الجديد في الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

مجاناً

الجزء

حوليات البكالوريا

دار الشريفة

إعداد : أ . حمزة

الجديد في الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

جميع الشعب العلمية

حوليات البكالوريا

دار الشريفة

تأليف : أ . حمزة

مُختاراتٌ من بكالوريا جزائرية

تطابق تماما البرنامج الجديد لوزارة التربية

حوليات جزائرية

(دورة جوان 2008)

شعبة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 نقط)

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحول A إلى B ، ثم عين زاويته و نسبته.

2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي : $A_0=A$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1}=S(A_n)$ نرمز الى لاحقة A_n بالرمز z_n .

ا) انشئ في المستوي المركب النقط A_0 و A_1 و A_2

ب) برهن ان ، $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}$

ج) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقط A_n الى المستقيم (OA_1)

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من اجل كل عدد طبيعي n

ا) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدّها الأول u_0 و أساسها q .

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) احسب ، بدلالة n المجموع S_n حيث ، $S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

✓ الحل :

1) كتابة الركبة للتشابه S الذي مركزه O و يحول A إلى B تكون من الشكل ، $z'=az$ حيث a عدد مركب غير معدوم و ليس حقيقي و $|a|\neq 1$

بما انه يحول A إلى B فإن $z_B=az_A$ و منه

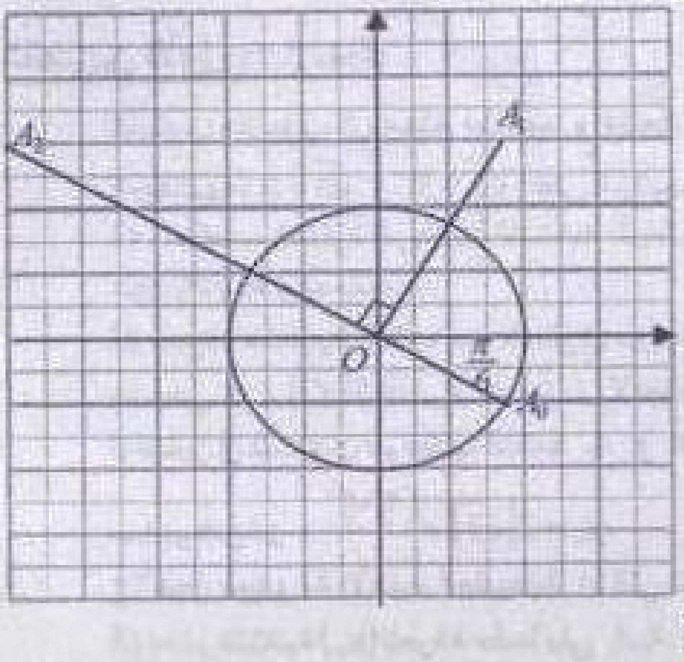
$$a=\frac{z_B}{z_A}=\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i}\times\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(3-3)+\left(\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right)}{3+1}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}i}{4}=\sqrt{3}i$$

اذن العبارة المركبة لهذا التشابه هي : $z'=\sqrt{3}iz$

و زاويته هي $\arg\left(\sqrt{3}i\right)=\frac{\pi}{2}$ و نسبته $\left|\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$

2) $A_0=A$ و $A_{n+1}=S\left(A_n\right)$

أ) $\begin{cases}|z_0|=2\\ \arg(z_0)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$ مع ان k عدد صحيح



اذن A_0 تقع على دائرة مركزها النقطة O و طول نصف قطرها 2

- لدينا $z_1=\sqrt{3}i\,z_0$ و منه A_1 هي صورة A_0 بالتشابه المباشر السابق، $\left(\vec{OA_0},\vec{OA_1}\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه

$OA_1=\sqrt{3}\,OA_0$

- لدينا $z_2=\sqrt{3}i\,z_1$ و منه A_2 هي صورة A_1 بالتشابه السابق

و $\left(\vec{OA_1},\vec{OA_2}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $OA_2=\sqrt{3}\,OA_1$

لاحظ ان النقط A_0 ، O ، A_2 تقع على استقامة واحدة

ب) اثبات ان $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

نبرهن على هذه المساواة بالتراجع على n

من اجل $n=0$ لدينا $z_0=2e^{\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

اذن $z_0=2\left(\sqrt{3}\right)^0 e^{\left(\frac{0\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

و بالتالي الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي، $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

و نبرهن ان الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ اي $z_{n+1}=2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}e^{i\left(\frac{(n+1)}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)}$

لدينا $A_{n+1}=S(A_n)$ هذا يعني:

$$\begin{aligned}z_{n+1}&=\sqrt{3}i\times 2\left(\sqrt{3}\right)^{n}e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}\\&=\left[\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right]\times 2\left(\sqrt{3}\right)^{n}e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}\\&=2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\times e^{i\frac{\pi}{2}+i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}\\&=2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\times e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}\\&=2\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\times e^{i\left((n+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}\end{aligned}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n الخاصية صحيحة.

ج) A_n تنتمي إلى (OA_1) يعني أنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث $\overrightarrow{OA_n}=\lambda\overrightarrow{OA_1}$

اي $z_n=\lambda z_1$.

$$\begin{aligned}z_n&=2\left(\sqrt{3}\right)^{n}e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}\\&=\left(2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}e^{i\left(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{3}}\\&=\left(2\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}\times\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}e^{i\left(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}\\&=z_1\times\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

حتى يكون $\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}$ حقيقي يجب ان يكون $(n-1)\frac{\pi}{2}=k\pi$ مع $k\in N$

إذن $\frac{n-1}{2}=k$ و بالتالي $n-1=2k$

إذن $n=2k+1$ مع $k\in N$

و عليه فالأعداد الطبيعية المطلوبة هي الأعداد الفردية

3) $u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$

أ)

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=A_{n+1}A_{n+2}\\&=\left|z_{n+2}-z_{n+1}\right|\\&=\left|\sqrt{3}\,iz_{n+1}-\sqrt{3}\,iz_n\right|\\&=\left|\sqrt{3}i\right|\left|z_{n+1}-z_n\right|\\&=\sqrt{3}\,A_nA_{n+1}\\&=\sqrt{3}\,u_n\end{aligned}$$

$u_0 = A_0A_1 = |z_1 - z_0|$

$= \left|\sqrt{3}\, iz_0 - z_0\right|$

$= \left|\sqrt{3}\, i - 1\right|\left|z_0\right|$

$= \sqrt{3+1} \times 2 = 4$

و منه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \sqrt{3}$ و حدها الأول

ب) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $u_n = u_0 \times q^n$ إذن ، $u_n = 4\times\left(\sqrt{3}\right)^n$

ج) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

$$= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= 4\times\frac{1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\sqrt{3}\right)}$$

بما أن $\sqrt{3}\rangle 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} = +\infty$ و منه

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} = -\infty$$

إذن ، $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

لأن ، $1-\sqrt{3}\langle 0$

التمرين الثاني : (4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

لتكن النقط $A(0,2,1)$ و $B(-1,1,-3)$ و $C(1,0,-1)$

1) أكتب العبارة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C و تشمل النقطة A

2) ليكن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي ،

$$\begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases}$$ حيث λ عدد حقيقي.

أ) أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C و يعامد المستقيم (D)

ب) احسب المسافة بين النقطة C و المستقيم (D)

ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) و سطح الكرة S ؟

✓ **الحل** :

1) كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S ،

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من S إذن $(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = R^2$

حيث $R=CA$

$$CA=\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2}$$
$$=\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2+(1+1)^2}$$
$$=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$$

إذن معادلة S هي $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$

2)

$$(D)\ :\ \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases} ,\lambda\in\Re$$

أ) بما أن المستوي (P) يعامد (D) فإن ناظم (P) هو شعاع توجيه (D) فإذا رمزنا إلى ناظم (P) بـ $\vec{n}$ فيكون $\vec{n}(-1,2,2)$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (P) إذن $\vec{CM}\perp\vec{n}$ و عليه، $\vec{CM}.\vec{n}=0$

$$\vec{CM}.\vec{n}=(x-1,y,z+1)(-1,2,2)$$
$$=-x+1+2y+2z+2$$
$$=-x+2y+2z+3$$

إذن معادلة (P) هي، $-x+2y+2z+3=0$

ب) المسافة بين النقطة C و (D) هي الطول CH حيث H هي نقطة تقاطع (D) مع (P)

- تعيين احداثيات النقطة H،

نرمز بـ (x,y,z) إلى احداثيات H إذن تحقق معادلة (D) و معادلة (P) أي،

$$\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \\ -x+2y+2z+3=0 \end{cases}$$

نعوض x و y و z في معادلة (P) نجد،

$$1+\lambda+2+4\lambda-6+4\lambda+3=0$$

أي، $9\lambda+4=0$ و منه $\lambda=\frac{-4}{9}$

إذن

$$\begin{cases} x=-1+\frac{4}{9}=-\frac{5}{9} \\ y=1-2\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9} \\ z=-3-2\times\frac{4}{9}=\frac{-35}{9} \end{cases}$$

و عليه $H\left(\frac{-5}{9},\frac{1}{9},\frac{-35}{9}\right)$

$$CH=\sqrt{\left(\frac{-5}{9}-1\right)^2+\left(\frac{1}{9}-0\right)^2+\left(\frac{-35}{9}+1\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{26}{9}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{9}\sqrt{14^2+1^2+26^2}\ =\frac{1}{9}\sqrt{196+1+676}$$
$$=\frac{1}{9}\sqrt{873}=\sqrt{\frac{97}{9}}$$

التمرين الثالث : (5 نقط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x-21y=78$

1) أ) بين ان (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب) اثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv5[7]$

استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ) ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7.

ب) عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $5^x+5^y\equiv3[7]$

✓ الحل :

1) أ) إثبات ان (E) تقبل حلولا

بما ان $PGCD(3,21)=3$ و 3 يقسم 78 فإن المعادلة $3x-21y=78$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب) نفرض ان الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (E)

إذن ، $3x-21y=78$

بما ان $21\equiv0[7]$ فإن $21y\equiv0[7]$

$78\equiv1[7]$

و عليه $3x\equiv1[7]$ و بالضرب في 5 نجد :

$15x\equiv5[7]$ و بما ان $15x\equiv x[7]$ فإن الموافقة $15x\equiv5[7]$ تصبح ، $x\equiv5[7]$.

2) أ) تعيين بواقي القسمة الاقليدية لـ 5^n على 7

$5^0\equiv1[7]$ ، $5^1\equiv5[7]$ ، $5^2\equiv4[7]$ ، $5^3\equiv6[7]$ ، $5^4\equiv2[7]$ ، $5^5\equiv3[7]$ ، $5^6\equiv1[7]$

من اجل كل عدد طبيعي n يوجد عدد طبيعي k بحيث

$n=6k+5$ حيث $0\le r\le5$

- $5^6\equiv1[7]$ و منه $5^{6k}\equiv1[7]$

$\begin{cases}5^{6k}\equiv1[7]\\5^r\equiv3^r[7]\end{cases}$ و منه ينتج $5^{6k+r}\equiv5^r[7]$

اي ، $5^n \equiv 5^r[7]$

هذا يعني أن باقي قسمة 5^n على 7 هو نفسه باقي قسمة 5^r على 7 من اجل كل عدد طبيعي n

- من اجل $n=6k$ ، باقي قسمة 5^n على 7 هو 1
- من اجل $n=6k+1$ ، باقي قسمة 5^n على 7 هو 5
- من اجل $n=6k+2$ ، باقي قسمة 5^n على 7 هو 4
- من اجل $n=6k+3$ ، باقي قسمة 5^n على 7 هو 6
- من اجل $n=6k+4$ ، باقي قسمة 5^n على 7 هو 2
- من اجل $n=6k+5$ ، باقي قسمة 5^n على 7 هو 3

ب) تعين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ بحيث $5^x+5^y \equiv 3[7]$

$x=6k+r$ و $y=6k'+r'$

$0 \le r \le 5$ و $0 \le r' \le 5$

$5^x+5^y \equiv 5^r+5^{r'}[7]$

r' \ r	0	1	2	3	4	5
0	$5^r+5^{r'} \equiv 2[7]$	6	5	0	3	4
1	6	3	2	4	0	1
2	5	2	1	3	6	0
3	0	4	3	5	1	2
4	3	0	6	1	4	5
5	4	1	0	2	5	6

إذن الثنائيات $(r\,,r')$ بحيث $5^r+5^{r'} \equiv 3[7]$ هي $(4,0)$ ، $(1,1)$ ، $(3,2)$ ، $(2,3)$ ، $(0,4)$

و عليه الثنائيات (x,y) هي :

$(6k+4\,,6k')$ ، $(6k+1\,,6k'+1)$ ، $(6k+4\,,6k')$ ، $(6k+3\,,6k'+2)$

$(6k+2\,,6k'+3)$ ، $(6k\,,6k'+4)$ مع $(k\,,k')$ تنتمي الى $\mathbb{N}^2$

التمرين الرابع: (6 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(الوحدة على المحورين $2\,cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و فسر النتيجة هندسيا.

- ادرس تغيرات الدالة f
- باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" ، انشئ المنحنى (C).
- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته ، $y=x$.

2) نعرف المتتالية (U_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ) باستعمال (D) و (C) ، مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 على محور الفواصل .
ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

3) أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $2 \le U_n \le 5$ و $U_{n+1} \rangle U_n$
ب) استنتج ان (U_n) متقاربة . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

✓ **الحل :**

$f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

1) حساب $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ،

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3+\sqrt{x-1}-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

لأن ، $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-1} = 0^+$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق من اليمين عند 1

- دراسة تغيرات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و لدينا ،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

من اجل كل $x \in]1,+\infty[$ لدينا ، $f'(x) \rangle 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$

لدينا ، $f(1) = 3$

جدول تغيرات الدالة f :

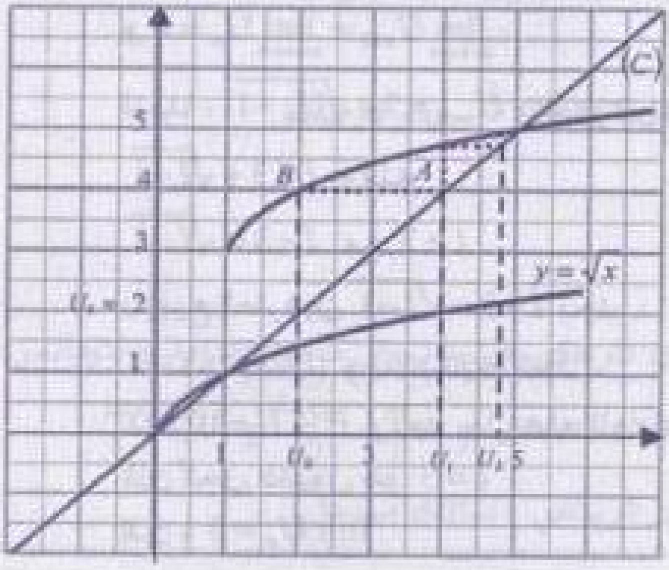
x	-1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	▨	$+$	
تغيرات $f(x)$		$3 \nearrow$	$+\infty$

- رسم المنحنى (C)

بوضع $U(x)=\sqrt{x}$

يكون $f(x)=3+U(x-1)$

إذن (C_f) هو صورة منحنى الدالة U بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{U}(1,3)$



2) $\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

ا) نرسم مستقيم معادلته $x=U_0$ يقطع المنحنى (C) في نقطة B ترتيبها U_1

من النقطة B نرسم مستقيم معادلته $y=U_1$ يقطع المستقيم (d) في $A(U_1,U_1)$

نسقط A على محور الفواصل نحصل على النقطة $(U_1,0)$

بنفس الكيفية نمثل U_2

ب) المتتالية (U_n) متزايدة تماما ومتقاربة لأن $U_0 \langle 5$ و (Δ) يقطع (C)

3) ا) اثبات ان $2\le U_n\le 5$ و $U_{n+1}\rangle U_n$

- نثبت اولا ، $2\le U_n\le 5$

- من اجل $n=0$ لدينا ، $u_0=2$ و $2\le 2\le 5$ إذن الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $2\le U_n\le 5$

و نبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اي $2\le U_{n+1}\le 5$

بما ان $2\le U_n\le 5$ و f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$ فإن $f(2)\le f(U_n)\le f(5)$

و لدينا ، $f(2)=4$ و $f(5)=5$

إذن ، $4\le f(U_n)\le 5$ اي $4\le U_{n+1}\le 5$

بما ان $[4,5]\subset[2,5]$ فإن $2\le U_n\le 5$

و عليه فالخاصية صحيحة من اجل $n+1$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n الخاصية صحيحة

- نثبت صحة $U_{n+1}\rangle U_n$

- من اجل $n=0$ لدينا ، $u_0=2$ و $u_1=4$ و $4\rangle 2$ إذن الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $U_{n+1}\rangle U_n$

و نبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اي $U_{n+2}\rangle U_{n+1}$

لدينا ، $U_{n+1}\rangle U_n$ و f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$

إذن ، $f(U_{n+1})\rangle f(U_n)$ اي $U_{n+2}\rangle U_{n+1}$

و عليه فالخاصية صحيحة من اجل $n+1$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n الخاصية صحيحة

ب) بما ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ 5 فهي متقاربة

و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

لدينا ، $U_{n+1} = 3+\sqrt{U_n - 1}$ بالمرور إلى النهاية نجد ،

$l = 3+\sqrt{l-1}$ ومنه

$l-3=\sqrt{l-1}$ مع $l \geq 3$

بتربيع الطرفين $l-3=\sqrt{l-1}$ نجد ،

$(l-3)^2 = l-1$ و بالتبسيط نجد

$l^2-7l+10=0$ و بعد حل هذه المعادلة نجد $l=2$ و $l=5$ و بما ان $l \geq 3$

فإن الحل المقبول هو $l=5$

إذن ، $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 5$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (5 نقط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود المعرف كما يلي :

$$P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$$

1) بين انه إذا كان a جذر الكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له ايضا.

2) تحقق ان $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

4) اكتب الحلول على الشكل الأسي

5) لتكن A ، B ، C و D نقط من المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. و التي لاحقاتها على الترتيب : $1+i$ ، $-1+i$ و $\frac{-m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$

حيث m عدد حقيقي . عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا .

✓ **الحل :**

$$P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$$

1) a جذر لـ $P(z)$ يعني $P(a)=0$

اي $2a^4-2ia^3-a^2-2ia+2=0$

$$P\left(\frac{1}{a}\right)=2\left(\frac{1}{a}\right)^4-2i\left(\frac{1}{a}\right)^3-\left(\frac{1}{a}\right)^2-2i\left(\frac{1}{a}\right)+2=0$$

$$=\frac{2}{a^4}-\frac{2i}{a^3}-\frac{1}{a^2}-\frac{2i}{a}+2$$

$$=\frac{1}{a^4}\left[2-2ia-a^2-2ia^3+2a^4\right]$$

$$=\frac{1}{a^4}\times P(a)=\frac{1}{a^4}\times 0=0$$

إذن $\frac{1}{a}$ هو ايضا جذرا لـ $P(z)$

2) $P(1+i)=2(1+i)^4-2i(1+i)^3-(1+i)^2-2i(1+i)+2$

$$(1+i)^4=1+4i+6i^2+4i^3+i^4$$
$$=1+4i-6-4i+1$$
$$=-4$$

$$(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3$$
$$=1+3i-3-i$$
$$=-2+2i$$

$$\begin{aligned}(1+i)^2&=1+2i+i^2\\&=1+2i-1\\&=2i\end{aligned}$$

اذن

$$\begin{aligned}P(1+i)&=2(-4)-2i(-2+2i)-2i-2i+y\\&=-8+4i+4-4i+y\\&=(8-8)+(4i-4i)=0\end{aligned}$$

3) حل في $\mathbb{C}$ للعادلة $P(z)=0$

بما ان $1+i$ حلا لـ $P(z)=0$ فإن $\frac{1}{1+i}$ هو حلا ايضا لهذه المعادلة

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1+i}\times\frac{(1-i)}{1-i}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$P(z)$ يقبل القسمة على $z^2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)z+1$

	$2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$	$z^2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)z+1$
بالطرح	$2z^4-(3+i)z^3+2z^2$	$2z^2+(3-i)z+2$
	$(3-i)z^3-3z^2-2iz+2$	
بالطرح	$(3-i)z^3-5z^2+(3-i)z$	
	$2z^2+(-3-i)z+2$	
بالطرح	$2z^2-(3+i)z+2$	
	0	

لان ، $P(z)=\left[z^2-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+1\right][2z^2+(3-i)z+2]$

$P(z)=0$ تعني ،

$$\begin{cases}2z^2+(3-i)z+2=0\\z^2-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+1=0\end{cases}$$

نحل المعادلة $2z^2+(3-i)z+2=0$ ....(*)

$$\begin{aligned}\Delta&=(3-i)^2-4(2)(2)\\&=9-6i-1-16\quad=-8-16i\end{aligned}$$

ليكن $\sigma=x+iy$ جذر تربيعي لـ Δ اذن $\sigma^2=\Delta$

$\sigma^2=\Delta$ تكافئ

$$\begin{cases}x^2-y^2=-8\text{.......}(1)\\2xy=-6\text{...............}(2)\\x^2+y^2=10\text{.........}(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد ، $2x^2=2$ إذن

$x^2=1$ و منه ، $x=1$ او $x=-1$

- من اجل $x=1$ نجد $y=-3$

- من اجل $x=-1$ نجد $y=3$

إذن، $\sigma=1-3i$ او $\sigma=-1+3i$

و عليه المعادلة $(*)$ لها حلان هما ،

$$z=\frac{-3+i+1-3i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z=\frac{-3+i-1+3i}{4}=-1+i$$

إذن فالمعادلة $P(z)=0$ لها اربعة حلول هي $1+i$ ، $-1+i$ ، $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

4) كتابة الحلول على الشكل الأسي

- بالنسبة الى $1+i$ ،

$$|1+i|=\sqrt{2}$$

نضع $\arg(1+i)=\theta$ تحقق ،

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

و منه $\theta=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

اذن $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- بالنسبة الى $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ ،

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع $\arg\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\theta$ تحقق ،

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

إذن ، $\theta=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن، $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

- بالنسبة إلى $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ ،

$$\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع θ $\arg\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\theta$ تحقق ،

$$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

و منه $\theta\equiv 5\frac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن، $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i5\frac{\pi}{4}}$

- بالنسبة إلى $-1+i$ ،

$$|-1+i|=\sqrt{2}$$

نضع θ $\arg(-1+i)=\theta$ تحقق ،

$$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

و منه $\theta\equiv 3\frac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن $-1+i=\sqrt{2}e^{i3\frac{\pi}{4}}$

5) $ABCD$ مربع يعني $AB=AD=BC=DC$ و $\vec{AB}.\vec{AD}=0$

- $AB=2$ و $AD=\sqrt{\frac{m^2}{2}+2}$

$AB=AD$ يكافئ $\frac{m^2}{2}+2=4$ و منه $\frac{m^2}{2}=2$

إذن $m^2=4$ و بالتالي $m=2$ أو $m=-2$

- $\vec{AB}\binom{-2}{0}$ و $\vec{AD}\begin{pmatrix}\frac{m}{2}-1\\ \frac{-m}{2}-1\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\times\vec{AD}=0$ يكافئ $-2\left(\frac{m}{2}-1\right)=0$ يكافئ $m=2$

إذن قيمة m المطلوبة هي 2

التمرين الثاني : (4 نقط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1) احسب U_1 و U_2 و U_3.

