الجديد في الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

علوم تجريبية . رياضيات . تقني رياضي

الجزء 2

دروس وتطبيقات

دار شريفة

تأليف: أ. حمزة

الدرس **8**

الاحتمالات

1 - الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية

1 - 1 احتمال حادثة (تذكير)

- بصفة عامة نرمز بـ e_1 ، e_2 ، ...... ، e_n إلى النتائج الممكنة أو المخارج لتجربة عشوائية ، نقول عن هذه التجربة أنها تحتوي على عدد منته من المخارج ونرمز بـ Ω إلى مجموعة الإمكانيات ونكتب $\Omega=\{e_1 , e_2 , ... , e_n\}$.
- الحادث A هو مجموعة جزئية من مجموعة الإمكانيات
- الحادث الأولي هو حادث يشمل إمكانية واحدة مثل $A=\{e_2\}$.

نرفق بكل حادث أولي $\{e_i\}$ العدد $p_i=p(e_i)$ الذي يسمى احتمال الحادث $\{e_i\}$

مع $0 \le p_i \le 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

نقول عندئذ أننا عرفنا احتمال على Ω .

- احتمال الحادث A نرمز له بـ $P(A)$ وهو مجموع احتمالات الحوادث الأولية المحتواة في A

إذا كان $p(\Omega)=1$ نقول أن Ω حادث أكيد.

وإذا كان $p(\phi)=0$ نقول أن ϕ حادث مستحيل.

- نقول عن حوادث أولية أنها متساوية الاحتمال إذا كان $p_i=p_j$ وهذا مهما كان العددان i و j .

إذا كان هذا العدد هو n فإن $p_i=\frac{1}{n}$ واحتمال الحادث A يعطى بـ :

$$P(A)=\frac{A \text{ عدد عناصر}}{\Omega \text{ عدد عناصر}}=\frac{A \text{ عدد الحالات الملائمة لتحقيق}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

- تساوي الاحتمال هو فرض نستنتجه من النص بواسطة تعابير مثل رمي زهرة نرد متجانسة، رمي قطعة نقدية متزنة أو اختيار كرة عشوائيا من بين n كرة موجودة في كيس.
وللحصول على تساوي الاحتمال يجب أن تكون مجموعة الإمكانيات مشكلة من n مخرج، لأنه إذا بدلنا هذه المجموعة بمجموعة اخرى حتى ولو كان الاختيار فيها عشوائي، فإن تساوي الاحتمال بشكل عام غير محقق (نفقده).

مثال -

كيس يحتوي على 7 كرات، منها 4 حمراء و 3 بيضاء، نسحب عشوائيا كرة ونسجل لونها.

إذا أخذنا مجموعة الإمكانيات $\{R_1, R_2, R_3, R_4, B_1, B_2, B_3\}$ فإن كل حادث أولي له احتمال $\frac{1}{7}$ لكن إذا أخذنا مجموعة الإمكانيات $\{R, B\}$ واخترنا كرة عشوائيا فإن الحادثتين الأوليتين $\{R\}$ ، $\{B\}$ غير متساويتي الاحتمال لأن:
$P(R)=\frac{4}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{7}$.

- الحادث $\overline{A}$ هو مجموعة المخارج (الإمكانيات) التي تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A ويسمى بالحادث العكسي للحادث A ولدينا:
$P(A)+P(\overline{A})=1$ لأن $\overline{A}\cup A=\Omega$
- ليكن A و B حادثان كيفيان.
• الحادث $A\cap B$ (A و B) هو الحادث المشكل من مخارج تنتمي في نفس الوقت إلى A و B والذي يتحقق إذا تحقق A و B في نفس الوقت.
• الحادث $A\cup B$ (A أو B) هو الحادث المشكل من مخارج تنتمي على الأقل إلى واحدة من الحادثين A و B والذي يتحقق إذا تحقق على الأقل حادث واحد من الحادثين A و B
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

وإذا كان A و B حادثين غير متلائمين $(A\cap B=\phi)$ فإن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
وبشكل عام إذا كان A هو إتحاد حوادث A_1 ، A_2 ، ..... ، A_n غير متلائمة مثنى مثنى فإن:
$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$ ويمكن إثبات ذلك بالتراجع.

1 - 2 المتغير العشوائي و قانون الاحتمال

لتكن $\Omega=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية التي نُعرف عليها احتمال.
حالما نرفق كل مخرج لتجربة عشوائية بعدد حقيقي نكون قد عرفنا متغير عشوائي على Ω والذي نرمز له بـ X ، Y أو Z ....
نقول أن المتغير العشوائي X هو دالة من Ω في $\mathbb{R}$.
نرمز بـ x_1 ، x_2 ، ...... ، x_q إلى قيم X حيث $q < n$.
الحادث " X يأخذ القيمة x_i " يرمز له بـ $(X=x_i)$ واحتماله هو p'_i ونكتب $p'_i=P(X=x_i)$.
الحادث $(X=x_i)$ هو الحادث الذي يشمل كل المخارج التي صورها بـ X هي x_i
- مجموعة الثنائيات (x_i, p'_i) بالتعريف هي قانون احتمال للمتغير العشوائي X وبشكل عام نعرضه في جدول.

نقول عندئذ أننا عرفنا قانون احتمال للمتغير العشوائي X انطلاقا من الاحتمال المعرف على Ω.

مثال -

نرمي حجر نرد متجانس مرقم من 1 إلى 6، نربح 10 دج إذا ظهر الرقم 1 ونربح 50 دج إذا ظهر الرقم 6، ونخسر 20 دج إذا ظهرت الأرقام الأخرى.
X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسبة لها.
عين قانون احتمال المتغير العشوائي X.

الحل

قيم المتغير العشوائي هي 10 ، 50 ، 20-.
$p'_1=p(X=10)=\frac{1}{6}$ ، $p'_2=p(X=50)=\frac{1}{6}$
$p'_3=p(X=-20)=\frac{4}{6}$ فيكون لدينا الجدول المجاور

X	10	50	-20
p'_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1 - 3 الأمل الرياضي - التباين - الانحراف المعياري

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X نرمز له بـ $E(X)$ والمعرف بـ:
$$E(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i\times P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{k} x_i p'_i$$
- التباين للمتغير العشوائي X نرمز له بـ $V(X)$ والمعرف بـ:
$$V(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-E(X))^2\times p'_i \quad \text{أو} \quad V(X)=\sum_{i=1}^{k}x_i^2 p'_i-E^2(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو $\sigma(X)$ حيث $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

تمرين تدريبي 1

E مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة من 10 إلى 30، نختار عشوائيا عددا من E، ولنعتبر الحوادث A ، B ، C التالية:
A الحادث "العدد المختار مضاعف لـ 3"
B الحادث "العدد المختار مضاعف لـ 2"
C الحادث "العدد المختار مضاعف لـ 6"
- احسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$ ، $P(A\cap C)$ ، $P(A\cup C)$

الحل

العبارة "نختار عشوائيا" تعني أننا موجودون في حالة تساوي الاحتمال.
عدد عناصر المجموعة E هو 21 عنصرا، إذن هناك 21 حادث أولي متساوي الاحتمال.
- توجد 7 أعداد من E مضاعفة للعدد 3 إذن عدد عناصر A هو 7
وبالتالي $P(A)=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$

- يوجد 11 عددا من E مضاعف للعدد 2 لأن $\left(\frac{30-10}{2}+1=11\right)$

إذن عدد عناصر B هو 11 وبالتالي $P(B)=\frac{11}{21}$

- يوجد 4 أعداد من E مضاعفة للعدد 6 وبالتالي عدد عناصر C هي 4

إذن $P(C)=\frac{4}{21}$

- الحادث $A\cap B$ هو " العدد المختار مضاعف لـ 2 ومضاعف لـ 3 " أي مضاعف لـ 6

إذن $A\cap B=C$ وبالتالي $P(A\cap B)=P(C)=\frac{4}{21}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(C)=\frac{7}{21}+\frac{11}{21}-\frac{4}{21}=\frac{14}{21}$$

- بما أن C محتواة في A فإن $A\cap C=C$.

إذن $P(A\cap C)=P(C)=\frac{4}{21}$ و $P(A\cup C)=P(A)=\frac{7}{21}$.

تمرين تدريبي ❷

كيس يحتوي على 5 كرات، ثلاث منها لونها أسود مرقمة بـ 1 ، 2 ، 3 وكرتان لونهما أبيض مرقمتان بـ 1 ، 2 نسحب عشوائيا كرتين في نفس الوقت من الكيس ونسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء.

أ) أعط مجموعة قيم X .

ب) حدد قانون احتمال X .

جـ) احسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

✓ الحل

مجموعة الإمكانيات هي $\left\{\begin{array}{lll} N_2 B_1 , & N_1 B_2 , & N_1 B_1 \\ N_3 B_2 , & N_3 B_1 , & N_2 B_2 \\ N_2 N_3 , & N_1 N_3 , & N_1 N_2 , B_1 B_2 \end{array}\right\}$ عدد الإمكانيات هو 10.

أ) في كل السحبات نتحصل إما على كرتين لونهما أبيض أو كرة واحدة بيضاء أو لا نتحصل على أية كرة بيضاء و بالتالي مجموعة قيم X هي $2,1,0$

ب) الحادث $(X=0)$ هو ظهور كرتين سوداويتين وعدد عناصر الحادث $(X=0)$ هو 3 .

إذن $P_1=P(X=0)=\frac{3}{10}$

- الحادث $(X=1)$ هو ظهور كرة بيضاء وكرة سوداء وعدد عناصر هذا الحادث هو 6 .

إذن $P_2=P(X=1)=\frac{6}{10}$

- الحادث $(X=2)$ هو ظهور كرتين بيضاويتين وعدد عناصر هذا الحادث هو 1 .

إذن $P_3=P(X=2)=\frac{1}{10}$

ومنه قانون احتمال X هو كما في الجدول المجاور:

X	0	1	2
P_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

جـ) $E(X)=x_1\ p_1+x_2\ p_2+x_3\ p_3$

$$=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{8}{10}$$

$$V(X)=x_1^2\ p_1+x_2^2\ p_2+x_3^2\ p_3-E^2(X)=0+\frac{6}{10}+4\times\frac{1}{10}-\frac{64}{100}$$

$$=\frac{60+40-64}{100}=\frac{36}{100}=0,36$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0,36}=0,6$$

❷ - الاحتمالات الشرطية

♦ مثال -

كيس يحتوي على 5 كرات، ثلاث منها سوداء و 2 حمراء .
نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع.

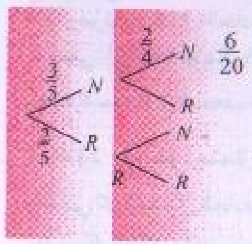
1) أ) لعد كل المخارج الممكنة ارسم شجرة الإمكانيات ولتكن A .

ب) ما هو احتمال الحادثة " نتحصل على كرة سوداء ثم سوداء أي $N-N$ "

جـ) احسب احتمال الحوادث التالية $N-R$ ، $R-N$ ، $R-R$.

2) على تفرعات الشجرة B في المستوى الأول كتبنا احتمالات سحب كرة حمراء (R) وكرة سوداء (N) في السحب الأول.

في المستوى الثاني كتبنا احتمالات سحب كرة حمراء (R) أو كرة سوداء (N) في السحب الثاني وهذا يأخذ بعين الاعتبار الاختيار الأول (الإمكانية الأولى) وهذه الاحتمالات شرطية.



أ) اعط معنى للعدد $\frac{3}{5}$ في المستوى الأول.

ثم $\frac{2}{4}$ في المستوى الثاني.

ب) اكمل الشجرة (B) بالاحتمالات المتبقية.

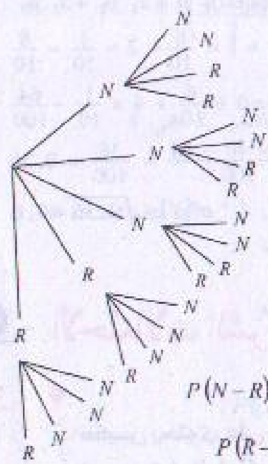
3) في السؤال الأول وجدنا $P(N-N)=\frac{6}{20}$ وهو جداء احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول واحتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما أننا سحبنا كرة سوداء في السحب الأول.

- تحقق أنه نطبق نفس العملية بالنسبة للحوادث الثلاثة التالية :

$R-R$ ، $R-N$ ، $N-R$

✓ الحل

1) أ) في السحب الأول لدينا 3 إمكانيات لظهور N وإمكانيتين لظهور R



إذن لدينا 5 فروع للسحب الأول

كل فرع من الشجرة في السحب الأول يتفرع إلى أربعة فروع لأن في السحب الثاني لدينا 4 كرات فقط .

إذن عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على التوالي بدون إرجاع الكرة إلى الكيس هي

$5 \times 4 = 20$

الحوادث المحصل عليها متساوية الاحتمال.

ب) عدد عناصر الحادث " $N-N$ " هو 6

ومنه $P(N-N)=\frac{6}{20}$

جـ) عدد عناصر الحادث " $N-R$ " هو 6 ومنه $P(N-R)=\frac{6}{20}$

- عدد عناصر الحادث " $R-N$ " هو 6 ومنه $P(R-N)=\frac{6}{20}$

- عدد عناصر الحادث " $R-R$ " هو 2 ومنه $P(R-R)=\frac{2}{20}$

2) أ) - العدد $\frac{3}{5}$ هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول ونرمز لهذا الحادث بـ A

إذن $P(A)=\frac{3}{5}$

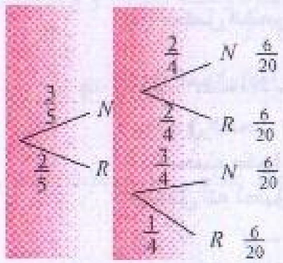
- العدد $\frac{2}{4}$ هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما اننا تحصلنا على كرة سوداء في السحب الأول.

إذا رمزنا بـ B إلى الحادث " الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني "

نسمي $P_A(B)$ احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الثاني علما أننا تحصلنا على كرة سوداء في السحب الأول وعليه $P_A(B)=\frac{2}{4}$

- العدد $\frac{6}{20}$ هو احتمال الحصول على كرة سوداء في السحب الأول وكرة سوداء في السحب الثاني أي احتمال الحادث $(A\cap B)$

إذن $P(A\cap B)=\frac{6}{20}$



ب) لاحظ أن مجموع الاحتمالات المدونة على التفرعات النابعة من نفس العقدة يساوي 1

(قانون العقد) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

- الاحتمال الموجود في نهاية المسلك هو جداء الأعداد المكتوبة على الفروع المشكلة لهذا المسلك

فمثلا $P(A\cap B)=\frac{6}{20}$ $\quad \bullet\!\xrightarrow{P_A(B)=\frac{2}{4}} N \quad \bullet\!\xrightarrow{P(A)=\frac{3}{5}} N$

$\frac{6}{20}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$ اي $P(A)\times P_A(B)=P(A\cap B)$

3) $P(N-R)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$

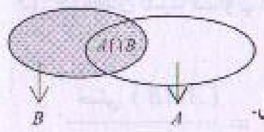
$P(R-N)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$

$P(R-R)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$.

◆ تعريف

نعتبر المجموعة Ω المعرف عليها الاحتمال P وليكن A و B حادثين من Ω حيث $P(A)\neq 0$.
احتمال وقوع الحادث B علما ان الحادث A قد وقع هو العدد الذي نرمز له بـ $P_A(B)$ والمعرف بـ :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$



نسمي هذا النوع من الاحتمال بالشرطي وله جميع خواص الاحتمال.

ملاحظة

1) الاحتمال $P_A(B)$ يرمز له كذلك بـ $P(B/A)$

2) Ω مجموعة الإمكانيات و A و B حادثان غير خاليين.

لما يتحقق A فإن المخارج التي تحقق B هي المخارج المحتواة في $A\cap B$ ،
وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق B علما ان A قد تحقق فهي إذن عدد عناصر $A\cap B$ والتي نرمز لها بـ اصلي $(A\cap B)$
وبما ان A محقق فإن مخارج A تلعب دور الحالات الممكنة لـ B وليكن اصلي A هو عددها بافتراض تساوي الاحتمال نتحصل على :

$$P_A(B)=\frac{\text{اصلي }(A\cap B)}{\text{اصلي }(A)}=\frac{\dfrac{\text{اصلي }(A\cap B)}{\text{اصلي }\Omega}}{\dfrac{\text{اصلي }(A)}{\text{اصلي }(\Omega)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

◆ خواص

1) من اجل كل حادث B لدينا $0 \leq P_A(B) \leq 1$

2) $P_A(B)+P_A(\overline{B})=1$

3) في حالة تساوي الاحتمال :

$$P_A(B)=\frac{\text{عدد المخارج الملائمة لـ } A\cap B}{\text{عدد المخارج الملائمة لـ } A}$$

4) $P(A\cap B)$ يحسب بطريقتين :

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$ مع $P(B)\times P(A)\neq 0$

◆ **الإثبات**

1) $A\cap B$ هي مجموعة جزئية من A إذن $0 \le P(A\cap B) \le P(A)$

ومنه $0 \le \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \le 1$ أي $0 \le P_A(B) \le 1$

2) $P_A(B)+P_A(\overline{B})=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}+\dfrac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)}=\dfrac{P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})}{P(A)}$

لكن $A=(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})$ و $A\cap B$ و $A\cap \overline{B}$ حادثين غير متلائمين.

إذن $P((A\cap B)\cup(A\cap \overline{B}))=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})=P(A)$

وبالتالي $P_A(B)+P_A(\overline{B})=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$

3) إذا كان لدينا تساوي الاحتمال فإن:

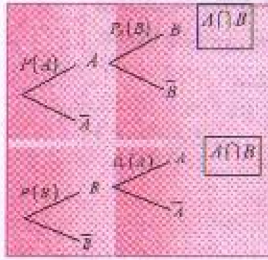
$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\dfrac{\text{أصلي }(A\cap B)}{\text{أصلي }\Omega}}{\dfrac{\text{أصلي }(A)}{\text{أصلي }\Omega}}=\frac{\text{أصلي }(A\cap B)}{\text{أصلي }A}$$

4) $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ .... (1)

$P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ .... (2)

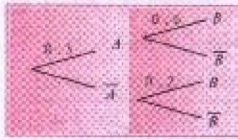
من (1) و (2) نتحصل على $P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)=P_B(A)\times P(B)$

ملاحظة



- تسمح لنا المساواة $P_A(B)\times P(A)=P_B(A)\times P(B)$ بحساب أحد أربعة أعداد بمعرفة ثلاثة منها.
- نعتبر على شجرة الاحتمالات مستويين من الفروع، الأول يشير إلى احتمال الحادث A والثاني يسمح لنا بإظهار الاحتمال الشرطي $P_A(B)$ ، و على شجرة احتمالات أخرى نستطيع البدء بـ B ثم $P_B(A)$.

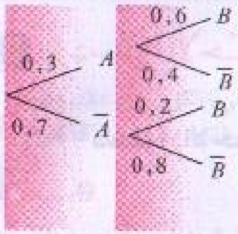
تمرين تدريبي ❶



1) أكمل الاحتمالات الناقصة على الشجرة المقابلة.
2) احسب $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap \overline{B})$ ، $P(\overline{A}\cap B)$

✓ الحل

1) من الشجرة نجد $P(A)=0,3$ و $P_A(B)=0,6$



لإتمام الشجرة نستعمل الدستور $P(\overline{A})=1-P(A)$

إذن $P(\overline{A})=1-P(A)=0,7$

وباستعمال قانون العقد نجد $P_A(\overline{B})=0,4$ و $P_{\overline{A}}(\overline{B})=0,8$

2) $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0,3\times 0,6=0,18$

$P(A\cap \overline{B})=P(A)\times P_A(\overline{B})=0,3\times 0,4=0,12$

$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=0,7\times 0,2=0,14$

تمرين تدريبي ❷

كيس يحتوي على 20 كرة منها 15 بيضاء (b) و 5 سوداء (n) ، نسحب على التوالي كرتين بدون إرجاع الكرة الأولى إلى الكيس.

احسب احتمال الحوادث التالية :

E " الكرتين بيضاويتين "

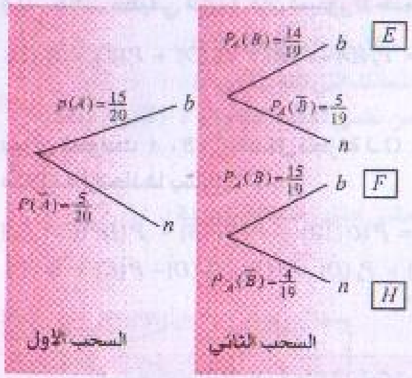
F " الكرة الأولى سوداء والكرة الثانية بيضاء "

G " الحصول على اللونين "

H " الكرتين سوداويتين "

✓ الحل

ليكن A الحادث " الكرة الأولى بيضاء " و B الحادث " الكرة الثانية بيضاء ".



- الحادث E هو $A\cap B$

إذن $P(E)=P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$

$=\dfrac{15}{20}\times\dfrac{14}{19}=\dfrac{42}{76}$

- الحادث F هو $\overline{A}\cap B$

إذن $P(F)=P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$

$=\dfrac{5}{20}\times\dfrac{15}{19}=\dfrac{15}{76}$

- الحادث G هو $(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

لكن $\overline{A}\cap B=F$

إذن $P(G)=P(F)+P(A\cap \overline{B})$

لأن الحادثين $A\cap \overline{B}$ و F غير متلائمين.

$P(G)=\dfrac{15}{76}+P(A)\times P_A(\overline{B})$

$=\dfrac{15}{76}+\dfrac{15}{20}\times\dfrac{5}{19}=\dfrac{15}{76}+\dfrac{15}{76}=\dfrac{30}{76}$

- الحادث H هو $\overline{A}\cap \overline{B}$

$P(H)=P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(\overline{B})=\dfrac{5}{20}\times\dfrac{4}{19}=\dfrac{1}{19}$

③ - دستور الاحتمالات الكلية – شجرة الاحتمالات

3 - 1 دستور الاحتمالات الكلية

مبرهنة ❶

A حادث و $\overline{A}$ حادثه العكسي و D حادث كيفي إذن :

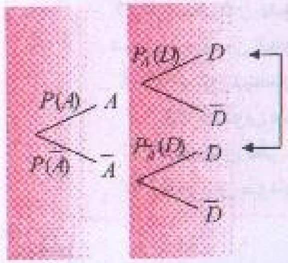
$$P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(D)$$

◆ الإثبات

D هو اتحاد الحادثين الغير متلائمين $D\cap A$ و $D\cap \overline{A}$

أي $D=(D\cap A)\cup(D\cap \overline{A})$

$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap \overline{A})$$
$$=P(A)\times P_A(D)+P_{\overline{A}}(D)\times P(\overline{A})$$



تسمى العلاقة $P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(D)$

بدستور الاحتمالات الكلية.

