمال خوارزمية أقليدس ، عيّن $PGCD(a,b)$.

ب ــ عين عددين صحيحين u و v حيث :

$.au+bv=PGCD(a,b)$

54 بيّن باستعمال خوارزمية أقليدس ، أن العددين 50 و 77 أوليان فيما بينهما .

استنتج ثنائية من $\mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة $50x+77y=3$.

55 1) عيّن $PGCD(168,20)$.

2) هل المعادلة $168x+20y=6$ تقبل **حلا** في $\mathbb{Z}^2$ ؟

3) هل المعادلة $168x+20y=4$ تقبل **حلا** في $\mathbb{Z}^2$ ؟

4 ـ مبرهنة غوص .

56 عيّن كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الصحيحة التي تحقق $5a=7b$

57 عيّن كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الصحيحة التي تكون حلول للمعادلة $55x=16y$.

58 عيّن كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الصحيحة التي تكون حلول للمعادلة $21(x-3)=12(y+4)$.

59 1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $3x-13y=1$.

2) استنتج مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث $3x\equiv 1[13]$.

60 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية

$(1)\ldots 2045x-64y=1$

1) عيّن $PGCD(2045,64)$.

2) استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

عيّن حلا خاصا للمعادلة (1).

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

61 في $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المعادلة (1) التالية: $11x-5y=14$.

1) تحقق من أن الثنائية $(19,39)$ حل للمعادلة (1) ثم استنتج كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الصحيحة التي تحقق المعادلة (1) .

2) بيّن أنه توجد ثنائية وحيدة (x_0,y_0) حلا للمعادلة (1) مع $0<x_0<5$.

62 في المستوي المنسوب إلى معلم ، نعتبر المستقيم Δ ذي المعادلة $21x-31y-2=0$.

أ ــ تحقق أن النقطة $A(6,4)$ تنتمي إلى المستقيم Δ .

ب ــ عين كل نقط المستقيم Δ التي إحداثياتها تكون أعدادا صحيحة .

63 n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر العدد a حيث $a=n(n^2+5)$.

برهن أن a يقبل القسمة على 6 .

64 n عدد طبيعي أكبر تماما من 2 . $a=n(n^2-1)(n^2-4)$.

1) أ ــ أكتب العدد a على شكل تحليل إلى جداء خمسة أعداد متتالية .

ب ــ برهن أن العدد a يقبل القسمة على كل من 3 و 5 .

2) برهن أن العدد a يقبل القسمة على 8 .

استنتج مما سبق أن العدد a يقبل القسمة على 120 .

65 **السؤال :** n عدد طبيعي غير معدوم . هل العدد $6(n^2+n)$ يكون دائما قابلا للقسمة على 24 ؟

الجواب : من كتابة العدد $6(n^2+n)$ فإنه يقبل القسمة على 6 ولدينا $n^2+n=n(n+1)$.

بما أن $n(n+1)$ عدد زوجي فإن العدد $2(n^2+n)$ يقبل القسمة على 4 وبالتالي $6(n^2+n)$ يقبل القسمة على 4 . وحسب مبرهنة غوص فإن العدد $6(n^2+n)$ يقبل القسمة على $6\times 4=24$

ما هو تعليقك على هذا الجواب علما أنه من أجل $n=1$ يكون $6(n^2+n)=12$ ؟

5 ـ المبرهنة الصغيرة لفرما .

66 أحسب باقي قسمة العدد 7^{10} على 11 ، ثم 7^{2521} على 11 .

67 أ ــ برهن أن العدد 331 أولي .

ب ــ n عدد طبيعي يكتب في النظام العشري بـ 330 رقما كلها مساوية للعدد 9 . أحسب $n+1$.

جـ ــ استعمل المبرهنة الصغيرة لفرما للبرهان على أن العدد n يقبل القسمة على 331 .

68 برهن أنه من أجل كل عدد صحيح n ، n^5-n يقبل القسمة على 15 .

69 1) ليكن عددا صحيحا .
ما هو باقي قسمة العدد n^3 على 3 ؟ و n^4 على 3 ؟
2) عين مجموعة قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $n^4+n^3+2n^2+2n+1\equiv 0[3]$.

70 برهن أنه من أجل كل عدد صحيح n ، $n^{13}-n$ يقبل القسمة على 2730 .

71 1) برهن أن $x^3\equiv x\,[3]$ وهذا من أجل كل عدد صحيح x .
2) ما هي قيم العدد الصحيح x حيث $x^3\equiv x\,[4]$ ؟
3) استنتج قيم x حيث $x^3\equiv x\,[12]$.

72 1) a عدد صحيح ، ما هي القيم التي يمكن أن توافق a^4 بترديد 5؟
2) استنتج أن المعادلة $x^4+781=3y^4$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

6 ـ تشفير الكلمات

في التمارين من 73 إلى 77 نضع $\mathcal{K}=\{0,1,2,...,27\}$
ونستعمل الحروف المرقمة كما يلي:

ا	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

73 نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x\mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x+3$ على 28 .
1) شفر الكلمة " **الجزائر**"
2) بين أنه من أجل كل y من المجموعة $\mathcal{K}$ يوجد x وحيد في المجموعة $\mathcal{K}$ حيث يكون y هو باقي قسمة $x+3$ على 28.
3) حل تشفير كل من الكلمات التالية :
تبضل ؛ **ثغوا ثهصاشثث ؛ وذوز** .

74 لتشفير كلمة نستعمل الدالة f للمجموعة $\mathcal{K}$ في نفسها حيث $f(x)$ هو باقي قسمة العدد $15x+2$ على 28 ، مع اعتبار العدد x هو رتبة الحرف قبل التشفير و $f(x)$ هو رتبة الحرف بعد التشفير .
نستعمل مجدول إكسال للمساعدة :
في العمود الأول من A_2 إلى A_{29} نسجل الحروف وأمامها من B_2 إلى B_{29} نسجل أعداد المجموعة $\mathcal{K}$. في الخلية C_2 نحجز الوظيفة =MOD(15*B2+2;28) ؛ وفي الخلية D_2 نحجز الوظيفة =INDEX($A$2:$B$29;1+C2;1) ؛ ثم نحدد الخليتين معاً ونسحبهما إلى غاية الصف 29 .
أ ـ نُشفر الكلمة " **رياضيات** ".
ب ـ حل التشفير للكلمة " **عرتناهطت** ".

75 نعتبر الدالة f للمجموعة $\mathcal{K}$ في نفسها حيث $f(x)$ هو باقي قسمة العدد $14x+3$ على 28 .
1) شفر الكلمة " **سكر** " . ما هو المشكل المطروح ؟
2) بيّن أنه من أجل كل عددين a و b من المجموعة $\mathcal{K}$، إذا كان $f(a)=f(b)$ ، فإنّ $a-b\equiv 0[2]$.
3) اشرح كيف يمكن اختيار الدالة f حتى يكون تشفير الكلمات وحل تشفير الكلمات ، ممكنا ؟

76 نعرف التشفير بواسطة الدالة f حيث $f(x)$ هو باقي قسمة $11x+6$ على 28 .
1) شفر كلمة " **تلمسان** " .
2) حل المعادلة $11x\equiv 1[28]$ (لاحظ $55=5\times 11$) .
3) بيّن أنه إذا كان $f(x)=y$ فإن $x\equiv 23y+2[28]$.
4) بين أن كل حرفين مختلفين يُحوّلان إلى حرفين مختلفين.
5) حل تشفير العبارتين التاليتين : شبكخغ ؛ **هغخعب** .

77 نريد استعمال تشفير تآلفي لحل تشفير الجملة التالية :
" **كجرثظليثه ظق جفجرلو ثكثلثث ثكختقتو** "
نعرّف التشفير التآلفي بـ $y\equiv ax+b[28]$ حيث x هو الرقم المناسب للحرف قبل التشفير و y الرقم المناسب للحرف بعد التشفير . a و b عددان طبيعيان محصورين بين 0 و 27 ونفرض في هذا التمرين أن a عدد أوّلي . نفرض أن الحرف "ث" يحول إلى الحرف "ذ" والحرف "ص" يحول إلى الحرف "خ" .

1) بيّن أنّ : $\begin{cases}3a+b\equiv 8[28]\\13a+b\equiv 6[28]\end{cases}$.

2) بيّن أنّ : $5a=14k-1$ مع k عدد صحيح .

3) أ. بيّن أنّ : $a\equiv 11[14]$.

ب. استنتج قيمة a ثم قيمة b .

جـ. تحقق أن a و 28 أوليان فيما بينهما .(يجب أن يتحقق هذا الشرط لكي لا يحول حرفين مختلفين إلى نفس الحرف)

4) أعط تشفيرا للكلمة " **رياضيات** "

5) حل تشفير الجملة المعطاة سابقا .

تمارين للتّعمّق

1 - الأعداد الأوّلية .

78 k عدد طبيعي . نضع $n=2310k+2100$.

1) برهن أنه إذا غيرنا أحد أرقام العدد n بدون تغيير رقم آحاده فيكون دائما غير أولي .

2) برهن أن $n+1\equiv 0[11]$ ، $n\equiv 0[3]$ ، $n\equiv 0[5]$ و $n\equiv 0[7]$.

3) استنتج أن n يكون دائما غير أولي مهما غيرنا أي رقم من أرقامه .

4) برهن أنه يوجد عدد غير منته من الأعداد بحيث لا يمكن تحويلها إلى أعداد أولية بتغيير رقما منها .

79 أ ــ برهن أنه كل عدد غير أولي n أكبر من أو يساوي 6 يقسم العدد $(n-1)!$.

تذكير : $(n-1)!=1\times2\times...\times(n-1)$.

ب ــ هل الخاصية السابقة تبقى صحيحة من أجل n أولي؟

80 ليكن p عددا أوليا . نضع $n=2\times3\times...\times P$.

1) برر أن الأعداد $n+2$ ، $n+3$ ، $n+4$ ، ... ، $n+p$ ليست أولية .

2) استنتج عشرة أعداد طبيعية متتابعة غير أولية ؛ ثم عشرون عددا متتابعا غير أولي .

81 أ ــ a و b عددان طبيعيان أوليان حيث $a>b$.

عين كل الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث : $x^2-y^2=(ab)^2$.

ب ــ **تطبيق:** عين الثنائيات (x,y) في الحالتين التاليتين : $(a,b)=(7,2)$ ؛ $(a,b)=(11,5)$.

82 أ ــ برهن أن كل مجموع 5 أعداد طبيعية فردية متتالية ، ليس أوليا .

ب ــ في الحالة العامة من أجل $n\geq 2$ ، هل يمكن أن يكون مجموع n عددا طبيعيا فرديا متتابعا ، أوليا .

83 أعداد مرسان (Mersenne)

أعداد مرسان هي الأعداد الأولية التي تكتب على الشكل : $N=2^p-1$ مع $p\in\mathbb{N}$.

أ ــ a و n عددان طبيعيان غير معدومين ويختلفان عن 1.

بسط المجموع $1+a+a^2+...+a^{n-1}$.

ب ــ برهن أنه إذا كان a^n-1 أوليا فإن $a=2$.

جـ ــ برهن أنه إذا كان n غير أولي فإن 2^n-1 يكون غير أولي .

د ــ برهن أنه إذا كان p أوليا فإن 2^p-1 يكون أوليا من أجل بعض القيم للعدد p ويكون غير أولي من أج القيم الأخرى .

84 a و b عددان طبيعيان . نضع $N=a^4+4b^4$

أ ــ برهن أن :

$N=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$.

ب ــ برهن أنه من أجل $b\geq 2$ ، N لا يمكن أن يكون أوليا .

جـ ــ من أجل $b=1$ ، هل يمكن أن يكون N أوليا ؟

د ــ برهن أن العدد (1207^4+4^{1205}) ليس أوليا .

85 نريد تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تكون من أجلها الأعداد $n+4$ ، $n+6$ ، $n+10$ ، $n+12$ ، $n+16$ ، $n+22$ أوّلية .

أ ــ أدرس الحالات $n\leq 7$.

ب ــ أدرس الحالات $n>7$ ومن أجل ذلك استعمل باقي القسمة الأقليدية للعدد n على 7 .

86 ليكن p عددا أوليا . عين مجموع وجداء كل القواسم الموجبة للعدد p^n حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

87 1) حلل العدد 469 إلى جداء عوامل أولية ، ثم استنتج كل قواسمه الموجبة .

2) تحقق أنه من أجل كل عددين طبيعيين x ، y يكون $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

3) عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^3-y^3=469$.

88 ليكن p عددا أوليا . أثبت أنه يكون p قاسما للعدد 1806 إذا وفقط إذا كان $p-1$ قاسما للعدد 1806 .

89 a و b عددان طبيعيان . نضع $n=2^a3^b$.

أ ــ عين عدد القواسم الموجبة للعدد n .

ب ــ عين n علما أن عدد قواسم العدد $2n$ هو ضعف عدد قواسم العدد n .

90 1) ليكن $n=200$

أ ــ عين مجموعة القواسم الموجبة للعدد n .

ب ــ ليكن N عدد قواسم العدد n و p جداء هذه القواسم . تحقق من العلاقة (1) : $n^N=p^2$.

2) ليكن $n=2^a5^b$ مع a و b عددين طبيعيين .

أ ــ برهن أن عدد قواسم العدد n هو $N=(a+1)(b+1)$.

ب ــ أحسب الجداء p لهذه القواسم .

جـ ــ هل العلاقة (1) هي دائما صحيحة ؟

د ــ عين العدد n من الشكل $2^a\times5^b$ علما أن $p=20^{42}$.

91 ليكن N عددا طبيعيا حيث تحليله إلى جداء عوامل أولية هو $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$.

أ ــ برهن أن عدد القواسم الموجبة للعدد N هو $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$.

ب ــ برهن أنه إذا كان عدد القواسم الموجبة لعدد طبيعي ، فرديا فإن هذا العدد يكون مربعا تاما .

92 نريد تعيين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $2^8+2^{11}+2^n$ مربعا تاما ، أي يوجد عدد طبيعي k حيث $2^8+2^{11}+2^n=k^2$.

أ ــ تحقق من أن $2^n=(k+48)(k-48)$.

ب ــ استنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a و b يحققان : $2^b=k-48$ ، $2^a=k+48$ ، $a+b=n$ و $2^b\left(2^{a-b}-1\right)=96$.

جـ ــ باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية للعدد 96 ، عين قيمة العدد n .

93 المعكوس (palindrome) هو عدد أو كلمة أو جملة لها نفس القراءة من جهتين مختلفتين أمثلة :

1325231 ؛ توت ؛ حوت فمه مفتوح .

نعتبر العدد $a=12345678987654321$.

1) أحسب الجداء 1001001×111 .

علما أن العدد 333667 أولي ، حلل العدد 1001001 إلى جداء عوامل أولية .

2) أحسب 11^2 ، 111^2 ، 1111^2 .

3) حلل العدد a إلى جداء عوامل أولية .

94 القول عن عددين أنهما ودّيان معناه أنّ كل منهما يكون مساويا لمجموع القواسم العدد الآخر باستثناء العدد نفسه .

في كل من الحالات التالية أذكر إن كان العددان ودّيين أم لا

أ - 220 و 284 .

ب - $2^5\times37$ و $2\times5\times11^2$.

جـ - 18416 و 17296 .

2 ـ المضاعف المشترك الأصغر لعددين .

في التمارين 95 ، 96 و 97 المطلوب تعيين كل الثنائيات (x,y) التي تحقق الجملة المقترحة .

95 $\begin{cases} ppcm(x,y)=60 \\ xy=180 \end{cases}$ مع $x\le y$.

96 $\begin{cases} ppcm(x,y)=12p\gcd(x,y) \\ x+y=105 \end{cases}$ مع $x\le y$.

97 $\begin{cases} 3ppcm(x,y)=xy \\ x^2-y^2=405 \end{cases}$.

98 n و m عددان طبيعيان غير معدومين .

$a=2n+3m$ ، $b=3n+5m$.

أ ــ تحقق أن $n=5a-3b$ و $m=2b-3a$.

ب ــ برهن أن $PGCD(a,b)=PGCD(n,m)$.

جـ ــ استنتج أن العددين $2n+3$ ، $3n+5$ أوليان فيما بينهما . ما هو مضاعفهما المشترك الأصغر ؟

99 أ ــ برهن أنه إذا كان العددان الطبيعيان a و b أوليين فيما بينهما فإن العددين a^2+b^2 و ab يكونا كذلك أوليين فيما بينهما .

ب ــ عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $ppcm(x,y)=30$ و $x^2+y^2=325$.

100 نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية : $16x+59y=2006 \dots (1)$.

1) حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 2006 ، ثم استنتج أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1) فإن x يكون مضاعفا للعدد 59 .

2) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، المعادلة (1) .

3) عين الحلول (x,y) لمعادلة (1) التي تنتمي إلى $\mathbb{N}^{*2}$.

4) عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تحقق $16m+59d=2006$ حيث $m=ppcm(a,b)$ و $d=p\gcd(a,b)$.

101 عين الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية حيث يكون مضاعفهما المشترك الأصغر وقاسمهما المشترك الأكبر حلين للمعادلة $x^2-91x+588=0$.

102 نعتبر كثيري الحدود المعرفين على $\mathbb{R}$ بـ :

$p(x)=10x^3+60x^2+110x+60$ ؛

$q(x)=6x^2+18x+12$.

1) أ ــ أحسب $p(-1)$ و $p(-2)$.

ب ــ عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون

$p(x)=(x+1)(x+2)(ax+b)$.

جـ ــ حلل كثير الحدود $q(x)$.

2) نفرض n عدد طبيعي .

أ ــ اشرح لماذا $PGCD(5n+15,3)$ هو 1 أو 3 ؟

ب ــ برهن أن $PGCD(5n+15,3)=3$ إذا وفقط إذا كان n مضاعفا للعدد 3 .

جـ ــ عيّن حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين $p(n)$ و $q(n)$.

103 1) حلل العدد 319 إلى جداء عوامل أولية .

2) a و b عددان طبيعيان .

أ ــ تحقق من أن : $\begin{cases} a=2(3a+5b)-5(a+2b) \\ b=3(a+2b)-(3a+5b) \end{cases}$.

ب ــ برهن أنه إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإن $3a+5b$ و $a+2b$ أوليان فيما بينهما .

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق :

$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=1276 \\ ab=2PPCM(a,b) \end{cases}$.

104 بكالوريا

x و y عددان طبيعيان حيث $0<x\le y$ ، نضع $p\gcd(x,y)=d$ و $ppcm(x,y)=m$.

نريد تعيين x و y حيث $m^2-5d^2=2000 \dots (*)$.

أ ــ برهن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $(*)$ فإن d^2 يكون قاسما للعدد 2000 .

ب ــ حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية . استنتج القواسم المربعة التامة للعدد 2000 .

جـ ــ برهن أن 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

د ــ استنتج القيم الممكنة للعددين x و y .

105 x و y عددان طبيعيان غير معدومين حيث :

$m^3+3d^3=6480$ مع $p\gcd(x,y)=d$ و $ppcm(x,y)=m$.

أ ــ حلل العدد 6480 إلى جداء عوامل أولية .

ب ــ ما هي الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم العدد 6480 .

جـ ــ عين كل الثنائيات (x,y) التي تحقق المعادلة $m^3+3d^3=6480$.

106 بكالوريا

1) حلل كلا من العددين 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية.

2) α و β عددان طبيعيان حيث $\alpha<\beta$.

حل في المجموعة $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ المعادلة $\alpha\times\beta=105$.

3) a و b عددان طبيعيان غير معدومين وغير أوليين فيما بينهما حيث $a<b$.

نضع : $pgcd(a,b)=\delta$ و $ppcm(a,b)=\mu$.

عين a و b حيث : $\begin{cases}95\delta+19\mu=1995\\ \delta<7\end{cases}$.

107 n عدد طبيعي غير معدوم .

$a=6n^2+18n+12$ و $b=4n^3+12n^2+8n$.

1) حلل a و b .

2) أ ــ برهن أن :

$pgcd(a,b)=2(n+1)(n+2)\times pgcd(3,2n)$.

ب ــ عين ، حسب قيم العدد n ، $pgcd(a,b)$.

جـ ــ استنتج حسب قيم n ، $ppcm(a,b)$.

108 نعتبر المعادلة ذات المجهولين العددين الطبيعيين x و y التالية : $x+y-1=ppcm(x,y)$.

1) أدرس الحالة $x=0$ ثم الحالة $y=0$.

2) نفرض أن x و y غير معدومين .

أ ــ بين أن $x-1$ مضاعف للعدد y و $y-1$ مضاعف للعدد x .

ب ــ أعط كل الحلول للمعادلة

$x+y-1=ppcm(x,y)$.

109 لدينا عدد معيّن من القريصات أصغر من 1000.

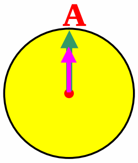
a عدد طبيعي حيث $2\le a\le 10$

إذا وزعنا القريصات في أكياس كل منها تشمل a قريصة ، دائما تنقص الكيس الأخير قريصة .

ما هو عدد القريصات حيث إذا وزعناها في أكياس كل منها تشمل بالضبط 11 القريصة .

110 العقربان الكبير والصغير لساعة دائرة الشكل ، منطبقان في اللحظة $t=0$ ، ورأسهما يكون في النقطة A.

في كل ثانية العقرب الكبير يتحرك بزاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ راديان والعقرب الصغير يتحرك بزاوية قياسها $\frac{\pi}{10}$ راديان .



في كم ثانية يلتقيان العقربان من جديد ولأول مرة في النقطة A ؟

3 - مبرهنة بيزو .

111 استعمل خوارزمية أقليدس لتعيّن حلا (x_0,y_0) من الأعداد الصحيحة لكل من المعادلتين التاليتين :

أ ــ $1694x+319y=11$.

ب ــ $3388x+638y=22$.

112 a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

1) برهن أن $a+b$ و $a-b$ ليسا حتما أوليين فيما بينهما .

2) تحقق أنه من أجل كل ثنائية (u,v) من الأعداد الصحيحة يكون : $u(a+b)+(v-u)b=ua+vb$.

3) استنتج أن العددين $a+b$ و b أوليان فيما بينهما .

4) ما القول عن العددين $a+b$ و ab ؟

113 a و b عددان طبيعيان حيث يوجد عددان صحيحان u و v يحققان $ua+vb=1$.

أ ــ ما القول عن العددين a و b .

ب ــ برهن أنه إذا كان c عددا طبيعيا يقسم $a+b$ فإن b و c أوليان فيما بينهما وكذلك a و c أوليان فيما بينهما.

114 a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

برهن أن العددان a^2b+ab^2 و $a+ab+b$ أوليان فيما بينهما .

115 n و m عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

نضع $a=3m+4n$ و $b=4m+5n$.

أ - تحقق أن $4a-3b=n$.

ب - عين عددين صحيحين α و β حيث $m=\alpha a+\beta b$.

جـ - برهن أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

116 أ ــ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العددان $14n+3$ و $5n+1$ أوليان فيما بينهما .

استنتج أن 87 و 31 أوليان فيما بينهما .

ب ــ عين حلا (u,v) للمعادلة $87u+31v=1$ ثم استنتج حلا (x,y) للمعادلة $87x+31y=2$.

117 بكالوريا

1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k و من أجل كل عدد طبيعي x يكون :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}\right)=x^k-1 \ .$$

في ما يلي نعتبر a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

2) لتكن n ، d و k أعداد طبيعية غير معدومة حيث $n=dk$. برهن أن a^d-1 هو قاسم للعدد a^n-1 .

ب ـ استنتج أن العدد $2^{2004}-1$ على 7 ، على 63 ثم على 9 .

3) ليكن m و n عددين طبيعيين غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر .

أ ـ نعرف العددين الطبيعيين m' و n' بـ : $m=dm'$ و $n=dn'$.

باستعمال مبرهنة بيزو على العددين m' و n'، برهن أنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث : $mu-nv=d$.

ب ـ نفترض أن u و v موجبان تماما ،

برهن أن $\left(a^{mu}-1\right)-\left(a^{nv}-1\right)a^d=a^d-1$.

برهن إذن أن a^d-1 هو القاسم المشترك الأكبر لعددين $a^{mu}-1$ و $a^{nv}-1$.

جـ ـ أحسب باستعمال النتيجة السابقة القاسم المشترك الأكبر للعددين $2^{63}-1$ و $2^{60}-1$.

4 ـ مبرهنة غوص .

118 بكالوريا

1) ~ و عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما ، جد ~ و حيث : $28\sim^2=(\ \ ^3-1)$.

2) a ، b ، c ، d و e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها r ، حيث a و r أوليان فيما بينهما ، و $28a^3=e-b$.

أحسب الأساس r ثم الأعداد a ، b ، c ، d و e .

119 بكالوريا

1) ~ و عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

عين ~ و حيث $35=\sim\left(\sim^2-19\right)$ و $\sim>$ ~ .

2) (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث u_0 و r عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0>r$.

- أوجد u_0 و r حتى يكون $35u_0{}^2+19u_1-u_0r^3=0$.

- نضع $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ ، أحسب S_n بدلالة n.

- أوجد قيم n حتى يقبل S_n القسمة على 30 .

120 بكالوريا

1) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ، 32785 و 2905 .

2) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $7x+6y=79$.

(لاحظ $72+7=79$) .

3) اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه . إذا علمنا أنّ ثمن بذلة اللاعب هو 2905 دج وثمن بذلة اللاعبة هو 2490 دج وعلمنا أنّ النادي دفع في المجموع 32785 دج . ما هو عدد اللاعبين وعدد اللاعبات ؟

121 بكالوريا

1) عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994 .

2) x و y عددان صحيحان ولتكن المعادلة

$$1996x-1497y=2994 \quad \ldots\ (1)$$

ـ أثبت أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ثم عين حلول المعادلة (1) .

ـ عين الحلول (x,y) بحيث يكون : $xy=1950$.

122 بكالوريا

1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x',y'): $9x'-14y'=13$ علماً أنّ $(3,1)$ حلا لها .

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $45x-28y=130$.

بيّن أنه إذا كان (x,y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5 ؛ ثم حل هذه المعادلة .

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\sim\sim3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{6\quad5}$ في نظام تعداد أساسه 7 .

عين ~ و ثم أكتب N في النظام العشري .

123 بكالوريا

1) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180.

2) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة :

$$225x-180y=90 \quad \dots (1)$$

3) عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x-y+1|<2$.

4) a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس ~ ، و يكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس . عين ~ و ثم a و b .

124 بكالوريا

$\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

نتكن في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، المعادلة ذات المجهول (x,y) : $43x-13y=ª \dots (*)$ مع $ª\in\mathbb{Z}$.

1) تحقق من أن $(-3ª,-10ª)$ حل للمعادلة $(*)$.

ـ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $(*)$.

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\sim\ \sim\ \sim}$ في نظام تعداد أساسه 6 ويكتب $\overline{0¥¥¥}$ في نظام تعداد أساسه 5 .

ـ بيّن أنّ ~ ، و ¥ تحقق $43\sim-13=¥$.

ـ عيّن ~ ، و ¥ ثم أكتب N في النظام العشري .

125 بكالوريا

1) أ ـ عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2505 و 3006 .

ب ـ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية : $2505x-3006y=\sim \dots (1)$ مع $\sim\in\mathbb{Z}$. ما هو الشرط الذي يحققه العدد ~ حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

2) نفرض فيما يلي أنّ $\sim=2004$.

5 ـ المبرهنة الصغيرة لفرما .

126 حل في المعادلة $\mathbb{Z}$ $x^5\equiv x\,[30]$.

127 حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 546 .

برهن أن $x^{13}\equiv x\,[546]$ من أجل x عدد صحيح .

128 1) برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي لا يقبل القسمة على 7 فإن n^6-1 يقبل القسمة على 7 .

2) برهن أن الجداء $n(n^6-1)$ يقبل القسمة على 42 وهذا من أجل كل عدد طبيعي n .

3) كيف يمكن اختيار n حتى يكون الجداء $n(n^6-1)$ قابلا للقسمة على 84 ؟

129 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n^{15}-n^3$ يقبل القسمة على $2^{15}-2^3$.

130 1) a عدد طبيعي ، برهن أن a^5-a يقبل القسمة على 10 .

2) a و b عددان طبيعيان حيث $a\ge b$.

أ ـ برهن أنه إذا كان a^5-b^5 يقبل القسمة على 10 فإن a^2-b^2 يقبل القسمة على 20 .

عين العددين الطبيعيين a و b حيث $a^2-b^2=720$.

131 1) برهن أنه إذا كان n عددا طبيعيا فرديا فإنه يكتب على الشكل $4q+1$ أو $4q-1$ مع q عدد طبيعي .

استنتج أن $n^{16}\equiv1\,[64]$.

2) برهن أنه إذا كان P عددا أوليا أكبر من أو يساوي 19 فإن $p^{16}-1$ يقبل القسمة على 16320 .

132 برهن أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، n ، P و q يكون العدد $a^{4p+n}-a^{4q+n}$ يقبل القسمة على 30 .

133 الهدف من التمرين هو برهان الخاصية التالية : " إذا كتب عدد N على الشكل $N=a^2+b^2$ مع a و b عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما فإن كل قاسم أولي فردي لعدد N يكون من الشكل $4n+1$ مع n عدد طبيعي ".

ولهذا نبرهن بالخلف ، ونفترض أن N يقبل القسمة على عدد أولي p من الشكل $4n+3$ مع n عدد طبيعي .

نضع $m=2n+1$. أحسب a^{2m} و b^{2m} بالترديد p ثم استنتج .

134 أ ـ حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 157563 .

ب ـ برهن أن $2^6\equiv1\,[9]$ و $2^6\equiv1\,[7]$.

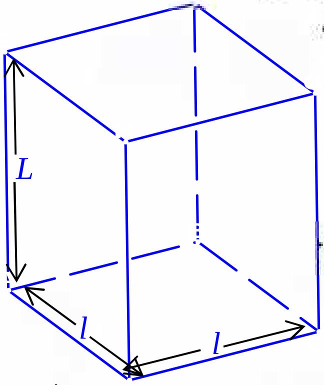
جـ ـ برهن أن $2^{120}-1$ يقبل القسمة على 157563 .

مسائل

135 (1 B علبة على شكل متوازي مستطيلات ، ضلع قاعدتها المربعة هو l، والارتفاع L حيث $l<L$.

نريد ملئ العلبة B بمكعبات متقايسة ذات الحرف العدد الطبيعي غير المعدوم a .

يجب أن تكون العلبة B مملوءة بدون ترك أي فراغ.



أ ــ في هذا السؤال نضع $L=945$ و $l=882$. ما هي أكبر قيمة ممكنة للعدد a ؟ وما هي القيم الممكنة للعدد a ؟

ب ــ في هذا السؤال ، حجم العلبة B هو $v=77760$.
علماً أن العدد 12 هو أكبر قيمة للعدد a التي تكون من أجلها العلبة B مملوءة . برهن أنه توجد بالضبط علبتين B مطلوب إعطاء بعداهما .

2) C علبة شكلها مكعب حرفه العدد الطبيعي غير المعدوم c ، نريد ملئها بالعلب B بدون ترك أي فراغ .

أ ــ في هذا السؤال نضع $L=945$ و $l=882$. ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد c ؟

ماهي مجموعة القيم الممكنة للعدد c ؟

ب ــ في هذا السؤال ، حجم العلبة B هو $v=15435$.
علما أنّ أصغر حرف ممكن للعلبة C هو 105 ، ما هما البعدان L و l للعلبة B ؟

136 بكالوريا **الحلول الناطقة لمعادلة من الدرجة الثالثة**

لتكن المعادلة (1) ذات المجهول العدد الناطق x :

$78x^3+ux^2+vx-14=0$ مع u و v عددين صحيحين .

1) نفترض أن $\frac{14}{39}$ هو حل للمعادلة (1).

أ ــ بين أن العددين u و v يحققان العلاقة :
$14u+39v=1129$.

ب ــ استعمل خوارزمية أقليدس ، لإيجاد ثنائية (x,y) من الأعداد الصحيحة تحقق المعادلة $14x+39y=1$.
تحقق من أن $(-25,9)$ هي حل لهذه المعادلة .

جـ ــ استنتج ثنائية (u_0,v_0) حل خاص للمعادلة $14u+39v=1129$. أعط الحل العام لهذه المعادلة .

د ــ من بين الحلول (u,v) لمعادلة السابقة ، عين الحل الذي يكون فيه u أصغر عدد طبيعي ممكن .

2) أ ــ حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين 78 و 14 . استنتج مجموعة القواسم الموجبة للعدد 78 ثم للعدد 14 .

ب ــ ليكن $\frac{P}{Q}$ حل ناطق للمعادلة (1) .
برهن أنه إذا كان P و Q أوليين فيما بينهما فإن P يقسم 14 و Q يقسم 78 .

جـ ــ استنتج عدد الأعداد الناطقة غير الصحيحة التي تكون حلولا للمعادلة (1) وأكتب من بين هذه الحلول ، مجموعة الحلول التي تكون موجبة .

137 نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد طبيعية ، معرفتان بـ : $\begin{cases} x_0=3 \\ y_0=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-1 \\ y_{n+1}=2y_n+3 \end{cases}$.

1) برهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $x_n=2^{n+1}+1$.

2) أ - أحسب $p\gcd(x_8,x_9)$ ثم $p\gcd(x_{2002},x_{2003})$.
ما القول عن العددين x_8 و x_9 وكذلك عن العددين x_{2002} و x_{2003} ؟

ب - هل العددين x_n و x_{n+1} أوليين فيما بينهما من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ؟

3) أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
$2x_n-y_n=5$.

ب - عبر عن y_n بدلالة n .

جـ - أدرس حسب قيم p ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^p على 5 .

د ــ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،
$d_n=p\gcd(x_n,y_n)$.
برهن أن $d_n=1$ أو $d_n=5$ ؛ استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $p\gcd(x_n,y_n)=1$.

اختيار من متعدد

138 كل سؤال يتضمن ثلاث اختيارات من بينها اختيار واحد صحيح ، عينه مبررا إجابتك .

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

1) إذا كان $a+b$ و $a-b$ أوليين فيما بينهما فإن a و b أوليان فيما بينهما .

في أي حالة تكون هذه الجملة صحيحة ؟

أ - من أجل كل ثنائية (a,b) .

ب - إذا كان a و b عددين زوجيين .

جـ - إذا كان a و b من شفعيتين مختلفتين .

2) d عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 حيث : $3a+4b=d$.

أ - $p\gcd(a,b)=d$.

ب - $p\gcd(a,b)$ يقسم d .

جـ - $p\gcd(a,b)$ مضاعف لـ d .

3) العدد الطبيعي N يحقق $N=7a+2$ و $N=11b+3$.

باقي القسمة الأقليدية للعدد N على 77 هو :

أ - 19 . ب - 6 . جـ - 58 .

4) نضع $n=2a(2a+2)(2a+4)$

يكون العدد n قابلا للقسمة على 77 من أجل :

أ - بعض القيم للعدد a . ب - كل عدد طبيعي a .

جـ - a أولي .

5) أ - $242^{10}\equiv 1[11]$.

ب - $7^{14}\equiv 1[15]$.

جـ - $18^{22}\equiv 1[23]$.

139 إقتراح واحد صحيح ، فما هو ؟

1) من أجل كل ثنائية من الأعداد الطبيعية (a,b) ، إذا كان $ab=ppcm(a,b)$ فإن $p\gcd(a,b)=1$.

2) إذا كان $ppcm(a,b)$ عدد زوجي فإن a و b من شفعيتين مختلفتين .

3) جداء عددين متمايزين و أوليين فيما بينهما هو مضاعفهما المشترك الأصغر .

أصحيح أم خطأ ؟

140 في كل من العبارات التالية برر صحتها أو خطئها.

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

1) إذا كان الجداء ab يقبل القسمة على 12 فإن على الأقل أحد العددين a و b يقبل القسمة على 12 .

2) إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإنه لا يوجد أي عامل أولي مشترك في تحليليهما إلى جداء عوامل أولية .

3) إذا كان العدد الولي p يقسم a و b فإن p^2 يقسم $ppcm(a,b)$.

4) إذا كان 5 يقسم a^2 فإن 5 يقسم a .

141 ما هو اختيارك الصحيح ؟

1) من أجل a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 ، a^2 و a^3 ليسا أوليين فيما بينهما .

2) المعادلة $11x-19y=1$ لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

3) إذا كان 2 قاسما للعدد $7n$ مع n عدد صحيح فإن n يكون عددا زوجيا .

4) القاسم المشترك الأكبر لعددين زوجيين متتاليين هو 4 .

5) إذا كان a و b عددين طبيعيين يحققان $3a+5b=6$ فإن $p\gcd(a,b)=6$.

6) إذا كان 6 يقسم a و 10 يقسم b فإن 60 يقسم $ppcm(a,b)$.

7) إذا كان a و b عددين طبيعيين يحققان $7a+8b=1$ ، فإن a و b أوليان فيما بينهما .

142 بكالوريا برر صحة أو خطأ كل من الجمل التالية:

أ - إذا قبل عدد القسمة على 4 فيكون قابلا للقسمة على 8 .

ب - إذا قبل عدد القسمة على 2 و 3 فيكون قابلا للقسمة على 6 .

جـ - إذا قبل عدد القسمة على 4 و 6 فيكون قابلا للقسمة على 24 .

د - إذا كان العددان الطبيعيان a و b أوليين فيما بينهما فإن $a+b$ و $a-b$ يكونا أوليان فيما بينهما .

هـ - إذا كان العددان الطبيعيان a و b أوليين فيما بينهما فإن $2a+b$ و $3a+2b$ يكونان أوليان فيما بينهما .

الأعداد المركبة 05

الكفاءات المستهدفة

- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.
- استعمال خواص مرافق عدد مركب.
- حساب الطويلة وعمدة لعدد مركب غير معدوم.
- ا لانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلي و العكس.
- التعبير عن خواص لأشكال هندسية باستعمال الأعداد المركبة.
- توظيف خواص الطويلة والعمدة لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- حل معادلات من الدرجة الثانية.و حل معادلات يؤول حلها إلى حلّ معادلة من الدرجة الثانية.
- تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة (الانسحاب، التحاكي، الدوران).والتعرف عن تحويل انطلاقا من كتابته المركبة.
- حل مسائل هندسية تتطلب استعمال انسحابات، تحاكيات أو دورانات بواسطة الأعداد المركبة.
- توظيف الأعداد المركبة لبرهان خواص الانسحاب، الدوران والتحاكي.

Abraham de Moivre

ابراهام دي موافر :ولد عام 1667م عالم في الرياضيات أضاف إضافات هامة في حساب المثلثات وقانون الاحتمالات وهناك ثلاث نظريات رياضية تحمل اسمه. توفي عام 1754م.

« ابراهام دي موافر» من أصدقاء « اسحاق نيوتن»،حيث نشر على التوالي سنة (1718)، (1738)، (1756) مساهماته في الاحتمال ضمن كتابه في المصادفة « مبدأ الفرص ».

في سنة 1707م.اكتشف« ابراهام دي موافر » دستوره الشهير:

$$(\cos(x)+i\sin(x))^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

نشاط أول الإحداثيات القطبية .

دراسة مثال

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

A و B النقطتان من المستوي التي إحداثياتها القطبية $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ على الترتيب في المعلم $(O;\vec{i})$.

1) أنشئ النقطتين A و B .
2) عين قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
3) عين الإحداثيات الديكارتية للنقطتين A و B .
4) A' نظيرة A بالنسبة إلى O مبدأ المعلم . عين الإحداثيات الديكارتية و القطبية للنقطة A' .
5) B' نظيرة B بالنسبة إلى حامل محور الفواصل . عين الإحداثيات الديكارتية و القطبية للنقطة B' .
6) $B"$ نظيرة B بالنسبة إلى حامل محور التراتيب . عين الإحداثيات الديكارتية و القطبية للنقطة $B"$.

الحالة العامة

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

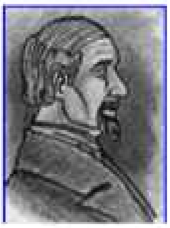
M نقطة من المستوي تختلف عن O إحداثياها القطبية (r,θ) في المعلم $(O;\vec{i})$.

1) عين شرطا على r كي تكون النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي نصف قطرها 3 .
2) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور التراتيب .
3) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور الفواصل .
4) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$.

نشاط ثان مثال بومبيلي(Bombelli).

الهدف من هذا النشاط هو حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : (1) ..... $x^3=15x+4$.

1) أثبت أن $\alpha+\beta$ حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا : (2) .... $\alpha^3+\beta^3+3(\alpha\beta-5)(\alpha+\beta)-4=0$.
2) ما هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد $\alpha\beta$ حتى تكتب المعادلة (2) على الشكل $\alpha^3+\beta^3=4$ ؟
ما هي قيمة $\alpha^3\beta^3$ في هذه الحالة ؟
3) تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(x-\alpha^3)(x-\beta^3)=x^2-4x+125$.
4) نعتبر المعادلة $x^2-4x+125=0$ . . . (3)
تأكد أن هذه المعادلة لا تقبل حلولا حقيقية .
5) نتخيل عدد نرمز له " i " حيث $i^2=-1$.
أكتب حلول المعادلة (3) في هذه الحالة .
6) أحسب $(2-i)^3$ و $(2+i)^3$ ، استنتج حلا حقيقيا للمعادلة (1) .
7) عين حلول المعادلة (1).



Rafael Bombelli

1526 – 1572

نشاط ثالث تقديم هندسي للأعداد المركبة.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

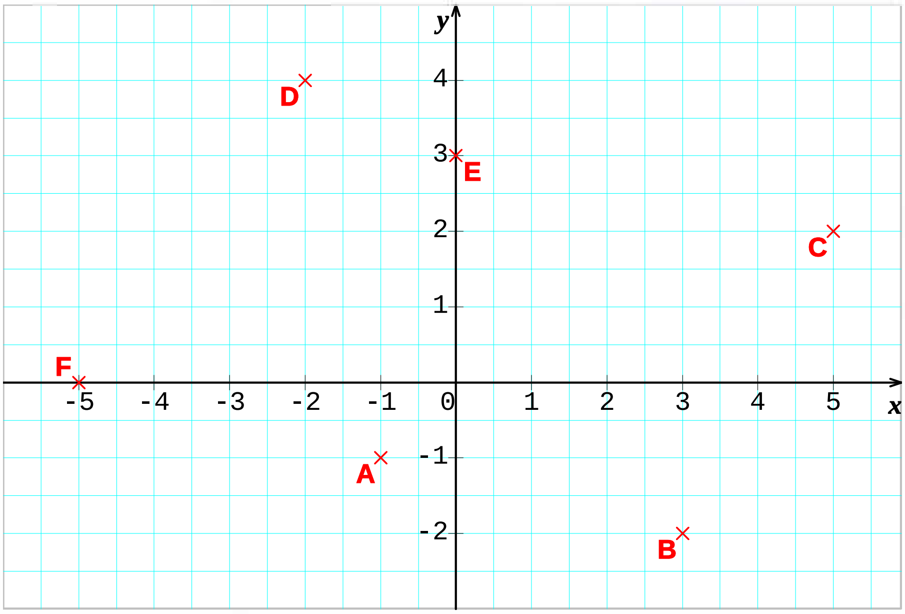
نقبل أن محور الفواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية ، وعليه العدد الحقيقي x تمثله النقطة P بالإحداثيين $(x;0)$.