2) (V_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب، $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع ان (V_n) متتالية ثابتة.
- استنتج عبارة U_n بدلالة n
- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3) (W_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب، $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث ، $S = W_0 + W_1 + W_2 + ... + W_n$.

✓ الحل :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1 \end{cases}$$

1) $U_1 = \frac{2}{3}U_0 + 1 = \frac{2}{3}\times 2 + 1 = \frac{7}{3}$

$U_2 = \frac{2}{3}U_1 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{7}{3} + 1 = \frac{23}{9}$

$U_3 = \frac{2}{3}U_2 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{23}{9} + 1 = \frac{73}{27}$

2) $V_{n+1} = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- إثبات ان (V_n) ثابتة،

(V_n) ثابتة تعني من اجل كل n ، $V_{n+1} - V_n = 0$

- من اجل $n = 0$ ،

$$V_1 - V_0 = \left(U_1 + \frac{2}{3}\right) - \left(U_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0\right)$$
$$= \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\right) - (2+1)$$
$$= \frac{9}{3} - 3 = 0$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n اي $V_{n+1} - V_n = 0$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ اي $V_{n+2} - V_{n+1} = 0$

$$V_{n+2}-V_{n+1}=\left[U_{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]-\left[U_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$
$$=\left[\frac{2}{3}U_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]-\left[\frac{2}{3}U_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$
$$=\frac{2}{3}\left[U_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-\frac{2}{3}\left[U_{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$$
$$=\frac{2}{3}V_{n+1}-\frac{2}{3}V_{n}=\frac{2}{3}(V_{n+1}+V_{n})$$
$$=\frac{2}{3}\times 0=0$$

- استنتاج عبارة U_n بدلالة n ،
بما أن (V_n) ثابتة فإن من اجل كل عدد طبيعي n ،
$V_n=V_0=3$

اذن $U_n=V_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n=V_0-\left(\frac{2}{3}\right)^n=3-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ،

بما ان $0\langle\frac{2}{3}\langle 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=3$

3) $W_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- $\frac{2}{3}n=L_n$ حد عام لمتتالية حسابية اساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول 0
- $\left(\frac{2}{3}\right)^n=K_n$ حد عام لمتتالية هندسية اساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول 1
اذن يمكن وضع ، $W_n=L_n-K_n$

$$S=(L_0-K_0)_0+(L_1-K_1)_1+\dots+(L_n-K_n)_n$$
$$=(L_0+L_1+\dots+L_n)-(K_0+K_1+\dots+K_n)$$
$$=\left(\frac{n+1}{2}\right)(L_0+L_n)-K_0\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(0+\frac{2}{3}n\right)-\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{n(n+1)}{3}-3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

التمرين الثالث : (4 نقط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=2+\frac{1}{2}\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases}\ ,(\lambda\in\mathbb{R}) \quad \text{و} \quad \begin{cases}x=6+\alpha\\ y=1-2\alpha\\ z=5+\alpha\end{cases}\ ,(\alpha\in\mathbb{R})$$ على الترتيب.

1) بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2) M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ')

أ) عين احداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ')

ب) أحسب الطول MN

3) عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ').

4) أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ؟

✓ الحل :

$$(\Delta)\ ,\ \begin{cases}x=3+\lambda\\ y=2+\frac{1}{2}\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases} \qquad (\Delta')\ ,\ \begin{cases}x=6+\alpha\\ y=1-2\alpha\\ z=5+\alpha\end{cases}$$

1) شعاع توجيه (Δ) هو $\vec{v}\left(1,\frac{1}{2},-2\right)$ و شعاع توجيه (Δ') هو $\vec{u}(1,-2,1)$

$\frac{1}{1}\neq\frac{\frac{1}{2}}{-2}\neq\frac{-2}{1}$ و بالتالي $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا و عليه (Δ) و (Δ') غير متوازيان

إذن إما متقاطعان و بالتالي من نفسالمستوي او غير متقاطعان و بالتالي ليسا من نفس المستوي

وعليه نبحث عن نقط تقاطعهما ان وجدت

نفرض M نقطة من $(\Delta)\cap(\Delta')$

إذن :

$$\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=2+\frac{1}{2}\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x=6+\alpha\\ y=1-2\alpha\\ z=5+\alpha\end{cases}$$

و منه ينتج :
$$(I)\text{.........}\begin{cases}6+\alpha=3+\lambda\text{.......}(1)\\ 1-2\alpha=2+\frac{1}{2}\lambda\text{.......}(2)\\ 5+\alpha=-2-2\lambda\text{..........}(3)\end{cases}$$

من (1) نجد $\alpha=\lambda-3$ ....(4)

نعوض α في (2) نجد ، $1-2\lambda+6=2+\frac{1}{2}\lambda$

و منه نستنتج ، $5-\frac{5}{2}\lambda=0$ اذن $\lambda=2$

نعوض λ في (4) نجد ، $\alpha=2-3=-1$

اذن $\alpha=-1$

بتعويض قيمة α و λ في (3) نجد ،

$5-1=-2-2(2)$ اي $4=-6$ و هذا خطأ

اذن الثنائية $(\alpha,\lambda)=(-1,2)$ ليست حلا للجملة (I) و عليه فالمستقيمان غير متقاطعان اذن فهما من مستويين مختلفين.

2) أ)

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}3+\lambda-6-\alpha\\2+\frac{1}{2}\lambda-1+2\alpha\\-2-2\lambda-5-\alpha\end{pmatrix} \text{ اي } \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\lambda-\alpha-3\\\frac{1}{2}\lambda+2\alpha+1\\-2\lambda-\alpha-7\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MN}\perp\vec{v}$ يعني $\lambda-\alpha-3+\frac{1}{4}\lambda+\alpha+\frac{1}{2}+4\lambda+2\alpha+14=0$

بالتبسيط نجد ،

$\frac{21}{4}\lambda+2\alpha+\frac{23}{2}=0$ ....(I)

$\overrightarrow{MN}\perp\vec{u}$ يعني $\lambda-\alpha-3-\lambda-4\alpha-2-2\lambda-\alpha-7=0$

بالتبسيط نجد ،

$-2\lambda-6\alpha-12=0$ ....(II)

اذن تحصلنا على الجملة

$$\begin{cases}21\lambda+8\alpha+46=0 \text{.......(I)}\\-2\lambda-6\alpha-12=0 \text{.........(II)}\end{cases}$$

بضرب المعادلة (I) في 3 و المعادلة (II) في 4 نجد

$$\begin{cases}63\lambda+24\alpha+138=0\\-8\lambda-24\alpha-48=0\end{cases}$$

و بالجمع نجد

$55\lambda+90=0$ و منه $\lambda=\frac{-90}{55}=\frac{-18}{11}$

نعوض قيمة λ (I) نجد $\alpha=\frac{-16}{11}$

اذن $(\alpha,\lambda)=\left(-\frac{16}{11},-\frac{18}{11}\right)$

و عليه احداثيات M هي :

$$\begin{cases} x=3-\frac{18}{11}=\frac{15}{11} \\ y=2-\frac{9}{11}=\frac{13}{11} \\ z=-2+\frac{36}{11}=\frac{14}{11} \end{cases}$$

اذن $M\left(\frac{15}{11},\frac{13}{11},\frac{14}{11}\right)$

- احداثيات N هي :

$$\begin{cases} x=6-\frac{16}{11}=\frac{50}{11} \\ y=1-2\left(\frac{-16}{11}\right)=\frac{43}{11} \\ z=5+\left(\frac{-16}{11}\right)=\frac{39}{11} \end{cases}$$

اذن $N\left(\frac{50}{11},\frac{43}{11},\frac{39}{11}\right)$

ب)

$$MN=\sqrt{\left(\frac{15}{11}\right)^2+\left(\frac{13}{11}\right)^2+\left(\frac{14}{11}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{11}\sqrt{35^2+30^2+25^2}$$
$$=\frac{1}{11}\sqrt{1225+900+625}$$
$$=\frac{1}{11}\sqrt{2750}$$
$$=5\sqrt{\frac{110}{121}}=5\sqrt{\frac{10}{11}}$$

3) (P) : $ax+by+cz+d=0$

(P) يوازي (Δ') يعني ناظم (P) عمودي على شعاع توجيه (Δ')

اي $(a,b,c)(1,-2,1)=0$ و منه نستنتج :

$a-2b+c=0$.......(1)

(Δ) محتوى في (P) يعني انه من اجل كل $\lambda\in\mathbb{R}$

احداثيات نقطة من (Δ) تحقق معادلة المستوي و عليه :

من اجل كل $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$a(3+\lambda)+b\left(2+\frac{1}{2}\lambda\right)+c(-2-2\lambda)+d=0.$$

بالتبسيط نجد :

$$(3a+2b-2c+d)+\left(a+\frac{1}{2}b-2c\right)\lambda=0$$

ومنه نستنتج :

$$\begin{cases}a+\frac{1}{2}b-2c=0\\3a+2b-2c+d=0\end{cases}$$

إذن تحصلنا على الجملة

$$\begin{cases}a-2b+c=0..............(1)\\2a+b-4c=0..............(2)\\3a+2b-2c+d=0........(3)\end{cases}$$

من (1) نجد $a=2b-c$

نعوض a في (2) نجد $b=\frac{6}{5}c$ و منه $a=\frac{7}{5}c$

نعوض a و b في (3) نجد $d=\frac{-23}{5}c$

إذن معادلة المستوي المطلوبة هي $\frac{7}{5}cx+\frac{6}{5}cy+cz-\frac{23}{5}c=0$

و بالقسمة على $\frac{c}{5}$ الغير معدوم نجد : $7x+6y+5z-23=0$ ، (P)

4) حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P)

لتكن $K(x,y,z)$ نقطة كيفية من (Δ')

المسافة بين K و المستوي (P) هي

$$KH=\frac{|7(6+x)+6(1-2\alpha)+5(5+\alpha)-23|}{\sqrt{7^2+6^2+5^2}}$$

$$=\frac{|7\alpha-12\alpha+5\alpha+50|}{\sqrt{110}}$$

$$=\frac{50}{\sqrt{110}}=\sqrt{\frac{2500}{110}}=\sqrt{\frac{250}{11}}=5\sqrt{\frac{10}{11}}$$

نلاحظ إن المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) هي الطول MN

التمرين الرابع: (7 نقط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) بين ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω و اكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .

- اثبت ان ω مركز تناظر للمنحنى C_f

3) احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$

- استنتج ان C_f يقبل مستقيمين متقاربين بطلب إعطاء معادلة كل منهما .

4) احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f و مستقيميه المقاربين.

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=-x+3-\frac{4}{e^x+1}$ و C_g منحنى الدالة g

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=f(-x)$

- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f الى C_g .

2) أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g)

✓ الحل :

1) $f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$

دراسة تغيرات الدالة f

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{4}{e^x+1}\right)=-\infty$

لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x+1=1$ و $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{4}{e^x+1}\right)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$f'(x)=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ يكافئ $e^x-1=0$ يكافئ $x=0$

من اجل كل $x\neq 0$ ، $f'(x)\rangle 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		↗		$+\infty$

2) بما ان $f'(x)$ ينعدم عند $x=0$ و لا يغير اشارته في جوار الصفر فإن النقطة $(0, f(0))$ هي نقطة انعطاف

لدينا $f(0)=1$ إذن $\omega(0,1)$

- معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ω

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=0(x-0)+1=1$$

إذن معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ω هي $y=1$

- اثبات ان ω مركز تناظر للمنحنى C_f

$\omega(0,1)$ مركز تناظر لـ (C_f) يكافئ

$$f(2\times 0-x)=2-f(x)$$

$$f(-x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}=-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}......(1)$$

$$2-f(x)=2-x+1-\frac{4}{e^x+1}=3-x-\frac{4}{e^x+1}$$
$$=-x-1+4-\frac{4}{e^x+1}$$
$$=-x-1+\frac{4e^x+4-4}{e^x+1}$$
$$=-x-1+\frac{4e^x}{e^x+1}.........(2)$$

من (1) و (2) نجد $f(2\times 0-x)=2-f(x)$

اذن $\omega(0,1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x-3\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-4+\frac{4}{e^x+1}\right)=0$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1$

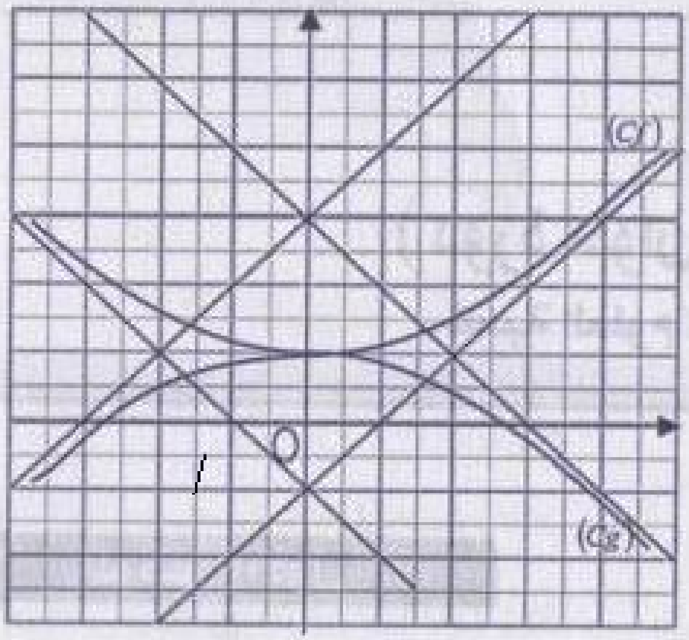
من النهايتين السابقتين نستنتج ان (C_f) له مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x-1$ بجوار $(+\infty)$ و مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+3$ بجوار $(-\infty)$

4) $f(-2,77)\approx-5,86$ و $f(-2,76)\approx1,90$

الدالة f متزايدة تماما على $[-2,77\,,-2,76]$ و $f(-2,76)\times f(-2,77)\langle 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من $]-2,77\,,-2,76[$ بحيث $f(x_0)=0$

و هذا يعني أن للمنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الاحداثيات $(x_0,0)$



- $f(1)=\frac{4}{e+1}\approx 1{,}075$

$f(-1)=-2+\frac{4}{e^{-1}+1}\approx 0{,}924$

القيمة المدورة لـ $f(1)$ إلى 10^{-2} هي $1{,}08$

و القيمة المدورة لـ $f(-1)$ إلى 10^{-2} هي $0{,}90$

الرسم :

II) $g(x)=-x+3-\frac{4}{e^{x}+1}$

1) إثبات أن $g(x)=f(-x)$

$$\begin{aligned}
f(-x)&=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}\\
&=-x-1+\frac{4e^{x}}{1+e^{x}}\\
&=-x-1+\frac{4e^{x}+4-4}{1+e^{x}}\\
&=-x-1+\frac{4(e^{x}+1)-4}{e^{x}+1}\\
&=-x-1+4-\frac{4}{e^{x}+1}\\
&=-x+3-\frac{4}{e^{x}+1}=g(x)
\end{aligned}$$

- استنتاج التحويل النقطي الذي يحول C_f إلى C_g

$\begin{cases} y'=y \\ x'=-x \end{cases}$ هذا هو التحويل الذي يحول C_f إلى C_g

و هو تناظري محوري بالنسبة إلى المستقيم $x=0$.

2) (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى التناظر الذي محوره المستقيم $x=0$

(دورة جوان 2008)

شعبة العلوم التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4.5 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي

2) المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. لتكن A ، B و C نقط من المستوي التي لاحقتها على الترتيب 1 ، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

ا) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن ان : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و ان $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 اعداد حقيقية

ب) أكتب Z على الشكل الأسي

ج) اكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج ان النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

✓ الحل :

1) حل المعادلة $z^2-(1+2i)z-1+i=0$

مميز هذه المعادلة هو :

$$\Delta=(1+2i)^2-4(-1+i)$$
$$=1+4i-4+4-4i=1$$

إذن المعادلة لها حلان هما

$$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i \qquad z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

- إثبات ان $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي،

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)(-i)}{i(-i)}=\frac{-i+1}{1}=1-i$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(1-i)=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$$

مع k عدد صحيح

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\frac{-\pi}{4}\times 2008+2k\pi$$

إذن $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=-502\pi+4016k\pi$

حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي يجب ان يكون $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=k'\pi$ مع

k' عدد صحيح

وبما ان $avg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=(-502+4016k)\pi$

$=k'\pi$

مع $k'=-502+4016k$ ،

إذن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي

2) $A(1)$ ، $B(z_1)$ ، $C(z_2)$ و $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

ا) لدينا ، $e^{i(\theta-\theta)}=e^{i\theta}\times e^{-i\theta}$ ....(1)

و لدينا من جهة أخرى ،

$e^{i(\theta-\theta)}=e^{i\times 0}=e^{0}=\cos 0+i\sin 0=1$ ....(2)

من (1) و (2) نجد ، $e^{i\theta}\times e^{-i\theta}=1$ و منه ينتج $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$

- لدينا ،

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\frac{1}{e^{i\theta_2}}$$
$$=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}$$
$$=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

ب) كتابة Z على الشكل الاسي ،

$$Z=\frac{1+i-1}{i-1}=\frac{i}{-1+i}$$

الكتابة الأسية للعدد i هي $e^{i\frac{\pi}{2}}$ و الكتابة الأسية للعدد $-1+i$ هي $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

اذن :

$$Z=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$Z=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)}$$

ج) كتابة Z على الشكل المثلثي :

$$\arg(Z)=\frac{-\pi}{4}+2k\pi \quad \text{و} \quad |Z|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

اذن $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

- لدينا $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$ و منه ينتج : $z_2-1=Z(z_1-1)$

اي : $z_2-1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)(z_1-1)$

اي : $z_2-z_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)(z_1-z_A)$

و منه نستنتج ان النقطة C ذات اللاحقة z_2 هي صورة النقطة B ذات اللاحقة z_1 بتشابه مباشر مركزه النقطة A و نسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و زاويته $\frac{-\pi}{4}$

التمرين الثاني : (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $x+2y-z+7=0$

و النقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$

1) تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$

2) أ) تحقق ان المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC) .