مبرهنة ❷ (تعميم)

إذا كانت A ، B ، C ثلاثة حوادث تشكل تجزئة لمجموعة الإمكانيات Ω (حوادث غير متلائمة)

و D حادث كيفي من Ω فإن دستور الاحتمالات الكلية هو :

$$P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$$

الإثبات

بما أن الحوادث A ، B ، C تشكل تجزئة لـ Ω فإن الحوادث $D\cap A$ و $D\cap B$ و $D\cap C$ غير متلائمة واتحادها يساوي D

إذن $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$

$$=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$$

ملاحظة

نستطيع تعميم المبرهنة (2) إلى أكثر من ثلاثة حوادث بحيث أنها تشكل تجزئة للمجموعة Ω

إذا كانت الحوادث $C_1, C_2, ..., C_n$ تشكل تجزئة لـ Ω (أحداث غير متلائمة مثنى مثنى) فإنه من أجل كل حادث كيفي A لدينا :

$$P(A)=P(A\cap C_1)+P(A\cap C_2)+...+P(A\cap C_n)$$

وبما أنه من أجل كل i لدينا $P(A\cap C_i)=P(C_i)\times P_{C_i}(A)$

فإن $P(A)=P(C_1)\times P_{C_1}(A)+P(C_2)\times P_{C_2}(A)+...+P(C_n)\times P_{C_n}(A)$

3 - 2 شجرة الاحتمالات

كل تجربة عشوائية نستطيع وصفها بواسطة شجرة الاحتمالات التي تتكون من عقد وفروع نابعة من هذه العقد، وكل عقدة من هذه الشجرة توافق حالة لهذه التجربة وانطلاقا من كل حالة من هذه الحالات نعرف قيمة احتمال الحالة الموالية لها.

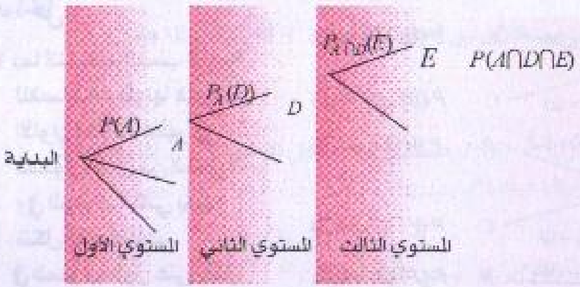
على الفرع النابع من البداية A ——• نكتب $P(A)$

وعلى الفرع AD النابع من A (D ——• A ——•) نكتب $P_A(D)$.

وعلى الفرع DE النابع من D (E ——• D ——• A ——•) نكتب $P_{A\cap D}(E)$ وفي نهاية كل مسلك نكتب احتمال تقاطع الحوادث المكتوبة على الفروع المشكلة لهذا المسلك :

$P(A\cap D\cap E)$ E ——• D ——• A ——• وبهذه الكيفية نكمل إنشاء الشجرة.

مسلك كامل من البداية إلى نهاية الشجرة يمثل تقاطع كل الحوادث التي نصادفها على هذا المسلك ، تطابق بين المسلك والحادث الذي يمثله. على شجرة الاحتمالات تطبق القواعد التالية :



- احتمال مسلك هو جداء الاحتمالات المكتوبة على كل فرع من هذا المسلك.
- احتمال حادث كيفي E هو مجموع احتمالات المسالك التي تقودنا إلى E.
- مجموع الاحتمالات المكتوبة على الفروع النابعة من نفس العقدة يساوي 1 (قانون العقد).

◆ مثال -

A ، B ، C ثلاثة حوادث غير متلائمة مثنى مثنى مشكلة تجزئة لـ Ω

و D حادث كيفي من Ω

مجموع الاحتمالات المدونة على الفروع النابعة من نفس العقدة يساوي 1

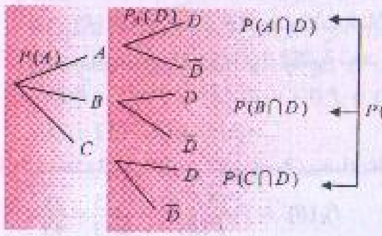
وعليه $P(A)+P(B)+P(C)$

- احتمال الحادث الذي يوافق المسلك $(A\cap D)$ D ——• A ——•

هو $P(A\cap D)=P(A)\times p_A(D)$

- احتمال الحادث D هو مجموع احتمالات المسالك التي تقودنا إلى D وعليه :

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$



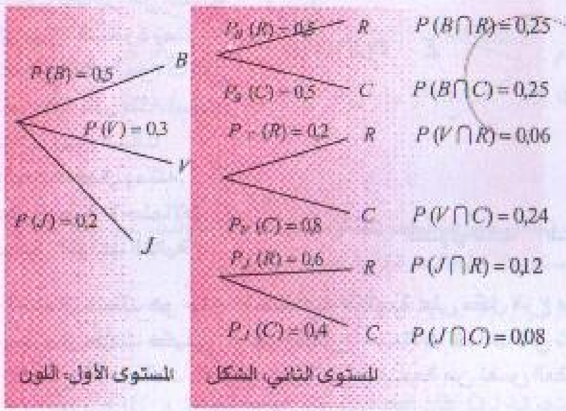
تمرين تدريبي 1

كيس يحتوي على قصاصات بثلاثة ألوان، نصفها أبيض (B) و $\frac{3}{10}$ منها أخضر (V) وخمسها أصفر (J)، ولتكن 50% من القصاصات البيضاء دائرية الشكل (R)، 20 % من القصاصات الخضراء دائرية الشكل و 60 % من الصفراء دائرية الشكل كذلك، أما البقية فهي مربعة الشكل (C).

نسحب عشوائيا قصاصة من الكيس.

1) مثل بواسطة شجرة الاحتمالات كل الاحتمالات التي تصادفها على الشجرة.
2) ما هو احتمال أن تكون القصاصة دائرية الشكل ؟
3) إذا علمت أنها دائرية الشكل فما هو احتمال أن تكون بيضاء؟ خضراء؟ صفراء؟

الحل



1) بما أننا نعلم النسب المئوية للقصاصات بلونها فإن الألوان الثلاثة تظهر في المستوى الأول من الشجرة. وفي المستوى الثاني يظهر شكل القصاصات.
في المستوى الأول على كل فرع نكتب النسب المئوية التي تترجم احتمال سحب كل لون وفي المستوى الثاني نظهر الاحتمالات الشرطية المعطاة بنسب القصاصات الدائرية أو المربعة لكل لون وعليه إذا رمزنا بـ R إلى الحادث "سحب قصاصة دائرية"، فإننا نكتب $R_B(R) = 0,5$ على الفرع BR.

2) لدينا $R = (R\cap B) \cup (R\cap V) \cup (R\cap J)$

الحوادث $R\cap J$ ، $R\cap V$ و $R\cap B$ غير متلائمة

إذن $P(R)$ هو مجموع الاحتمالات الثلاثة.

وحسب دستور الاحتمالات الكلية نجد:

$$P(R) = P(B)\times P_B(R) + P(V)\times P_V(R) + P(J)\times P_J(R)$$
$$= 0,25+0,06+0,12 = 0,43$$

3) ـ احتمال أن تكون القصاصة بيضاء علما أنها دائرية هو $P_R(B)$ حيث:

$$P_R(B) = \frac{P(R\cap B)}{P(R)} = \frac{0,25}{0,43} = \frac{25}{43}$$

ـ احتمال أن تكون القصاصة خضراء علما أنها دائرية هو $P_R(V)$ حيث:

$$P_R(V) = \frac{P(R\cap V)}{P(R)} = \frac{0,06}{0,43} = \frac{6}{43}$$

ـ احتمال أن تكون القصاصة صفراء علما أنها دائرية هو $P_R(J)$ حيث:

$$P_R(J) = \frac{P(R\cap J)}{P(R)} = \frac{0,12}{0,43} = \frac{12}{43}$$

بطريقة أخرى نجد:

$$P_R(J) = 1-(P_R(B)+P_R(V)) = 1-(\frac{25}{43}+\frac{6}{43}) = 1-\frac{31}{43} = \frac{12}{43}$$

4 - الاستقلالية في الاحتمالات

4 - 1 الأحداث المستقلة

• **تعريف**

نقول عن حادثين A و B أنهما مستقلان من أجل الاحتمال P إذا وفقط إذا كان
$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

• **خاصية**

الحادثان A و B بحيث $P(B)\times P(A) \neq 0$ مستقلان من أجل الاحتمال P إذا وفقط إذا كان $P(A) = P_B(A)$ أو $P(B) = P_A(B)$

• **الإثبات**

لدينا من جهة $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ ومن جهة أخرى:

$P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B)$ و $P(A\cap B) = P(B)\times P_B(A)$

إذن نستنتج $P(A)\times P(B) = P(A)\times P_A(B)$ و $P(A)\times P(B) = P(B)\times P_B(A)$

ومنه ينتج $P(B) = P_A(B)$ و $P(A) = P_B(A)$

ملاحظة

1) كل حادثين غير خاليين وغير متلائمين فإنهما غير مستقلين.
2) - المساواة $P(A) = P_B(A)$ تعني أن تحقق الحادث A غير مرتبط بتحقق الحادث B
- المساواة $P(B) = P_A(B)$ تعني أن تحقق الحادث B غير مرتبط بتحقق الحادث A
3) رأينا في إنشاء شجرة الإمكانيات والاحتمالات أنه من أجل فرع نابع عن عقدة غير ابتدائية مثلا C ـــ B كتبنا $P_X(C)$ حيث X هو الحادث الناتج من تقاطع كل الحوادث الموجودة على هذا المسلك من البداية إلى B.
وفي حالة الاستقلالية يكفي أن نكتب $P(C)$.

4 - 2 التجارب العشوائية المستقلة

• **تعريف**

لتكن E_1 و E_2 تجربتين عشوائيتين، مجموعتي مخارجهما Ω_1 ، Ω_2 على الترتيب. نقول عن E_1 و E_2 أنهما مستقلتين إذا كان كل حادث من مستقل عن كل حادث من E_2.

◆ **خاصية**

E تجربة عشوائية تتضمن عدد منته من الاختبارات و S حادث مرتبط بالتجربة E .
إذا كررنا n مرة هذه التجربة E بنفس الطريقة و في نفس الشروط و إذا كانت التجارب E_1 ، E_2 ، .... ، E_n مستقلة فإن احتمال الحادث $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap ... \cap S_n$ يساوي $\underbrace{P(S) \times P(S) \times .... \times P(S)}_{n \text{ مرة}}$ أي $(P(S))^n$

مثال - 1

E هي التجربة « رمي حجر النرد » و S الحادث « الحصول على رقم فردي »
إذن $P(S) = \frac{3}{6} = 0.5$.
احتمال الحصول 4 مرات على عدد فردي في الرميات الأربعة المتتالية لنفس الحجر يساوي $(P(S))^4$ اي $(0.5)^4$

مثال - 2

U_1 كيس يحتوي على حروف كلمة $HOUDA$ و U_2 كيس اخر يحتوي على كلمة $BASET$ و U_3 كيس ثالث حروفه ALI .
نسحب عشوائيا حرفا من U_1 ثم حرفا من U_2 ثم حرفا من U_3 وتسجل الحروف المحصل عليها حسب ترتيب السحب ، تقبل أن اختيار حرف من كيس مستقل عن كل الاختيارات التي سبقت.
- احسب احتمال الحادث « نتحصل على ABA ».

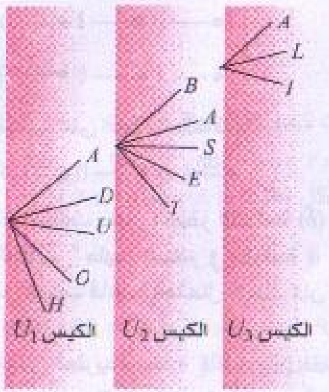
الحل

نبدا بإنشاء الشجرة الموافقة لهذه التجربة :
الفرع A ——● مثلا هو الحادث « سحب الحرف A من U_1 »
ابتداء من العقدة A هناك خمسة مخارج ممكنة ، نفس الشيء بالنسبة إلى العقد D ، U ، O ، H .
ابتداء من الحرف B هناك ثلاثة مخارج ممكنة والتي تمثل الحروف الموجودة في الكيس U_3 .
نفس الشيء بالنسبة إلى الحروف A ، S ، E ، T .
على الفرع B ——● A نسجل احتمال الحادث « سحب B من U_2 علما اننا سحبنا A من U_1 »
لكن حسب الفرض هذا الحادث مستقل عن A .
إذن احتماله هو احتمال الحادث « سحب B من U_2 » والذي يساوي $\frac{1}{5}$.
هذا الطرح يبقى صحيحا بالنسبة إلى كل الفروع الأخرى .
لحساب احتمال الحادث « ABA » ليس من الضروري إنشاء كل الشجرة.
الحادث « ABA » نتحصل عليه بالمسلك الوحيد :

$$\bullet \xrightarrow{\frac{1}{5}} A \xrightarrow{\frac{1}{5}} B \xrightarrow{\frac{1}{3}} A \qquad P(A \cap B \cap A)$$

إذن حسب قاعدة حساب احتمال مسلك

فإن $P(ABA) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{75}$



نستطيع اعتبار هذه التجربة بمثابة تتالي ثلاث تجارب ،
الأولى سحب حرف من U_1
والثانية سحب حرف من U_2
والثالثة سحب حرف من U_3 ،
لقد فرضنا أن هذه التجارب مستقلة أي أن مخارج كل منها غير مرتبطة بكل السحابات التي سبقتها.
المخرج (e_1 , e_2 , e_3) في التجربة الكلية هو قائمة مكونة من مخارج التجارب المستقلة.
في هذه الشروط يكون لدينا
$P(e_1, e_2, e_3) = P_1(e_1) \times P_2(e_2) \times P_3(e_3)$
حيث: P_i يرمز إلى قانون احتمال التجربة ذات الرتبة i

ملاحظة

نعلم أن دراسة تجربة عشوائية انجزت فعليا تسري وفق نموذج نظري أنشئ مسبقا.
الاستقلالية بين بعض الحوادث هو فرض نموذج نابع من تحليل التجربة.
التجربة أعطت ان هذا الفرض يكون جليا في بعض التجارب المرجعية مثل :
- رمي عدة أحجار نرد أو قطعة نقدية.
- سحب بدون شرط من أكياس مختلفة .
- الرمي المتوالي لنفس القطعة النقدية.
- سحب بالإرجاع من نفس الكيس.
- رمي حجر النرد n مرة متتالية.

تمرن تدريبي 1

لتكن a ، b ، c ثلاث قطع نقدية، القطعة a متزنة والأخرتين متشابهتين ومزيفتين نرمز بالصفر إذا ظهر الظهر P وبالواحد إذا ظهر الوجه (F).
بالنسبة إلى القطعة a لدينا $P(0) = P(1) = 0.5$.
بالنسبة إلى القطعتين الأخرتين لدينا $P(0) = 0.7$ و $P(1) = 0.3$
نرمي القطع الثلاثة المعطاة وناخذ كمخرج الثلاثيات (e , f , g) حيث e ، f ، g تمثل على التوالي الأوجه الظاهرة للقطع a ، b ، c .
تقبل أن نتيجة كل قطعة مستقلة عن نتائج القطعتين الأخرتين.
ما هو احتمال الحادث " التحصل مرتين فقط على الظهر P " ؟

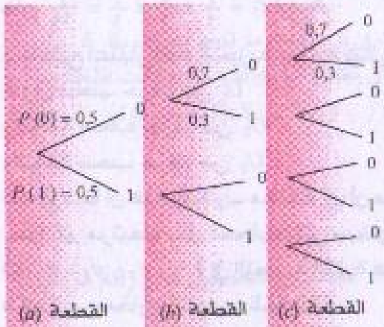
الحل

نبدا بإنشاء شجرة الاحتمالات.
يظهر جليا أن ثلاثة مسالك فقط التي تحقق الحادث " التحصل مرتين فقط على الظهر P " و هي :

1 — 0 — 0 —

0 — 1 — 0 —

0 — 0 — 1 —



لنكتب على الأولى احتمالاتها

1 $\xleftarrow{0.7}$ 0 $\xleftarrow{0.7}$ 0 $\xleftarrow{0.5}$

لأن الحادث ظهور الصفر للقطعة (b) مستقل عن الحادث " ظهور الصفر في القطعة a "

إذن حسب قاعدة احتمال مسلك فإن

$P(0,0,1)=0.5\times 0.7\times 0.7=0.245$.

بنفس الطريقة نجد : $P(0,1,0)=0.5\times 0.3\times 0.7=0.105$ و $P(1,0,0)=0.5\times 0.7\times 0.7=0.245$

إذا رمزنا بـ B إلى الحادث " الحصول على الظهر مرتين " فإن :

$$P(B)=P(0,0,1)+P(0,1,0)+P(1,0,0)$$
$$=0.245+0.105+0.245=0.595$$

تمرين تدريبي 2

نعتبر سيارة من نوع كليو (CLIO 97) ليست في حالة جيدة ولنعتبر الحادثين :

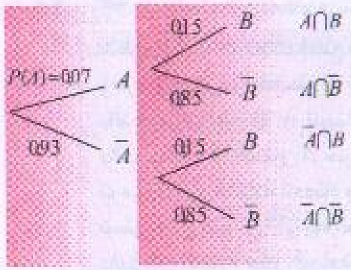
A « السيارة لها عطب في المحرك » و B « السيارة لها عطب في العجلة »

لدينا $P(A)=0.07$ و $P(B)=0.15$

1) هل الحادثان A و B مستقلان ؟

2) ما هو احتمال أن تكون السيارة قابلة للسير ؟

الحل



1) من النص نفهم أن الحادثين A و B مستقلين لأن العطب في المحرك ليست له علاقة بالعطب في العجلة.

2) الحادث « السيارة قابلة للسير » هو $\overline{A}\cap\overline{B}$ واحتماله هو جداء الاحتمالات الموجودة على المسلك $\overline{B} \xleftarrow{0.85} \overline{A} \xleftarrow{0.93}$

أي $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.93\times 0.85=0.7905$

طريقة ثانية

الحادث « السيارة قابلة للسير » هو الحادث العكسي للحادث « السيارة لها أحد العطبين »

أي الحادث العكسي للحادث $A\cup B$.

لكن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

إذن $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-P(A)-P(B)+P(A)\times P(B)=0.7905$

5 - استقلالية متغيرين عشوائيين

• قانون احتمال لمتغيرين عشوائيين :

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على مجموعة إمكانيات لتجربة عشوائية حيث :

X يأخذ القيم x_1 ، x_2 ، ... ، x_n و Y يأخذ القيم y_1 ، y_2 ، ..... ، y_n

تعريف قانون الثنائية (X,Y) هو إعطاء الاحتمال $P_{(i,j)}$ لكل حادث $[(X=x_i)$ و $(Y=y_j)]$

حيث $0\le i\le n$ و $0\le j\le n$.

وبشكل عام يعطى قانون (X,Y) في جدول.

• استقلالية X و Y :

القول أن X و Y مستقلان يعني أنه من أجل كل عددين طبيعيين i و j يكون الحادثان $(X=x_i)$ و $(Y=y_j)$ مستقلين.

ملاحظة

1) إذا كان $(X=x_i)$ و $(Y=y_j)$ مستقلان فإن :

$$P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$$

وبالتالي $(P_{i,j})=P_i\times P'_j$ من أجل كل طبيعيين i و j .

2) الجداء $P_i\times P'_j\neq 0$ مهما كان i و j

وعليه إذا كان $(P_{i,j})=0$ من أجل ثنائية معينة فإنه لا توجد استقلالية.

3) إذا كان Z متغير عشوائي بحيث $Z=X+Y$

فإنه مهما كان X و Y مستقلين أم لا يكون لدينا $E(Z)=E(X)+E(Y)$

لكن إذا كان X و Y غير مستقلين فإن $V(Z)\neq V(X)+V(Y)$

تمرين تدريبي

تجربة عشوائية تتمثل في رمي حجري نرد متزنين .و ليكن X المتغير العشوائي قيمه تمثل مجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي

و Y متغير عشوائي قيمه عبارة عن جداء الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي.

- احسب $P(X=4)$ ، $P(Y=5)$

ثم $P([(X=4)\cap(Y=5)])$.

هل X و Y مستقلان؟

الحل

1) $P(X=4)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

$=\frac{3}{36}$

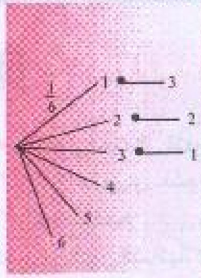
$$P(Y=5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{2}{36}$$

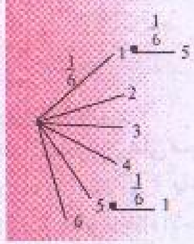
الحادث $(X=4) \cap (Y=5)$ لا يتحقق ابدا

إذن فاحتماله هو الصفر

لكن $P(X=4) \times P(Y=5) = 6 \times (36)^{-2}$

إذن فهذان المتغيران غير مستقلين اي مرتبطين.





تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 حساب احتمال حادث

كيس يحتوي على 10 كرات منها 6 بيضاء، نسحب 3 من هذا الكيس.
(المخرج هو عبارة عن مجموعة من ثلاث كرات).
احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء.

الحل

نسمي B الحادث « سحب كرة بيضاء » و $\overline{B}$ حادثه العكسي

يمكن اعتبار هذا السحب كتعاقب ثلاث سحبات متتالية لكرة من الكيس بدون إرجاع

وللحصول على ثلاث كرات بيضاء

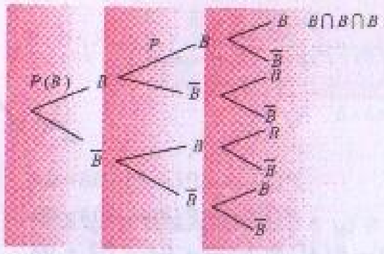
يجب إتباع المسلك $\bullet \xrightarrow{\frac{6}{10}} B \bullet \xrightarrow{\frac{5}{9}} B \bullet \xrightarrow{\frac{4}{8}} B$

هناك مسلك واحد يحقق هذا السحب

(ثلاث كرات بيضاء)

وحسب قاعدة احتمال مسلك نجد :

$$P(B \cap B \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$



تطبيق 2 التعرف على استقلالية حادثين

قسم يتكون من 40 تلميذا منهم 25 بنتا و 15 ذكرا.
15 بنتا تدرس الفرنسية و 5 ذكور يدرسون الفرنسية، نختار عشوائيا تلميذا واحدا من القسم ولنعتبر الحادثين A و B المعرفين كما يلي :

A « التلميذ يكون بنتا »

B « التلميذ يدرس الفرنسية »

أ) احسب $P(A)$ و $P(B)$.

ب) هل الحادثان A و B مستقلان ؟

الحل

أ) احتمال الحادث A هو النسبة التي تمثل عدد البنات على عدد عناصر القسم وتساوي $\frac{25}{40}$

إذن $P(A) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

- احتمال الحادث B هو النسبة التي تمثل عدد التلاميذ الذين يدرسون الفرنسية على عدد عناصر القسم وتساوي $\frac{20}{40}$

إذن $P(B)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$

$A\cap B$ الحادث « التلميذ بنت تدرس الفرنسية » واحتماله هو النسبة التي تمثل عدد البنات اللائي يدرسن الفرنسية على عدد عناصر القسم وتساوي $\frac{15}{40}$

إذن $P(A\cap B)=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$

بما أن $P(A)\times P(B)=\frac{5}{16}$ و $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$ فإن A و B حادثان غير مستقلين.