نقبل أن كل نقطة أخرى من المستوي **لا** تنتمي إلى محور الفواصل تمثل عددا وهذا العدد غير حقيقي و نسميه عددا مركبا .

و هكذا النقطة J بالإحداثيين $(0;1)$ تمثل العدد المركب i ، والنقطة Q بالإحداثيين $(0;y)$ تمثل العدد المركب iy.

وبصفة عامة النقطة M بالإحداثيين $(x;y)$ تمثل العدد المركب $x+iy$ الذي يرمز له z .

1. في الرسم الموالي عين الأعداد المركبة التي تمثلها النقط A ، B ، C ، D ، E و F.



2. مثل النقطة G حيث :
$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.
ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة G؟
3. مثل النقطة H حيث :
$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.
ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة H؟
4. مثل النقطة K حيث :
$\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة K؟
5. مثل النقط R ، S ، و T صور الأعداد المركبة $z_1=2-i$ ، $z_2=-\frac{1}{2}-3i$ و $z_3=-7i$ على الترتيب.

التعريف

الأعداد المركبة .

1. تعريف .

تعريف: نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $\boxed{z=x+iy}$ حيث x و y عددان حقيقيان و $\boxed{i^2=-1}$

ملاحظات و ترميز:

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـــ : $\mathbb{C}$.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\operatorname{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\operatorname{Im}(z)$.
- إذا كان $y=0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x=0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما.

أي $z=0$ يعني $x=0$ و $y=0$.

- الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

2. تساوي عددين مركبين .

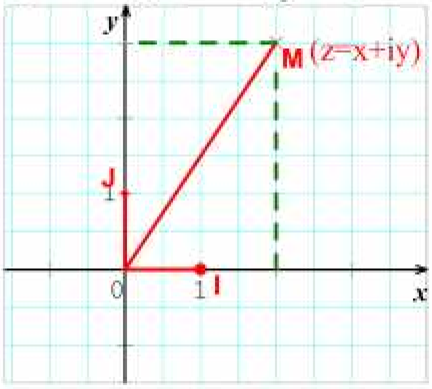
تعريف: يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$: $z=z'$ معناه ($x=x'$ و $y=y'$)

3. التمثيل الهندسي لعدد مركب.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

- إلى كل عدد مركب $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ ، $y\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$) نرفق النقطة M إحداثياها $(x;y)$ ، النقطة M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب z .



- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z=x+iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ،لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب .
- المستوي يسمى المستوي المركب.

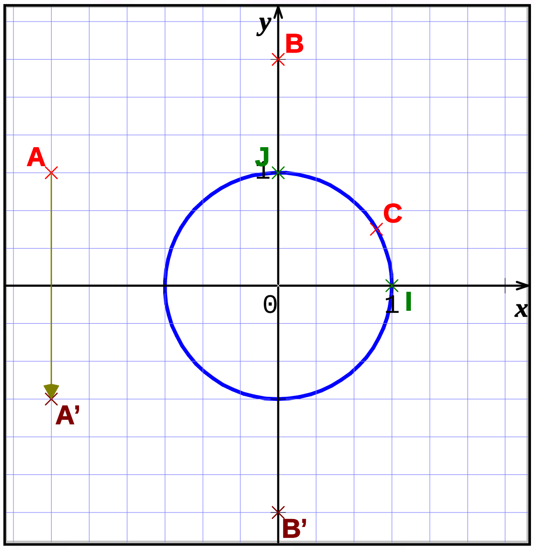
تمرين محلول1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

تكن النقط A ، B ، C من المستوي التي لواحقها $-2+i$ ، $2i$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ على الترتيب .

1) أنشئ النقط A ، B ، C في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

2) عين لاحقة النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى O . أنشئ B' .

3) عين لاحقة النقطة A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل ، ثم عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}$. أنشئ A' .



الحل: 1) A صورة العدد $-2+i$ إذن $A(-2;1)$.

B صورة العدد $2i$ إذن $B(0;2)$.

C صورته العدد $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ إذن $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

لإنشاء النقطة C يمكن الملاحظة أنها تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1 و ترتيبها $\frac{1}{2}$.

2) B' نظيرة B بالنسبة إلى O إذن $\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}$.

و منه $B'(0;-2)$ و لاحقة B' هي $-2i$.

3) A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن A' و A لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن $A'(-2;-1)$

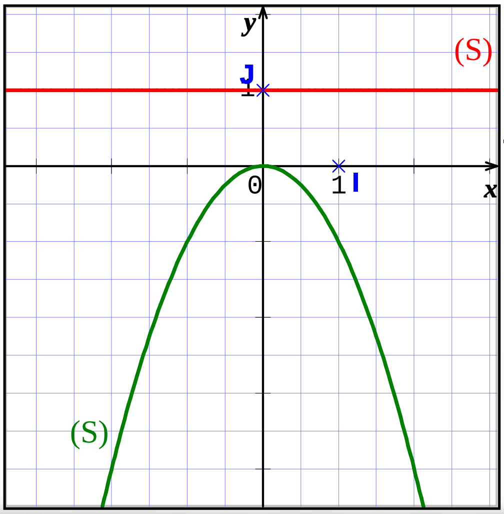
و لاحقة A' هي $-2-i$. $\overrightarrow{AA'}(0;-2)$ و منه لاحقة $\overrightarrow{AA'}$ هي $-2i$

تمرين محلول2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. x و y عددان حقيقيان.

تكن المجموعة (S) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث $z=x^2+y(1+i)-i$.

عين ثمّ أنشئ المجموعة (S) في الحالتين الآتيتين .

1) z عدد حقيقي . **2)** z عدد تخيلي صرف .



الحل: $z=x^2+y+i(y-1)$.

1) z عدد حقيقي إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Im}(z)$ أي $y-1=0$.

إذن المجموعة (S) في هذه الحالة هي المستقيم ذو المعادلة $y-1=0$.

(S) مرسوم باللون الأحمر في هذه الحالة .

2) z عدد تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Re}(z)$

أي $x^2+y=0$. إذن المجموعة (S) في هذه الحالة هي القطع المكافئ ذو المعادلة $y=-x^2$.

(S) مرسوم باللون الأخضر في هذه الحالة .

مرافق عدد مركب.

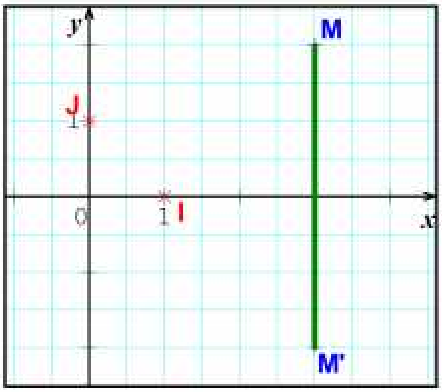
1.تعريف.

تعريف: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$).
العدد المركب $x-iy$ و الذي نرمز له $\overline{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.

أمثلة : • $\overline{2+8i}=2-8i$ ، • $\overline{3-11i}=3+11i$ ، • $\overline{4i}=-4i$ ، • $\overline{-2}=-2$.

2.التفسير الهندسي لمرافق عدد مركب.



المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$.

لتكن M صورة z و M' صورة $\overline{z}$ ، M و M' لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

العمليات في مجموعة الأعداد المركبة.

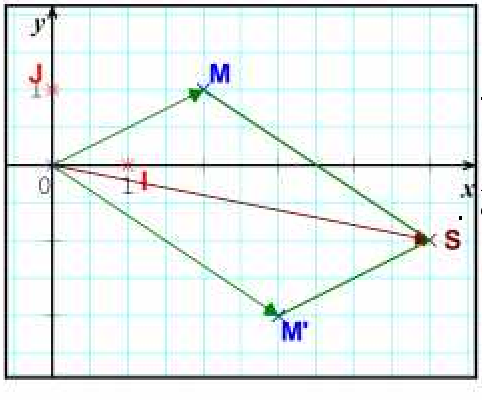
1.مجموع وجداء عددين مركبين.

تعريف: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث $z'=x'+iy'$ ($x'\in\mathbb{R}$ و $y'\in\mathbb{R}$) .
مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z+z'=x+x'+i(y+y')$.
جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z.z'=xx'-yy'+i(xy'+x'y)$.

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

أمثلة : • $(2-i)+(-7+4i)=(2-7)+i(-1+4)=-5+3i$.
• $(3-2i)(-4-7i)=-12-21i+8i+14i^2=-26-13i$

2.التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين.



المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

$z=x+iy$ عدد مركب و $z'=x'+iy'$ عدد مركب .

المجموع $z+z'$ هو لاحقة النقطة S حيث: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$
$\overrightarrow{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$.

ملاحظات: •إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$، فإن $z+z'$ هو لاحقة $\vec{u}+\vec{v}$.

•إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان λ عددا حقيقيا فإن λz هو لاحقة $\lambda\vec{u}$.

• شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

تمرين محلول1: أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=(1-i)^4$ ، 2) $z_2=\left(-2+i\sqrt{3}\right)(3-5i)+\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$ ، 3) $z_3=(-7-2i)(6-4i)^2$.

الحل: 1) $z_1=(1-i)^4$ و منه $z_1=(1-i)^2(1-i)^2=(-2i)(-2i)$ إذن $z_1=4i^2=-4$.

2) $z_2=\left(-2+i\sqrt{3}\right)(3-5i)+\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$.

و منه $z_2=-6+3i\sqrt{3}+10i-5i^2\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}i+4i-2i^2$ إذن $z_2=-\frac{5}{2}+5\sqrt{3}+\left(\frac{53}{4}+3\sqrt{3}\right)i$.

3) $z_3=(-7-2i)(6-4i)^2$ و منه $z_3=(-7-2i)(36-48i+16i^2)=(-7-2i)(20-48i)$

إذن $z_3=-140+336i-40i+96i^2=-236+296i$.

تمرين محلول2: أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=\frac{5}{1-2i}$ ، 2) $z_2=\frac{-7+4i}{4-7i}$ ، 3) $z_3=\frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$.

الحل: 1) $z_1=\frac{5}{1-2i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_1=\frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$ أي $z_1=\frac{5(1+2i)}{5}=1+2i$.

2) $z_2=\frac{-7+4i}{4-7i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_2=\frac{(-7+4i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)}=\frac{-28+16i-49i+28i^2}{16+49}$ أي $z_2=\frac{-56-33i}{65}=-\frac{56}{65}-\frac{33}{65}i$.

3) $z_3=\frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$ نقوم أولا بكتابة المقام على الشكل الجبري :

$z_3=\frac{3+2i}{-6-6i-5i-5i^2}=\frac{3+2i}{-1-11i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_3=\frac{(3+2i)(-1+11i)}{(-1-11i)(-1+11i)}=\frac{-3+33i-2i+22i^2}{1+121}$ أي $z_3=\frac{-25+31i}{122}=-\frac{25}{122}+\frac{31}{122}i$

تمرين محلول3: n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أكتب على الشكل الجبري كل من : i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8 .

2) ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري .

الحل: 1) $i^3=i^2\times i=-i$ ، $i^4=i^2\times i^2=1$ ، $i^5=i^4\times i=i$ ، $i^6=-1$ ، $i^7=-i$ ، $i^8=1$.

2) نلاحظ أن $i^4=1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $i^{4k}=1$.

كذلك : $i^{4k+1}=i^{4k}\times i=i$.

$i^{4k+2}=i^{4k}\times i^2=-1$.

$i^{4k+3}=i^{4k}\times i^3=-i$.

كل عدد طبيعي n يكتب على أحد الأشكال التالية : $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ و $4k+3$.

3.لاحقة شعاع ؛ لاحقة مرجح .

خاصية: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

A و B نقطتان من المستوي ، z_A لاحقة A و z_B لاحقة B .

- $z_B - z_A$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.
- α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$ ، G مرجح الجملة $\left\{(A,\alpha);(B,\beta)\right\}$ ، $\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$ هي لاحقة النقطة G .

البرهان: مباشر لأن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$.

ملاحظة: نستعمل نفس الطريقة في حساب لاحقة مرجح عدة نقط .

4.مقلوب عدد مركب.

مبرهنة: كل عدد مركب غير معدوم z له مقلوب في $\mathbb{C}$ يرمز له $\dfrac{1}{z}$.

البرهان: يكن z عددا مركبا غير معدوم يوجد عدد مركب z' وحيد حيث $zz'=1$.

بوضع $z=x+iy$ نحصل على $z'=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{(-y)}{x^2+y^2}$.

5.خواص مرافق عدد مركب.

خواص مباشرة من التعريف:

- $\overline{\overline{z}}=z$.
- $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$.
- $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$.
- $z\overline{z}=\left(\operatorname{Re}(z)\right)^2+\left(\operatorname{Im}(z)\right)^2$.

المرافق و العمليات : z عدد مركب و مرافقه $\overline{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\overline{z'}$.

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$.
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$. $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$. مع $z\neq 0$.
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. مع $z'\neq 0$.

البرهان: z و z' عددان مركبان حيث : $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$.

- $z+z'=x+x'+(y+y')i$ و منه $\overline{z+z'}=x+x'-(y+y')i$ أي $\overline{z+z'}=x-i\,y+x'-i\,y'$
إذن $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.
- $z\cdot z'=xx'-yy'+(xy'+x'y)i$ و $\overline{z}\cdot\overline{z'}=(x-i\,y)(x'-i\,y')$ و $\overline{z\cdot z'}=xx'-yy'-(xy'+x'y)i$
إذن $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$.
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ نستعمل الخاصية $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$ و الاستدلال بالتراجع.
- لبرهان على $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ نحسب $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ و نحسب $\dfrac{1}{\overline{z}}$ و نقارن . نفس الطريقة بالنسبة لـــ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

تمرين محلول1: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z في الحالتين الآتيتين :

1) $(2-3i)z-26=0$.

2) $z-21i=-14+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}z$.

الحل: 1) $(2-3i)z-26=0$ أي $(2-3i)z=26$ و بالتالي $z=\dfrac{26}{2-3i}$.

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\dfrac{26(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=4+6i$

تكن S مجموعة الحلول $S=\{4+6i\}$.

2) $z-21i=-14+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}z$. نضرب الطرفين في 2 نحصل على $2z-42i=-28+i\sqrt{3}z$

$2z-i\sqrt{3}z=-28+42i$ أي $z\left(2-i\sqrt{3}\right)=-28+42i$

وبالتالي $z=\dfrac{-28+42i}{2-i\sqrt{3}}$

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\dfrac{(-28+42i)\left(2+i\sqrt{3}\right)}{\left(2-i\sqrt{3}\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)}$

$$z=(-4+6i)\left(2+i\sqrt{3}\right)=-8-6\sqrt{3}+\left(12-4\sqrt{3}\right)i$$

تكن S' مجموعة الحلول $S'=\left\{-8-6\sqrt{3}+\left(12-4\sqrt{3}\right)i\right\}$.

تمرين محلول2: ليكن كثير الحدود P للمتغير المركب z المعرف كما يلي :

$$P(z)=z^3+z^2-2$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z : $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

2) أحسب $P(1)$ و $P(-1-i)$.

3) استنتج جذرا آخر لـ $P(z)$.

الحل: 1) $\overline{P(z)}=\overline{z^3+z^2-2}$.

$\overline{P(z)}=\overline{z^3}+\overline{z^2}-\overline{2}$ بتطبيق خاصية المجموع .

$\overline{P(z)}=\left(\overline{z}\right)^3+\left(\overline{z}\right)^2-2$ بتطبيق خاصية الأس .

إذن $\overline{P(z)}=P\left(\overline{z}\right)$.

2) $P(1)=0$.

$$P(-1-i)=(-1-i)^3+(-1-i)^2-2$$

$$P(-1-i)=2i(-1-i)+2i-2=0 .$$

3) $P(-1-i)=0$ و منه $\overline{P(-1-i)}=0$ وبالتالي $P\left(\overline{-1-i}\right)=0$ أي $P(-1+i)=0$

إذن $-1+i$ جذر لـ $P(z)$.

طويلة و عمدة عدد مركب.

1.طويلة عدد مركب.

تعريف: z عدد مركب حيث: $z = x + iy$ (x و y عددان حقيقيان).

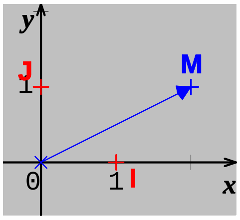
نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

أمثلة : • $|2+8i| = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ ، • $|-4-3i| = \sqrt{16+9} = 5$ ، • $|-7i| = \sqrt{49} = 7$

ملاحظات: • إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z .

• $z = 0$ يعني $|z| = 0$. • $|z|^2 = x^2 + y^2$.

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.



المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

z عدد مركب حيث $z = x + iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM = |z|$

خواص طويلة عدد مركب.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

• $|\overline{z}| = |z|$. • $|-z| = |z|$.

• $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$. • $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. مع $z' \neq 0$

• $|z^n| = |z|^n$. • $|z+z'| \leq |z| + |z'|$. (المتباينة الثلاثية).

البرهان: مباشر.

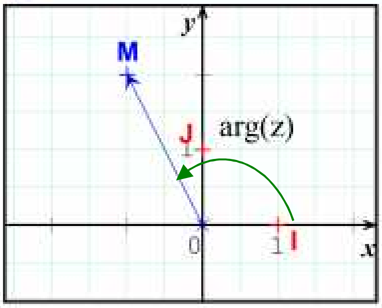
ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB = |z_B - z_A|$.

2.عمدة عدد مركب غير معدوم.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم حيث: $z = x + iy$ (x و y عددان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ لتكن M صورة z .

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg(z)$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$.



ملاحظات: • كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمد .

إذا كان θ عمدة لـــ z فإن $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ عمدة لـــ z .

و نكتب $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.

• A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right) - \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)$ أي $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A)$

• $\arg(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)$.

تمرين محلول1: عين طويلة العدد المركب z في كل حالة من الحالات الآتية.

1) $z=(2+i)(-5+3i)$ ، **2)** $z=\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$ ، **3)** $z=(-3+4i)^4$ ، **4)** $z=\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3$.

الحل: 1) $z=(2+i)(-5+3i)$

$|z|=|(2+i)(-5+3i)|=|2+i||-5+3i|$ أي $|z|=\sqrt{5}\times\sqrt{34}=\sqrt{170}$.

2) $z=\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$

$|z|=\left|\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}\right|=\dfrac{|3-4i|}{|\sqrt{3}-i|}$ أي $|z|=\dfrac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{5}{2}$.

3) $z=(-3+4i)^4$

$|z|=\left|(-3+4i)^4\right|=|-3+4i|^4$ أي $|z|=\left(\sqrt{9+16}\right)^4=5^4=625$.

4) $z=\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3$

$|z|=\left|\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3\right|=\left(\dfrac{|(1-i)^6|}{|(-8-6i)^2|}\right)^3=\left(\dfrac{|(1-i)|^6}{|(-8-6i)|^2}\right)^3$ أي $|z|=\dfrac{8}{15625}=\left(\dfrac{8}{100}\right)^3$.

تمرين محلول2: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ و M صورته في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

نضع $a=|(1-i)z-2i|$

عين المجموعة (S) مجموعة النقط M من المستوي حتى يكون $a=2$.

الحل: $a=2$ يعني $|(1-i)z-2i|=2$ نعوض z بـ $x+iy$ نحصل على :

$|(1-i)(x+iy)-2i|=2$ معناه $|x+iy-ix-i^2y-2i|=2$

أي $|x+y+i(-x+y-2)|=2$. لنحسب $|x+y+i(-x+y-2)|$.

$$|x+y+i(-x+y-2)|=\sqrt{(x+y)^2+(-x+y-2)^2}$$

أي $|x+y+i(-x+y-2)|=\sqrt{x^2+2xy+y^2+x^2+y^2-2xy+4x-4y+4}$

أي $|x+y+i(-x+y-2)|=\sqrt{2x^2+2y^2+4x-4y+4}$

و بالتالي $\sqrt{2x^2+2y^2+4x-4y+4}=2$ تربع الطرفين $2x^2+2y^2+4x-4y+4=4$

أي $(x+1)^2+(y-1)^2=2$

إذن المجموعة (S) هي الدائرة التي مركزها $\omega(-1,1)$ و نصف قطرها $r=\sqrt{2}$

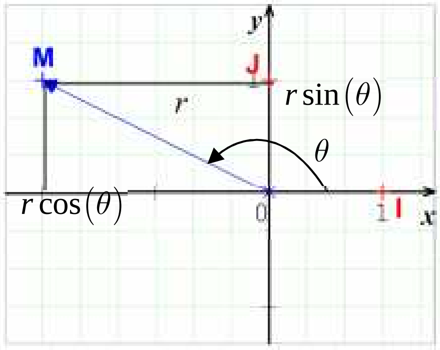
الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

1.تعريف و خواص .

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. تعلم نقطة M بإحداثييها الديكارتية $(x;y)$ أو بإحداثييها القطبية $(r;\theta)$. $OM=r$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=\theta$ ، و لدينا $x=r\cos(\theta)$ و $y=r\sin(\theta)$.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم .العدد z يكتب على الشكل $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ حيث : $r=|z|$ و $\theta=\arg(z)$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـــ z .

ملاحظة: • إذا كان $z=x+iy$ ، $\cos(\theta)=\frac{x}{r}$ و $\sin(\theta)=\frac{y}{r}$.



خاصية: يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد 2π .

خاصية: إذا كان $z=\lambda\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ و كان $\lambda>0$ فإن $\lambda=|z|$ و $\theta=\arg(z)$.

الخاصيتان تستنتج مباشرة من التعريف .

2. خواص عمدة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومين.

• $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$. • $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.

• $\arg\left(z^n\right)=n\arg(z)$. $n\in\mathbb{N}^*$

البرهان: نضع $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ و $z'=r'\left(\cos(\theta')+i\sin(\theta')\right)$.

• $$z.z'=rr'\left[\left(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')\right)+i\left(\sin(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta')\cos(\theta)\right)\right]$$

بتطبيق دساتير الجمع : نحصل على $z.z'=rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)$

إذن $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$.

• $$\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\left[\frac{\left[\left(\cos(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta)\sin(\theta')\right)+i\left(\sin(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta')\cos(\theta)\right)\right]}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}\right]$$

بتطبيق دساتير الجمع : نحصل على $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\left(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')\right)$

إذن $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.

• للبرهان على الخاصية $\arg\left(z^n\right)=n\arg(z)$ نستعمل الخاصية $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$ و الاستدلال بالتراجع.

تمرين محلول1: عين الطويلة وعمدة للعدد z ثم أكتبه على الشكل المثلثي في الحالتين الآتيتين :

1) $z=1+i$ **2)** $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$

الحل: 1) $z=1+i$. $|z|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. ليكن θ عمدة لـ z .

$\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه $\frac{\pi}{4}$ عمدة لـ z أي $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$. $|z|=\left|\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ليكن θ عمدة لـ z .

$\cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ و $\sin(\theta)=\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ عمدة لـ z أي $z=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

تمرين محلول2: ليكن العددان المركبان $Z_1=(1+i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)$ و $Z_2=\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$:

1) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الجبري.   **2)** أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي.

الحل: 1) $Z_1=(1+i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)=-1+\sqrt{3}+i\left(-1-\sqrt{3}\right)$.

$Z_2=\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{-1-\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)}{4}$. $Z_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$.

2) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ، $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

$Z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$.

$Z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)+\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$.

تمرين محلول3: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ ، لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=-i\sqrt{3}$ ، $z_B=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_C=-3+2i\sqrt{3}$.

1) أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.   **2)** ما هي طبيعة المثلث ABC .

الحل: 1) • $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{|z_B-z_A|}{|z_C-z_A|}=\frac{AB}{AC}$. • $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg(z_B-z_A)-\arg(z_C-z_A)$

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$.

2) $\frac{AB}{AC}=1=\left|\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|$ و منه $AB=AC$. $\arg\left(\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$

و منه $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.

1.الشكل الأسي لعدد مركب طويلته 1.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. z_0 عدد مركب طويلته 1 و M_0 صورته، تكن θ عمدة لــ z_0. $z_0=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ ، لتكن f الدالة التي بكل عدد حقيقي θ ترفق العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له.أي $f(\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

θ و θ' عددان حقيقيان لنحسب $f(\theta+\theta')$ و $f(\theta)\cdot f(\theta')$.

$f(\theta+\theta')=\cos(\theta+\theta')+\sin(\theta+\theta')$

أي $f(\theta+\theta')=(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta'))+i(\sin(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta')\cos(\theta))$

$f(\theta)\cdot f(\theta')=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$.

أي $f(\theta)\cdot f(\theta')=(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta'))+i(\sin(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta')\cos(\theta))$

ونستنتج أن $f(\theta+\theta')=f(\theta)\cdot f(\theta')$

بما أن الدالة الأسية تحول مجموع عددين إلى جداء صورتيهما تم التفكير في الترميز الأسي للعدد z_0.

نضع $z_0=e^{i\theta}$.

تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$. حيث $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.
هذا الترميز يسمى ترميز أولر.

2.الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.

تعريف: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z=re^{i\theta}$.
هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي لعدد المركب z.

3. قواعد الحساب على الشكل الأسي.

خواص: θ و θ' عددان حقيقيان.

- $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}$.
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$.
- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

أمثلة :
- $z_1=1+i$ يكتب $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ،
- $z_1=-1-i\sqrt{3}$ يكتب $z_1=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $z_1=1-i$ يكتب $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ،
- $z_1=-\sqrt{3}+i$ يكتب $z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4. دستور موافر.

خواص: z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:
$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$.

تمرين محلول: 1) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الجبري :

• $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ • $z_1 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ • $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$ • $z_3 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسي :

• $z_0 = -7i$ • $z_1 = -3-3i$ • $z_2 = (1-i)^8$ • $z_3 = \left(\sqrt{3}+i\right)^6$

الحل: 1) • $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

أي $z_0 = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}$.

• $z_1 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

أي $z_1 = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}$.

• $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

أي $z_2 = 5\left(0+i(1)\right) = 5i$.

• $z_3 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

أي $z_3 = 6\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3+3i\sqrt{3}$

2) • $z_0 = -7i = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$

• $z_1 = -3-3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

أي $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

• $z_2 = (1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8$.

أي $z_2 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8 = \left(\sqrt{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^8 = 16e^{-2i\pi}$.

• $z_3 = \left(\sqrt{3}+i\right)^6 = \left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^6$.

أي $z_3 = 2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 64\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right) = 64\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right)$.

إذن $z_3 = 64e^{i\pi}$.

المعادلات من الدرجة الثانية.

1.تساوي عددين مركبين.

مبرهنة: (تقبل) يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الطويلة، نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$z=z'$ معناه $\begin{cases} |z|=|z'| \\ \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z') \end{cases}$

2.الجذران التربيعيان لعدد مركب.

تعريف: ω عدد مركب .يسمى حلا المعادلة $z^2=\omega$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد ω .

أمثلة : •الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما $2-i$ و $-2+i$.

•الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $-3i$ و $3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران .

3. المعادلات من الدرجة الثانية .

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0 \;....(1)$ حيث a ، b و c أعداد مركبة و $a\neq 0$.

$az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ بوضع $\triangle=b^2-4ac$ نحصل على

$az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\triangle}{4a^2}\right)$. حل المعادلة (1) يؤول إلى حل المعادلة $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\triangle}{4a^2}$.

أي يئول إلى تعيين الجذرين التربيعيين للعدد $\triangle$. من مكتسبات السنوات الماضية تأتي المبرهنة

مبرهنة: لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z: $az^2+bz+c=0$ حيث a ، b و c أعداد مركبة و $a\neq 0$.

$\triangle=b^2-4ac$ مميزها .

- إذا كان $\triangle=0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z=-\frac{b}{2a}$.
- إذا كان $\triangle\neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين :

$$z'=\frac{-b-\omega}{2a} \quad \text{و} \quad z''=\frac{-b+\omega}{2a}$$

حيث ω جذر تربيعي لــ $\triangle$.

ملاحظة: إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2+bz+c=a(z-z')(z-z'')$$

مثال: • حلا المعادلة $z^2-z+1=0$ هما $z'=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z''=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

تمرين محلول1: عين الجذرين التربيعيين للعدد $z=-8+6i$:

الحل: ليكن $\omega=x+iy$ جذرا تربيعيا لـ z . أي $z=\omega^2$.

$\omega^2=x^2-y^2+2xyi$.

$$|\omega^2|=|\omega|^2=x^2+y^2 \quad , \quad |z|=|-8+6i|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$$

$z=\omega^2$ يعني $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=-8 \\ 2xy=6 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x^2=2 \\ y^2=10-x^2 \\ xy=3 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \\ xy=3 \end{cases}$

أي $(x=1$ و $y=3)$ أو $(x=-1$ و $y=-3)$ لأن $xy>0$

إذن $\omega=1+3i$ أو $\omega=-1-3i$.

تمرين محلول2: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب z .

$z^2+(3-2i)z+5-5i=0$.

الحل: نحسب المميز : $\Delta=(3-2i)^2-4(1)(5-5i)$.

$$\Delta=9-12i+4i^2-20+20i=-15+8i$$

ليكن $\omega=x+iy$ جذرا تربيعيا لـ Δ .

$\omega^2=x^2-y^2+2xyi$.

$$|\omega^2|=|\omega|^2=x^2+y^2 \quad , \quad |\Delta|=|-15+8i|=\sqrt{(-15)^2+8^2}=17$$

$z=\omega^2$ يعني $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x^2-y^2=-15 \\ 2xy=8 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x^2=2 \\ y^2=17-x^2 \\ xy=4 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=16 \\ xy=4 \end{cases}$

أي $(x=1$ و $y=4)$ أو $(x=-1$ و $y=-4)$ لأن $xy>0$

إذن $\omega=1+4i$ أو $\omega=-1-4i$.

نضع $\Delta=(1+4i)^2$.

$$z'=\frac{-3+2i-1-4i}{2}=-2-i \quad \text{و} \quad z''=\frac{-3+2i+1+4i}{2}=-1+3i$$

تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة

1) الانسحاب .

تعريف: الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

خواص:

- الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو الانسحاب الذي شعاعه $\left(-\vec{u}\right)$.
- الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل الثابت.
- **الخاصة المميزة:** صورة ثنائية $\left(A,B\right)$ هي ثنائية $\left(A',B'\right)$ تحقق $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.
- الانسحاب تقايس.

2) التحاكي.

تعريف: Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم. التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ $\quad k\in\mathbb{R}^*-\{1\}$

خواص:

- إذا اختلفت M عن Ω فإن M' تختلف عن Ω و النقط Ω ، M و M' على استقامة واحدة .
- $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ يعني $\overrightarrow{\Omega M}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$ و نستنتج أن : التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته $\frac{1}{k}$.
- **الخاصة المميزة:** صورة ثنائية $\left(A,B\right)$بالتحاكي الذي مركزه ω و نسبته k هي الثنائية $\left(A',B'\right)$ التي تحقق:

$$\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$$

- نلاحظ أنه إذا كان $|k|\neq 1$ فإن $A'B'\neq AB$ و بالتالي فإن التحاكي ليس تقايسا.

3) الدوران

تعريف: ω نقطة من المستوي الموجه و θ عدد حقيقي

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن النقطة Ω النقطة M' حيث: $\Omega M'=\Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta$

خواص:

- الدوران الذي مركزه Ω و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω.

الدوران الذي مركزه ω و زاويته θ تحويل تقابلي و تحويله العكسي هو الدوران الذي مركزه ω و زاويته $(-\theta)$.

الخاصة المميزة: صورة كل ثنائية $\left(A,B\right)$ بالدوران الذي مركزه ω و زاويته θ هي ثنائية $\left(A',B'\right)$ تحقق ما يلي:

$A'B'=AB$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)=\theta$ تبين هذه النتيجة أن الدوران تقايس.

تمرين محلول1: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي f الذي إلى كل نقطة $M(x,y)$ يرفق النقطة $M'(x',y')$ حيث $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$.

أثبت أن التحويل f انسحاب .

الحل: لتكن $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ نقطتان من المستوي .

$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x' - x = -1 \\ y' - y = 2 \end{cases}$ ولدينا $\overrightarrow{MM'}(x'-x, y'-y)$ إذن $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ مع $\vec{u}(-1,2)$.

إذن التحويل f هو انسحاب شعاعه $\vec{u}$.

تمرين محلول2: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي g الذي إلى كل نقطة $M(x,y)$ يرفق النقطة $M'(x',y')$ حيث $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - 4 \\ y' = -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$.

أثبت أن التحويل g تحاك يطلب عناصره المميّزة .

الحل: نعتبر النقطة $\Omega(x,y)$ حيث هي صامدة بالتحويل g ومنه :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \frac{3}{2}x = -4 \\ \frac{3}{2}y = +1 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ إذن } \Omega\left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

لتكن $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ نقطتين من المستوي .

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - 4 \\ y' = -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x' + \frac{8}{3} = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} \\ y' - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \end{cases} \text{ ومعناه } \begin{cases} x' + \frac{8}{3} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{8}{3}\right) \\ y' - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

إذن $\overrightarrow{\Omega M'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$ وبالتالي g تحاك مركزه Ω ونسبته $-\frac{1}{2}$.

تمرين محلول3: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي g الذي إلى كل نقطة $M(x,y)$ يرفق النقطة $M'(x',y')$ حيث $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

1. أثبت أن $OM = OM'$.
2. بيّن $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$.
3. ما هي طبيعة التّحويل g ؟

الحل: 1. $OM = x^2 + y^2$ ، $OM' = x'^2 + y'^2 = y^2 + x^2 = OM$

2. $\overrightarrow{OM} = (x,y)$ ، $\overrightarrow{OM'} = (x',y')$ ولدينا $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = xx' + yy' = -xy + yx = 0$ إذن $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$

3. g هو دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

الأعداد المركبة و التحويلات النقطية.

في كل ما يأتي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ أو $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$. ونكتب $f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$.

1.الحالة الأولى $a=1$.

$f(M)=M'$ يعني $z'=z+b$. و بالتالي $z'-z=b$ و بما أن $z'-z$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ فإن $\overrightarrow{MM'}=\vec{U}$ حيث $\vec{U}$ صورة العدد المركب b و بالتالي التحويل f هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ ذو اللاحقة b.

خاصية: التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z+b$ (b عدد مركب) هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ صورة b.

2.الحالة الثانية $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$.

$f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$. لتكن Ω لاحقتها ω نقطة صامدة بالتحويل f و منه $f(\Omega)=\Omega$.

$f(\Omega)=\Omega$ يعني $\omega=a\omega+b$ أي $\omega(1-a)=b$ بما أن $a\neq1$ فإن $\omega=\dfrac{b}{1-a}$ و Ω وحيدة.

بطرح المساوتين طرفا بمن طرف $z'=az+b$ و $\omega=a\omega+b$ نحصل على $z'-\omega=a(z-\omega)$.

من $z'-\omega=a(z-\omega)$ و a عدد حقيقي، نستنتج أن $\overrightarrow{\Omega M'}=a\overrightarrow{\Omega M}$.

و بالتالي f هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته a.

خاصية: التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ ونسبته a.

3.الحالة الثالثة $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$.

$f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$. لتكن Ω ذات اللاحقة ω نقطة صامدة بالتحويل f أي $f(\Omega)=\Omega$

يعني $\omega=a\omega+b$ أي $\omega(1-a)=b$ وبما أن $a\neq1$ فإن $\omega=\dfrac{b}{1-a}$ وبالتالي Ω وحيدة.

بطرح المساوتين طرفا من طرف $z'=az+b$ و $\omega=a\omega+b$ نحصل على $z'-\omega=a(z-\omega)$ ،

أي $a=\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$. نستنتج أن $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=|a|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\arg(a)$.

أي $\Omega M'=\Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\arg(a)$

و بالتالي f هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\arg(a)$.

خاصية: التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg(a)$.

تمرين محلول1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

$t_{\vec{u}}$ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-2;1)$

1) عين العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$.

2) A النقطة التي لاحقتها $3-i$ ، عين لاحقة النقطة A' صورة A بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

الحل: 1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}}(M)=M'$ يعني $z'=z-2+i$.

2) $t_{\vec{u}}(A)=A'$ يعني $z_{A'}=z_A-2+i$ و منه $z_{A'}=3-i-2+i=1$.

تمرين محلول2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

h التحاكي الذي مركزه A ذات اللاحقة $-1+2i$ و نسبته 3.

1) عين العبارة المركبة للتحاكي h.

2) B النقطة التي لاحقتها $-3-2i$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h.

الحل: 1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالتحاكي h.

$h(M)=M'$ يعني $z'=3z+b$. بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h(A)=A$ و منه $z_A=3z_A+b$.

أي $-1+2i=3(-1+2i)+b$ و منه $b=2-4i$. إذن $z'=3z+2-4i$.

2) $h(B)=B'$ يعني $z_{B'}=3z_B+2-4i$ و منه $z_{B'}=3(-3-2i)+2-4i=-7-10i$.

تمرين محلول3: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

r الدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و زاويته θ حيث $\frac{\pi}{3}$ أحد أقياسها .

1) عين العبارة المركبة للدوران r.

2) B النقطة التي لاحقتها $1-i\sqrt{3}$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r.

الحل: 1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالدوران r.

$r(M)=M'$ يعني $z'=az+b$ حيث $|a|=1$ و $\arg(a)=\frac{\pi}{3}+k2\pi$. $(k\in\mathbb{Z})$

و منه $a=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$

بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h(A)=A$ و منه $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}z_A+b$

نعلم أن $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و منه $e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}+b=e^{i\frac{5\pi}{3}}+b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+b$

إذن $b=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-1$ أي $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-1$.

2) $r(B)=B'$ يعني $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_B-1$ أي $z_{B'}=1$.

معادلات يؤول حلها إلى الدرجة الثانية.

1.معادلة من الدرجة الرابعة: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث :

$f(z)=z^4+4iz^2+12(1+i)z-45$.

1) أحسب $f(-3)$.

2) أحسب $f(3i)$.

3) أوجد كثير الحدود $g(z)=az^2+bz+c$ للمتغير المركب z (a ، b و c أعداد مركبة) حيث $f(z)=g(z)\left[z^2+(3-3i)z-9i\right]$.

4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$.

5) نسمي A ، B ، C ، D صور الأعداد : $3i$ ، $1-2i$ ، $2-i$ و -3 على الترتيب .

a) أثبت وجود دوران r يحول A إلى B و يحول C إلى D.

b) أثبت وجود تحاكي h يحول A إلى B و يحول D إلى C.

c) عين العبارة المركبة للتحويل $r\circ h$.

d) عين العبارة المركبة للتحويل $h\circ r$.

2.معادلة من الدرجة الثالثة: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث أن :

$f(z)=z^3+\left(14-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-14i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}$.

1) أثبت أن $f(z)$ يقبل جذرين مترافقين .

2) أحسب $f(-7+5i)$.

3) أحسب $f\left(i\sqrt{2}\right)$.

4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$.

5) نسمي A ، B ، C صور الأعداد : $-7+5i$ ، $-7-5i$ ، و $i\sqrt{2}$ على الترتيب .

عين لاحقة النقطة G صورة النقطة C بالدوران r الذي مركزه O و أحد أقياس زاويته $-\dfrac{\pi}{4}$.

6) لتكن D النقطة التي لاحقتها $1+i$.عين لاحقة النقطة E حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع .

7) لتكن F النقطة التي لاحقتها $1+11i$. نضع $\omega=\dfrac{(z_A-z_D)}{(z_F-z_B)}$.

أكتب ω على الشكل الجبري .

أكتب ω على الشكل الأسي .

8) أثبت أن المستقيمين (AD) و (BF) متعامدان.

استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$.

الجذور النونية لعدد مركب غير معدوم .

1. الحالة العامة :

ليكن العدد المركب $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ مع r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي .

ليكن العدد المركب $\omega=\rho\left(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\right)$ مع ρ عدد حقيقي موجب تماما و α عدد حقيقي ، جذرا نونيا للعدد z أي $z=\omega^n$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

1) بتطبيق دستور موافر أكتب ω^n بدلالة n .

2) بين أن $z=\omega^n$ يعني ($\rho=\sqrt[n]{r}$ و $\alpha=\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{k2\pi}{n}$).حيث k عدد صحيح

3) أوجد ω_0 ، ω_1 الجذرين النونيين المحصل عليهما من أجل $k=0$ و $k=1$ على الترتيب .

4) بين أن z يقبل n جذر نوني .

5) أكتب هذه الجذور النونية على الشكل الأسي .

6) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

كيف يتم تمثيل النقط M_k صور الجذور النونية لــ z في المستوي ؟

2. تطبيق أول .

ليكن العدد المركب $z=4+4i\sqrt{3}$.

1) أكتب العدد z على الشكل المثلثي .

2) أوجد الجذور التكعيبية للعدد z .

6) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

مثل في المستوي النقط M_k صور الجذور التكعيبية لــ z .

2. تطبيق ثان .

1) أحسب $(1-i)^6$.

2) أكتب 1 على الشكل المثلثي .

3) عين الجذور السداسية للعدد المركب 1 على الشكل المثلثي.

4) أكتب الجذور السداسية للعدد المركب 1 على الشكل الجبري.

5) أكتب العدد المركب $1-i$ على الشكل المثلثي .

6) باستعمال الجذور السداسية للعدد المركب 1 عين الجذور السداسية للعدد $8i$ على الشكل المثلثي.

7) أكتب الجذور السداسية للعدد المركب $8i$ على الشكل الجبري.

8) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

مثل في المستوي النقط M_k صور الجذور السداسية لِـ 1 ثم مثل في المستوي النقط P_k صور الجذور السداسية لِـ $8i$.

موضوع محلول

تمرين : بكالوريا

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعرّف بـ :

$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1. أ. احسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$.

ب. برهن أنه توجد أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z ، $P(z)=(z^2+3)(az^2+bz+c)$.

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $P(z)=0$.

3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

أ. مثل النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

ب. أثبت أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

4. تكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O .

بيّن أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثمّ عيّن طبيعة المثلث BEC.

حل مختصر

1. أ. بالتعويض نجد $P(i\sqrt{3})=0$ و $P(-i\sqrt{3})=0$.

ب. بعد نشر العبارة نجد : $P(z)=az^4+bz^3+(3a+c)z^2+3bz+3c$.