ب) احسب المسافة بين A و المستقيم (Δ)

3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,\alpha),(C,\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$ عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ)

✓ **الحل :**

(P) ، $x+2y-z+7=0$

$A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$

1) لاثبات أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة يجب أن نبين أن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\vec{AB}(1,2,-1)$ ، $\vec{AC}(-3,-2,1)$

نلاحظ أن $\frac{-2}{2}\neq\frac{-3}{1}\neq\frac{1}{-1}$ و بالتالي الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا و عليه فالنقاط A ، B و C ليست على استقامة واحدة

- تعيين معادلة للمستوي (ABC)

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ الشعاع الناظم لـ (ABC)

إذن $\vec{n}.\vec{AB}=0$ و $\vec{n}.\vec{AC}=0$

$\vec{n}.\vec{AB}=0$ تعني $a+2b-c=0$ ......(1)

$\vec{n}.\vec{AC}=0$ تعني $-3a-2b+c=0$ ......(2)

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد $-2a=0$ و منه $a=0$

نعوض قيمة a في (1) نجد $c=2b$

و بما أن (ABC) له معادلة من الشكل ، $ax+by+cz+d=0$ فإنها تصبح

$by+2bz+d=0$ و بالقسمة على b (لأن $\vec{n}\neq\vec{0}$) نجد $y+2z+\frac{d}{b}=0$

A نقطة من (ABC) يعني $0+2\times1+\frac{d}{b}=0$

و منه نجد $\frac{d}{b}=-2$

إذن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$

2) أ) (P) يعامد (ABC) تعني $\vec{n_P}\perp\vec{n_{(ABC)}}$

الشعاع الناظم لـ (P) هو $\vec{n_P}(1,2,-1)$ و

الشعاع الناظم لـ (ABC) هو $\vec{n_{(ABC)}}(0,1,2)$

$\vec{n_P}.\vec{n_{(ABC)}}=1\times0+2\times1+(-1)\times2=0$

إذن الشعاعان $\vec{n_P}$ و $\vec{n_{(ABC)}}$ متعامدان و عليه فالمستويان (P) و (ABC) متعامدان

- تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) حيث ، $(\Delta)=(P)\cap(ABC)$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Δ) إذن تنتمي إلى (P) و تنتمي إلى (ABC)

M تنتمي إلى (P) تعني ، $x+2y-z+7=0$ .....(1)

M تنتمي إلى (ABC) تعني ، $y+2z-2=0$ .....(2)

من (2) نجد $y=-2z+2$

نعوض عبارة y في (1) نجد $x+2(-2z+2)-7+7=0$

بالتبسيط نجد ، $x-5z+11=0$ و منه نجد $x=5z+11$

بوضع $z=\lambda$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$ يكون

$$\begin{cases} x=5\lambda+11 \\ y=-2\lambda+2 \text{.....(I)} \\ z=\lambda+0 \end{cases} \quad \text{مع } \lambda\in\mathbb{R}$$

الجملة (I) هي التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

ب) حساب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

لتكن M نقطة من (Δ)

المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) هي أصغر قيمة للطول AM

$$\begin{aligned} AM^2 &= (5\lambda+11-2)^2+(-2\lambda+2)^2+(\lambda-1)^2 \\ &= (5\lambda+9)^2+(2\lambda-2)^2+(\lambda-1)^2 \\ &= 25\lambda^2+90\lambda+81+4(\lambda^2-2\lambda+1)+(\lambda^2-2\lambda+1) \\ &= 25\lambda^2+90\lambda+81+5\lambda^2-10\lambda+5 \\ &= 30\lambda^2+80\lambda+86 \end{aligned}$$

نضع $f(\lambda)=AM^2$

AM أصغرية تكافئ AM^2 أصغرية

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$

و لدينا $f'(\lambda)=60\lambda+80$

و إشارتها مدونة في الجدول التالي ،

λ	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$f(\lambda)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{4}{3}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

أصغر قيمة لـ f هي $f\left(\frac{-4}{3}\right)$ و منه أصغر قيمة لـ AM هي $\sqrt{f\left(\frac{-4}{3}\right)}$

$$f\left(\frac{-4}{3}\right)=30\left(\frac{-4}{3}\right)^2+80\left(\frac{-4}{3}\right)+86 \quad =30\times\frac{16}{9}-\frac{320}{3}+86$$

$$=\frac{294}{9}=\frac{98}{3}$$

إذن المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) هي $\sqrt{\frac{98}{3}}$

3) احداثيات G هي :

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + \alpha x_B + \beta x_C}{1+\alpha+\beta} \\ y_G = \frac{y_A + \alpha y_B + \beta y_C}{1+\alpha+\beta} \\ z_G = \frac{z_A + \alpha z_B + \beta z_C}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$ بالتعويض نجد $$\begin{cases} x_G = \frac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta} \\ y_G = \frac{0+2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} \\ z_G = \frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

G تنتمي إلى (Δ) يعني أن G تنتمي إلى (ABC) و تنتمي إلى (P) و هذا يعني أن :

$$\begin{cases} \frac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{4\alpha-4\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{-1-2\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{7+7\alpha+7\beta}{1+\alpha+\beta} = 0 \\ \frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{2+4\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{-2-2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} = 0 \end{cases}$$ و منه ينتج:

بالتبسيط نجد: $$\begin{cases} 2+3\alpha-\beta+4\alpha-4\beta-1-2\beta+7+7\alpha+7\beta=0 \\ 2\alpha-2\beta+2+4\beta-2-2\alpha-2\beta=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14\alpha+8=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

و منه $\alpha = \frac{-8}{14} = \frac{-4}{7}$

التمرين الثالث : (04 نقط)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على I.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ تنتمي إلى I

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي :

$u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب) عين النهاية : $\lim_{n \to +\infty} u_n$

✓ **الحل :**

1) أ) إثبات أن f متزايدة تماما على I

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\{4\}-\Re$ فهي قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$f'(x)=\frac{(-x+4)-(-1)(x+2)}{(-x+4)^2}=\frac{6}{(-x+4)^2}$$

من اجل كل $x\in I$ ، $f'(x)\rangle 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على I

بما أن الدالة f متزايدة على I فانه من كل x من I يكون:

$$f(2)\geq f(x)\geq f(1)$$

$$f(2)=\frac{2+2}{-2+4}=2 \quad \text{و} \quad f(1)=\frac{1+2}{-1+4}=\frac{3}{3}=1$$

إذن $2\geq f(x)\geq 1$

و بالتالي $f(x)\in I$

2) $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) إثبات بالتراجع أن $u_n\in I$

- من اجل $n=0$ ، $u_0=\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}\in I$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي $u_n\in I$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اي $u_{n+1}\in I$

$u_n\in I$ تعني $1\leq u_n\leq 2$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على I فإن

$f(1)\leq f(u_n)\leq f(2)$ لكن $f(1)=1$ و $f(2)=2$ و $f(u_n)=u_{n+1}$

إذن $1\leq u_{n+1}\leq 2$ و هذا يعني إن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\in I$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2+u_n^2-4u_n}{-u_n+4}$$

$$=\frac{u_n^2-3u_n+2}{-u_n+4}=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$$

بما أن $1\leq u_n\leq 2$ فان $u_n-1\leq 0$ و $u_n-2\leq 0$ و $-u_n+4\rangle 0$

و عليه $\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}\geq 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة

بما أن (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 2 فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي l

3) أ) إثبات بالتراجع أن ، $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

من أجل $n=0$ لدينا ، $u_0=\dfrac{3}{2}=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي،

$$u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

$$u_{n+1}=\frac{u_n+2}{-u_n+4}=\frac{1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}+2}{-1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}+4}$$

$$=\frac{3+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}{3-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+4}{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+2}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و منه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) بما أن $\frac{3}{2}\rangle 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

التمرين الرابع: (07.5 نقط)

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :
$f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$
حيث a و b عددان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي الى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرف على المجال $]-2,+\infty[$ كالتالي :
$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$
و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.
أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا.(نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)
ب) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم انشئ جدول تغيراتها.
ج) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها.
د) أكتب معادلة المماس لمنحنى (C_g) عند النقطة I
هـ) ارسم (C_g)
و) H الدالة العددية المعرف على المجال $]-2,+\infty[$ كالتالي :
$H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$
استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرف على المجال $]-2,+\infty[$ كالتالي : $k(x)=g(x^2)$
باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها

✓ الحل :

I) $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$
- $A(-1,1)$ تنتمي الى (C_f) يعني $f(-1)=1$
$f(-1)=1$ تعني : $(-a+b)e+1=1$
تعني : $(-a+b)e=0$ و منه
$-a+b=0$ اي $a=b$
- معامل توجيه المماس عند A يساوي $-e$ يعني
$f'(-1)=-e$ الدالة قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$ و لدينا
$f'(x)=ae^{-x}-e^{-x}(ax+b)$
$=(a-ax-b)e^{-x}$

$f'(-1)=-e$ تعني $(a+a-b)e=-e$

و منه ينتج $2a-b=-1$.....(*)

نعوض عبارة a في (*) نجد ، $2b-b=-1$ و منه $b=-1$ و عليه $a=-1$

إذن $a=b=-1$

II) $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-xe^{-x}-e^{-x}+1\right]$

لدينا ، $\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^{X}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-e^{-x}=0$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

و هذا يعني أن (C_g) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $(+\infty)$

ب) دراسة تغيرات g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[-2,+\infty[$ و لدينا

$g'(x)=xe^{-x}$

$g'(x)=0$ تكافئ $x=0$

- إذا كان $x\in[-2,0[$ فإن $g'(x)<0$ و بالتالي g متناقصة تماما
- إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)>0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما،

و جدول تغيرات g هو

x	-2		0		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	
تغيرات g	$g(-2)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	1

و $g(0)=0$

$g(-2)=e^{-1}+1=\frac{1}{e}+1$

ج) الدالة g' قابلة للاشتقاق على $[-2,+\infty[$ و لدينا

$g''(x)=e^{-x}-e^{-x}x=(1-x)e^{-x}$

$g''(x)=0$ تكافئ $1-x=0$ تكافئ $x=1$

$g''(x)$ ينعدم عند $x=1$ مغيرا إشارته في جوار 1

إذن النقطة $I(1,g(1))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_g)

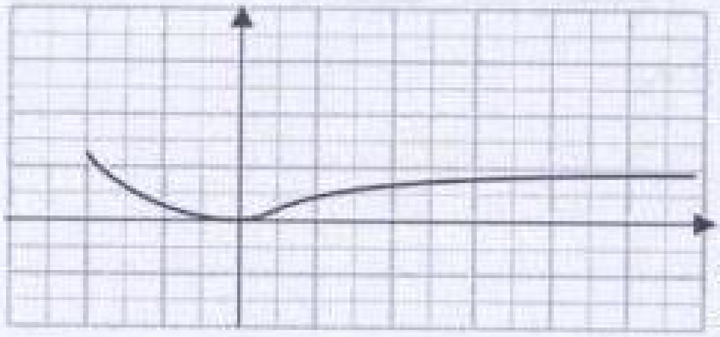
$g(1)=-2e^{-1}+1$ إذن $I(1,1-2e^{-1})$

د) معادلة المماس لـ (C_g) عند I هي $y=g'(1)(x-1)+g(1)$

$g'(1)=1e^{-1}=\frac{1}{e}$ إذن $y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}$

هـ) رسم (C_g)

$g(-2)=1,37$



و) $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$

H هي الدالة الأصلية لـ $x\mapsto g(x)-1$

تعني أن من أجل كل $x\in[-2,+\infty[$:

$$H'(x)=g(x)-1$$
$$H'(x)=\alpha e^{-x}-e^{-x}(\alpha x+\beta)$$
$$H'(x)=e^{-x}(\alpha-\alpha x-\beta)$$
$$g(x)-1=(-x-1)e^{-x}$$

بالمطابقة بين عبارة $g(x)-1$ و $H'(x)$ نجد من أجل كل x

$\alpha-\beta-\alpha x=-x-1$ و منه ينتج $\begin{cases}\alpha-\beta=-1\\-\alpha=-1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=\alpha+1=2\end{cases}$

- الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند الصفر هي $\int_0^x g(t)dt$

$$\int_0^x g(t)dt=\int_0^x(g(t)-1+1)dt=\int_0^x(g(t)-1)dt+\int_0^x 1dt$$
$$=[H(t)]_0^x+x\quad=H(x)-H(0)+x$$
$$=(x+2)e^{-x}-2+x$$

إذن الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند الصفر هي $x\mapsto x-2+(x+2)e^{-x}$

III) $k(x)=g(x^2)$

نضع $u(x)=x^2$ و منه $k=gou$

الدالة u متناقصة على المجال $[-2,0]$ و الدالة g متزايدة على المجال $[0,2]$

إذن الدالة k متناقصة تماما على المجال $[-2,0]$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

إذن الدالة k متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

و جدول تغيرات k هو

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$k(-2)$	$\searrow$	$k(0)$	$\nearrow$	1

$$\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x^2)=\lim_{y\to+\infty}g(y)=1$$
$$k(-2)=g(4)=-5e^{-4}+1$$
$$k(0)=g(0)=0$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (03 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط.عين الجواب الصحيح معللا اختيارك

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط :

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$

و المستوي (P) الذي معادلته : $x-3z-4=0$

1) المستوي (P) هو : ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD)

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1) $\vec{n}_1(1,2,1)$ ، ج2) $\vec{n}_2(-2,0,6)$ ، ج3) $\vec{n}_3(2,0,-1)$

المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي : ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

الحل :

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$

و $x-3z-4=0$ ، (P)

1) $x_A-3z_A-4=1+3-4=0$

$x_B-3z_B-4=4-3\times0-4=0$

$x_C-3z_C-4=-2-3(-2)-4=0$

النقط A ، B و C تنتمي إلى المستوي (P) و بما أن $\vec{AB}(3,-2,1)$ و $\vec{AC}(-3,-3,-1)$ غير مرتبطين خطيا فإن المستوي (P) هو (ABC)

2) الشعاع الناظم للمستوي (P) هو $\vec{n}(1,0,-3)$ لكن $\vec{n}_2=-2\vec{n}$

إذن الشعاع $\vec{n}_2$ هو أيضا شعاع ناظم لـ (P) و بالتالي نختار الجواب 2

3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي

$$\sigma=\frac{|x_D-3z_D-4|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$=\frac{|3-3-4|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

إذن نختار الجواب 3

التمرين الثاني : (05 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = \frac{5}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1) أ) ارسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ ، $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود ، u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$

ب) تحقق ان (u_n) متزايدة.

ج) هل (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك.

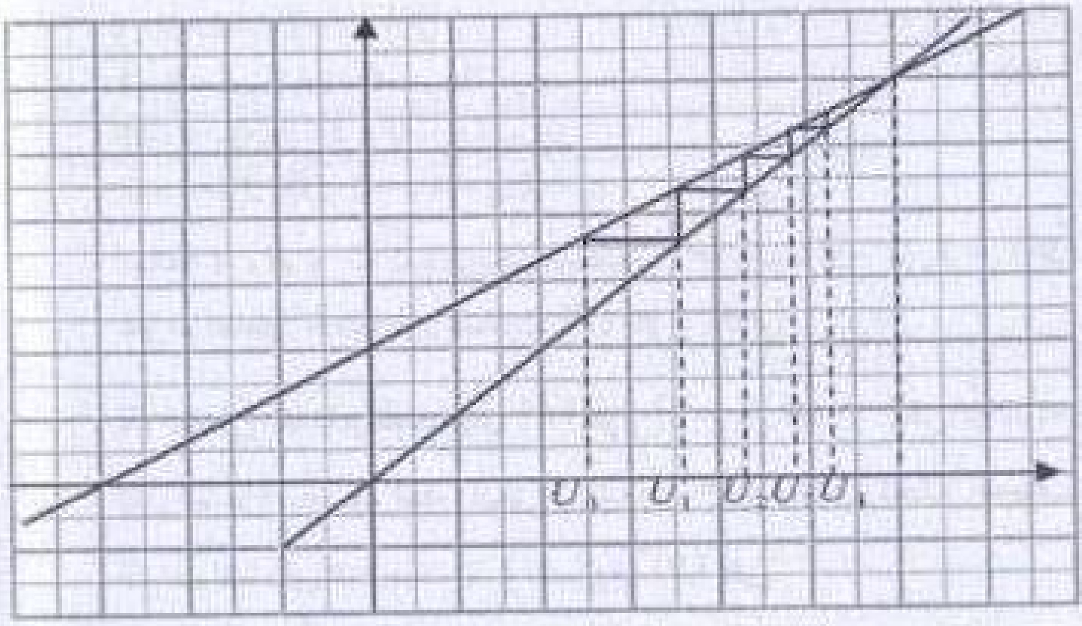
3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 6$.

أ) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

✓ **الحل :**

1) أ)



- المستقيم (Δ) يمر بالنقطتين $O(0,0)$ و $A(1,1)$
- المستقيم (d) يمر بالنقطتين $A'(-3,0)$ و $B'(0,2)$

ج) من الشكل نستطيع أن نخمن ان المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 6

2) أ) اثبات بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$

- من اجل $n=0$ ، $u_0=\frac{5}{2}$ و $\frac{5}{2}\leq 6$ إذن الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n اي $u_n\leq 6$

و نبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اي $u_{n+1}\leq 6$

لدينا : $u_n\leq 6$ و بالضرب الطرفين في $\frac{2}{3}$ نجد $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{12}{3}$

اي $\frac{2}{3}u_n\leq 4$ و بإضافة 2 إلى الطرفين نجد $\frac{2}{3}u_n+2\leq 6$

اي $u_{n+1}\leq 6$ و منه الخاصية صحيحة من اجل $n+1$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\leq 6$

ب) التحقق ان (u_n) متزايدة :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{2}{3}u_n+2-u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n+2 \\ &= -\frac{1}{3}(u_n-6) \end{aligned}$$

بما ان من اجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_n\leq 6$ فإن

$u_n-6\leq 0$ و منه $-\frac{1}{3}(u_n-6)\geq 0$ و عليه فالمتتالية (u_n) متزايدة تماما

ج) بما ان (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي متقاربة

3) نضع : $v_n=u_n-6$

ا) إثبات ان (v_n) هندسية

(v_n) هندسية يعني : $v_{n+1}=v_n\times q$

حيث q هو الأساس

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-6 \\ &= \frac{2}{3}u_n+2-6=\frac{2}{3}u_n-4 \\ &= \frac{2}{3}(v_n+6)-4 \\ &= \frac{2}{3}v_n+4-4=\frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

إذن (v_n) هندسية اساسها $q=\frac{2}{3}$

و حدها الأول $v_0=u_0-6=\frac{5}{2}-6=-\frac{7}{2}$

ب)

$$\begin{aligned} v_n &= v_0\times q^n \\ &= \frac{-7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

لدينا
$v_n = u_n - 6$ و منه $u_n = v_n + 6$

إذن $u_n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$

بما ان $\frac{2}{3}$ (1 فإن $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ و بالتالي $\lim_{n \to +\infty} v_n = 6$

التمرين الثالث : (05 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:
$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ النقطتين A و B اللتين لاحقتهما z_A ، z_B على الترتيب حيث :
$z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$
عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_c حيث $z_c = \frac{4 - i}{1 + i}$
اكتب z_c على الشكل الجبري ثم اثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ)

4) ا) برهن ان عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k\rangle 0)$ وزاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي :
$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$
ب) تطبيق ، عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحول S المعرف ب :
$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$

✓ الحل :

1) حل المعادلة $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$
$\Delta = i^2 - 4(-2 - 6i)$
$\Delta = -1 + 8 + 24i = 7 + 24i$
ليكن σ الجذر التربيعي لـ Δ إذن $\sigma^2 = \Delta$ حيث
$\sigma = x + iy$

$\sigma^2 = \Delta$ تعني $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2xy = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x^2 + y^2 = 25 \ldots\ldots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (3) طرف لطرف نجد، $2x^2=32$ و منه $x^2=16$

$x^2=16$ تكافئ $(x=4)$ أو $(x=-4)$

- إذا كان $(x=4)$ فإن $y=3$

- إذا كان $(x=-4)$ فإن $y=-3$

إذن $\sigma_1=4+3i$ و $\sigma_2=-4-3i$

إذن المعادلة المعطاة لها حلين هما

$$z_1=\frac{-i+4+3i}{2}=2+i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-i-4-3i}{2}=-2-2i$$

2) $z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$

مركز الدائرة التي قطرها $[AB]$ هو منتصف $[AB]$

$$z_\omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{2+i-2-2i}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}i$$

3) لدينا، $z_C=\frac{4-i}{1+i}$

- كتابة z_C على الشكل الجبري

$$z_C=\frac{4-i}{1+i}=\frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{3-5i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$

- إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ)

C تنتمي الى (Γ) تعني أن، $|z_C-z_\omega|=\frac{AB}{2}$

$$|z_C-z_\omega|=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}i\right|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|$$
$$=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{AB}{2}=\frac{|z_B-z_A|}{2}=\frac{|-2-2i-2-i|}{2}$$
$$=\frac{|-4-3i|}{2}=\frac{\sqrt{16+9}}{2}=\frac{5}{2}$$

إذن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ)

4) أ) $M(z)\mapsto M'(z)$ ، S مركزه النقطة M_0 و نسبته k حيث $k\rangle 0$

إذن

$$\begin{cases} M_0M'=kM_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}\right)=\theta+2k\pi \end{cases}$$

- $M_0M' = kM_0M$ تكافئ $|z'-z_0| = k|z-z_0|$

اذن $\dfrac{|z'-z_0|}{|z-z_0|} = k$

- $\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta + 2k\pi$ تعني $\arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right) = \theta + 2k\pi$

اذن العدد $\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}$ طويلته k و عمدته θ و بالتالي الشكل الأسي له هو :

$\dfrac{z'-z_0}{z-z_0} = ke^{i\theta}$ و بالضرب الطرفين في $z-z_0$ نجد:

$z'-z_0 = (z-z_0)\times ke^{i\theta}$

ب) $M(z) \mapsto M'(z)$ ، S

$z' + \dfrac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \dfrac{1}{2}i\right)$ و هذه الأخيرة تكتب :

اي $z' - \left(-\dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - \left(-\dfrac{1}{2}i\right)\right)$

$z' - z_\omega = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_\omega)$

اذن هذا التحول هو تشابه مباشر مركزه النقطة ω و نسبته 2 و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

التمرين الرابع: (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما ياتي:

$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

1) أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g و حدد $g(0)$ و إشارة $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

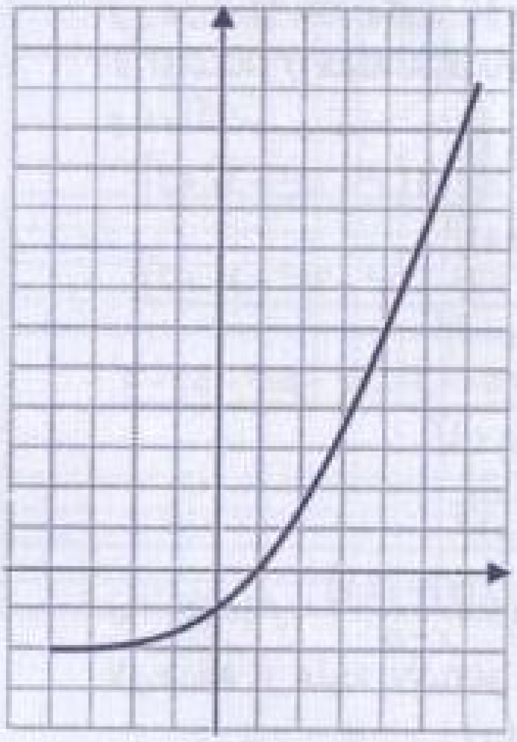
ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ يحقق ، $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$

2) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما ياتي:

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$



ا) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f

ب) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

ج) احسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$

و فسر النتيجتين بيانيا.