ب) حتى يكون الحادثان A و B مستقلين يجب أن يكون $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

تطبيق 3

حساب احتمال حوادث

A و B حادثان بحيث $P(A)=0{,}6$ ، $P(B)=0{,}4$ ، $P(A\cap B)=0{,}2$

احسب $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$ ، $P(A\cup B)$ ، $P(\overline{A}\cup B)$ ، $P(\overline{A}\cap B)$ ، $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

الحل

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}6=0{,}4$

$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}4=0{,}6$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}6+0{,}4-0{,}2=0{,}8$

- الحادثان $A\cap B$ و $\overline{A}\cap B$ غير متلائمين و $B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$

ومنه $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$ وعليه $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

إذن $P(\overline{A}\cap B)=0{,}4-0{,}2=0{,}2$

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=0{,}4+0{,}4-0{,}2=0{,}6$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0{,}2=0{,}8$

تطبيق 4

حساب احتمال حوادث

نرمي ثلاثة أحجار نرد ألوانها أحمر (R) و أبيض (B) وأخضر (V).
نشكل عندئذ عددا من ثلاثة أرقام،
رقم المئات هو الرقم الظاهر على (R) ورقم العشرات هو الرقم الظاهر على (B) ورقم الوحدات هو الرقم الظاهر على (V).

1) ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها ؟
2) احسب احتمال الأحداث التالية :

A « العدد الشكل رقم عشراته و آحاده متساوي »
B « رقم المئات هو 5 »
C « العدد المتحصل عليه هو مربع لعدد طبيعي »
D « العدد المتحصل عليه أكبر تماما من 324 »
E « العدد المتحصل عليه أرقامه مختلفة مثنى مثنى »

الحل

1) نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها.
نملأ كل من الثلاث خانات V ، B ، R بحيث :
الخانة R لها 6 مخارج والخانة B لها 6 مخارج و V لها 6 مخارج أيضا.

الخانة V	الخانة B	الخانة R
6 اختيارات	6 اختيارات	6 اختيارات

إذن هناك $6\times6\times6$ عددا يمكن تشكيله من هذه الرمية.

2) - لتعيين عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث A نستعمل ملء الخانات الثلاث V ، B ، R .
الخانة R لها 6 اختيارات والخانة B لها 6 اختيارات و V لها اختيار واحد
وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هي $6\times6\times1$ أي 36

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}=\frac{36}{6\times6\times6}=\frac{1}{6}$$

- الخانة R لها اختيار واحد وهو الرقم 5 والخانة B لها 6 اختيارات والخانة V لها 6 اختيارات وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث B هي $1\times6\times6=36$

إذن $P(B)=\frac{36}{6\times6\times6}=\frac{1}{6}$

- نفرض أن العدد المشكل هو rbv
rbv مربع لعدد طبيعي يعني $rbv=a^2$
$rbv=a^2$ يكافئ $a=\sqrt{rbv}$ لكن العدد rbv محصور بين 111 و 666
وعليه $a\in\{11,12,...,25\}$
من اجل الأعداد a التي رقم آحادها 3 أو 7 نتحصل على أعداد rbv احد أرقامها أكبر من 6 وبالتالي فهي مرفوضة.
إذن عدد القيم الممكنة لـ a هي 12 وكل قيمة لـ a يقابلها عدد rbv
وبالتالي عدد الأعداد rbv التي هي مربع لعدد طبيعي هو 12 .

إذن احتمال الحادث C هو $P(C)=\frac{12}{6\times6\times6}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

- حتى يكون العدد المتحصل عليه أكبر من 324 يجب أن نختار رقم المئات من المجموعة $\{3,4,5,6\}$ ورقم العشرات من $\{2,3,4,5,6\}$ ورقم الوحدات من $\{6,5\}$
إذن عدد الحالات الممكنة هو $4\times5\times2=40$

R	B	V
4 اختيارات	5 اختيارات	2 اختيارات

و بالتالي $P(D)=\frac{40}{6\times6\times6}=\frac{5}{27}$

- حتى تكون أرقام العدد المتحصل عليه مختلفة مثنى مثنى يجب أن يكون لرقم المئات 6 اختيارات ورقم العشرات 5 اختيارات ورقم الوحدات 4 اختيارات

وبالتالي عدد الحالات الملائمة هي $6\times5\times4$ إذن $P(E)=\frac{6\times5\times4}{6\times6\times6}=\frac{5}{9}$

تطبيق 5 احتمال فتح باب خزينة مزود بنظام

باب خزينة بنك مزود بنظام الحماية مفتاحه مشكل من رقمين مختلفين مختارين من المجموعة $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ وحرفين سواء كانا مختلفين أم نفس الحرف من المجموعة $F=\{a,b,c\}$

ما هو احتمال أن شخصا يعلم هذا التدوين أن يفتح الباب للوهلة الأولى في كل حالة من الحالات التالية :

أ) لا يعلم المفتاح ، ب) يعلم فقط أن الرقمين فرديين.

جـ) يعلم فقط أن الحرفين غير متشابهين ، د) يعلم الحرفين بالضبط.

الحل

المفتاح يكون من الشكل $x\,y\,\alpha\,\beta$ حيث $x\,,\,y$ عنصرين مختلفين من E و $\beta\,,\,\alpha$ حرفين مختلفين أم لا من F .

أ) A حادث « الشخص يفتح الباب للوهلة الأولى بدون علم المفتاح »

عدد الحالات الممكنة لتشكيل هذا المفتاح هي $8\times7\times3\times3=336$

x	y	α	β
8 اختيارات	7 اختيارات	3 اختيارات	3 اختيارات

عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هي 1 لأنه يوجد مفتاح واحد يفتح الخزينة

إذن $P(A)=\frac{1}{336}=0{,}0029$

ب)

x	y	α	β
3 اختيارات	2 اختيارات	3 اختيارات	3 اختيارات

B هو الحادث « الشخص يفتح الخزينة للوهلة الأولى علما أنه يعلم أن الرقمين فرديين »

عدد الحالات الممكنة لـ B هي $3\times2\times3\times3=54$

وبالتالي $P(B)=\frac{1}{54}=0{,}018$

جـ) C الحادث « الشخص يفتح الخزينة للوهلة الأولى علما أنه يعلم أن الحرفين غير متشابهين »

عدد الحالات الممكنة لـ C هي $6\times5\times3\times2=180$

x	y	α	β
6 اختيارات	5 اختيارات	3 اختيارات	2 اختيارات

إذن $P(C)=\frac{1}{6\times5\times6}=\frac{1}{180}$

د) D الحادث « الشخص يفتح الخزينة للوهلة الأولى علما أنه يعلم الحرفين بالضبط »

إذن يبقى له أن يختار الرقمين المختلفين من E .

وعدد الحالات الممكنة هي $6\times5=30$

إذن $P(D)=\frac{1}{30}=0{,}033$

تطبيق 6 توقع احتمال حادث

أربعة أصدقاء توجهوا إلى مبنى به أربع قاعات سينما كل واحد يختار عشوائيا فيلما وباستقلالية عن الآخرين ، تهتم بتوزيعهم على هذه القاعات، ونفرض أن كل التوزيعات متساوية الاحتمال.

احسب احتمال الأحداث التالية :

A « كل واحد منهم موجود في قاعة »

B « على الأقل اثنين موجودين في نفس القاعة »

C « كلهم في نفس قاعة ».

الحل

نرمز إلى الأشخاص بـ a ، b ، c ، d .

لتعيين عدد الحالات الممكنة نتبع طريقة ملء الخانات حيث كل خانة تمثل شخص.

a	b	c	d
4 اختيارات	4 اختيارات	4 اختيارات	4 اختيارات

كل شخص له أربعة اختيارات .

إذن عدد الحالات الممكنة هي $4\times4\times4\times4=4^4$

أ) لكي يكون كل شخص في قاعة يجب أن يكون للشخص a أربع اختيارات و b له 3 اختيارات و c له اختيارين و d له اختيار واحد.

وبالتالي عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هي $4\times3\times2\times1$ أي 24 .

إذن $P(A)=\frac{24}{256}=0{,}093$

ب) على الأقل شخصين موجودين في نفس القاعة تعني أنه إما 2 أو 3 أو 4 موجودين في نفس القاعة

- إذا كان شخصين في نفس القاعة فإن الشخصين الآخرين كل منهما له 3 اختيارات

وبالتالي عدد الحالات الملائمة في هذه الحالة هي $3\times3=9$

- إذا كان ثلاث أشخاص في نفس القاعة فإن الشخص الرابع له 3 اختيارات.
- إذا كان 4 أشخاص في نفس القاعة فإنه توجد حالة واحدة.

وعليه فإن عدد الحالات الملائمة الكلية هي $9+3+1=13$

إذن $P(B)=\frac{13}{256}=0{,}05$

جـ) عدد الحالات الملائمة للحادث c هي 4 ومنه $P(C)=\frac{4}{256}$

تطبيق 7 توقع احتمال سحب كريات ملونة وتحديد التركيبة

كيس يحتوي على كرات بيضاء وحمراء وسوداء نسحب عشوائيا كرة من الكيس ونفرض أن كل السحبات متساوية الاحتمال.

$P_1=\frac{1}{4}$ هو احتمال سحب كرة سوداء و $P_2=\frac{1}{3}$ هو احتمال سحب كرة حمراء

1) ما هو احتمال سحب كرة بيضاء ؟
2) إذا علمت أنه توجد 48 كرة في الكيس عين التركيبة الدقيقة له.

الحل

1) نرمز بـ P_3 إلى احتمال سحب كرة بيضاء نعلم أن $P_1+P_2+P_3=1$

ومنه $P_3=1-P_1-P_2=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

2) عدد الكرات السوداء هو $n_1=p_1\times48=12$

عدد الكرات الحمراء هو $n_2=p_2\times48=16$

عدد الكرات البيضاء هو $n_3=p_3\times48=20$

تطبيق 8 إيجاد الأمل الرياضي والانحراف المعياري

إليك قانون احتمال متغير عشوائي:

X	-3	-2	1	2	3
p_i	0,1	0,35	0,15	؟	0,2

- احسب $P(X=2)$ ثم $E(X)$ ، $\sigma(X)$

الحل

نعلم أن $P(X=-3)+P(X=-2)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

ومنه $P(X=2)=1-\left[P(X=-3)+P(X=-2)+P(X=1)+P(X=3)\right]=0{,}2$

$$E(X)=(-3)(0{,}1)+(-2)(0{,}35)+0{,}15+2\times0{,}2+3\times0{,}2=0{,}15$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i^2\,p_i-E^2(X)=9\times0{,}1+4\times0{,}35+0{,}15+4\times0{,}2+9\times0{,}2-0{,}0225$$

$$=0{,}9+1{,}4+0{,}15+0{,}8+1{,}8-0{,}0225=6{,}3775$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=2{,}525$$

تطبيق 9 قانون التوزيع المنتظم

تجربة تتمثل في رمي حجري نرد متزنين أوجه الأول مرقمة من 1 إلى 6 وللثاني ثلاثة أوجه تحمل الرقم 0 والأخرى تحمل الرقم 6.

X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مخرج مجموع الرقمين المحصل عليهما، نفرض أن كل المخارج متساوية الاحتمال.

1) اعط قانون احتمال X
2) احسب $E(X)$ ، $\sigma(X)$.

الحل

1) مجموعة قيم X هي 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2) $$E(X)=\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12}{12}=\frac{78}{12}=6{,}5$$

$$V(X)=\frac{1}{12}+\frac{4}{12}+\frac{9}{12}+\frac{16}{12}+\frac{25}{12}+\frac{36}{12}+\frac{49}{12}+\frac{64}{12}+\frac{81}{12}+\frac{100}{12}+\frac{121}{12}+\frac{144}{12}-(6{,}5)^2$$

$$=54{,}16-42{,}25=11{,}91$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11{,}91}=3{,}45$$

تطبيق 10 إيجاد الأمل الرياضي والانحراف المعياري

كيس يحتوي على 5 كرات مرقمة كما يلي:

كرتان مرقمتان بـ 1 وأخريتان بـ 2 والخامسة بـ 3،

نسحب عشوائيا في نفس الوقت كرتين وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين.

1) عين قيم X ثم عين قانون X
2) احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

✓ الحل

1) مخارج هذه التجربة هي $B_1B'_1$ ، B_1B_2 ، $B_1B'_2$ ، B'_1B_2 ، $B'_1B'_2$ ، $B_2B'_2$ ، B_2B_3 ، B'_2B_3 ، B_2B_3 ، B'_2B_3.

وبالتالي عدد الحالات المكنة هي 10

- قيم المتغير العشوائي X هي 2 , 3 , 4 , 5 .

$P_1=P(X=2)=\frac{1}{10}$ ، $P_3=P(X=4)=\frac{1}{10}$

$P_2=P(X=3)=\frac{4}{10}$ ، $P_4=P(X=5)=\frac{4}{10}$

X	2	3	4	5
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$

2) $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=\frac{2}{10}+\frac{12}{10}+\frac{4}{10}+\frac{20}{10}=3{,}8$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2P_i-E^2(X)=\frac{4}{10}+\frac{36}{10}+\frac{16}{10}+\frac{100}{10}-(3{,}8)^2=15{,}6-14{,}44=1{,}16$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1{,}16}=1{,}077$$

تطبيق 11 تعيين قانون احتمال وحساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري

نرمي كرتين A و B باتجاه حفرتين t_1 و t_2، بحيث كل كرة تصل إلى t_1 أو إلى t_2 بنفس الاحتمال وكل حفرة يمكنها استيعاب كلتا الكرتين.

1- أ) اكتب قائمة كل المخارج المكنة لهذه الرمية.

ب) ما هو احتمال الحادث D « الكرتين في نفس الحفرة » ؟

جـ) ما هو الحادث العكسي لـ D ؟

2) نربح 20 دج إذا دخلت الكرة في الحفرة t_1 ونخسر 40 دج إذا دخلت في t_2 وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه هي الربح (أو الخسارة) عند الرمي.

أ) ما هي قيم X ؟ ثم اعط قانون احتمال X.

ب) احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

✓ الحل

1) أ) المخارج المكنة لهذه التجربة هي :

$(At_2\ ,\ Bt_2)$ ، $(At_1\ ,\ Bt_1)$ ، $(At_1\ ,\ Bt_2)$ ، $(Bt_1\ ,\ At_2)$

فمثلا الثنائية $(At_2\ ,\ Bt_2)$ تعبر عن أن الكرتين A و B في الحفرة t_2

ومنه عدد الحالات المكنة هي 4 .

ب) عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث D هي 2 ومنه $P(D)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

والحادث العكسي للحادث D هو الحادث « كل كرة في حفرة »

2) أ) قيم المتغير العشوائي X هي 40 , 20- , 80 -

الحادث « $(X=40)$ » هو الكرتين في t_1

وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هي 1

إذن $P(X=40)=\frac{1}{4}$

بنفس الطريقة نجد قيم احتمال الحوادث الأخرى.

X	+40	−20	−80
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

ب) لدينا $E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP_i=40\times\frac{1}{4}-20\times\frac{2}{4}-\frac{80}{4}=-20$

$$V(X)=\sum x_i^2P_i-E^2(X)=1600\times\frac{1}{4}+400\times\frac{2}{4}+6400\times\frac{1}{4}-400=1800$$

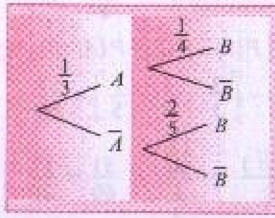
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1800}\approx 42$$

تطبيق 12 حساب احتمال حوادث باستعمال شجرة الاحتمالات

باستعمال المعطيات المدونة على الشجرة المجاورة حدد ما يلي :

$P(\overline{A})$ ، $P_A(\overline{B})$ ، $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

ثم استنتج $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap\overline{B})$ ، $P(\overline{A}\cap B)$ و $P(\overline{A}\cap\overline{B})$



✓ الحل

- حسب قانون العقد لدينا $P(A)+P(\overline{A})=1$

ومنه $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2}{3}$

- حسب قانون العقد لدينا $P_A(B)+P_A(\overline{B})=1$

ومنه $P_A(\overline{B})=1-P_A(B)=\frac{3}{4}$

- لدينا $P_{\overline{A}}(B)+P_{\overline{A}}(\overline{B})=1$

ومنه $P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{3}{5}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$P(A\cap\overline{B})=P(A)\times P_A(\overline{B})=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

تطبيق 13 حساب احتمال حوادث

A و B حادثان بحيث $P(A)=\frac{2}{3}$ ، $P(B)=\frac{1}{4}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

1) احسب $P_A(B)$ ، $P_B(A)$

2) احسب $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ ثم استنتج $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

الحل

1) $$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{20}$$

2) $$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$$

$$=1-\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]=\frac{17}{60}$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{17}{60}}{\frac{1}{3}}=\frac{51}{60}=\frac{17}{20}$$

تطبيق 14 الاحتمالات الشرطية

نفرض أن احتمال الازدياد للجنسين متساوي مهما كانت رتبة هذه الولادة.
نعتبر مجموعة تمثل عائلات لها طفلان ونختار منها عشوائيا عائلة.

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

A « العائلة لها ذكران »

B « الطفل الأكبر ذكر »

C « العائلة لها على الأقل ذكر »

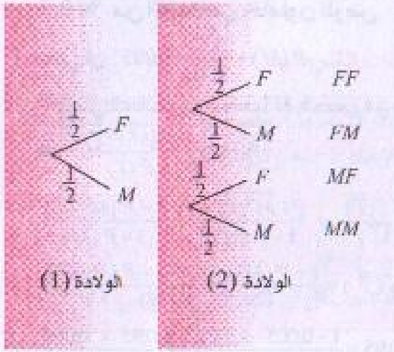
D « الطفل الأصغر بنت »

2) إذا علمت أن الطفل الأكبر ذكر احسب احتمال أن العائلة لها ذكران.

3) احسب $P_C(A)$ ، $P_D(A)$ ، $P_A(C)$.

الحل

1) نرمز إلى البنت بـ F وإلى الذكر بـ M



. عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي 4

. عدد الحالات الملائمة لـ A هي 1

وبالتالي $P(A)=\frac{1}{4}$

. عدد الحالات الملائمة لـ B هي 2

ومنه $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

. عدد الحالات الملائمة لـ C هي 3

ومنه $P(C)=\frac{3}{4}=0{,}75$

. عدد الحالات الملائمة لـ D هي 2

ومنه $P(D)=\frac{2}{4}=0{,}5$

2) احتمال أن يكون للعائلة ذكرين هو احتمال المسلك المؤدي إلى MM ويساوي $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

3) $P_C(A)$ احتمال أن العائلة لها ذكران علما أن على الأقل لها ذكر واحد.

بما أن A محتواة في C فإن $A\cap C=A$

إذن $$P_C(A)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

. بما أن $A\cap D=\phi$ فإن $P_D(A)=\frac{P(D\cap A)}{P(D)}=\frac{0}{P(D)}=0$

. بما أن $A\subset C$ فإن $P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

تطبيق 15 مصداقية فحص طبي

نشخص مرض m بواسطة فحص طبي. وليكن T الحادث « الفحص موجب » و M الحادث « الشخص مريض ».

1) إذا علمت أن $P_M(T)=0{,}95$ و $P_{\overline{M}}(\overline{T})=0{,}95$ ، عبر بواسطة جمل عن معنى هاذين الاحتمالين.

2) إذا علمت أن $0{,}5\ \%$ من الأشخاص حاملون المرض m ما هو احتمال أن شخص له فحص موجب يكون مريضا ؟

الحل

1) $P_M(T)$ هو احتمال أن يكون الفحص موجبا علما أن الشخص مريض

$P_{\overline{M}}(\overline{T})$ هو احتمال أن الفحص سالب علما أن الشخص سليم.

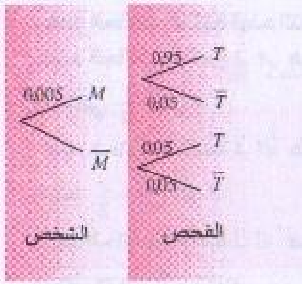
$P_M(T)=0{,}95$ و $P_{\overline{M}}(\overline{T})=0{,}95$ يعني أن هذا الفحص له مصداقية أي في $95\ \%$ من الحالات يستطيع تشخيص المرض إن وجد.

2) 0,5 % من الأشخاص حاملون المرض

يعني أن $P(M)=\frac{0,5}{100}=0,005$

احتمال الحادث أن شخصا له فحص موجب يكون مريضا

هو $P_T(M)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}$



$$P_{\overline{M}}(\overline{T})=\frac{P(\overline{M}\cap\overline{T})}{P(\overline{M})}=\frac{P(\overline{M\cup T})}{1-P(M)}=\frac{1-P(M\cup T)}{1-P(M)}$$

$$P_{\overline{M}}(\overline{T})=\frac{1-P(M)-P(T)+P(M\cap T)}{1-P(M)}$$

$$0,95=\frac{1-0,005-P(T)+0,95\times0,005}{1-0,005}$$

ومنه $-P(T)+0,99975=0,995\times0,95$ إذن $P(T)=0,0545$

وبالتالي $P_T(M)=\frac{0,005\times0,95}{0,0545}=0,087$

تطبيق 16 الاحتمالات الشرطية

ثلاث آلات A، B و C تنتج على الترتيب 40 %، 50 % و 10 % من البراغي (BOULONS) المنتجة، حيث كانت نسبة البراغي الفاسدة من طرف A، B، C هي على التوالي 3 %، 4 % و 5 % من عينة البراغي المنتجة. نختار عشوائيا برغيا.

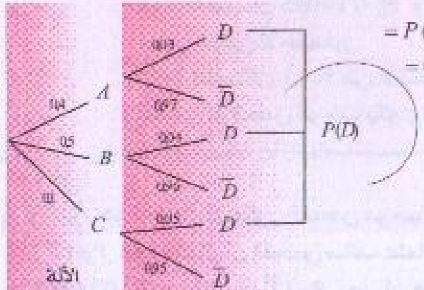
1) ما هو احتمال أن يكون البرغي فاسدا ؟

2) إذا علمت أنه فاسد ما هو احتمال أنه أنتج من الآلة B ؟

الحل

1) نسمي D الحادث « البرغي فاسد »

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$
$$=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$$
$$=0,4\times0,03+0,5\times0,04+0,1\times0,05=0,037$$



2) احتمال هذا الحادث هو $P_D(B)$

لدينا $P_D(B)=\frac{P(D\cap B)}{P(D)}$

ومنه $P_D(B)=\frac{P(B)\times P_B(D)}{P(D)}$

$$=\frac{0,5\times0,04}{0,037}=0,54$$

تطبيق 17 الاحتمالات الشرطية

A و B كيسان حيث A يشمل 10 كرات منها 4 حمراء و B يشمل 8 كرات منها 5 حمراء، نختار عشوائيا كيسا وكرة منه ونرمز بـ :

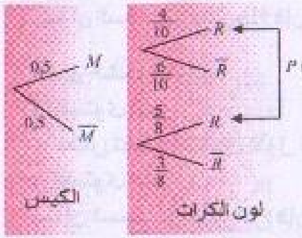
E إلى الحادث « اختيار الكيس A »

R إلى الحادث « الكرة المختارة حمراء »

1) احسب $P_E(R)$ و $P_{\overline{E}}(R)$ ثم استنتج $P(R)$.