بالمطابقة نجد $a=1$ ، $b=-6$ ، $3a+c=24$ ، $3b=-18$ و $3c=63$

ومعناه $a=1$ ، $b=-6$ و $c=21$ أي $P(z)=(z^2+3)(z^2-6z+21)$.

2. $P(z)=0$ معناه $(z^2+3=0)$ أو $(z^2-6z+21=0)$

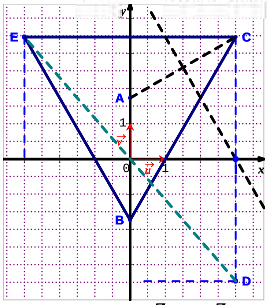
لدينا $(z^2+3=0)$ معناه $z^2=-3$ ويكافئ $z^2=3i^2$ أي $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$.

مميّز للمعادلة $(z^2-6z+21=0)$ هو $\Delta=-48$ أي $\Delta=48i^2=(4i\sqrt{3})^2$

ومنه الحلان هما $\frac{6+4i\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{6-4i\sqrt{3}}{2}$ أي $3+2i\sqrt{3}$ و $3-2i\sqrt{3}$.

$P(z)=0$ معناه $z\in\{i\sqrt{3},-i\sqrt{3},3+2i\sqrt{3},3-2i\sqrt{3}\}$.

3. ب. في المثلث ABC، محوري القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ يتقاطعان في النقطة I وهي من محور الفواصل إذن المثلث ABC محيط بالدائرة $\mathcal{C}$ ذات المركز I ، بما أنّ $z_D=\overline{z_C}$ فإن D و C متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل وبالتالي بالنسبة إلى I، إذن $[CD]$ هي قطر للدائرة $\mathcal{C}$.



4. بما أنّ E نظيرة D بالنسبة إلى O فإن

$z_E=-z_D=-\overline{z_C}=-3+2i\sqrt{3}$

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$\frac{BC}{BE}=\frac{|z_C-z_B|}{|z_E-z_B|}=\left|\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|$ و $\left|\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=1$ إذن $BC=BE$.

$$\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=\arg(z_C-z_B)-\arg(z_E-z_B)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

إذن المثلث ABE متقايس أضلاع .

تعاليق

عند الحساب لاحظ أن

$(-i\sqrt{3})^2=(i\sqrt{3})^2=-3$

و $(-i\sqrt{3})^3=i\sqrt{3}(i\sqrt{3})^2$

حل المعادلة $(z^2+3=0)$ هو تعيين الجذرين التربيعيين للعدد -3 يمكن استعمال المميّز المختصر .

في الحالة $\Delta\in\mathbb{R}_-$ فإن للمعادلة حلين مترافقين .

يمكن إتباع طريقة حسابية لكن الإجابة بطرقة هندسية غالبا ما تكون أسرع وأكثر اختصارا .

العدد z_C-z_B يمثل بالشعاع $\overrightarrow{BC}$ ومنه $|z_C-z_B|=BC$.

$\arg(z_C-z_B)=(\vec{u},\overrightarrow{BC})$.

تطبيق علاقة شال في الزوايا .

$(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC})=(\vec{u},\overrightarrow{BC})-(\vec{u},\overrightarrow{BE})$

موضوع موجّه

تنبيه

في التمارين الخاصة بالأعداد المركبة ، نتبع أحيانا طرائق هندسية تجنب الأجوبة الطويلة (باستعمال الحسابات) ويكون عندئذ الحل أسرع ومختصرا .

رغم أنّ الأشكال الهندسية تكون غير مطلوبة عموما فإنه من المستحسن مراعاتها بهدف المراقبة والتحقق من النتائج المحصل عليها .

تمرين. بكالوريا

$\sim$ عدد مركب غير معدوم .

1. أنشر العبارة $\left[1-i\left(1+\sim\right)\right]^{2}$.

2. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z :

$$z^{2}+\left[-1+i\left(1-\sim\right)\right]z+i\sim+\sim=0 .$$

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي هذه المعادلة حيث z_2 هو الحل المستقل عن $\sim$.

3. نفرض في هذا السؤال أنّ $\sim=iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم .

أكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله المثلثي .

4. المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

A و M نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_2 و z على الترتيب ، ولتكن $\mathscr{E}_p$ مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\left(z-z_2\right)\overline{\left(z-z_2\right)}=2$.

تحقق أنّ مبدأ المعلم O ينتمي إلى $\mathscr{E}_p$ ثمّ عيّن $\mathscr{E}_p$.

توجيهات

2. عند حساب المميز Δ تجد $\Delta=\left[1-i\left(1+\sim\right)\right]^{2}$.

3. لكتابة z_1 على شكله المثلثي لاحظ أنه عدد حقيقي وميّز الحالتين موجب وسالب .

4. تذكر أنّ $z\times\overline{z}=|z|^{2}$ وأحسب $\left(z-z_O\right)\overline{\left(z-z_O\right)}$.

العدد المركب z يمثل بالشعاع $\overrightarrow{OM}$ و z_2 يمثل بالشعاع $\overrightarrow{OA}$ وتستنتج أن العدد $z-z_2$ يمثل بالشعاع $\overrightarrow{AM}$ وتجد في الأخير أن $AM=\sqrt{2}$.

تمارين تطبيقية

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

1 ـ الأعداد المركبة .

1 عين $\text{Re}(z)$ و $\text{Im}(z)$ في كل حالة من الحالات التالية : $z=3+2i$ ؛ $z=-1+3i$ ؛ $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ؛ $z=i-3\sqrt{2}$ ؛ $z=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ؛ $z=-i\sqrt{3}$.

2 من بين الأعداد المركبة التالية ، عيّن الأعداد المكتوبة على شكلها الجبري .

$z_1=3+2i+\sqrt{2}$ ؛ $z_2=2i+\sqrt{2}+5$ ؛

$z_3=\left(3+\sqrt{3}\right)+2i\sqrt{3}$ ؛ $z_1=\dfrac{3}{5}+\sqrt{2}i+i\sqrt{3}$.

3 z عدد مركب حيث :

$$z=\left(x^2+x\right)+i\left(x^2+y-1\right)$$

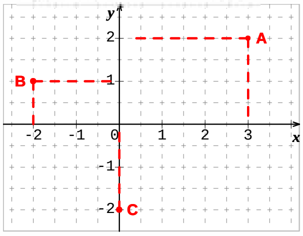
عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما .

4 1) عين إحداثيتي النقطة D ذات اللاحقة $z_D=\sqrt{3}+3i$.

2) عين اللواحق z_A , z_B و z_C للنقط $A\left(\sqrt{3};1\right)$, $B\left(-\sqrt{3};-1\right)$ و $C\left(0;2\right)$ على الترتيب.

5 z عدد مركب . نضع : $z_1=3+z\,i$ و $z_2=2+z+5i$.

أكتب العددين المركبين z_1 و z_2 على الشكل الجبري في كل من الحالات التالية :



. z لاحقة النقطة A .

. z لاحقة النقطة B .

. z لاحقة النقطة C .

6 A نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب $a=-1+2i$ ؛ عيّن العدد المركب z بحيث تكون صورته M نظيرة النقطة A بالنسبة إلى :

ـ مبدأ المعلم ؛ ـ حامل محور الفواصل ؛

ـ حامل محور التراتيب ؛ ـ المنصف الأول .

2 ـ مرافق عدد مركب .

7 أعط مرافق لكل من الأعداد المركبة التالية :

$z_1=2+4i$ ؛ $z_2=3-i$ ؛ $z_3=i\sqrt{2}-3$ ؛ $z_4=-\dfrac{5}{2}i$.

8 نعتبر العدد المركب $z=3+4i$

أ ـ أحسب $z\times\overline{z}$.

ب ـ أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $z'=\dfrac{i}{z}$.

9 نعتبر العدد المركب $z=2+i$

أكتب على الشكل الجبري العدد المركب z' المعرف في كل من الحالات المقترحة التالية :

أ ـ $z'=\dfrac{1}{z}+\dfrac{i}{\overline{z}}$. ب ـ $z'=\dfrac{1+2i}{z}-\dfrac{3-i}{\overline{z}}$.

جـ ـ $z'=\dfrac{1+3i}{z}\times\dfrac{3-2i}{\overline{z}}$

10 أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري .

$z_1=\dfrac{1}{i}$ ؛ $z_2=\dfrac{1}{1-i}$ ؛ $z_3=\dfrac{1}{3+i\sqrt{2}}$ ؛ $z_4=\dfrac{1}{3i-5}$.

11 أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري .

$z_1=\dfrac{4-6i}{3+2i}$ ؛ $z_2=\dfrac{5+15i}{1+2i}$ ؛ $z_3=\dfrac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$ ؛ $z_4=\dfrac{1+i}{1-i}$.

12 أكتب مرافق لكل من الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري .

$z_1=\left(1-i\right)\left(2+i\right)$ ؛ $z_2=\left(1+2i\right)^3$ ؛

$z_3=\dfrac{3-i}{1+i}$ ؛ $z_4=\left(\dfrac{1+3i}{2-i}\right)^4$.

13 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي θ ،

$$\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=\cos2\theta+i\sin2\theta \ .$$

14 نضع : $z_1=\dfrac{3-i}{2+5i}$ و $z_2=\dfrac{3+i}{2-5i}$.

1) بدون إجراء الحساب برر أن z_1+z_2 هو عدد حقيقي و z_1-z_2 هو عدد تخيلي صرف .

2) أحسب z_1+z_2 و z_1-z_2 ثم استنتج الشكل الجبري للعدد المركب z_1 .

15 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية (تعطى الحلول على الشكل الجبري)

أ- $(1-i)z=3+i$.

ب- $3z-2+i=(1+i)z-1-2i$.

جـ- $(3-4i)z^2=iz$.

د- $\dfrac{z+1}{z-1}=2i$.

16 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ- $2\bar{z}=-1+i$.

ب- $(2z+1-i)(i\bar{z}+i-2)=0$. جـ- $\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=i$.

17 أكتب بدلالة $\bar{z}$ ، مرافق الأعداد المركبة Z التالية :

أ- $Z=2+3iz$. ب- $Z=(2+iz)(1+3z)$.

جـ- $Z=\dfrac{2+iz}{z+2}$. د- $Z=z^3-iz^2+3z-3i$.

18 M نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد المركب z .

عين مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $z+\dfrac{1}{z}$ حقيقيا .

3 ـ العمليات في مجموعة الأعداد المركبة .

19 A ، B ، C و D أربع نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $-2+i$ ، $-1+4i$ ، $3+2i$ و $2-i$.

برهن أن الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع .

20 z_A ، z_B و z_C هي على الترتيب ، لواحق النقط $A(\sqrt{3};1)$ ، $B(-\sqrt{3};-1)$ و $C(0;2)$

عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

في التمارين من 21 إلى 24 المطلوب تعيين الشكل الجبري للأعداد المركبة المقترحة .

21 $z_1=(3-i)+(2+3i)$ ؛ $z_2=(-2+3i)-(1-5i)$ ، $z_3=\sqrt{6}\left(-i\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i+\sqrt{3}$.

22 $z_1=(1-i)^2$ ؛ $z_2=(1+i)^2$ ؛ $z_3=(1-i)(1+i)$.

23 $z_1=(1-i)(3+2i)$ ؛ $z_2=(4+3i)^2$ ؛ $z_3=(3-4i)^2$.

24 $z_1=-2i(3-i)(1+2i)$ ؛ $z_2=(4+3i)(2-i)(-1+2i)$ ؛ $z_3=\left(\sqrt{3}+i\right)^2-\left(\sqrt{3}-i\right)^2$.

25 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ- $3z-5+2i=0$. ب- $\dfrac{z-3}{2+5i}-3+i=0$.

جـ- $\dfrac{iz-3}{z-1}=2+i$.

26 A ، B و C النقط ذات اللواحق $3+2i$ ، $-1+3i$ و $-2-2i$ على الترتيب .

أ ــ عين لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

ب ــ عين لاحقة المرجح G للجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-3);(C,5)\}$.

27 A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $2+i$ ، $2-i$ و i .

عين لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD .

28 نضع $z_1=5-2i$ ، $z_2=2+4i$ ، $z_3=-3+3i$.

1) أحسب $\mathrm{Re}(z_1+z_2+z_3)$ ، $\mathrm{Re}\left(2z_1-z_2+\dfrac{1}{2}z_3\right)$ و $\mathrm{Re}[z_2(z_1+z_3)]$.

2) أحسب $\mathrm{Im}(z_1-3iz_3)$ ، $\mathrm{Im}[z_2-z_1z_3]$ و $\mathrm{Im}(z_1z_2z_3)$.

29 من أجل كل عدد مركب z ، نضع :
$f(z)=z^2-z$ حيث $z=x+yi$ مع x و y عددين حقيقيين .

برهن أنّ : $\mathrm{Re}\left[f(z)\right]=x^2-y^2-x$
و $\mathrm{Im}\left[f(z)\right]=y(2x-1)$.

4 ـ طويلة وعمدة عدد مركب .

30 z_A ، z_B ، z_C و z_D هي على الترتيب ، لواحق النقط $A\left(\sqrt{3};1\right)$ ، $B\left(-\sqrt{3};-1\right)$ ، $C(0;2)$ و $D=\left(\sqrt{3};3\right)$.

1) أحسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$. ماذا يمكنك أن تستنتج ؟
2) ما هي طبيعة الرباعي $AOCD$ ؟

31 نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_1=2$ ، $z_2=-i$ و $z_3=1+2i$.

1) أحسب $|z_2-z_1|$, $|z_3-z_1|$ و $|z_3-z_2|$.
2) استنتج طبيعة المثلث ABC .

32 نعتبر الأعداد المركبة $z_1=5-2i$ ، $z_2=2+4i$ ، و $z_3=-3+3i$.

أحسب : $|z_1|$ ، $|z_2|$ ، $|z_1+z_2+z_3|$ و $|z_1z_2z_3|$.

33 في كل حالة من الحالات التالية ، عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z العدد المركب الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ ـ $|z|=2$. ب ـ $|-3z|=\sqrt{2}$.
جـ ـ $|z|^2-2\mathrm{Re}(z)=0$.

34 عيّن ثمّ مثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ ـ $|z+1+2i|=|z-4|$. ب ـ $|z-3i|=2$.
جـ ـ $|2z-i|=2$

35 يعطى العدد المركب ~ حيث :
$~=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) أحسب $~^2$ ثم $~^4$.
2) أحسب $\left|~^4\right|$ ثم استنتج $|~|$.
3) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ،عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|~z|=6$.

36 z عدد مركب غير معدوم .

أ ــ باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\arg\left(z^n\right)=n\arg(z)$.
استنتج أنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n ، $\arg\left(z^n\right)=n\arg(z)$.

37 z عدد مركب غير معدوم طويلته r و $\bar{}$ عمدة له .
جد الطويلة و عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية :
$-z$ ؛ $\bar{z}$ ؛ $\frac{1}{z}$ ؛ z^3 ؛ $\frac{1}{z^n}$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.

38 z عدد مركب غير معدوم طويلته r و $\bar{}$ عمدة له .
جد الطويلة و عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية : $\frac{z}{4}$ ؛ $\frac{-7}{z}$ ؛ $2iz$ ؛ $(iz)^5$ ؛ iz^5 ؛ $\left(\frac{iz}{r}\right)^n$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.

39 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة و عمدة للعدد المركب z .

أ ـ $z=4\left(\cos\frac{®}{4}-i\sin\frac{®}{4}\right)$.
ب ـ $z=-3\left(\cos\frac{®}{3}+i\sin\frac{®}{3}\right)$.
جـ ـ $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{®}{6}+i\cos\frac{®}{6}\right)$.
د ـ $z=\sin\frac{®}{6}-i\cos\frac{®}{6}$.

40 في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة

أ ـ $Arg(iz)=\frac{3®}{2}$.
ب ـ $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right)=\frac{®}{4}$.
جـ ـ $Arg(z)=Arg(\bar{z})$.

5 ـ الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم .

في التمارين من **41** إلى **45** المطلوب كتابة الأعداد المركبة المقترحة على شكلها المثلثي :

41 $z_1=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$ ، $z_2=-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$ ، $z_3=-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i$.

42 $z_1=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_2=-\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$ ، $z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$.

43 $z_1=3$ ، $z_2=-\sqrt5$ ، $z_3=i$ ، $z_4=\frac{1}{2}i$ ، $z_5=-7i$.

أكتب قاعدة بسيطة لكتابة على الشكل المثلثي الأعداد الحقيقية ثم قاعدة بالنسبة للأعداد التخيلية صرفا .

44 $z_1=1+i$ ، $z_2=3-3i$ ، $z_3=-\sqrt5-i\sqrt{15}$ ، $z_4=-\sqrt6+i\sqrt2$.

45 $z_1=(2+2i)(\sqrt3-i)$ ، $z_2=\frac{4}{\sqrt3+i}$ ، $z_3=\frac{3i}{2+2i\sqrt3}$ ، $z_4=\frac{\sqrt6}{1+i}$.

46 نعتبر العدد المركب $Z=\frac{4+4i}{1-i\sqrt3}$.

1) أكتب العدد المركب Z على الشكل الجبري

2) أكتب العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

3) أكتب على الشكل المثلثي الأعداد: $\frac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\overline{Z}$.

47 Z عدد مركب حيث $Z=\frac{\sqrt2+\sqrt6 i}{2(1-i)}$.

أحسب كلا من الأعداد المركبة التالية : Z^6 ؛ Z^{12} و Z^{2010} تعطى النتائج على الشكل الجبري .

6 ـ الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم .

48 أنشئ في المعلم $(O;\vec u;\vec v)$ النقط A ، B ، C و D صور على الترتيب للأعداد المركبة التالية :

$\sqrt2 e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $e^{i\pi}$ و $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

49 أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية : $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt5 e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt3 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

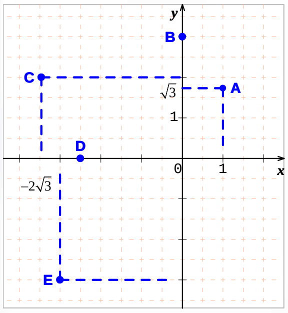
50 أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$z_1=2-2i$ ؛ $z_2=3\sqrt3-3i$ ؛ $z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $z_4=-1$.

51 عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1=-e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ $z_2=-3e^{i\frac{\pi}{8}}$ ؛ $z_3=-\sqrt2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_4=-\frac{1}{2}e^{i\pi}$.

52 بقراءة بيانية ، جد الكتابة الأسّية للواحق النقط A ، B ، C ، D و E الممثلة في الشكل المقابل.



53 نعطي الأعداد المركبة : $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_3=\sqrt2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية . z_1z_2 ؛ $z_1z_2z_3$ ؛ $\overline{z_3}z_1z_2$ ؛ z_1^3 ؛ z_3^4 ؛ $\frac{z_1}{z_2}$ ؛ $\frac{z_2}{z_3}$ ؛ $\frac{1}{z_3}$.

54 أعط شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1=(2\sqrt3+6i)e^{i\frac{\pi}{2}}$ ؛ $z_2=(\sqrt3+i\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_3=(1-\sqrt2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_4=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

55 في كل حالة من الحالات التالية أكتب العدد المركب z على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الجبري لكل من $\overline{z}$ و $\frac{1}{z}$.

أ ـ $z=\frac{6}{1+i}$.　　ب ـ $z=(1+i\sqrt3)^4$.

جـ ـ $z=3ie^{i\frac{\pi}{3}}$.　　د ـ $z=(2\sqrt3+2i)^5 e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

7 ـ المعادلات من الدرجة الثانية .

56 حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ ـ $2z^2-6z+5=0$. ب ـ $z^2-5z+9=0$.

جـ ـ $z^2+z+1=0$. د ـ $z^2-2z+3=0$.

هـ ـ $z^2=z+1$. و ـ $z^2+3=0$.

57 حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية:

أ ـ $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$.

ب ـ $z^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)z+2\left(\sqrt{2}+2\right)=0$.

جـ ـ $z^2-2(\cos{}^-)z+1=0$ حيث $^-$ عدد حقيقي .

د ـ $z^2-2(\sin{}^-)z+1=0$ حيث $^-$ عدد حقيقي .

58 حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة ذات المجهول $(z_1;z_2)$ التالية :

$$\begin{cases} z_1z_2=5 \\ z_1+z_2=-2 \end{cases}.$$

59 جد العددين المركبين ~ و   حيث المعادلة $z^2+\sim z+\quad=0$ تقبل الحلين $1+2i$ و $3-5i$.

60 حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلتين ذات المجهول z التاليتين :

أ ـ $z^4+3z^2+2=0$.

ب ـ $z^4-32z^2-144=0$.

61 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$. عين الطويلة و عمدة لكل من الحلين لهذه المعادلة .

2) استنتج الحلين في $\mathbb{C}$ للمعادلة

$(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$.

62 1) جد في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد المركب $L=2-2i\sqrt{3}$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$2z^2+4iz+i\sqrt{3}-3=0$.

63 1) عيّن العدد الحقيقي x حيث :

$(x+2i)^2=-3+4i$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $z^2-(3-4i)z-1-7i=0$.

64 بكالوريا

1) عيّن العددين الحقيقيين ~ و بحيث :

$(\sim+i\quad)^2=5-12i$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$iz^2-(1-2i)z+2(1+i)=0$.

3) نسمي z_1 و z_2 حلي المعادلة السابقة ، أثبت أن العددين z_1^{1984} و z_2^{1984} حقيقيان .

65 لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$z^2-\left[\sqrt{3}+1+2i\right]z+\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)i=0$.

أ ـ احسب $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

ب ـ حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة المعطاة .

66 أ ـ أحسب $\left(\sqrt{3}+3i\right)^2$.

ب ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $2z^2+\left(3\sqrt{3}+i\right)z+4=0$.

67 1 ـ جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $3+4i$.

2 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-2(1+2i)z+9+20i=0$.

8 ـ التحويلات النقطية المألوفة .

68 T التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين $(x;y)$ ، النقطة M' ذات الإحداثيتين $(x';y')$ حيث :

$$\begin{cases} x'=-3x+2y+1 \\ y'=5x-3y \end{cases}.$$

1) عيّن إحداثيتي صورة النقطة $A(-1;1)$.

2) عيّن إحداثيتي سابقة النقطة $B(-2;3)$.

3) عيّن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T .

69 T التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين $(x;y)$، النقطة M' ذات الإحداثيتين $(x';y')$ حيث
$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - 12 \\ y' = -\frac{3}{2}x + 2y - 4 \end{cases}$$.

1) عيّن مجموعة النقطة صامدة بالتحويل T .

2) أثبت أنه من أجل كل نقطة M من المستوي ، صورتها M' تنتمي إلى مستقيم ثابت يطلب تعيينه .

3) أثبت أنه إذا كانت النقطة M غير صامدة و M' صورتها بالتحويل T فإنّ منتصف القطعة $[MM']$ ينتمي إلى مستقيم ثابت .

4) استنتج طريقة هندسية لإنشاء النقطة M' .

70 ABC مثلث .

E ، F و G صور A ، B و C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

I ، J و K صور A ، B و C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.

أثبت أن C ي منتصف القطعة $[IG]$.

71 Δ و d مستقيمان من المستوي معادلتاهما على الترتيب $3x + 2y - 5 = 0$ و $3x - 2y + 1 = 0$.

أكتب معادلة لكل من صورتي المستقيمين Δ و d بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(2;-3)$.

72 ABC مثلث في المستوي الموجّه حيث $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{®}{3}$.

A' و C' صورتا على الترتيب للنقطتين A و C بالدوران r ذي المركز B والزاوية $-\frac{®}{4}$.

A'' و C'' منتصفا القطعتين $[A'B]$ و $[BC']$ على الترتيب .

أ ــ أنجز شكلا .

ب ــ بيّن أنّ المثلثين ABC و $A''BC''$ متشابهان .

73 في المستوي الموجّه ، AMN هو مثلث متساوي الساقين وقائم في A حيث $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right) = \frac{®}{2}$.

N_1 مرجّح النقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(N,-1)$.

B نقطة متمايزة عن النقط A ، M ، N و N_1 .

$\mathcal{T}$ صورة المثلث AMN_1 بالدوران ذي المركز B والزاوية $-\frac{®}{2}$.

أنجز شكلا . وبرهن أنّ المثلثين AMN و $\mathcal{T}$ متقايسان .

74 (Δ) مستقيم ثابت . A نقطة ثابتة لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) . من أجل كل نقطة M من (Δ)، نرسم النقطة N منتصف القطعة $[AM]$.

ما هو المحل الهندسي للنقطة N لما تتغير النقطة M على المستقيم (Δ) ؟

75 (C) دائرة ثابتة قطرها $[AB]$. M نقطة متغيرة من الدائرة (C) حيث $(M \neq A$ و $M \neq B)$.

لكل نقطة M نعين G مركز ثقل المثلث ABM .

ما هو المحل الهندسي للنقطة G لما تتغير النقطة M على الدائرة (C) ما عدا A و B ؟

76 ABC مثلث قائم في A . لكل نقطة M من القطعة $[BC]$ نعين M_1 نظيرة M بالنسبة للمستقيم (AB) ونعين M_2 نظيرة M بالنسبة للمستقيم (AC) .

1) برهن أنّ A هو منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

2) ما هو المحل الهندسي لكل من النقطتين M_1 و M_2 لما تتغير النقطة M على القطعة $[BC]$ ؟

77 T التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين $(x;y)$، النقطة M' ذات الإحداثيتين $(x';y')$.

في كل حالة من الحالتين التاليتين ، عين طبيعة التحويل T مبيّنا عناصره المميّزة :

أ ــ $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ ؛ ب ــ $\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 4 \end{cases}$.

9 ـ الأعداد المركبة والتحويلات النقطية .

78 أكتب العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-1;2)$.

ت : أكتب العبارة المركبة للتحاكي ذي المركز O مبدأ المعلم ونسبته 3 .

79 Ω نقطة لاحقتها العدد المركب $\mu = 1-i$.

عين العبارة المركبة للتحكي ذي النسبة $-\frac{1}{2}$ و المركز Ω .

80 أكتب عبارة مركبة للدوران الذي مركزه O مبدأ المعلم وزاويته $\frac{®}{6}$.

81 t تحويل نقطي في المستوي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z' = \sim z +$.

في كل من الحالات المقترحة أدناه ، عيّن طبيعة التحويل t مع ذكر عناصره المميّزة .

أ ـ $\sim = 1$ و $= 3+i$. ب ـ $\sim = i$ و $= 1-i$.

جـ ـ $\sim = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ و $= 0$.

د ـ $\sim = \frac{5}{2}$ و $= \frac{2i}{5}$.

82 A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $a = 3+i$ ، $b = -2+3i$ و $8-i$.

أ ــ عيّن نسبة التحاكي h ذي المركز C والذي يحول A إلى B .

ب ــ نقول عن مستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل ، أنه صامدا إجماليا .

برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة C ومعامل توجيهه 2 هو صامد إجمالي ، ثم أكتب معادلة له .

83 A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a = \frac{1}{2}(1+i)$ و $b = \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحول A إلى B .

84 t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين (x, y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x', y') حيث : $x' = 1-y$ و $y' = x-2$.

نضع $z = x+iy$ و $z' = x'+iy'$.

أ ـ أكتب z' بدلالة z .

ب ـ ما هي طبيعة التحول t مبيّنا عناصره المميّزة ؟

85 t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين (x, y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x', y') حيث : $x' = 2x - \frac{3}{2}$ و $y' = 2y + \frac{1}{2}$.

أ ـ ما هي طبيعة التحويل t ؟

ب ـ أكتب العبارة المكبة للتحويل t .

تمارين للتّعمّق

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1 ـ العمليات في مجموعة الأعداد المركبة .

86 حل في المجموعة $\mathbb{C}^2$ الجمل ذات المجهول $(z; z')$ التالية :

أ ـ $\begin{cases} 3z + z' = 2-5i \\ z - z' = -2+i \end{cases}$.

ب ـ $\begin{cases} 3z + z' = 5+2i \\ z + z' = 1-2i \end{cases}$.

جـ ـ $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$.

87 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = 1$.

88 برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

89 1) أكتب على أبسط شكل الأعداد المركبة i^2 ، i^3 ، i^4 ، i^8 و i^{13} .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $i^{4n+1}=i$
واستنتج i^{2009} .

90 في كل حالة من الحالات التالية ، مثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة .

أ ـ $\text{Re}(z)=-3$. ب ـ $\text{Im}(z)=2$.

جـ ـ $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$.

د ـ $\left[\text{Re}(z+1)\right]^2-\text{Im}(z-2)=0$.

91 z عدد مركب ، A ، M و M' نقط من المستوي لواحقها 1 ، z و z^2 على الترتيب .
عين مجموعة النط M حتى تكون النقط A , M و M' في استقامية .

92 p كثير حدود للمتغير المركب z والمعرف بـ :
$$p(z)=z^3+(-2+3i)z^2+(13-i)z-6-10i$$
من بين الأعداد المركبة i ، 1، $1+i$ ما هي الجذور لكثير الحدود p .

93 p كثير حدود للمتغير المركب z والمعرف بـ :
$$p(z)=z^3+(-1-5i)z^2+(-7-4i)z-2+12i$$
أثبت أن p يقبل جذرا حقيقيا يطلب تعيينه .

94 p كثير حدود للمتغير المركب z والمعرف بـ :
$$p(z)=z^3+(1-5i)z^2+(-7-4i)z-3+3i$$
1) أثبت أنّ p يقبل جذرين تخيليين صرفا يطلب تعيينهما .
2) تحقق أن العدد المركب $(-1+i)$ هو كذلك جذرا لـ p .

95 A , B و C نقط من المستوي المركب لواحقها $3i$, $-3i$ و $2-3i$.
1) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$.
2) عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها $AM^2+2BM^2-2CM^2=25$.

96 نرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z ، النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث $z'=z^2-2(1+i)z$.
1) عبر عن x' و y' بدلالة x و y .
2) $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقط M بحيث يكون z' حقيقيا .
برهن أن $\mathcal{H}$ هي منحنى دالة h يطلب تعيينها .

2 ـ مرافق عدد مركب .

97 $z=x+iy$ عدد مركب مع x و y عددين حقيقيين . نضع $\sim\, = z-2\bar{z}+2+3i$.
1) أحسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب ~ .
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\sim\, = 0$ ، ذات المجهول z .

98 $z=x+iy$ عدد مركب مع x و y عددين حقيقيين . نضع $\sim\, = iz+\bar{z}-3-2i$.
1) أحسب $\sim - \bar{\sim}$ بدلالة x و y .
2) برهن أن : " النقطة ذات اللاحقة ~ ، تنتمي إلى محور الفواصل " تكافئ " النقطة ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x-2$ " .

99 نضع $z=x+iy$ مع x و y عددين حقيقيين . نرفق بكل عدد مركب z العدد المركب ~ حيث $\sim\, = 2\bar{z}-2+6i$.
1) أحسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد المركب ~ .
2) هل يوجد عدد مركب z يحقق $z=\,\sim$.

100 في المستوي المركب لاحقة النقطة M هي العدد المركب $z=x+iy$ مع x و y عددين حقيقيين .
نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 ، العدد المركب L حيث $L=\dfrac{5z-2}{z-1}$.
1) عبر عن $L+\bar{L}$ بدلالة z و $\bar{z}$.
2) برهن أن " L هو عدد تخيلي صرف " معناه أن " M هي نقطة من دائرة باستثناء نقطة " .

101 باستعمال الخاصية $z+\bar{z}=2\text{Re}(z)$ ، حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :
أ ـ $z=2\bar{z}-2+6i$.

ب ـ $z^2+z\bar{z}-4-6i=0$.

جـ ـ $|z|^2+\bar{z}^2=8-4i$.

102 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ ـ $2z+i\bar{z}=5-4i$.

ب ـ $z\bar{z}+2z-5-2i=0$.

جـ ـ $\bar{z}z-5\bar{z}-5(1+3i)=0$.

103 في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ نعتبر كثير الحدود p المعرف بـ :

$$p(z)=z^3-(2-3i)z^2+9z-18+27i$$

1) عبر عن $\overline{p(z)}$ بدلالة $\bar{z}$.

2) عين العدد المركب ~ الذي يحقق $p(\sim)=0$ و $p(\bar{\sim})=0$.

104 z عدد مركب غير معدوم و $z'=\dfrac{-2}{z}$.

A , M و M' نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, z و z' .

D هي مجموعة نقط القرص ذي المركز O ونصف القطر 2 باستثناء النقطة O .

أ ــ عين مجموعة النقط M' لما M تمسح المجموعة D .

ب ــ عين مجموعة النقط M' لما M تمسح القطعة المستقيمة $[OA]$ باستثناء النقطة O .

105 من أجل كل عدد مركب z يختلف عن -1 نضع $Z=\dfrac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$.

$z=x+iy$ و $Z=X+iY$ مع x , y , X و Y أعداد حقيقية . M نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد z .

1) أحسب X و Y بدلالة x و y .

2) برهن أن مجموعة النقط M بحيث يكون Z حقيقيا هي مستقيم باستثناء نقطة .

3) برهن أن مجموعة النقط M بحيث يكون Z تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة .

106 نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن $-2i$ ، العدد المركب $Z=\dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

نضع $z=x+iy$ و M نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد z .

1) برهن أنّ $\mathrm{Re}(Z)=\dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$

و $\mathrm{Im}(Z)=\dfrac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$.

2) استنتج طبيعة المجموعتين E و F بحيث :

E هي مجموعة النقط M حيث Z حقيقي ؛ و F هي مجموعة النقط M حيث Z تخيلي صرف .

3) أنشئ المجموعتين E و F .

107 A ، M و M' نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب i ، z و z' .

نرفق بكل نقطة M تختلف عن A النقطة M' حيث :

$$z'=\frac{z^2}{i-z}$$

1) عين النقط M التي تنطبق على صورها M' .

2) برهن أن $\mathrm{Re}(z')=\dfrac{-x\left(x^2+y^2-2y\right)}{x^2+(1-y)^2}$.

3) استنتج $\mathscr{C}$ ، مجموعة النقط M التي تكون من أجلها M' تنتمي إلى محور التراتيب .

أنشئ المجموعة $\mathscr{C}$ (وحدة الرسم $3cm$) .

108 $z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq 1$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث $L=\dfrac{z+2i}{z-1}$.

1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

2) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

3) برهن أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

109 z عدد مركب يختلف عن 1 ، صورته النقطة M في المستوي المركب .

نضع $L=\dfrac{z+1}{z-1}$ و M' صورة العدد المركب L .

عين مجموعة النقط M في كل حالة من الحالات التالية :

أ ـ يكون L عددا حقيقيا .

ب ـ يكون L عددا تخيليا صرفا .

جـ ـ تكون النقط O ، M و M' في استقامية .

3 ـ طويلة وعمدة عدد مركب .

110 في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $a=i\sqrt{2}$, $b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ و $c=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ على الترتيب .

1) عين لاحقة النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات (-3) ، $(1+\sqrt{6})$ و $(1-\sqrt{6})$ على الترتيب .

2) بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

111 u و v عددان مركبان غير حقيقيين ، نضع : $z=\dfrac{u-\bar{u}v}{1-v}$.

برهن أن : " z حقيقي " يكافئ $|v|=1$.

112 a و b عددان مركبان حيث $|a|=|b|=1$ و $ab\neq -1$.

نضع : $z=\dfrac{a+b}{1+ab}$.

عبر عن $\bar{z}$ بدلالة a و b ، استنتج أن العدد z حقيقي .

113 z عدد مركب ، A و M نقطتان من المستوي المركب لاحقتيهما $1-i$ و z على الترتيب .

$\mathscr{C}$ هي مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $(z-1+i)\left(\overline{z-1+i}\right)=2$.

1) تحقق أن المبدأ O ينتمي إلى المجموعة $\mathscr{C}$.

2) عين المجموعة $\mathscr{C}$ ثم أنشئها .

114 $z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq -1$ و x ، y عددين حقيقيين . M نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد z . نضع : $Z=\dfrac{2iz-i}{z+1}$.

1) أحسب $\bar{Z}$ ، $\mathrm{Re}(Z)$ ، $\mathrm{Im}(Z)$ و $|Z|$ بدلالة x و y .

2) عين المجموعة $\mathscr{E}_1$ للنقط M بحيث يكون $|Z|=1$.

3) عين المجموعة $\mathscr{E}_2$ للنقط M التي يكون من أجلها Z تخيليا صرفا .

4) أرسم المجموعتين $\mathscr{E}_1$ و $\mathscr{E}_2$ وعين نقط تقاطعهما .

115 ~ عدد مركب غير معدوم طويلته r و ¯ عمدة له.

نعتبر العددين المركبين $z_1=\sim i$ و $z_2=\sim^2$

1) أحسب بدلالة r و ¯ الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_1 و z_2.

2) حدد r و ¯ حتى يكون z_1 و z_2 مترافقين .

116 A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_1=1$, $z_2=2i$ و $z_3=-1-i$.

1) أحسب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$.

2) أحسب $Arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$.

3) استنتج طبيعة المثلث ABC.

4 ـ الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم .

117 أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z في كل حالة من الحالات التالية .

أ ـ $z=(1-i)^2$.

ب ـ $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

جـ ـ $z=(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$.

د ـ $z=\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}{(1+i)^{12}}$.

118 أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z في كل حالة من الحالات التالية .

أ ـ $z=\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{6}$.

ب ـ $z=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{20}$.

جـ ـ $z=(i+1)\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$.

119 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون z حقيقيا .

أ ـ $z=(-2-2i)^{8n}$.   ب ـ $z=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{3n}$.

جـ ـ $z=\left(3-i\sqrt{3}\right)^{12n}$

120 نعتبر العدد المركب $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $z^{6n+1}=z$.

121 يعطى العددين المركبين $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=1-i$.

1) أعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

2) أعط الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$.

3) استنتج أنّ : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

122 يعطى العدد المركب $z=\frac{1-3i}{2-i}$.

1) أكتب z على الشكل الجبري ثم استنتج طويلته وعمدة له .

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا حقيقيا .

123 يعطى العددان المركبان $z_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_2=-\frac{1}{2}i$.

1) أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب z_1-2iz_2 .

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_1-2iz_2)^n$ تخيليا صرفا .

124 نعتبر العدد المركب $z=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

1) أحسب z^2 ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z^2 .

2) عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

3) استنتج أن $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

125 z ، u و v أعداد مركبة حيث $z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\frac{z}{u}$.

1) أكتب v على الشكل الجبري .

2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z.

3) استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

126 يعطى العددان المركبان $z_1=2+3i$ و $z_2=2+i$.

1) أكتب $z_1^2-z_2^2$ على شكله المثلثي .

2) أكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1^2-z_2^2}{8\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على شكله الجبري.

5 ـ الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم .

127 نضع $z_1=-1-i$ ؛ $z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

أ ـ أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري .

ب ـ أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي .

جـ ـ استنتج الطويلة عمدة للعدد الركب $\frac{z_1}{z_2}$ ، ثمّ استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

128 نضع : $a=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $b=1-i$.

1) أكتب على الشكل الأسّي كلا من الأعداد المركبة a ، b و $\frac{a}{b}$.

2) أكتب العدد $\frac{a}{b}$ على الشكل الجبري .

استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) حل في المجال $]-\pi;\pi[$ المعادلة
$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2 .$$

129 المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الرسم $4cm$).

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

2) مثل النقط A ، B ، C و D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .

130 θ عدد حقيقي .

عين الطويلة و عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1=-e^{i\theta}$ ؛ $z_2=-\cos\theta+i\sin\theta$ ؛ $z_3=\sin\theta-i\cos\theta$.

131 نعتبر العدد المركب z حيث :
$$z=2\sin^2\alpha+i\sin 2\alpha$$
مع α عدد حقيقي من المجال $[0;2\pi]$.

عين حسب قيم العدد α الكتابة الأسّية للعدد المركب z .

132 z عدد مركب حيث $z=1+e^{i\theta}$ مع $\theta\in]-\pi;\pi[$.

1) أ ـ تحقق أن $z=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$.

ب ـ استنتج الطويلة r و عمدة α للعدد المركب z بدلالة θ .

2) جد ، بدلالة θ ، الطويلة و عمدة للعدد المركب
$$L=\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta} .$$

133 نضع $z=e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ، $A=z+z^4$ و $B=z^2+z^3$.

1) برهن أن $1+A+B=0$ و $AB+1=0$.

استنتج أن A و B هما حلان للمعادلة $x^2+x-1=0$.

2) بين أن $z^4=\bar{z}$ ثم عين A بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$.

3) حل المعادلة $x^2+x-1=0$ و استنتج قيمة $\cos\frac{2\pi}{5}$.

134 1) برهن أنّ : $\frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}$

2) أحسب المجموع $1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

2) عين قيمة لكل من المجموعين S و T حيث
$$S=\sum_{k=0}^{4}\cos\frac{k\pi}{5} \text{ و } T=\sum_{k=0}^{4}\sin\frac{k\pi}{5} .$$

135 في المستوي المركب ، نرفق بكل نقطة m ذات اللاحقة العدد المركب غير المعدوم z ، النقطة M ذات اللاحقة $Z=\frac{1}{z^2}$.

1) نضع $z=re^{i\theta}$

أ ـ أكتب Z على الشكل الأسّي .

ب ـ Z_0 عدد مركب غير معدوم معطى . هل يمكن إيجاد عدد مركب z_0 يحقق $Z_0=\frac{1}{z_0^2}$ ؟

2) نفرض أن $|z|=1$.

أ ـ نعطي النقطة m أنشئ النقطة M .

ب ـ عين النقط m التي يكون من أجلها $Z=z$.

3) d مجموعة نقط نصف مستقيم مبدأه O ، باستثناء O.

أ ـ عين مجموعة النقط M عندما m تمسح المجموعة d.

ب ـ عين مجموعة النقط m عندما تمسح M المجموعة d.

136 في المستوي المركب ، نرفق بكل نقطة m ذات اللاحقة العدد المركب z ، النقطة M ذات اللاحقة

$$Z = \frac{z^3}{2+|z|^3}.$$

تعطى الكتابة الأسيّة لكل من العددين المركبين z و Z :

$Z = \rho e^{i\theta}$ و $z = re^{i\alpha}$.

1) عبر عن ρ و θ بدلالة r و α على الترتيب .

2) نرمز بـ $\mathcal{C}$ الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1.

A النقطة ذات اللاحقة $1-i$.

أ ـ عين مجموعة النقط M لما النقطة m تمسح الدائرة $\mathcal{C}$.

ب ـ عين مجموعة النقط M لما النقطة m تمسح نصف المستقيم $[OA)$.

3) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}.$$

أ ــ بين أن الدالة f متزايدة تماما وعين صورة المجال $[0;+\infty[$ بواسطة الدالة f .