د) شكل جدول تغيرات الدالة f

3) ناخذ $\alpha\approx 0,26$

ا) عين مدور $f(x)$ الى 10^{-2}

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4) ا) اكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1,+\infty[$ و التي تحقق ، $F(1)=2$

✓ **الحل :**

1) ا) تشكيل جدول تغيرات الدالة g

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من الرسم ان الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $g(0)=-1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$

لان من اجل $x>\frac{1}{2}$ يكون (C_g) فوق (xx')

ب) بما ان الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ و $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$ فإن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$

ج) استنتاج اشارة $g(x)$ على $]-1,+\infty[$

• من اجل $-1<x<\alpha$ يكون $g(x)<0$

- و من اجل $x>\alpha$ يكون $g(x)>0$

2) ا) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$

و لدينا:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)[x^3+3x^2+3x+2]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)[(x+1)(3x^2+6x+3)-2(x^3+3x^2+3x+2)]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$

لأن الدالة f قابلة للاشتقاق عند α

و لدينا ، $f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=\frac{0}{(\alpha+1)^3}=0$

إذن ، $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$

- المساواة $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$ تعني أن f قابلة للاشتقاق عند α و عددها المشتق يساوي 0 اي ان المنحنى (C_f) له مماس يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة 0

د) تشكيل جدول تغيرات f

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=+\infty$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$

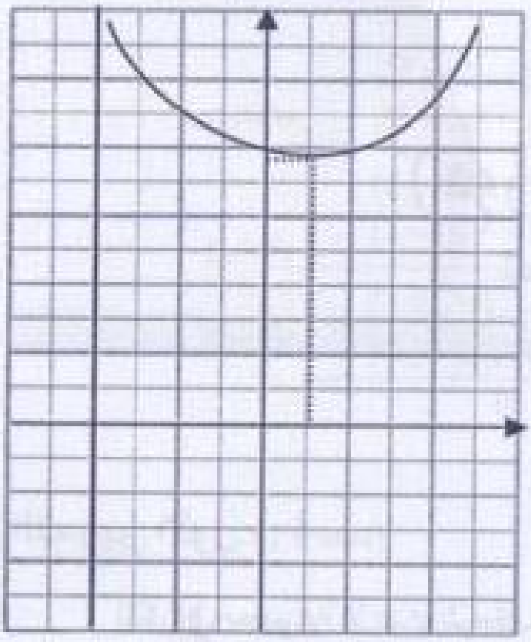
x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) ا) $\alpha\approx0{,}26$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}{(\alpha+1)^2}$$

$$=\frac{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha-1+3}{(\alpha+1)^2}=\frac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2}$$

$$=\frac{3}{(\alpha+1)^2}$$



$$f(\alpha)\approx\frac{3}{(0,26+1)^2}=\frac{3}{1,26^2}=\frac{3}{1,5876}$$
$$f(\alpha)\approx 1,889$$

و القيمة المدورة إلى 10^{-2} هي $1,89$

ب) رسم المنحنى (Γ)

4) أ)

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+3x+2 & x^2+2x+1 \\ \hline \text{بالطرح}\quad x^3+2x^2+x & x+1 \\ \hline x^2+2x+2 & \\ \text{بالطرح}\quad x^2+2x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

إذن $f(x)=x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

ب) الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{1}{(x+1)^2}$ هي $x\mapsto\dfrac{-1}{x+1}$

و الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x+1$ هي $\dfrac{1}{2}x^2+x$

إذن الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F حيث

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+C$$

$F(1)=2$ تكافئ $\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{2}+C=2$ و منه $C=1$

و عليه الدالة F التي تحقق $F(1)=2$ هي $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x+1}+1$

ج) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=+\infty$ لأن :

$\lim\limits_{x\to-1}(x^3+3x^2+3x+2)=1$ و $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)^2=0^+$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+2-x^3-3x^2-3x-1}{(x+1)^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

• $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=+\infty$ تعني أن (Γ) له مستقيم مقارب عمودي (يوازي محور التراتيب) معادلته $x=-1$

(دورة جوان 2008)

شعبة تقني رياضي

التمرين الأول : (4 نقط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كما يلي :

$Z^3+(2-4i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i)=0$......(*)

1) بين أن $Z_0=3i$ هو حل للمعادلة (*)

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*) ثم اكتب حلولها Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الشكل الأسي حيث : $|Z_1|\langle|Z_2|$

3) لتكن A ، B ، C صور الحلول Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الترتيب في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,-1)\}$.

4) عين المجموعة (E) للنقط حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$

بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم انشئ (E)

5) تحقق أن النقط O ، B و G في استقامية ثم عين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O و يحول B إلى G محددا عناصره المميزة.

✓ الحل :

1) التحقق من أن $Z_0=3i$ حلا للمعادلة (*)

$$\begin{aligned}&(3i)^3+(2-4i)(3i)^2-(6+9i)(3i)+9(-1+i)\\&=-27i+(2-4i)(-9)-18i-27-9+9i\\&=-27i-18+36i-18i-27-9+9i\\&=0\end{aligned}$$

2) حل المعادلة (*) ، المعادلة (*) تكتب على الشكل

$(Z-3i)(Z^2+bZ+c)=0$

$$\begin{array}{l|l} Z^3+(2-4i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i) & Z-3i \\ \cline{2-2} \text{بالطرح} \quad Z^3-3iZ^2 & Z^2+(2-i)Z-3-3i \\ \hline (2-i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i) & \\ \text{بالطرح} \quad (2-i)Z^2+(-6i-3)Z & \\ \hline (-3-3i)Z+9(-1+i) & \\ \text{بالطرح} \quad (-3-3i)Z+9i-9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن المعادلة (*) تكتب على الشكل:

$(Z-3i)[Z^2+(2-i)Z-3-3i]=0$

(*) تكافئ:

$$\begin{cases} Z-3i=0 \\ Z^2+(2-i)Z-3-3i=0 \end{cases} \text{ أو}$$

• نحل المعادلة

$(*)' ....Z^2+(2-i)Z-3-3i=0$

$$\Delta=(2-i)^2-4(1)(-3-3i)$$
$$=4-4i-1+12+12i$$
$$=15+8i$$

ليكن $\sigma=x+iy$ جذرا تربيعيا لـ Δ إذن $\sigma^2=\Delta$

$\sigma^2=\Delta$ تكافئ

$$\begin{cases} x^2-y^2=15.......(1) \\ 2xy=8...............(2) \\ x^2+y^2=17........(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد ، $2x^2=32$ و منه

$x^2=16$ إذن ، $x=4$ أو $x=-4$

• من أجل $x=4$ نجد $y=1$

• من أجل $x=-4$ نجد $y=-1$

إذن، $\sigma_1=4+i$ و $\sigma_2=-4-i$

إذن المعادلة $(*)'$ لها حلان هما ،

$$Z_1=\frac{-2+i+4+i}{2}=1+i$$

$$Z_2=\frac{-2+i-4-i}{2}=-3$$

و عليه فالمعادلة (*) لهل ثلاث حلول هي Z_0 ، Z_1 ، Z_2

(3) تعين G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,-1)\}$

نرمز بـ Z_G إلى لاحقة النقطة G إذن

$$Z_G = Z_A + Z_B - Z_C$$
$$= Z_0 + Z_1 - Z_2$$
$$= 3i + 1 + i + 3 = 4 + 4i$$

إذن احداثيات G هي $(4,4)$

4) $$AM^2 + BM^2 - CM^2 = \left(\vec{AG} + \vec{GM}\right)^2 + \left(\vec{BG} + \vec{GM}\right)^2 - \left(\vec{CG} + \vec{GM}\right)$$

$$= GM^2 + AG^2 + BG^2 - CG^2$$

لكن:

$$AG^2 = |Z_G - Z_A|^2 = |4 + 4i - 3i|^2$$
$$= |4 + i|^2 = 17$$
$$BG^2 = |Z_G - Z_B|^2 = |4 + 4i - 1 - i|^2$$
$$= |3 + 3i|^2 = 18$$
$$CG^2 = |Z_G - Z_C|^2 = |4 + 4i + 3|^2$$
$$= |7 + 4i|^2 = 65$$

إذن ، $AM^2 + BM^2 - CM^2 = GM^2 - 30$

و منه ، $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$ تكافئ $GM^2 - 30 = -13$

تكافئ $GM^2 = 17$

تكافئ $GM = \sqrt{17}$

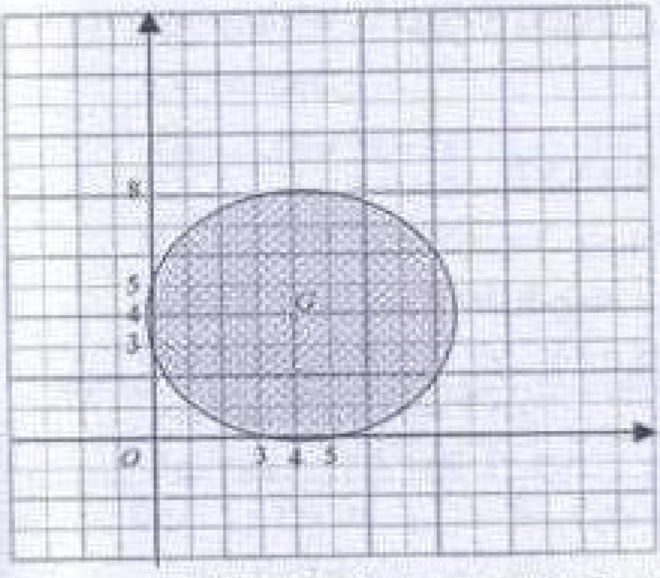
و بالتالي المجموعة (E) هي دائرة

مركزها G و طول نصف قطرها $\sqrt{17}$

- إثبات ان A تنتمي الى (E) ،

$$GA^2 = |Z_G - Z_A|^2 = |4 + 4i - 3i|^2$$
$$= |4 + i|^2 = 17$$

إذن A نقطة من (E)



5) $\vec{OG}(4,4)$ ، $\vec{OB}(1,1)$

لاحظ ان $\vec{OG} = 4\vec{OB}$ و منه النقط O ، B و G تقع على استقامة واحدة

- نسبة التحاكي هي $k = \dfrac{OG}{OB} = 4$

- صورة الدائرة (E) هي الدائرة (E') مركزها G' صورة G بالتحاكي و طول نصف قطرها هو $R' = 4AG$

$R' = 4AG = 4 \times \sqrt{17}$ و لدينا ، $\vec{OG'} = 4\vec{OG}$

التمرين الثاني : (5 نقط)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$A(1,2,2)$ و $B(3,2,1)$ و $C(1,3,3)$ نقط من هذا الفضاء

1) برهن ان النقط A ، B و C تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية

2) نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين:

$(P_1): x-2y+2z-1=0$

$(P_2): x-3y+2z+2=0$

بين ان (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

3) بين ان النقطة C تنتمي الى المستقيم (Δ)

4) بين ان الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ هو احد اشعة توجيه المستقيم (Δ)

5) استنتج ان التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هوالجملة:

$$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases} \quad \text{حيث } (k\in\mathbb{R})$$

6) لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) ،اوجد قيمة الوسيط k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين ، ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

✓ **الحل :**

$A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$

1) اثبات ان النقط A ، B و C تعين مستوي

لاثبات ان النقط A ، B و C تعين مستوي يجب اثبات ان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

نفرض انه يوجد λ بحيث $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ يكافئ:

$$(I).....\begin{cases} 0=2\lambda \\ 1=\lambda\times 0=0 \\ 1=-\lambda \end{cases}$$

الجملة (I) مستحيلة لأن $1=0$ خاطئة

لان لا يوجد λ بحيث $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و عليه فالنقاط A ، B و C تعين مستوي

2) $(P_1): x-2y+2z-1=0$

$(P_2): x-3y+2z+2=0$

اثبات ان (P_1) و (P_2) يتقاطعان في مستقيم (Δ)

ليكن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ ناظمي (P_1) و (P_2) على الترتيب

$\vec{n_2}(1,-3,2)$ و $\vec{n_1}(1,-2,2)$

بما ان $\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{-2} \neq \frac{2}{2}$ فان الشعاعين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي (P_1) و (P_2) متقاطعان في مستقيم (Δ).

3) اثبات ان C تنتمي الى (Δ) يعني ان C تنتمي الى (P_1) و C تنتمي الى (P_2)

لدينا $1-2\times3+2\times3-1=1-6+6-1=0$ اذن C تنتمي الى (P_1)

لدينا $1-3\times3+2\times3+2=1-9+6+2=0$ اذن C تنتمي الى (P_2)

4) $\vec{u}(2,0,-1)$ شعاع توجيه لـ (Δ) لابد ان يكون

$\vec{u}.\vec{n_2}=0$ و $\vec{u}.\vec{n_1}=0$

$$\vec{u}.\vec{n_1}=(2,0,-1)(1,-2,2)$$
$$=2+0-2=0$$
$$\vec{u}.\vec{n_2}=(2,0,-1)(1,-3,2)$$
$$=2+0-2=0$$

اذن u هو احد أشعة توجيه للمستقيم (Δ)

5) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Δ)

اذن يوجد λ بحيث: $\vec{CM}=\lambda\vec{u}$

لدينا: $\vec{CM}(x-1,y-3,z-3)$

$\vec{CM}=\lambda\vec{u}$ يكافئ

$$\begin{cases} x-1=2\lambda \\ y-3=0 \\ z-3=-\lambda \end{cases}$$

اذن:

$$\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=3 \\ z=-\lambda+3 \end{cases}$$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

6) ايجاد قيمة k بحيث $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين

$\vec{AM}(x-1,y-2,z-2)$

$\vec{AM}.\vec{u}=0$ يكافئ $2(x-1)+0(y-2)+(-1)(z-2)=0$

يكافئ $2x-1-z+2=0$

يكافئ $4k+2-1+k-3+2=0$

يكافئ: $5k=0$

يكافئ: $k=0$

المسافة بين A و المستقيم هي الطول AM من أجل $k=0$

إحداثيات النقطة M هي $C(1,3,3)$ إذن، $AM=AC=\sqrt{2}$

التمرين الثالث: (7 نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,2]$ بالعبارة، $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,2]$.

ب) انشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة على المحورين $4\,cm$).

ج) برهن انه إذا كان $x\in[0,2]$ فإن $f(x)\in[0,2]$.

2) نعرف المتتالية العددية (U_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي،

$$\begin{cases}U_0=0\\ U_{N+1}=f(U_n)\end{cases}$$

ا) برر وجود المتتالية (U_n) . احسب الحدين U_1 و U_2

ب) مثل الحدود U_0 و U_1 و U_2 على محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (U_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

3) ا) برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n ان، $0\le U_n\le\sqrt{3}$

ب) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن، $U_{n+1}\rangle U_n$

ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

ج) تحقق ان، $U_{n+1}-\sqrt{3}\le\dfrac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}\left(U_n-\sqrt{3}\right)$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

فبين عددا حقيقيا k من $]0,1[$ بحيث، $\left|U_{n+1}-\sqrt{3}\right|\le k\left|U_n-\sqrt{3}\right|$

بين انه من اجل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $\left|U_n-\sqrt{3}\right|\le k^n\left|U_0-\sqrt{3}\right|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

✓ الحل:

1) ا) دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0,2]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,2]$ و لدينا

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$$

من اجل كل $x\in[0,2]$ ،

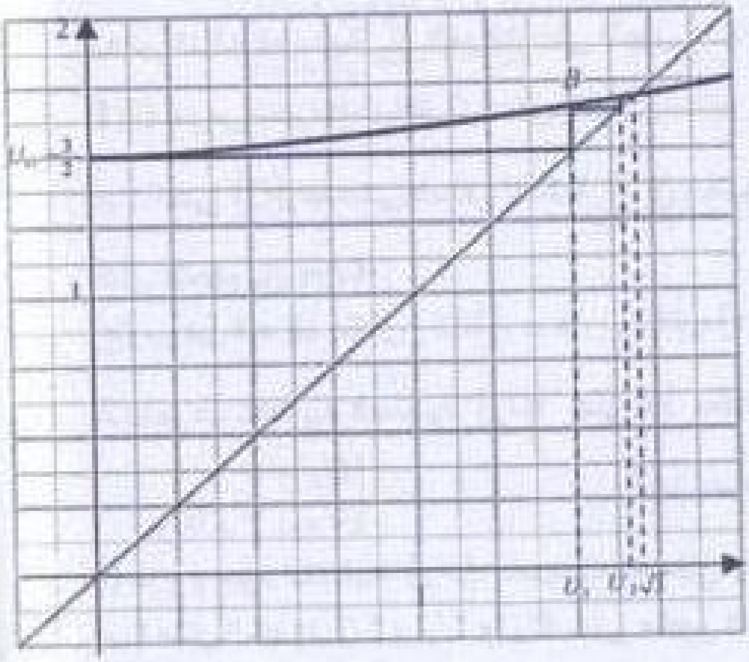
$f'(x)\rangle 0$ ومنه الدالة f

متزايدة تماما على $[0,2]$

جدول تغيرات f ،

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↗	$\frac{7}{4}$

ب) الرسم



ج) الدالة f متزايدة تماما على

$[0,2]$ و بالتالي $f(x)\in[f(0),f(2)]$

لكن $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(2)=\frac{7}{4}$

إذن $f(x)\in\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$

و بما ان $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]\subset[0,2]$

فإن $f(x)\in[0,2]$

2)

$$\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$$

ا) بما ان الدالة f معرفة على I و من اجل كل $x\in I$ ، $f(x)\in I$ و $U_0\in I$

فإننا نستطيع تعريف متتالية (U_n) بـ $U_{n+1}=f(U_n)$

$$U_1=f(U_0)=f(0)=\frac{3}{2}$$

$$U_2=f(U_1)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2\times\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}+2}=\frac{6}{\frac{7}{2}}=\frac{12}{7}$$

ب) نرسم مستقيم يوازي محور الفواصل معادلته $y=U_0$

هذا المستقيم يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في النقطة A احداثياتها (U_0,U_0) و من النقطة A نرسم مستقيم يوازي محور التراتيب يقطع (C_f) في B . إذن احداثيات B هي $(U_0,f(U_0))$ اي $B(U_0,U_1)$

بنفس الكيفية نعلم U_2

ج) نلاحظ من التمثيل البياني ان المتتالية (U_n) متزايدة و متقاربة

3) ا) البرهان على ان $0\le U_n\le\sqrt{3}$

- من اجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ و $0\le 0\le \sqrt{3}$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$
- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n مع $n\ge 0$
و نبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$
بما ان $0\le U_n\le\sqrt{3}$ f متزايدة تماما على $[0,2]$ فإن $f(0)\le f(U_n)\le f(\sqrt{3})$ لكن ،

$$f(0)=0 \text{ و } f(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

إذن $0\le U_{n+1}\le\sqrt{3}$
إذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$
و بالتالي الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n
ب) إثبات أنه من اجل كل عدد طبيعي $U_{n+1} \rangle U_n$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n+3}{U_n+2}-U_n$$
$$=\frac{2U_n+3-U_n^2-2U_n}{U_n+2}$$
$$=\frac{-U_n^2+3}{U_n+2}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}-U_n)(\sqrt{3}+U_n)}{U_n+2}$$

بما ان $0\le U_n\le\sqrt{3}$ فإن $\sqrt{3}-U_n\ge 0$ و $\sqrt{3}+U_n\ge 0$ و $U_n+2\ge 0$ و عليه يكون $U_{n+1}-U_n \rangle 0$ و بالتالي (U_n) متزايدة تماما على N اي $U_{n+1}\rangle U_n$
- بما ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى ب $\sqrt{3}$ فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي l
ج)

$$U_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{2U_n+3}{U_n+2}-\sqrt{3}$$
$$=\frac{2U_n+3-\sqrt{3}U_n-2\sqrt{3}}{U_n+2}$$
$$=\frac{2(U_n-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{3}-U_n)}{U_n+2}$$
$$=\frac{2(U_n-\sqrt{3})-\sqrt{3}(U_n-\sqrt{3})}{U_n+2}$$
$$=\frac{(U_n-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{U_n+2}$$

$$|U_{n+1}-\sqrt{3}|=\frac{|2-\sqrt{3}||U_n-\sqrt{3}|}{|U_n+2|}$$

$0\le U_n\le\sqrt{3}$ و منه $2\le|U_n+2|\le|2+\sqrt{3}|$

و بالقلب:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \le \frac{1}{|U_n+2|} \le \frac{1}{2}$$

$$\left|U_{n+1}-\sqrt{3}\right| \le \frac{\left|2-\sqrt{3}\right|}{2}\left|U_n-\sqrt{3}\right|$$

$$\left|U_{n+1}-\sqrt{3}\right| \le \left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\left|U_n-\sqrt{3}\right|$$

اذن ، $k=\left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$ مع $0 < k < 1$

نبرهن على صحة المتباينة بالتراجع

من اجل $n=1$:

لدينا ، $U_1-\sqrt{3}=\frac{3}{2}-\sqrt{3}$

$$k^1\left|0-\sqrt{3}\right|=\left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\sqrt{3}$$

$$=\left|\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right|$$

اذن $\left|U_1-\sqrt{3}\right| \le k^1\left|U_0-\sqrt{3}\right|$

و منه الخاصية صحيحة من اجل $n=1$

- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كيفي n اي

$$\left|U_n-\sqrt{3}\right| \le k^n\left|U_0-\sqrt{3}\right|$$

و نبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اي $\left|U_{n+1}-\sqrt{3}\right| \le k^{n+1}\left|U_0-\sqrt{3}\right|$

لدينا :

$$\left|U_{n+1}-\sqrt{3}\right| \le k\left|U_n-\sqrt{3}\right|$$

$$\le k\times k^n\left|U_0-\sqrt{3}\right|$$

$$\le k^{n+1}\left|U_0-\sqrt{3}\right|$$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ و بالتالي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان الخاصية صحيحة

التمرين الرابع: (4 نقط)

n عدد طبيعي اكبر من 5 .