2) إذا علمت أن الكرة حمراء ما هو احتمال أن تكون من الكيس A ؟

الحل



1) في المستوى الأول نختار الكيس.

واحتمال كل واحد منهما هو $\frac{1}{2}$

في المستوى الثاني لدينا اختيارين لكل كيس وهما :

إما الكرات المسحوبة حمراء (R)

وإما الكرات المسحوبة غير حمراء $(\overline{R})$

$P_E(R)$ هو احتمال أن تكون الكرة حمراء علما أنها سحبت من الكيس A. إذن $P_E(R)=\frac{4}{10}$

$P_{\overline{E}}(R)$ هو احتمال أن تكون الكرة حمراء علما أنها سحبت من الكيس B.

إذن $P_{\overline{E}}(R)=\frac{5}{8}$

$$P(R)=P(E)\times P_E(R)+P(\overline{E})\times P_{\overline{E}}(R)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{2}{10}+\frac{5}{16}=0,51$$

2) احتمال أن هذه الكرة من الكيس A علما أنها حمراء هو $P_R(E)$

$$P_R(E)=\frac{P(E\cap R)}{P(R)}=\frac{P(E)\times P_E(R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}}{0,51}=\frac{0,2}{0,51}=0,39$$

تطبيق 18 السحب على التوالي بالإرجاع وبدون إرجاع

كيس يحتوي على 5 كرات منها 3 لونها أحمر و 2 أسود.

التجربة الأولى : نسحب عشوائيا كرة ونسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس، ثم نسحب مرة أخرى وندون لونها.

التجربة الثانية : نسحب كرتين الواحدة تلوى الأخرى وبدون إرجاع وندون لونيهما.

1) أنشئ لكلتي التجربتين شجرة الاحتمالات والإمكانيات.

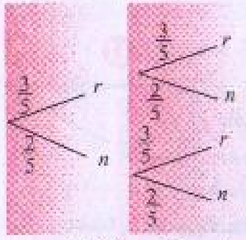
2) ما هو احتمال التحصل على كرتين حمراويتين في كلتي التجربتين ؟

✓ الحل

1) **تفسير الشجرة الأولى**

في المستوى الأول :

كتبنا $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$



شجرة التجربة (1)

فالعدد $\frac{3}{5}$ يمثل نسبة الكرات الحمراء في الكيس

والعدد $\frac{2}{5}$ يمثل نسبة الكرات السوداء في الكيس.

في المستوى الثاني :

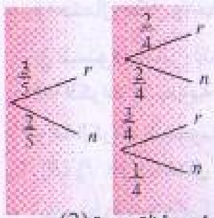
بما أن السحب تم بالإرجاع فإن النسب تبقى نفسها.

تفسير الشجرة الثانية

في المستوى الأول :

له نفس تفسير المستوى الأول للشجرة الأولى.

في المستوى الثاني :



شجرة التجربة (2)

بما أن السحب تم بالإرجاع فإن عندما نتحصل على كرة حمراء في السحب الأول فإن نسبة الكرات الحمراء المتبقية هي $\frac{2}{4}$

ونسبة الكرات السوداء هي $\frac{2}{4}$ ونفس الشيء إذا تحصلنا على الكرة السوداء في السحب الأول.

2) الحادث E_1 « سحب كرتين حمراويتين » في التجربة الأولى.

هناك مسلك وحيد $\bullet \xrightarrow{\frac{3}{5}} r \xrightarrow{\frac{3}{5}} \bullet$ الذي يوافق الحادث E_1

ومنه $P(E_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

الحادث E_2 « سحب كرتين حمراويتين » في التجربة الثانية

هناك مسلك وحيد يوافق هذا الحادث هو $\bullet \xrightarrow{\frac{3}{5}} r \xrightarrow{\frac{2}{4}} \bullet$

ومنه $P(E_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

تطبيق 19 السحب من ثلاثة أكياس مختلفة

لتكن ثلاثة أكياس A ، B ، C بحيث :

الكيس A يشمل 5 كرات أربع منها تحمل الحرف B والخامسة الحرف C.

الكيس B يشمل 5 كرات منها 3 تحمل الرقم 10 واثنتان الرقم 20.

الكيس C يشمل 8 كرات واحدة تحمل الرقم 1000 وخمس الرقم 20 ، واثنتان تحملان الرقم 0.

تسحب عشوائيا كرة من الكيس A ، و حسب نتيجة هذا السحب نسحب كرة إما من الكيس B أو من C.

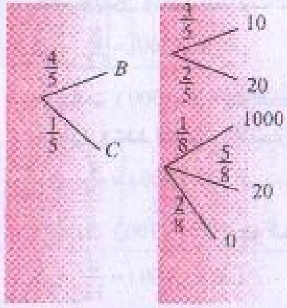
نرمز بقيمة الدينار الرقم المسجل على الكرة المسحوبة.

1) أنشئ شجرة الاحتمالات و الإمكانيات.

أ) ما هو احتمال ربح 1000 دج ؟

ب) ما هو احتمال ربح 20 دج ؟

✓ الحل



أ) هناك مسلك وحيد يوافق الحادث « ربح 1000 دج »

و هو $\bullet \xrightarrow{\frac{1}{5}} C \xrightarrow{\frac{1}{8}} 1000$

واحتماله هو جداء الاحتمالات الموجودة على المسلك

أي $P(1000) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40} = 0{,}025$

ب) هناك مسلكان يوافقان هذا الحادث هما :

$\bullet \xrightarrow{\frac{1}{5}} C \xrightarrow{\frac{5}{8}} 20$ و $\bullet \xrightarrow{\frac{4}{5}} B \xrightarrow{\frac{2}{5}} 20$

واحتماله هو مجموع احتمالي المسلكين.

إذن $P(20) = P_1(20) + P_2(20) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{8}{25} + \frac{1}{8} = \frac{89}{200} = 0{,}445$

تطبيق 20 تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

نسحب عشوائيا كرة واحدة من كيس يحتوي على أربع كرات :

اثنتان منها لونهما أحمر R_1 ، R_2 والثالثة أخضر V والرابعة أبيض B ،

وبدون إرجاع الكرة نسحب كرة أخرى للمرة الثانية.

نتيجة هذه التجربة عبارة عن ثنائية عنصرها الأول هو الكرة المحصل عليها في السحب الأول وعنصرها الثاني هو الكرة المحصل عليها في السحب الثاني.

نفرض أن كل النتائج متساوية الاحتمال.

1) مثل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات.

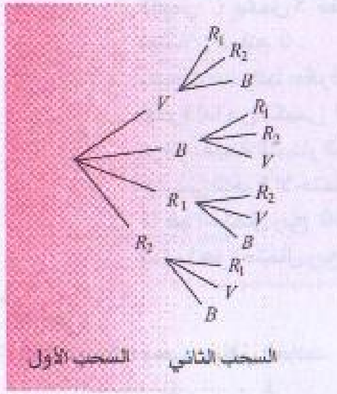
2) نرفق الوضعية السابقة بقاعدة لعبة :

لكل كرة حمراء مسحوبة نربح 100 دج والخضراء 200 دج

أما البيضاء فنخسر 200 دج وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة ممكنة الربح (أو الخسارة) المحصل عليها.

عين مجموعة قيم X ثم اعط قانون احتماله، ثم احسب $E(X)$

✓ الحل



1) عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو 12

2) قيم المتغير العشوائي X هي 200 ، 300 ، 100- ، 0

- الحادث $(X=0)$ هو الحصول على كرة خضراء وكرة بيضاء وعدد الحالات الملائمة له هو 2

إذن $P(X=0)=\frac{2}{12}$

- الحادث $(X=200)$ هو الحصول على كرتين حمراويتين وعدد الحالات الملائمة له هو 2

إذن $P(X=200)=\frac{2}{12}$

- الحادث $(X=300)$ هو الحصول على كرة حمراء و كرة خضراء وعدد الحالات الملائمة له هو 4

إذن $P(X=300)=\frac{4}{12}$

- الحادث $(X=-100)$ هو الحصول على كرة حمراء وكرة بيضاء وعدد الحالات الملائمة هو 4

إذن $P(X=-100)=\frac{4}{12}$

X	0	200	300	-100
P_i	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4} x_i\,p_i = 0\times\frac{2}{12}+200\times\frac{2}{12}+300\times\frac{4}{12}+(-100)\times\frac{4}{12}=100$$

تطبيق 21 استقلالية متغيرين عشوائيين

قصاصة متزنة لها وجه أحمر و الآخر أخضر، نرمي هذه القصاصة ثلاث مرات متتالية ونسجل في كل مرة لون الوجه العلوي بعد السقوط.

نرمز بـ X إلى عدد مرات ظهور اللون الأحمر (R) في الرميتين الأوليتين،

و بـ Y إلى عدد مرات ظهور الوجه الأخضر (V) في الرميات الثلاثة.

1) اعط قانوني احتمال X و Y.

2) احسب $E(X)$ و $V(X)$ ، $E(Y)$ ، $V(Y)$

3) احسب $P((X=1)\cap(Y=2))$ ، هل المتغيرين X و Y مستقلين ؟

✓ الحل

1) قيم X هي 2، 1، 0

وعدد الحالات الممكنة هو 4

• $(X=0)$ الحادث عدم ظهور اللون الأحمر

في الرميتين الأوليتين وعدد الحالات الملائمة له هو 1

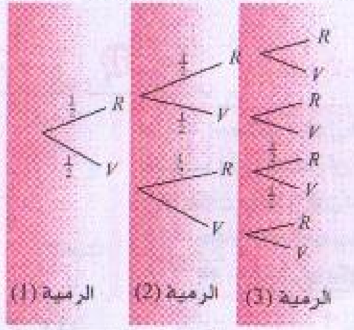
إذن $P(X=0)=\frac{1}{4}$

• $(X=1)$ الحادث ظهور اللون الأحمر مرة واحدة وعدد الحالات الملائمة له هو 2

إذن $P(X=1)=\frac{2}{4}$

• قيم Y هي 0، 1، 2، 3

عدد الحالات الممكنة هو 8



$(Y=0)$ الحادث عدم ظهور كرة خضراء في الرميات الثلاث وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هو 1

إذن $P(Y=0)=\frac{1}{8}$

X	0	1	2
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

• $(Y=1)$ الحادث ظهور مرة واحدة كرة خضراء في الرميات الثلاث وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هو 3

إذن $P(Y=1)=\frac{3}{8}$

Y	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) $E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i P_i = 0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$

$$V(X)=\frac{2}{4}+4\times\frac{1}{4}-1=\frac{6}{4}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$$V(Y)=1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}-\frac{9}{4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

3) الحادث $(Y=2)$ و $(X=1)$ معناه ظهور مرة واحدة اللون الأحمر في الرميتين الأولى والثانية وظهور مرتين اللون الأخضر في الرميات الثلاث.

هناك مسلكان وحيدان لتحقيق هذا الحادث وهما:

$\bullet\frac{1}{2}\;V\;\bullet\frac{1}{2}\;R\;\bullet\frac{1}{2}\;V$ و $\bullet\frac{1}{2}\;R\;\bullet\frac{1}{2}\;V\;\bullet\frac{1}{2}\;V$

وحسب قاعدة احتمال مسلك فإن :

$$P[(X=1)\cap(Y=2)]=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

- لدينا $P(X=1)=\frac{1}{2}$ و $P(Y=2)=\frac{3}{8}$

ومنه $P(X=1)\times P(Y=2)=\frac{3}{16}$

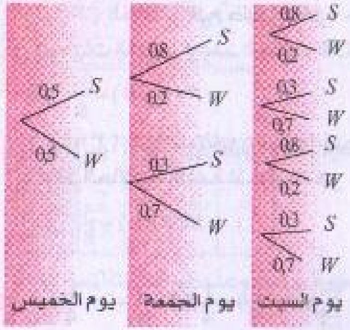
إذن $P[(X=1)\cap(Y=2)]\neq P(X=1)\times P(Y=2)$

وهذا يعني أن المتغيرين X و Y مرتبطان.

تطبيق 22 الاحتمال الشرطي - الأحوال الجوية

دراسة إحصائية حول الأحوال الجوية سمحت لنا بتقدير أنه إذا كان يوم ما مشمسا فإن احتمال أن يكون اليوم الموالي له مشمسا هو 0,80
وإذا كان ممطرا فإن احتمال أن يكون اليوم الذي يليه مشمسا هو 0,3.
1) إذا كان يوم الخميس مشمسا ما هو احتمال أن يكون يوم السبت مشمسا ؟
2) ما هو احتمال أن يكون يوم السبت مشمسا إذا كان يوم الخميس ممطرا ؟

الحل



نرمز بـ S إلى يوم مشمس و W إلى يوم ممطر.
احتمال يوم مشمس يساوي احتمال يوم ممطر
وعليه $P(S)=P(W)=\frac{1}{2}$

1) B هو الحادث :
« يوم السبت مشمس علما أن يوم الخميس مشمس » هناك مسلكان وحيدان يوافقان هذا الحادث وهما :

$\bullet\xrightarrow{0,5} S \bullet\xrightarrow{0,2} W \bullet\xrightarrow{0,3} S$ و $\bullet\xrightarrow{0,5} S \bullet\xrightarrow{0,8} S \bullet\xrightarrow{0,8} S$

ومنه $P(B)=0,5\times0,2\times0,3+0,5\times0,8\times0,8 = 0,35$

2) A الحادث « يوم السبت مشمس علما أن يوم الخميس ممطر »
هناك مسلكان وحيدان يوافقان هذا الحادث وهما :

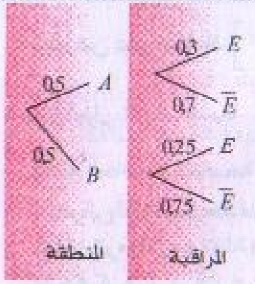
$\bullet\xrightarrow{0,5} W \bullet\xrightarrow{0,7} W \bullet\xrightarrow{0,3} S$ و $\bullet\xrightarrow{0,5} W \bullet\xrightarrow{0,3} S \bullet\xrightarrow{0,7} S$

ومنه $P(A)=0,5\times0,7\times0,3+0,5\times0,3\times0,7 = 0,21$

تطبيق 23 المراقبة الجبائية - الاحتمال الشرطي

نسمي E الحادث « التعرض لمراقبة جبائية ».
بالنسبة إلى مؤسسة موجودة في منطقة A احتمال الحادث E هو 0,3
وبالنسبة إلى أخرى موجودة في منطقة B هو 0,25
مجموعة تملك مؤسستين واحدة في A والأخرى في B تقبل أن المراقبة المنجزة في A مستقلة عنها في B.
احسب احتمالات كل حادث من الحادثين التاليين :
1) E_1 هو الحادث « المؤسستان تعرضتا إلى المراقبة ».
2) E_2 هو الحادث « مؤسسة واحدة تعرضت للمراقبة ».

الحل



عدد الحالات الممكنة لهذه الوضعية هو 4
إن احتمال اختيار A يساوي احتمال اختيار B
وبالتالي $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

1) هناك مسلكان وحيدان هما :
$\bullet\xrightarrow{0,5} B \bullet\xrightarrow{0,25} E$ و $\bullet\xrightarrow{0,5} A \bullet\xrightarrow{0,3} E$ يوافقان هذا الحادث.
إذن $P(E_1) = 0,5\times0,3+0,5\times0,25=0,15+0,125 = 0,275$

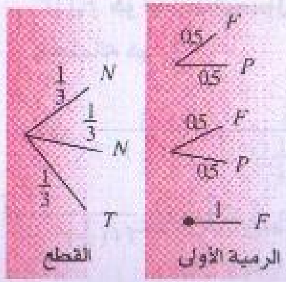
2) هناك مسلكان وحيدان يوافقان الحادث E_2 وعليه :

$$E_2=((A\cap E)\cap(B\cap\overline{E}))\cup((A\cap\overline{E})\cap(B\cap E))$$
$$P(E_2)=P((A\cap E)\cap(B\cap\overline{E}))+P((A\cap\overline{E})\cap(B\cap E))$$
$$=P(A\cap E)\times P(B\cap\overline{E})+P(A\cap\overline{E})\times P(B\cap E)$$
$$=0,5\times0,3+0,5\times0,75+0,5\times0,7\times0,5\times0,25=0,6062$$

تطبيق 24 الاحتمالات الشرطية والمتتاليات

كيس يحتوي على ثلاث قطع نقدية لا نفرق بينها عند اللمس، اثنتان منها عادية (N) أي لها الوجه (F) والظهر (P) والثالثة مزيفة (T) تحمل وجهين (F).
نختار عشوائيا قطعة ونقوم بصفة مستقلة برميات متتالية لهذه القطعة وليكن الحادثان L و F_n حيث :
L « نتحصل على الظهر P في الرمية الأولى »
F_n « نتحصل على الوجه F في الرميات n الأولى »
1) احسب احتمال الحادث L ثم بين أن $P(F_n)=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$
2) إذا علمت أننا تحصلنا على الوجه (F) في الرميات n الأولى ما هو احتمال أننا اخترنا القطعة المزيفة ؟
ما هي نهاية هذا الاحتمال لما n يؤول إلى $(+\infty)$ ؟

الحل



1) عدد الحالات الممكنة للحادث L هو 5
هناك مسلكان وحيدان يوافقان الحادث L وهما :

$\bullet\xrightarrow{\frac{1}{3}} N \bullet\xrightarrow{\frac{1}{2}} P$ و $\bullet\xrightarrow{\frac{1}{3}} N \bullet\xrightarrow{\frac{1}{2}} P$

وحسب قاعدة احتمال حادث
فإن $P(L)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

- نبرهن على المساواة $P(F_n)=\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^{n-1}\right]$ بالتراجع على n.

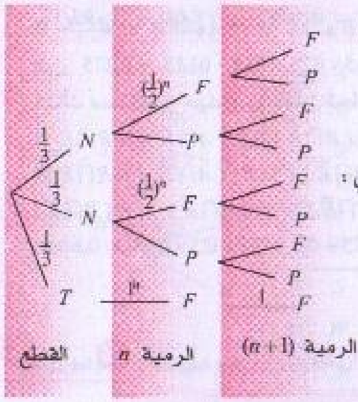
من أجل $n=1$ لدينا $P(F_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]$

ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n=1$

- نفرض أنها صحيحة من أجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$.

بما ان الرميات مستقلة فيها بينها فإن احتمال ظهور الوجه F في الرميات n الأولى هو جداء احتمالات ظهور الوجه F في كل رمية

اي $\underbrace{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\times\ldots\times(\frac{1}{2})}_{n \text{ مرة}}=(\frac{1}{2})^n$



هناك ثلاث مسالك وحيدة توافق الحادث F_{n+1} وهي :

$$\bullet\xrightarrow{\frac{1}{3}} N \bullet\xrightarrow{(\frac{1}{2})^n} F \bullet\xrightarrow{\frac{1}{2}} F$$

$$\bullet\xrightarrow{\frac{1}{3}} N \bullet\xrightarrow{(\frac{1}{2})^n} F \bullet\xrightarrow{\frac{1}{2}} F$$

$$\bullet\xrightarrow{\frac{1}{3}} T \bullet\xrightarrow{1^n} F \bullet\xrightarrow{1} F$$

وحسب قاعدة الاحتمال فإن :

$$P(F_{n+1})=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^n\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^n\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1^n\times1=\frac{1}{3}\left[(\frac{1}{2})^{n+1}+(\frac{1}{2})^{n+1}+1\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+2(\frac{1}{2})^{n+1}\right]=\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^n\right]$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي فالخاصية صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

2) $P_{F_n}(T)$ هو احتمال الحادث

« استعمال القطعة المزيفة علما أننا تحصلنا على الوجه F في الرميات n الأولى »

$$P_{F_n}(T)=\frac{P(F_n\cap T)}{P(F_n)}$$

$F_n\cap T$ هو الحادث الحصول على الوجه F في الرميات n الأولى باستعمال القطعة (T)

واحتماله هو $\frac{1}{3}$

إذن $P_{F_n}(T)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^{n-1}\right]}=\dfrac{1}{1+(\frac{1}{2})^{n-1}}$

$\lim_{n\to+\infty}P_{F_n}(T)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+(\frac{1}{2})^{n-1}}=1$ لأن $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^{n-1}=0$

تطبيق 25 حساب الاحتمالات الشرطية

في جبل الشريعة عائلتان A و B يوضع تحت تصرفهما خمسة مسالك C_1 ، C_2 ، C_3 ، C_4 ، C_5.

I) في كل صباح تختار كل عائلة عشوائيا وباستقلالية عن العائلة الأخرى مسلكا.

1) ما هو عدد الحالات الممكنة لكلتا العائلتين ؟

2) ما هو احتمال أن يختارا نفس المسلك ؟

3) ما هو احتمال انهما في ظرف n يوم متتالية لا تختاران أبدا نفس المسلك ؟

4) عين أصغر قيمة لـ n التي من اجلها احتمال التلاقي على الأقل مرة واحدة على نفس المسلك أكبر من أو يساوي $0{,}9$.

II) نعتبر في هذا الجزء يومين متتاليين حيث تلغي كل عائلة في اليوم الثاني من سحبها كل مسلك أخذته في اليوم السابق إذن تبقى أربعة مسالك

E هو الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الأول »

F هو الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الثاني »

احسب $P(E)$ ، $P_E(F)$ ثم $P_{\overline{E}}(F)$ ، $P(F\cap E)$ ، $P(F\cap\overline{E})$ واستنتج $P(F)$.

الحل

I) 1) نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الحالات الممكنة

B	A
5 اختيارات	5 اختيارات

العائلة A لها 5 اختيارات ومن أجل كل اختيار لـ A

يوجد 5 اختيارات لـ B

وبالتالي عدد الحالات الممكنة هو $5\times5=25$

2) عدد الحالات الممكنة لاختيار نفس المسلك هو 5

B	A
1 اختيار	5 اختيارات

اي إذا كان لـ A خمسة اختيارات فإن B له اختيار واحد

وبالتالي احتمال هذا الحادث هو $\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

3) S هو الحادث « لا تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الأول »

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث S هو 5×4 اي 20

وبالتالي $P(S)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

الحادث الذي نبحث عن احتماله هو $\underbrace{S\cap S\cap\ldots\cap S}_{n \text{ مرة}}$

إذن احتماله هو :

$$P(\underbrace{S\cap S\cap\ldots\cap S}_{n \text{ مرة}})=\underbrace{P(S)\times P(S)\times\ldots\times P(S)}_{n \text{ مرة}}=(P(S))^n=(\frac{4}{5})^n$$

4) الحادث العكسي للحادث D « التلاقي على الأقل مرة واحدة على نفس المسلك » هو الحادث « لا تلتقي العائلتان أبدا في نفس المسلك على مدار n يوم »

إذن $P(D)=1-P\left(\underbrace{S\cap S\cap ... \cap S}_{n \text{ مرة}}\right)=1-(\frac{4}{5})^n$

$P(D) \geq 0,9$ يعني $1-(\frac{4}{5})^n \geq 0,9$ اي $(\frac{4}{5})^n \leq 0,1$

وبالتالي $n \geq 8,005$

إذن أصغر قيمة لـ n المطلوبة هي 9 .

11) عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث E هو 5

أي من أجل كل اختيار لـ A يوجد اختيار واحد لـ B

إذن $P(E)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

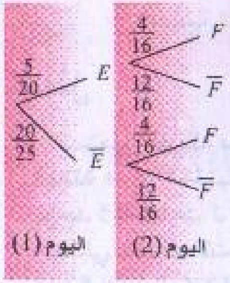
— $P_E(F)$ هو احتمال الحادث « تختار العائلتان نفس المسلك في اليوم الثاني علما انهما أخذتا نفس المسلك في اليوم الأول »

نستعمل طريقة ملء الخانات لتعيين عدد الحالات الممكنة.

بما ان كل عائلة تختار مسلك من بين أربعة مسالك فإن عدد الإمكانيات هو $4\times4=16$

وعدد الحالات الملائمة هو 4

إذن $P_E(F)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$



و من أجل شجرة الاحتمالات المجاورة يكون لدينا :

$P_{\overline{E}}(F)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

و لدينا $P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$ ومنه $P(E\cap F)=P(E)\times P_E(F)$

اي $P(E\cap F)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

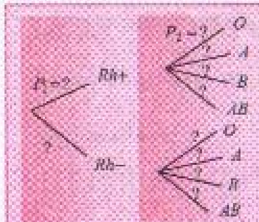
$P(F\cap\overline{E})=P(\overline{E})\times P_{\overline{E}}(F)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$P(F)=P(E)\times P_E(F)+P(\overline{E})\times P_{\overline{E}}(F)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

تطبيق 26 حساب الاحتمالات الشرطية

الجدول التالي يمثل توزيع الزمر الدموية لبلد ما :

	O	A	B	AB
Rhésus (+)	35,0%	38,1%	6,2 %	2,8 %
Rhésus (-)	9,0%	7,2%	1,2%	0,5%



1) السؤال هو إكمال الشجرة السابقة وهذا باستعمال معطيات الجدول.
التجربة تتمثل في اختيار شخص عشوائيا من المجتمع.

ليكن $Rh+$ الحادث « الشخص المختار له العامل $Rh^{(+)}$ »

و O هو الحادث « الشخص ينتمي إلى فصيلة O »

أ) عين الاحتمال P_1 اي $P(Rh_{(+)})$ ثم احسب P_2 .

ب) اكمل الشجرة وذلك باستبدال كل علامة استفهام بالاحتمال الموافق لها.

2-أ) انطلاقا من الشجرة كيف نستطيع تعيين احتمال O ؟ ثم تحقق من هذه النتيجة من الجدول.

ب) ما هو احتمال ان شخص فصيلة دمه O يحمل العامل $Rh(+)$ ؟

3-أ) نعتبر n شخصا مختارا عشوائيا من مجتمع.

احسب بدلالة n الاحتمال P بحيث يكون من بين n شخص على الأقل واحد فصيلته O ثم احسب نهايته.

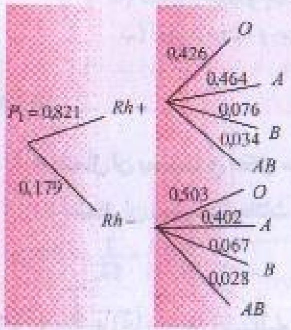
ب) احسب أصغر قيمة لـ n بحيث $P\geq 0,999$.

✓ الحل

1) أ) $P_1=P(Rh_+)=P(Rh_+\cap O)+P(Rh_+\cap A)+P(Rh_+\cap B)+P(Rh_+\cap AB)$

$=0,35+0,381+0,062+0,028=0,821$

$P_2=P_{Rh+}(O)=\frac{P(O\cap Rh_+)}{P(Rh+)}=\frac{0,35}{0,821}=0,426$



2) أ) هناك مسلكان يوافقان الحادث O

وحسب قاعدة الاحتمال فإن :

$P(O)=0,821\times0,426+0,179\times0,503$

$=0,350+0,09=0,44$

من الجدول نجد $P(O)=0,35+0,09=0,44$

ب) $P_O(Rh+)=\frac{P(O\cap Rh_{(+)})}{P(O)}$

$=\frac{0,426\times0,821}{0,44}=\frac{0,35}{0,44}=0,80$

3) أ) الحادث الذي نريد حساب احتماله هو الحادث العكسي للحادث « لا يوجد اي شخص من بين n شخص فصيلة دمه O »

احتمال الحادث « شخص فصيلته مختلفة عن O » هو :

$P(\overline{O})=1-P(O)=0,54$

إذن $P=1-P(\overline{O})\times P(\overline{O})\times ... \times P(\overline{O})=1-(0,54)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}P=\lim 1-(0,54)^n=1$

نفسر النهاية على أن كلما كان n كبيرا بالقدر الكافي يكون هذا الحادث أكيدا.

ب) $P\geq 0,999$ يعني $1-(0,54)^n\geq 0,999$ وبعد حل هذه المتراجحة نجد $n\geq\frac{Ln(0,001)}{Ln(0,54)}$

ومنه أصغر قيمة لـ n هي 12 .

تطبيق 27 الاحتمالات الشرطية في مسابقة رمي الرمح

شارك متنافسان A و B في مسابقة تتمثل في رمي رمح على هدف مجزأ إلى ثلاث خانات (1) ، (2) و (3) .ونقبل أنه عند كل رمية يصيب كل منهما خانة وحيدة وأن الرميات مستقلة فيما بينها.
بالنسبة إلى المتنافس A : احتمالات إصابة الخانات (1) ، (2) ، (3) هي على التوالي $\frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{7}{12}$
بالنسبة إلى المتنافس B : كل المخارج متساوية الاحتمال.
1) المتسابق A يقوم بثلاث رميات مستقلة فيما بينها.
أ) ما هو احتمال أن يصيب في كل مرة الخانة 3 ؟
ب) ما هو احتمال أن يصيب الخانات (1) ، (2) ، (3) في الرميات 1 ، 2 و 3 على الترتيب.
جـ) ما هو احتمال أن يصيب الخانات (1) ، (2) ، (3) ؟
2) نختار عشوائيا واحدا من المتنافسين بحيث احتمال اختيار A يساوي ضعف احتيار B .
أ) تنجز رمية واحدة ، ما هو احتمال أن تصاب الخانة (3) ؟
ب) أنجزت رمية وحيدة والخانة (3) أصيبت.ما هو احتمال أن A هو الذي سدد الرمح؟

✓ الحل

1) أ) احتمال أن يصيب في كل مرة الخانة (3) هو $(\frac{7}{12})^3 = 0{,}583$

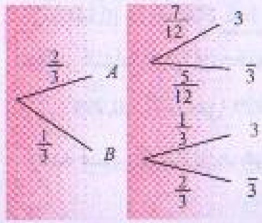
ب) احتمال أن يصيب الخانات (1) ، (2) ، (3) في الرميات 1 ، 2 ، 3 على التوالي هو :
$$\frac{1}{12}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{12} = 0{,}016$$

$(3) \xrightarrow{\frac{7}{12}} \bullet (2) \xrightarrow{\frac{1}{3}} \bullet (1) \xrightarrow{\frac{1}{12}} \bullet$ (السلك الموافق للحادث)

جـ) توجد 6 مسالك لها نفس الاحتمال توافق الحادث الذي نبحث عن احتماله .
وبالتالي احتمال الحادث الذي نبحث عنه
هو $6(\frac{1}{12}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}) = \frac{7}{72}$

$\bullet - 1 \bullet - 2 \bullet - 3$
$\bullet - 1 \bullet - 3 \bullet - 2$
$\bullet - 2 \bullet - 1 \bullet - 3$
$\bullet - 2 \bullet - 3 \bullet - 1$
$\bullet - 3 \bullet - 1 \bullet - 2$
$\bullet - 3 \bullet - 2 \bullet - 1$

2) ـ بما أن $P(A) = 2P(B)$ و $P(A)+P(B)=1$
فإن $P(A)=\frac{2}{3}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$



أ) هناك مسلكان يوافقان هذا الحادث وهما :
$(3) \xrightarrow{\frac{7}{12}} \bullet A \xrightarrow{\frac{2}{3}} \bullet$ و $(3) \xrightarrow{\frac{1}{3}} \bullet B \xrightarrow{\frac{1}{3}} \bullet$

وحسب قاعدة احتمال حادث فإن احتمال الحادث المعطى هو :
$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{7}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

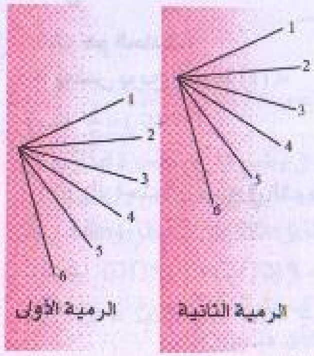
ب) $P_3(A) = \frac{P(3\cap A)}{P(3)} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{7}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{9}$

تطبيق 28 التعرف على استقلالية حوادث

نرمي حجر نرد متزن مرتين متتاليتين، أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 ولنعتبر الأحداث التالية :
A الحادث « الرقم الأول المحصل عليه زوجي »
B الحادث « الرقم الثاني المحصل عليه زوجي »
C الحادث « مجموع الرقمين المحصل عليهما زوجي »
1) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$
2) احسب $P(A\cap B)$ ، $P(B\cap C)$ و $P(C\cap A)$ هل الحوادث A ، B ، C مستقلة مثنى مثنى ؟
3) احسب $P(A\cap B\cap C)$ وهل $P(A\cap B\cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$ ؟

✓ الحل

1) لدينا $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
و $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
و $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$



2) لدينا $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$
و $P(B\cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
و $P(C\cap A) = \frac{1}{4}$

وبالتالي نستنتج أن الحوادث A ، B ، C مستقلة مثنى مثنى.

3) لدينا $P(A\cap B\cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ و $P(A)\times P(B)\times P(C) = \frac{1}{8}$
ومنه $P(A\cap B\cap C) \neq P(A)\times P(B)\times P(C)$
إذن A ، B ، C ليست مستقلة إجمالا.

تطبيق 29 المتتاليات والاحتمالات الشرطية

يونس يقوم بلعبة، بحيث حظوظ الربح هي نفس حظوظ الخسارة في شوطها الأول. ونقبل انه إذا ربح شوطا من هذه اللعبة فإن احتمال ربح الشوط الموالي له هو 0,4 وإذا خسر شوطا فإن احتمال خسارة الشوط الموالي هو 0,8 .

n عدد طبيعي غير معدوم.

G_n الحادث « يربح الشوط رقم n »

P_n الحادث « يخسر الشوط رقم n »

I) 1) احسب ما يلي $P(G_1)$ ، $P_{G_1}(G_2)$ ، $P_{P_1}(G_2)$ واستنتج $P(G_2)$.

2) احسب $P(P_2)$

II) من أجل كل n غير معدوم نضع $x_n = P(G_n)$ و $y_n = P(P_n)$

1) عين من أجل كل $n \in IN^*$ يكون $P_{P_n}(P_{n+1})$ و $P_{G_n}(G_{n+1})$.

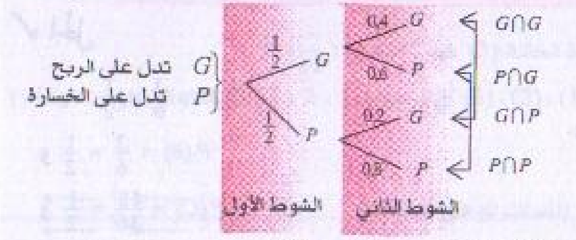
2) بين انه من أجل كل $n \in IN^*$ يكون $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}2\, y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6\, x_n + 0{,}8\, y_n \end{cases}$

3) من أجل كل $n \in IN^*$ نضع $V_n = x_n + y_n$ و $W_n = 6x_n - 2y_n$

بين أن (V_n) ثابتة و (W_n) هندسية يطلب تعيين حدها العام.

4) استنتج عبارة x_n بدلالة n ثم عين نهاية (x_n) ماذا تستنتج ؟

✓ الحل



I-1) G_1 هو الحادث :

« يونس يربح الشوط (1) »

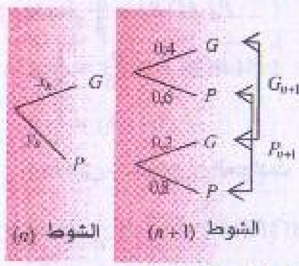
ومنه $P(G_1) = \frac{1}{2}$

$P_{G_1}(G_2)$ احتمال الربح في الشوط (2) علما انه ربح في الشوط (1)

إذن $P_{G_1}(G_2) = 0{,}4$ و $P_{P_1}(G_2) = 0{,}2$

ـ لدينا $P(G_2) = P(G \cap G) + P(P \cap G)$

إذن $P(G_2) = \frac{1}{2} \times 0{,}4 + \frac{1}{2} \times 0{,}2 = 0{,}3$



2) لدينا $P(P_2) = P(P \cap P) + P(G \cap P)$

إذن $P(P_2) = \frac{1}{2} \times 0{,}8 + \frac{1}{2} \times 0{,}6 = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

II-1) $P_{P_n}(P_{n+1})$ هو احتمال خسارة الشوط $(n+1)$ علما أنه خسر الشوط (n)

وبالتالي $P_{P_n}(P_{n+1}) = 0{,}8$

ـ يمثل $P_{G_n}(G_{n+1})$ احتمال ربح الشوط رقم $(n+1)$ علما انه ربح الشوط رقم (n)

وبالتالي $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0{,}4$

2) هناك مسلكان يوافقان الحادث G_{n+1} وهناك مسلكان يوافقان الحادث P_{n+1} كما هو موضح في الشجرة وحسب قاعدة احتمال حادث نجد :

$$\begin{cases} x_{n+1} = P(G_{n+1}) = 0{,}4 \times x_n + 0{,}2\, y_n \\ y_{n+1} = P(P_{n+1}) = 0{,}6\, x_n + 0{,}8\, y_n \end{cases}$$

3) حسب قاعدة احتمال العقد فإن $x_n + y_n = 1$ وبالتالي $V_n = 1$

$$W_{n+1} = 6x_{n+1} - 2y_{n+1} = 6(0{,}4x_n + 0{,}2y_n) - 2(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$$
$$= 6 \times 0{,}4x_n + 6 \times 0{,}2y_n - 2 \times 0{,}6x_n - 2 \times 0{,}8y_n$$
$$= 1{,}2x_n - 0{,}4y_n = \frac{12}{10}x_n - \frac{4}{10}y_n = \frac{2}{10}(6x_n - 2y_n) = \frac{1}{5}w_n$$

إذن (W_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ وحدها الأول W_1 حيث $W_1 = 6x_1 - 2y_1$

$$W_1 = 6P(G_1) - 2P(P_1) = 6 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

إذن $W_n = W_1 \times (\frac{1}{5})^{n-1} = 2 \times (\frac{1}{5})^{n-1}$

4) $\begin{cases} 6x_n - 2y_n = 2(\frac{1}{5})^{n-1} \\ x_n + y_n = 1 \end{cases}$ ومنه نجد $x_n = \frac{1}{4}\left[1 + (\frac{1}{5})^{n-1}\right]$

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{4}\left[1 + (\frac{1}{5})^{n-1}\right] = \frac{1}{4}$$

ومنه (x_n) متقاربة نحو $\frac{1}{4}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{3}{4}$

لما يكون n كبيرا بالقدر الكافي فان احتمال الخسارة أكبر بكثير من احتمال الربح.

تطبيق 30 تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

لدراسة تصرفات الفئران نقوم بتجربة تتمثل في وضع فأر في حجرة لها أربعة أبواب متشابهة ، لكن 3 منها مكهربة. في كل مرة يختار هذا الفار بابا فيجده مكهربا حيث يتلقى صدمة كهربائية ترجعه إلى مكانه الابتدائي وهكذا حتى يجد الباب الغير المكهرب .

1) ـ عين احتمالات الأحداث التالية ـ علما انه ليست للفار ذاكرة اي احتمال اختياره في كل مرة بابا من الأبواب الأربعة يكون متساويا. :

A_1 « يخرج في المرة الأولى »

A_2 « يخرج في المرة الثانية »

A_4 « يخرج في المرة الرابعة »

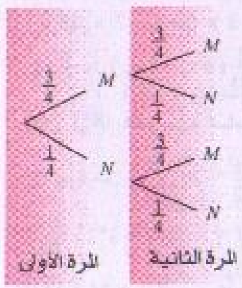
A_n « يخرج في المرة n »

2) نفرض ان للفار ذاكرة كاملة اي في كل مرة يتجنب الباب المكهربة المختارة سابقا ويختار بشكل متساوي الاحتمال بابا من الأبواب المتبقية.

وليكن X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد المحاولات التي قام بها هذا الفأر.
أ) عين قانون احتمال X.
ب) احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

✓ الحل

1) نرمز بـ M إلى الباب المكهربة و N إلى الباب الغير مكهربة.
بما أن الأبواب لها نفس احتمال الاختيار
فإن احتمال اختيار M هو $\frac{3}{4}$ واختيار N هو $\frac{1}{4}$



أ) مسلك A_1 هو $\bullet\xrightarrow{\frac{1}{4}} N$ وبالتالي احتماله
هو $P(A_1) = \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^{1-1} = \frac{1}{4}$

مسلك A_2 هو $\bullet\xrightarrow{\frac{3}{4}} M \bullet\xrightarrow{\frac{1}{4}} N$ وبالتالي احتماله
هو $P(A_2) = \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^{2-1} = \frac{3}{16}$

ـ هناك مسلك وحيد يمثل A_4 و هو

$\bullet\xrightarrow{\frac{3}{4}} M \bullet\xrightarrow{\frac{3}{4}} M \bullet\xrightarrow{\frac{3}{4}} M \bullet\xrightarrow{\frac{1}{4}} N$ وحسب قاعدة احتمال حادث

فإن $P(A_4) = \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^3 = \frac{1}{4} (\frac{3}{4})^{4-1}$

ـ هناك مسلك وحيد يمثل A_n هو :

$\bullet\xrightarrow{(1)} M \bullet\xrightarrow{(2)} M \bullet\xrightarrow{(3)} M \bullet\longrightarrow \dots \bullet\xrightarrow{n-1} M \bullet\xrightarrow{n} N$

إذن $P(A_n) = \frac{1}{4} \times (\frac{3}{4})^{n-1}$

2) أ) قيم X هي 1 ، 2 ، 3 ، 4

$P(X=1) = \frac{1}{4}$ ، $P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

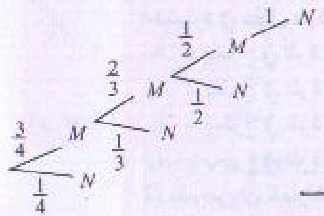
$P(X=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$

X	1	2	3	4
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

ب) $E(X) = 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P_i - E^2(X) = 1\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 - \frac{25}{4}$

$= \frac{1+4+9+16-25}{4} = \frac{3}{4}$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



تطبيق 31 التعرف على استقلالية متغيرين عشوائيين

نرمي حجري نرد متزنين، ونرمز بـ S إلى مجموع الرقمين المتحصل عليهما، وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه باقي قسمة S على 2 و Y المتغير العشوائي الذي قيمه باقي قسمة S على 4.
1) عين قانون S
2) عين قانوني X و Y
3) عين قانون الثنائية (X , Y) و هل المتغيرين X و Y مستقلين ؟

✓ الحل

1) مجموعة قيم S هي 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، ... ، 12

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

عدد الحالات المكنة هو $6\times6=36$

2) القيم التي يأخذها X هي 0 ، 1 . القيم التي يأخذها Y هي 0 ، 1 ، 2 ، 3
عدد الحالات المكنة هو 11 وهي الأعداد من 2 إلى 12

X	0	1
P_i	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$

قانون احتمال X

Y	0	1	2	3
P_i	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$

قانون احتمال Y

3) وجود الصفر في خانة من جدول قانون احتمال (X , Y) يستلزم الارتباط.

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{3}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	0
1	0	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{3}{11}$

تطبيق 32 التعرف على استقلالية متغيرين

علب مرقمة من 1 إلى 4 (هذه الأرقام مغطاة)،
العلبة رقم 1 تحتوي على كرة مرقمة بـ 1
والعلبة رقم 2 فيها كرتان مرقمتان 1 و 2 .
والعلبة 3 تحتوي على ثلاث كرات مرقمة 1 ، 2 ، 3

والعلبة 4 تحتوي على أربع كرات مرقمة من 1 إلى 4
نختار عشوائيا علبة وكذا كرة من هذه العلبة.
وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي ترقيم العلبة. و Y هو المتغير العشوائي الذي يساوي رقم الكرة المختارة.
أ) عين قانون احتمال الثنائية (X, Y) مبرزا قانون X و Y على هامشي جدولي قانوني X و Y.
ب) تحقق أن X و Y ليسا مستقلين.

✓ الحل

أ) قيم X هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ومجموعة الإمكانيات هي 4
قيم Y هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ومجموعة الإمكانيات هو 10 (10 كرات)

X	1	2	3	4
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

قانون X

Y	1	2	3	4
P_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

قانون Y

قانون (X , Y)

X \ Y	1	2	3	4	قانون X
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	المجموع يساوي 1

$$P((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = P(X=x_i) \times P_{(X=x_i)}(Y=y_j)$$

$$P((X=1)\cap(Y=1)) = P(X=1) \times P_{(X=1)}(Y=1) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$P((X=3)\cap(Y=2)) = P(X=3) \times P_{(X=3)}(Y=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

وهكذا نملأ جدول قانون احتمال الثنائية (X , Y)

ب) بما أن $P(X=1) = \frac{1}{4}$ و $P(Y=1) = \frac{4}{10}$ و $P(X=1) \cap P(Y=1) = \frac{1}{4}$

و $\frac{1}{4} \times \frac{4}{10} \neq \frac{1}{4}$ فإن المتغيرين X و Y مرتبطان.
لاحظ أيضا وجود الصفر في خانة من خانات جدول قانون (X , Y) يستلزم أن X و Y مرتبطان.