ب ــ استنتج أنه من أجل كل نقطة m من المستوي ، النقطة M تنتمي إلى قرص يطلب تعيينه .

6 ـ المعادلات من الدرجة الثانية .

137 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$2z^2 + \left[1+i\left(2+\sqrt{3}\right)\right]z + i - \sqrt{3} = 0$$

1. تحقق من أنّ i حل لهذه المعادلة .

2. استنتج الحل الآخر وأحسب طويلته وعمدة له .

138 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 + (5-3i)z + 4 - 8i = 0.$$

2) نعيّن A و B صورتي الحلين لهذه المعادلة .

أ ــ عيّن لاحقة النقطة G التي تحقق $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

ب ــ ماذا تمثل النقطة G بالنسبة إلى النقط A ، B والمبدأ O لمعلم ؟

139 بكالوريا

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - \alpha(\alpha+i)z + i\alpha^3 = 0$ ،

حيث α عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .

1ـ حل المعادلة المعطاة .

2 ـ أحسب الطويلة وعمدة لكل من الحلين بدلالة r و θ .

3 ـ حدّد r و θ حتى يكون الحلان مترافقين .

140 بكالوريا

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول: $\alpha z^2 + \left(1-i\alpha^2\right)z + i\alpha = 0$ ، حيث α عدد مركب معطى .

1) جد مفكوك $(1+i\alpha)^2$ ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة المعطاة .

2) بوضع $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ احسب الطويلة وعمدة لكل من حلي المعادلة .

141 r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي . α عدد مركب طويلته r و θ عمدة له.

1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 - \alpha z + \alpha^2 = 0 .$$

2) عبر بدلالة r و θ على طويلتي الحلين وعمدتيهما .

142 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$z^2 - (1+i\sin 2\theta)z + \frac{i}{2}\sin 2\theta = 0 \quad \dots (1)$ ، حيث θ عدد حقيقي .

1) حل المعادلة (1) من أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2) أحسب بدلالة θ حلول المعادلة (1) .

143 بكالوريا

1) حل في مجموعة المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2+(7-4i)z+9-15i=0$.

نرمز بـ z_0 إلى الحل الذي له أكبر طويلة .

2) أحسب طويلة العدد المركب z_0 وعمدة له.

3) n عدد طبيعي. بيّن أنّ $z_0{}^n$ يكون عددا إذا وفقط إذا كان ، n قابلا للقسمة على 4 .

4) أحسب $\left(\frac{z_0}{3\sqrt{2}}\right)^{1996}$.

144 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، كلا من المعادلتين : $z^2-2z+5=0$ ؛

$z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0$.

2) في المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ ـ ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب ـ أكتب معادلة للدائرة $\mathscr{C}$ المحيطة بالمثلث ABC .

ج ـ أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}$.

د ـ أنشئ $\mathscr{C}$ والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .

145 θ عدد حقيقي معطى .

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2-2z\sin\theta+1=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما حلي المعادلة (E)

عين قيم العدد الحقيقي θ التي يكون من أجلها المثلث OAB متقايس أضلاع .

146 في المجموعة $\mathbb{C}$ نعتبر المعادلة (E) :

$z^3+2z^2-16=0$.

1) برر أن العدد 2 هو حل للمعادلة (E) .

2) جد العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ،

$z^3+2z^2-16=(z-2)\left(z^2+az+b\right)$.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

147 نضع من أجل كل عدد مركب z ،

$p(z)=z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد مركب z ؛

$p(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

148 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+z+1=0$.

2) استنتج ، في $\mathbb{C}$ ، حلول المعادلة $z^3-1=0$.

3) نضع $u=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

أ ــ أحسب u^2 ، u^3 و u^{2008} .

ب ــ أحسب $s=u+u^2+...+u^{2008}$.

149 نعتبر كثير الحدود :

$p(z)=z^4-19z^2+52z-40$ حيث z عدد مركب.

1) عين عددين حقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ،

$p(z)=\left(z^2+az+b\right)\left(z^2+4z+2a\right)$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

150 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4-1=0$.

2) استنتج ، في $\mathbb{C}$ ، حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$.

151 من أجل كل عدد مركب z ، نضع :

$p(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$.

1) a عدد حقيقي . عبر بدلالة a عن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $p(ia)$.

2) عين قيم a التي يكون من أجلها $p(ia)=0$.

3) عين عددين حقيقيين b و c حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ، $p(z)=\left(z^2+9\right)\left(z^2+bz+c\right)$.

4) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

152 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $\dfrac{(4-6i)z+1+3i}{2z-1-i}=2z$.

153 بكالوريا

1) اكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $(-1-i)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $\dfrac{(1-3i)z+3+i}{z-i}=z$.

3) نرمز بالرمز z_0 لحل المعادلة السابقة الذي له أصغر طويلة .

ـ أحسب العدد المركب $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{1984}$ وأكتبه على الشكل الجبري.

ـ ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ عددا حقيقيا ؟

154 بكالوريا

من اجل كل عدد مركب $z \neq 2i$ نعتبر العدد المركب $L(z)$ بحيث : $L(z)=\dfrac{(5-i)z+2(1+i)}{iz+2}$.

1) جد الأعداد المركبة z بحيث : $L(z)=z$.

أكتب هذه الأعداد على الشكل المثلثي .

2) في المستوي المركب لتكن النقطة M التي إحداثياها $(x;y)$ ولاحقتها z .

ـ أكتب على الشكل الجبري العدد $L(z)$.

ـ عيّن الطبيعة الهندسية و العناصر المميّزة لمجموعة النقط M التي لاحقتها z بحيث يكون $L(z)$ عددا تخيليا صرفا.

155 بكالوريا

نعتبر كثير الحدود P للمتغيّر المركب z المعرّف كما يلي:

$P(z)=z^3-iz^2+(1-i)z-2+2i$.

1) أحسب $P(1)$ ؛ استنتج كثير الحدود $Q(z)$ من الدرجة الثانية بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z :

$P(z)=(z-1).Q(z)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $P(z)=0$.

3) النقاط A، B و C صور حلول المعادلة $P(z)=0$ في المستوي المركب.

ـ ما هي طبيعة المثلث ABC .

156 بكالوريا

ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركب z المعرّف كما يلي : $P(z)=z^3-(4+i)z^2+(5+4i)z-5i$.

1) تحقق من أنّ $P(2+i)=0$ ؛ جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغيّر المركب z حتى يكون من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-2-i).Q(z)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $P(z)=0$.

3) لتكن A، B و C صور حلول المعادلة $P(z)=0$ في المستوي المركب حيث A صورة الحل $(2+i)$.

جد إحداثيات النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD .

157 بكالوريا

نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركب z المعرّف كما يلي :

$P(z)=z^3-(3+i)z^2+(4+i)z+2i-4$.

1) أحسب $P(2)$ ، جد كثير الحدود $Q(z)$ لمتغيّر المركب z بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z :

$P(z)=(z-2).Q(z)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $P(z)=0$.

3) في المستوي المركب لتكن A، B و C صور حلول المعادلة $P(z)=0$. ما هي طبيعة المثلث ABC؟

158 بكالوريا

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية :

$z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i=0$.

1) أثبت أنّ المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (E) . نسمي z_1 الحل الذي جزئه التخيّلي سالب و z_2 الحل الثالث.

3) في المستوي المركب لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2.

ـ جد إحداثيتي النقطة G مرجّح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات: -2 ، 3 و 1 على الترتيب .

ـ عيّن المجموعة $\mathscr{E}_M$ للنقط M من المستوي حيث : $-2MA^2+3MB^2+MC^2=9$.

159 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^3-\left(1+i\sqrt{2}\right)z^2+\left(1+i\sqrt{2}\right)z-i\sqrt{2}=0.$$

أ ـ بيّن أنّ هذه المعادلة تقبل حلا تخيّليا صرفا يطلب تعيينه

ب ـ حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة المعطاة .

7 ـ الأعداد المركبة والتحويلات النقطية .

160 بكالوريا

1) أحسب العدد المركب $\left(2\sqrt{3}+i\right)^3$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^3=18\sqrt{3}+35i$.

3) نرمز بـ : z_1 ، z_2 و z_3 إلى حلول هذه المعادلة ؛ A ، B و C صورها في المستوي ، على الترتيب .

أ ــ عيّن زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحول النقطة B إلى النقطة C .

ب ــ عيّن صورة بهذا الدوران للمستقيم Δ شعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث : $\left(\vec{u};\vec{w}\right)=\frac{®}{2}$.

161 نعتبر العددين المركبين $a=3+i\sqrt{3}$ ، $b=2+\sqrt{3}+3i$.

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها a ، $\bar{a}$ و b على الترتيب .

1) بيّن أن المثلث ABO متساوي الساقين ، ثمّ عيّن z_G لاحقة مركز ثقله G .

2) ليكن ~ و عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\sim z+$.

أ ـ عيّن ~ و حيث يكون $T(O)=G$ و $T(A)=C$.

ب ـ بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّين مركزه وزاويته .

جـ ـ استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T .

162 المستوي منسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، لتكن النقطتان A و B صورتي العددين المركبين $a=4+2i$ و $b=3-i$ على الترتيب.

أ ـ بين أن المثلث OAB قائم ومتقايس الساقين.

ب ـ عين مركز وزاوية الدوران الذي يحول النقطة A إلى النقطة B، والنقطة B إلى النقطة O .

جـ ـ لتكن النقطة C صورة النقطة O بهذا الدوران. ما هي طبيعة الرباعي $ABOC$؟

163 النقطتان A و B صورتا العددين المركبين $z_1=3-2i$ و $z_2=-1+6i$ على الترتيب ، في مستو مزوّد بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

µ نقطة من حامل محور الفواصل و r الدوران الذي مركزه µ و يحول A إلى B.

ـ عيّن مركز و زاوية الدوران r .

164 النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $2i$ ، 6 ، $1+i$ و $3-3i$.

~ و عددان مركبان ، t تحويل نقطي في المستوي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=3\sim z+$.

أ ـ عيّن ~ و علما أن $t(A)=B$ و $t(C)=D$.

ب ـ ما هي طبيعة التحويل t مع تعيّين عناصره المميّزة ؟

165 $A(2;1)$ و $B(3;0)$ نقطتان من المستوي .

h التحاكي ذو المركز A والنسبة $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ؛ r الدوران ذو المركز B والزاوية $-\frac{®}{4}$ ؛ t الانسحاب ذو الشعاع $\overrightarrow{BO}$.

أ ــ اكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات الثلاث .

ب ــ أكتب العبارة المركبة للتحويل $(t \circ r \circ h)$.

ج ــ عيّن النقطة C حيث $(t \circ r \circ h)(C) = O$.

166 بكالوريا

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - (2+i)z + 3 + i = 0$.

نرمز للحلين بـ z_0 و z_1 حيث $|z_0| > |z_1|$.

2) A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 1 ، z_0 و z_1 .

أوجد إحداثيي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A، B و C .

3) T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

أ ــ بيّن أن $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$.

ب ــ استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميّزة .

ج ــ أكتب العبارة المركبة للتحويل T .

4) A'، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتحويل T . بيّن أن النقط A'، B' و C' في استقامية .

167 A، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب ، لواحقها على الترتيب $z_A = 2+2i$ ، $z_B = 5+5i$ و $z_C = -2-2i$.

أ ـ أثبت أنّ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ هو عدد حقيقي .

ب ـ استنتج طبيعة التحويل T الذي يحول B إلى C و A نقطة الصامدة الوحيدة .

جـ ـ أكتب العبارة المركبة للتحويل T.

د ـ Γ المنحني ذي المعادلة $y = 3x - \frac{1}{x}$.

أكتب معادلة لصورة المنحني Γ بالتحويل T .

مسائل

في كل التمارين ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

168 نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة

$z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$.

1) بيّن أنّ المعادلة تقبل حلين تخيليين صرفا مترافقين z_0 و $\overline{z_0}$ حيث z_0 جزئه التخيلي موجبا .

2) برّر أن الحلين الآخرين لهذه المعادلة هما كذالك مترافقين ثم عيّنهما . ونرمز بـ z_1 الحل الذي جزئه التخيلي موجبا .

3) استنتج تحويلا نقطيا يحول $A(z_0)$ إلى $B(z_1)$ ويحول $A'(\overline{z_1})$ إلى $B'(\overline{z_0})$

169 A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب 1 و 4 .

d هي مجموعة نقط المستقيم (OA) باستثناء النقطة A .

Δ هي مجموعة نقط المستقيم العمودي على (OA) باستثناء النقطة A .

Γ هي الدائرة ذات المركز A نصف القطر 1 .

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب Z حيث $Z = \frac{z^2}{z-1}$.

لتكن m و M نقطتين من المستوي لاحقتيهما z و Z على الترتيب .

I نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـ :

$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

نسمي D_1 و D_2 مجموعتَي تعريف الدالتين f و g على الترتيب .

1) أدرس اتجاه التغيّر لكل من الدالتين f و g .

2) أدرس النهايات للدالتين f و g عند حدود مجموعتي تعريفهما على الترتيب .

3) أنجز جدولي التغيرات للدالتين f و g ، ثم استنتج الصورتين $f(D_1)$ و $g(D_2)$.

II J (1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $Z=3$. تعطى الحلول على الشكل الجبر ثم على الشكل الأسّي .

2) نفرض في هذا السؤال أن $z=1+e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$. أحسب Z بدلالة θ ثم استنتج مجموعة النقط M عندما يمسح θ $\mathbb{R}$.

3) نضع $m(x;y)$ و $M(X;Y)$ في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

أ ــ عين مجموعة النقط M عندما النقطة m تمسح المجموعة d .

ب ــ عين مجموعة النقط M عندما النقطة m تمسح المجموعة Δ.

4) أ ــ أحسب X و Y بدلالة x و y .

ب ــ عين مجموعة النقط m عندما النقطة M تمسح المحور $(O;\vec{u})$.

170 **I** J ليكن A و B عددين حقيقيين . نعتبر الدالة F المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بـ : $F(z)=Az+B\bar{z}$.

1) أحسب $F(1)$ و $F(i)$.

2) برهن أنه إذا كان من أجل كل عدد مركب z , $F(z)=0$ فإن $A=B=0$.

3) عين A و B حتى يكون من أجل كل عدد مركب z , $F(z)=z$.

II J ليكن a و b عددين حقيقيين . نعتبر الدالة f المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بـ : $f(z)=az+b\bar{z}$.

1) عبر عن $(f\circ f)(z)$ من أجل كل عدد مركب z .

2) برهن أن " من أجل كل عدد مركب z ، $(f\circ f)(z)=z$ " يكافئ $\begin{cases}a^2+b^2=1\\ ab=0\end{cases}$.

3) عين كل الدوال f التي تحقق من أجل كل عدد مركب z ، $(f\circ f)(z)=z$ (الدوال f تسمى تضامنية)

III– نعتبر الدالة g المعرفة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ بـ : $g(z)=e^{i\frac{\alpha}{4}}\bar{z}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر , نعتبر النقطتين $M(x;y)$ و $M'(x';y')$ لاحقتيهما z و z' على الترتيب حيث $z'=g(z)$

1) برر أنه من أجل كل عدد مركب z ، $(g\circ g)(z)=z$. (أي g دالة تضامنية)

2) عبر عن x' و y' بدلالة x و y .

3) Δ هي مجموعة النقط M بحيث يكون $z'=z$. أكتب معادلة للمجموعة Δ.

4) $\vec{u}(1;\sqrt{2}-1)$ شعاع من المستوي . برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي يكون $\vec{u}.\overrightarrow{MM'}=0$.

5) عين إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة $[MM']$ من أجل M نقطة من المستوي . استنتج أن I تنتمي إلى المجموعة Δ.

6) أعط طريقة هندسية لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M.

171 **I** J نعتبر العدد المركب u حيث $u=1+i$.

1) أكتب u و $\bar{u}$ على الشكل الأسّي .

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , نضع : $s_n=u^n+\bar{u}^n$.

بين أن $s_n=\rho_n\cos\frac{n\alpha}{4}$ مع ρ_n عدد حقيقي يطلب تعيينه .

3) عين قيم العدد الطبيعي n ، التي يكون من أجلها $s_n=0$.

4) أثبت أنه إذا كان n عددا زوجيا ، فإن s_n يكون عددا صحيحا .

II J نفرض أن $n=2m$ مع $m\in\mathbb{N}^*$.

1) باستعمال دستور ثنائي الحدين ، أنشر العددين $(1+i)^{2m}$ و $(1-i)^{2m}$.

2) p عدد طبيعي ، أكتب على أبسط شكل العبارتين التاليتين : $i^{2p+1}+(-i)^{2p+1}$ و $i^{2p}+(-i)^{2p}$.

3) تطبيق : نأخذ $m=12$

برهن أنّ $\sum_{p=0}^{12}(-1)^p C_{2p}^{24}=2^{12}$.

اختيار من متعدد

في التمرينين أدناه ، لكل سؤال يمكن عدّة اقتراحات صحيحة ، المطلوب إدلاء بها مبررًا ذلك .

172 بكالوريا

نضع $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) الشكل الجبري للعدد المركب z^2 هو :

أ. $2\sqrt{2}$.
ب. $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$.
جـ. $2+\sqrt{2}+i\left(2-\sqrt{2}\right)$.
د. $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$.

2) العدد المركب z^2 يكتب على الشكل الأسّي :

أ. $4e^{i\frac{\pi}{4}}$.
ب. $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
جـ. $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
د. $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

3) العدد المركب z يكتب على الشكل الأسّي :

أ. $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.
ب. $4e^{i\frac{\pi}{8}}$.
جـ. $4e^{i\frac{5\pi}{8}}$.
د. $4e^{i\frac{3\pi}{8}}$.

173 بكالوريا

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر.

1) تعطى النقط A ، B و C ، لواحقها على الترتيب : $a=-2+3i$ ؛ $b=-3-i$ و $c=2,08+1,98i$.

المثلث ABC هو :

أ. متساوي الساقين وغير قائم .
ب. قائم وغير متساوي الساقين .
جـ. متساوي الساقين وقائم .
د. لا قائم ولا متساوي الساقين .

2) لكل عدد مركب $z\neq-2$ نرفق العدد المركب z' حيث: $z'=\frac{z-4i}{z+2}$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z'|=1$ هي :

أ. دائرة مركزها 1 .
ب. مستقيم .
جـ. دائرة مركزها 1 باستثناء نقطة.
د. مستقيم باستثناء نقطة.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث z' حقيقي هي :

أ. دائرة مركزها 1 .
ب. مستقيم .
جـ. دائرة مركزها 1 باستثناء نقطة.
د. مستقيم باستثناء نقطة.

أصحيح أم خطأ ؟

174 في كل اقتراح أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبررًا ذلك .

1) النقط A ، B و C ذات اللواحق $a=e^{i\theta}$ ، $b=e^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}$ و $c=e^{i\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}$ على الترتيب ، تعيّن مثلثا متقايس أضلاع .

2) إذا كان Δ المستقيم الذي يشمل $A(i)$ ، و $\vec{w}(1+i)$ شعاع توجيهي له، فإنّ Δ هو مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ مع k عدد صحيح .

3) إذا كانت $A(3+2i)$ ، $B(3i)$ و $C(1+i)$ فإن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين .

175 ميّز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة مبررًا في كل مرّة جوابك .

1) من أجل كل عدد مركب z يكون $|z|=|iz|$.

2) كل عدد مركب z يكون له نفس الجزء الحقيقي للعدد المركب iz .

3) إذا كان $|z|=1$ فإن $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

4) z عدد مركب غير معدوم . يكون $Z=2iz$ ، إذا وفقط إذا ، كان $\left|\frac{Z}{z}\right|=2$ و $\arg\left(\frac{Z}{z}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ مع k عدد صحيح .

176 في كل اقتراح بيّن إن كانت العبارة صحيحة أم خاطئة .

1) r و θ عددان حقيقيا ، لدينا $\arg\left(re^{i\theta}\right)=\theta+2\pi k$ مع k عدد صحيح .

2) θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا :
$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=i\tan\theta$$

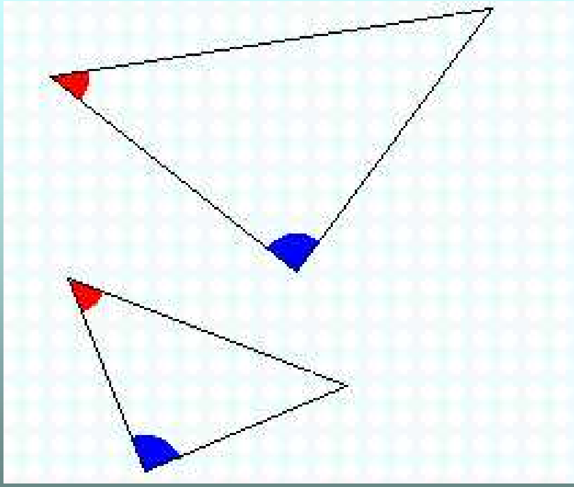
3) θ عدد حقيقي لدينا $\overline{e^{i\theta}}=-e^{i\theta}$.

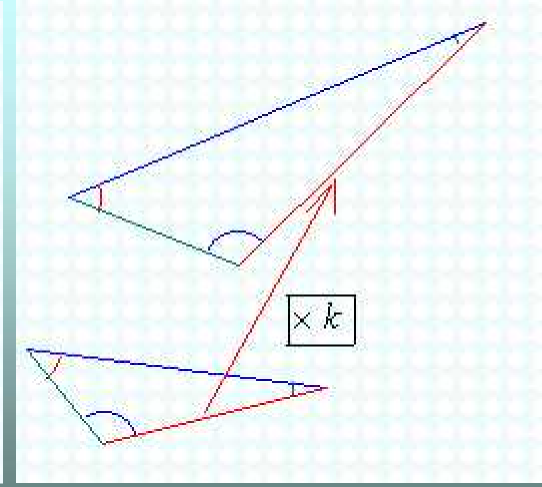
4) n عدد طبيعي ، العدد $\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2}$ هو حقيقي.

06 التشابه المباشر

الكفاءات المستهدفة

- التعرّف على تشابه مباشر.
- التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة.
- تركيب تشابهين مباشرين.
- تعيين التحليل القانوني لتشابه مباشر بواسطة الأعداد المركبة.
- توظيف التحليل القانوني لتشابه مباشر بواسطة الأعداد المركبة.
- توظيف خواص التشابهات المباشرة لحل مسائل هندسية.





نشاط أول

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي إحداثياها $(x;y)$ النقطة M' من المستوي

إحداثياها $(x';y')$ حيث $\begin{cases} x'=x\sqrt{3}-y \\ y'=x+y\sqrt{3} \end{cases}$.

1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S .

2) A و B نقطتان من المستوي ، و A' و B' صورتاهما بالتحويل S .

- أثبت أن $A'B'=2AB$.

3) A ، B ، C ، D نقط من المستوي و A' ، B' ، C' ، D' صورها بالتحويل S .

- أثبت أن $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$.

4) بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ أكتب z' بدلالة z .

5) لتكن النقط $K(3,0)$ ، $L(0,-2)$ و $P(3,-2)$.

نسمي K' ، L' و P' صور K ، L و P على الترتيب بالتحويل S.

- ما هي طبيعة المثلثين PKL و $P'K'L'$ ؟
- أحسب مساحة المثلث PKL ثم مساحة المثلث $P'K'L'$.

نشاط ثان

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' من المستوي لاحقتها z'

حيث $z'=(1-i)z+1-2i$

1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S .

2) A و B نقطتان من المستوي و A' و B' صورتاهما بالتحويل S .

- أثبت أن $A'B'=\sqrt{2}AB$.

3) A ، B ، C ، D نقط من المستوي و A' ، B' ، C' ، D' صورها بالتحويل S .

- أثبت أن $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$.

4) بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ أكتب z' بدلالة z .

أكتب x' و y' بدلالة x و y . ثم أكتب x و y بدلالة x' و y' .

نشاط ثالث

$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

I.

ليكن التحويل النقطي R الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي إحداثياها $(x;y)$ النقطة M' من المستوي إحداثياها $(x';y')$ حيث
$$\begin{cases} x'=1+y \\ y'=1-x \end{cases}$$

1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل R .
2) بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ أكتب z' بدلالة z .
استنتج طبيعة التحويل R و عناصره المميزة .
3) أثبت أن R تقايس .
4) عين (D') صورة المستقيم (D) ذي المعادلة $2x-3y-1=0$ بالتحويل R. أذكر لماذا $(D')\perp(D)$؟

II.

ليكن التحويل النقطي H الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي إحداثياها $(x;y)$ النقطة M' من المستوي إحداثياها $(x';y')$ حيث
$$\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y \end{cases}$$

1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل H .
2) بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ أكتب z' بدلالة z .
استنتج طبيعة التحويل H و عناصره المميزة .
3) هل H تقايس ؟
4) عين (Δ) صورة المستقيم (D) ذو المعادلة $2x-3y-1=0$ بالتحويل H . ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (Δ) و (D)

III.

1) عين العبارة التحليلية ثم العبارة المركبة للتحويل $H\circ R$. ($\circ$ هو تركيب التحويلات النقطية) .
2) عين العبارة التحليلية ثم العبارة المركبة للتحويل $R\circ H$.
3) ماذا تلاحظ ؟
4) A ، B ، C ، D نقط من المستوي و A' ، B' ، C' ، D' صورها بالتحويل $R\circ H$.
- أثبت أن $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$.
5) عين (C') صورة الدائرة (C) التي مركزها $A(-1,-1)$ و نصف قطرها 4 بالتحويل $R\circ H$.

التشابه المباشر.

في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

1. تعريف .

تعريف: القول أن التحويل النقطي S تشابه مباشر معناه أن S يحافظ على نسب المسافات و على الزوايا الموجهة أي من أجل كل نقط M,N,P,Q من المستوي و $M\neq N$ ، صورها M',N',P',Q' على الترتيب فإن: $\frac{PQ}{MN}=\frac{P'Q'}{M'N'}$ و $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)$.

2. نسبة تشابه مباشر .

خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا فإن S يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب تماما k .
العدد k يسمى نسبة التشابه S .

البرهان: يكن S تشابها مباشرا، من أجل كل نقط M,N,P,Q من المستوي و $M\neq N$ ، صورها M',N',P',Q' على الترتيب لدينا $\frac{PQ}{MN}=\frac{P'Q'}{M'N'}$ و منه $\frac{M'N'}{MN}=\frac{P'Q'}{PQ}$ و بالتالي النسبة $\frac{M'N'}{MN}$ تساوي عددا ثابتا k حيث k عدد حقيقي موجب تماما . و منه $M'N'=k\,MN$.

حالة خاصة: إذا كان $k=1$ نقول عن التشابه المباشر S أنه تقايس موجب أو إزاحة أي S انسحاب أو دوران .

2. زاوية تشابه مباشر .

تعريف: S تشابه مباشر من المستوي . S يحافظ على الزوايا الموجهة $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)$.
و منه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ زاوية ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N
هذه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ تسمى زاوية التشابه المباشر S.

3. التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة .

خاصية: كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$
حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$.

البرهان: O هي نقطة لاحقتها 0، I نقطة لاحقتها 1 و M نقطة لاحقتها z
$O'(p'),L'(q'),M'(z')$ صور O,I,M على الترتيب بالتشابه المباشر S
من $\frac{OM}{OI}=\frac{O'M'}{O'I'}$ و $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'M'}\right)$ (مع $M\neq 0$)
و منه نستنتج $\left|\frac{z-0}{1-0}\right|=\left|\frac{z'-p'}{q'-p'}\right|$ و $\arg\left(\frac{z-0}{1-0}\right)=\arg\left(\frac{z'-p'}{q'-p'}\right)$ و بالتالي $z'=(q'-p')z+p'$
بوضع $a=q'-p'$ ($O\neq I$ و بالتالي $p'\neq q'$ و $a\neq 0$) و $b=p'$ يمكن التأكيد أن الصيغة المركبة لـ S هي $z'=az+b$ مع $a\neq 0$.

تمرين محلول1: $ABCD$ مربع مباشر من المستوي .

S التشابه المباشر الذي نسبته 2 و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

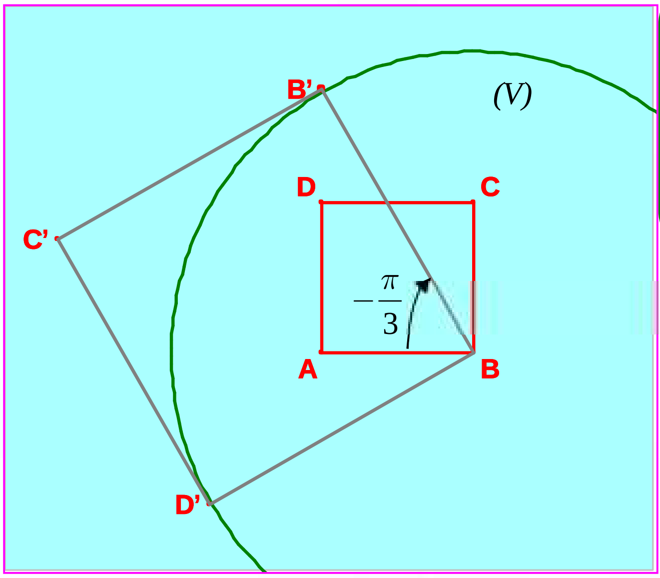
نفرض $S(A)=B$.

أنشئ النقط B' ، C' ، D' صور B ، C ، D على الترتيب بالتشابه المباشر S

طريقة: لإنشاء صور نقط بتشابه مباشر S يمكن:

- استعمال المحافظة على الزوايا .
- استعمال النسبة k و الزاوية θ لـ S. أي

$$\begin{cases} M'N' = k\,MN \\ \left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)=\theta \end{cases}$$



الحل: النقطة B' معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} BB' = 2AB \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BB'}\right)=\frac{2\pi}{3}+2\pi t \end{cases}$$ حيث t عدد صحيح

أي النقطة B' تنتمي إلى الدائرة (V) التي مركزها B

و نصف قطرها $2AB$ وكذلك $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BB'}\right)=\frac{2\pi}{3}$

أي $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BB'}\right)=-\frac{\pi}{3}$ يعني النقطة B' تنتمي إلى نصف المستقيم (Bl) الذي يكوّن الزاوية $-\frac{\pi}{3}$ مع المستقيم (BA). بما أن $ABCD$ مربع والتشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات و الزوايا الموجهة فإن $BB'C'D'$ مربع وهذا يجعلنا ننشئ C' و D'

تمرين محلول2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث:

$z'=(1+i)z-2i$.

1) عين A' صورة النقطة $A(1,-1)$.

2) عين B' صورة النقطة $B(0,1)$.

3) عين k نسبة التحويل S.

الحل: 1) $S(A)=A'$ و منه $z_{A'}=(1+i)(1-i)-2i=2-2i$ أي $A'(2,-2)$.

2) $S(B)=B'$ و منه $z_{B'}=(1+i)(i)-2i=-1-i$ أي $B'(-1,-1)$.

3) التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات ومنه $k=\frac{|z_{B'}-z_{A'}|}{|z_B-z_A|}=\frac{A'B'}{AB}$.

إذن $k=\frac{|-1-i-2+2i|}{|i-1+i|}=\frac{|-3+i|}{|-1+2i|}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$

↲ خواص التشابه المباشر (1).

في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{OI},\vec{OJ})$.

1. تحويل نقطي كتابته المركبة $z'=az+b$.

خاصية: a و b عددان مركبان حيث $a\neq 0$.
إذا كان S تحويلا نقطيا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$ ، فإن S تشابه مباشر نسبته $|a|$.

البرهان:

M ، N ، P ، Q نقط كيفية من المستوي لواحقها m ، n ، p ، q على الترتيب .

M' ، N' ، P' ، Q' صور M ، N ، P ، Q على الترتيب بالتحويل S .

m' ، n' ، p' ، q' لواحق M' ، N' ، P' ، Q' على الترتيب .

$m'=am+b$ ، $n'=an+b$ ، $p'=ap+b$ ، $q'=aq+b$.

- $M'N'=|n'-m'|=|an+b-am-b|$ و منه $M'N'=|a|\times MN$ و منه $|a|=\dfrac{M'N'}{MN}$

بنفس الطريقة $|a|=\dfrac{Q'P'}{QP}$ و بالتالي $\dfrac{M'N'}{MN}=\dfrac{Q'P'}{QP}$ أي $\dfrac{MN}{QP}=\dfrac{M'N'}{Q'P'}$.

و منه S يحافظ على نسب المسافات.

- بفرض $M\neq N$ و $P\neq Q$ لدينا $\dfrac{q'-p'}{n'-m'}=\dfrac{aq+b-ap-b}{an+b-am-b}$ و منه $\dfrac{q-p}{n-m}=\dfrac{aq-ap}{an-am}=\dfrac{q'-p'}{n'-m'}$

و منه $\arg\left(\dfrac{q-p}{n-m}\right)=\arg\left(\dfrac{q'-p'}{n'-m'}\right)$ أي $(\vec{MN},\vec{PQ})=(\vec{M'N'},\vec{P'Q'})$.

و منه S يحافظ على الزوايا.

S يحافظ على نسب المسافات و يحافظ على الزوايا إذن S تشابه مباشر . وبما أن $M'N'=|a|\times MN$ فإن $|a|$ هي نسبة التشابه المباشر S.

ملاحظة: لا توجد تشابهات أخرى كتابتها المركبة تختلف عن $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{C}^*$ و $b\in\mathbb{C}$.

2. حالات خاصة.

1) الانسحاب تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=z+b$ و هو من الشكل $z'=az+b$ مع $a=1$. نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 .

2) التحاكي تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=az+b$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي $|a|$.

3) الدوران تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير حقيقي ، طويلته تساوي1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 .
زاوية التشابه المباشر في هذه الحالة هي زاوية الدوران أي $\arg(a)$.

تمرين محلول1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

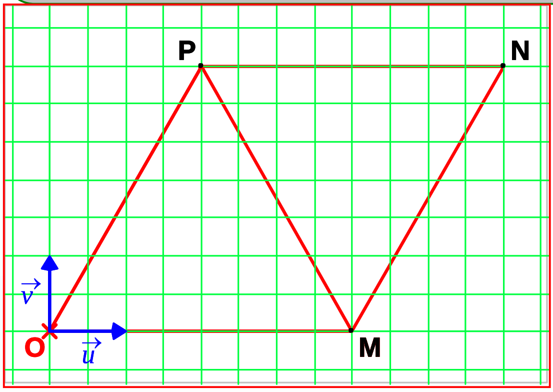
من أجل كل نقطة M من المستوي ، نعتبر المعين المباشر $OMNP$ حيث $MP=OM$.

أثبت أن النقطة N صورة النقطة M بتشابه مباشر يطلب تعيين نسبته .

طريقة: للبرهان على أن تحويل نقطي تشابه مباشر يكفي إيجاد كتابته المركبة من الشكل :

$z'=az+b$ مع a و b عددان مركبان حيث $a\neq 0$.

نسبة التشابه المباشر هي $|a|$



الحل: المثلث OMP مثلث متقايس الأضلاع مباشر إذن P هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ليكن r هذا الدوران . الكتابة المركبة للدوران r هي $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}$ ، إذن $z_N=z_M+z_P$.

$r(M)=P$ و منه $z_P=e^{i\frac{\pi}{3}}z_M$.

و بالتالي : $z_N=z_M+e^{i\frac{\pi}{3}}z_M=\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z_M=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}z_M$.

إذن N صورة M بالتحويل النقطي الذي كتابته المركبة $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}z$ وهي الكتابة المركبة لتشابه المباشر الذي نسبته $\sqrt{3}=\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right|$.

تمرين محلول2: أذكر طبيعة التحويل S المعرف بكتابته المركبة في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $z'=iz+1-i$

2) $z'=3z-5i$.

3) $z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-1$

4) $z'=(1+i)z+i$.

5) $z'=z-1+5i$

6) $z'=(1-i)z+i-3$.

الحل: 1) $|i|=1$ إذن S دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$.

2) $a=3$ عدد حقيقي إذن S تحاكي نسبته 3 .

3) $\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ إذن S دوران زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

4) $|a|=|1+i|=\sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$.

5) $a=1$ إذن S انسحاب شعاعه $\vec{u}(-1;5)$.

4) $|a|=|1-i|=\sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$.

خواص التشابه المباشر (2).

في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

1. تركيب تشابهين مباشرين .

خاصية: تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين .

البرهان: S تشابه مباشر عبارته المركبة $z'=az+b$ حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$.

L تشابه مباشر عبارته المركبة $z'=a'z+b'$ حيث a' و b' عددان مركبان و $a'\neq 0$.

M' و N' صورتا M و N على الترتيب بالتحويل S .

M_1 و N_1 صورتا M' و N' على الترتيب بالتحويل L .

إذن M_1 و N_1 صورتا M و N على الترتيب بالتحويل $L\circ S$.

- $M'N'=|a|\times MN$ و $M_1N_1=|a'|\times M'N'$ ، وبالتالي $M_1N_1=|a'|\times|a|\times MN$
- $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)=\arg(a)$ و $\left(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M_1N_1}\right)=\arg(a')$.

و بالتالي $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)+\left(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M_1N_1}\right)=\arg(a)+\arg(a')$ أي $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M_1N_1}\right)=\arg(a)+\arg(a')$.

إذن $L\circ S$ تشابه مباشر نسبته $|a'|\times|a|$ وزاويته $\arg(a)+\arg(a')$ ، و $L\circ S=S\circ L$

5. التحليل القانوني لتشابه مباشر.

خاصية: S تشابه مباشر نسبته k $\left(k\in\mathbb{R}_+^*\right)$ و زاويته θ $(\theta\in\mathbb{R})$.

- إذا كان $k=1$ و $\theta=0$ التشابه S انسحاب .
- في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقتها ω و $S=h\circ r=r\circ h$ ، حيث h هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k و r هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ .

البرهان: S تشابه مباشر كتابته المركبة $z'=az+b$ أي $z'=ke^{i\theta}z+b$ حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$.

- $k=1$ و $\theta=0$ معناه $a=1$ و الكتابة المركبة تصبح $z'=z+b$ إذن S انسحاب شعاعه $\vec{U}$ حيث $\vec{U}$ صورة العدد المركب b (إذا كان زيادة على هذا $b=0$ فإن S التحويل المطابق).
- $k\neq 1$ $(a\neq 1)$. لتكن M نقطة صامدة بالتشابه S .

$S(M)=M$ يعني $z=az+b$ ومنه $z=\dfrac{b}{1-a}$ إذن S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقتها $\omega=\dfrac{b}{1-a}$.

h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k كتابته المركبة $z'=kz+b$ ،وبالتالي $z'-\omega=k(z-\omega)$.

r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ كتابته المركبة $z'=e^{i\theta}z+b$. وبالتالي $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$.

M' صورة M بالتحاكي h و M_1 صورة M' بالدوران r ،إذن M_1 صورة M بالدوران $h\circ r$.

أي $z_{M'}-\omega=k\left(z_M-\omega\right)$ و $z_{M_1}-\omega=e^{i\theta}\left(z_{M'}-\omega\right)$

و بالتالي $z_{M_1}-\omega=e^{i\theta}\left(k\left(z_M-\omega\right)+\omega-\omega\right)$ أي $z_{M_1}-\omega=ke^{i\theta}\left(z_M-\omega\right)$.

و منه M_1 صورة M بالتحويل S وبالتالي $S=h\circ r$. بنفس الطريقة نثبت أن $r\circ h=S$.

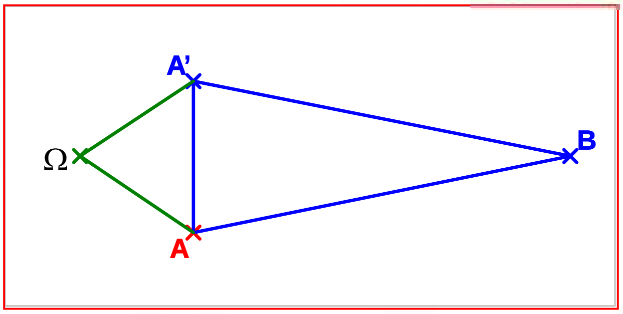
S تشابه مباشر مركزه Ω نسبته k و زاويته θ .

ليكن الدوران r_1 الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن الدوران r_2 الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{6}$.

نضع $f = r_2 \circ r_1$.

1) أثبت أن f دوران يطلب تعيين زاويته.

2) أنشئ النقطة A' صورة A بالتحويل f و Ω مركز الدوران f .



الحل: 1) f تركيب تشابهين مباشرين (الدوران تشابه مباشر نسبته 1) إذن فهو تشابه مباشر نسبته 1 (جداء النسبتين) و زاويته $\frac{\pi}{3}$ (مجموع الزاويتين $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$).

بما أن الزاوية غير معدومة f ليس انسحاب و بالتالي f له مركز ليكن Ω هذا المركز .

ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 1 (التطبيق المطابق) و r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

$f = r \circ h = r$ إذن f دوران مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

2) $f(A) = (r_2 \circ r_1)(A) = A'$ بما أن $r_1(A) = A$ (A مركز الدوران r_1) فإن $A' = r_2(A)$

إذن لدينا $BA' = BA$ و $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}\right) = -\frac{\pi}{6}$. و منه إنشاء النقطة A' .

$f(A) = A'$ و منه لدينا $\Omega A' = \Omega A$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) = \frac{\pi}{3}$. إذن المثلث $AA'\Omega$ مثلث مباشر متقايس الأضلاع

و منه إنشاء Ω .

S_1 التشابه المباشر الذي كتابته المركبة $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)z + 3i$

S_2 التشابه المباشر الذي كتابته المركبة $z' = \left(\sqrt{3}+i\right)z + 3 - 3\sqrt{3}\,i$.

عين طبيعة التحويل $S_1 \circ S_2$.

الحل: $(S_1 \circ S_2)(M) = S_1(S_2(M)) = S_1(M_1) = M'$.

$S_1(M_1) = M'$ يعني $z_{M'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)z_{M_1} + 3i$.

$S_2(M) = M_1$ يعني $z_{M_1} = \left(\sqrt{3}+i\right)z_M + 3 - 3\sqrt{3}\,i$.

$z_{M'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)\left(\left(\sqrt{3}+i\right)z_M + 3 - 3\sqrt{3}\,i\right) + 3i$ و منه $z_{M'} = z_M$.

و بالتالي $S_1 \circ S_2$ هو التطبيق المطابق .

خواص التشابه المباشر (3).

في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

1. تعيين تشابه مباشر .

خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا مركزه Ω نسبته k $\left(k\in\mathbb{R}_{+}^{*}-\{1\}\right)$ و زاويته θ فإن :

- $S(\Omega)=\Omega$.
- من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن Ω

$S(M)=M'$ تعني $\begin{cases}\Omega M'=k\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta\end{cases}$

البرهان: ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k و r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ .

نعلم أن $S=h\circ r=r\circ h$

- $S(\Omega)=(h\circ r)(\Omega)=h[r(\Omega)]=h(\Omega)=\Omega$.
- لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن Ω و M_1 صورتها بالدوران r و M' صورة M_1 بالتحاكي h .

$S(M)=(h\circ r)(M)=h[r(M)]=h(M_1)=M'$

$h(M_1)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M_1}$ و منه $\Omega M'=|k|\Omega M_1$ وبما أن $k>0$ فإن $\Omega M'=k\Omega M_1$.

$r(M)=M_1$ يعني $\Omega M_1=\Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1}\right)=\theta$

من $\Omega M'=k\Omega M_1$ و $\Omega M_1=\Omega M$ نستنتج $\Omega M'=k\Omega M$

بما أن $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M_1}$ و $k>0$ نستنتج أن $\overrightarrow{\Omega M'}$ و $\overrightarrow{\Omega M_1}$ متوازيان و لهما نفس الاتجاه ، و منه

$\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta$.

2. التشابه المباشر و نقط المستوي.

خاصية: إذا كانت A ، B ، A' و B' أربع نقط حيث $A\neq B$ و $A'\neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

البرهان: ليكن S تشابها مباشرا كتابته المركبة $z'=az+b$ مع $a\neq 0$. z_A ، z_B ، $z_{A'}$ و $z_{B'}$ لواحق A ، B ، A' و B' على الترتيب حيث $A\neq B$ و $A'\neq B'$.

$\begin{cases}S(A)=A'\\ S(B)=B'\end{cases}$ معناه $\begin{cases}z_{A'}=a\,z_A+b\\ z_{B'}=a\,z_B+b\end{cases}$ و التالي $a=\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_A}$ و $b=z_{A'}-\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_A}z_A$.

بما أن $A'\neq B'$ فإن $a\neq 0$ و التشابه S وحيد .

نتائج: • S هو التشابه المباشر الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

- إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ لأن $a=\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_A}=1$
- إذا كان $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو تشابه مباشر نسبته $\dfrac{A'B'}{AB}$ و زاويته $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)$. مركزه النقطة الصامدة.

تكن النقط A ، B ، C و D التي لواحقها $z_A=1$ ، $z_B=-3-5i$ ، $z_C=-4+5i$ و $z_D=-3$ على الترتيب .

عين التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D . ثم عين عناصره المميزة .

الحل: ليكن S التشابه المباشر المطلوب .

الكتابة المركبة للتحويل S هي $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب .

لدينا $z_B=a\,z_A+b$ و $z_D=a\,z_C+b$.

أي $\begin{cases}-3-5i=a+b\\ -3=(-4+5i)a+b\end{cases}$ بالطرح طرفا من طرف $5i=(-5+5i)a$

ومنه $a=\dfrac{5i}{-5+5i}=\dfrac{i}{-1+i}=\dfrac{i(-1-i)}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

من المعادلة $-3-5i=a+b$ نستخرج b ، $b=-3-5i-a$.

وبالتالي $b=-3-5i-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=-\dfrac{7}{2}-\dfrac{9}{2}i$.

$S(M)=M'$ يعني $z'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)z-\dfrac{7}{2}-\dfrac{9}{2}i$.

تكن النقطة Ω لاحقتها ω مركز S أي $\omega=\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{-\dfrac{7}{2}-\dfrac{9}{2}i}{1-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)}=\dfrac{-7-9i}{1+i}=\dfrac{(-7-9i)(1-i)}{2}$

وبالتالي $\omega=-8-i$ أي $\Omega(-8,-1)$. نسبة S هي $|a|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\arg(a)=-\dfrac{\pi}{4}$.

تكن النقط A ، B ، C التي لواحقها $z_A=i$ ، $z_B=-2+3i$ ، $z_C=-4+5i$ على الترتيب .

عين التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول C إلى B .

الحل: ليكن S التشابه المباشر المطلوب .

الكتابة المركبة للتحويل S هي $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب .

لدينا $z_A=a\,z_A+b$ و $z_B=a\,z_C+b$.

أي $\begin{cases}i=ai+b\\ -2+3i=(-4+5i)a+b\end{cases}$ بالطرح طرفا من طرف $2-2i=(4-4i)a$

و منه $a=\dfrac{2-2i}{4-4i}=\dfrac{1}{2}$.

من المعادلة $i=ai+b$ نستخرج b ، $b=i-ai$. وبالتالي $b=i-\dfrac{1}{2}i=\dfrac{1}{2}i$.

$S(M)=M'$ يعني $z'=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}i$. و منه S تحاك .

تحويل نقطي كتابته المركبة $z'=a\overline{z}+b$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

ليكن التحويل النقطي T من المستوي الذي بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقتها z' حيث أن : $z'=-3i\overline{z}+2+6i$. (العدد $\overline{z}$ هو مرافق العدد z) .

ليكن التحويل النقطي T' من المستوي الذي بكل نقطة M_1 من المستوي لاحقتها z_1 يرفق النقطة M'_1 من المستوي لاحقتها z'_1 حيث أن : $z'_1=4i\overline{z_1}+2-i$. (العدد $\overline{z_1}$ هو مرافق العدد z_1) .

1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T .

2) نضع $M(x,y)$ و $M'(x',y')$. عين x' و y' بدلالة x و y ثم x' و y' بدلالة x و y

3) عين طبيعة التحويل $T\circ T$ و عناصره الهندسية.

4) عين صورة المستقيم (D) الذي معادلته $x+2y-1=0$

5) أثبت أن T مركب من التناظر العمودي بالنسبة إلى حامل محور الفواصل يتبعه تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة .

6) أثبت أن T مركب من التحاكي h الذي مركزه A النقطة الصامدة بالتحويل T و نسبته -3 يتبعه التناظر العمودي بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي يشمل A و معامل توجيهه 1 .

7) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T' .

8) نضع $M_1(x_1,y_1)$ و $M'_1(x'_1,y'_1)$. عين x'_1 و y'_1 بدلالة x_1 و y_1 ثم x'_1 و y'_1 بدلالة x_1 و y_1

9) عين التحويل $T\circ T'$.

10) عين التحويل $T'\circ T$.

المثلثات المتشابهة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

ليكن التحويل النقطي S من المستوي الذي بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقتها z' حيث أن : $z'=(1-i)z+2+6i$.

تكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=-1-i$ ، $z_B=-1+2i$ ، $z_C=3+i$ على الترتيب .

1) عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .

2) عين لواحق النقط A' ، B' و C' صور A ، B و C بالتحويل S على الترتيب .

3) أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامية .

4) أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC .

5) أثبت أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان .

نتائج التشابه المباشر.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

ليكن التحويل النقطي S من المستوي الذي إلى كل نقطة M من المستوي لاحقتها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقتها z' حيث أن : $z'=\left(-1+\sqrt{3}i\right)z+\sqrt{3}+2i$.

تكن النقط A ، B ، C و D التي لواحقها $z_A=-1$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=i$ و $z_D=3-i$ على الترتيب .

1) عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .

2) أثبت أن النقط A ، B و C على استقامية .

3) عين إحداثيات النقط A' ، B' ، C' و D' صور النقط A ، B ، C و D بالتحويل S .

4) تحقق أن النقط A' ، B' و C' على استقامية .

5) عين لاحقة النقطة P مركز ثقل المثلث ABD ثم عين لاحقة P' صورتها بالتحويل S .

6) عين لاحقة النقطة P_1 مركز ثقل المثلث $A'B'D'$.

7) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $x-y-1=0$ و ليكن $(\triangle)$ المستقيم الذي معادلته $-2x+2y+3=0$.

تأكد أن المستقيمين (D) و $(\triangle)$ متوازيان.

عين معادلتي (D') و $(\triangle')$ صورتي (D) و $(\triangle)$ بالتحويل S ثم تأكد أن المستقيمين (D') و $(\triangle')$ متوازيان.

8) ليكن (D_1) المستقيم الذي معادلته $2x+2y-3=0$. تأكد أن المستقيمين (D) و (D_1) متعامدان.

عين معادلة (D'_1) صورة (D_1) بالتحويل S ثم تأكد أن المستقيمين (D') و (D'_1) متعامدان.

نسمي Q نقطة تقاطع (D) و (D_1) و Q' نقطة تقاطع (D') و (D'_1) ، بين أن Q' هي صورة Q بالتحويل S .

9) أثبت أن صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ هي القطعة المستقيمة $[A'B']$ يمكن ملاحظة أن كل نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ تمثل مرجحا للنقطتين A و B مرفقتين بالمعاملين α و $1-\alpha$ و $\alpha\in[0;1]$.

10) $\mathcal{C}$ الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $2\sqrt{2}$.

أ - أكتب معادلة للدائرة $\mathcal{C}$.

ب - ما هي طبيعة المجموعة $\mathcal{C}'$ صورة الدائرة $\mathcal{C}$ بالتحويل S؟

جـ - تحقق أن النقطتين B و B' تنتميان إلى $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ على الترتيب .

د - أكتب معادلة للمجموعة $\mathcal{C}'$.

هـ - قارن مساحتي $\mathcal{C}'$ و $\mathcal{C}$.

11) **أ -** أحسب الجدائين السلميين $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'D'}$.

ب - أحسب الأطوال AB ، AD ، $A'B'$ و $A'D'$ ؛ ثمّ أحسب $\cos\widehat{BAD}$ و $\cos\widehat{B'A'D'}$.

جـ - ماذا تستنتج ؟

موضوع محلول

تمرين :

1. ليكن العددان المركبان z_1 و z_2 حيث :

$$z_1=\sqrt{2}(1-i) \text{ و } z_2=\frac{\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})i}{1-z_1}$$

أ . أكتب العدد z_1 على الشكل المثلثي .

ب . برهن أنّ $z_2=-i$

2. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ، M و M' نقطتان لاحقتاهما z و z' على الترتيب ؛ نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$. نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M، النقطة M' حيث :

$$\begin{cases} x'=\sqrt{2}(x+y+1) \\ y'=\sqrt{2}(-x+y+1)-1 \end{cases} .$$

أ . أكتب z' بدلالة z .

ب . استنتج الطبيعة والعناصر المميّزة للتحويل S .

ج . Δ المستقيم ذو المعادلة $x+y+1=0$ ، أكتب معادلة لصورة المستقيم Δ بالتحويل S

3. **أ .** أكتب العبارة المركّبة للتحويل $S\circ S$.

ب . برهن أنّ $S\circ S$ هو تشابه مباشر .

ج . قارن بين العناصر المميّزة للتحويليين S و $S\circ S$.

حل مختصر

1. أ . $z_1=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

ومنه $z_1=2\left(\cos\left(-\frac{®}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{®}{4}\right)\right)$

ب . $z_2=\frac{\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})i}{(1-\sqrt{2})+i\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})i}{1-\sqrt{2}(1-i)}$ ؛

$$z_2=\frac{-i\left[\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})i\right]}{\sqrt{2}+i(-1+\sqrt{2})}=\frac{-i\left[\sqrt{2}+(-1+\sqrt{2})i\right]}{-i\left[(1-\sqrt{2})+i\sqrt{2}\right]}=-i \cdot$$

1. أ . $z'=x'+iy'=\sqrt{2}(x+y+1)+i\sqrt{2}(-x+y+1)-i$ ؛

$z'=\sqrt{2}(x+iy-ix+y+1+i)-i=\sqrt{2}(z-iz+1+i)-i$ ؛

$z'=\sqrt{2}(1-i)z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i$.

ب . نضع $~=\sqrt{2}(1-i)$ و $+=\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i$ ومن السؤال 1) ينتج

$~=z_1=2\left(\cos\left(-\frac{®}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{®}{4}\right)\right)$ و $\frac{+}{1-~}=z_2=-i$ وبالتالي S تشابه

مباشر في المستوي نسبته 2، زويته $-\frac{®}{4}$ ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $-i$.

ج . صورة المستقيم Δ بالتشابه المباشر S هي مستقيم Δ' بما أن $x+y+1=0$ فإن $x'=0$ وبالتالي Δ' هو حامل محور التراتيب .

3) أ . $z'=\sqrt{2}(1-i)\left[\sqrt{2}(1-i)z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i\right]+\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i$ ؛

$z'=-4iz+4-i\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i$ ؛ $z'=-4iz+4-i$.

ب . $-4i=4\left(\cos\left(-\frac{®}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{®}{2}\right)\right)$ إذن $S\circ S$ هو تشابه مباشر نسبته 4،

زاويته $-\frac{®}{2}$ ولاحقة مركزه العدد z_0 حيث $z_0=\frac{4-i}{1+4i}=\frac{-i(4i+1)}{1+4i}=-i$.

ج ــ نسبة وزاوية التشابه $S\circ S$ هما ضعفا نسبة وزاوية S بينما لهما نفس المركز .

تعاليق

لكتابة z_1 على الشكل المثلثي يكفي تعيين الطويلة وعمدة للعدد $1-i$.

يمكن كتابة z_2 على الشكل الجبري باستعمال مرافق المقام لكن الحسابات تكون طويلة .

$$-ix+y=-i\left(x+\frac{y}{-i}\right)$$

إذا كان $z'=~z+$ مع $~\neq 0$ و $~\neq 1$ فإن S تشابه مباشر في المستوي نسبته $|~|$ وزاويته $\arg(~)$ ولاحقة مركزه العدد المركب $\frac{+}{1-~}$.

وضع $S(M)=M'$ و $S(M')=M''$ نحصل على $S[S(M)]=M''$.

يمكن استعمال مركب تشابهين لهما نفس المركز .

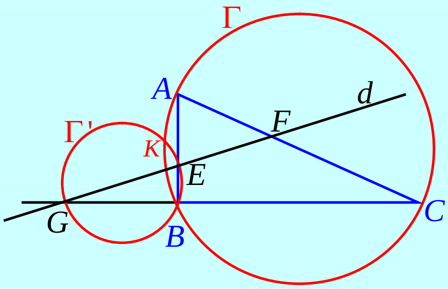
موضوع موجّه

تنبيه

طرح المشكل بصيغتين مختلفتين ، استعمال طرائق هندسية ثمّ تطبيقات على الأعداد المركبة والوصول إلى نفس الهدف .

يجب توقع وتخمين عناصر غير واردة لبناء فرضيات والانطلاق في البرهنة.

تمرين



1. يُكن ABC مثلثا قائما في B ، ومباشر حيث $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{®}{2}$.

تكن E نقطة من القطعة $[AB]$. من النقطة E ترسم مستقيما d يقطع القطعة $[AC]$ في F ويقطع المستقيم (BC) في G (أنظر الشكل) .

نفرض أن النقط E ، F و G تختلف عن النقط A ، B و C.

Γ و Γ' الدائرتان المحيطتان على الترتيب ، بالمثلثين ABC و BEG، تتقاطعان في النقطتين B و K .

ـ برّر وجود تشابه مباشر S في المستوي حيث $S(A)=C$ و $S(E)=G$. عيّن النسبة ، المركز والزاوية لـ S .

2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث تؤخذ وحدة الرسم $2cm$.

لواحق النقط A ، B ، C . E و G هي على الترتيب $z_A=2+4i$ ، $z_B=-1-2i$ ، $z_C=3-4i$ ، $z_E=0$ ، و $z_G=-5$.

أ ـ أثبت أن المثلث ABC قائم في B .

ب ـ عيّن لاحقة النقطة K تقاطع الدائرتين اللتين قطراهما على الترتيب $[AC]$ و $[EG]$.

جـ ـ مثّل هذه النقط ضمن شكل .

3. يُكن S' التشابه المباشر في المستوي حيث $S'(A)=C$ و $S'(E)=G$.

أ ـ عيّن الكتابة المركّبة للتشابه S' .

ب ـ عيّن العناصر المميّزة للتشابه S'.

توجيهات

1. استعمل الزوايا المحيطية للبرهان على تشابه المثلثين AKE و CKG ثم تجد أنّ S تشابه مباشر مركزه K ونسبته هي نسبة قطري الدائرتين والزاوية $-\frac{®}{2}$.

2. أ ـ تحقق من أنّ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$.

ب ـ ضع $K(x;y)$ وحل في $\mathbb{R}^2$ الجملة $\begin{cases}\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{CK}=0\\ \overrightarrow{EK}.\overrightarrow{GK}=0\end{cases}$ حيث $(x;y)$ هي المجهول.

3. أ ـ ضع $z'=\sim z+$ ولتعيّين $\sim$ و حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة $\begin{cases}S'(A)=C\\ S'(E)=G\end{cases}$.

ب ـ لإيجاد العناصر المميّزة ، أكتب $\sim$ على الشكل المثلثي و $\frac{\quad}{1-\sim}$ على الشكل الجبري.

تمارين تطبيقية

1 - التشابه المباشر في المستوي.

1 ليكن ABC مثلثا كيفيا ولتكن µ نقطة من المستوي.

1) أنشئ الصور A' ، B' و C' للنقط A ، B و C بالتحاكي ذي المركز µ والنسبة 3 . ثم أنشئ الصور A'' ، B'' و C'' للنقط A' ، B' و C' بالدوران ذي المركز µ والزاوية $\frac{®}{3}$.

2) برهن أنّ : $\frac{A''B''}{AB}=\frac{B''C''}{BC}=\frac{C''A''}{CA}$.

2 ليكن ABC مثلثا كيفيا ولتكن µ نقطة من المستوي و d مستقيم يشمل النقطة µ .

1) أنشئ الصور A' ، B' و C' للنقط A ، B و C بالتحاكي ذي المركز µ والنسبة -2 . ثم أنشئ الصور A'' ، B'' و C'' للنقط A' ، B' و C' بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم d .

2) برهن أنّ : $\frac{A''B''}{AB}=\frac{B''C''}{BC}=\frac{C''A''}{CA}$.

3 ABC مثلث حيث $AB=2cm$ ، $AC=3cm$ و $BC=4cm$.

C' نظيرة C بالنسبة إلى (AB) .

A' مرجّح الجملة المثقلة $\{(C',2);(A;-3)\}$ و B' مرجّح الجملة المثقلة $\left\{(C',2);\left(B;-\frac{3}{2}\right)\right\}$.

أ ـ أرسم شكلا .

ب ـ برهن أنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان .

جـ ـ ما هي أطوال أضلاع المثلث $A'B'C'$ ؟

4 ABC مثلث حيث $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\frac{®}{4}$.

A' و C' صورتا النقطتين A و C ، على الترتيب ، بالدوران r ذي المركز B والزاوية $-\frac{®}{3}$.

A'' و C'' نظيرتا النقطة B بالنسبة A' و C' على الترتيب .

أ ـ أرسم شكلا .

ب ـ برهن أنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان .

5 نرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=(1+i)z+4$.

نعتبر النقطتين M و N المرفقتين بالصورتين M' و N' على الترتيب .

1) بيّن أنّ الكسر $\frac{M'N'}{MN}$ ثابت .

2) بيّن أنه توجد نقطة A وحيدة تنطبق على صورتها .

3) أحسب $\frac{AM'}{AM}$ وكذلك الزاوية $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'})$.

4) لتكن النقط B ، C و D وصوّرها B' ، C' و D' على الترتيب . برهن أنّ المثلثين BCD و $B'C'D'$ متشابهان .

6 T التحويل النقطي في المستوي ، كتابته المركبة هي: $z'=2iz+3$. لتكن A ، B و C النقط ذات اللواحق i ، 2 و $1-i$.

1) عيّن لواحق النقط A' ، B' و C' صوّر النقط A ، B و C بالتحويل T .

2) عيّن لاحقة النقطة D حيث $T(D)=A$.

3) برهن أنّ : $\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AB}{AC}$.

4) أحسب $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})$.

7 A نقطة من المستوي لاحقتها 1 ؛ h التحاكي الذي مركزه A ونسبته -2 ؛ r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{®}{2}$.

أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات h ، r ، $r\circ h$ و $h\circ r$.

هل $r\circ h=h\circ r$ ؟

8 A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما 2 و $3+i$ على الترتيب .

s هو التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم (OA) .

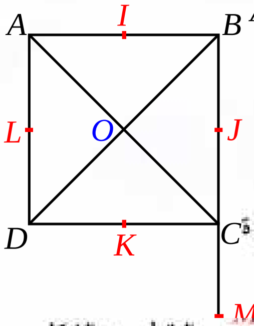
t الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات s ، t ، $s\circ t$ و $t\circ s$.

هل $s\circ t=t\circ s$ ؟

2 ـ تحديد التشابه المباشر.

9 في المستوي الموجّه $ABCD$ مربع مركزه O ؛ I ، J ، K و L هي منتصفات القطع $[AB]$،$[BC]$،$[CD]$ و $[AD]$ على الترتيب . M نظيرة J بالنسبة إلى النقطة C .



في كل حالة ، نتعرّف على صورّ بعض النقط من الشكل بالتشابه في المستوي S . هل S تشابه مباشر ؟ برّر الإجابة .

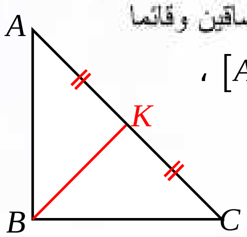
أ ـ $S(O)=O$ ، $S(J)=B$ و $S(I)=A$.

ب ـ $S(O)=O$ ، $S(I)=K$ و $S(A)=C$.

جـ ـ $S(O)=O$ ، $S(J)=C$ و $S(I)=B$.

د ـ $S(O)=K$ ، $S(I)=C$ و $S(A)=M$.

10 ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين وقائما في B، و K منصف القطعة $[AC]$ ، حيث $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=\frac{®}{2}$.



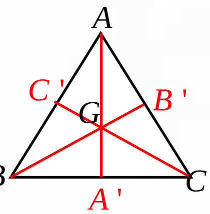
عيّن نسبة وزاوية التشابهات المباشرة المعرفة في الحالات المقترحة التالية :

1) المركز A و B تُحوّل إلى K .

2) المركز C و K تُحوّل إلى B .

3) المركز A و B تحوّل إلى C .

11 ABC مثلث متقايس أضلاع حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{®}{3}$ و A' و B' المنتصفان على الترتيب لقطعتين $[BC]$ و $[AC]$ ، و G مركز ثقل هذا المثلث.



ما هما نسبة وزاوية التشابهات المباشرة المعرفة في كل من الحالات المقترحة التالية ؟

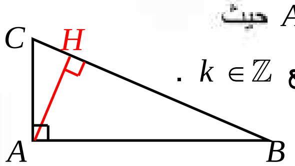
1) المركز A و B تُحوّل إلى A' .

2) المركز A' و A تُحوّل إلى C .

3) المركز B و C تحوّل إلى G .

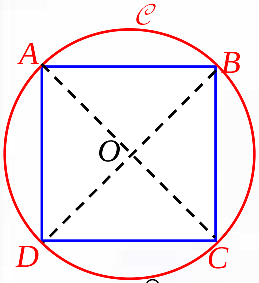
4) المركز G و A تُحوّل إلى B' .

12 ABC مثلث قائم في A حيث $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=¯+2®k$ مع $k\in\mathbb{Z}$.



ما هما نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه H ويحوّل A إلى B ؟

13 $ABCD$ مربع مركزه O ، محيط بالدائرة $\mathscr{C}$.

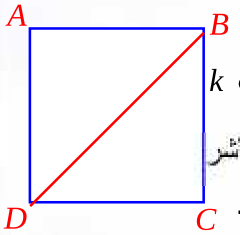


1) أنشئ صورة للشكل بالتحاكي ذي المركز B و النسبة 2.

2) أنشئ صورة للشكل بالتشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته 2 وزاويته $\frac{®}{4}$.

3) برهن أنّ الشكلين المتحصل عليهما متقايسان .

14 نعتبر المربع $ABCD$ مع $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})=\frac{®}{2}+2®k$ و $k\in\mathbb{Z}$



1) عيّن النسبة والزاوية للتشابه المباشر الذي يحوّل A إلى B و B إلى D.

2) نفس السؤال يعاد بالنسبة للتشابه المباشر الذي يحوّل C إلى D و A إلى B.

3 ـ العبارة المركّبة التشابه المباشر.

15 في المستوي المركب ، عيّن في كل حالة عبارة مركبة للتشابه المباشر S ذي المركز Ω ، النسبة k والزاوية $¯$.

أ ـ $\Omega(0)$ ، $k=2$ ، $¯=\frac{®}{2}$.

ب ـ $\Omega(-i)$ ، $k=\sqrt{2}$ ، $¯=\frac{®}{4}$.

جـ ـ $\Omega(2i)$ ، $k=\frac{1}{2}$ ، $¯=\frac{3®}{2}$.

د ـ $\Omega(1-2i)$ ، $k=1$ ، $¯=®$.

16 عيّن الدالة المركبة التي تعرّف التشابه المباشر في كل حالة من الحالات التالية :

1) المركز هو المبدأ ، النسبة $2\sqrt{2}$ والزاوية $\frac{®}{4}$.

2) المركز $\Omega(1;2)$ ، النسبة 3 والزاوية $\frac{2®}{3}$.

3) المركز $\Omega(3;0)$ ، النسبة $\frac{1}{3}$ والزاوية $-\frac{®}{6}$.

17 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ، نعتبر T يرفق بكل نقطة $M\left(x\,;y\right)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث : $x'=x-y$ و $y'=x+y-1$.

أ ـ عبّر عن اللاحقة z' للنقطة M' بدلالة اللاحقة z للنقطة M.

ب ـ تعرّف على التحويل T.

18 في المستوي المركّب ، كل تشابه مباشر يقبل كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$ حيث a و b عددين مركبين و a غير معدوم .

1) A ، B ، C و D أربع نقط من المستوي حيث $A\neq B$. برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد s يحول A إلى C و B إلى D .

2) نفرض أنّ OAB مثلث مباشر، قائم ومتساوي الساقين حيث O هو مبدأ المعلم و $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{®}{2}$. النقطة C هي منتصف $[AB]$ و D نظيرة C بالنسبة إلى (OB).

أ ـ أعط العبارة المركبة للتشابه s .عيّن زاوية ونسبة التشابه s .

ب ـ بيّن أنّ O هو مركز التشابه s .

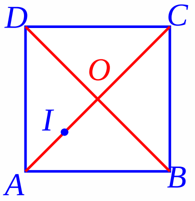
19 A، B، C و D أربع نقط من المستوي المركب ، لواحقها على الترتيب i ، 1 ، $2-\sqrt{3}$ و $1+i\sqrt{3}$.

1) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر s حيث :
$s(A)=C$ و $s(B)=D$.

2) عيّن العناصر المميّزة للتشابه s .

20 في المستوي المركّب ، $ABCD$ مربع ضلعه 1 ومركزه O حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{®}{2}$.

I هو منتصف القطعة $[AO]$.



أ ـ برّر وجود تشابه مباشر وحيد S حيث : $S(A)=O$ و $S(B)=I$.

ب ـ عيّن نسبة وزاوية التشابه S.

جـ ـ أعط كتابة مركّبة للتشابه S مع اعتبار المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.

د ـ نسمي Ω مركز التشابه S . برهن أنّ المستقيمين $(A\Omega)$ و (ΩD) متعامدان .

4 ـ خواص التشابه المباشر.

21 في المستوي الموجّه، ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{®}{2}$.

أرسم صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر المقترح في كل حالة من الحالات التالية :

أ ـ S_1 ذو المركز A ، النسبة 2 والزاوية $\frac{®}{2}$.

ب ـ S_2 ذو المركز B ، النسبة 1 والزاوية $-\frac{®}{4}$.

جـ ـ S_3 ذو المركز B ، النسبة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ والزاوية $\frac{®}{4}$.

22 في المستوي الموجّه، ABC مثلث متقايس أضلاع حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{®}{3}$ و G مركز ثقله .

أرسم صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر المقترح في كل حالة من الحالات التالية :

أ ـ S_1 ذو المركز A ، النسبة 2 والزاوية $-\frac{®}{3}$.

ب ـ S_2 ذو المركز G ، النسبة $\frac{1}{2}$ والزاوية $-\frac{2®}{3}$.

جـ ـ S_3 ذو المركز G ، النسبة $\frac{1}{2}$ والزاوية ® .

23 في المستوي الموجّه ، $ABCD$ مربّع مركزه I حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{®}{2}$.

أ ـ عيّن النسبة والزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه A ويحول C إلى D .

ب ـ عيّن النسبة والزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I .

24 في المستوي المركب ، تعطى النقط $A(1;0)$ ؛ $A'(-3;-5)$ ؛ $B(-4;5)$ و $B'(-3;0)$

أ ـ برّر أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$.

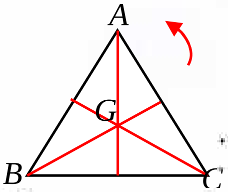
ب ـ أعط العبارة المركبة للتشابه S.

جـ ـ ما هي نسبة التشابه S ؟ وما هي زاويته ؟

د ـ عين إحداثيتي النقطة C' صورة النقط $C(-1;5)$.

جـ ـ عين إحداثيتي النقطة D التي صورتها $D'(-1;0)$.

25 في المستوي الموجّه، ABC مثلث متقايس أضلاع حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{®}{3}$ و G مركز ثقله.



عيّن النسبة و الزاوية للتشابهات المباشرة S_1، S_2 و S_3 حيث:

أ ـ $S_1(B)=B$ و $S_1(A)=C$.

ب ـ $S_2(B)=B$ و $S_2(C)=G$.

جـ ـ $S_3(G)=G$ و $S_3(B)=C$.

5 ـ الأشكال الهندسة بالتشابه المباشر.

26 $(O;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي ، OCD مثلث متقايس أضلاع مباشر. B منتصف $[OC]$. نعتبر النقطة A حيث يكون المثلث OAB متقايس أضلاع مباشر. S التشابه المباشر ذو المركز O ويحول D إلى B أذكر إن كان العبارات المقترحة التالية صحيحة أم خاطئة مبررًا ذلك .

أ ـ نسبة S هي $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{®}{3}$.

ب ـ $S(A)=C$.

جـ ـ صورة المثلث OCD هي المثلث OAB بالتشابه S.

د ـ S^{-1} هو التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته 2 وزاويته $\frac{®}{3}$.

27 في المستوي المركب ، S التشابه المباشر عبارته المركبة $z'=iz+1-i$.

d مستقيم معادلته $y=x+5$.

أكتب معادلة لمستقيم d' صورة d بالتشابه S .

28 $(O;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي المركب . S التشابه المباشر عبارته المركبة $z'=(i+1)z+2-i$.

عيّن الصورة بالتشابه S لكل من :

أ ـ الدائرة $\mathcal{C}_1$ ذات المركز O ونصف القطر 4 .

ب ـ الدائرة $\mathcal{C}_2$ ذات المركز $\Omega(2;2)$ ونصف القطر 3.

جـ ـ المستقيم (AB) حيث A و B نقطتا التقاطع الدائرتين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

29 C هي نقطة من الدائرة ذات القطر $[AB]$ ، وتختلف عن A و B .

H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول H إلى B .

عيّن الصورة $\mathcal{D}$ لمستقيم (AB) بالتشابه S.

ما القول عن المستقيمين $\mathcal{D}$ و (AC) ؟

30 $EFGH$ معيّن مركزه O .

أنشئ صورة المعيّن $EFGH$ بالتشابه المباشر S ذي المركز O ويحول E إلى F .

31 في المستوي الموجّه ، ABC مثلث متقايس أضلاع حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{®}{3}$. نسمي s التشابه المباشر ذي المركز C النسبة $\sqrt{3}$ والزاوية $\frac{®}{6}$.

1) برهن أنّ صورة A بـ s هي A' نظيرة C بالنسبة لمستقيم (AB) .

2) برهن أنّ صورة B بـ s هي نظيرة A بالنسبة لـ B.

3) أ ـ ما هي صورة مركز ثقل المثلث ABC بـ s.

ب ـ استنتج صورة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC، بـ s.

32 في المستوي الموجّه ، $ABCD$ مربّع مركزه O ؛ حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\frac{®}{2}$.

S التشابه المباشر ذو المركز D حيث $S(O)=C$.

أ ـ عيّن الزاوية و النسبة لهذا التشابه .

ب ـ عيّن صورة A بالتشابه S .

جـ ـ أنشئ صورة C بالتشابه S ، باستعمال خواص التشابهات.

33 نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب 1 و i . C نقطة حيث $OACB$ مربّعا . I مركز المربع. K ، L و J منتصفات القطع $[IC]$ ، $[AC]$ و $[AI]$ على الترتيب .

1) ما هي طبيعة الرباعي $IKLJ$ ؟

2) عين المركز ، النسبة و الزاوية للتشابه المباشر f حيث $f(O)=I$ و $f(B)=K$.

برهن أنّ $f(C)=L$ و $f(A)=J$.

تمارين للتعمق

1 ـ العبارة المركّبة للتشابه المباشر.

34 في المستوي المركب ، نعتبر التحويل النقطي T يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة $z'=az+a$ مع a عدد مركب.

1) عيّن a حتى يكون التحويل T انسحابا يطلب شعاعه.

2) عيّن a حتى يكون التحويل T دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$.

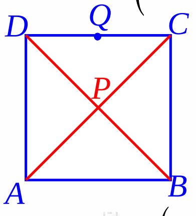
أوجد مركزه .

3) عيّن a حتى يكون التحويل T تحاك نسبته -3 .

أوجد مركزه .

4) عين الطبيعة و العناصر المميّزة للتحويل T في حالة $a=-1-i$.

35 في المستوي المركب ، نعتبر المربع $ABCD$ مركزه P حيث $AB=8cm$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$.



نعيّن Q منتصف $[CD]$

و s التشابه المباشر حيث $s(A)=P$

و $s(C)=Q$.

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\vec{u};\vec{v})$ حيث

$\overrightarrow{AB}=8\vec{u}$ و $\overrightarrow{AD}=8\vec{v}$.

1) عيّن لواحق النقط A ، C ، P و Q.

2) بالتشابه s ، النقطة M ذات اللاحقة z تحول إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=\sim z+$ مع $\sim$

و عددين مركّبين. أحسب $\sim$ و .

3) انطلاقا من الكتابة المركبة ، جد قيمتي النسبة a

و الزاوية $^{-}$ للتشابه s .

أحسب اللاحقة µ لنقطة Ω مركز التشابه s .

36 نعتبر الأعداد المركبة التالية: $z_1=1$ ؛ $z_2=\sqrt{3}+i$ ؛

$z_3=i$ و $z_4=1-i\sqrt{3}$.

في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 .

يُكن s التشابه المباشر الذي A إلى B و C إلى D.

1) جد الكتابة المركّبة للتشابه s ، عيّن عناصره .

2) إذا كانت M' صورة M بالتشابه s و Ω مركزه ، برهن أنّ المثلث $\Omega MM'$ قائم .

37 1) أعط العناصر المميّزة للتشابه المباشر f المعرف بالكتابة المركّبة التالية : $z'=(1-i)z+2-i$.

2) في كل من الحالات التالية ، عين التشابه المباشر s حيث $s\circ f$ يكون :

ـ التحاكي الذي مركزه O ونسبته $\frac{1}{2}$.

ـ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1;-1)$.

ـ التشابه المباشر الذي مركزه $B\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ ، زاويته $\frac{5\pi}{4}$ ونسبته 2.

38 يُكن S التشابه المعرّف بالدالة المركبة التالية :

$z\mapsto(1+i)z+2$.

1) حدّد العناصر المميّزة للتشابه S ويُكن I مركزه.

2) إذا كان $S(M)=M'$ فما هي طبيعة المثلث IMM'؟

3) ما هي المجموعة $\mathcal{E}$ للنقط M من المستوي التي يكون من أجلها $OM=OM'$ ؟

4) ما هي المجموعة $\mathcal{F}$ للنقط M من المستوي التي يكون من أجلها $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=0$ ؟

39 لتكن في المستوي المركب النقطتين M و M' لاحقتاهما على الترتيب $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ مع x ، x' ، y و y' أعداد حقيقية .

نفرض أن الثنائية $(x';y')$ مرتبطة بالثنائية $(x;y)$ بالعلاقتين التاليتين : $x'=-3x+3y+10$ و $y'=-3x-3y-5$.

عبّر عن z' بدلال z وتعرّف على التحويل المرفق .

40 في المستوي المركب تعطى النقطة A ذات اللاحقة $2+i$ ونعتبر التشابه المباشر s ذي المركز A ، النسبة 2 والزاوية $-\frac{\pi}{4}$. هذا التشابه يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$

1) عبّر عن z' بدلالة z .

2) عبّر عن الإحداثيتين x' و y' للنقطة M' بدلالة الإحداثيتين x و y لنقطة M .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (D') المحول بالتشابه s لمستقيم (D) ذي المعادلة $x=3$.

41 في مستو موجّه ، حدّد التشابه المباشر الذي يرفق بالنقطة $A(1;1)$ النقطة $B(-2;0)$ ويرفق بالنقطة $C(2;-1)$ النقطة $D(-4;-1)$.

42 بكالوريا.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-2(2-i)z+6=0$.

يرمز بـ z_1 للحل الذي له أصغر طويلة و z_2 للحل الآخر .

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر .

نسمي A ، B ، M_1 و M_2 النقط التي لواحقها $2i$ ، 6 ، z_1 و z_2 على الترتيب .

~ و عددان مركّبان و T تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث $z'=\sim z+$.

أ ـ عيّن ~ و علما أنّ صورة A بالتحويل T هي B وصورة M_1 بالتحويل T هي M_2.

ب ـ ما هي طبيعة التحويل T ؟ أعط عناصره المميّزة .

43 في المستوي المركب نعتبر النقط $A(1;0)$ ، $B(2;0)$ و $C(1;1)$.

أ ـ عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى C .

ب ـ T تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=(1-i)z-2i$$

ما هي طبيعة التحويل T ؟

ما هي طبيعة المثلث BMM' ؟

44 1) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر . A ، B ، C و D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $1+2i$ ، $5+2i$ ، $1+4i$ و $2-i$.

ـ عيّن التشابه المباشر S الذي يحول النقطة A إلى النقطة C ، و النقطة D إلى النقطة B (تعطى العناصر المميّزة للتشابه S).

2) لتكن النقطة K_0 التي لاحقتها $3i$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $K_{n+1}=S(K_n)$ و $u_n=\|\overrightarrow{\mu K_n}\|$ حيث μ هي مركز التشابه S.

ـ احسب $\|\overrightarrow{\mu K_n}\|$ بدلالة n.

ـ ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

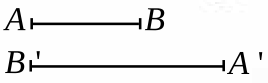
2 ـ خواص التشابه المباشر.

45 A، B، A' و B' حيث $A\neq B$ ، $A'\neq B'$ و $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{A'B'}$.

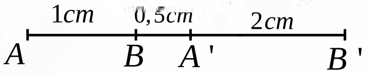
S هو التشابه المباشر حيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$

في كل حالة من الحالتين التاليتين

أ ـ $(AB)//(A'B')$



ب ـ A، B، A' و B' في استقامية .



46 في المستوي الموجّه، ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{®}{2}$.

نعيّن I منتصف القطعة $[BC]$، M نقطة كيفية من $[BC]$ متمايزة عن B و C.

P و Q نقطتان من $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب حيث يكون $APMQ$ مستطيلا .

أ ـ برّر وجود تشابه مباشر وحيد S حيث $S(A)=B$ و $S(Q)=P$.

ب ـ حدّد الطبيعة والعناصر المميزة لهذا التشابه .

جـ ـ استنتج أن المثلثين IQA و IPB متقايسان مباشرة .

47 في المستوي الموجّه، ABC مثلث متقايس أضلاع حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{®}{3}$. A' منتصف $[BC]$ ، B' منتصف $[AC]$ و C' منتصف $[AB]$.

نقترح إثبات أنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان مباشرة .

1) ولهذا نبحث عن وجود تشابه مباشر S حيث : $S(A)=B'$، $S(B)=C'$ و $S(C)=A'$.

أ ـ برهن أن للمثلثين ABC و $A'B'C'$ نفس مركز ثقل واستنتج مركز التشابه إن وجد .

ب ـ عيّن النسبة لهذا التشابه .

جـ ـ عيّن الزاوية للتشابه S .

د ـ برهن أنّ التشابه المعرّف سابقا محقق .

2) ما هو التشابه المباشر S' حيث : $S'(A)=A'$ ، $S'(B)=B'$ و $S'(C)=C'$ ؟

48 θ_1 ، θ_2 ، k_1 و k_2 أعداد حقيقية . برهن أنّ :

أ ـ مركب دورانين r_1 و r_2، زاويتاهما θ_1 ، θ_2 هو انسحاب أو دوران زاويته $\theta_1+\theta_2$.

ب ـ مركب تحاكيين h_1 و h_2 ، نسبتاهما k_1 و k_2 هو انسحاب أو تحاك نسبته k_1k_2 .

49 في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$(نأخذ الوحدة $5cm$) ، تعطى النقط A ، B و C لواحقها i ، $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}+i$ على الترتيب .

نعيّن I، J و K منتصفات القطع $[OB]$ ، $[AC]$ و $[BC]$ على الترتيب .

1. أ ـ برّر وجود تشابه مباشر وحيد s يحول A إلى I و O إلى B .

ب ـ عيّن النسبة والزاوية للتشابه s .

جـ ـ أعط الكتابة المركبة للتشابه s .

د ـ عيّن صور النقط B ، C و I بالتشابه s .

2. نعتبر التحويل $s^2=s\circ s$.

أ ـ برهن أنّ s^2 هو تحاك يطلب تحديد مركزه ونسبته .

ب ـ ما هي صور النقط O ، B و A بالتحويل s^2 ؟

جـ ـ استنتج أنّ المستقيمات (OC) ، (BJ) و (AK) متقاطعة في نقطة واحدة .

3 ـ الأشكال الهندسة بالتشابه المباشر.

50 ليكن $\mathscr{P}$ المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نأخذ الوحدة $1cm$.

تعطى النقطتان A و B لاحقتيهما على الترتيب 12 و $9i$.

التحويل f في المستوي $\mathscr{P}$ ، يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

$$z'=-\frac{3}{4}iz+9i.$$

1) أ ـ برهن أنّ التحويل f يقبل نقطة صامدة Ω إحداثييها $\left(\frac{108}{25};\frac{144}{25}\right)$.

ب ـ برهن أنّ التحويل f هو تشابه مباشر زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{3}{4}$. ما هو مركزه ؟

2) أ ـ ما هما صورتي النقطتين A و O بالتحويل f ؟

ب ـ برهن أنّ Ω هي نقطة مشتركة للدائرتين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ ذات القطرين على الترتيب $[OA]$ و $[OB]$.

جـ ـ بيّن أنّ Ω هي المسقط العمودي للنقطة O على (AB) .

وبيّن أنّ $\Omega A\times\Omega B=\Omega O^2$.