1) a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$

ا) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر للعددين a و b ؟

ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعف للعدد 7

ج) عين قيم n التي من اجلها $PGCD(a,b)=7$

2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :

$$q=n^2-7n+10 \quad \text{و} \quad p=2n^2-7n-15$$

ا) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$

ب) عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p,q)$

الحل :

1) $a=n-2$ و $b=2n+3$

ا) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر

نستطيع أن نكتب :

$$\begin{aligned} b&=2n-4+7\\ &=2(n-2)+7\\ &=2a+7 \end{aligned}$$

ليكن d القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b

إذن d يقسم $2a$ و b و منه d يقسم $b-2a$ اي d يقسم 7

و عليه فالقيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر هي 1 و 7

ب) نستطيع ان نكتب : $b=n-2+n+5$

$$b=a+n+5$$

- إذن إذا كان a و b مضاعفين للعدد 7 فإن $b-a$ مضاعف للعدد 7

و بمان $b-a=n+5$ فإن $n+5$ مضاعف للعدد 7

- إذن إذا كان $n+5$ مضاعف للعدد 7 فإننا نكتب $n+5=7k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

إذن $n=7k-5$

نعوض قيمة n في a و b نجد :

$$\begin{aligned} a&=7k-5-2=7k-7\\ a&=7(k-1)=7k' \end{aligned}$$

إذن a مضاعف لـ 7

$$\begin{aligned} b&=2n+3\\ &=2(7k-5)+3\\ &=14k-10+3\\ &=14k-7\\ &=7(2k-1)=7k'' \end{aligned}$$

إذن b مضاعف لـ 7

ج) تعين قيم n بحيث $PGCD(a,b)=7$

القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b يساوي 7 هذا يعني ان a و b من مضاعفات 7

و بالتالي $n+5$ مضاعف لـ 7 و عليه قيم n تكون من الشكل $7k-5$ مع k عدد طبيعي غير معدوم

2) $p=2n^2-7n-15$

$q=n^2-7n+10$

ا) نحلل p إلى جداء عوامل

$$\begin{array}{r|l} 2n^2-7n-15 & n-5 \\ \cline{2-2} \text{بالطرح} \quad 2n^2-10n & 2n+3 \\ \cline{1-1} 3n-15 & \\ \text{بالطرح} \quad 3n-15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

إذن $p=(n-5)(2n+3)$

نحلل q إلى جداء عوامل

$$\begin{array}{r|l} n^2-7n+10 & n-5 \\ \cline{2-2} \text{بالطرح} \quad n^2-5n & n-2 \\ \cline{1-1} -2n+10 & \\ \text{بالطرح} \quad -2n+10 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

إذن $q=(n-5)(n-2)$

إذن $(n-5)$ تقسم p و تقسم q

ب) عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p,q)$

$$\begin{aligned} PGCD(p,q) &= (n-5)\times PGCD(2n+3,n-2) \\ &= (n-5)\times PGCD(a,b) \end{aligned}$$

- إذا كان $n+5$ مضاعف للعدد 7 فإن $PGCD(b,a)=7$

و عليه، $PGCD(p,q)=7(n-5)$

- إذا كان $n+5$ ليس مضاعف للعدد 7 فإن $PGCD(b,a)=1$

و عليه، $PGCD(p,q)=1\times(n-7)$
$=n-7$

مُختاراتٌ من بكالوريا أجنبيةٍ

تطابق تماما البرنامج الجديد لوزارة التربية

حوليات أجنبية

(بولينيزي ـ 2004)

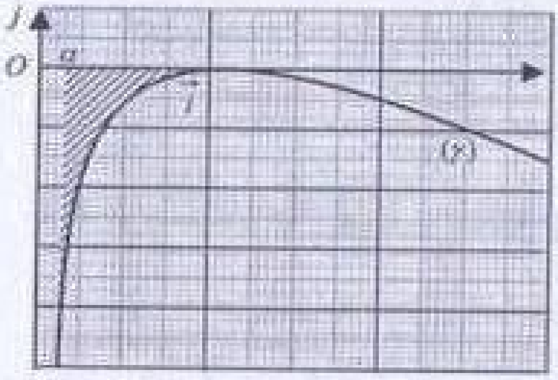
التمرين الأول :

للمنحنى (γ) المجاور هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ

$$f(x)=\frac{Ln\,x}{\sqrt{x}}+1-x$$

1-1) برهن أن f قابلة للاشتقاق وانه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن إشارة $f'(x)$ تكون من إشارة $N(x)$ حيث،

$$N(x)=-[\,2(x\sqrt{x}-1)+Ln\,x\,]$$



ب) احسب $N(1)$ ثم عين إشارة $N(x)$ (ميز الحالتين $0\langle x\langle 1$ و $1\langle x$).

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0,+\infty[$ واحداثيات النقط من (γ) ذات التراتيب العظمى.

2) نسمي $\mathscr{A}(\alpha)$ المساحة المعبر عنها بوحدة المساحة للحيز من المستوي الموضح في الشكل السابق حيث α عدد حقيقي من المجال $]0,1[$

أ) عبر عن $\mathscr{A}(\alpha)$ بدلالة α (يمكنك استعمال التكامل بالتجزئة).

ب) احسب نهاية $\mathscr{A}(\alpha)$ لما α يؤول إلى 0 ، ثم اعط تفسيرا لهذه النهاية.

3) نعرف متتالية (U_n) مع $n\in IN$ بحدها الأول U_0 من $[1,2]$.

ومن اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1}=\frac{Ln\,U_n}{\sqrt{U_n}}+1$

أ) برهن انه من أجل كل x من $[1,2]$ يكون لدينا $0\leq\frac{Ln\,x}{\sqrt{x}}\leq 1$

ب) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n تكون الحدود U_n تنتمي إلى $[1,2]$.

4) نلاحظ ان $U_{n+1}=f(U_n)+U_n$ عين اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

5- أ) برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة ونرمز بـ ℓ إلى نهايتها.

ب) عين القيمة المضبوطة لـ ℓ .

✓ الحل :

1- أ) الدالة f عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ هما ، $x \mapsto 1-x$ و $x \mapsto \frac{Ln\,x}{\sqrt{x}}$ ولدينا على المجال $]0,+\infty[$ ،

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times\sqrt{x}-\frac{Ln\,x}{2\sqrt{x}}}{x}-1$$

$$=\frac{2-Ln\,x-2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=-\frac{[Ln\,x+2(-1+x\sqrt{x})]}{2x\sqrt{x}}=\frac{N(x)}{2x\sqrt{x}}$$

لكن $x\sqrt{x} \rangle 0$ على المجال $]0,+\infty[$

إذن $f'(x)$ له نفس إشارة $N(x)$

ب) لدينا $N(1)=0$

- إذا كان $x \rangle 1$ فإن $\sqrt{x} \rangle 1$ وبالجداء نحصل على $x\sqrt{x} \rangle 1$ ومنه ينتج $x\sqrt{x}-1 \rangle 0$

وبالتالي $2(x\sqrt{x}-1) \rangle 0$

ولدينا أيضا $Ln\,x \rangle 0$

إذن بالجمع نحصل على $Ln\,x+2(x\sqrt{x}-1) \rangle 0$ وعليه يكون $N(x) \langle 0$

- بنفس الكيفية نبين أن $N(x) \rangle 0$ في حالة $0 \langle x \langle 1$

جـ) الدالة f متزايدة على المجال $]0,1]$ ومتناقصة على المجال $[1,+\infty[$

والدالة f لها قيمة حدية عظمى من أجل $x=1$ وهي $f(1)=0$

إذن الدالة f سالبة على مجال دراستها.

2- أ) من نتيجة السؤال السابق نستنتج أن $\mathcal{A}(\alpha)=-\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx$

ولحساب $\mathcal{A}(\alpha)$ نستعمل طريقة المكاملة بالتجزئة

نضع $U(x)=2\,Ln\,x$ و $V'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ومنه ينتج $U'(x)=\frac{2}{x}$ و $V(x)=\sqrt{x}$

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق و U' و V' مستمرتان.

$$\int_{\alpha}^{1}\frac{2\,Ln\,x}{2\sqrt{x}}\,dx=\left[2(Ln\,x)\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1}-\int_{\alpha}^{1}\frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx$$

لكن $\int_{\alpha}^{1}\frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx=\int_{\alpha}^{1}\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

$$=4\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\left[4\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1}$$

إذن

$$\mathcal{A}(\alpha)=\left[2(Ln\,x)\sqrt{x}-4\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{\alpha}=\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{\alpha}-4\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\alpha}\,Ln\,\alpha\right)+\frac{7}{2}$$

ب) نعلم أنه إذا كان $\alpha \rangle 0$ نستطيع كتابة $\alpha=\beta^2$ حيث $\beta \rangle 0$ ؛

إذن $\sqrt{\alpha}\, Ln(\alpha)=\sqrt{\beta^2}\, Ln\, \beta^2$

$=2\beta\, Ln\, \beta$

فالدالة مربع مستمرة وبالتالي إذا انتهى α إلى 0 فإن β كذلك ونعلم أيضا

$\lim\limits_{\beta \to 0} 2\beta\, Ln\, \beta=0$

إذن $\lim\limits_{\alpha \to 0} \mathcal{A}(\alpha)=\frac{7}{2}$

وبكيفية هندسية فإن هذه النهاية موافقة للمساحة المحدودة بالمنحني (γ) ومحور الفواصل والمستقيمات العمودية ذات المعادلة $x=0$ و $x=1$

3- ا) لدينا $1 \le x \le 2$ ومنه يكون $Ln1 \le Ln x \le Ln 2$

اي $0 \le Ln x \le Ln 2$ .... (1)

ولدينا كذلك $1 \le \sqrt{x} \le \sqrt{2}$ وبالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le 1$ .... (2)

بضرب طرفي المتباينتين (1) و (2) طرفا إلى طرف نجد $0 \le \frac{Ln(x)}{\sqrt{x}} \le Ln(2) \le 1$

ب) من أجل $n=0$ لدينا $1 \le U_0 \le 2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n اي $1 \le U_n \le 2$

ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

بما أن $1 \le U_n \le 2$ ومن السؤال (ا) نستنتج أن $0 \le \frac{Ln\, U_n}{\sqrt{U_n}} \le 1$

وبإضافة 1 إلى حدود هذه المتباينة نجد $1 \le \frac{Ln\, U_n}{\sqrt{U_n}}+1 \le 2$ اي $1 \le U_{n+1} \le 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ يكون $U_n \in [1,2]$.

4) بما أن $U_{n+1}=f(U_n)+U_n$ فإن $U_{n+1}-U_n=f(U_n)$

و بما أننا برهنا أن f سالبة فإن $U_{n+1}-U_n \le 0$

إذن المتتالية (U_n) متناقصة.

5- ا) المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل ب 1

إذن فهي تكون متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ حيث $1 \le \ell$

ب) بما أن الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق

فإن العلاقة $U_{n+1}=f(U_n)+U_n$ تعطى بالمرور إلى النهاية $\ell=f(\ell)+\ell$ اي $f(\ell)=0$

ولكن من السؤال 1- جـ) وجدنا أن القيمة الوحيدة التي تنعدم عندها f هي 1

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n=1$

التمرين الثاني :

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$ ناخذ $2Cm$ كوحدة للرسم.

من أجل كل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة Z نعتبر النقطتين M' و M'' دواتا اللاحقتين $Z'=Z-2$ و $Z''=Z^2$ على الترتيب.

1- أ) عين النقط M بحيث M'' منطبقة على M.

ب) عين النقط M بحيث M'' منطبقة على M'.

2) برهن انه يوجد بالضبط نقطتان M_1 و M_2 بحيث صورهما M'_1 و M''_1 ، M'_2 ، M''_2 تنتمي إلى محور التراتيب. وبين أن لواحقها مترافقة.

3) نضع $Z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{Z''-Z}{Z'-Z}$.

ب) استنتج المجموعة E للنقط M من المستوي بحيث تكون النقط M ، M' ، M'' على استقامة واحدة. مثل E وماذا تستنتج ؟

4) نضع $Z=\sqrt{3}\,e^{i\theta}$ حيث $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

أ) عين المجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة Z. وعين كذلك (Γ') و (Γ'') للنقط M' و M'' المرفقة لـ M.

ب) مثل (Γ) و (Γ') و (Γ'') في الشكل السابق.

ج) في هذا السؤال نضع $\theta=\frac{\pi}{6}$ علم النقطة M_3 المحصل عليها من أجل هذه القيمة لـ θ والنقطتين M'_3 و M''_3 المرفقتين لها. وبين أن المثلث $M_3M'_3M''_3$ قائم. وهل هو متساوي الساقين ؟

✓ الحل :

1- أ) M'' منطبقة على M يكافئ $Z^2=Z$

$Z^2=Z$ يكافئ $Z(Z-1)=0$

يكافئ $(Z=0)$ أو $(Z=1)$

إذن النقط M المطلوبة هي المبدأ O والنقطة ذات اللاحقة 1.

ب) M'' منطبقة على M' يكافئ $Z^2=Z-2$

$Z^2=Z-2$ يكافئ $Z^2-Z+2=0$

$\Delta=-7$ ومنه $\Delta=\left(i\sqrt{7}\right)^2$

إذن المعادلة $Z^2-Z+2=0$ لها حلان هما $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ و $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$

2) Z' تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان $x+iy-2$ تخيليا صرفا ويكون هذا محققا إذا كان $x=2$ .... (1)

Z'' تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان x^2-y^2+2ixy تخيليا صرفا وهذا يكون محققا إذا كان $x^2-y^2=0$ .... (2)

من (1) و (2) نجد $4-y^2=0$ اي $(y=2)$ أو $(y=-2)$

إذن توجد نقطتان $M_1(2+2i)$ و $M_2(2-2i)$ حيث أن صورتيهما M' و M'' تنتميان إلى محور التراتيب ولواحقهما مترافقتان.

3- أ) $\frac{Z''-Z}{Z'-Z}=\frac{Z^2-Z}{Z-2-Z}$

$=\frac{x^2-y^2+2ixy-x-iy}{-2}$

ب) النقط M ، M' ، M'' على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان $\frac{Z''-Z}{Z'-Z}$ حقيقيا أي $2xy-y=0$.

$2xy-y=0$ يكافئ $y(2x-1)=0$ يكافئ $(y=0)$ أو $(x=\frac{1}{2})$

إذن E هي مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z مع $Z=x$ أو $Z=\frac{1}{2}+iy$

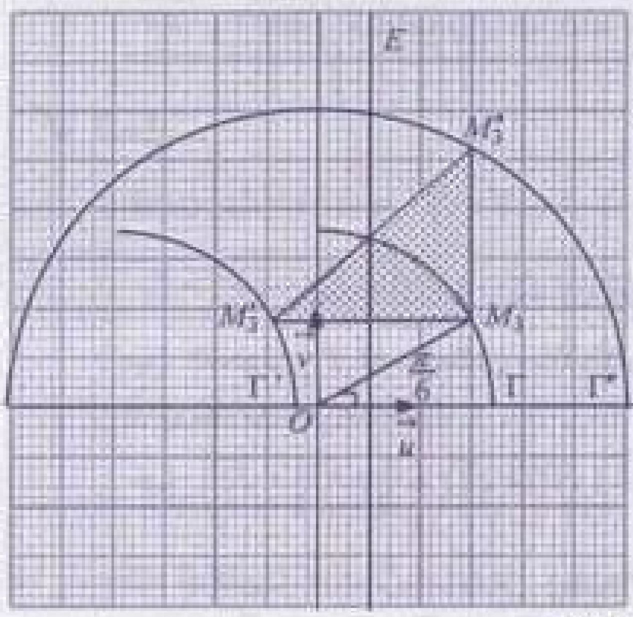
حيث y عدد حقيقي.

4- أ) ـ المجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة $Z=\sqrt{3}\,e^{i\theta}$ مع $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ هي الربع الأول من الدائرة (في الاتجاه المباشر) ذات المركز O ونصف القطر $\sqrt{3}$.

ـ المجموعة (Γ') للنقط M' هي ربع دائرة صورة (Γ) بالإنسحاب الذي شعاعه $-2\vec{U}$.

ـ النقطة M'' ذات اللاحقة $Z''=Z^2=3e^{2i\theta}$

ـ المجموعة (Γ'') للنقط M'' هي إذن نصف دائرة (مباشرة) ذات المركز O وطول نصف القطر 3



جـ) بوضع $\theta=\frac{\pi}{6}$ يكون

$$Z_3=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z'_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z''_3=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

بما أن M_3 و M'_3 لهما نفس الترتيبة إذن المستقيم $(M_3M'_3)$ يكون أفقيا.

لدينا M_3 و M''_3 لهما نفس الفاصلة إذن المستقيم $(M_3M''_3)$ يكون عموديا.

والمثلث $M_3M'_3M''_3$ يكون إذن قائما في M_3 .

لدينا $M_3M'^2_3=4$ و $M_3M''_3=3$ و $M'_3M''^2_3=7$

إذن المثلث $M_3M'_3M''_3$ ليس متقايس الساقين.

التمرين الثاني : (رياضي + تقني رياضي)

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$ نأخذ الوحدة $1Cm$ للرسم.

نرمز بـ A ، B و C إلى النقط ذات اللواحق $-1+i$ ، $3+2i$ و $i\sqrt{2}$ على الترتيب.

1) نعتبر التحويل النقطي f من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة $M'=f(x)$ ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{Z}+i(1+\sqrt{2})-1$

ا) احسب لاحقة النقطتين $A'=f(A)$ و $C'=f(C)$.

ب) استنتج طبيعة التحويل f والعناصر المميزة له.

جـ) علم النقط A ، B و C ثم انشئ النقطة $B'=f(B)$.

2- ا) اعط الكتابة المركبة للتحاكي h ذي المركز A والنسبة $\sqrt{2}$.

ب) بين أن المركب $g=f\,o\,h$ له كتابة مركبة $Z''=(1+i)\overline{Z}-1+3i$

3- ا) لتكن M_0 النقطة ذات اللاحقة $2-4i$،

عين لاحقة النقطة $M''_0=g(M_0)$ ثم تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM''_0}$ متعامدان.

ب) نعتبر نقطة M ذات اللاحقة Z ونفرض أن الجزء الحقيقي x والجزء التخيلي y عددان صحيحان.

برهن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM''}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $5x+3y=-2$.

جـ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x+3y=-2$.

د) استنتج النقط M التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال $[-6,6]$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM''}$ متعامدين، ثم علم النقط المحصل عليها.

✓ الحل :

1- ا) $Z_{A'}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)-1+i(1+\sqrt{2})=-1+i=Z_A$

$Z_{C'}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-i\sqrt{2})-1+i(1+\sqrt{2})=i\sqrt{2}=Z_C$

ب) التحويل f له نقطتان صامدتان وبالتالي فهو تناظر محوري محوره المستقيم (AC) (أي تشابه غير مباشر).

جـ) $Z_{B'}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(3-2i)-1+i(1+\sqrt{2})=\frac{3}{2}+i\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

2- ا) لدينا $\overrightarrow{AM'}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{AM}$ وهذه المساواة تترجم إلى $Z'+1-i=\sqrt{2}(Z+1-i)$

ومنه $Z'=\sqrt{2}Z+\sqrt{2}-1+i(1-\sqrt{2})$

ب) لدينا $Z''=f\left(h(Z)\right)=f\left(Z\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+i(1-\sqrt{2})\right)$

$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\overline{Z}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+i(1+\sqrt{2})-1+i(1+\sqrt{2})\right)=(1+i)\overline{Z}-1+3i$

وهي الكتابة المركبة للتشابه الغير المباشر.

3- ا) باستعمال المساواة السابقة يكون لدينا $Z''_0=(1+i)(2+4i)-1+3i=-3+9i$

الشعاع $\overrightarrow{AB}$ إحداثياته $(4,1)$ والشعاع $\overrightarrow{AM''_0}$ إحداثياته $(-2,8)$

لكن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM''_0}=-8+8=0$ ومنه فإن الشعاعين متعامدان.

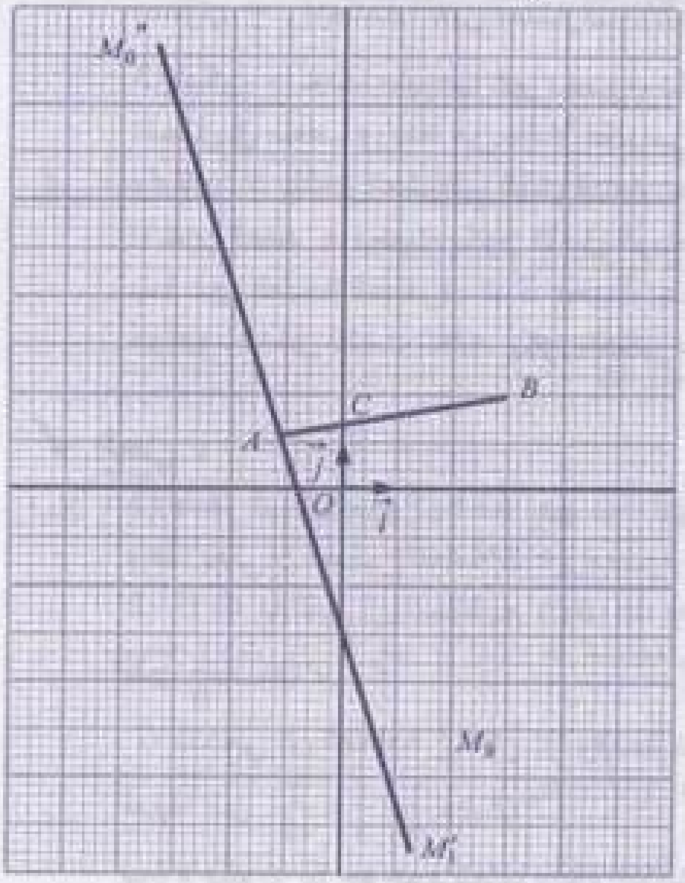
وعليه فإن النقطة M_0'' تنتمي إلى المستقيم العمودي على (AB) والذي يشمل A .

ب) لتكن M نقطة ذات اللاحقة $Z=x+iy$ مع x و y عددان صحيحان.

لدينا $Z''=(1+i)(x-iy)+3i-1=x+y-1+i(x-y+3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM''}=0$ يكافئ $4(x+y)+1(x-y+2)=0$ يكافئ $5x+3y+2=0$

جـ) الثنائية $(-1,1)$ حل خاص للمعادلة $5x+3y+2=0$



$5x+3y=-2$ .... (1)

$5(-1)+3(1)=-2$ .... (2)

من (1) و (2) ينتج

$5x+3y=5(-1)+3(1)$

ومنه ينتج

$5(x+1)=3(1-y)$ .... (3)

3 يقسم $5(x+1)$ و 3 أولي مع 5

إذن حسب نظرية غوص 3 يقسم $x+1$

3 يقسم $(x+1)$ يعني أنه يوجد

عدد صحيح k بحيث $x+1=3k$

أي $x=3k-1$

نعوض عبارة x في (3) نجد

$y=1-5k$

إذن مجموعة حلول المعادلة

$5x+3y=-2$ هي مجموعة

الثنائيات $(-1+3k,1-5k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

د) لدينا $-6\le y\le 6$

يكافئ $-6\le 1-5k\le 6$ يكافئ $-1\le k\le \frac{7}{5}$

وبما أن k عدد صحيح فإن k يأخذ القيم -1 ، 0 ، 1 ومن أجل هذه القيم فإن إحداثيات النقط المحصل عليها هي $(-4,6)$ ، $(-1,1)$ ، $(2,-4)$

النقط M'' الموافقة إحداثياتها هي $(1,-7)$ ، $(-1,1)$ ، $(-3,9)$.