تطبيق 33 الاحتمالات والوراثة

في مجتمع (الجيل الصفر) مكون من أشخاص. نسبة الأشخاص الذين نمطهم التكويني AA هي P_0 والذين نمطهم Aa هي q_0 والذين نمطهم aa هي r_0.
كل زوج من هذا المجتمع يعطي مولودا نمطه التكويني مشكل من مورثة مأخوذة عشوائيا من نمط الأبوين.
1) ادرس النمط التكويني للجيل الأول لكل زوج ممكن (على شكل جدول).
2) تشكيل الأزواج يحدث عشوائيا. ولنسمي P_1 ، q_1 ، r_1 نسب الأشخاص الذين نمطهم التكويني AA ، Aa ، aa في الجيل (1).
أ) بين أن $P_1=(P_0+\frac{1}{2}q_0)^2$ و $r_1=(r_0+\frac{1}{2}q_0)^2$
ب) تحقق أن $P_1 - r_1 = P_0 - r_0 = \alpha$
جـ) احسب P_1 ، r_1 ، q_1 بدلالة α
د) احسب P_2 ، q_2 ، r_2 بدلالة α ماذا تستنتج؟

✓ الحل

1) الجدول التالي يمثل قانون احتمال الثنائية (X , Y) :

X \ Y	AA	Aa	aa
AA	AA 100%	AA ، Aa 50% , 50%	Aa 100%
Aa	AA ، aA 50% , 50%	$AA(25\%)$ ، $Aa(50\%)$ $aa(25\%)$	Aa ، aa 50% , 50%
aa	Aa 100%	Aa ، aa 50% , 50%	aa 100%

2) أ) هناك 4 مسالك تؤدي إلى الحادث AA وهي :

$\bullet\xrightarrow{P_0} AA \bullet\xrightarrow{P_0} AA \bullet\xrightarrow{1} AA$ ، $\bullet\xrightarrow{P_0} AA \bullet\xrightarrow{q_0} Aa \bullet\xrightarrow{\frac{1}{2}} AA$

$\bullet\xrightarrow{q_0} Aa \bullet\xrightarrow{P_0} AA \bullet\xrightarrow{\frac{1}{2}} AA$ ، $\bullet\xrightarrow{q_0} Aa \bullet\xrightarrow{q_0} Aa \bullet\xrightarrow{\frac{1}{4}} AA$

واحتمال الحادث AA هو مجموع احتمال كل مسلك وعليه :

$$P_1 = P_0 \times P_0 \times 1 + P_0 \times q_0 \times \frac{1}{2} + q_0 \times P_0 \times \frac{1}{2} + q_0 q_0 \times \frac{1}{4}$$

$$= P_0^2 + P_0 q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 = (P_0 + \frac{1}{2} q_0)^2$$

- هناك أربعة مسالك تؤدي إلى $a\,a$ و هي

$$\bullet\!\xrightarrow{q_0} A\,a \bullet\!\xrightarrow{r_0} a\,a \bullet\!\xrightarrow{\frac{1}{2}} a\,a \quad , \quad \bullet\!\xrightarrow{q_0} A\,a \bullet\!\xrightarrow{q_0} A\,a \bullet\!\xrightarrow{\frac{1}{4}} a\,a$$

$$\bullet\!\xrightarrow{r_0} a\,a \bullet\!\xrightarrow{r_0} a\,a \bullet\!\xrightarrow{1} a\,a \quad , \quad \bullet\!\xrightarrow{r_0} a\,a \bullet\!\xrightarrow{q_0} A\,a \bullet\!\xrightarrow{\frac{1}{2}} a\,a$$

واحتمال الحادث $a\,a$ هو مجموع احتمال كل مسلك اي :

$$r_1 = q_0 \times q_0 \times \frac{1}{4} + q_0 r_0 \times \frac{1}{2} + q_0 r_0 \frac{1}{2} + r_0 \times r_0 = q_0^2 \times \frac{1}{4} + q_0 r_0 + r_0^2 = (r_0 + \frac{1}{2} q_0)^2$$

ب) $P_1 - r_1 = (P_0 + \frac{1}{2} q_0)^2 - (r_0 + \frac{1}{2} q_0)^2$

$$= (P_0 + \frac{1}{2} q_0 - r_0 - \frac{1}{2} q_0)(P_0 + \frac{1}{2} q_0 + r_0 + \frac{1}{2} q_0)$$

$$= (P_0 - r_0)(P_0 + r_0 + q_0) = P_0 - r_0$$

لأن $P_0 + r_0 + q_0 = 1$

ج) $P_1 = (P_0 + \frac{1}{2} q_0)^2 = (P_0 + \frac{1}{2}(1 - r_0 - P_0))^2 = (P_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{2} P_0)^2$

$$= (\frac{1}{2} P_0 - \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{2})^2 = \left[\frac{1}{2}(P_0 - r_0) + \frac{1}{2}\right]^2$$

$$= (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}(\alpha + 1)^2$$

$$r_1 = (r_0 + \frac{1}{2} q_0)^2 = \left[r_0 + \frac{1}{2}(1 - r_0 - P_0)\right]^2 = (r_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{2} P_0)^2$$

$$= (\frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{2} P_0 + \frac{1}{2})^2 = (-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2$$

لدينا $q_1 = 1 - P_1 - r_1 = 1 - \frac{1}{4}(1+\alpha)^2 - \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 = \frac{1}{2}(1-\alpha)(1+\alpha)$

د) إذا افترضنا ان الجيل الأول هو بمثابة الجيل الصفر والجيل الثاني بمثابة الجيل الأول فانه ينتج

لدينا: $P_2 - r_2 = P_1 - r_1 = \alpha$ و $P_2 = (P_1 + \frac{1}{2} q_1)^2$ و $r_2 = (r_1 + \frac{1}{2} q_1)^2$

وهذا يعني ان $P_2 = \frac{1}{4}(\alpha + 1)^2$ و $r_2 = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2$ و $q_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha)(1+\alpha)$

نستنتج ان نسب الأنماط $A\,A$ ، $A\,a$ ، $a\,a$ تبقى ثابتة في كل الأجيال.

تطبيق 34 الاحتمالات الشرطية والمتتاليات

ذهب يونس إلى مدينة كبيرة لقضاء عطلة، حيث يقطع الشارع الرئيسي الذي يكتظ بأعمدة إشارة المرور الكهربائية الثلاثية اللون (أحمر- برتقالي- أخضر). نعتبر من اجل كل $n \geq 1$ الحادثين التاليين :

E_n الحادث « يونس يوقف بواسطة اللون الأحمر او البرتقالي (R او O) لعمود المرور رقم n ».

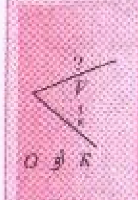
$\overline{E}_n$ الحادث العكسي للحادث E_n .

نعتبر اللون البرتقالي كاللون الأحمر وليكن P_n احتمال E_n و q_n احتمال $\overline{E}_n$.

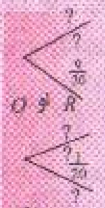
احتمال ان يكون العمود الأول احمرا او برتقاليا هو $\frac{1}{8}$.

واحتمال ان يكون العمود رقم $(n+1)$ احمرا او برتقاليا إذا كان العمود رقم n احمرا او برتقاليا هو $\frac{1}{20}$.

واحتمال ان يكون العمود $(n+1)$ احمرا او برتقاليا إذا كان العمود رقم n اخضرا هو $\frac{9}{20}$.



العمود (1)



العمود (2)

1) نهتم في هذه الفقرة بالعمودين (1) و (2)

أ) اكمل الشجرة المجاورة.

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد مرات ظهور اللون الأخضر في العمودين (1) و (2)

- اعط قانون X ثم احسب $E(X)$

2) نعتبر الحالة العامة.

أ) اعط الاحتمالات الشرطية $P_{E_n}(E_{n+1})$ و $P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})$

ب) بملاحظة ان $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$

بين ان $P_{n+1} = \frac{1}{20} P_n + \frac{9}{20} q_n$

ثم استنتج عبارة P_{n+1} بدلالة P_n

3) (U_n) متتالية الأعداد الحقيقية المعرفة على IN^* بـ $U_n = 28 P_n - 9$

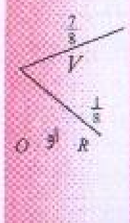
أ) بين ان (U_n) هندسية يطلب تعيين اساسها k .

ب) عبر عن U_n بدلالة n ثم P_n بدلالة n .

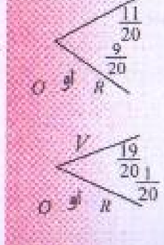
جـ) عين نهاية P_n إن وجدت ثم اعط تفسيرا لهذه النتيجة.

✓ الحل

1) أ)



العمود (1)



العمود (2)

ب) قيم X هي 0 ، 1 ، 2

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{160}$	$\frac{82}{160}$	$\frac{77}{160}$

$$P(X = 0) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{160}$$

$$P(X = 1) = \frac{7}{8} \times \frac{9}{20} + \frac{1}{8} \times \frac{19}{20} = \frac{82}{160} = \frac{41}{80}$$

$$P(X=2)=\frac{7}{8}\times\frac{11}{20}=\frac{77}{160}$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\,P_i=\frac{82}{160}+\frac{77\times 2}{160}=\frac{236}{160}=\frac{59}{40}$$

2) أ) $P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})=\frac{9}{20}$ و $P_{E_n}(E_{n+1})=\frac{1}{20}$

ب) الحادثان $E_{n+1}\cap E_n$ و $E_{n+1}\cap\overline{E}_n$ غير متلائمين وبالتالي:

$$P_{n+1}=P(E_{n+1})=P(E_{n+1}\cap E_n)+P(E_{n+1}\cap\overline{E}_n)$$

$$=P(E_n)\times P_{E_n}(E_{n+1})+P(\overline{E}_n)\times P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})=\frac{1}{20}P_n+\frac{9}{20}q_n$$

- استنتاج عبارة P_{n+1} بدلالة P_n:

لدينا $P_n+q_n=1$ إذن $P_{n+1}=\frac{1}{20}P_n+\frac{9}{20}(1-P_n)$

$$P_{n+1}=\frac{-8}{20}P_n+\frac{9}{20}=\frac{-2}{5}P_n+\frac{9}{20}$$

3) $U_{n+1}=28P_{n+1}-9=28(-\frac{2}{5}P_n+\frac{9}{20})-9$

$$=-\frac{56}{5}P_n+\frac{18}{5}=-\frac{2}{5}(28P_n-9)=-\frac{2}{5}U_n$$

إذن (U_n) هندسية أساسها $k=-\frac{2}{5}$

$$U_n=U_1\times k^{n-1}=(-\frac{11}{2})\times(-\frac{2}{5})^{n-1}$$

$$P_n=\frac{1}{28}\left[-\frac{11}{2}(-\frac{2}{5})^{n-1}+9\right]=-\frac{11}{56}(-\frac{2}{5})^{n-1}+\frac{9}{28}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\frac{9}{28}$$

عندما يجتاز يونس هذه المدينة فإن احتمال توقيفه بواسطة عمود مع العلم أنه احتاز العمود الأول هو $\frac{9}{28}$.

تمارين و مسائل

1 - نرمي حجري نرد لونيهما على التوالي أخضر وأبيض، ونشكل عددا من رقمين، حيث أن رقم العشرات هو الرقم الظاهر على الحجر الأخضر ورقم الآحاد هو الرقم الظاهر على الحجر الأبيض.

1) كم من عدد يمكن تشكيله ؟

2) لتكن الأحداث التالية:

A " العدد المشكل يقبل القسمة على 5 "

B " العدد المشكل أكبر تماما من 36 "

C " العدد المشكل محصور بين 14 و 32 "

احسب احتمالات كل من الحوادث التالية:

A ، $\overline{B}$ ، B ، C ، $A\cap B$ ، $A\cup B$ ، $B\cap C$ ، $B\cup C$ ، $A\cap C$ ، $A\cup C$

2 - نعتبر A و B حادثين بحيث $P(A)=0,8$ و $P(B)=0,4$

1) هل $P(A\cap B)=0,1$ ؟

2) ماذا يحدث لو كانت $P(A\cap B)=0,2$ أو $P(A\cap B)=0,4$ ؟

3) إلى أي مجال ينتمي $P(A\cap B)$ ؟

3 - كيس يحتوي على 5 كرات ثلاث منها بيضاء والأخرى سوداء، تسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من هذا الكيس، وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة.

1) عين مجموعة قيم X.

2) عين قانون احتمال X ثم احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

4 - إليك قانون احتمال متغير عشوائي Y:

Y	-1	1	1	2	3
P	0,03	0,17	0,4	a	b

احسب a بحيث $E(Y)=0$ ثم عين عندئذ $\sigma(Y)$.

5 - لتكن A ، B ، C ثلاثة حوادث.

1) إذا علمت أن $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$

احسب $P(A\cap B)$ و $P_A(B)$ و $P_B(A)$

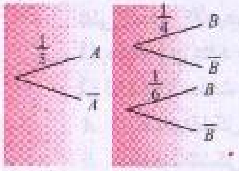
2) إذا علمت أن $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P_A(B)=\frac{1}{4}$ و $P_{\overline{A}}(B)=\frac{1}{2}$ احسب $P(B)$.

3) بين أن $P_A(\overline{B})=1-P_A(B)$.

6 - باستعمال معطيات الشجرة احسب :

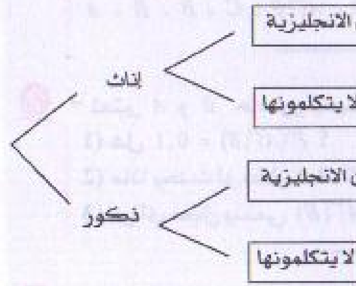
$P(\overline{A})$ ، $P_A(\overline{B})$ و $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

ثم استنتج $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap\overline{B})$ و $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.



7 - بعد عملية لسبر الآراء في ثانوية تحتوي على 60 % إناث و 40 % ذكور علما أن 40 % من الإناث و 20 % من الذكور يتكلمون الانجليزية.

1) انقل ثم اكمل الشجرة المقابلة المجاورة :



2) نختار عشوائيا طالبا من الثانوية ونسمي C الحادث "بنت" و E الحادث "ذكر" و A الحادث "يتكلم الانجليزية"

أ) احسب احتمال الحادثين $C\cap A$ و $E\cap A$ ثم استنتج قيمة $P(A)$.

ب) احسب $P_A(C)$.

8 - كيس يحتوي على 5 كرات ثلاث منها سوداء مرقمة 1 ، 2 ، 3 والأخرتين بيضاويتين مرقمتين بـ 1 و 2، نسحب عشوائيا في ان واحد كرتين من هذا الكيس.

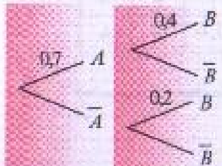
1) ما هو احتمال الحادث A "الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون" (استعمل قانون العد) ؟

2) ما هو احتمال الحادث B " مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين يساوي 5 " ؟

3) ما هو احتمال B علما أن A محقق ؟

9 - نعتبر الحادثين A و B لتجربة عشوائية.

ولدينا شجرة الاحتمالات التالية الموافقة لهذه التجربة :



1) اعط تفسيرا للأعداد 0,7 ، 0,4 ، 0,2

ثم اكمل هذه الشجرة.

2) احسب $P(A\cap B)$ و $P(\overline{A}\cap B)$ ثم استنتج $P(B)$.

3) احسب $P(A\cap\overline{B})$ و $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ ثم احسب $P(\overline{B})$ بطريقتين مختلفتين.

4) احسب $P_B(A)$.

10 - كيس يحتوي على ثلاث كرات سوداء وكرتين بيضاوتين نسحب عشوائيا كرتين الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع، وليكن E الحادث "الكرة الأولى بيضاء" و F الحادث "الكرة الثانية سوداء".

1) احسب $P(E)$ ، $P_E(F)$ و $P(E\cap F)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ) نسحب الكرة ونسجل لونها ثم نرجعها إلى الكيس.

ب) نسحب الكرة ونسجل لونها ولا نرجعها إلى الكيس.

2) ما هو احتمال الحادث B "الكرتان مختلفتا اللون" في كل حالة من الحالتين السابقتين ؟

11 - في مجموعة لدينا 40% من عناصرها تمارس لعبة كرة قدم، و 60% من عناصر هذه المجموعة هم رجال وأن 30% منهم لا يمارسونها .ما هو احتمال أن امرأة مختارة عشوائيا لا تمارس هذه اللعبة ؟

12 - اعطت دراسة أجراها مسير مؤسسة لنشر الكتب أن عدد الكتب المباعة في كل شهر تتبع قانون الاحتمال التالي :

n	0	200	500	800	1000	2000
p	0,04	0,16	0,4	0,25	0,09	0,06

نعتبر أن مبيعات كل شهر مستقلة عن مبيعات الشهور الأخرى

احسب احتمال الأحداث التالية :

1) " يبيع 800 كتاب في جانفي و 500 كتاب في فيفري"

2) "يبيع 2000 في سبتمبر و 1000 في اكتوبر و 500 في نوفمبر"

3) "يبيع 2000 كتاب خلال الثلاثي الأخير من السنة".

13 - حجري نرد، الأول مرقم بـ 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 3 والثاني مرقم بـ : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية للحجرين القيمة المطلقة لفرق الرقمين المسجلين عليهما.

نقبل أن كل الأوجه لها نفس حظ الظهور لكلا الحجرين.

1) ما هي قيم X الممكنة ؟

2) عين قانون احتمال X ثم احسب $E(X)$ و $\sigma(X)$

3) إذا علمت أن $X=0$ ما هو احتمال التحصل على الرقم 1 على كل حجر ؟

14 - كيس U يحتوي على كرة بيضاء وثلاث كرات حمراء وكيس V يحتوي على 5 كرات بيضاء وثلاث حمراء.
نسحب عشوائيا كرة من كلا الكيسين ونبدل لهما الكيس.
احسب احتمال الحادثين التاليين :
A " الكيس U لا يحتوي إلا على الكرات الحمراء"
B " كلا الكيسين يحتفظ بنفس التركيبة الأولى".

15 - لدينا قطعة نقدية مزيفة بحيث احتمال ظهور الظهر هو $\frac{2}{3}$.
وليكن U و V كيسان بحيث :
الكيس U يحتوي على 5 قصاصات حمراء و 4 خضراء.
والكيس V يحتوي على ثلاث قصاصات حمراء وقصاصتين خضراوتين.
نرمي القطعة النقدية بحيث إذا ظهر الظهر نسحب قصاصة من الكيس U وفي حالة العكس نسحب القصاصة من V .
ما هو احتمال التحصل على قصاصة حمراء ؟

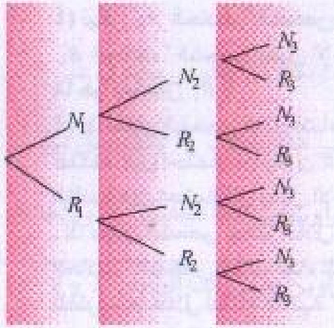
16 - لدينا حجر نرد متزن حيث ان أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 .
ولدينا ثلاثة أكياس U_1 ، U_2 ، U_3 كل واحد منها يشمل k كرة حيث k عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 .وأن هذه الكرات لا نستطيع أن نفرق بينها عند اللمس
يحتوي U_1 على ثلاث كرات سوداء
و U_2 يحتوي على كرتين سوداوتين
و U_3 على كرة سوداء، وكل الكرات الأخرى الموجودة في الأكياس بيضاء.
حيث يقوم لاعب برمي النرد :
- إذا تحصل على الرقم 1 يسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1 مسجلا لونها ثم يرجعها إليه.
- إذا تحصل على مضاعف 3 يسحب عشوائيا كرة من U_2 مسجلا لونها ثم يرجعها إليه
- إذا تحصل على رقم يختلف عن 1 وليس مضاعفا لـ 3 يسحب عشوائيا من الكيس U_3 كرة مسجلا لونها ثم يرجعها إليه.

لتكن الأحداث A ، B ، C ، N المعرفة كما يلي :
A " نتحصل على الرقم 1 عند رمي الحجر"
B " نتحصل على مضاعف 3 عند رمي الحجر"
C " نتحصل على الرقم يختلف عن 1 وليس مضاعفا لـ 3 "
N " الكرة المسحوبة سوداء"
(اللاعب يلعب شوطا واحدا).
1) بين أن احتمال تحصله على كرة سوداء يساوي $\frac{5}{3k}$.
2) احسب احتمال أن يظهر الرقم 1 على الحجر علما أن الكرة المسحوبة سوداء.

3) عين k بحيث يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من $\frac{1}{2}$.
4) عين k بحيث يكون احتمال التحصل على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{3}$

17 - ثلاثة صيادين C_1 ، C_2 ، C_3 يطلقون النار في آن واحد على أرنب وبصفة مستقلة عن بعضهم البعض، وليكن P_1 ، P_2 ، P_3 احتمالات إصابة الصيادين C_1 ، C_2 ، C_3 للأرنب على التوالي.
احسب احتمال إصابة الأرنب على الأقل من طرف صياد واحد.
يعطى $P_1 = 0,15$ ، $P_2 = 0,20$ ، $P_3 = 0,35$.

18 - لنعتبر ثلاثة أكياس U_1 ، U_2 ، U_3 .
الكيس U_1 يحتوي على كرتين سوداويتين وثلاث كرات حمراء.
والكيس U_2 يحتوي على كرة سوداء و 4 حمراء.
و U_3 يحتوي على ثلاث كرات سوداء و 4 حمراء .
تتمثل التجربة في سحب كرة عشوائيا من U_1 وأخرى من U_2 ووضعهما في U_3 ، ثم سحب كرة عشوائيا من U_3 .
من أجل كل i من $\{1 ، 2 ، 3\}$ نرمز بـ :
N_i إلى الحادث سحب كرة سوداء من الكيس U_i
و R_i إلى الحادث سحب كرة حمراء من U_i .
1) انقل ثم اكمل الشجرة المجاورة ؛
2-1) احسب احتمال الأحداث التالية :
$N_1 \cap N_2 \cap N_3$ و $N_1 \cap R_2 \cap N_3$
ب) استنتج احتمال الحادث $N_1 \cap N_3$
جـ) احسب بنفس الطريقة احتمال الحادث $R_1 \cap N_3$



3) استنتج من السؤال (3) احتمال الحادث N_3
4) هل الحادثان N_1 و N_3 مستقلان ؟
5) إذا علمت أن الكرة المسحوبة من U_3 سوداء فما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء ؟

19 - موظف يلتحق بعمله بواسطة حافلة موضوعة تحت تصرف العمال وهذا إذا وصل في وقت مرورها وفي حالة تأخره يركب حافلة ثمن التذكرة فيها هو $1,5\,DA$
- إذا كان هذا الموظف في الوقت المناسب في يوم ما فإن احتمال أن يتأخر في اليوم الموالي هو $\frac{1}{5}$
- إذا تأخر في يوم ما فإن احتمال أن يتأخر في اليوم الموالي هو $\frac{1}{20}$.

من أجل عدد طبيعي n غير معدوم نرمز بـ R_n إلى الحادث " الموظف متأخر في اليوم n "
وليكن P_n احتمال R_n و q_n احتمال $\overline{R_n}$ نضع $P_1=0$

1) أ) عين الاحتمالات الشرطية التالية :
$P_{R_n}(R_{n+1})$ و $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$

ب) عين $P(R_{n+1}\cap R_n)$ بدلالة P_n و $P(R_{n+1}\cap R_n)$ بدلالة q_n

ج) عبر عن P_{n+1} بدلالة P_n و q_n ثم استنتج أن $P_{n+1}=\frac{1}{5}-\frac{3}{20}P_n$

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع $V_n=P_n-\frac{4}{23}$

أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{-3}{20}\right)$.