د ـ أنجز رسما يتضمّن النقط A، B و Ω وكذلك الدائرتين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$.

51 في المستوي الموجّه ، نعتبر المستطيل $ABCD$ حيث $AB=\sqrt{2}$ ، $AD=1$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ زاوية قائمة مباشرة ؛ I منتصف القطعة $[AB]$.

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ حيث $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.

ليكن S التشابه المباشر يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ ، مع a و b عددان مركّبان و a غير معدوم .

1) عيّن العددين a و b حيث $S(D)=C$ و $S(C)=B$.

2) ليكن T التشابه المباشر يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

. $z'=-\frac{\sqrt{2}}{2}iz+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$

عيّن النسبة و الزاوية للتشابه T .

3) بيّن أن التشابه T يحول B إلى I .

4) بيّن أن المستقيمين (BD) و (CI) متعامدان .

5) بيّن أن Ω مركز التشابه T هو نقطة تقاطع المستقيمين (BD) و (CI) .

52 في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر التحويل f يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=(1+i\sqrt{3})z-i\sqrt{3}$.

1) ما هي طبيعة التحويل f ؟ حدّد عناصره المميّزة .

2) ما هي الصورة بالتحويل f لمستقيم D ذي المعادلة $y=-\sqrt{3}x$ ؟

3) ما هي الصورة بالتحويل f لدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2 ؟

53 ليكن S التشابه المباشر ذي المركز النقطة A ، نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

لتكن M' صورة M و M'' صورة M' بالتشابه S.

لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على (AM').

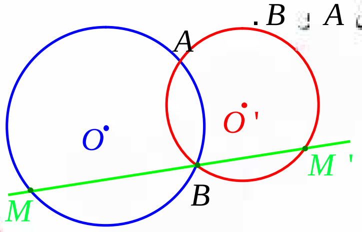
1) برهن أنّ $\overrightarrow{AM'}+\overrightarrow{AH}=\vec{0}$.

2) برهن أنّ M'' هي المسقط العمودي للنقطة H على (AM').

3) برهن أنّ $\overrightarrow{AM''}+\overrightarrow{AM'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\vec{0}$.

4) إذا كانت A مبدأ المعلم ، أعط الكتابة المركبة للتشابه S وأوجد المساواة المطروحة في السؤال الأول .

54 في المستوي الموجّه ، نعتبر دائرتين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ ، مركزيهما O و O' ونصفي قطريهما r و r' على الترتيب متقاطعتين في النقطتين A و B.



1) برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد s مركزه A ويحول $\mathscr{C}$ إلى $\mathscr{C}'$ ، يطلب تحديد زاويته ونسبته .

2) لتكن M نقطة من $\mathscr{C}$، أنشئ صورتها M' بالتشابه s.

قارن الزوايتين الموجّهين $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ و $(\overrightarrow{O'A};\overrightarrow{O'M'})$.

أثبت أن النقط M ، B و M' في استقامية .

55 في المستوي الموجّه ، نعتبر المثلث القائم ABC حيث $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}$.

الارتفاع من C يقطع (AB) في H ويقطع الموازي لـ (BC) المرسوم من A في D .

نضع $CA=b$ و $BC=a$.

1) ليكن التشابه المباشر s الذي يحول C إلى A و B إلى C.

أ ـ عيّن نسبته بدلالة a و b وأحسب زاويته .

ب ـ استعمل هذه الزاوية، برهن أنّ مركز التشابه s هو H.

جـ ـ ما هي صورة A بالتشابه s ؟

2) استعمل s برهن المساواة $HC^2=HA\times HB$.

3) ليكن I منتصف $[BC]$ ، J منتصف $[CA]$ و K منتصف $[AD]$.

برهن أنّ المثلث IJK قائم في J و H قاعدة الارتفاع المرسوم من J .

56 في المستوي الموجّه ، نعتبر المثلث القائم والمتساوي الساقين ABC حيث $AB=AC=L$ مع L ثابت حقيقي موجب تماما ، و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$.

نعين D نظيرة A بالنسبة لـ B ، O منتصف $[CD]$ و $\mathscr{T}$ الدائرة ذات القطر $[CD]$. مثل في شكل النقط A ، B ، C ، D ، O والدائرة $\mathscr{T}$.

نسمي s التشابه المباشر الذي يحول D إلى B و B إلى C نريد تعيّين العناصر المميّزة لـ s ونسمي I مركزه .

نضع $\vec{u}=\frac{1}{L}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\frac{1}{L}\overrightarrow{AC}$ ونعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\vec{u};\vec{v})$ لمستوي المركب ، نضع z_0 لاحقة النقطة I .

1) عيّن لواحق النقط B، C و D .

2) عيّن العبارة المركبة للتشابه s .

3) عيّن z_0 وحدّد وضعية النقطة I .

57 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. تؤخذ وحدة الرسم $1cm$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $z_A=2+i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=6+3i$ و $z_D=-1+6i$.

1) مثل النقط A ، B ، C و D .

2) برهن أنّه يوجد تشابه مباشر f حيث $f(A)=B$ و $f(C)=D$.

برهن أنّ هذا التشابه هو دوران ، مطلوب تحديد عناصره المميّزة .

3) لتكن J النقطة ذات اللاحقة $3+5i$.

برهن أنّ الدوران R الذي مركزه J وزاويته $-\frac{\pi}{2}$، يحول A إلى D و C إلى B .

4) نسمي I النقطة ذات اللاحقة $1+i$ ، M و N منتصف القطعتين $[AC]$ و $[BD]$ على الترتيب.

عيّن ، باستعمال نتائج السؤال السابق ، طبيعة الرباعي $IMJN$.

5) نعتبر النقطتين P و Q حيث يكون الرباعيان $IAPB$ و $ICQD$ مربّعين مباشرين .

أ ـ أحسب اللاحقتين z_P و z_Q للنقطتين P و Q .

ب ـ عيّن $\frac{IP}{IA}$ و $\frac{IQ}{IC}$ ، وكذلك قيسا لكل من الزاويتين $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IP})$ و $(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IQ})$.

استنتج العناصر المميّزة للتشابه المباشر g حيث $g(A)=P$ و $g(C)=Q$.

جـ ـ استنتج أنّ J هي صورة M بالتشابه g . ما يمكن استنتاجه بالنسبة للنقطة J ؟

4 ـ المحل الهندسي والإنشاءات الهندسية.

58 تعطى دائرة ثابتة ذات القطر $[AB]$، M نقطة متغيّرة على هذه الدائرة وننشئ المربع في الاتجاه المباشر $AMNP$.

جد المحلين الهندسيين للنقطتين N و P وأنشئهما.

59 في المستوي الموجّه ، ABC مثلث متقايس أضلاع حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$.

الرأس A ثابت و G مركز ثقل هذا المثلث .

ما هو المحل الهندسي للنقطة G لما B تمسح دائرة $(\mathscr{C})$؟

60 ينسب المستوي المركب $(\mathscr{P})$ إلى معلم متعامد ومتجانس .

1) عين المجموعة $(\mathscr{C})$ للنقط M من $(\mathscr{P})$ ذات اللاحقة z تحقق $|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i|=4$.

2) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول النقطة A ذات اللاحقة i إلى O مبدأ المعلم ويحول النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}$ إلى B' ذات اللاحقة $-4i$.

حدّد المركز ، الزاوية والنسبة للتشابه S .

3) باستعمال نتائج السؤال 2) جد المجموعة $(\mathscr{C})$ المعرّفة في السؤال الأول .

61 في المستوي نعتبر دائرتين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ متقايستين مركزيهما O و O' ونصف قطر كل منهما R ، ومتماستين خارجيا في النقطة A .

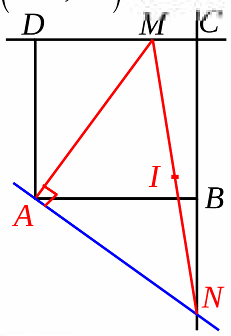
لكل نقطة M من الدائرة $\mathscr{C}$ نرفق النقطة M' من الدائرة $\mathscr{C}'$ حيث $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

برهن أنه يوجد دوران ذي الزاوية $\frac{\pi}{2}$ يحول $\mathscr{C}$ إلى $\mathscr{C}'$ ، ويطلب إنشاء مركزه Ω .

2) ما هي صورة M بهذا الدوران ؟

3) بيّن أنّ I منتصف $[MM']$ هو صورة M بتشابه مباشر f ذي المركز Ω . عيّن العناصر المميّزة لهذا التشابه .

4) أعط صورة O بالتشابه f وقياس للزاوية $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{AI})$.



62 في المستوي الموجّه ، $ABCD$ مربّع حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$.

M نقطة من المستقيم (DC)؛ المستقيم العمودي (AM)

في A يقطع (BC) في N؛ و I منتصف القطعة $[MN]$.

أ ـ برهن أنّ المثلث القائم AMN هو متساوي الساقين .

ب ـ برهن أنّ النقطة I هي صورة M بتشابه مباشر .

جـ ـ ما هي مجموعة النقط I لما M تمسح المستقيم (DC)؟

63 نضع $u=(1-i)z+2i$.

عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث تكون طويلة u هي 2 .

1) باستعمال التشابه المباشر ذي المركز $A(2;0)$ ، الزاوية $-\frac{\text{®}}{4}$ و النسبة $\sqrt{2}$.

2) باستعمال طريقة أخرى .

64 بكالوريا

في المستوي الموجّه ، نعتبر مربّعا مباشرا $ABCD$ ذا المركز O . لتكن P نقطة من القطعة $[BC]$ وتختلف عن B. نعيّن Q تقاطع المستقيمين (AP) و (CD).

المستقيم Δ العمودي على (AP) في A، يقطع (BC) في R و (CD) في S .

1. أنجز رسما .

2. ليكن r الدوران ذي المركز A والزاوية $\frac{\text{®}}{2}$.

أ ـ حدّد صورة المستقيم (BC) بالدوران r مبررًا إجابتك .

ب ـ عيّن صورة لكل من النقطتين R و P بالدوران r.

جـ ـ ما هي طبيعة كل من المثلثين ARQ و APS؟

3. نسمي N منتصف القطعة $[PS]$ و M منتصف القطعة $[QR]$. ليكن s التشابه المباشر ذي المركز A ، النسبة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ والزاوية $\frac{\text{®}}{4}$.

أ ـ عيّن صورة لكل من النقطتين R و P بالتشابه s .

ب ـ ما هو المحل الهندسي للنقطة N لما P تمسح القطعة $[BC]$ باستثناء B ؟

برهن أنّ النقط M ، B ، N و D في استقامية .

65 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O .

P نقطة خارج الدائرة $\mathscr{C}$ و Q نقطة داخلها .

نريد إنشاء مثلثا OAB متساوي الساقين وقائم في O في الاتجاه المباشر ، مع A و B نقطتين من الدائرة $\mathscr{C}$ والمستقيمين (AP) و (BQ) متوازيين .

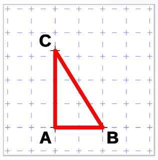
1) نفترض شكلا للمثلث OAB .

أ ــ ما هو التشابه المباشر الذي مركزه O ويحول A إلى B ؟

ب ــ نضع $P'=S(P)$. برهن أنّ $(BQ)//(AP)$ ، إذا وفقط إذا ، كان $(BP')\perp(BQ)$.

2) أكتب مخططا لإنشاء مثلث OAB ويكون حلا للمسألة.

66 بكالوريا



الشكل المعطى سوف يتمم من خلال الجواب عن الأسئلة .

في المستوي الموجّه، يعطى المثلث ABC حيث $AB=2$ ، $AC=1+\sqrt{5}$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\text{®}}{2}$.

1. أ ـ البرهان للدرس : برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول B إلى A و A إلى C .

ب ـ عيّن النسبة والزاوية للتشابه S.

2. نسمي Ω مركز S . بيّن أنّ Ω تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[AB]$ والمستقيم (BC) .

ـ أنشئ النقطة Ω .

3. نعيّن D صورة النقطة C بالتشابه S .

أ ـ برهن استقامية النقط A ، Ω و D ، وكذلك توازي المستقيمين (CD) و (AB) . أنشئ النقطة D .

ب ـ برهن أنّ $CD=3+\sqrt{5}$.

4. لتكن E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (CD).

أ ـ اشرح إنشاء الصورة F للنقطة E بالتشابه S ومثل النقطة F في الشكل .

ب ـ ما هي طبيعة الرباعي $BFDE$ ؟

67 يكن d مستقيما و O نقطة لا تنتمي إليه .

نعتبر المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين حيث A نقطة متغيرة على المستقيم d و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO})=\frac{\text{®}}{2}$.

عين المحل الهندسي للنقطة B عندما A تمسح المستقيم d.

4 ـ الدراسة العامة للتشابهات. (*)

68 في المستوي الموجّه المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ، h التحاكي ذي مركز A والنسبة 2 ، r الدوران ذي مركز A والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، s التناظر المحوري بالنسبة لمحور الفواصل و S تشابه ليس مباشر .
في كل حالة عبر عن S كمركّب لتشابهات مستوية .
أ ـ $h\circ r = S\circ s$؛ ب ـ $s\circ r = h\circ S$؛ جـ ـ $s = S\circ h\circ r$؛ د ـ $h = r\circ S\circ s$.

69 في المستوي الموجّه ، d مستقيم و A نقطة لا تنتمي إلى d.
s التناظر المحوري ذي المحور d .
r الدوران ذي المركز A والزاوية $\frac{\pi}{3}$.
أ ـ أرسم نقطة M تختلف عن A ولا تنتمي إلى d. أنشئ الصورة M' للنقطة M بالتشابه (ليس مباشر) $S = r\circ s$
ب ـ أنشئ الصورة M'' للنقطة M بالتشابه (ليس مباشر) $S' = s\circ r$.
جـ ـ هل $S = S'$ ؟

70 في المستوي ، d مستقيم ؛ A و B قطتين متمايزتين لا تنتميان إلى المستقيم d حيث (AB) يوازي d.
t انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$ و s التناظر المحوري ذي المحور d .
S و S' تشابهان (غير مباشرين) معرّفان بـ $S = t\circ s$ و $S' = s\circ t$.
برهن أنّ $S = S'$.

71 في المستوي ، d مستقيم ، و A نقطة من d .
s التناظر المحوري ذي المحور d . h التحاكي ذي المركز A والنسبة 4 . S و S' تشابهان (غير مباشرين) معرّفان بـ $S = s\circ h$ و $S' = h\circ s$.
برهن أنّ $S = S'$.

72 في المستوي المركب ، A النقطة ذات اللاحقة $2+i$.
h التحاكي ذي المركز A والنسبة $\frac{1}{2}$.
s التشابه (غير المباشر) ذي الكتابة المركبة :
$z' = i\bar{z} + 1 - i$.
نعتبر T التحويل النقطي حيث $T = s\circ h$.
أ ـ عيّن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل s . استنتج طبيعة s .
ب ـ ما هي طبيعة التحويل T ؟
جـ ـ باستعمال البرهان بالخلف أثبت أن التحويل T يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي A .
د ـ عيّن العبارة المركّبة للتحويل T وجد النتيجة السابقة .

73 في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$، A النقطة ذات اللاحقة 1 ، d المستقيم ذي المعادلة $y = x$.
r الدوران ذي مركز O والزاوية $\frac{\pi}{2}$ ، s التناظر المحوري ذي المحور d .
أ ـ تحقق أن O و A قطتان صامدتان بالتشابه $r\circ s$.
ب ـ استنتج الطبيعة للتحويل $r\circ s$ وبرهن أنّ $r = s\circ s'$ مع s' هو تناظر محوري يطلب تحديد محوره .

74 في المستوي المركب، العابرة المركّبة لتشابه S هي:
$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\bar{z} + 2i \; .$$
برهن أنّ $S = r\circ s$ حيث r هو دوران و s تناظر محوري يطلب تحديدهما .

75 تعطى العبارة المركّبة للتشابه (غير المباشر) S .
في كل حالة ، أكتب S على الشكل $S = \sigma\circ s$ مع σ هو تشابه مباشر و s تناظر محوري يطلب تحديدهما .
أ ـ $z' = \bar{z} - 3i$ ؛ ب ـ $z' = 3i\bar{z} - 1$ ؛ جـ ـ $z' = \frac{5}{2}\bar{z} + 1$ ؛ د ـ $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

76 في المستوي المركب ، S التشابه ذي العابرة المركبة : $z' = \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.
عيّن صورتي النقطتين A و B ذات اللاحقتين i و $1-i$ على الترتيب ، بالتشابه S .
استنتج طبيعة S .

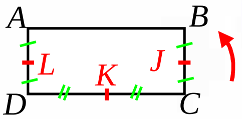
77 في المستوي المركب ، S التشابه (غير المباشر) الذي يحول $A(-3i)$ إلى $A'(3)$ و $B(3-2i)$ إلى $B'(-3-2i)$.

أعط الكتابة المركبة للتشابه S . ما هي نسبة S ؟

78 في المستوي المركب ، S التشابه ذي العبارة المركبة : $z'=-5i\bar{z}+1+i$.

أ ـ عيّن معادلة لصورة المستقيم الذي يشمل النقطتين A و B ذات اللاحقتين $1+2i$ و 2 على الترتيب ، بالتشابه S.

ب ـ عيّن صورة الدائرة $\mathscr{C}$ ذي المركز $I(3+i)$ ونصف القطر $\sqrt{5}$ ، بالتشابه S.



79 في المستوي الموجّه ، $ABCD$ مستطيل حيث : $AD=1$ ، $AB=2$ و $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})=\frac{\pi}{2}$.

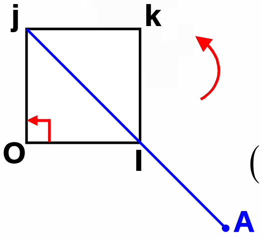
L ، K و J منتصفات القطع المستقيمة $[AD]$، $[DC]$ و $[BC]$ على الترتيب .

أ ـ استعمل المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(D;\overrightarrow{DK};\overrightarrow{DA})$ ، برهن أنه يوجد تشابه وحيد غير مباشر S حيث $S(A)=D$ و $S(C)=B$.

ب ـ تحقق من أنّ النقطتين L و J صامدتان بالتشابه S.

جـ ـ ما هي طبيعة التشابه S.

مسائل



80 في المستوي الموجّه ، نعتبر المربع $OIKJ$ ضلعه 1، حيث $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}$.

A نقطة كيفية من المستقيم (IJ) وتختلف عن I .

نرمز بـ $\mathscr{S}$ إلى التشابه المباشر ذي المركز O ويحول A إلى I . الصور للنقط J ، K و A بالتحويل $\mathscr{S}$ هي على الترتيب J'، K' و A'.

1) أ ـ ما هي طبيعة الرباعي $OAK'J'$ ؟

ب ـ بيّن أنّ النقط J' ، A و A' في استقامية .

جـ ـ قارن بين الزاويتين $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA'})$.

د ـ أعد الشكل المعطى أعلاه بأخذ $OI=5cm$ وأنشئ النقط J' ، K' و A'.

هـ ـ بيّن أنّ $A'O=A'K'$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

في كل مما يأتي نضع a لاحقة النقطة A و θ عمدة للعدد المركب a .

أ ـ بيّن أنّ $a-1$ يقبل كعمدة $-\frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4}$.

ب ـ استعمل التناظر بالنسبة إلى المستقيم (IJ) ، بيّن أنّ : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KI})$.

استنتج أنّ $-\frac{\pi}{2}-\theta$ هي عمدة للعدد المركب $a-(1+i)$.

3) M و M' نقطتان من المستوي لاحقتاهما z و z' على الترتيب .

أ ـ بيّن أنه إذا كانت M' صورة M بالتشابه $\mathscr{S}$ ، فإنّ $z'=az$.

ب ـ عيّن بدلالة a ، اللاحقتين k' و a' للنقطتين K' و A' على الترتيب .

جـ ـ نرمز بـ z_1 و z_2 إلى لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{KK'}$ و $\overrightarrow{K'A'}$ على الترتيب .

باستعمال السؤال 2) ، بيّن أنّ z_1 هو حقيقي و z_2 هو تخيلي صرف .

4) بيّن أنّ k' هي نقطة من (JK) وتحقق : $(K'A')\perp(JK)$.

81 المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (نؤخذ وحدة الرسم $1cm$) .

نعتبر النقط A_0 ، A_1 و A_2 ذات اللواحق على الترتيب $z_0=5-4i$ ، $z_1=-1-4i$ و $z_2=-4-i$.

1) أ ـ برّر أنه يوجد تشابه مباشر وحيد $\mathscr{S}$ حيث : $\mathscr{S}(A_0)=A_1$ و $\mathscr{S}(A_1)=A_2$.

ب ـ بيّن أنّ الكتابة المركبة للتشابه $\mathcal{S}$ هي :

$z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.

جـ ـ استنتج النسبة ، الزاوية واللاحقة μ لمركز Ω ، للتشابه $\mathcal{S}$.

د ـ نعتبر M و M' نقطتين من المستوي لاحقتيهما z و z' على الترتيب حيث $z \neq \mu$ ، و $\mathcal{S}(M)=M'$. تحقق من العلاقة $\mu - z' = i(z-z')$. استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرّف النقطة A_{n+1} بـ : $A_{n+1}=\mathcal{S}(A_n)$ ونضع $u_n = A_nA_{n+1}$.

أ ـ مثل النقط A_0 ، A_1 و A_2 وأنشئ هندسيا النقط A_3 ، A_4 ، A_5 و A_6.

ب ـ برهن أن المتتالية (u_n) هندسية .

3) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_n = u_0+u_1+...+u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

أ ـ عبّر عن v_n بدلالة n .

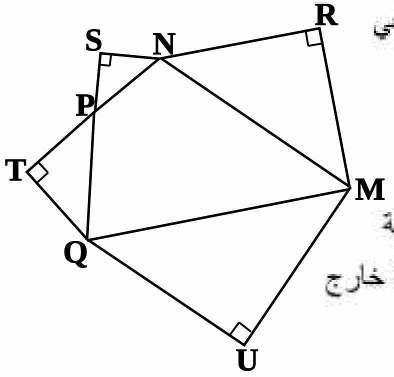
ب ـ هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

4) أ ـ أحسب بدلالة n ، نصف القطر r_n للدائرة المحيطة بالمثلث ΩA_nA_{n+1} .

ب ـ عيّن أصغر عدد طبيعي p حيث ، من أجل كل عدد طبيعي n : إذا كان $n>p$ ، فإن $r_n<10^{-2}$.

82 الهدف هو دراسة بعض الخصائص للشكل المعطى.

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر.



الشكل يتمثل في رباعي مباشر $MNPQ$؛ و MRN، NSP، PTQ و QUM مثلثات قائمة ومتساوية الساقين مباشرة واقعة خارج الرباعي $MNPQ$.

الجزء I :

نعيّن الأعداد المركبة m ، n ، p و q لواحق النقط M، N، P و Q على الترتيب.

1. يكن f التشابه المباشر ذو المركز M والذي يحول N إلى R .

أ ـ عيّن النسبة والزاوية للتشابه f .

ب ـ نضع r لاحقة النقطة R . برهن أنّ :

$r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$.

(يمكن استعمال الكتابة المركبة للتشابه f).

نقبل أنه كذلك $s=\frac{1+i}{2}n+\frac{1-i}{2}p$ ، $t = \frac{1+i}{2}p+\frac{1-i}{2}q$ و $u=\frac{1+i}{2}q+\frac{1-i}{2}m$ مع s، t و u لواحق النقط S، T و U على الترتيب.

2. برهن أنّ للرباعيتين من النقط $(M\,;N\,;P\,;Q)$ و $(R\,;S\,;T\,;U)$ نفس مركز المسافات المتساوية.

3. أ ـ برهن المساواة $u-s=i(t-r)$.

ب ـ ما يمكن استنتاجه حول طولي القطعتين $[RT]$ و $[SU]$ هذا من جهة ؛ والمستقيمين (RT) و (SU) من جهة أخرى ؟

الجزء II : في هذا الجزء نستعمل الأعداد المركبة .

1. برهن ، مستعملا النتائج المحصل عليها في الجزء I ، أنه يوجد دوران وحيد g يحول R إلى S و T إلى U .

2. اشرح كيف يمكن إنشاء هندسيا النقطة Ω ، مركز الدوران g . أنجز هذا الإنشاء على الشكل .

83 بكالوريا

الهدف من التمرين هو دراسة التشابهات المباشرة التي تحول المجموعة S_1 رؤوس مربع معطى C_1 ، إلى المجموعة S_2 لرؤوس مربع معطى C_2 .

ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ ، ووحدة الرسم تؤخذ $2cm$.

نعتبر النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G و H لواحقها على الترتيب : $-\frac{i}{2}$ ، $1-\frac{i}{2}$ ، $1+\frac{i}{2}$ ، $\frac{i}{2}$ ، $1-i$ ، $3-i$ ، $3+i$ ، $1+i$.

C_1 هو المربع ذو الرؤوس A، B، C و D مركزه O_1 ، C_2 هو المربع ذو الرؤوس E، F، G و H مركزه O_2.

S_1 هي إذن المجموعة $\{A,B,C,D\}$ و S_2 هي المجموعة $\{E,F,G,H\}$.

.1 مثل كل النقط في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

.2 ليكن h التحاكي مركزه Ω ذي لاحقته -1 ونسبته 2 .
أعط الكتابة المركّبة للتحاكي h وبيّن أنّ h يحول S_1إلى S_2

.3 ليكن s التشابه المباشر الذي يحول S_1 إلى S_2 و g التحويل النقطي المعرف بـ $g=h^{-1}\circ s$.

أ ـ ما هي نسبة التشابه s ؟

ب ـ أثبت أنّ g تقايس وأنّ S_1 تكون صامدة إجماليا به.

جـ ـ برهن أنّ $g(O_1)=O_1$.

د ـ استنتج أنّ g هو أحد التحويلات التالية : التحويل المطابق ، الدوران r_1 ذي المركز O_1 والزاوية π ، الدوران r_2 ذي المركز O_1 والزاوية $\frac{\pi}{2}$، الدوران r_3 ذي المركز O_1 والزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

هـ ـ التشابهات المباشرة الأربع التي تحول S_1 إلى S_2.

.4 دراسة مراكز هذه التشابهات .

أ ـ عيّن العبارات المركّبة لكل من $h\circ r_1$ ،$h\circ r_2$ و $h\circ r_3$.

ب ـ استنتج المراكز Ω_1 ، Ω_2 و Ω_3 لهذه التشابهات وارسمها في الكل .

84 (*) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ وحدة الرسم تؤخذ $2cm$.

تعطى النقط A ، C ، D و Ω لواحقها على الترتيب $1+i$ ، 1 ، 3 و $2+\frac{1}{2}i$.

الجزء I

1. لتكن الدائرة $\mathcal{C}$ ذات المركز Ω وتشمل النقطة A .

أ. بيّن أن الدائرة $\mathcal{C}$ تشمل النقطتين B و C .

ب ـ بيّن أنّ $[AD]$ هو قطر للدائرة $\mathcal{C}$.

جـ ـ في ورقة مليمترية أنجز شكلا تمثل فيه النقط A ،C ، D و Ω وارسم $\mathcal{C}$. نسمي B النقطة الثانية لتقاطع الدائرة $\mathcal{C}$ والمستقيم (OA) .

د ـ بيّن أنّ النقطة O تقع خارج القطعة $[AB]$.

2. بيّن أنّ المثلثين OAD و OCB متشابهان وغير متقايسين .

3. S التشابه الذي يحول المثلث OCB إلى المثلث OAD.

أ ـ برهن أنّ S هو تشابه غير مباشر وليس تناظر محوريا.

ب ـ عيّن نقطة صامدة للتشابه S وبيّن أنها وحيدة .

الجزء II

1. أ ـ استنتج من السؤال 2. للجزء **I** أنّ :
$OA\times OB=OC\times OD$.

ب ـ استنتج الطويلة وعمدة للاحقة z_B للنقطة B .

2. عيّن كتابة مركّبة للتشابه S .

3. عيّن الطبيعة والعناصر المميّزة للتحويل $S\circ S$.

85 (*) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر التحويل النقطي T يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث :
$z'=-3i\,\overline{z}+2+6i$.

1. أ ـ تعرّف على طبيعة التحويل T .

ب ـ نعيّن $M''(z'')$ صورة M' بالتحويل T . عبّر عن z'' بدلالة z .

عيّن طبيعة التحويل $T\circ T$ وعناصره المميزة .

2. أ ـ عبّر عن الإحداثيتين x' و y' لنقطة M' بدلالة الإحداثيتين x و y لنقطة M .

ب ـ برهن أنّ T يقبل نقطة صامدة وحيدة A يطلب لاحقتها.

3. برهن أنّ T هو مركب تناظر محوري ذي المحور (xx') متبوع بتشابه مباشر S يطلب تحديد عناصره المميزة.

4. برهن أنّ T هو مركب للتحاكي ذي المركز A والنسبة -3 ، والتناظر المحوري ذي المحور (d) ، المستقيم معامل توجيهه 1 ويشمل النقطة A .

يمكن تعيين الطبيعة للتحويل $h^{-1}\circ T$ والاهتمام بنقطه الصامدة.

5. ما هي المستقيمات التي تحول إلى مستقيم موازي بالتحويل T ؟

اختيار من متعدد

86 في كل سؤال اختر الاقتراح الصحيح .

1) التحويل الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=2iz-3$ هو :

أ. تناظر مركزي مركزه $\mu(-3;2)$.

ب. تناظر محوري محوره المنصف الأول .

جـ. تشابه مباشر إحداثيتي مركزه $\left(-\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$.

د. تشابه مباشر إحداثيتي مركزه $(-3;2)$.

2) التعريف المركب للتشابه المباشر ذي النسبة $\sqrt{3}$ ، الزاوية $\frac{\circledR}{2}$ والمركز النقطة $\Omega(1;\sqrt{3})$ هو :

أ. $z'=\sqrt{3}z+4$ ؛ ب. $z'=i\sqrt{3}z+1+i\sqrt{3}$ ؛

جـ. $z'=i\sqrt{3}z+4$ ؛ د. $z'=i\sqrt{3}\bar{z}+4$.

87 في كل سؤال اقتراح من بين الأربعة صحيح عيّنه.

1) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ، نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب a و b . يكون المثلث MAB قائم ، متساوي الساقين ومباشر رأسه M إذا وفقط إذا ، كانت للنقطة M لاحقة z تحقق :

أ. $z=\frac{b-ia}{1-i}$ ؛ ب. $z-a=e^{i\frac{\circledR}{4}}(b-a)$ ؛

جـ. $a-z=i(b-z)$ ؛ د. $b-z=\frac{\circledR}{2}(a-z)$.

2) نعتبر في المستوي الموجّه نقطتين متمايزتين A و B ؛ ونعيّن I منتصف القطعة $[AB]$. ليكن f التشابه المباشر ذي المركز A ، النسبة 2 و $\frac{2\circledR}{3}$ قياس لزاويته ؛ ليكن g التشابه المباشر ذي المركز A ، النسبة $\frac{1}{2}$ و $\frac{\circledR}{3}$ قياس لزاويته ؛ ليكن h التناظر المركزي ذي المركز I .

أ. $h\circ g\circ f$ يحول A إلى B وهو دوران .

ب. $h\circ g\circ f$ هو التناظر بالنسبة إلى محور $[AB]$.

جـ. $h\circ g\circ f$ هو ليس تشابها مباشرا .

د. $h\circ g\circ f$ هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

أصحيح أم خطأ ؟

88 ميّز بين الجمل الصيحة والجمل الخاطئة .

1) الكتابة المركّبة $z\mapsto 2iz$ تُعرّف تشابه مباشر ذي النسبة 4.

2) الكتابة المركبة $z\mapsto 3z+4$ تُعرّف تحاك نسبته 3.

3) الكتابة المركّبة $z\mapsto(1+i)z$ تُعرّف تشابه مباشر زاويته $\frac{\circledR}{4}$.

4) الكتابة المركبة $z\mapsto -3iz+3i$ تُعرّف تشابه مباشر زاويته $\frac{3\circledR}{2}$.

89 أذكر في كل حالة إن كانت الجملة المقترحة صحيحة أم خاطئة .

1) التناظر المحوري بالنسبة إلى مستقيم هو تشابه مباشر.

2) الدوران في المستوي هو تشابه مباشر نسبته .

3) التحاكي في المستوي هو تشابه مباشر معرف بنفس المركز ونفس النسبة .

4) التناظر المركزي في المستوي هو تشابه مباشر زاويته $\circledR$ يعرف بنفس المركز .

5) مبدأ المعلم هو مركز لكل تشابه مباشر الذي يعرف بـ : $z'=(a+bi)z$ مع a و b عددين مركبين .

90 $\mu(2)$ نقطة لاحقتها 2 ؛ $\mathcal{S}$ التحويل النقطي في المستوي يرفق بكل $M(z)$ ، $M'(z')$ حيث :

$$z'=\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)z+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

ما قولك عن العبارات التالية ؟

1) التحويل $\mathcal{S}$ هو تشابه مباشر في المستوي .

2) التحويل $\mathcal{S}$ له نقطة صامدة وحيدة وهي μ .

3) المثلث $\mu MM'$ قائم في M' .

4) $\left(\overrightarrow{\mu M'};\overrightarrow{\mu M}\right)=-\frac{\circledR}{6}+2\circledR k$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

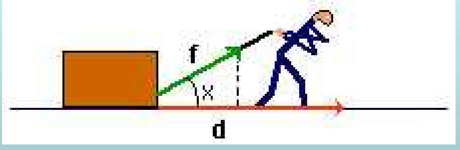
5) نعتبر الدوران $\mathcal{R}\left(O;-\frac{\circledR}{6}\right)$ ؛ التحويل النقطي $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ هو تحاك .

07 الجداء السلمي

الكفاءات المستهدفة

- توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين ، تعامد مستويين و تعامد مستقيم و مستوي
- توظيف الجداء السلمي لتعيين معادلة ديكارتية لمستوي .
- توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة و مستوي .
- توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات النقط .

إن مفهوم الجداء السلمي يظهر بوضوح في علم الحركة (عمل قوة)
و تفسير ذلك أنه إذا كانت القوة f تحرك جسما وفق مسار خطي d يعطى عندئذ العمل المنجز W بالدستور $w = |f|.|d|.\cos x$
حيث $|f|$ هي شدة القوة ، $|d|$ هو مسافة الانتقال و x هو قيس الزاوية المحصورة بين اتجاهي القوة والانتقال .



و للجداء السلمي تطبيقات في مجالات كثيرة في الفيزياء نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر :
- الطاقة و عزم الحركة لجسم
- حركة السوائل
- الكهرو مغناطيسية
- معادلة ماكس وال Maxwell (إنجليزي 1831 – 1879)
- قوة لورونتز Lorentz (هولندي 1853 – 1928)
- علم النفس القياسي ....

نشاط أول

ABC مثلث و (d) مستقيم يشمل A ، 'B المسقط العمودي للنقطة B على (d) ، 'C المسقط العمودي للنقطة C على (d) ، "B المسقط العمودي للنقطة 'B على (AC) ، "C المسقط العمودي للنقطة 'C على (AB) . I نقطة تقاطع المستقيمين ("B' B) و ("C' C).

1) بين أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB'}$

2) استنتج أن المستقيمين (AI) و (BC) متعامدان.

نشاط ثان

$\vec{u},\vec{v}$ شعاعان من المستوي

1) بين أن $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=4\vec{u}.\vec{v}$ و $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|+\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=2\left(\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|\right)$

2) بين أن $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$

3) استنتج أن قطري متوازي أضلاع يكونان متعامدين إذا كانت أضلاعه متقايسة .

نشاط ثالث

ABC مثلث كيفي ، 'A ، 'B و 'C المساقط العمودي للنقط A ، B و C على (BC) ، (AC) و (AB) على التراتيب . H نقطة تقاطع ('BB) و ('CC) .

1) أحسب : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$

2) أحسب : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$

3) ماذا تستنتج ؟

نشاط رابع

في معلم متعامد و متجانس (O , I , J) ، (C) هي الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-2x+4y+1=0$. T نقطة إحداثياها (3 ; 4)

1) عين H مركز الدائرة و R نصف قطرها . أرسم هذه الدائرة و علّم النقطة T .

2) نرسم من T المماسين للدائرة (C) في النقطتين A و B . بين أن A و B تنتميان إلى دائرة ('C) قطرها [HT] .

3) أكتب معادلة للدائرة ('C) ، عين إحداثيات A و B .

4) أكتب معادلة لكل من المماسين .

نشاط خامس

A ، B نقطتان متمايزتان من المستوي حيث AB = 2 . E مجموعة النقط M من المستوي حيث $\frac{MA}{MB}=3$.

1) بين أن M نقطة من (E) إذا وفقط إذا $MA^2-9MB^2=0$

2) ليكن G مرجح { (A , 1) , (B , 3) } و K مرجح الجملة { (A , -1) , (B , -3) }

- بين أن G و K نقطتان من (E)

3) عبر عن MA^2-9MB^2 بدلالة $\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{MK}$ ثم استنتج طبيعة المحل الهندسي (E)

نشاط سادس

في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ نعرف النقطة A(- 2 , 5) و المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-3x+1$.

1) لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (d) . عين إحداثيي H ، واحسب المسافة AH .

2) a) نعتبر الدالة العددية f حيث $f(x)=10k^2+28k+20$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f و استنتج القيم الحدية لها .

b) M نقطة من (d) . أحسب AM^2 بدلالة x

- استنتج بعد النقطة A عن (d) .

نشاط سابع

نعتبر المكعب OADBCFGE ، I مركز المربع DBEG الذي طول ضلعه 4 ، L و K النقطتان المعرفتان كما يلي $\overrightarrow{CL}=\frac{5}{8}\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{AK}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AF}$

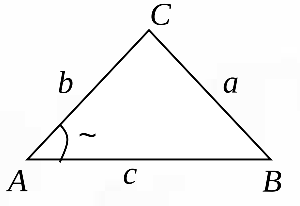
نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ من الفضاء $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$, $\vec{k}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

1) أوجد إحداثيات النقط A ، C ، E ، I ، K و L

2) بين أن المثلث KIL قائم و أعط قيمة مقربة إلى 0,1 لقيس الزاوية $K\hat{L}I$

3) باستعمال علاقة الكاشي (في مثلث ما $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\sim$)،

عين قيمة مقربة إلى 0,1 لقيس الزاوية $K\hat{C}I$



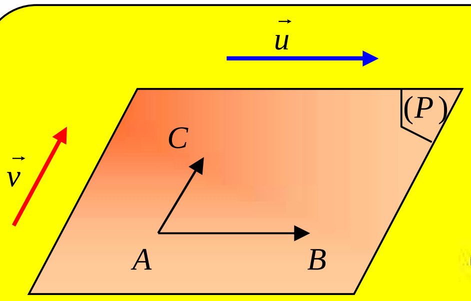
4) أ) أكتب معادلة لسطح الكرة S ذات المركز w(2 ; 2 ; 2) و التي تشمل O

ب) تحقق أن S تمس أوجه المكعب من الداخل .

ج) عيّن تقاطع S مع المستوي الذي معادلته z = 0

الجداء السلمي في الفضاء

1. تعريف :



$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء . A ، B و C ثلاث نقط

حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقط A ، B و C بحيث

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين

$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في المستوي (P)

ملاحظة : في المستوي لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

و هي عبارة مستقلة عن تمثيل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وبالتالي مستقلة عن المستوي (P)

خواص : كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء

نتائج : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ينتميان إلى نفس المستوي ، k عدد حقيقي

لدينا : $\vec{u}.\vec{u} = \frac{1}{2}\|\vec{u}\|^2$ ، $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ ، $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$ ، $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

خاصية : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة من الفضاء . لدينا $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

تعريف : يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$

ملاحظة : $\vec{0}$ عمودي على كل شعاع من الفضاء.

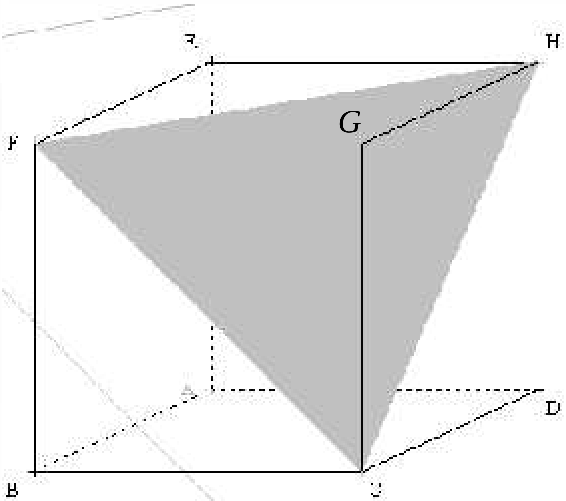
العبارة التحليلة :

في أساس متعامد و متجانس ليكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$

لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

نتيجة : لتكن النقطتين $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ في معلم متعامد و متجانس من الفضاء

لدينا $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$



تمرين محلول 1 :

نعتبر المكعب **ABCDEFGH** .

بين أن المستقيم (**AG**) عمودي على المستوي (**CFH**).

طريقة: **لإثبات أن مستقيما عمودي ما على مستو يكفي أن نثبت أن هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين من المستوي**

الحل:

في المستوي (CFH) المستقيمان (FH) و (FC) متقاطعان في F.

لدينا : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}).\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FH}$.

بما أن EFGH مربع فإن قطريه متعامدان ومنه $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FH} = 0$.

و بما أن المستقيم (AE) عمودي على المستوي (FGH) فإن $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FH} = 0$ ، وبالتالي $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH} = 0$

لدينا كذلك : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}).\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{FC}$.

و بما أن BCGF مربع فإن قطريه متعامدان و بالتالي $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{FC} = 0$.

و بما أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (BCF) ، إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FC} = 0$ ، وبالتالي $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FC} = 0$

المستقيم (AG) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (HF) و (FC) من المستوي (CFH) ، أي أن (AG) عمودي على (CFH) .