الثنائية $(-1,1)$ توافق النقطة A فهي مرفوضة. إذن يبقى لنا حلان فقط للنقطة M .

التمرين الثالث:

A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من المستوي. وليكن U كيسا يحتوي على 6 وريقات لا نستطيع التمييز بينها عند اللمس وتحمل الأرقام -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 و 3 .

وليكن أيضا V كيسا آخر يحتوي على 5 وريقات لا نميز بينها عند اللمس بحيث 4 وريقات تحمل الرقم 1 و وريقة تحمل الرقم -1 .

نسحب عشوائيا وريقة من كل كيس، ونفرض أن كل السحبات متساوية الاحتمال.

ليكن a الرقم المقروء على الوريقة المسحوبة من الكيس U وليكن أيضا b الرقم المقروء

على الوريقة المسحوبة من الكيس V.
1) بين أن الجملة $\{(C\,;4),(B\,;b),(A\,;a)\}$ تقبل مرجحا وليكن G
2- أ) عين احتمال كل من الأحداث التالية ،
E_1 " G ينتمي إلى المستقيم (BC)" و E_2 " G ينتمي الى القطعة $[BC]$"
ب) بين احتمال الحدث E_3 " G موجود داخل المثلث ABC ولا تنتمي الى أي ضلع" يساوي $\frac{2}{5}$. (اعتمادا على اعتبارات الإشارة)
3) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نكرر التجربة n مرة وفي نفس الشروط والتي تتمثل في سحب وريقة من كلا كيسي U و V. ولنعتبر المرجح G الموجود في السؤال 1 وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات تحقق الحادث E_3 .
أ) عين العدد n بحيث يكون الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X يساوي إلى 4 .
ب) عين القيمة الصغرى لـ n بحيث احتمال التحصل على الأقل على مرجح من المراجح موجود داخل المثلث ABC يكون أكبر من أو يساوي 0,999 .

✓ **الحل :**

1) أصغر قيمة لمجموع $a+b$ هو -3 أي $-4 < a+b$ وهذا يعني أن $a+b+4 > 0$ وهذا يعني أن مجموع المعاملات غير معدوم وبالتالي المرجح G موجود مهما كان السحب.
2- أ) G ينتمي إلى المستقيم (BC) إذا وفقط إذا كان معامل A معدوما أي $a=0$
إذن $P(E_1)=\frac{1}{6}$
G تنتمي إلى القطعة $[BC]$ إذا وفقط إذا كان $a=0$ و $b > 0$
لدينا إذن $P(E_2)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{15}$
ب) لا يكون G موجود تماما داخل المثلث إلا إذا كانت المعاملات الثلاث أكبر من الصفر.
أي إلا إذا كانت $a > 0$ و $b > 0$ وعليه $P(E_3)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$
3- أ) نعلم أن $E(X)=P_n=\frac{2}{5}\times n$
$E(x)=4$ يعني أن $\frac{2}{5}\times n=4$ أي أن $n=10$
ب) احتمال عدم التحصل على مرجح داخل المثلث ABC هو $\left(\frac{3}{5}\right)^n$
إذن احتمال التحصل على الأقل على مرجح موجود داخل المثلث هو $1-\left(\frac{3}{5}\right)^n$
و بالتالي يجب أن يكون $1-\left(\frac{3}{5}\right)^n \geq 0,999$ وهذا يكافئ $\left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0,001$
وهذا يكافئ $n\,Ln\left(\frac{3}{5}\right) \leq Ln(0,001)$ أي $n \geq \dfrac{Ln(0,001)}{Ln\left(\frac{3}{5}\right)}$
إذن يجب تكرار التجربة 14 مرة .

(أمريكا الجنوبية - 2004)

التمرين الأول :

لتكن f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=xe^{-x}$ ونرمز بـ (Γ) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الرسم هي $10\,Cm$.

I -1- أ) عين نهاية f عند $+\infty$

ب) ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

جـ) ارسم (Γ) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

-2- أ) برهن انه من أجل كل عدد حقيقي m من $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين

ب) في حالة $m=\frac{1}{4}$ نسمي α و β بحلي المعادلة $f(x)=m$ مع $\alpha\langle\beta$ عين حصرا بسعة 10^{-2} للحل α

جـ) حل المعادلة $f(x)=m$ في حالة $m=0$ و $m=\frac{1}{e}$

II - 1) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على IN بـ :

$\begin{cases} U_0=\alpha \\ U_{n+1}=U_n e^{-U_n} \end{cases}$ حيث α هو الحل الموجود في الفرع **I**-

أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون لدينا $0\langle U_n$

ب) هل المتتالية (U_n) متناقصة ؟

جـ) هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟ في حالة نعم عين نهايتها.

2) نعتبر المتتالية (W_n) المعرفة على IN بـ $W_n=Ln(U_n)$

أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n=W_n-W_{n+1}$

ب) نضع $S_n=U_0+U_1+......+U_n$

برهن أن $S_n=W_0-W_{n+1}$

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على IN بحدها الأول V_0 حيث $V_0\rangle 0$

ومن اجل كل عدد طبيعي n لدينا $V_{n+1}=V_n e^{-V_n}$

هل توجد قيمة V_0 تختلف عن α بحيث من أجل كل $n\geq 1$ يكون $U_n=V_n$ ؟

في حالة نعم عينها .

✓ الحل :

I - 1- أ) من أجل كل x لدينا $f(x)=\frac{x}{e^{x}}$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

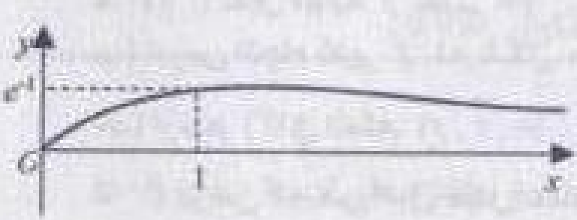
ب) الدالة f عبارة عن جداء دالتين قابلتين للاشتقاق اذن فهي قابلة للاشتقاق و ، من أجل كل x لدينا $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

بما انه من أجل كل x لدينا $e^{-x}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$

- إذا كان $x\in[1,+\infty[$ فإن $f'(x)\leq 0$
- إذا كان $x\in[0,1]$ فإن $f'(x)\geq 0$

إذن f متناقصة على $[1,+\infty[$ ومتزايدة على المجال $[0,1]$ وعليه جدول تغيرات f هو :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



جـ) التمثيل البياني للدالة f (السلم $\frac{1}{2}$)

2- أ) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,1]$ و $f(0)=0$ و $f(1)=\frac{1}{e}$

إذن من أجل كل m من $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ فإن المعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد على المجال $]0,1[$

ـ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[1,+\infty[$ و $f(1)=\frac{1}{e}$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن $m\in\left]0,\frac{1}{e}\right[$

إذن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا على $[1,+\infty[$

ومنه نستنتج انه من أجل كل m من $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة $f(x)=m$ لها حلان .

هندسيا حلول المعادلة $f(x)=m$ هما فواصل نقط تقاطع (Γ) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$

ب) من أجل $m=\frac{1}{4}$ فإن الحل α ينتمي إلى المجال $]0,1[$ وبسهولة نجد أن $\alpha\approx 0,357$

إذن $\alpha\in]0,35;0,36[$

جـ) بنفس الطريقة نجد من أجل $m=0$ فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x=0$ ومن أجل $m=\frac{1}{e}$ فالمعادلة تقبل حلا وحيدا $x=1$.

II-1- أ) من الفرضية لدينا $U_0>0$

p عدد طبيعي كيفي

نفرض ان $0 < U_0$ وبما ان $e^{-U_p} > 0$ فإن $U_{p+1} > 0$

ومنه نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

ب) بما انه من اجل كل n لدينا $U_n > 0$ نقارب بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ والواحد .

لدينا $\frac{U_{n+1}}{U_n}=e^{-U_n}$.

بما ان $-U_n < 0$ فإن $e^{-U_n} < 1$ إذن $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ وعليه فالمتتالية (U_n) متناقصة تماما.

جـ) بما ان (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ حيث أن l حل للمعادلة $l=l e^{-l}$

$l=l e^{-l}$ تكافئ $l(1-e^{-l})=0$ تكافئ $l=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n=0$

2- أ) $W_n-W_{n+1}=Ln(U_n)-Ln(U_{n+1})$

$$=Ln(\frac{U_n}{U_{n+1}})=Ln(\frac{1}{e^{-U_n}})=U_n$$

ب) $S_n=(W_0-W_1)+(W_1-W_2)+...+(W_n-W_{n+1})$

$$S_n=W_0-W_{n+1}$$

بما ان $\lim_{n\to+\infty} U_n=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} W_n=-\infty$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$

3) لدينا $U_1=U_0 e^{-U_0}$ ومنه $U_1 \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$

ومن السؤال I - 2- أ) نعلم انه توجد قيمة ثانية β بحيث $\beta e^{-\beta}=U_1$

إذن لدينا $V_0=\beta$ و $V_1=U_1$ وبصفة عامة $U_n=V_n$

التمرين الثاني :

مثلنا في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ كما في الشكل المجاور

المنحنى البياني للدالة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

حلا للمعادلة التفاضلية (E) ..... $y'+y=0$ و $f(0)=e$

1) عين $f(x)$ من اجل كل عدد حقيقي x

2) ليكن t عدد حقيقي معطى من المجال $[1,e]$

حلا في $\mathbb{R}$ للمعادلة $e^{1-x}=t$ ذات المجهول x.

3) لتكن A النقطة ذات الفاصلة 0

و B نقطة ذات الفاصلة 1 من المنحنى.

نعتبر المجسم المحصل عليه بالدوران حول

محور التراتيب للقوس AB

كما في الشكل المجاور

ونسمي V حجمه. نقبل ان $V=\pi\int_1^e (1-Lnt)^2\,dt$

احسب V باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين.

✓ الحل :

1) الحلول العامة للمعادلة التفاضلية $y'+y=0$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$x\mapsto ke^{-x}$ مع k عدد حقيقي كيفي .
صورة الصفر هي e $ke^0=e$ إذن $k=e$
إذن الدالة f المطلوب إيجادها هي $f(x)=ee^{-x}$ اي $f(x)=e^{1-x}$
2) $e^{1-x}=t$ يكافئ $1-x=Lnt$ يكافئ $x=1-Lnt$
3) لتكن U و V الدالتان المعرفتان على $[1\,,\,e]$ على التوالي بالعبارتين :
$U(t)=(1-Lnt)^2$ و $V(t)=t$ هاتان الدالتان قابلتان للاشتقاق ومشتقتاهما U' و V'
معرفتان على التوالي $U'(t)=-\frac{2}{t}(1-Lnt)$ و $V'(t)=1$ مستمرتين على المجال $[1\,,\,e]$

بتطبيق دستور المكاملة بالتجزئة نجد $V=\pi\left[t(1-Lnt)^2\right]_1^e+2\int_1^e(1-Lnt)\,dt$

- نحسب $\int_1^e(1-Lnt)\,dt$ باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة :

نضع $U(t)=1-Ln(t)$ و $V(t)=t$
هاتان الدالتان قابلتان للاشتقاق على $[1\,,\,e]$ ومشتقتاهما U' و V' مستمرتان على $[1\,,\,e]$

حيث $U'(t)=-\frac{1}{t}$ و $V'(t)=1$

إذن $\int_1^e(1-Lnt)\,dt=\left[t(1-Lnt)\right]_1^e+\int_1^e dt=-1+e-1=e-2$

وبالتالي يكون $V=\pi\left(-1+2(e-2)\right)=\pi(2e-5)$

التمرين الثالث :

ليكن $P_A(B)$ الاحتمال الشرطي للحادث B علما ان الحادث A محقق.
يحتوي كيس على 4 كرات حمراء وكرتين سوداويتين لا نفرق بينهما عند اللمس.
1) نسحب عشوائيا وبدون إرجاع كرتين من الكيس. نرمز بـ
A_0 للحادث " لم نتحصل على اي كرة سوداء "
A_1 للحادث " تحصلنا على كرة سوداء وحيدة "
A_2 للحادث " تحصلنا على كرتين سوداوين "
احسب احتمالات الأحداث A_0 ، A_1 و A_2

2) بعد هذا السحب تبقى في الكيس 4 كرات .
نقوم من جديد بسحب عشوائي وبدون ارجاع للكرتين نرمز بـ
B_0 للحادث " لم نتحصل على اي كرة سوداء في السحب الثاني "
B_1 للحادث " تحصلنا على كرة سوداء وحيدة في السحب الثاني "
B_2 للحادث " تحصلنا على كرتين سوداويتين في السحب الثاني "
ا) احسب $P_{A_0}(B_0)$ ، $P_{A_1}(B_0)$ و $P_{A_2}(B_0)$
ب) استنتج $P(B_0)$
جـ) احسب $P(B_1)$ و $P(B_2)$
د) تحصلنا على كرة سوداء وحيدة خلال السحب الثاني .
ما هو احتمال تحصلنا على كرة سوداء وحيدة خلال السحب الأول ؟
3) نعتبر الحادث R " وجب علينا بالتحديد القيام بالسحبين لكي نتحصل على كرتين سوداويتين من الكيس " بين ان $P(R)=\frac{1}{3}$

✓ الحل :

1) بما ان الكيس يحتوي 6 كرات ونقوم بسحب كرتين فإن عدد الحالات الممكنة هو C_6^2
- لتحقيق الحادث A_0 يجب سحب كرتين حمراويتين من بين 4
إذن عدد الحالات الملائمة هو C_4^2 ونستنتج ان $P(A_0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$
- لتحقيق الحادث A_1 يجب سحب كرة حمراء من بين 4 و كرة سوداء من بين 2
إذن عدد الحالات الملائمة هو $C_4^1\times C_2^1=8$ وبالتالي $P(A_1)=\frac{4\times 2}{C_6^2}=\frac{8}{15}$
لتحقيق الحادث A_2 يجب سحب كرتين سوداويتين من بين 2
إذن عدد الحالات الملائمة هو 1 ونستنتج ان $P(A_2)=\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

2- ا) تبقى في الكيس 4 كرات ونقوم بسحب اثنتين وعدد الحالات الممكنة إذن هو C_4^2
- A_0 محقق، تبقى إذن في الكيس 2 كرات حمراء و 2 كرات سوداء .
لتحقيق الحادث B_0 يكفي سحب كرتين حمراويتين.
إذن هناك حالة ملائمة وحيدة.
ومنه $P_{A_0}(B_0)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$

- الحادث A_1 محقق، إذن تبقى في الكيس 3 كرات حمراء وكرة سوداء.
لتحقيق الحادث B_0 يكفي سحب كرتين حمراويتين.
إذن هناك C_3^2 حالة ملائمة ومنه $P_{A_1}(B_0)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$

- الحادث A_2 محقق، إذن تبقى في الكيس 4 كرات حمراء، الحادث B_0 هو حدث أكيد
إذن $P_{A_2}(B_0)=1$

ب) الحادث B_0 هو اتحاد الأحداث الغير متلائمة $A_0 \cap B_0$ ، $A_1 \cap B_0$ ، $A_2 \cap B_0$
وعليه $P(B_0)$ هو مجموع احتمالات هذه الأحداث الثلاثة ،

$$P(A_0 \cap B_0) = P_{A_0}(B_0) \times P(A_0) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(A_1 \cap B_0) = P_{A_1}(B_0) \times P(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}$$

$P(A_2 \cap B_0) = P_{A_2}(B_0) \times P(A_2) = \frac{1}{15}$ وعليه $P(B_0) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

جـ) بحسابات مماثلة لـ أ) و ب) نجد ،

$P_{A_0}(B_1) = \frac{2 \times 2}{C_4^2} = \frac{2}{3}$ وعليه $P(A_0 \cap B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

$P_{A_1}(B_1) = \frac{1 \times 3}{C_4^2} = \frac{1}{2}$ وعليه $P(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}$

سحب كرة سوداء في السحب الثاني بعدما سحبنا كرتين سوداويتين في السحب الأول هو حدث مستحيل إذن $P_{A_2}(B_1) = 0$

وعليه قيمة $P(B_1)$ هي مجموع احتمالات الأحداث السابقة اي

$$P(B_1) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + 0 = \frac{8}{15}$$

لدينا $P_{A_0}(B_2) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$

اذن $P(A_0 \cap B_2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$ ولدينا ايضا $P_{A_1}(B_2) = 0$ و $P_{A_2}(B_2) = 0$

لكن $P(B_2)$ هو مجموع احتمالات الأحداث السابقة إذن $P(B_2) = \frac{1}{15}$.

3) - الحادث R محقق إذا تحقق احد هذين الحادثين غير المتلائمين ،
- "سحب كرة سوداء في السحب الأول وكرة سوداء في السحب الثاني" اي الحادث $A_1 \cap B_1$
- الحادث " لا تسحب اي كرة سوداء في السحب الأول وتسحب كرتين سوداويتين في السحب الثاني "
اي الحادث $A_0 \cap B_2$
ومنه $P(R) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_0 \cap B_2) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$

التمرين الرابع :

I - المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ وحدة الرسم هي $1Cm$.

لتكن P نقطة ذات اللاحقة p حيث $p = 10$ و (Γ) الدائرة ذات القطر $[OP]$.
نسمي Ω مركز (Γ) .

لتكن A و B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب a ، b ، c
حيث $a=5+5i$ ، $b=1+3i$ و $c=8-4i$
1) بين أن A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .
2) لتكن D نقطة ذات اللاحقة $2+2i$ بين أن D هي المسقط العمودي لـ O على المستقيم (BC)،

II - من أجل كل نقطة M من المستوي مختلفة عن O ذات اللاحقة Z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=\dfrac{20}{\overline{Z}}$ و $\overline{Z}$ مرافق Z

1) بين أن النقط O ، M ، M' على استقامة واحدة
2) ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x=2$ و M نقطة من (Δ) ذات اللاحقة Z
أ) تحقق أن $Z+\overline{Z}=4$
ب) عبر عن $Z'+\overline{Z'}$ بدلالة Z و $\overline{Z}$ ثم استنتج أن $5(Z'+\overline{Z'})=Z'\overline{Z'}$
جـ) استنتج أن M' تنتمي إلى تقاطع (OM) والدائرة (Γ) ، ثم علم النقطة M' في الشكل.

✓ الحل :

I - 1) الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ إحداثياتها على التوالي $(5,5)$ ، $(1,3)$ و $(8,-4)$.
الأشعة $\overrightarrow{PA}$ ، $\overrightarrow{PB}$ ، $\overrightarrow{PC}$ إحداثياتها على التوالي $(-5,5)$ ، $(-9,3)$ ، $(-2,-4)$

لدينا $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PA}=0$ ومنه $A\in(\Gamma)$

لدينا $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ ومنه $B\in(\Gamma)$

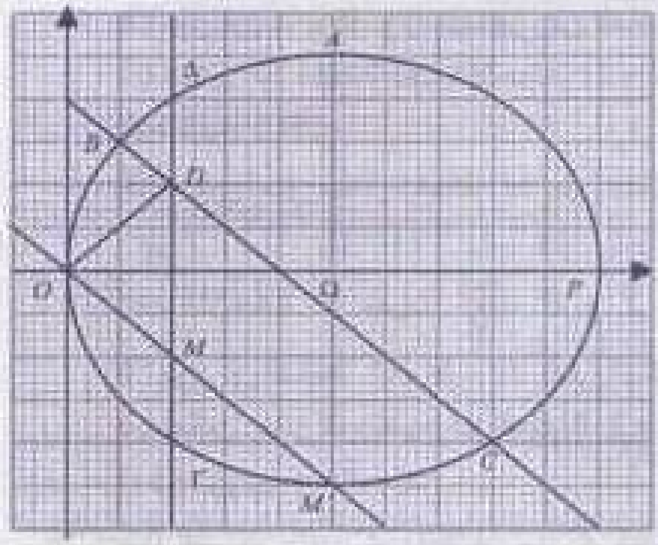
لدينا $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{PC}=0$ ومنه $C\in(\Gamma)$

2) - نبرهن أن $D\in(BC)$ ومن أجل ذلك نبين أن الشعاعين $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا.
$\overrightarrow{DB}$ إحداثياته $(-1,1)$ و $\overrightarrow{BC}$ إحداثياته $(7,-7)$ إذن $\overrightarrow{BC}=-7\overrightarrow{DB}$

- نبرهن أن $(OD)\perp(BC)$ ومن أجل ذلك نبين أن $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{OD}$ إحداثياته $(2,2)$ و $\overrightarrow{BC}$ إحداثياته $(7,-7)$ إذن $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
نستنتج أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على (BC).

II - 1) لدينا $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=arg(\frac{Z'}{Z})=arg(\frac{20}{Z\overline{Z}})$ لكن $Z\overline{Z}$ حقيقي موجب
إذن $arg(\frac{Z'}{Z})=0+2k\pi$
إذن النقط O ، M ، M' تقع على استقامة واحدة
2- أ) بما أن $M\in(\Delta)$ إذن لاحقتها Z هي من الشكل $2+iy$ حيث y عدد حقيقي كيفي



نستنتج أن $\overline{Z}=2-iy$ إذن $Z+\overline{Z}=2$

ب) $Z'+\overline{Z'}=\dfrac{20}{\overline{Z}}+\dfrac{20}{Z}=\dfrac{20(Z+\overline{Z})}{Z\overline{Z}}=\dfrac{80}{Z\overline{Z}}$

إذن $5(Z'+\overline{Z'})=\dfrac{400}{Z\overline{Z}}=\dfrac{20}{\overline{Z}}\times\dfrac{20}{Z}=Z'\times\overline{Z'}$

جـ) نبرهن أن $M'\in(\Gamma)$

ومن أجل ذلك نتحقق أن $\Omega M'^2=25$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\Omega M'}$ هي $Z'-5$

إذن $\Omega M'^2=(Z'-5)(\overline{Z'-5})$

لكن $(Z'-5)(\overline{Z'-5})=(Z'-5)(\overline{Z'}-5)$

$=Z'\overline{Z'}-5(Z'+\overline{Z'})+25=25$

أي $\Omega M'^2=25$ ومنه M' تنتمي إلى (Γ)

ومن السؤال 1) لدينا $M'\in(OM)$

إذن M' هي نقطة تقاطع (OM) مع (Γ) مختلفة عن النقطة O.