ب) عبر عن V_n ثم P_n بدلالة n .

ج) بين أن المتتالية (P_n) متقاربة معينا نهايتها.

20 - شركة تكلف مؤسسة مختصة في صبر الآراء بواسطة الهاتف للتحقيق حول نوعية منتوجها، كل محقق له قائمة أشخاص يتصل بهم، أثناء المكالمة الهاتفية الأولى احتمال أن يكون المهتوف إليه غائبا هو 0,4 .

- إذا علمت أن المهتوف إليه حاضر فإن احتمال ان يقبل الإجابة على الأسئلة هو 0,2

1) ليكن A_1 الحادث " الشخص المهتوف إليه غائب في المكالمة الأولى "
R_1 الحادث " الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة خلال المكالمة الأولى "
ما هو احتمال R_1 ؟

2) إذا كان الشخص غائبا أثناء المكالمة الأولى فإننا نهاتفه مرة ثانية في ساعة أخرى عندئذ فإن احتمال أن يكون غائبا هو 0,3 وإذا علمنا أنه إذا كان حاضرا في المكالمة الثانية فإن احتمال أن يقبل الإجابة على الأسئلة هو 0,2 .

- إذا كان الشخص غائبا خلال المكالمة الثانية نحاول الاتصال به مرة أخرى وليكن A_2 الحادث " الشخص غائب أثناء المكالمة الثانية" و R_2 " الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة المطروحة خلال المكالمة الثانية ".
R هو الحادث " الشخص يقبل الإجابة على الأسئلة "
بين أن احتمال R هو 0,176 (استعمل الشجرة).

3) إذا علمت أن الشخص قبل الإجابة على الأسئلة فما هو احتمال أن تكون الإجابة خلال المكالمة الأولى ؟

21 - A و B حادثان بحيث $P(A)=\frac{3}{7}$ و $P(A\cup B)=\frac{5}{7}$ و $P(B)=a$

1) احسب a في كل حالة من الحالات التالية :

أ) A و B غير متلائمان.

ب) A محتواة في B

ج) A و B مستقلان.

2) في كل حالة من الحالات السابقة احسب $P_A(B)$ و $P_B(A)$

22 - في قسم يحتوي على 30 تلميذا، شكل ناديين للتصوير والمسرح.
نادي التصوير مشكل من 10 أشخاص والآخر من 6 أشخاص.
هناك تلميذان عضوان في كلا الناديين.

1) نسأل تلميذا من القسم مأخوذ عشوائيا ونسمي :
P الحادث " التلميذ ينتمي إلى نادي التصوير "
T الحادث " التلميذ ينتمي إلى نادي المسرح "
بين أن P و T مستقلان.

2) أثناء حصة لنادي التصوير كل الأعضاء حاضرين، نختار تلميذا عشوائيا ليقوم بتصوير عضو ثان مختارا عشوائيا.

أ) نسمي T_1 الحادث " التلميذ الأول المختار ينتمي إلى نادي المسرح " احسب $P(T_1)$

ب) نسمي T_2 الحادث " التلميذ الذي أخذت صورته ينتمي إلى نادي المسرح"
احسب $P_{T_1}(T_2)$ و $P_{\overline{T_1}}(T_2)$ ثم استنتج $P(T_2\cap T_1)$ و $P(T_2\cap\overline{T_1})$
(نستطيع استعمال شجرة الاحتمالات).

ج) بين أن احتمال أن يكون التلميذ الذي أخذت صورته ينتمي إلى نادي المسرح هو 0,2

23 - لعبة تتمثل في سحب ثلاث كرات عشوائيا في آن واحد من كيس يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 خضراء.

- إذا تحصل اللاعب على ثلاث كرات حمراء نسمي هذا الحادث R_3 ويتحصل من خلاله على 50 دج .

- إذا تحصل على كرتين حمراوين و كرة خضراء نسمي هذا الحادث R_2 ويتحصل من خلاله على 30 دج.

- و في الأخير إذا تحصل على أقل من كرتين حمراوين نسمي هذا الحادث E و لا يتحصل على أية مكافئة.

1) بين أن احتمال الحادثين R_2 و R_3 هما $P(R_2)=\frac{5}{12}$ و $P(R_3)=\frac{1}{12}$
(استعمل قانون العد).

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه ربح اللاعب، اعط قانون احتمال X معينا $E(X)$ و $\sigma(X)$.

24 - يقوم أحمد برميات متتالية لرماح، عندما يُصيب الهدف في رمية فإن احتمال أن يُصيبه في الرمية الموالية هو $\frac{1}{3}$ وعندما لا يُصيب الهدف في رمية فإن احتمال أن لا يُصيبه في الرمية الموالية هو $\frac{4}{5}$

نفرض ان له في الرمية الأولى نفس حظوظ إصابة الهدف أو عدم إصابته.
من اجل كل عدد طبيعي n موجب تماما نعتبر الأحداث التالية :
A_n الحادث " احمد يُصيب الهدف في الرمية n "
B_n الحادث " احمد لا يُصيب الهدف في الرمية n "
نضع $P_n = P(A_n)$

1) احسب P_1 و بين ان $P_2 = \frac{4}{15}$

2) بين انه من اجل كل عد طبيعي $n \geq 2$ لدينا $P_n = \frac{2}{15} P_{n-1} + \frac{1}{5}$

3) من اجل كل $n \geq 1$ نضع $U_n = P_n - \frac{3}{13}$
بين ان (U_n) هندسية يطلب إيجاد أساسها و هو حدها الأول U_1

4) اكتب U_n ثم P_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

25 - الجدول التالي يعطينا قانون احتمال الثنائية $(X ، Y)$ لمتغير عشوائي :

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

1) اكمل الجدول.
2) هل المتغيرين X و Y مستقلان؟.

26 - الجدول التالي يعطينا قانون احتمال الثنائية $(X ، Y)$ لمتغيرين عشوائيين.
هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان ؟

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

27 - X و Y متغيران عشوائيان معرفان على مجموعة E بـ :
$X(E) = \{x_1 ، x_2 ، x_3 ... ، x_r\}$ ، $Y(E) = \{y_1 ، y_2 ، y_3 ... ، y_s\}$
Z و T متغيران عشوائيان معرفان بـ $Z = X + Y$ و $T = X \times Y$
1) بين ان $E(Z) = E(X) + E(Y)$
2) . بين انه إذا كان X و Y مستقلين فإن $E(T) = E(X) \times E(Y)$
3) . بين انه إذا كان X و Y مستقلين فإن $V(Z) = V(X) + V(Y)$

28 - نعتبر قطعتين نقديتين مغشوشتين p_1 ، p_2 .
عندما نرمي القطعة p_1 فإن احتمال الحصول على الظهر هو $\frac{2}{3}$.

عندما نرمي القطعة p_2 فإن احتمال الحصول على الوجه هو $\frac{2}{9}$.
في الشوط الأول من اللعبة نختار قطعة عشوائيا ثم نرميها.
إذا تحصلنا على الوجه نلعب الشوط الثاني بالقطعة p_1 وإذا تحصلنا على الظهر نلعب الشوط الثاني بالقطعة p_2 .
ونطبق قاعدة اللعب التالية :
من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.
- إذا تحصلنا على الوجه في الشوط رقم n فإننا نلعب الشوط رقم $(n+1)$ بالقطعة p_1
وإذا تحصلنا على الظهر في الشوط رقم n فإننا نلعب الشوط رقم $(n+1)$ بالقطعة p_2 .
نسمي f_n احتمال الحصول على الوجه في الشوط رقم n :

1) احسب f_1 و f_2 .

2) بين انه من اجل كل $n \geq 1$ فإن $f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n + \frac{2}{9}$

3) لتكن (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n \rangle 1$ بـ $U_n = f_n - \frac{1}{4}$
ا) برهن ان المتتالية (U_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة f_n بدلالة n .

4) من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي X_n المتغير العشوائي الذي ياخذ القيمة 1 إذا كانت النتيجة في الشوط رقم n هي الوجه و 0 إذا كانت غير ذلك.
ا) عين قانون احتمال المتغيرين X_1 و X_2 .
ب) احسب الأمل الرياضي لـ X_1 و X_2 .
جـ) هل المتغيرين X_1 و X_2 مستقلان ؟

الدرس **9**

قوانين الاحتمالات

1. العد

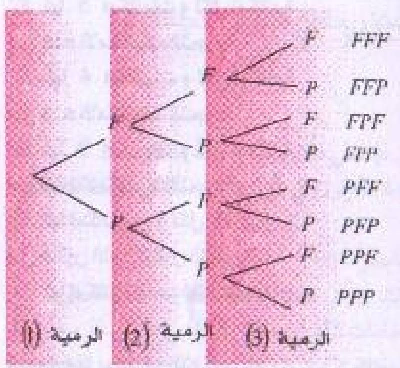
حل بعض مسائل العد يدفعنا في أغلب الأحيان للجواب عن السؤال التالي :
إذا كانت E مجموعة مكونة من n عنصر و P عدد طبيعي معطى، كم طريقة نستطيع بها تكوين قوائم ذات P عنصر من E ؟

مثال . ♦

نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية وفي كل رمية نسجل على الترتيب الجهة التي نراها. علما أن P يمثل ظهر القطعة و F وجهها.
يمكننا التعبير عن النتيجة المتحصل عليها بالعبارة : PFF ، FFP ، ...
ـ العبارة FFP تعني أننا تحصلنا على الوجه F في الرميتين الأولى والثانية، وعلى الظهر P في الرمية الثالثة.
ما هي النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

✓ الحل :

نرمز بـ E للمجموعة $\{F , P\}$. ونقوم بكتابة كل القوائم ذات ثلاثة عناصر المأخوذة من بين العنصرين P و F .
هناك طريقتان لتعيين هذه القوائم :
ـ **طريقة الشجرة :**
لإيجاد كل النتائج الممكنة (عدد القوائم) نعد الفروع النهائية لهذه الشجرة فنجدها 8 فروع.



اذن هناك 8 إمكانيات.
ـ هناك طريقة بسيطة لتعيين عدد الإمكانيات وذلك باستعمال المبدأ الأساسي للعد (الجداء):
إذا تفرع كل فرع رئيسي من شجرة إلى عدد من الفروع وإذا تفرعت هذه الأخيرة إلى عدد آخر أو يساويه من الفروع وهكذا دواليك،
فإن عدد الفروع النهائية تساوي جداء مختلف هذه الأعداد.
وفي هذه الحالة يصبح عدد الحالات الممكنة هو :
$2\times2\times2=2^3=8$

ـ **طريقة ملء الخانات :**
نقوم بملء كل خانة من الخانات الثلاث 1 ، 2 و 3 بالحرف P أو الحرف F وهذا استنادا للمبدأ الأساسي للعد (الجداء) الموضح سابقا في الشجرة.
ولكي نتحصل على عدد الامكانيات نتبع ما يلي :
هناك امكانيتان لملأ الخانة (1)
ومن أجل كل امكانية للخانة (1) يكون لدينا امكانيتان للخانة (2)
اذن هناك (2×2) امكانية لملأ الخانتين (1) و (2) ،
ومن أجل كل امكانية للخانتين (1) و(2) يكون لدينا امكانيتان للخانة (3)
وبما أن عدد الامكانيات للخانتين (1) و(2) هو 2×2 فإن عدد الحالات الممكنة لملأ الخانة (1) و(2) و(3) معا هو $2\times(2\times2)$ أي $2^3=8$.

1.1 المبدأ الأساسي للعد

قاعدة الجداء

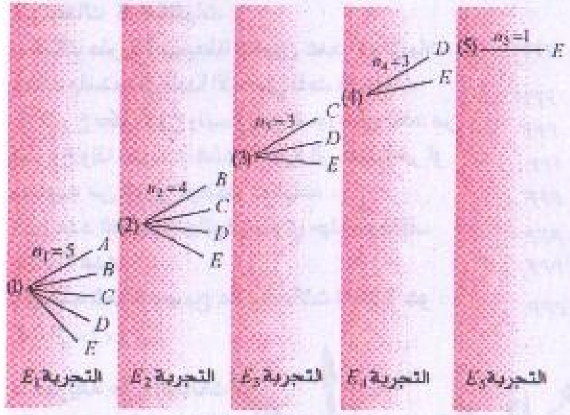
إذا كانت التجربة E_1 لها n_1 امكانية و لكل امكانية من هذه الإمكانيات كانت التجربة E_2 لها n_2 امكانية وهكذا ... حتى التجربة E_K التي لها n_K من الامكانيات. فإن التجارب E_1 و E_2 و .... E_K تحدث معا بعدد من الامكانيات يساوي $n_1 n_2\times.....\times n_K$

مثال . ♦

نريد أن نرتب خمسة متسابقين بحيث لا يحتل أي واحد منهم نفس الرتبة مع الآخر.
كم طريقة نستطيع بها ترتيب هؤلاء المتسابقين ؟

✓ الحل :

نرمز إلى المتسابقين بـ A ، B ، C ، D ، E و لتكن Ω
حيث $\Omega=\{A,B,C,D,E\}$
عدد الترتيبات هو عدد القوائم ذات الخمسة العناصر المختلفة مثنى مثنى من Ω.



E_1 لها 5 امكانيات و لكل امكانية من هذه الامكانيات التجربة E_2 لها 4 امكانيات و لكل امكانية من هذه الامكانيات التجربة E_3 لها 3 امكانيات و لكل امكانية من هذه الامكانيات التجربة E_4 لها امكانيتين و لكل امكانية من هاتين الامكانيتين التجربة E_5 لها امكانية واحدة. و عليه فإن التجارب E_1 ، E_2 ، ... ، E_5 تحدث معا بعدد من الامكانيات يساوي $5\times4\times3\times2\times1=120$

إذن عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها هؤلاء المتسابقين هو 120 .

لاحظ هنا أن عدد عناصر Ω هو $n=5$ و عدد عناصر كل قائمة هو $P=5$.

- قاعدة المجموع :

إذا كانت الأحداث A_1 ، A_2 ، ... ، A_k غير متلائمة مثنى مثنى من التجارب E_1 ، E_2 ، ... ، E_k على الترتيب. وكانت أيضا n_1 ، n_2 ، ... ، n_k عدد إمكانيات A_1 ، A_2 ، ... ، A_k على الترتيب فإن عدد إمكانيات الحادث (A_1 أو A_2 أو ... أو A_k) هو $n_1+n_2+......+n_k$.

مثال. ♦

A_1 ، A_2 ، A_3 حوادث معرفة كما يلي :

A_1 " x عدد طبيعي بحيث $x \le 2$ "

A_2 " x عدد طبيعي بحيث $2 < x \le 3$ "

A_3 " x عدد طبيعي بحيث $4 \le x \le 7$ "

اوجد عدد الحالات المكنة للحادث " x عدد طبيعي و $x \le 7$ "

✓الحل :

الحادث " x عدد طبيعي و $x \le 7$ " نعبر عنه ب :

(x عدد طبيعي و $x \le 2$) أو (x عدد طبيعي و $2 < x \le 3$) أو (x عدد طبيعي و $4 \le x \le 7$)

أي ب (A_1 أو A_2 أو A_3).

عدد امكانيات A_1 هو 3 وعدد امكانيات A_2 هو 1 وعدد امكانيات A_3 هو 4

الحوادث A_1 ، A_2 ، A_3 غير متلائمة مثنى مثنى، وحسب قاعدة المجموع فإن عدد امكانيات الحادث المطلوب هو $3+1+4=8$

قوائم عناصر مجموعة

في كل ما يلي E مجموعة غير خالية و n عدد عناصرها.

أ) تبديلة مجموعة

كل قائمة ذات n عنصر من E عناصرها مختلفة مثنى مثنى تسمى تبديلة لـ E .

مثال. ♦

E مجموعة حيث $E=\{a,b,c,d\}$

القوائم (a,b,c,d) ، (a,c,d,b) ، (a,d,c,b) هي ثلاث تبديلات مختلفة لـ E .

العنصر d موجود في الرتبة الرابعة في القائمة الأولى وفي الرتبة الثالثة في القائمة الثانية وفي الرتبة الثانية في القائمة الثالثة.

إذن في كل قائمة يجب مراعاة ترتيب العناصر .

ولكتابة اي تبديلة لـ E نقوم بملء 4 خانات t,x,y,z حيث كل خانة تشمل حرفا وحيدا وكل الحروف الظاهرة على الخانات تكون مختلفة مثنى مثنى.

ـ هناك أربع امكانيات لملء الخانة (t) ولكل امكانية من هذه الامكانيات تبقى ثلاث امكانيات للخانة (x) ، إذن توجد 4×3 امكانية لملء الخانتين (t) و (x) ، ولكل واحدة منها تبقى امكانيتان للخانة (y) إذن توجد $2\times(4\times3)$ امكانية لملء الخانات (t) و (x) و (y) ولكل واحدة منها تبقى امكانية واحدة للخانة الرابعة.

إذن توجد $4\times(3\times2\times1)=24$ امكانية (تبديلة) لملء الخانات t,x,y,z .

(t)	(x)	(y)	(z)
4 اختيارات	3 اختيارات	2 اختيارات	1 اختيار

• عدد التبديلات :

عدد تبديلات مجموعة E مشكلة من n عنصر حيث $n \ge 1$ يساوي $n(n-1)\times...\times2\times1$

ونرمز لهذا العدد بـ $n!$ و يقرأ " n عاملي" ونكتب $n!=n(n-1)(n-2)\times...\times2\times1$

نصطلح أن $0!=1$

ملاحظة

> يمكن إثبات هذه القاعدة باستعمال طريقة ملء الخانات
> $n!$ هو عدد طرق ترتيب عناصر مجموعة مكونة من n عنصر.

ب) الترتيبة

ترتيبة p عنصر من E هي قائمة ذات p عنصر مختلفة مثنى مثنى. و $1 \le p \le n$

مثال. ♦

$E=\{a,b,c,d\}$

الثلاثيات (a,b,c) ، (a,b,d) ، (a,c,d) هي قوائم من E عناصرها مختلفة مثنى مثنى و بالتالي فهي ترتيبات ذات ثلاثة عناصر من E .

وللحصول على عدد هذه الترتيبات نستعمل ملء ثلاث خانات x, y, z .
بحيث يكون للخانة الأولى 4 امكانيات وللخانة الثانية 3 امكانيات وللخانة الثالثة امكانيتين :

(x)	(y)	(z)
4	3	2

إذن توجد $24=(4\times3\times2)$ امكانية لملء الخانات x , y , z
ومنه فإن عدد الترتيبات ذات ثلاثة عناصر هو 24 .

عدد الترتيبات

إذا كانت E مجموعة تشمل n عنصرا بحيث $n \ge 1$ فإن عدد ترتيبات p عنصر من E $(n \ge p \ge 1)$ هو $n(n-1)\ldots\times(n-(p-1))$

ملاحظة

لاحظ أن $\frac{n!}{(n-p)!}=n(n-1)\times\ldots\times(n-(p-1))$

ج) قائمة p عنصر من E مع التكرار

بما أن التكرار ممكن فإن لكل خانة من الخانات المرقمة من 1 إلى p لها n امكانية (اختيار)
وبالتالي عدد الامكانات الكلي هو $\underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{p\text{ عاملا}}$ أي n^p .

ومنه تكون لدينا القاعدة التالية :
p عدد طبيعي كيفي
بحيث $p \ge 1$.
عدد هذه القوائم هو n^p .

p	2	1
n اختيارات	n اختيارات	n اختيارات

مثال -

$E=\{1,2,3,4\}$ ، $p=5$ ، $n=4$
عدد القوائم ذات 5 عناصر التي يمكن تشكيلها من E مع التكرار هي $4^5=1024$

تمرين تدريبي 1

كيس يحتوي على 12 كرة كتب على كل منها حرفا من حروف المجموعة $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$ نسحب على التوالي ثلاث كرات بدون ارجاع ونسجل في كل مرة الحرف الذي يظهر على الكرة على الترتيب.
كم من كلمة لها معنى أو ليس لها معنى نستطيع تشكيلها من ثلاثة حروف ؟

الحل :

تشكيل كلمة يعني ملء ثلاث خانات مرقمة من 1 إلى 3 .
لدينا 12 امكانية لملء الخانة الأولى ، ومن أجل كل امكانية من هذه الامكانيات توجد 11 امكانية لملء الخانة 2
إذن يكون لدينا 12×11 امكانية لملء الخانتين 1 و 2.

ومن اجل كل امكانية من هذه الامكانيات توجد 10 امكانيات لملء الخانة 3 .
إذن يكون لدينا $10\times(12\times11)$ امكانية لملء الخانات 1 ، 2 ، 3 .
وعليه عدد الامكانيات (عدد الكلمات) الكلي هو 1320 .

تمرين تدريبي 2

نعتبر الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... ، 8 ، 9 .
1- كم عددا مؤلفا من 9 أرقام مختلفة يمكن تشكيله من الأرقام المعطاة ؟
2- كم عددا مؤلفا من أربعة أرقام يمكن تشكيله، بحيث يكون رقم الافه زوجيا ؟
3- كم عددا فرديا يمكن تشكيله بالأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... ، 8 ، 9 ؟

الحل :

1) عدد الأعداد المشكلة من 9 ارقام مختلفة من المجموعة المعطاة هو $9!=362880$

2) لتكوين عدد مؤلف من 4 ارقام،
بحيث رقم الألاف زوجي من المجموعة المعطاة نتبع طريقة ملء الخانات.
بما أن رقم الآلاف زوجي فإن الخانة (آ) لها 4 امكانيات ومن أجل كل امكانية من هذه الامكانات فإن الخانة (م) لها 9 امكانيات.

و	ع	م	آ
9 إختيارات	9 إختيارات	9 إختيارات	4 إختيارات

إذن لدينا (9×4) امكانية لملء الخانتين (آ) و (م).
ومن اجل كل امكانية من هذه الامكانيات لدينا 9 امكانيات لملء الخانة (ع)
فيصبح لدينا $9\times(9\times4)$ امكانية لملء الخانات (آ) ، (م) ، (ع).
ومن اجل كل امكانية من هذه الامكانات لدينا 9 امكانيات لملء الخانة (و)
فيكون لدينا $2916=9\times(9\times9\times4)$ امكانية لملء الخانات الأربع.
وبالتالي عدد الأعداد التي رقم آلافها زوجي والمشكلة من المجموعة المعطاة هو 2916 .

3) يكون العدد فرديا إذا كان رقم آحاده فرديا (أحد هذه الأرقام 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9).
إذن الخانة (و) لها 5 امكانيات وكل خانة من الخانات الأخرى لها 9 إمكانيات.
إذن عدد الأعداد الفردية هو :
$5\times9\times9\times9=3645$

و	ع	م	آ
5 إختيارات	9 إختيارات	9 إختيارات	9 إختيارات

3.1 التوفيقات

E مجموعة عدد عنصرها n و p عدد طبيعي بحيث $n \ge p \ge 0$.
توفيقة p عنصر من E هي مجموعة جزئية من E تشمل p عنصرا.