تمرين محلول2:

في معلم متعامد و متجانس من الفضاء لدينا النقط ***A(-1; -2; 0) , B(3; 1; -2) , C(-2; 0; 1) , D(2; -1; 0)***

1) هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ؟

2) هل المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان ؟

الحل : لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 16 - 3 + 2 = 15 \neq 0$

و بالتالي (AB) و (CD) ليسا متعامدين

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -4 + 6 - 2 = 0$

و بالتالي (AB) و (AC) متعامدان

التعامد :

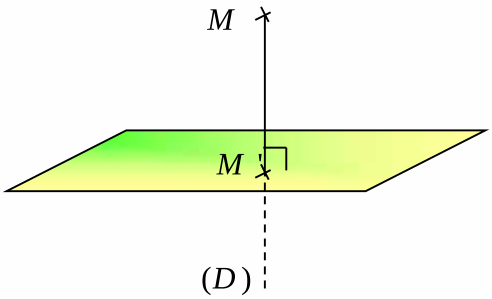
تعريف :

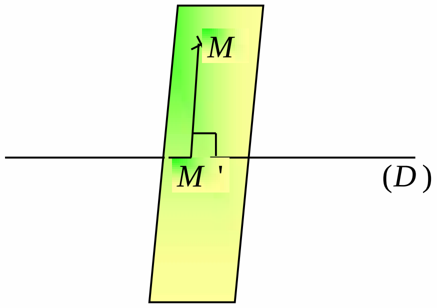
الإسقاط العمودي في الفضاء

ليكن (P) مستو ، M نقطة من الفضاء .
المستقيم العمودي على (P) و الذي يشمل M يقطع (P) في نقطة وحيدة 'M .
'M هو المسقط العمودي للنقطة M على (P)

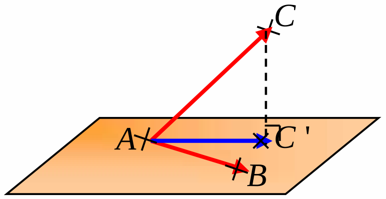
الإسقاط العمودي على مستقيم

(D) مستقيم ، M نقطة من الفضاء .
المستوي العمودي على (D) و الذي يشمل M يقطع (D) في نقطة وحيدة 'M .
'M هو المسقط العمودي لـــ M على (D)





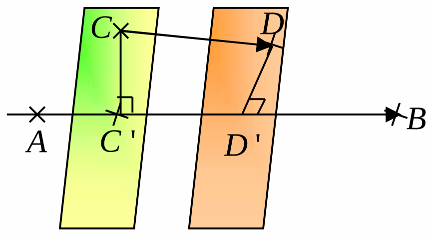
نتائج :



- A ، B نقطتان من المستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P)

لدينا : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$

حيث 'C المسقط العمودي لـــ C على (P)



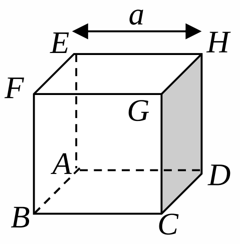
- $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$

لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

حيث 'C و 'D المسقطان العموديان للنقطتين C و D
على الترتيب على المستقيم (AB)

مثال : نعتبر المكعب ABCDEFGH الذي ضلعه a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=a^2$$



تمرين محلول 3 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1) نعتبر (S) سطح الكرة التي مركزها W(2 , 1 , 0) و نصف قطرها $\sqrt{2}$. أكتب معادلة ديكارتية لـــ(S)

2) نعتبر (S') سطح الكرة التي قطرها [AB] حيث A (1 , 0 , -2) ، B(0 , - 1 , 2)

عين قيمتي العدد الحقيقي a حتى تكون النقطة C(a , 1 , 0) نقطة من (S') .

الحل:

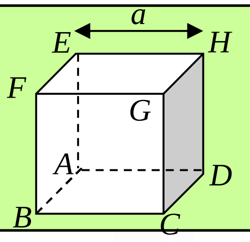
(S) : $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=2$

أو $x^2+y^2+z^2-4x-2y+3=0$ معادلة ديكارتية لـــ (S)

M نقطة من (S') يعني $(x-1)x+y(y+1)+(z+2)(z-2)=0$

أو $x^2+y^2+z^2-x+y-4=0$ معادلة ديكارتية لـــ (S')

تمرين محلول 4 :



في المكعب ABCDEFGH الذي ضلعه a .

أحسب الجداء السلمي $\vec{AE}.\vec{HC}$.

الحل:

$=-\vec{AE}.\vec{AE}$ (AE) و (CD) من مستويين متعامدين

$=-a^2$

المعادلة الديكارتية لمستو

1.تعريف :
كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على (P)

نتيجة : إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عمونيا) على (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل شعاع من المستوي (P) .
و بالتالي كل مستقيم موجه بالشعاع $\vec{n}$ هو مستقيم عمودي على (P) .

☜ تمييز مستو :
$\vec{u}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء .
مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له

برهان : نعتبر المستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع توجيه له ، والمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له . إذا كانت M نقطة من (P) فإن $\overrightarrow{AM}$ شعاع من (P) وبالتالي $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

و بالعكس نعتبر نقطة M من الفضاء حيث $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$. لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D)
وبالتالي $\vec{n}.\overrightarrow{AH}=0$ لأن $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ لكن $\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا ، إذن $\overrightarrow{AH}=\vec{0}$ لأن ($\vec{n}\neq\vec{0}$) و
بالتالي A = H ، المسقط العمودي لــ M على (D) هو A أي أن M نقطة من (P)

خاصية : كل مستو، $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $ax+by+cz+d=0$
حيث d عدد حقيقي

و بالعكس فإن مجموعة النقط M(x ; y ; z) التي تحقق $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقة غير معدومة معا هي مستو و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

برهان : $A(x_A;y_A,z_A)$ نقطة من المستوي (P) و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي لــ (P)
تكون النقطة $M(x;y;z)$ نقطة من (P) إذا و فقط إذا $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ أي :

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

و بوضع $d=-ax_A-by_A-cz_A=0$ نجد $ax+by+cz+d=0$
$\vec{n}$ شعاع ناظمي فإن a ، b ، c ليست كلها معدومة

و بالعكس : نعتبر (E) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $ax+by+cz+d=0$
بما أن a ، b ، c ليست كلها معدومة ، نأخذ مثلا $a\neq0$ و نعتبر النقطة $A(-\frac{d}{a};0;0)$. A نقطة من (E)
و لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع غير معدوم . من أجل كل نقطة M(x ; y ; z) من الفضاء لدينا

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a(x+\frac{d}{a})+by+cz=ax+by+cz+d$$

M نقطة من (E) يعني $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و بالتالي (E) هو المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له .

حالات خاصة

➢ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=0$	(P) و (P') مستويان $\vec{n}$ ، $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب
➢ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=0$	➢ (P) يوازي (P') معناه يوجد k حقيقي حيث $\vec{n}=k.\vec{n}'$
➢ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ هي $y=0$	➢ (P) عمودي على (P') معناه $\vec{n}.\vec{n}'=0$

تمرين محلول 5 : في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط **A(-2 ; 0 ; 1)** ، **B(1 ; 0 ; -3)** ، **C(1 ; - 1 ; 2)** .

1. بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .
2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له .

الحل:

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ نلاحظ أن $x_{AB}=x_{AC}$ و لكن $y_{AB}\neq y_{AC}$

و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B ، C تعين مستويا

2) نبحث عن شعاع ناظمي للمستوي (ABC) . ليكن $\vec{n}$ هذا الشعاع عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

و بالتالي $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ ، $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$. مركبات الشعاع $\vec{n}$ هي حل للجملة : $\begin{cases}3a-4c=0\\3a-b+c=0\end{cases}$

نأخذ $a=4$ فيكون $c=3$ و $b=15$ أي $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\14\\3\end{pmatrix}$

3) تكون M(x ; y ; z) نقطة من (ABC) إذا و فقط إذا $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

أي $4(x+2)+15y+3(z-1)=0$ أو $4x+15y+3z+5=0$ وهي معادلة ديكارتية لـــ (P)

تمرين محلول 6 : في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط **A(1 ; 0 ; 0)** ، **B(0 ; 1 ; 0)** ، **C(0 ; 0 ; 1)** .

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يشمل النقطة O

الحل:

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا لـــ (ABC) إذن $\begin{cases}-a+b=0\\-a+c=0\end{cases}$ أي a = b = c

نأخذ a = 1 مثلا فيكون $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

M(x ; y ; z) نقطة من (ABC) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ أي أن $x-1+y+z=0$

أو $x+y+z-1=0$ و هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) تكون النقطة M(x ; y ; z) نقطة من (P) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{OM}.\vec{n}=0$

أي أن $x+y+z=0$ و هي معادلة ديكارتية للمستوي (P)

بعد نقطة عن مستو

في معلم متعامد و متجانس ، نعتبر المستوي (P) حيث $ax+by+cz+d=0$ ، $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ معادلة ديكارتية له . A نقطة إحداثياتها $(x_A;y_A;z_A)$.

البعد بين A و (P) هو العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

المرجح

مبرهنة : $\{(A_1;a_1),(A_2;a_2),\dots,(A_n;a_n)\}$ جملة لـ n نقطة مثقلة حيث $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ ، توجد نقطة وحيدة G

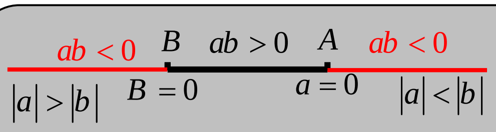
تحقق $a_1\overrightarrow{GA_1}+a_2\overrightarrow{GA_2}+\dots+a_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$ ، نسمّي G مرجح الجملة .

➢ عندما تتساوى المعاملات غير المعدومة a_i ، تسمى G مركز ثقل الجملة .

مبرهنة : من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون :

$$a_1\overrightarrow{MA_1}+a_2\overrightarrow{MA_2}+\dots+a_n\overrightarrow{MA_n}=(a_1+a_2+\dots+a_n)\overrightarrow{MG}$$

☜ **التمييز بالمرجح** :



A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

❶ المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B

❷ القطعة [AB] هي مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة

❸ المستوي (ABC) هو مجموعة مراجيح للنقط A ، B ، C

برهان :1) A ، B نقطتان متمايزتان ، M مرجح $\{(A;a),(B;b)\}$ مع $a+b\neq 0$ إذن $\overrightarrow{AM}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

أي أن النقطة M نقطة من (AB) . و بالعكس M نقطة من (AB) فالشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا

وبالتالي يوجد عدد k حيث $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AM}+k\overrightarrow{MB}$ أي $(k-1)\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

M مرجح الجملة $\{(A;1-k),(B;k)\}$

2) نفس البرهان بأخذ k عدد حقيقي من المجال [0 ; 1]

مثال 1 : A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء . نريد تعيين (E) مجموعة النقط من الفضاء حيث

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=3$ ، نفرض أن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1);(C;1)\}$ ، G هي مركز ثقل المثلث ABC

لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ و بالتالي فإن المجموعة (E) هي مجموعة النقط M التي تحقق MG = 1

فهي سطح الكرة التي مركزها G و نصف قطرها 1.

مثال 2 : (F) مجموعة النقط M حيث $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|$ ، ليكن H مرجحا للجملة

$\{(A;1),(B;2)\}$. $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MH}$ و بالتالي (F) تحقق $\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MH}\|$ أي MG = MH

(F) هو المستوي محور [GH]

تمرين محلول 7:

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر **المستوي (P)** الذي معادلته $3x - 2y + 5z - 4 = 0$.

1) عين بعد النقطة $A(1\,;-2\,;7)$ عن المستوي (P) .

2) عين بعد النقطة $B(2\,;1\,;0)$ عن المستوي (P) . ماذا تستنتج ؟

الحل:

1) $$d_1 = \frac{\left|3(1) - 2(-2) + 5(7) - 4\right|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \sqrt{38}$$

2) $d_2 = 0$ نستنتج أن النقطة B هي نقطة من المستوي (P)

تمرين محلول 8 :

البرهان أن المستوي المعيّن بثلاث نقط A ، B ، C هو مجموعة المراجيح للنقط A ، B ، C

الحل

لتكن النقط A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

M مرجح الجملة $\{(A;a),(B;b);(C;c)\}$ مع $a+b+c \neq 0$

لدينا $$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

و بالتالي M نقطة من (ABC)

A ، B ، C ليست على استقامة واحدة وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ يشكلان أساسا للمستوي

لكل نقطة M من (ABC) يوجد (x ; y) زوج من الأعداد الحقيقية

حيث : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

لكن $1 - x - y + x + y = 1 \neq 0$

و بالتالي M مرجح للجملة $\{(A;1-x-y),(B;x);(C;y)\}$

الموضوع الأول

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء ، ليست على استقامة واحدة . k عدد حقيقي من المجال [-1 ; 1]

G_k مرجح الجملة $\{(A;k^2+1),(B;k);(C;-k)\}$.

1) مثل النقط A ، B ، C و I منتصف [BC] ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_2

2) a) بين أنه من أجل كل k من المجال [-1 ; 1] لدينا :

$$\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

b) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال [-1 ; 1] كما يلي :

$$f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$$

c) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يمسح المجال [-1 ; 1]

3) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

4) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

5) الفضاء منسوب الآن إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقط A ، B ، C تأخذ الإحداثيات (2 ; 0 ; 0) ،

(1 ; 2 ; -1) و (5 ; 2 ; -1) على الترتيب .

a) عين إحداثيات G_1 و G_2 ، تحقق أن (E) و (F) يتقاطعان.

b) أحسب نصف قطر الدائرة (C) تقاطع (E) و (F) .

الموضوع الثاني

نعتبر المكعب $OABCO'A'B'C'$ ، لتكن J منتصف $[OA]$ و G مرجح الجملة $\{(O;1),(A;1),(C;3)\}$.

حرف المكعب يؤخذ كوحدة .

I) 1) تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطان خطيا ثم عين G على الشكل

2) ما هي إحداثيات G في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OO'}\right)$؟

II) 1) M نقطة كيفية من الفضاء ، عبّر عن $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$.

2) عيّن طبيعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MB}=0$

III) 1) عيّن (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}\right)=0$

2) تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{CJ}$ متعامدان ، استنتج أن B نقطة من (F) و B' هي أيضا نقطة من (F)

3) - أنشئ تقاطعات (F) مع أوجه المكعب .

- K ، K' نقطتا تقاطع (F) مع المستقيمين (OC) و ($O'C'$) على الترتيب ، ما طبيعة الرباعي $BKK'B'$ ؟

VI) عين (H)مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'G}=2$

V) 1) باستعمال الإحداثيات في المعلم المذكور أعلاه ، أحسب GO^2 . GA^2 و GC^2 ثم العدد $GC^2+GA^2+GO^2$

2) M نقطة من الفضاء ، عبّر عن $MO^2+MA^2+3MC^2$ بدلالة MG^2 (باستعمال الشعاع $\overrightarrow{MG}$ ، علاقة شال).

3) نسمي (L) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $MO^2+MA^2+3MC^2=4$.

a) بين أن O تنتمي لـ (L)

b) تحقق أن M نقطة من (L) إذا وفقط إذا $MG^2=k^2$ حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه .

c) استنتج طبيعة (L) ثم أنشئ تقاطع (L) مع الوجه $OABC$ (أي أثر (L) على الوجه $OABC$ للمكعب).

موضوع محلول

ABC مثلث ، نضع $BC = a$ ، $AB = c$ ، $AC = b$ نعتبر A' مرجح الجملة $\{(B;b);(C;c)\}$

1) نعرف النقطة B' بـ : $\overrightarrow{AB'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$

بين أن B' مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

2) لتكن C' مرجح الجملة $\{(A;b);(C;c)\}$ ، بين أن $AB'A'C'$ معين .

3) لتكن I مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ ، بين أن I هو مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC.

حل مختصر

1) $\overrightarrow{AB'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$ إذن $(b+a)\overrightarrow{AB'} = b\left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B}\right)$

و منه $-c\overrightarrow{AB'} = b\overrightarrow{B'B}$ أي $c\overrightarrow{B'A} + b\overrightarrow{B'B} = \vec{0}$

B' هو مرجح الجملة $\{(A;c);(B;b)\}$

2) بما أن C' هو مرجح الجملة $\{(C;c);(B;b)\}$ فإن $\overrightarrow{CA'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{CB}$

لدينا $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CA'}$ و بالتالي

$\overrightarrow{C'A'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AC} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{CB}$ أي $\overrightarrow{C'A'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{AB'}$ (أي أن AB'A'C' متوازي أضلاع)

b و c عددان حقيقيان موجبان ، نحصل على :

$\overrightarrow{AB'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$ إذن $AB' = \frac{b}{b+c}AB = \frac{bc}{b+c}$

و كذلك $AC' = \frac{bc}{b+c}$ و بالتالي AC' = AB' (AB'A'C' معين)

3). (AA') هو منصف $\widehat{B'AC'}$ لأن الرباعي معين

لكن $0 \prec \frac{b}{b+c} \prec 1$ و $0 \prec \frac{c}{b+c} \prec 1$ إذن

$B' \in [AB]$ و $C' \in [AC]$

(AA') هو إذن منصف داخلي للزاوية $\widehat{BAC}$

I هو مركز الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ ، إذن I هو مركز الجملة $\{(A;a);(A';b+c)\}$ حسب خاصية التجميع

و بالتالي $I \in (AA')$.

بنفس الطريقة و بتعريف النقطة B_1 مركز $\{(A;a);(C;c)\}$

نثبت أن (BB_1) هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{ABC}$ (حسب التجميع) I هو مرجح الجملة $\{(B;b);(B_1;a+c)\}$

إذن $I \in (BB_1)$ ، I ملتقى المنصفين الداخليين في المثلث ABC

تعاليق

☜ تبيان المرجح هنا يستدعي توفير العلاقة الشعاعية

☜ كي نبين أنه معين يكفي و يلزم تحقيق الخواص المميزة له

☜ مركز الدائرة الداخلية هو ملتقى المنصفات الداخلية

موضوع موجّه

التمرين

1) ليكن ABCDEFGH مكعبا ضلعه a و T هو رباعي الوجوه AFCH.

a) ماذا يمكن القول عن أوجه رباعي الوجوه AFCH ؟

b) أحسب حجم رباعي الأوجه AEFH.

c) عين حجم T.

d) استنتج المسافة بين A و المستوي (HFC).

2) لتكن J منتصف [FC].

a) بين أن $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FC} = 0$. ماذا تستنتج ؟

b) أحسب $\overrightarrow{JA}$ ، $\overrightarrow{JH}$ بدلالة a .

c) استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} لقيس الزاوية $\widehat{AJH}$ (بالدرجات).

توجيهات

1. a) لاحظ أن أوجه AFCH هي مثلثات متقايسة الأضلاع طول كل ضلع $a\sqrt{2}$

$$V_{AEFH} = \frac{1}{3} S_{HFC} \times FE \quad \text{(b}$$

$$V_{AECH} = \frac{1}{3} S_{HFC} \times d(A;(HFC)) \quad \text{(d}$$

2) b) استعمل العلاقة $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JH} = \frac{1}{2}\left(JA^2 + JH^2 - AH^2\right)$

و انتبه إلى أن JA هو ارتفاع في المثلث AFC

c) هل تذكر كيف يتم تدوير عدد حقيقي ؟ عد إلى الدرس من برنامج للسنة الأولى

حساب الجداء السلمي في الفضاء

1 $ABCDEFGH$ مكعب ، ضلعه A

1) أحسب :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FG}$

($\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{GC}$ f) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{HF}$ f) $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}$

2) أحسب $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$

استنتج أن المستقيم (AG) عمودي علىالمستوي (BED)

3) نعتبر المعلم $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$

عين احداثيات النقط A ، G ، B ، E و D ثم اثبت مجددا أن (AG) عمودي على المستوي (BED)

2 نعتبر النقط $A(0;-1;1)$ ، $B(4;-2;3)$ و $C(-1;2;-3)$

1) أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

2) عين قيمة مقربة الى $0,1°$ (درجة) لأقياس الزوايا $\widehat{BAC}$ ، $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ACB}$

3 ABCD رباعي وجوه منتظم

BD = AD = AC = CD = BC = AB = a

1) عين طبيعة وجوه ABCD

2) أحسب بدلالة a ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3) a) استنتج قيمة $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD}$

b) بين أن الأحرف المتقابلة لــABCD متعامدة مثنى مثنى .

4) H المسقط العمودي لــ A على المستوي (BCD)

a) أحسب $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$ (نضع $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}$)

b) بين أن H ملتقى ارتفاعات المثلث BCD .

5) a) أحسب AH بدلالة a .

b) أحسب حجم الهرم ABCD بدلالة a .

4 ABCD رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a . I ، J و K منتصفات [BC] ، [BD] و [AC] على الترتيب

أحسب: a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}$ d) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JK}$

5 نعتبر المثلث ABC القائم في C و ليكن H المسقط العمودي للنقطة C على (AB) نضع : CA = b ، CB = a ، CH = h

1) بين أن $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

2) OABC رباعي وجوه حيث (OA)،(OB) و (OC) متعامدة مثنى مثنى . H المسقط العمودي لــ O على المستوي (ABC)

a) بيت أن H هو ملتقى الارتفاعات في المثلثABC

b) بين أن (AB) عمودي على المستوي (OCH)

c) (CH) يقطع (AB) في K ، بين أن (OK) ارتفاع في المثلث OAB .

d) تحقق من المساواة:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}=\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OC^2}$$

6 SABCD هرم قاعدته المربع ABCD الذي مركزه O و ضلعه a و h طول الارتفاع [SO]

1) أحسب بدلالة a (و / أو h) الجداءات التالية

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AS}$; $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD}$

2) أحسب V حجم الهرم

3) كيف يمكن اختيار h حتى يكون (SB) و (SD) متعامدين ؟ ماهي قيمة V عندئذ ؟

تعطى النقط $A\left(\frac{7}{2};\frac{15}{2};-\frac{3}{2}\right)$ ، $B\left(2;-10;\frac{1}{2}\right)$

$C\left(-2;-\frac{5}{2};-15\right)$ ، $D\left(-\frac{25}{2};0;-1\right)$

- بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم ثم أحسب حجمه.

7 a عدد حقيقي موجب تماما ، OABC رباعي أوجه حيث OAB ، OAC ، OBC مثلثا قائمة في O و OA = OB = OC = a ، I نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم من C في المثلث ABC مع (AB) ، H نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم منO في المثلث OIC مع (IC) وD النقطة من الفضاء حيث $\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OD}$

الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\frac{1}{2}\overrightarrow{OA};\frac{1}{2}\overrightarrow{OB};\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)$.

1) بين أن احداثيات H هي $\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$

2) بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم

3) W مركز سطح الكرة الداخلية لرباعي الوجوه ABCD بين أن $W \in (OH)$ ثم أحسب احداثيات W.

8 نعتبر النقط $A(-1;1;2)$، $(0;1;0)$ و $C(2;0;3)$

1. أحسب الجداءات السلمية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2. عين قيمة مقربة إلى 0.1 درجة لقياس كل زاوية من الزوايا التالية : $\widehat{BAC}$ ، $\widehat{CBA}$ ، $\widehat{ACB}$.

9 في المكعب ABCDEFGH عين الزاوية $\widehat{AOH}$ المعرفة بالقطرين [AG] ، [BH]

لتكن I ، J و K منتصفات القطع [AB] ، [CG] و [EH]

- عين الزاوية $\widehat{KIJ}$ ماذا تستنتج ؟

10 في المكعب ABCDEFGH نعتبر النقط I، J و K منتصفات القطع [AB] ، [BF] و [DH] على الترتيب.

1. هل المثلث IJK قائم؟

2. ماذا يميز سطح الكرة ذات القطر [JI] بالنسبة للمكعب ؟

11 ABCDS هرم قاعدته مربع ورأسه S أحرفه لها نفس الطول a .

1. أحسب بدلالة a الجداء السلمي: $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC}$ و $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$ استنتج $\overrightarrow{GS}.\overrightarrow{GC}$.

2. أنشئ المثلث AKC بعد حساب GC ، يمكن استعمال:
$$COS\left(\widehat{KAC}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

المعادلة الديكارتية لمستو

12 في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

- عين إحداثيات أشعة ناظمية لكل من المستويات

(P) : x + y – z = 0 ، (P') : x – 2y = 0

$(R):\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}z+3=0$ ، $(R'):3y-z=0$

13 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A(1 ; - 4 ; 3) و $\vec{u}(1;0;-2)$ شعاع ناظمي له

14 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي ذي المعادلة – x + 2y + z – 3 = 0 ويشمل النقطة A(-1 ; 2 ; -3) .

15 من بين المستويات التالية ، أذكر المتوازية والمتعامدة

(P) : - x + 2y + z -3 = 0 ، (P') : x – 2y - z = 0

$(R):x-2y+z+3=0$

$(R'):2x+3y-4z+2=0$

16 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته الديكارتية - 5x + y - z – 6 = 0 و النقطة A(- 6 ; 2 ; - 1)

- بين أن النقطة B(- 1 ; 1 ; 0) هي المسقط العمودي للنقطة A على (P) .

17 نعتبر النقط A(- 1 ; 1 ; 1)، B(0 ; 0 ; - 1) و C(3 ; -2 ; 1)

1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا

2) عين شعاع ناظميا للمستوي (ABC)

3) أكتب معادلة ديكارتية لـــ (ABC)

18 1) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي قطرها [AB] حيث A(7 ; 2 ; - 2) و B(- 3 ; 0 ; - 4)

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي مماس (S) في A .

19 1) عين W مركز (S) سطح الكرة الذي معادلته
$$x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$$

2) أحسب بعد النقطة W عن المستوي ذي المعادلة الديكارتية 4 x – 3 z – 6 = 0

3) هل يقطع (P) السطح (S) في حالة الإيجاب ، ما طبيعة تقاطعهما ؟

20 نعطى النقط A(- 1 ; 2 ; - 1) ، B(- 6 ; 1 ; 1) C(4 ; - 3 ; 3) و D(- 1 ; - 5 ; - 1)

1) عين احداثيات شعاع ناظمي $\vec{n}$ لمستوي (BCD) استنتج معادلة ديكارتية لـــ (BCD)

2) عين احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BCD) .

3) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$

4) نسمي ارتفاع رباعي وجوه كل مستقيم يشمل أحد الرؤوس و عمودي على الوجه المقابل . هل ارتفاعات رباعي الوجوه ABCD تقاطع في نقطة واحدة ؟

5) نعرف النقط I(1 ; 0 ; 0) ، J(0 ; 1 ; 0) و K(0 ; 0 ; 1) . هل ارتفاعات OTJK تتلاقى في نقطة واحدة ؟

بكالوريا

التعامد في الفضاء

21 نعتبر النقط $A(1;2;-2)$، $B(2;3;-2)$، $D(0;3;-2)$ و $E(1;2;-2+\sqrt{2})$

1. تحقق أن: $AB=AD=AE$ و أن المستقيمات (AB)، (AD) و (AE) متعامدة مثنى مثنى .
2. عين إحداثيات النقط C ، F، G و H حتى يكون ABCDEFGH مكعبا .

22 في مستو (P) نعتبر الدائرة (C) التي قطرها [AB] S نقطة من (D) المستقيم العمودي على (P) في A ، لتكن M نقطة من (C) تختلف عن A وعن B .

1. بين أن المستقيم (BM) عمودي على المستوي (SAM)
2. استنتج طبيعة المثلث BMS وعين تقاطع سطحي الكرتين اللتين قطريهما [AB] و [SB] .
3. نسمي H تقاطع الارتفاع المرسوم من A في المثلث AMS مع (MS) بين أن الشعاع $\overrightarrow{AH}$ عمودي على المستوي (BMS).

23 نعطى النقط $A(1,-1,0)$ ، $B(2,3,-4)$ و $C(-3,0,1)$ والشعاع $\vec{n}(8,15,17)$.

1. تحقق أن النقط A،B،C ليست في استقامية.
2. أحسب $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$ استنتج معادلة ديكارتية لمستوي (ABC) .
3. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يمر من النقطة $D(-2,2,-1)$

24 نعتبر النقط $A(-1,2,0)$ ، $B(-3,4,2)$ و $C(1,-2,-1)$

1. بين أن: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.
2. بين أن شعاعا $\vec{r}(a,b,c)$ يكون ناظميا للمستوي (ABC) إذا و فقط إذا كان: $\begin{cases} -2a+2b+2c=0 \\ 2a-4b-c=0 \end{cases}$
3) استنتج شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) بمركبات صحيحة ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC).

بعد نقطة عن مستو - الأشعة الناظمية

25 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $3x-y+4z+1=0$
أحسب بعد النقطة $A(-1;2;-1)$ عن (P)

26 نعتبر النقط $A(1;0;1)$ ، $B(3;-2;0)$ ، $C(2;4;-5)$ و $D(3;5;3)$.

1) عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)
2) أحسب بعد D عن (ABC) .

27 أحسب بعد النقطة O مبدأ المعلم عن المستوي (P) حيث $2x-3y+6z-7=0$ هي معادلة لـ (P) .

28 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: 2x-y-1=0 و النقطة $M(3,0,2)$.

1. عين بعد M عن (P) .
2. استنتج بعد M عن المستقيم (D) ذي المعادلة y=2x-1 في المستوي (xoy) ، (يمكن الاستعانة بشكل هندسي)

29 نعتبر النقط $A(1,0,-1)$، $B(2,2,3)$، $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

1. اثبت أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته.
2. أ) بين أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظمي للمستوي(ABC)
ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
3. عين بعد النقطة D عن المستوي(ABC)، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه DABC .

30 نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين: $2x+y-z=0$ و $x-y+2z=0$

1. تحقق أن $A(1,0,-3)$ متساوية البعد عن (P) و (Q)
2. عين مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن (P) و (Q).

مجموعات النقط

31 ABCD رباعي وجوه .

1. بين أن المستقيمان (AB) و(CD) متعامدان إذا و فقط إذا $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$
2. استنتج أنه إذا كان (AB) عموديا على (CD) و(BC) عموديا على (AD) فإنه يكون (BD) عموديا على (AC).
3. نفرض أن الرباعي ABCD منتظم .
أ). ماذا يمكن القول عن أحرفه المتقابلة ؟.
ب). بين أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$
ج). عين (E) مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$

32 A، B، C ثلاث نقط من الفضاء حيث ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين .(P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

تحقق أن (P) مستو عمودي على المستوي (ABC) يطلب تعيين تقاطعه معه.

33 نعتبر المستوي (P) و O نقطة منه لتكن A نقطة لا تنتمي إلى (P) بكل مستقيم (D) يمر من O و محتواً في (P) نرفق M المسقط العمودي لــ A على (D).

1. ماهي مجموعة النقط M لما يأخذ (D) كل الوضعيات الممكنة؟
2. (يمكن الاستعانة ببرمجية)

34 ABCD رباعي وجوه منتظم، بين أن (P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق:

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)=0$$

هي مستو مواز للمستقيمين (AB) و (CD) و يمر من G مركز ثقل الرباعي ABCD

- عين تقاطعات (P) مع وجوه الرباعي (أثر(P))

المرجح ، التمييز المرجحي

35 G مرجح الجملة $\{(A;a),(B;b)\}$

'G مرجح الجملة $\left\{\left(A;\frac{1}{a}\right),\left(B;\frac{1}{b}\right)\right\}$

حيث $(A\neq B)$ ، $a+b\neq 0$ ، $a\neq 0$ و $b\neq 0$

نضع I منتصف $[AB]$

1) برر وجود النقطة 'G

2) بين أن I منتصف $[GG']$

3) أحسب طول 'GG بدلالة طول AB

4) ماذا يحقق العددان a و b حتى يكون $GG'>AB$ ؟

36 نعتبر المثلث ABC القائم في A و المتساوي الساقين $(AB=AC=a)$ ، m وسيط حقيقي

1) ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى تقبل الجملة $\{(A;-1);(B;2);(C;m)\}$ مرجحا G_m ؟

2) أنشئ G_0 و G_2 ، تحقق أن $G_0G_1=\frac{2a\sqrt{5}}{3}$

3) عين و أنشئ المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط M حيث

$$\left\{M\in(P)/\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|\right\}$$

4) عين و أنشئ المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط M حيث

$$\left\{M\in(P)/\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=AB\right\}$$

5) نفس السؤال (Γ_3)

$$\left\{M\in(P)/\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\right\}$$

(P) هو المستوي

37 نعتبر النقط A ، B ، C و D من الفضاء و G مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c);(D;d)\}$ حيث $a+b+c+d\neq 0$ و a غير معدوم

ما هو مرجح الجملة $\{(G;-a-b-c-d);(B;b);(C;c);(D;d)\}$ ؟

38 في رباعي الوجوه ABCD نسمي منتصف [AB] و K منتصف [CD] .

1. عين النقطتين J و L حيث: $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
2. باستعمال النقطة G مرجح الجملة $\{(A,3),(B,3),(C,1),(D,1)\}$ بين أن المستقيمين (JL) و (IK) متقاطعان.

39 ABCD رباعي من المستوي ، I منتصف $[AC]$ J منتصف $[BD]$. K نقطة حيث $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$ L نقطة حيث $\overrightarrow{LC}=-2\overrightarrow{LD}$ ، M منتصف $[LK]$

1) G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;2);(C;1);(D;2)\}$ بين أن G ينتمي الى المستقيمين (KL) و (IJ) .

2) بين أن G منطبقة على M و أن M ، J و I على استقامة واحدة ثم عين وضعية M على (IJ)

3) عين كل النقط على شكل متناسب .

40 A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء

1) أنشئ G مرجح الجملة $\{(B;-1);(C;2)\}$ و F مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;2);(C;-4)\}$

2) بين أن F مرجح جملة نقطتين مرفقتين بمعاملين يطلب تحديدهما

3) عين المجموعة

$ˏ_1 = \left\{ M \in ˏ \ / \left\| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \frac{1}{2} AG \right\}$

تحقق أن A و G تتميان الى $ˏ_1$

4) عين المجموعة

$ˏ_2 = \left\{ M \in ˏ \ / \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF} \right\| \right\}$

41 A ، B ، C و D أربع نقط من الفضاء نعتبر :

I مرجح الجملة $\{(A,1),(B,-2),(C,-3)\}$

J مرجح الجملة $\{(A,1),(C,-3),(D,4)\}$

K مرجح الجملة $\{(A,1),(B,-2),(D,4)\}$

1. بين أن الشعاع $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}$ مستقل عن النقطة M.
2. بين أن المستقيمات (DI) ، (JB) و (CK) متوازية.

42 ABCD رباعي وجوه، نرفق بكل نقطة M من المستقيم (AD) تختلف عن A النقطة G مركز البعاد المتساوية A،B،C،M.

- عين (F) مجموعة النقط Gعندما تتحركM على (AD) ، (نستعمل المعلم $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$)

43 نعتبر النقط $A(1;-1;1)$ ، $B(2;0;1)$ و $C(-3;1;0)$

1. تحقق أن النقط A ، B ، C وD تنتمي إلى المستوي الذي معادلته $x - y - 6z + 4 = 0$
2. علّل وجود ثلاثة أعداد حقيقية a ، b وc حتى يكون D مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ عين الثلاثية (a,b,c).
3. هل النقطة D تنتمي إلى داخل المثلث ABC ؟ علل.

44 ABCDEFGH مكعب ، O1 و O2 مركزا المربعين ABCD و EFGH و I مركز ثقل المثلث EBD ، m عدد حقيقي و Gm مرجح الجملة
$\{(E;1);(B;1-m);(C;2m-1)(D;1-m)\}$

1. تحقق أن Gm موجود من أجل كل قيمة لــ m .
2. حدّد وضعية النقطة G1 .
3. تحقق أن: G0 =A ، استنتج أن النقط A ، G وI في استقامية.
4. بين أن : $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$ ، استنتج مجموعة النقط Gm عندما يمسح m مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
5. أ). بين أن النقط A،Gm ،E و O1 تنتمي إلى نفس المستوي .

ب). عين قيمة m التي يكون من أجلها Gm نقطة من المستقيم (EI)

45 A ، B و C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء ˏ . H مركز المثلث ABC

1) G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;2);(C;1)\}$ ، بين أن B ، G و H على استقامة واحدة

2) عين $ˏ_1$ مجموعة النقط M حيث

$ˏ_1 = \left\{ M \in ˏ \ / 3\left\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 4\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$

3) لكل نقطة M من المستوي نرفق الشعاعين

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

و $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

a) بين أن $\vec{v}$ مستقل عن M

b) بين أن C تحقق $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

c) عين $ˏ_2$ مجموعة النقط M من ˏ التي تحقق :

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

46 نعتبر مستقيما مزودا بمعلم $(O;\vec{i})$ ، A_0 ، B_0 نقطتان فاصلتاهما (4 -) و (3 +) على الترتيب

لكل عدد طبيعي n نضع A_{n+1} مرجح $\{(A_n;1);(B_n;4)\}$ و B_{n+1} مرجح $\{(A_n;3);(B_n;2)\}$.

1) علم النقط A_0 ، B_0 ، A_1 و B_1

2) a_n و b_n فاصلتا A_n ، B_n على الترتيب ، عبّر عن a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n .

3) بين أن من أجل كل n طبيعي $3\,a_n + 4\,b_n = 0$

- استنتج أن $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ و $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

4) أكتب a_n و b_n بدلالة n ثم بين أن نهايتي a_n و b_n . لما يئول N الى اللانهاية .

- ماذا يمكن أن نقول عن وضعيتي A_n ، B_n ؟

47 نعتبر المكعب ABCDIJKL نسب الفضاء إلى المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AI}\right)$

1. ليكن G مركز ثقل المثلث IBK أحسب إحداثيات G .
2. تحقق أن G تنتمي إلى المستقيم (JD) .
3. تحقق أن $\overrightarrow{JD}$ عمودي على $\overrightarrow{BK}$ و $\overrightarrow{BI}$ ، استنتج معادلة ديكارتية للمستوي(BIK)

48 A ، B ، C و D أربع نقط لا تنتمي إلى نفس المستوي في الفضاء ، $\sim$ عدد حقيقي .

1. بين أن: G$\sim$ مرجح الجملة موجود لأجل كل قيم $\sim$.
$\{(A;\sim-1);(B;\sim+2);(C;2\sim+3);(D;-4\sim-2)\}$
ما هي مجموعة النقط لما يتغير $\sim$ على $\mathbb{R}$ ؟

49 ABC مثلث قائم في A نسمي O منتصف [BC] و (¨) الدائرة الداخلية للمثلث ABC و I منتصف [AO] ، لكل نقطة من المستوي نرفق النقتين P و Q
حيث: $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$
و $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

1. بين أن I مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1);(C;1)\}$.
2. بين أن P و Q هما صورتا M بتحويلين نقطيين يطلب تحديدهما.
3. نأخذ الآن M كنقطة من (¨)

أ). عين مجموعة النقط P وQ عندما يتغير M على (¨).

ب). لتكن O' نظيرة O بالنسبة لـ A ، ماهي طبيعة الرباعي $OMQO'$ ؟

ج). بين أن القطعة [PQ] تحافظ على طول ثابت و تشمل O'.

50 ABCD رباعي وجوه نسمي على الترتيب I ، J و K مراكز ثقل المثلثات ABC ، ABD ، ACD .

1. عين النقط I ، J و K على الشكل .
2. أ). M نقطة من الفضاء، عبر بدلالة $\overrightarrow{MI}$ المجموع الشعاعي $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

ب). استنتج أن مرتبطان خطيا.

3. بين أن المستويين (BCD) و (IJK) متوازيان.
4. G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD، بين أن المستقيمات (DI) ، (CJ) و(BK) تتلاقى في النقطة G ، هل G تنتمي إلى المستوي (IJK) ؟

مسائل

51 نعتبر رباعي الوجوه OABC حيث OAB، OAC و OBC مثلثات قائمة في O و OC=OB=OA=1 ، [CI] إرتفاع في المثلث ABC، [OH] إرتفاع في المثلث OIC .

1. ما طبيعة المثلث ABC؟ أحسب الطول AB.
2. أثبت أن المستقيمان (OH)و(AB) متعامدان و أن H ملتقى الارتفعات في المثلث ABC .
3. أرسم المثلث OCI بعد حساب الأطوال OI و CI (الوحدة هي طول OC)، عين .H
4. أ). عين الطول OH في المثلث OCI.

ب). أحسب V حجم رباعي الوجوه OABC ثم S مساحة ABC .

ج) أوجد علاقة بين S،V وOH ثم تحقق من النتيجة 4-أ).

5. نعتبر النقطة D المعرفة بالعلاقة $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{HO}$ ثم نسب الفضاء إلى المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$

أ). بين أن إحداثيات النقطة H هي $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

ب). بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم.

ج). لتكن Ω مركز سطح الكرة الداخلية للرباعي ABCD بين أن Ω نقطة من المستقيم (OH) و أحسب إحداثياتها.

52 نُعطى الدائرة (T) التي مركزها O ونصف قطرها R

1. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تكون المماسات لــ (T) و تشمل M متعامدة.
2. في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ نعتبر القطع المكافئ (P) ذا المعادلة: $y=x^2$

أ). أكتب معادلة للمماس (T_a) لـ (P) في نقطة A فاصلتها a ، (a عدد حقيقي غير معدوم)

ب). ماهو معامل توجيه مستقيم عمودي على (T_a)؟ استنتج أنّ مماسا لــ (P) عمودي على (T_a) هو مماس في النقطة A' ذات الفاصلة $\left(-\frac{1}{4a}\right)$.

ج). عين معادلة للمماس لــ (P) في A'.

د). استنتج مجموعة النقط M من المستوي حيث المماسات لــ (P) التي تشمل M متعامدة.

اختيار من متعدد

53 ABCDEFGH مكعب ضلعه 1

نختار المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ ، نسمي I و J

منتصفات [EF] و [FG] على الترتيب

L مرجح الجملة $\{(A;1),(B;3)\}$ و (D) المستوي

الذي معادلته 4x – 4y + 3z – 3 = 0

في كل سؤال جواب واحد أو أكثر صحيح

1) إحداثيات L هي:

a) $\left(\frac{1}{4};0;0\right)$ b) $\left(\frac{3}{4};0;0\right)$ c) $\left(\frac{2}{3};0;0\right)$

2) المستوي (P) هو المستوي

a) (GLE) ، b) (LEJ) ، c) (GFA)

3) المستوي الذي يوازي (P) و يشمل I يقطع المستقيم

(FB) في M التي إحداثياتها :

a) $\left(1;0;\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(1;0;\frac{1}{5}\right)$ c) $\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$

4) المستقيمات :

a) (EL) و (FB) يتقاطعان فيN نظيرة M بالنسبة لـB

b) (EL) و (IM) متوازيان

c) (EL) و (IM) يتقاطعان

5) حجم رباعي الوجوه FIJM هو

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{48}$ c) $\frac{1}{24}$

54 نعتبر النقط A(3 ; 1 ; 3) ، B(-6 ; 2 ; 1)

(P) المستوي : x + 2y + 2z = 5

في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح

1) مجموعة النقط M من الفضاء حيث

$\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}\right\|=2$ هي

a) مستوي من الفضاء

b) سطح كرة

c) مجموعة خالية

2) إحداثيات H المسقط العمودي لـــ A على P هي

a) $\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$ c) $\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

3) سطح الكرة التي مركزها B و نصف قطرها 1

a) يقطع (P) وفق دائرة

b) يمس (P)

c) لا يقطع (P)

أصحيح أم خطأ ؟

صحيح أم خاطئ ، برّر جوابك.