التمرين الرابع : (خاص بالشعبة رياضي + تقني رياضي)

نعتبر A_0 و B_0 نقطتين من المستوي الموجه حيث $A_0B_0=8$

ليكن S التشابه المباشر ذو المركز A_0 والنسبة $\frac{1}{2}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ونعرف متتالية النقط (B_n)

بالكيفية التالية من أجل كل عدد طبيعي n يكون $B_{n+1}=S(B_n)$.

1) أنشئ B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

3) نعتبر المتتالية (l_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $l_n=B_nB_{n+1}$

أ) برهن أن المتتالية (l_n) هندسية ؟ يطلب تعيين أساسها.

ب) عبر عن l_n بدلالة n و l_0

جـ) نضع $\sum_n=l_0+l_1+....l_n$ عين نهاية l_n لما n يؤول إلى $+\infty$

4- أ) حل المعادلة $3x-4y=2$ حيث x و y صحيحان.

ب) ليكن (Δ) المستقيم العمودي على (A_0B_0) في A_0. من أجل أي قيمة لـ n تكون النقطة B_n منتمية إلى (Δ) ؟

✓ **الحل** : (خاص بالشعبة رياضي + تقني رياضي)

2) A_0 و B_0 نقطتان مختارتان بطريقة كيفية مع $A_0B_0=8$

نستطيع التحقق أن $A_0B_i=\frac{1}{2}A_0B_{i-1}$

وأن $\left(\overrightarrow{A_0B_{i-1}}\ ,\ \overrightarrow{A_0B_i}\right)=\frac{3\pi}{4}$ مع $4\geq i\geq 1$

نعلم أن صورة مثلث بالتشابه هو مثلث يشابهه.

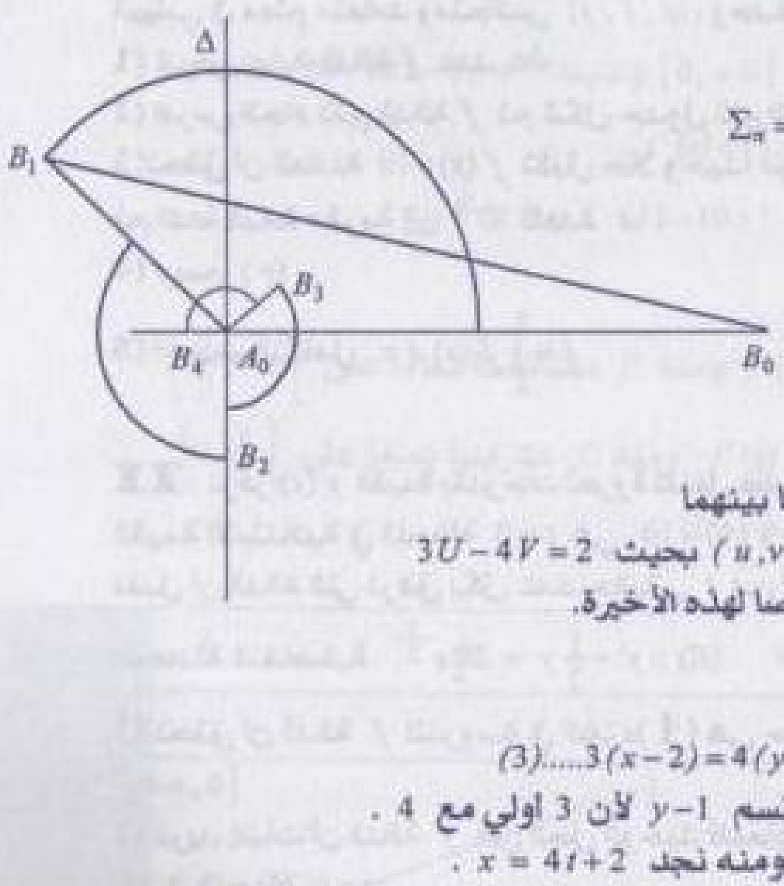
لدينا $A_0=S(A_0)$ و $B_{n+1}=S(B_n)$ و $B_{n+2}=S(B_{n+1})$

إذن المثلث $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ هو صورة المثلث $A_0B_nB_{n-1}$ بالتشابه S. وهذا يعني أن المثلثين متشابهان.

3- أ) $L_{n+1}=B_{n+1}B_{n+2}=S(B_n)S(B_{n+1})$

ومنه $L_{n+1}=\frac{1}{2}L_n$ وهذا يعني أن المتتالية (L_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) لدينا $L_n=\left(\frac{1}{2}\right)^nL_0$



جـ) نعلم أن $\Sigma_n=L_0\times\frac{-(\frac{1}{2})^{n+1}+1}{\frac{1}{2}}$

إذن $\Sigma_n=2L_0\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\Sigma_n=2L_0$

4- أ) بما أن 3 و 4 أوليان فيما بينهما

فإنه توجد ثنائية صحيحة (u,v) بحيث $3U-4V=2$

الثنائية $(2,1)$ تعتبر حلا خاصا لهذه الأخيرة.

$(1).....3x-4y=2$

$(2).....3\times 2-4\times 1=2$

بطرح (2) من (1) نجد، $(3).....3(x-2)=4(y-1)$

3 يقسم $4(y-1)$ ومنه 3 يقسم $y-1$ لأن 3 أولي مع 4 .

إذن $y-1=3t$ أي $y=3t+1$ ومنه نجد $x=4t+2$.

إذن حلول المعادلة $3x-4y=2$ هي من الشكل $(4t+2,3t+1)$ مع $t\in\mathbb{Z}$

ب) لدينا $B_n=S^n(B_0)$ ومنه نستنتج أن $\left(\overrightarrow{A_0B_0}\ ,\ \overrightarrow{A_0B_n}\right)=n\times\frac{3\pi}{4}$ مع $n\in\mathbb{Z}$

لكي تنتمي النقطة B_n إلى (Δ) يلزم ويكفي أن يكون $n\times\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $(n,k)\in\mathbb{Z}^2$

ومنه نستنتج أن (n,k) حلولا للمعادلة $3n-4k=2$

ومن السؤال أ) نستنتج أن n من الشكل $2+4t$ مع $t\in\mathbb{Z}$

إذن الأعداد الطبيعية n بحيث $B_n\in(\Delta)$ هي من الشكل $2+4t$ مع $t\in\mathbb{N}$.

(فرنسا _ 2005)

التمرين الأول :

I - لتكن f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$ ونسمي (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الرسم هي $1\,Cm$

1) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) تحقق أن للمعادلة $f(x)=10$ تقبل حلا وحيدا موجبا تماما α في المجال $]0,+\infty[$ ثم اعط قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α .

4) ارسم (γ)

5) احسب التكامل $I=\int_0^3 f(x)\,dx$

II - نرمز $y(t)$ القيمة بالدرجات لحرارة تفاعل كيميائي في اللحظة t و t معبر عنه بالساعات، القيمة الابتدائية في اللحظة $t=0$ هي $y(0)=10$

نقبل أن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي t من المجال $[0,+\infty[$ العدد $y(t)$ هي حل للمعادلة التفاضلية $(E): y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$

1) تحقق أن الدالة f المدروسة في الجزء (**I**) هي حل للمعادلة التفاضلية (E) على المجال $[0,+\infty[$

2) نريد إثبات أن الدالة f هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية (E) التي تأخذ القيمة 10 في اللحظة $t=0$

أ) نسمي g الحل الكيفي للمعادلة التفاضلية (E) المعرفة على $[0,+\infty[$ وتحقق $g(0)=10$

برهن أن الدالة $g-f$ هي حل على المجال $[0,+\infty[$ للمعادلة التفاضلية $(E'): y'+\frac{1}{2}y=0$

ب) حل المعادلة التفاضلية (E')

جـ) ماذا تستنتج من الأسئلة السابقة ؟

3) ما هي المدة الزمنية اللازمة حتى تنزل حرارة التفاعل الكيميائي إلى قيمتها الابتدائية

(النتيجة تدور إلى الثانية).

4) القيمة θ بالدرجات للحرارة المتوسطة لهذا التفاعل الكيميائي خلال الثلاث ساعات الأولى هي القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0,3]$.
احسب القيمة المضبوطة للعدد θ ثم اعط قيمة تقريبية لـ θ مقربة إلى 1 درجة.

✓ الحل :

I - 1) بوضع $X=\frac{x}{2}$ يكون لدينا

$$f(x)=(40X+10)e^{-x}=40\frac{X}{e^X}+\frac{10}{e^X}$$

بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{10}{e^X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $f'(x)=(20-10x-5)\,e^{-\frac{x}{2}}$

وبالتبسيط نجد $f'(x)=(15-10x)e^{-\frac{x}{2}}$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(15-10x)$ لأن $0 < e^{-\frac{x}{2}}$.

$f'(x)=0$ يكافئ $x=\frac{3}{2}$.

- إذا كان $\frac{3}{2} < x$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

إذا كان $0 < x < \frac{3}{2}$ فإن $0 < f'(x)$ ومنه f متزايدة تماما على $\left]0,\frac{3}{2}\right[$

اليك جدول تغيرات f على $]0,+\infty[$

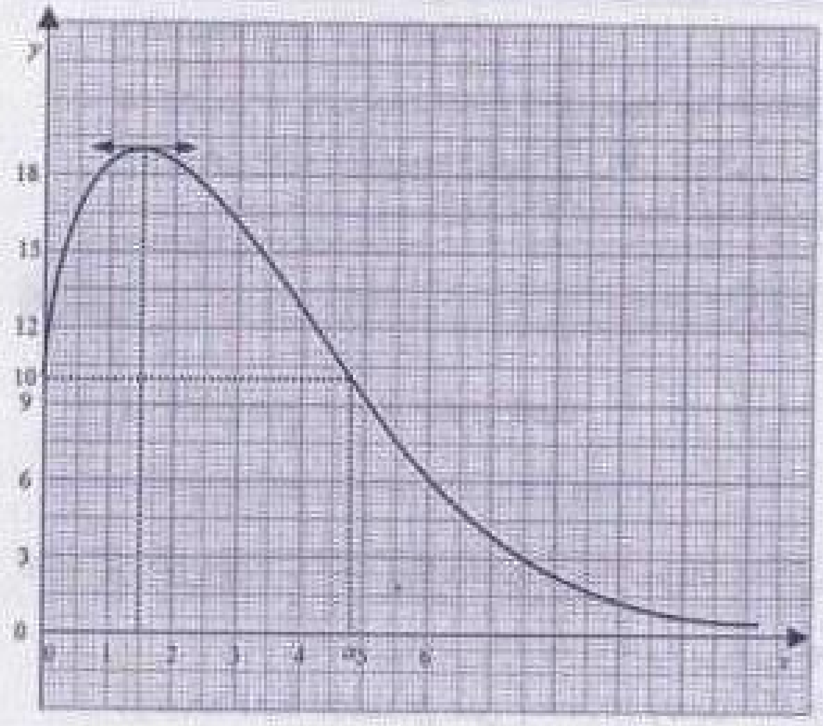
x	0		$\frac{3}{2}$		α		$+\infty$
f'		+	0	-		-	
f	10	↗	$40e^{-\frac{3}{4}}$	↘	10	↘	0

3) على المجال $\left]0,\frac{3}{2}\right[$ لدينا $10 < f(x)$

إذن المعادلة $f(x)=10$ ليس لها حلول على المجال $\left]0,\frac{3}{2}\right[$

ـ على المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ الدالة f مستمرة (لأنها قابلة للاشتقاق)

ومتناقصة تماما من $10e^{-\frac{3}{4}}\approx 18.9$ إلى الصفر.



إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α من $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ بحيث $f(\alpha)=0$

الآلة الحاسبة تعطينا

$\alpha \approx 4,673$

4) الرسم

5) نحسب I باستعمال دستور التكامل بالتجزئة ،

نضع $\begin{cases} U(x)=20x+10 \\ V(x)=-2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

ومنه نجد $\begin{cases} U'(x)=20 \\ V'(x)=e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

وبالتالي $I=\int_0^3 U(x)\,V'(x)\,dx$

$$I=\left[-2(20x+10)e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3+\int_0^3 40e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=\left[-2(20x+10)e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3-\left[80e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3=\left[-40x-100e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3=100-220e^{-\frac{3}{2}}\approx 50,91$$

II - 1) لدينا $f(t)+\frac{1}{2}f'(t)=(15-10t)\,e^{-\frac{t}{2}}+(10t+5)\,e^{-\frac{t}{2}}=20e^{-\frac{t}{2}}$

إذن f هي حل للمعادلة (E) على المجال $[0,+\infty[$.

2- 1) لدينا من الفرض $g'(t)+\frac{1}{2}g(t)=20e^{-\frac{t}{2}}$ و $g(0)=10$

ولقد رأينا أن $f(t)+\frac{1}{2}f'(t)=20e^{-\frac{t}{2}}$

بطرح هاتين المعادلتين نجد $g'-f'+\frac{g}{2}-\frac{f}{2}=0$ وهذا يعني أن $(g-f)'+\frac{1}{2}(g-f)=0$

إذن نستنتج أن الدالة $g-f$ حل للمعادلة $(E'):\ y'+\frac{1}{2}y=0$ على المجال $[0,+\infty[$

ب) حلول المعادلة (E') هي الدوال من الشكل $t\mapsto k\,e^{-\frac{t}{2}}$ مع k عدد حقيقي

جـ) الدالة $g-f$ هي أحد حلول المعادلة (E') لكن $(g-f)(0)=g(0)-f(0)=k$

ومن جهة أخرى $(g-f)(0)=10-10=0$ إذن $k=0$

وبالتالي الدالة $g-f$ معدومة .

إذن المعادلة (E) لها حل وحيد يحقق $y(0)=10$ وهي الدالة f المعرفة في **I**-

3) من السؤال **I**- 3 نستنتج أن المدة توافق القيمة α بحيث $f(\alpha)=10$

إذن $\alpha \approx 4{,}673\, h \approx 4\, h\ 41 \min$

4) $\theta = \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{100-220\,e^{-\frac{3}{2}}}{3}$ إذن $\theta \approx 17$ درجة.

التمرين الثاني :

لكل سؤال تعطى له اربعة أجوبة واحد منها صحيح.

على المترشح ان يضع رقم السؤال والحرف الموافق للجواب المختار مع تبرير الاختيار

1) ليكن Z عدد مركب طويلته $\sqrt{2}$ وعمدته $\frac{\pi}{3}$ لدينا إذن :

$A : Z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\,i$

$B : Z^{14} = 64 - 64\,i$

$C : Z^{14} = -64 + 64\,i\sqrt{3}$

$D : Z^{14} = -128 + 128\,i\sqrt{3}$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس النقطة S ذات اللاحقة 3

والنقطة T ذات اللاحقة $4i$ ولتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث :

$|Z-3| = |3-4\,i|$

A : (E) هي محور القطعة المستقيمة $[ST]$

B : (E) هي المستقيم (ST)

C : (E) هي الدائرة ذات المركز Ω ذات اللاحقة $3-4i$ ونصف القطر 3 .

D : (E) هي الدائرة ذات المركز S ونصف القطر 5 .

3) نعتبر السداسي المنتظم $ABCDEF$ حيث ان طول ضلعه 1 .

الجداء السلمي $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}$ يساوي :

$A : \sqrt{3}$ ، $B : -3$ ، $C : -\sqrt{3}$ ، $D : \frac{3}{2}$

4) g دالة معرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بـ $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$ وليكن (Γ) منحناها البياني في المستوي .

A : (Γ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$

B : (Γ) لا يقبل مستقيمات مقاربة

C : (Γ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=x$

D : (Γ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$

5) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

الدالة f'' هي المشتق الثاني للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ :

$f''(x)=\int_0^x -2te^{-t^2}dt$: A

$f''(x)=\int_0^x -2xe^{-x^2}dx$: B

$f''(x)=-2xe^{-x^2}$: C

$f''(x)=e^{-x^2}$: D

✓ الحل :

1) لدينا $Z=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ إذن $Z^{14}=\left(\sqrt{2}\right)^{14}e^{i\frac{14\pi}{3}}$

$Z^{14}=2^7e^{2i\frac{\pi}{3}}=128\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-64+64i\sqrt{3}$ الجواب C

2) $|Z-3|=|3-4i|=5$ يكافئ $SM=3$

ومنه نستنتج أن M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز S وطول نصف القطر 3 . نختار الجواب D .

3) باستعمال نظرية الكاشي يكون طول الضلع $[AC]$ هو :

$AC=\sqrt{1^2+1^2-2\cos 120}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

ACF مثلث قائم في A إذن $CF=2$

وبالتالي $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}=-CA\times CF\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-3$

نختار الجواب B .

4) يمكن كتابة $g(x)$ بالشكل التالي :

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{x-3}=\frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x-3}=-\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{1-\frac{3}{x}}$$

لأنه من اجل $x\leq 0$ يكون $x^2=|x|=-x$

نهاية المقام هي 1 ونهاية البسط هي -1 بجوار $(-\infty)$ إذن $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-1$ نختار الجواب A

5) لدينا بالتعريف $f'(x)=e^{-x^2}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x نجد $f''(x)=-2e^{-x^2}$ نختار الجواب C

التمرين الثاني : (خاص بشعبة الرياضيات والتقني رياضي)

لكل سؤال اربعة اجوبة واحد منها صحيح.

على المترشح أن يضع رقم السؤال والحرف الموافق للجواب المختار (لا تبرر الأجوبة).

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة $x^2-x+4\equiv 0\,[6]$

A: كل الحلول هي أعداد زوجية.

B: لا يوجد أي حل.

C: الحلول تحقق $x\equiv 2\,[6]$

D: الحلول تحقق $x\equiv 2\,[6]$ أو $x\equiv 5\,[6]$

2) نريد حل المعادلة $24x+34y=2$ ..... (E)

حيث x و y أعداد صحيحة.

A: حلول المعادلة (E) كلها من الشكل:

$(x,y)=(34k-7,5-24k)\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

B: المعادلة (E) ليس لها حلول.

C: حلول المعادلة (E) من الشكل $k\in\mathbb{Z}\ ,\ (x,y)=(17k-7\,,\,5-12k)$

D: حلول المعادلة (E) من الشكل $k\in\mathbb{Z}\ ,\ (x,y)=(-7k\,,\,5k)$

3) نعتبر العددين $n=1789$ و $p=1789^{2005}$ لدينا إذن:

A: $n\equiv 4\,[17]$ و $p\equiv 0\,[17]$

B: p عدد أولي

C: $p\equiv 4\,[17]$

D: $p\equiv 1\,[17]$

4) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين a ، b على الترتيب.

المثلث MAB قائم ومتساوي الساقين مباشر وتره هو القطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا كانت النقطة M ذات اللاحقة Z بحيث:

A: $Z=\dfrac{b-ia}{1-i}$

B: $Z-a=e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a)$

C: $a-Z=i(b-Z)$

D: $b-Z=\dfrac{\pi}{2}(a-Z)$

5) نعتبر في المستوي الموجه النقطتين A و B و نرمز بـ I إلى منتصف $[AB]$، وليكن f التشابه المباشر مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$

و ليكن g تشابه مركزه A ونسبته $\dfrac{1}{2}$ وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$

وليكن h التناظر المركزي ذو المركز I.

A: $h\circ g\circ f$ يحول A إلى B وهو دوران

B: $h\circ g\circ f$ هو تناظر محوري محوره هو محور القطعة $[AB]$

C: $h\circ g\circ f$ ليس تشابها.

D: $h\circ g\circ f$ هو إنسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

✓ الحل :

1) الجواب D .
2) الجواب C .
3) الجواب C .
4) الجواب A .
5) الجواب D .

التمرين الثالث :

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) نعتبر المستوي (p) المار بالنقطة $B(1,-2,1)$ وشعاعه الناظم $\vec{n}(-2,1,5)$ والمستوي (R) ذو المعادلة $x+2y-7=0$

ا) برهن أن المستويين (p) و (R) متعامدان

ب) برهن أن تقاطع المستويين (p) و (R) هو المستقيم (Δ) المار من $C(-1,4,-1)$ وشعاع توجيهه هو $\vec{u}(2,-1,1)$

ج) لتكن النقطة $A(5,-2,-1)$ احسب المسافة بين A و (p) ثم المسافة بين A و (R)

د) عين المسافة بين A و (Δ)

2) ليكن من أجل كل عدد حقيقي t النقطة M_t ذات الإحداثيات $(1+2t,3-t,t)$

ا) عين بدلالة t الطول AM والذي نسميه ب $Q(t)$ ونعرف عندئذ دالة Q من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة Q على $\mathbb{R}$. ثم حدد قيمتها الحدية الصغرى

ج) فسر هندسيا القيمة الحدية الصغرى ؟

✓ الحل :

1- ا) شعاع الناظم لـ (R) هو $\vec{r}(1,2,0)$ ولدينا $\vec{r}\cdot\vec{n}=-2+2+0=0$

إذن المستويان (p) و (R) متعامدان .

ب) النقاط المشتركة بين هاذين المستويين تحقق معادلتيهما ومنه نستنتج أن :

$$\begin{cases} x+2y-7=0 \text{ ...... (1)} \\ -2x+y+5z-1=0 \end{cases}$$

من (1) نجد $x=-2y+7$ نعوض x في (2) نجد $y=-z+3$ و منه $x=2z+1$

بوضع $Z=t$ نجد $(S)\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+3 \\ z=t \end{cases}$ وهذه الجملة هي التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

الذي شعاع توجيهه $\vec{u}(2,-1,1)$ ومن أجل $t=-1$

نجد أن إحداثيات C تحقق الجملة و بالتالي C تنتمي إلى (Δ) .

ج) لدينا $d\left(A,(R)\right)=\frac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}}$

$d\left(A,(R)\right)=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$

بنفس الطريقة نجد $d\left(A,(R)\right)=\frac{|5-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

د) في المستوي الذي يشمل النقطة A والعمودي على المستويين (p) و (R) نستطيع تطبيق نظرية فيثاغورث ولدينا ،

$d^2(A,\Delta)=d^2(A,(P))+d^2(A,(R))=\frac{270}{25}+\frac{180}{25}=\frac{450}{25}$ إذن $d(A,\Delta)=3\sqrt{2}$

2- أ) $AM_t^2=(-4+2t)^2+(5-t)^2+(t+1)^2=6t^2-24t+42=6(t^2-4t+7)$

ثلاثي الحدود t^2-4t+7 مميزه هو $\Delta=-12$

وبالتالي لا ينعدم وعليه إشارته موجبة

إذن $AM_t=\sqrt{6(t^2-4t+7)}=\delta(t)$ نستطيع كتابة $t^2-4t+7=(t-2)^2+3$

ب) الدالة δ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا $\delta'(t)=\frac{12t-24}{2\sqrt{6(t^2-4t+7)}}=\frac{6(t-2)}{\sqrt{6(t^2-4t+7)}}$

إشارة $\delta'(t)$ من نفس إشارة $(t-2)$

إذن الدالة δ متزايدة على المجال $]2,+\infty[$ ومتناقصة على المجال $[0,2]$

إذن لها قيمة حدية صغرى عند $t=2$ والتي تساوي $\delta(2)=3\sqrt{2}$

ج) نعلم ان النقطة M_t من المستقيم (Δ) . و من الأسئلة السابقة وجدنا أصغر مسافة بين A و Δ هي $3\sqrt{2}$

إذن بينا بطريقة ثانية كيفية إيجاد المسافة بين A و Δ .

التمرين الرابع :

I - حجر نرد رباعي الوجوه منتظم يملك وجه أزرق (B) ووجهين حمراوين (R) ووجه أخضر (V) ، نفرض ان هذا الحجر متزن.

لعبة تتمثل في القيام برمي هذا الحجر مرتين متواليتين ومستقلتين، وفي كل رمية نسجل لون الوجه المخفي

نعتبر الأحداث التالية :

E الحادث " في اللعبة الوجهان المتحصل عليهما خضراوين "

F الحادث " في اللعبة الوجهان المتحصل عليهما لهما نفس اللون "

1- احسب احتمال الحادثين E و F واحتمال E علما أن F محقق.

2 - نقوم بـ 10 لعبات متماثلة ومستقلة فيما بينهما

احسب احتمال التحصل على الأقل مرتين على الحادث F خلال العشر لعبات.

(نعطي قيمة تقريبية عشرية بتقريب 10^{-3})

II - نريد معرفة إن كان الحجر المستعمل متزنا أم لا ، لذلك نرقم أوجهه من 1 إلى 4 ونقوم برميه 160 مرة .
لتكن n_i عدد مرات ظهور الرقم i الموجود في الوجه المخفي فتحصلنا على النتائج التالية :

الوجه i	1	2	3	4
التكرار n_i	30	48	46	32

ليكن f_i التواتر النسبي و d^2 هو العدد $\sum_{i=1}^{4}\left(f_i-\frac{1}{4}\right)^2$
نحاكي بعد ذلك 1000 مرة التجربة التي تتمثل في سحب رقم عشوائيا 160 مرة من المجموعة : $\{1,2,3,4\}$
ومن أجل كل محاكاة نسحب نعدد $d^2=\sum_{i=1}^{4}\left(F_i-\frac{1}{4}\right)$ حيث F_i هو تواتر ظهور الرقم i
العشري التاسع D_9 لهذه السلسلة الإحصائية لـ 1000 قيمة لـ d^2 يساوي إلى 0,0098 حسب التجربة وبمجازفة قدرها 10% هل يمكننا اعتبار أن الحجر متزن ؟

✓ الحل :

I - 1) بإنشاء شجرة الاحتمالات نجد $P(E)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$
وبنفس الطريقة نجد $P(F)=P(V\cdot V)+P(R\cdot R)+P(B\cdot B)=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$
2) لدينا تجربة برنولي مع $n=10$ و $P=\frac{3}{8}$

لدينا $P_F(E)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{6}{16}}=\frac{1}{6}$

لنحسب احتمال التحصل على الحدث F أقل من مرتين :

P (0 مرة الحدث F) + P (مرة واحدة الحدث F) $= C_{10}^{0}\left(\frac{3}{8}\right)^{0}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{10}+C_{10}^{1}\left(\frac{3}{8}\right)\times\left(\frac{5}{8}\right)^{9}$
$=\frac{7\times5^{10}}{8^{10}}$

احتمال الحصول على الأقل مرتين الحادث F هو $1-\frac{7\times5^{10}}{8^{10}}$ أي بالتقريب 0,936

II - بما أن مجموع التكرارات هو $30+48+32+46$ ويختلف عن 160 فإن الجدول غير صحيح.

(فرنسا ـ 2006)

التمرين الأول :

ليكن $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامد متجانسا للفضاء، نعتبر النقط :
$A(2,4,1)$ ، $B(0,4,-3)$ ، $C(3,1,-3)$ ، $D(1,0,-2)$ ، $E(3,2,-1)$ ،
$I(\frac{3}{5},4,-\frac{9}{5})$

اجب بصحيح أو خطأ بدون تبرير لكل اقتراح من الاقتراحات التالية :

1) معادلة المستوي (ABC) هي $2x+2y-Z-11=0$
2) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
3) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان
4) المستقيم (CD) معرف بتمثيله الوسيطي $(CD)\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+t\\z=1-t\end{cases}$
5) النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AB)

✓ الحل :

1) إحداثيات النقط A ، B ، C تحقق المعادلة $2x+2y-z-11=0$
هذه النقط ليست على استقامة واحدة إذن تعرف عندئذ مستوي
المعادلة $2x+2y-z-11=0$ هي معادلة لمستوي .
إذن معادلة المستوي (ABC) هي $2x+2y-Z-11=0$

2) النقطة E هي المسقط للنقطة D على المستوي (ABC) إذا وفقط إذا كان المستقيم (DE) عمودي على المستوي (ABC) و $E\in(ABC)$ فالشعاع $\vec{n}(2,2,-1)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC)

لدينا $E\in(ABC)$ لكن الشعاعين $\overrightarrow{DE}$ و $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا
ومنه نستنتج ان المستقيم (DE) غير عمودي على المستوي (ABC)
إذن النقطة E ليست المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

3) لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ إذن (AB) و (CD) متعامدان

4) النقطة D إحداثياتها $(1,0,-2)$

لكي تكون الجملة $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$ تمثيلا وسيطيا لـ (CD) يجب على الأقل ان يوجد t حيث

$$\begin{cases} 1=-1+2t \\ 0=-1+t \\ -2=1-t \end{cases}$$

بعد حل هذه الجملة نتحقق انه لا توجد اي قيمة لـ t تحقق الجملة الأخيرة.
نستنتج ان المعادلة الوسطية السابقة ليست المعادلة الوسطية لـ (CD)

5) لنبين الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AB}$ مما يعني ان $I \in (AB)$

1- صحيح
2- خطا
3- صحيح
4- خطا
5- صحيح

التمرين الثاني :

1) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2e^{1-x}$

و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الرسم هي $2Cm$

ا) عين نهايات الدالة f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$ ماذا تستنتج بالنسبة الى (C) ؟

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ محددا دالتها المشتقة f' .

جـ) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم بيانها (C) .

2) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم،
لنعتبر التكامل I_n المعرف بـ

$$I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$$

ا) اوجد علاقة بين I_n و I_{n+1}

ب) احسب I_1 ثم I_2

جـ) اعط تفسيرا هندسيا للعدد I_2 (اظهره على بيان السؤال 1- جـ)).

3- ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0,1]$
ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n
لدينا للتباينة $x^n \le x^ne^{1-x} \le ex^n$

ب) استنتج حصرا لـ I_n ثم حدد نهاية لـ I_n لما n تؤول الى $(+\infty)$.

✓ الحل :

1- أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}\times e=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\times e=0$$

نستنتج أن محور الفواصل مقارب للبيان (C) للدالة f عند $+\infty$

ب) f هي جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=e^{1-x}(-x^2+2x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{2}$	$\searrow$	0

ج) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $2^{1-x}>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-x^2+2x)$

و $-x^2+2x=-x(x-2)$

إذن الدالة f متناقصة على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$ ومتزايدة على المجال $[0,2]$

2) لدينا $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$

أ) لدينا $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx$

بوضع $u(x)=x^{n+1}$ يكون $u'(x)=(n+1)x^n$

$v(x)=-e^{1-x}$ ومنه $v'(x)=e^{1-x}$

إذن $I_{n+1}=\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$

$$=\left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x}\,dx$$

وعليه $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

ب) لحساب I_1 نستعمل التكامل بالتجزئة :

$$I_1=\int_0^1 xe^{1-x}\,dx=\left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}\,dx=\left[(-x-1)e^{1-x}\right]_0^1 e-2$$

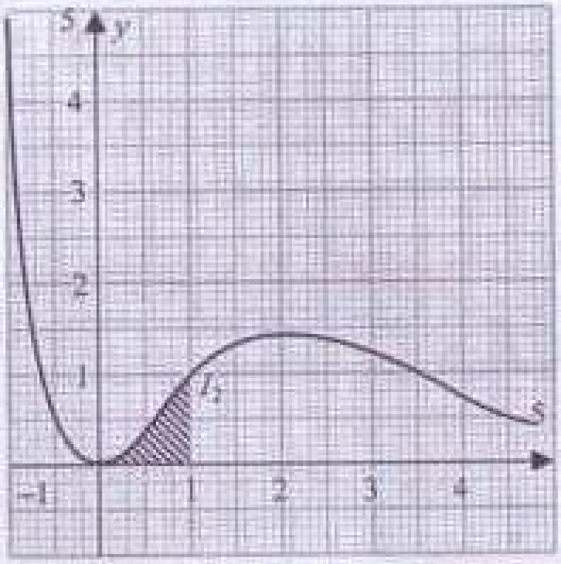
حسب السؤال السابق $I_2=-1+2I_1=2e-5$

ج) I_2 تمثل المساحة المحددة بالبيان (C) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$ ومحور الفواصل

3-أ) من اجل كل $x\in[0,1]$ لدينا $0\le 1-x\le 1$

وبما أن الدالة $(x\mapsto e^x)$ متزايدة على $\mathbb{R}$

يكون لدينا $e^0\le e^{1-x}\le e^1$ وعليه $1\le e^{1-x}\le e$



وبما أنه من اجل كل x من $[0,1]$ لدينا $x^n \geq 0$ فإن $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$

ب) نستنتج عندئذ ان

$$\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e\int_0^1 x^n dx$$

وعليه $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

لكن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

وحسب نظرية الحصر $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

التمرين الثالث :

I - اسئلة الدرس

1) اعط نصي مبرهنة "بيزو" ومبرهنة "غوص"

2) برهن مبرهنة "غوص" باستعمال مبرهنة "بيزو"

II - الهدف هو حل في $\mathbb{Z}$ الجملة $(S)\ \begin{cases} n \equiv 13\ [19] \\ n \equiv 6\ [12] \end{cases}$

1) برن أنه توجد ثنائية (u, v) من الأعداد الصحيحة بحيث $19u + 12v = 1$

(ليس مطلوب في هذا السؤال اعطاء الثنائية)

تحقق أنه من اجل هذه الثنائية يكون العدد $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ حلا للجملة (S)

2- أ) ليكن n_0 حلا للجملة (S)

تحقق أن الجملة (S) تكافئ $\begin{cases} n \equiv n_0\ [19] \\ n \equiv n_0\ [12] \end{cases}$

ب) بين أن الجملة $\begin{cases} n \equiv n_0\ [19] \\ n \equiv n_0\ [12] \end{cases}$ تكافئ $n \equiv n_0\ [12\times19]$

3- أ) أوجد ثنائية (u, v) حلا للمعادلة $19u + 12v = 1$ ثم احسب القيمة الموافقة لـ N

ب) عين مجموعة حلول الجملة (S) (استعمل السؤال 2 - ب)

4) n عدد طبيعي حيث باقي قسمته على 12 هو 6 وباقي قسمته على 19 هو 13 نقسم n على $228 = 12\times19$ ما هو باقي القسمة r لهذه القسمة .

✓ الحل :

I - 1) مبرهنة بيزو ، ليكن a و b عددان صحيحان.

a و b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v بحيث $au + bv = 1$

مبرهنة غوص، لتكن a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة.
إذا قسم a العدد bc وإذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإن a يقسم c
2) إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإنه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $au+bv=1$ بضرب طرفي هذه المعادلة في c تصبح $acu+bcv=c$
إذا كان a يقسم bc فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $bc=ka$
لدينا عندئذ $acu+kav=c$ وعليه $a(cu+kv)=c$ إذن a يقسم c

II - 1) العددان 19 و 12 أوليان فيما بينهما إذن حسب نظرية بيزو يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $19u+12v=1$

$$N=13\times 12v+6\times 19u$$

بما أن $19u+12v=1$ فإن $19u\equiv 1[12]$ و $12v\equiv 1[19]$
لدينا $N\equiv 13\times 12v[19]$ وعليه $N\equiv 13[19]$
$N\equiv 6\times 19u[12]$ وعليه $N\equiv 6[12]$ مما يثبت أن N حل للجملة (S)

2- أ) n_0 حل للجملة (S) هذا يعني أن $n_0\equiv 13[19]$ و $n_0\equiv 6[12]$
إذن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n\equiv n_0[19]$ و $n\equiv n_0[12]$
ب) $n\equiv n_0[19]$ يعني أن $(n-n_0)$ يقبل القسمة على 19
$n\equiv n_0[12]$ يعني أن $(n-n_0)$ يقبل القسمة على يعني على 12
إذن الجملة تكافئ أن $(n-n_0)$ يقبل القسمة على 19 و على 12
لكن 19 و 12 أوليان فيما بينهما إذن $(n-n_0)$ يقبل القسمة على 19 وعلى 12
وهذا يكافئ أن $(n-n_0)$ يقبل القسمة على 12×19 و عليه $n\equiv n_0[12\times19]$
3- أ) لتعيين ثنائية حل لـ $19u+12v=1$ نستعمل خوارزمية إقليدس

الناتج	1	1	1	2
19	12	7	5	2
البواقي	7	5	2	1

أي $-5\times19+8\times12=1$
وبالتالي $(-5,8)$ حل للمعادلة
$19u+12v=1$

يمكننا استعمال الموافقات بحيث أنه إذا كان (u,v) حلا فإن $19u\equiv 1[12]$ لكن $19u\equiv 7u[12]$ و $7\times7\equiv 1[12]$
وعليه نتحصل على حل آخر هو $(7,-11)$
من أجل الثنائية $(-5,8)$ قيمة N الموافقة هي 678
من أجل الثنائية $(7,-11)$ قيمة N الموافقة هي -918
ب) حسب نتيجة السؤال 2- ب) نستطيع القول أن n حل للجملة (S)
إذا وفقط إذا كان $n\equiv 678[12\times19]$ أو $n\equiv -918[12\times19]$
أي أن n من الشكل $228k+678$ أو $228k-918$ مع k عدد صحيح كيفي
وبما أن $678\equiv 222[228]$ و $-918\equiv 222[228]$
ويمكننا القول أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n=228k+222$ مع k عدد صحيح كيفي.
4) العدد n يحقق هذه الشروط إذا وفقط إذا كان $n\equiv 13[19]$ و $n\equiv 6[12]$
أي إذا وفقط إذا كان n حلا للجملة (S)

وبالتالي $n = 228k + 222$ مع $k \in \mathbb{Z}$

بما أن $222 \in \{0,1,2,...,227\}$ فإن الكتابة $n = 228k + 222$ هي القسمة الإقليدية لـ n على 228 إذن باقي قسمة n على 228 هي 222.

التمرين الرابع :

في باحة رماية يقوم رامي بإجراء رميات متتالية لاستهداف كرة قصد فرقعتها احتمال فرقعة الكرة هو 0,2 لكل رمية. الرامي يكف عن الرماية عند فرقعة الكرة، الرميات المتوالية مستقلة فيما بينها.

1- أ) ما هو احتمال أن تبقى الكرة سليمة بعد رميتين ؟

ب) ما هو احتمال أن رميتين تكفيان لفرقعة الكرة ؟

جـ) ما هو الاحتمال p_n لكي تكفي n رمية لفرقعة الكرة ؟

د) من أجل أي قيمة لـ n يكون لدينا $P_n \rangle 0,99$

2) هذا الرامي يشارك في اللعبة التالية :

في أول الأمر يرمي نرد رباعي الوجوه منتظم أوجهه مرقمة من 1 إلى 4 (نهتم بالوجه المخبأ غير الظاهر).

ليكن k رقم الوجه المتحصل عليه، يتوجه بعدها الرامي إلى باحة الرماية أين له الحق في k رمية لفرقعة الكرة .

بين أنه إذا كان حجر النرد متزنا فإن احتمال فرقعة الكرة يساوي إلى 0,4096 (تستطيع استعمال شجرة الاحتمالات).

3) يقوم الرامي بتجريب حجر النرد الرباعي الوجوه قصد معرفة إن كان متزنا أم لا لذلك يقوم هذا الرامي برمي هذا الحجر 200 مرة ويتحصل على الجدول التالي :

الوجه k	1	2	3	4
عدد مخارج الوجه k	58	49	52	41

أ) احسب تواتر المخارج f_k الملاحظ من أجل كل وجه.

ب) نضع $d^2 = \sum_{k=1}^{4} (f_k - \frac{1}{4})^2$ احسب d^2

جـ) نقوم الآن بـ 1000 محاكاة لـ 200 رمية لحجر نرد رباعي الوجوه، ونحسب لكل محاكاة العدد d^2 .

تحصلنا على السلسلة الإحصائية لـ 1000 قيمة لـ d^2 فالنتائج مدونة في الجدول التالي :

القيمة الدنيا min	D_1	Q_1	الوسيط M	Q_3	D_9	القيمة العظمى max
0,00124	0,00192	0,00192	0,00235	0,00345	0,00452	0,01015

بمجازفة 10% هل نستطيع اعتبار هذا الحجر مخدوع (غير متزن)

✓ الحل :

لدينا احتمال فرقعة الكرة عند رمية هو 0,2

إذن احتمال عدم فرقعتها عند رمية هو 0,8

الرميات المتتالية مستقلة فيما بينها.

1) لنسمي C_k الحادث " الكرة تتفرقع في الرمية رقم k "

الحادث العكسي لـ C_k نرمز له ب $\overline{C_k}$ وحسب الفرض فإن الحادثين C_k و C_m مستقلان إذا كان $k \neq m$

أ) الحادث " الكرة تبقى سليمة بعد رميتين " هو $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ بما أن C_1 و C_2 مستقلان فإن :

$$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = P(\overline{C_1}) \times P(\overline{C_2}) = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$$

إذن احتمال أن تبقى الكرة سليمة بعد رميتين هو 0,64

ب) نريد حساب احتمال الحادث " تكفي رميتين لفرقعة الكرة "

الذي حادثه العكسي هو " الكرة غير مفرقعة بعد رميتين "

احتمال الحادث " تكفي رميتين لفرقعة الكرة " هو $0{,}34 = 1 - 0{,}64$

جـ) بنفس طريقة السؤال السابق لدينا :

الحادث " n رمية تكفي لفرقعة الكرة " هو الحادث العكسي للحادث " الكرة لم تفرقع بعد n رمية "

لكن الحادث " الكرة لم تفرقع بعد n رمية " هو $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \dots \cap \overline{C_n}$

هذه الحوادث مستقلة فيما بينها مثنى مثنى واحتمال كل منها هو 0,8

إذن $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \dots \cap \overline{C_n}) = (0{,}8)^n$

وعليه احتمال الحادث " n رمية تكفي لفرقعة الكرة " هو $1 - (0{,}8)^n$ أي

$$P_n = 1 - (0{,}8)^n$$

د) نبحث عن العدد n بحيث $P_n > 0{,}99$ أي $1 - (0{,}8)^n > 0{,}99$

وبالتالي $(0{,}8)^n < 0{,}01$

باستعمال الدالة اللوغاريتمية النيبرية Ln المتزايدة على المجال $]0, +\infty[$

ينتج لدينا $n > \dfrac{Ln(0{,}01)}{Ln(0{,}8)}$ ومنه $n \geq 21$

2) لنستعمل الحادث العكسي والاحتمالات الشرطية

الاحتمال P_k للحادث " التحصل على الوجه k " مع $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ عند رمي حجر النرد هو $P_k = \dfrac{1}{4}$ إذن احتمال عدم فرقعة الكرة علما أننا تحصلنا على الوجه k هو

$$\frac{1}{4} \times (0{,}8)^k$$

إذن حسب قانون الاحتمالات الكلية فإن احتمال عدم فرقعة الكرة هو :

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4} \times (0{,}8)^k = \frac{1}{4} \times 0{,}8 \times \frac{1-(0{,}8)^4}{1-(0{,}8)} = 0{,}5904$$

وعليه احتمال فرقعة الكرة هو $1 - 0{,}5904 = 0{,}4096$

3- أ) نحسب التوترات :

الوجه k	1	2	3	4
عدد مخارج للوجه k	58	49	52	41
التواترات f_k	0,29	0, 245	0, 260	0,205

ب) $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{4} - f_k\right)^2$

$d^2 = (0,29 - 0,25)^2 + (0,245 - 0,25)^2 + (0,26 - 0,25)^2 + (0,205 - 0,25)^2$

$d^2 = 0,00375$

جـ) نلاحظ أن $d^2 \langle D_9$ إذن قيمة d^2 متلائمة بـ 90% مع نتائج محاكاة حول حجر نرد متزن

إذن بمجازفة قدرها 10% نستطيع اعتبار حجر النرد غير متزن.