55 نعتبر النقط $A\left(3;-2;2\right)$ ، $B\left(6;1;5\right)$ ،

$C\left(6;-2;-1\right)$ و $D\left(0;4;-1\right)$

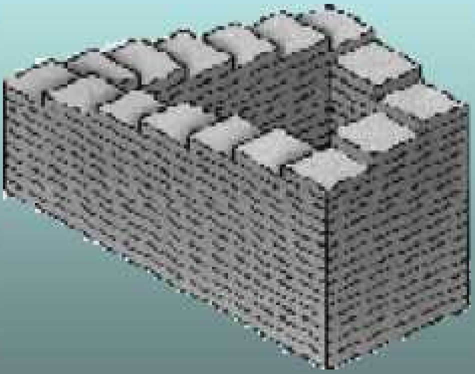
1. المثلث ABC قائم .
2. المستوي $\left(P\right)$ الذي معادلته x+y+z-3=0 عمودي على المستقيم(AB) و يشمل A .
3. معادلة المستوي $\left(P'\right)$ العمودي على (AC) و الذي يشمل A هي: x+z-5=0 .
4. $\vec{u}\left(1;-2;1\right)$ شعاع توجيه للمستقيم $\left(\Delta\right)$ تقاطع $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$.
5. المستقيم $\left(AD\right)$ عمودي على المستوي (ABC).
6. حجم رباعي الوجوه ABCD هو 81 وحدة حجوم.
7. قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{3\pi}{4}$ راديان.
8. مساحة المثلث BDC هي 21 وحدة مساحة.
9. بعد A عن المستوي (BDC) يساوي 3.

المستقيمات و المستويات في الفضاء 08

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل الاستقامية ، التلاقي ، انتماء أربع نقط إلى نفس مستو.
- الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستوي إلى تمثيل وسيطي و العكس .
- تحديد الوضع النسبي لمستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .
- تعيين تقاطع مستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .

أنظر جيدا و تخيل نفسك أنك تصعد على هذا السلم ...
هل أنت فعلا تصعد ! ؟



نشاط أول

نشرح في هذه المرحلة طريقة غوص (GAUSS) لحل جملة معادلات خطية من خلال هذا المثال .

نعتبر الجملة (S) حيث

$$(S):\begin{cases} a-2b+2c-2d+e=1 & (L_1) \\ 2a-b+c-d-e=2 & .(L_2) \\ a-b+2c-d+e=4 & (L_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad : \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

نحصل على (S_1):

$$(S_1):\begin{cases} a+2b+2c-2d+e=1 \\ 3b-3c+3d-3e=0 \\ b+d=3 \end{cases}$$

المرحلة الثانية :

نغير ترتيب المجاهل و نقوم بالعملية $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$

نحصل على (S_2) :

$$(S_2):\begin{cases} a+2c-2b-2d+e=1 \\ c-b-d+e=0 \\ b+d=3 \end{cases}$$

هذه الجملة مثلثية

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+2c-2b-2d+e=1} \\ \boldsymbol{c-b-d+e=0} \\ \boldsymbol{b+d+0e=3} \\ \boldsymbol{0d+0e=0} \\ \boldsymbol{0e=0} \end{cases}$$

المعادلتان الأخيرتان محققتان من أجل كل قيم d و e .

نختار d = k و e = k' مثلا فنحصل على حلول الجملة و هي الخماسيات (a ; b ; c ; d ; e) حيث

a = 1 + k' ، b = 3 – k ، c = 3 – k' ، d = k ، e = k'

☜ **تطبيق :** باستعمال طريقة (GAUSS) حل الجملة التالية :

$$(S):\begin{cases} 2x+3y-2z=a \\ x-2y+3z=b \\ 4x-y+4z=c \end{cases}$$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معطاة .

الأنشطة

نشاط ثان

المربعات السحرية

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

مربع سحري ذو 16 خانة

- على كل سطر ، على كل عمود على كل قطر المجموع هو 34
- في القرن 20 وجدت المربعات السحرية تطبيقات عديدة متنوعة في مجالات مختلفة (الإحصاء ، نظرية الإعلام ، استعمالات الزمن ...)

➢ نريد تعيين المربعات السحرية بتسع خانات بالأرقام من 1 إلى 9 . كل رقم يستعمل مرة واحدة و واحدة فقط .

a) مجموع الأرقام من 1 إلى 9 هو 45
لماذا يكون مجموع كل سطر وكل عمود وكل قطر هو 15 ؟

b) نفرض أننا وجدنا مربعا سحريا ذا 9 خانات ، ما هي المربعات السبعة الأخرى التي نحصل عليها بالدوران و التناظر ؟

c) لماذا تحوي الخانة المركزية (تقاطع القطرين) الرقم 5 في كل هذه المربعات ؟

d) عين كل هذه المربعات .

نشاط ثالث

عين كثيرات الحدود من الدرجة 4 الذي منحنياتها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، يشمل النقط $O(0;0)$ ، $A\left(1;-\dfrac{13}{2}\right)$ ، $B(2;-4)$ و تقبل في النقطتين A و B مماسا شعاع توجيهه $\vec{i}$

نشاط رابع

نعتبر الجملة التالية

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+4y+z+3=0 \end{cases}$$

حل الجملة ثم فسّر النتيجة هندسيا

المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . (D) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

M(x; y ; z) نقطة من (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

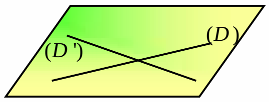
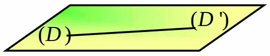
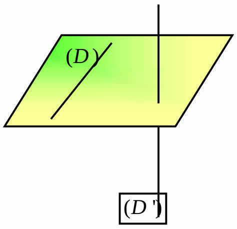
وهذا يعني باستعمال الإحداثيات الديكارتية $\begin{cases} x-x_A=at \\ y-y_A=bt \\ z-z_A=ct \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$ أو $\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

نسمي الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

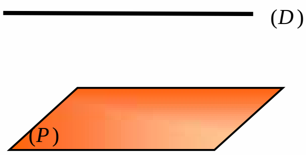
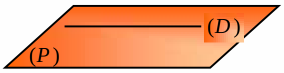
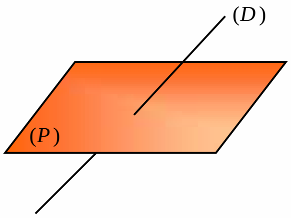
تقاطع المستقيمات و المستويات

(P) و (P') مستويان ، $\vec{n}$ و $\vec{n}\,'$ ناظميان لهما على الترتيب . (D) و (D') مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u}\,'$ على الترتيب

تقاطع مستقيمين : يمكن للمستقيمين (D) و (D') أن يكونا

من نفس المستوي			من مستويين مختلفين
متقاطعين	متوازيين		
	متوازيين و مختلفين	منطبقين	
			
التقاطع نقطة	التقاطع خال	التقاطع مستقيم	التقاطع خال

تقاطع مستقيم و مستو: نلخص الوضعيات فيما يلي

(D) يوازي (P)		(D) يقطع (P)
(D) يوازي (P) " تقاطع خال "	(D) محتوا في (P)	
		

تمرين محلول1:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

ـ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث A(+2 ; 2 ; - 3) و B(1 ; - 1 ; 0)

ـ هل النقطة C(1 ; 3 ; 2) تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

الحل: شعاع توجيه لـــ (AB) هو $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-3\\+3\end{pmatrix}$ و بالتالي $\begin{cases}x=2-t\\y=2-3t\\z=-3+3t\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$ هذه الجملة هي التمثيل الوسيطي

تنتميC إلى (AB) إذا وفقط وجد t يحقق $\begin{cases}2-t=1\\2-3t=3\\-3+3t=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\t=-\dfrac{1}{3}\\t=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ ومنه C لا تنتمي الى (AB)

تمرين محلول2:

نعتبر المستقيمات d_1 ، d_2 ، d_3 ممثلة وسيطيا على الترتيب

$d_1:\begin{cases}x=-2+5t\\y=-1-t\\z=3+4t\end{cases}\; ....t\in\mathbb{R}$ ، $d_2:\begin{cases}x=1-t'\\y=4+3t'\\z=5-t'\end{cases}\; ...t'\in\mathbb{R}$ ، $d_3:\begin{cases}x=-7+7t''\\y=-3t''\\z=2t''\end{cases}\; ....t''\in\mathbb{R}$

- أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

الحل : $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}7\\-3\\2\end{pmatrix}$ أشعة توجيه لـــ d_1 ، d_2 ، d_3 على الترتيب

➢ نلاحظ أن $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي d_1 و d_2 غير متوازيين ، فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي . و عليه نحل الجملة $\begin{cases}-2+5t=1-t'\\-1-t=4+3t'\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=1\\t'=-2\end{cases}$

النقطة من d_1 من أجل t = 1 هي (3 ; -2 ;7) و النقطة من d_2 من أجل t' = -2 هي (3 ; -2 ; 7)

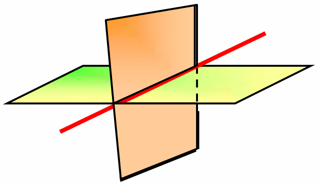
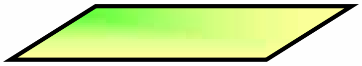
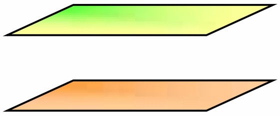
و بالتالي فالمستقيمان d_1 و d_2 يتقاطعان في (3 ; -2 ; 7) .

➢ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_3}$ غير مرتبطين خطيا نستخلص نفس الملاحظة

نحل الجملة $\begin{cases}-2+5t=-7+7t''\\-1-t=-3t''\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=-1\\t''=0\end{cases}$ النقطة من d_1 من أجل t = -1 هي (-1 ; 0 ; -7) و النقطة

من d_2 من أجل t'' = 0 هي (-7 ; 0 ; 0) إذن المستقيمان d_1 و d_2 ليسا من نفس المستوي .

تقاطع مستويين : الوضعيات الممكنة هي :

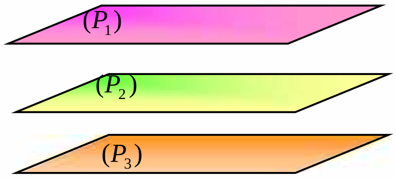
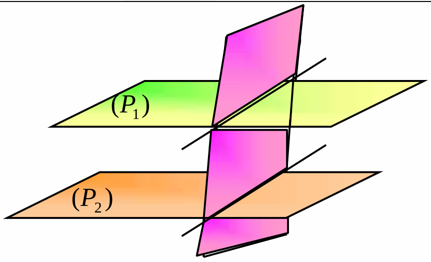
متقاطعان	متوازيان	
	منطبقان	تقاطع خالي
		
التقاطع مستقيم	التقاطع مستو	التقاطع خال

خاصية : مستقيم في الفضاء معرّف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين

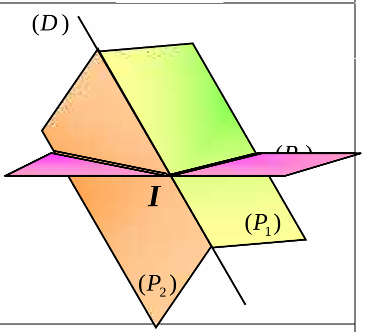
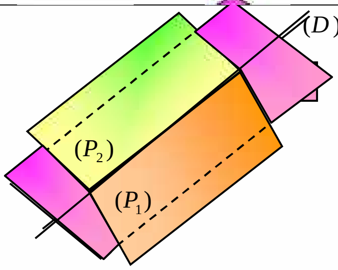
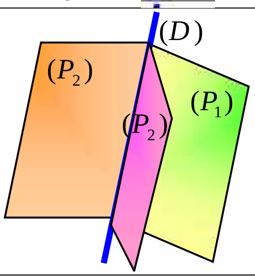
تقاطع ثلاث مستويات :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ ، $\vec{n_3}$ أشعة ناظمية لها .

➢ الوضعيات النسبية 1) (P_1) ، (P_2) متوازيان

(P_1) ، (P_3) متوازيان	(P_1) ، (P_3) متقاطعان
	
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

➢ الوضعيات النسبية 1) (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و تقاطعهما المستقيم (D)

(**D**) لا يقطع (P_3)	(**D**) يوازي (P_3)	
	(**D**) يوازي (P_3) بتقاطع خال	(**D**) محتو في (P_3)
		
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\{I\}$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=(D)$

تمرين محلول 4 :

ثلاث مستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) **التي معادلات ديكارتية لها على الترتيب**

$2x - y - 2z - 1 = 0$ ، $-x + 4y + z - 3 = 0$ ، $4x - 2y - 4z - 5 = 0$

أدرس الوضعية النسبية لــ

a) (P_1) ، (P_2) **b)** (P_1) ، (P_3)

الحل: $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_3}\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لــ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

a) $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا ، إذن (P_1) و (P_2) ليسا متوازيين فهما يتقاطعان على المستقيم (D) .

للحصول على تمثيله الوسيطي نكتب مثلا x و y بدلالة z (z وسيط)

$\begin{cases}2x - y - 2z - 1 = 0\\ -x + 4y + z - 3 = 0\end{cases}$ بعد الحساب نجد $t \in \mathbb{R};\begin{cases}x = t + 1\\ y = 1\\ z = t\end{cases}$

b) $\vec{n_3} = 2\vec{n_1}$ أي $\vec{n_1}$ و $\vec{n_3}$ مرتبطان خطيا ، إذن (P_1) ، (P_3) متوازيان . نختار نقطة من (P_1) و لتكن A(0 ; - 1 ; 0) (0 + 2 - 0 - 5 = - 3 $\neq$ 0) ، A ليست نقطة من (P_3) و بالتالي تقاطع (P_1) ، (P_3) خال

تمرين محلول 5 :

تعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) بالمعادلات **ديكارتية على الترتيب**

$4x + y + z + 10 = 0$ ، $2x + y + 3 = 0$ ، $2x - y + 2z - 1 = 0$

أدرس تقاطع (P_1) ، (P_2) و (P_3)

الحل: $\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لــ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

ليست مرتبطة خطيا مثنى مثنى و بالتالي فالمستويات متقاطعة مثنى مثنى وفق مستقيم

تقاطع (P_1) ، (P_2) ، ليكن (D) مستقيم تقاطعهما $\begin{cases}4x + y + z + 10 = 0\\ 2x + y + 3 = 0\end{cases}$

نضع z = t لنحصل على تمثيلا وسيطيا لــ (D) و هو $t \in \mathbb{R};\begin{cases}x = t\\ y = -3 - 2t\\ z = -7 - 2t\end{cases}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لــ (D) $(\vec{u}.\vec{n_3} = 0)$ إذن (D) يوازي (P_3) . A(0 ; -3 ; -7) نقطة من (D)

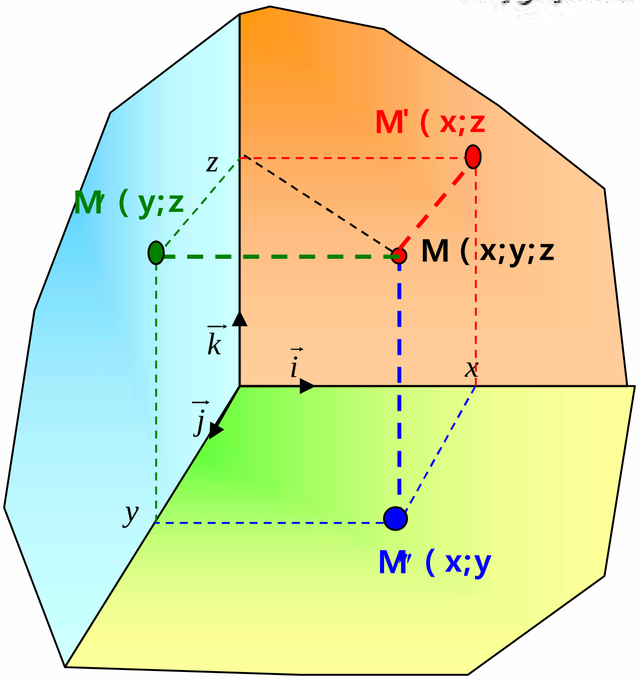
$(A \notin (P_3))$ و بالتالي $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \varnothing$

أعمال موجهة رقم 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية A(1 ; 2 ; 3) ، B(3 ; 2 ; 1) و C(1 ; 3 ; 3)

1) بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا ، أكتب معادلة ديكارتية له .



2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) حيث

$$(P_1): x-2y+2z-1=0$$

$$(P_2): x-3y+2z+2=0$$

a) بين أن (P_1) ، (P_2) يتقاطعان

و ليكن (Δ) تقاطعهما

b) تحقق أن النقطة C تنتمي

إلى المستقيم (Δ)

c) أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$

شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

d) استنتج تمثيلا وسيطيا لـــ (Δ)

2) لحساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) الممثلة وسيطيا بالجملة

$$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases} \quad \text{مع} \quad t\in\mathbb{R}$$

نعتبر النقطة M ذات الوسيط k من المستقيم (Δ)

a) عين قيمة k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين

b) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

أعمال موجهة رقم 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية $A(3;0;10)$ ، $B(0;0;15)$ و $C(0;20;0)$

1) a) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

b) بين أن (AB) يقطع حال مل محور الفواصل في نقطة (9 ; 0 ; 0)

c) علل لماذا A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) H نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم من O في المثلث OBC مع المستقيم (BC)

a) بين أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH) .

- استنتج أن (EH) هو الارتفاع المرسوم من E في المثلث EBC .

b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (OEH)

c) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

d) بين أن الجملة :
$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases} \quad \text{مع} \quad t \in \mathbb{R}$$

تقبل حلا وحيدا . ماذا يمثل هذا الحل ؟

e) أحسب البعد OH . استنتج أن EH = 15 و مساحة المثلث EBC .

3) بحساب حجم رباعي الوجوه OEBC بطريقتين ، استنتج بعد النقطة O عن المستوي (ABC)

- هل يمكن توقع هذه النتيجة من (2 , c)

موضوع محلول

التمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية A(4 ; 0 ; -3) ، B(2 ; 2 ; 2) ، C(3 ;-3 ;-1) و D(0 ; 0 ; -3) .

1) عين معادلة ديكارتية لمستوي محور [AB] (ليكن (P) هذا المستوي) .

2) أ) نقبل فيما يلي أن المستويين محوري القطعتين [BC] و [DC] معرفان بالمعادلتين 2x-10y-6z-7=0 و 3x-3y+2z-5=0 على الترتيب .

- بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E يطلب تعيين نصف قطرها .

حل مختصر

1) ليكن J منتصف [AB] إذن $J(3;1;-\frac{1}{2})$ ،

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

و بالتالي معادلة ديكارتية لـ (P) هي 4x-4y-10z-13=0

2) أ) (P_1) يقطع (P_2) وفق مستقيم (D) تمثيله الوسيطي هو

$$\begin{cases} x=\frac{19}{11}t+2 \\ z=-\frac{12}{11}t-\frac{1}{2}\end{cases} \quad \text{مع } (t\in\mathbb{R})$$

(D) يقطع (P) في نقطة E إحداثياتها $E\left(2\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$

2) ب) ED = EC = EB = EA

و بالتالي A ، B ، C و D تقع على سطح الكرة التي مركزها E

لكن $EA^2=(4-2)^2+0^2+(-3+\frac{1}{2})^2=\frac{41}{4}$

النقط A ، B ، C و D تقع على سطح الكرة التي مركزها E و نصف قطرها $\frac{\sqrt{41}}{2}$

تعاليق

- الشعاع الناظمي لمستو علمت معادلة ديكارتية له هو $\vec{u}(a;b;c)$
- نحصل على d باعتبار أن J نقطة من (P)
- هناك طريقة أخرى $MA^2=MB^2$
- لأن الشعاعان الناظميان لـ (P_1) و (P_2) غير مرتبطين خطيا
- حل الجملة مشكلة بمعادلتي المستويين
- إحداثيات E تحقق حل الجملة

$$\begin{cases} x=\frac{19}{11}t+2 \\ y=t \\ z=\frac{-12}{11}t-\frac{1}{2} \\ 4x-4y-10z-13=0\end{cases}$$

- E تنتمي إلى مستويات هي محاور لقطع مستقيمة

موضوع موجّه

نعتبر المستويين المعرفين بمعادلتين ديكارتين كما يلي :

$$(R): 2x + y + 2z = 0 \quad , \quad (P): x + y = -1$$

1) تحقق أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم (D) يشمل النقطة A(1 ; -2 ; 0) و موجه بالشعاع $\vec{u}(-2;2;1)$

2) بين أن المستقيم (D) و المستوي (P’) الذي معادلته $4x + 4y + z + 3 = 0$ يتقاطعان

3) استنتج حل الجملة

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

توجيهات

1. بعد كتابة جملة المعادلتين بثلاثة مجاهل x ، y و z عبّر بدلالة z عن x و y (مثلا) ثم ضع z = t كوسيط لتحصل على التمثيل الوسيطي لــ (D) الذي تظهر فيه مركبات $\vec{u}$ و إحداثيات A .
2. عوّض x ، y و z في معادلة (P') لتحصل على معادلة من الدرجة الأولى مجهولها t و بالتالي الحصول على نقطة تقاطع (D) مع (P')
3. حل الجملة هو نقطة التقاطع بين (D) و (P') و هي النقطة الوحيدة التي تنتمي إلى المستويات الثلاثة .

المستقيمات في الفضاء

1 1) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A(0 ; 0 ; 1) و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له

1) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D') الذي يشمل B(- 1 ; 0 ; - 1) و $\vec{v}(-1;0;2)$ شعاع توجيه له

2 عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث A(- 2 ; 7 ; 1) و B(3 ; 5 ; 2) .

– هل النقطتان C(13 ; 1 ; 4) و D(- 12 ; 11 ; 1) تنتميان الى (AB) ؟

3 نعتبر النقط A(1 ; - 3 ; - 2) ، B(- 5 ; 1 ; 3) و C(- 1 ; 1 ; 1) .

أكتب تمثيلا وسيطيا

a) للمستقيم (AB)

b) القطعة [BC]

c) نصف المستقيم [AC)

4 نعتبر المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x = -2+3t \\ y = -t \\ z = -3-2t \end{cases}$$

مع t عدد حقيقي

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D') الذي يوازي (D) و يشمل النقطة A(-1 ; 2 ; -4) .

5 عين طبيعة المجموعات التالية حيث تمثيلاتها الوسيطية

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+3t \quad t \in [0;1] \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ z = 1-2t \end{cases}$$

6 هل جملة المعادلتين
$$\begin{cases} x-2y-z=3 \\ 2x-3y+2z=4 \end{cases}$$
و التمثيل الوسيطي
$$\begin{cases} x = -1+9t \\ y = -2-4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$
يعرفان نفس المستقيم ؟

7 نفس السؤال السابق مع
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -2x-y+3z-5=0 \end{cases}$$
و
$$\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 4-5t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+t \end{cases}$$

8 نعتبر المستوي (P) : x – y + 2 z = 2 و النقطة A(4 ; - 2 ; 1)

1) عين $\vec{n}$ شعاعا ناظميا لــ (P)

2) أكتب تمثيلا و سيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع توجيهه

3) استنتج احداثيات H المسقط العمودي لـ A على (P)

9 أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A(- 3 ; 5 ; - 1) و العمودي على المستوي (P) الذي معادلته : x – 2y + 3 z = 0

10 عيين تقاطع (D)
$$\begin{cases} x = -4-t \\ y = 2-t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+2t \end{cases}$$
ومع المستويات $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، $(O;\vec{j};\vec{k})$ و $(O;\vec{i};\vec{k})$

11 1) عين مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق
$$\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = 2-3t^2 \quad \in \mathbb{R} \\ z = 2+2t^2 \end{cases}$$

2) نفسا السؤال من أجل $t \in [-1;3]$

12 نعتبر المستقيمين d و d' بالتمثيلين الوسيطيين
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+t \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases}$$
علىالترتيب

1) بين أن المستقيمين من نفس المستوي

2) عين نقطة تقاطعهما

13 هل المستقيمان
$$d : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \quad و \quad d' : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3-t \end{cases}$$
متوازيان ؟ متقاطعان ؟ ليسا من نفس المستوي ؟ برّر

تمارين

14 أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A(0 ; -1 ; 2) و يوازي (d) حيث :

$$d:\begin{cases} x=1-2k \\ y=2k & \in\mathbb{R} \\ z=5 \end{cases}$$

15 بين أن (D) و (D') منطبقان حيث :

$$(D):\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t & t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

$$(D'):\begin{cases} x=2t' \\ y=5-6t' & t'\in\mathbb{R} \\ z=1-2t' \end{cases}$$

16 بين أن (D) و (D') من نفس المستوي حيث

$$(D):\begin{cases} x=-4+t \\ y=4+2t & t\in\mathbb{R} \\ z=2+t \end{cases}$$

$$(D'):\begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' & t'\in\mathbb{R} \\ z=1+t' \end{cases}$$

17 نعتبر المستقيمين (D) و (D') حيث

$$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t & t\in\mathbb{R} \\ z=1+3t \end{cases}$$

$$(D'):\begin{cases} x=3+2m \\ y=m & \in\mathbb{R} \\ z=-1-4m \end{cases}$$

1) بين أن المستقيمين ليسا من نفس المستوي

2) عين مستقيما (D") يوازي (D') و يقطع (D)

18 ليكن رباعي الوجوه ABCD و لتكن D' ، B' و C' نظائر A بالنسبة لمنتصفات القطع [BC] ، [CD] و [DB] على الترتيب

1) تحقق أن $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$ معلم للفضاء

2) عين تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمات (BB') ، (CC') و (DD')

3) بين أنّ هذه المستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة J طلب تحديد احداثياتها

19 بين أن (D) و (D') مستقيمان منطبقان

$$(D):\begin{cases} x=-1+5t \\ y=-3-t & t\in\mathbb{R} \\ z=-4t \end{cases}$$

$$(D'):\begin{cases} x=9+5t' \\ y=-5-t' & t'\in\mathbb{R} \\ z=-8-4t' \end{cases}$$

20 بين أن (D) و (D') مستقيمان متوازيان

$$(D):\begin{cases} x=4-2t \\ y=2+4t & t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

$$(D'):\begin{cases} x=-2t' \\ y=1+4t' & t'\in\mathbb{R} \\ z=t' \end{cases}$$

21 بين أن (D) و (D') لا ينتميان لنفس المستوي

$$(D):\begin{cases} x=-3+t \\ y=t & t\in\mathbb{R} \\ z=1+3t \end{cases}$$

$$(D'):\begin{cases} x=-1+t' \\ y=2-2t' & t'\in\mathbb{R} \\ z=5+3t' \end{cases}$$

22 بين أن (D) و (D') متقاطعان

$$(D):\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-t & t\in\mathbb{R} \\ z=1+t \end{cases}$$

$$(D'):\begin{cases} x=t' \\ y=1-t' & t'\in\mathbb{R} \\ z=-1+4t' \end{cases}$$

المستويات في الفضاء

23 1) عين تقاطع المستويين (P) و (Q) في الحالات التالية :

a) $(Q):3x+3y+3z-12=0;(P):x+y+z=4$

b) $(Q):3x+3y+3z+12=0;(P):x+y+z=4$

c) $(Q):x+y+z=0;(P):2x-y+z+2=0$

d) $(Q):x-y+2z=5;(P):-3x+2y+z-1=0$

24 تحقق أن المستقيمين (D) و (D') متقاطعان

$$(D):\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} x=4-5t' \\ y=3-2t' \\ z=-1+2t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (D) و (D') .

25 تحقق أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان وأكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشملهما .

$$(D):\begin{cases} x=-2-4t \\ y=3+2t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} x=1+2t' \\ y=3-2t' \\ z=-1+2t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

26 عين في كل مرة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D)

a) (P): -2x + y – z + 3 = 0

$$(D):\begin{cases} x=t \\ y=-1-3t \\ z=2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

b) (P): x + 3y – z + 1 = 0

$$(D):\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

c) (P): x + y – 2z + 2 = 0

$$(D):\begin{cases} x=5+t \\ y=1+t \\ z=4+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

27 نعتبر النقطتين W(1 ; 1 ; 1) ، A(3 ; 3 ; 0)

1) أكتب معادلة لــ (S) سطح الكرة الذي مركزه W ويشمل A .

2) أكتب معادلة لِ (P) المستوي المماس لِ (S) في A

3) لتكن النقط B(-1 ; 2 ; -1) ، C(0 ; 0 ; -3) و D(1 ; 2 ; -3)

a) تحقق أن النقط B ، C و D ليست على استقامة واحدة

b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BCD)

4) بين أن (BCD) و (P) متعامدان

5) أكتب تمثيلا وسيطيا لتقاطع (P) و (BCD)

28 عين في الحالتين تقاطع المستويات الثلاثة

1) (P) : x + y + z = 4

$$(Q): y+\frac{1}{2}z=3$$

$$(R): 3x+2y=6$$

2) (P) : x + y + z = 4

$$(Q): -x+y-z=2$$

$$(R): 3x+4y+3z=15$$

29 حل في $\mathbb{R}^3$ ثم أعط تفسيرا هندسيا الجملتين التاليتين

1)
$$\begin{cases} 2x-y-7z+26=0 \\ x+y-2z+7=0 \\ -x-2y+z-3=0 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 4x+2y-z+2=0 \\ x+y-2z=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$$

30 نعتبر النقط A(2 ; 1 ; 1) ، B(3 ; 0 ; 1) ، C(0 ; 1 ; 5) ، D(-1 ; 0 ; 1) و E(6 ; 2 ; 3)

1) تحقق أن النقط A ، B و C تعرّف مستويا (ABC) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له .

2) عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)

3) عين احداثيات النقطة I تقاطع (DE) مع (ABC)

31 نعتبر النقطتين A(1 ; 1 ; 1) و B(-1; 1 ; 2) من الفضاء و(P) المستوي الذي يشمل النقطة C(2 ; 4 ; 1) و $\vec{n}(-1;-1;5)$ شعاع ناظمي له .

32 نعتبر النقط A(1 ; 0 ; 2) ، B(3 ; 2 ; 4) ، C(1 ; 4 ; 2) و D(5 ; 2 ; 4)

نعرف النقط I ، J و K كما يلي : I منتصف [AB] .

J منتصف [CD] و $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

1) عين احداثيات النقط I ، J و K ثم تحقق أن هذه النقط ليست على استقامة واحدة .

2) تحقق أن $\vec{n}(-2;1;-1)$ ناظمي لـ (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية لـــ (IJK)

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (A) ثم تحقق أن (IJK) و (AD) يتقاطعان في نقطة L حيث $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

33 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له

1) A(- 1 ; 2 ; 0) و $\vec{u}(1;1;-1)$

2) A(0 ; 0 ; 2) و $\vec{u}(1;0;0)$

3) A(- 1 ; -1 ; 2) و $\vec{u}(-1;0;1)$

34 نعتبر النقطة A(1 ; 2 ; 3) والشعاع $\vec{u}(1;2;-1)$

- عين معادلة لمجموعة النقط M التي تحقق $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=2$
- ما طبيعة هذه المجموعة ؟

35 المستوى (P) معرف بالمعادلة الديكارتية $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-z=0$. عين معلما ديكارتيا للمستو (P).

36 (P) هو المستوي الذي معادلته $x+y-2z+3=0$ نعتبر النقطة A(2 ; - 3 ; 1) والشعاعين $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(3;-3;0)$.

بين أن (A ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) معلما متعامدا في المستوي (P).

37 المستوى (P) يشمل النقط A(1 ; - 1 ; - 1) ، B(0 ; 1 ; 1) و C(-1 ; 2 ; 0)

1) عين شعاعا ناظميا لـــ (P)

2) استنتج معادلة ديكارتية لـــ (P)

38 (P) مجموعة النقط المعرفة بالتمثيل الوسيطي

$$(P):\begin{cases} x=1+t+2m \\ y=-2+3t \quad t,m\in\mathbb{R} \\ z=1-m \end{cases}$$

نعتبر النقطة A(1 ; -2 ; 1) و الشعاعين $\vec{u}(1;3;0)$ و $\vec{v}(2;0;-1)$

1) بين أن (P) هو مستوي المعلم $(A;\vec{u};\vec{v})$

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

39 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A(1 ; -2 ; 3) و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعا توجيه له .

40 (P) المجموعة المعرفة بـــ :

$$(P):\begin{cases} x=2-t+m \\ y=1+3m \quad t,m\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$$

بين أن (P) مستو يطلب كتابة معادلة ديكارتية له

41 نعتبر المستوى (P) الذي معادلته

$$2x+y-2z+5=0$$

1) عين شعاعا ناظميا $\vec{n}$ لـــ (P)

2) بين أن الشعاع $\vec{u}(1;0;1)$ شعاع توجيه لـــ (P)

3) عين أساسا متجانسا $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا مع $\vec{n}$ و $\vec{u}$ على الترتيب

42 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A(-3 ; 1 ; 2) و يوازي المستقيمين (D) و (D') الذين تمثيلاهما الوسيطيان هما

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=4+t \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} x=2+t' \\ y=-5+t' \quad t'\in\mathbb{R} \\ z=4+t' \end{cases}$$

43 نعتبر المستقيمين

$$(D):\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-3+2t \end{cases} ، (D'):\begin{cases} x=5+2t' \\ y=2t' \quad t'\in\mathbb{R} \\ z=-5-t' \end{cases}$$

بين أنه يوجد مستو (P) وحيد يشمل (D) و (D') ثم أكتب معادلة ديكارتية لـــ (P) .

تقاطعات المستويات

44 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته

$$2x+y-z+1=0$$

والمستوي (P') الذي معادلته $-x+3y-2z+4=0$

1) بين أن المستويين متقاطعان

2) عين شعاع توجيه و نقطة من مستقيم تقاطعهما

45 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x+y-z=0$ والمستوي (P') الذي معادلته $2x-y-z-1=0$ عين شعاع توجيه لمستقيم تقاطعهما

46 نعتبر النقط $A(0;1;1)$ ، $B(1;0;0)$ ، $C(-1;2;1)$ و $D(0;1;2)$

بين أن النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي ثم عين معادلة ديكارتية لهذا المستوي

47 نعتبر النقط $A(-1;2;1)$ ، $B(1;-6;-1)$ و $C(2;2;2)$. بين أن النقط A ، B و C تعرّف مستويا يطلب تحديد تقاطعه مع المستوي (P) الذي معادلته $x-3y+z-4=0$.

48 1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم d تقاطع المستويين (P) و (p') اللذين معادلتاهما $x+y+z=0$ و $x-y+z-4=0$

2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P'') الذي يشمل $A(1;1;2)$ و العمودي على d .

49 بين أن المستويات الثلاثة (P) ، (P') و (P'') تشترك في نقطة وحيدة يطلب تعيينها

$(P): 2x+3y-z=-2$

$(P'): 5y-4z=1$

$(P''): z=1$

50 فسّر الجملة هندسيا ثم حلها

$$\begin{cases}4x+6y-12z=5\\6x+9y-18z=8\end{cases}$$

51 نعتبر الجملة التالية

$$\begin{cases}x+y=-1\\2x+y+2z=0\\4x+4y+z+3=0\end{cases}$$

1) باعتبار أن المعادلتين الأوليين هما معادلتا مستويين (P) و (P') يتقاطعان في مستقيم (D) يشمل النقطة $A(1;-2;0)$ و موجه بـ $\vec{u}(-2;2;1)$

2) تحقق أن (D) و المستوي (P'') الذي معادلته الثالثة في الجملة يتقاطعان و استنتج أن الجملة تقبل حلا وحيدا يطلب تعيينه .

52 نسمي (P) و (p') المستويين اللذين معادلتاهما $2x-y+5=0$ و $3x+y-z=0$

بين أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases}x=t\\y=2t+5 \quad t\in\mathbb{R}\\z=5t+5\end{cases}$$

53 حل الجمل التالية و فسّر النتائج هندسي

$$(1):\begin{cases}4x+2y+z=4\\4x-2y+z=-2\\4x-y=0,5\end{cases}$$

$$(2):\begin{cases}5x+3y+4z=-1\\2x+3y+z=-1\\x+y+z=1\end{cases}$$

$$(3):\begin{cases}x-y=0\\2x-2y+2z=2\\-x+y-z=1\end{cases}$$

$$(1):\begin{cases}3x+2y-z=5\\2x+3y+z=5\\3x+7y+4z=10\end{cases}$$

مسائل

54 نعرف في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة ذات المجهول z : $(E): z^3-12z^2+48z-128=0$

1) تحقق أن 8 حل للمعادلة ، استنتج الحلين الآخرين

2) $(o;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد و متجانس في المستوي الموجه (الوحدة $1cm$) . نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $a=2-2i\sqrt{3}$ ، $b=2+2i\sqrt{3}$ و $c=8$ على الترتيب .

a) أحسب طويلة و عمدة لـــ a و علم النقط A ، B و C

b) أحسب العدد المركب $q=\dfrac{a-c}{b-c}$ و عين طويلته و عمدة له . استنتج طبيعة المثلث ABC

c) عين D مرجح الجملة $\{(A;|a|);(B;|b|);(C;|c|)\}$ علم D .

d) عين (T) مجموعة النقط M حيث

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$

أنشئ (T) .

55 نعتبر المكعب ABCDEFGH و الذي حرفه 1 .
a عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر النقطة M من نصف المستقيم [AE] المعرف كما يلي $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$

1) عين حجم رباعي الوجوه ABDM بدلالة a

2) لتكن K مرجح الجملة $\{(M;a^2);(B;1);(D;1)\}$

a) عبر عن $\overrightarrow{BK}$ بدلالة $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BD}$

b) أحسب $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MB}=0$

c) بين أن : $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB}=0$

d) بين أن : K هو ملتقى ارتفاعات المثلث BDM

3) أثبت المساوتين : $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB}=0$ و $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD}=0$
ماذا تستنتج ؟

4) a) بين أن المثلث BDM متساوي الساقين وأن مساحته $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ وحدة مساحة

b) عين العدد a حتى تكون مساحة BDM تساوي 1 وحدة مساحة . أحسب الطول AK في هذه الحالة

56 الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر مجموعة النقط من الفضاء و التي نرمز لها بالرمز (p_m) و احداثياتها (x ; y ; z) تحقق $(3-m)x+4y-(1+2m)z-5=0$ مع m عدد حقيقي .

1) بين أنه من أجل كل قيم m الحقيقية فإن (p_m) مستوٍ

2) عين نقطة و شعاع توجيه للمستقيم (D) تقاطع (p_0) و (p_1)

3) بين أن (D) محتواة في كل المستويات (p_m)

57 الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط A(3 ; -2 ; 2) ، B(6 ; 1 ; 5) ، C(6 ; -2 ; - 1)

I) 1) بين أن المثلث ABC قائم

2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته x + y + z – 3 = 0 بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3) ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل A . أكتب معادلة ديكارتية لـ (P')

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

II) 1) لتكن D النقطة ذات الاحداثيات (0 ؛ 4 ؛ -1) ، بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (ABC)

2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC

3) بين أن قيس الزاوية $B\widehat{D}A$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان

4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC

ب) استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC)

58 الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نريد تعيين المستويات التي تشمل المستقيم d المعرف بالجملة التالية $\begin{cases}2x+y+1=0\\ x+2z-3=0\end{cases}$ بحيث تكون هذه المستويات تمس سطح الكرة S التي مركزها A(0 ; 4 ;0) و نصف قطرها $\sqrt{5}$

1) بين أن المستوي (P) الذي معادلته x + 2 z – 3 = 0 لا يمس S .

2) نعتبر المستويات (P_a) : 2x+y+1+a(x+2z-3) = 0
لاحظ أن d محتواة في (P_a) من أجل كل قيم a الحقيقية
[باستعمال برمجية مناسبة عرّف A ، عرّف المتغير العددي a في مجال ، المستقيم d و المستويات (P_a)] ثم عرّف مستقيم تقاطع (P_a) مع (XOY) ثم اختر النمط TRACE و عاين أن (P_a) يشمل كل المستويات التي تحو d عدا واحدا . ملهو ؟
انشئ دائرة تقاطع (P_a) مع S ثم خمّن قيم a التي تعطي المستويات (P_a) التي تمس S

3) أحسب بعد A عن (P_a) ثم عين قيم a حتى يكون (P_a) مماسا لـ S

اختيار من متعدد

S(1 ; -2 ; 0) نقطة ،

(P) مستو معادلته **x + y – 3 z + 4 = 0**

جواب واحد فقط صحيح

59 المستقيم (D) الذي يشمل S و يعامد (P) ذو تمثيل وسيطي

$$(a):\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=-3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(b):\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(c):\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(d):\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

60 إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (P) مع (D) هي

a) $(-4;0;0)$ b) $\left(\frac{6}{5};-\frac{9}{5};-\frac{3}{5}\right)$

c) $\left(\frac{7}{9};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ d) $\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)$

61 بعد S من (P) هو :

1) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ 2) $\frac{3}{\sqrt{11}}$

3) $\frac{9}{\sqrt{11}}$ 4) $\frac{9}{11}$

62 نعتبر سطح الكرة الذي مركزه S و نصف قطره 3 .

تقاطع السطح مع (P) هو :

a) النقطة I(1 ; - 5 ; 0)

b) الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $3\sqrt{\frac{10}{11}}$

c) الدائرة التي مركزها S و نصف قطرها 2

d) الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها $3\frac{\sqrt{10}}{11}$

أصحيح أم خطأ ؟

63 (p) ، (Q) و (R) ثلاث مستويات من الفضاء .

(D) و (D') مستقيمان حيث تقاطع (D) مع (P) مجموعة خالية

1) إذا كان تقاطع (P) و (Q) غير خال وتقاطع (Q) و (R) غير خال فإن تقاطع (P) و (Q) و (R) غير خال .

2) إذا كان تقاطع (P) و (Q) و (R) غير خال فإن تقاطع (P) و (Q) هو تقاطع (Q) و (R)

3) تقاطع (P) و (Q) هو تقاطع (Q) و (R) فإن (P) و (Q) و (R) مستقيم .

4) إذا كان تقاطع (D') و (P) غير خال فإن تقاطع (D) و (D') غير خال

5) إذا كان تقاطع (D) و (D') غير خال فإن تقاطع (D') و (P) غير خال

6) إذا كان تقاطع (P) ، (Q) و (R) نقطة فإن تقاطع (P) و (Q) مستقيم .

64 1) النقطة A(7 ; -2 ; 1) تنتمي الى المستقيم (d) الذي تمثيله

$$\begin{cases} x=4+3t \\ y=1-3t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$$

2) مجموعة النقط من الفضاء التي احداثياتها تحقق 2 x – y + 3 = 0 هي مستقيم .

3) مجموعة النقط من الفضاء ذات التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=1+3\cos t \\ y=-1+2\cos t \qquad t\in[0;®] \\ z=-1 \end{cases}$$

4) نعتبر النقطة A(- 1 ; 2 ; 1) و المستقيم (D) الذي يشمل O و شعاع توجيهه $\vec{u}(-5;3;-4)$

- يوجد مستقيم وحيد (Δ) يشمل A و عمودي على (Δ)