مثال -

لتكن E مجموعة حيث $E=\{a,b,c\}$.

التوفيقات ذات عنصرين من E هي المجموعات $\{a,b\}$ ، $\{a,c\}$ ، $\{b,c\}$.

ملاحظة

ترتيب العناصر في المجموعة الجزئية ليس مهما.
مثال على ذلك $\{a,b\}$ ، $\{b,a\}$ يمثلان نفس المجموعة.

ترميز

عدد المجموعات الجزئية (عدد التوفيقات) ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر نرمز له ب $\binom{n}{p}$ أو C_n^p ويقرأ " p من بين n "

C_n^p هو عدد الطرق (الامكانيات) لاختيار p عنصرا مختلفا من مجموعة ذات n عنصرا.

مثال -

في المثال السابق $\binom{3}{2}=C_3^2=3$

مبرهنة

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي p . بحيث $0 \leq p \leq n$

لدينا $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n(n-1)\times...\times[n-p+1]}{p!}$

الإثبات

إذا رتبنا p عنصرا مختارا من E بكل الطرق الممكنة فإن عدد هذه التراتيب هو :
$L=n(n-1)\times...\times[n-p+1]$.

وبما أن توفيقة p عنصر هي مجموعة جزئية غير مرتبة من E إذن لها $p!$ طريقة لترتيب عناصرها.

وللحصول على عدد التوفيقات نقسم L على $p!$ فنجد $C_n^p=\frac{n(n-1)\times...\times[n-p+1]}{p!}$

لكن $n(n-1)(n-2)\times...\times(n-p+1)=\frac{n!}{(n-p)!}$

العلاقة السابقة تصبح $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-1)!}$

خواص

n و p عددان طبيعيان مع $p \leq n-1$

1) $C_n^0=C_n^n=1$ ، 3) $C_n^1=C_n^{n-1}=n$ مع $(n \geq 1)$

2) $C_n^p=C_n^{n-p}$ ، 4) $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p=C_n^p$

الإثبات

لتكن E مجموعة جزئية تشمل n عنصرا.

1) المجموعة E تحتوي على مجموعة خالية وعلى مجموعة وحيدة عدد عناصرها n .
إذن $C_n^0=C_n^n=1$

2) إذا كانت A مجموعة جزئية من E تشمل p عنصرا ،
فإن المجموعة المتممة لـ A والتي نرمز لها ب $\overline{A}$ تشمل $n-p$ عنصرا.
إذن عدد المجموعات الجزئية ذات p عنصرا يساوي عدد المجموعات الجزئية ذات $(n-p)$ عنصرا وعليه $C_n^p=C_n^{n-p}$.
ويمكن أن نثبت هذه المساواة بالحساب اي :

$$C_n^{n-p}=\frac{n!}{(n-(n-p))!\,(n-p)!}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=C_n^p$$

3) بوضع $p=1$ في العلاقة $C_n^p=C_n^{n-p}$ نجد $C_n^1=C_n^{n-1}$

4) ليكن a عنصرا من E ، من بين C_n^p مجموعة ذات p عنصر من E هناك مجموعات تشمل a وليكن x عددها ، والتي لا تشمل a وليكن y عددها.
من الواضح أن $x+y=C_n^p$

حساب x :
المجموعات ذات p عنصر والتي تشمل a ، تشمل كذلك $p-1$ عنصرا من بين $n-1$ عنصر من E من غير a . وعليه $x=C_{n-1}^{p-1}$

حساب y :
المجموعات ذات p عنصر والتي لا تشمل a ، تشمل p عنصرا مختارا من بين $n-1$ عنصر من E من غير a . وعليه $y=C_{n-1}^p$

إذن $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p=C_n^p$

ويمكن أن نثبت هذه المساواة بالحساب :

$$C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p=\frac{(n-1)!}{(n-p)!\,(p-1)!}+\frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}$$

$$=\frac{p\times(n-1)!}{(n-p)!\,p!}+\frac{(n-p)\times(n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(p+n-p)}{p!\,(n-p)!}=\frac{n\times(n-1)!}{p!\,(n-p)!}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=C_n^p$$

المثلث العددي (مثلث باسكال)

الجدول التالي يسمح لنا بحساب C_n^p باستعمال العلاقة $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p=C_n^p$

فمثلا $C_1^0+C_1^1=C_2^1$

- قيمة C_n^p هي القيمة الموجودة في الخانة الناتجة من تقاطع السطر n والعمود p .

فمثلا $C_2^1=1+1=2$

$C_4^2=3+3=6$

$C_3^2=2+1=3$

n \ p	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

تمرين تدريبي 1

1- عين كل الأعداد a_p بحيث $a_p = C_6^p$ ، وبحيث p يأخذ القيم من 0 إلى 6 ،
ثم تحقق أن $\sum_{p=0}^{6} a_p = 2^6$

2- استنتج الأعداد b_p بحيث $b_p = C_7^p$ و بحيث p يأخذ القيم من 0 على 7
واحسب $\sum_{p=0}^{7} b_p$

الحل :

1) حسب الخاصية (1) لدينا $a_0 = a_6 = 1$ وحسب الخاصية (3) لدينا $a_1 = a_5 = 6$

$$a_2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6\times5}{1\times2} = 15$$

$$a_3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 5\times4 = 20$$

$$a_4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6\times5}{2} = 15$$

$$\sum_{p=1}^{6} a_p = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 12 + 15 + 20 + 15 = 64 = 2^6$$

2) نستعمل الخاصية (4) لحساب الأعداد b_p .

$$b_0 = C_7^0 = 1$$

$$b_1 = C_7^1 = C_6^0 + C_6^1 = a_0 + a_1 = 1 + 6 = 7$$

$$b_2 = C_7^2 = C_6^1 + C_6^2 = a_1 + a_2 = 6 + 15 = 21$$

$$b_3 = C_7^3 = C_6^2 + C_6^3 = a_2 + a_3 = 15 + 20 = 35$$

$$b_4 = C_7^4 = a_3 + a_4 = 20 + 15 = 35$$

$$b_5 = C_7^5 = a_4 + a_5 = 15 + 6 = 21$$

$$b_6 = C_7^6 = a_5 + a_6 = 6 + 1 = 7$$

$$b_7 = C_7^7 = 1$$

$$\sum_{p=0}^{7} b_p = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$$

تمرين تدريبي 2

كيس يحتوي 8 كرات بيضاء و 13 كرة حمراء نسحب 3 كرات في آن واحد.

1- ما هو عدد السحبات الممكنة ؟

2- ما هو عدد السحبات التي تشمل كرتين بيضاويتين وواحدة حمراء ؟

الحل :

1) عدد السحبات الممكنة هو عدد المجموعات الجزئية ذات ثلاثة عناصر من المجموعة ذات 21 عنصر (عدد الكرات البيضاء و الحمراء). ويساوي $C_{21}^3 = 1330$

2) توجد $C_8^2 = 28$ امكانية لاختيار كرتين بيضاويتين من بين 8 كرات بيضاء.
يوجد C_{13}^1 امكانية لاختيار كرة حمراء من بين 13 كرة حمراء.
من أجل كل امكانية لاختيار كرتين بيضاويتين توجد 13 امكانية لاختيار كرة حمراء ومنه العدد الكلي هو $28\times13 = 364$.
إذن عدد الامكانيات للحصول على كرتين بيضاويتين وكرة حمراء هو 364 .

4.1 دستور ثنائي الحد

مبرهنة

من أجل كل عددين مركبين a و b ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

ملاحظة

1) يمكنك اثبات هذا الدستور بالتراجع n

2) $\sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} \times b^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$.

نتيجة

عدد المجموعات الجزئية المكونة من مجموعة ذات n عنصر هو 2^n .
لأنه بوضع $a=1$ و $b=1$ في دستور ثنائي الحد نجد :

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n$$

إذا كانت E مجموعة تشمل n عنصرا و إذا كان $n \geq p \geq 0$ فإن : C_n^p هو عدد المجموعات الجزئية لـ E ذات p عنصر
إذن $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ اي 2^n هو عدد المجموعات الجزئية لـ E .

تمرين تدريبي 1

انشر الأعداد التالية $A = (x-1)^4$ ، $B = (2+i)^4$ ، $C = (2x-3y)^4$.

الحل :

$$A = (x-1)^4 = (x+(-1))^4 = \sum_{p=0}^{4} C_4^p x^p (-1)^{4-p}$$

$$= C_4^0 x^0 (-1)^4 + C_4^1 x^1 (-1)^3 + C_4^2 x^2 (-1)^2 + C_4^3 x^3 (-1)^1 + C_4^4 x^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$$

$$B = (2+i)^4 = C_4^0 2^0 i^4 + C_4^1 2^1 i^3 + C_4^2 2^2 i^2 + C_4^3 2^3 i^1 + C_4^4 2^4 i^0$$

$$= 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i$$

$$C = (2x - 3y)^4 = \sum_{p=0}^{4} C_4^p (2x)^p \times (-3y)^{4-p}$$

$$= C_4^0 (-3y)^4 + C_4^1 2x(-3y)^3 + C_4^2 (2x)^2 (-3y)^2 + C_4^3 (2x)^3 (-3y) + C_4^4 (2x)^4$$

$$= 81y^4 - 216xy^3 + 216x^2y^2 - 96x^3y + 16x^4$$

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x+1)^n$ مع n عدد طبيعي غير معدوم.

1- اعط نشرا لـ $f(x)$ ، ثم استنتج $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$

2- باستعمال مشتق الدالة f ، احسب بدلالة n المجموع S حيث $S = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k$.

✓ الحل :

1) حسب دستور ثنائي الحد نجد $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \times 1^{n-k} = \sum_{0}^{n} x^k C_n^k$

لدينا من جهة $f(1) = 2^n$ ومن جهة اخرى $f(1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ إذن $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = n(x+1)^{n-1}$ ومن جهة اخرى لدينا ،

$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \times k x^{k-1}$.

لدينا $f'(1) = n \times 2^{n-1}$ ومن جهة أخرى $f'(1) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \times k = S$

إذن $S = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \times k = n \times 2^{n-1}$

2 - قوانين الاحتمالات المتقطعة

♦ مثال -

نرمي مرة واحدة حجر نرد متزن ونهتم بالحادث الوحيد " ظهور الرقم 2 " ،
نقول عندئذ اننا حققنا إختبار برنولي.
نسمي تحقيق الحادث الذي نهتم به بـ " نجاح " ونرمز له بـ S .والحادث العكسي له

يسمى " رسوب " والذي نرمز له بـ $\overline{S}$
عندما نعيد أربع مرات مستقلة عن بعضها البعض اختبار برنولي، نقول عندئذ اننا حققنا تجربة برنولي.
ليكن X متغير عشوائي قيمه عدد مرات تحقق S في الرميات الأربع.
كل مخرج من هذه التجربة هو قائمة من أربعة احرف ماخوذة من المجموعة $\{S, \overline{S}\}$.

1) ما هي قيم X المكنة ؟

2- ا) احسب احتمال الحادث $(X=0)$

ب) احسب احتمال الحادث $(X=4)$

3- ا) احسب احتمال التحصل على $(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S})$

ب) كم توجد من قائمة مشكلة من حرف S وثلاثة احرف $\overline{S}$ ؟
ثم استنتج احتمال الحادث $(X=1)$

4) ماهو عدد القوائم التي تحقق الحادث $(X=2)$ ؟ ثم استنتج $P(X=4)$

ب) احسب $P(X=3)$ ثم اعط قانون احتمال X .

✓ الحل :

1) قيم X المكنة هي $4, 3, 2, 1, 0$

2) ا) $(X=0)$ هو الحادث " عدم ظهور رقم 2 " في الأربع رميات

إذن $(X=0)$ هو الحادث $(\overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S})$

وبما أن الرميات مستقلة عن بعضها البعض فإن

$$P(X=0) = P(\overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S})$$

$$= P(\overline{S}) P(\overline{S}) \times P(\overline{S}) P(\overline{S}) = \left(P(\overline{S})\right)^4$$

$$= (1 - P(S))^4 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

ب) $(X=4)$ هو الحادث " ظهور الرقم 2 " في الأربع رميات وهو $S \cap S \cap S \cap S$

إذن $P(X=4) = (P(S))^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$

3) ا) الحادثة $(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S})$ هي الحادثة $S \cap \overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S}$

إذن $P(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S}) = P(S)\left(P(\overline{S})\right)^3 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{1296}$

ب) توجد 5 قوائم مشكلة من حرف S وثلاثة أحرف $\overline{S}$.

$\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\!S\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}$ ، $\bullet\!-\!S\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}$

$\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\!S$ ، $\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\overline{S}\bullet\!-\!S\bullet\!-\overline{S}$

هناك أربعة مسالك لها نفس الاحتمال التي تحقق الحادث $(X=1)$ وحسب قاعدة احتمال حادث

نجد $P(X=1) = 4 \times P(S, \overline{S}, \overline{S}, \overline{S}) = 4 \times \frac{125}{1296} = \frac{500}{1296}$

4) أ) $(X=2)$ هو الحادث ظهور رقم 2 مرتين.

$$\bullet - S \bullet - S \bullet - \overline{S} \bullet - \overline{S} \quad , \quad \bullet - \overline{S} \bullet - S \bullet - \overline{S} \bullet - S$$

$$\bullet - S \bullet - \overline{S} \bullet - S \bullet - \overline{S} \quad , \quad \bullet - \overline{S} \bullet - \overline{S} \bullet - S \bullet - S$$

$$\bullet - S \bullet - \overline{S} \bullet - \overline{S} \bullet - S \quad , \quad \bullet - \overline{S} \bullet - S \bullet - S \bullet - \overline{S}$$

عدد القوائم هو 6 لأنه توجد ستة مسالك تحقق الحادث $(X=2)$ وهذه المسالك لها نفس الاحتمال.

إذن $P(X=2) = 6 \times P(S, S, \overline{S}, \overline{S}) = 6 \times (P(S))^2 \times (P(\overline{S}))^2$

$$= 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{150}{1296}$$

ب) $P(X=3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=4) = \frac{20}{1296}$

جـ) قانون احتمال X هو:

X	0	1	2	3	4
P_i	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$4\times\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$6\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$

هذا القانون يسمى بثنائي الحد وسيطيه $n=4$ و $p=\frac{1}{6}$

2 . 1 تجربة برنولي

تعريف

- اختبار برنولي هو حينما لا نهتم إلا بتحقيق حادث وحيد S في تجربة عشوائية.
- تجربة أو مخطط برنولي هو حينما نكرر اختبار برنولي n مرة ومستقلة عن بعضها البعض وفي نفس الشروط.

2 . 2 قانون برنولي

لتكن E تجربة عشوائية لها مخرجين S و $\overline{S}$ احتمالهما على الترتيب p و q حيث $q=1-p$

تعريف

- المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 عند النجاح و القيمة 0 عند الرسوب يسمى متغير برنولي
- قانون احتمال هذا المتغير العشوائي يسمى قانون برنولي.

X	0	1
P_i	$1-p$	p

$P(X=1)=p$ و $P(X=0)=1-p$

خاصية

1) $E(X)=p$ ، 2) $V(X)=P(1-p)$ ، 3) $\sigma(X)=\sqrt{P(1-p)}$

مثال - ♦

E تجربة عشوائية تتمثل في رمي قطعة نقدية.

نسمي المخرج "ظهور الوجه" بـ S والمخرج "ظهور الظهر" بـ $\overline{S}$.

وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمته 1 عند ظهور الوجه و 0 عند ظهور الظهر.

عندئذ قانون احتماله هو:

X	0	1
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X)=\frac{1}{2}$ ، $V(X)=\frac{1}{4}$ ، $\sigma(X)=\frac{1}{2}$

2 . 3 قانون ثنائي الحد

تعريف

نكرر n مرة و بصفة مستقلة نفس التجربة التي لها مخرجان S و $\overline{S}$ احتماليهما على الترتيب: p و $q=1-p$

المتغير العشوائي X الذي قيمه عدد مرات النجاح خلال الـ n تجربة. اي من 0 إلى n.

قانون احتمال X يسمى ثنائي الحد ذا الوسيطين n و p ونرمز له بـ $\mathscr{B}(n,p)$.

مبرهنة

من أجل كل عدد طبيعي k حيث $(0 \le k \le n)$

لدينا $P(X=k) = C_n^k\, p^k \times (1-p)^{n-k}$

الإثبات

الحادث $(X=k)$ محقق إذا تحصلنا على k نجاح (S) و $n-k$ رسوب $(\overline{S})$.

بسبب استقلالية هذه التجارب فإن احتمال التحصل على k نجاح هو p^k ، واحتمال الحصول على $(n-k)$ رسوب هو q^{n-k}. وهذا مهما كان ترتيب ظهور S.

إذن احتمال الحصول على k نجاح (S) و $(n-k)$ رسوب $(\overline{S})$ في ترتيب معين معطى بالجداء: $p^k q^{n-k}$. ($p^k q^{n-k}$ هو احتمال مسلك يشمل k مرة S و $n-k$ مرة $\overline{S}$).

عدد الطرق للتحصل على k نجاح خلال n تجربة، يساوي عدد التوفيقات ذات k عنصر مختارة من بين n عنصر. وهذا العدد هو C_n^k (C_n^k عدد المسالك المحققة للحادث $(X=k)$).

وعليه $P(X=k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$

خواص

$E(X)=np$ ، $V(X)=np(1-p)$ ، $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

الإثبات

$$E(X) = 0\,P(X=0) + 1\,P(X=1) + ... + k\,P(X=k) + ... + n \times P(X=n)$$

$$= 0 + C_n^1\, p\, q^{n-1} + ... + k\,C_n^k\, p^k q^{n-k} + ... + n\,C_n^n\, p^n q^0$$

لكن $(px+q)^n = q^n + C_n^1\, p\, q^{n-1} x + ... + C_n^k\, p^k q^{n-k} x^k + ... + C_n^n\, x^n p^n q^0$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x نجد:

$$n\,P(px+q)^{n-1} = C_n^1\, p\, q^{n-1} + ... + k\,C_n^k\, p^k q^{n-k} x^{k-1} + ... + n\,C_n^n\, p^n\, x^{n-1}$$

بوضع $x=1$ نجد:

$$n\,P(p+q)^{n-1} = C_n^1\, p\, q^{n-1} + ... + k\,C_n^k\, p^k q^{n-k} + ... + n\,C_n^n\, q^n = E(X)$$

وبما أن $p+q=1$ فإن $E(X)=nP$

ملاحظة

1) إذا علمنا قيمة $P(X=k)$ فإننا نستطيع حساب قيمة $P(X=k+1)$ مع $0 \le k+1 \le n$

$$P(X=k+1)=\frac{p}{q}\times\frac{n-k}{k+1}\times P(X=k)$$

2) شروط تطبيق قانون ثنائي الحد هي :
- كل تجربة مأخوذة بشكل معزول ولا تفرز إلا مخرجين S و $\overline{S}$ (نجاح ورسوب).
- النجاح دائما له نفس الاحتمال p في كل تجربة
- هناك استقلالية وتماثل بين التجارب المتتالية.

3) بنشر $(p+q)^n$ نجد احتمال الحادث $(X=k)$ حيث $0 \le k \le n$ ولهذا سمي بقانون ثنائي الحد.

تمرين تدريبي 1

كيس يحتوي على 10 كرات واحدة منها بيضاء و ثلاث خضراء و 4 حمراء و 2 صفراء. نقوم بثلاث سحبات عشوائية متتالية بالارجاع ونهتم بالحادث S "سحب كرة بيضاء"

1) احسب احتمال الحادث A "التحصل على كرتين بيضاوين في الثلاث سحبات".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد النجاحات خلال الثلاث سحبات.
- اعط قانون X .

الحل

بما ان كل تجربة على شكل معزول (سحب كرة من كيس يحتوي على 10 كرات) تفرز مخرجين هما " كرة بيضاء " أو " كرة غير بيضاء " (نهتم بظهور كرة بيضاء فقط).
هناك استقلالية بين التجارب الثلاث. واحتمال النجاح S هو دائما p في كل السحبات
إذن نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد.

1) قانون ثنائي الحد وسيطيه : $n=3$ و $p=\frac{1}{10}$

هناك ثلاثة مسالك تحقق الحادث A هي $SS\overline{S}$ ، $S\overline{S}S$ ، $\overline{S}SS$ ولها نفس الاحتمال p^2q
وحسب قاعدة احتمال حادث نجد :

$$P(A)=3p^2q=3\left(\frac{1}{10}\right)^2\frac{9}{10}=\frac{27}{1000}$$

2) قيم X هي 0 ، 1 ، 2 ، 3

$$P(X=0)=C_3^0\,p^0q^3=q^3=\left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$$P(X=1)=C_3^1\,p^1q^2=3\times\frac{1}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2=3\times\frac{9^2}{10^3}$$

$$P(X=2)=C_3^2\,p^2q^1=3\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times\frac{9}{10}=\frac{27}{10^3}$$

$P(X=3)=C_3^3\,p^3q^0=\frac{1}{10^3}$ إذن قانون X هو:

X	0	1	2	3
P_i	$\left(\frac{9}{10}\right)^3$	$3\times\frac{9^2}{10^3}$	$\frac{27}{10^3}$	$\frac{1}{10^3}$

تمرين تدريبي 2

نرمي في آن واحد ثلاث قطع نقدية مترنة .
ما هو احتمال التحصل على ثلاث مرات الوجه (F) ؟

الحل :

يمكن اعتبار رمي ثلاث قطع نقدية مرة واحدة كثلاث رميات متتالية. ونهتم بظهور الوجه F
ظهور الوجه (F) على أي قطعة نقدية مستقل عن ظهوره في أي قطعة اخرى.
واحتمال ظهور الوجه F في كل منها يساوي $p=\frac{1}{2}$

إذن نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=3$ و $p=\frac{1}{2}$.

نسمي S "ظهور الوجه F"
نسمي A الحادث " ظهور ثلاث مرات الوجه F".

إذن $A=FFF$ وعليه $P(A)=C_3^3\,p^3q^0=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

2 . 4 قانون التوزيع المنتظم

تعريف

نسمي قانون التوزيع المنتظم (أو تساوي الاحتمال) كل قانون لمتغير عشوائي X الذي يمكن ان يأخذ n قيمة $x_1, x_2, \dots, x_n$ بحيث احتمال كل منها متساوي .

أي $P(X=x_0)=P(X=x_1)=\dots=P(X=x_n)=\frac{1}{n}$

خواص

$$E(X)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\times\frac{1}{n} \quad ، \quad V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-E^2(X)$$

تمرين تدريبي 1

X متغير عشوائي قيمه 0 ، 0.1 ، 0.2 ، ..... ، 0.9
بفرض تساوي الاحتمال لهذه القيم احسب $E(X)$ و $V(X)$

✓ الحل :

بما انه لدينا تساوي احتمال فان $P(X=k)=\frac{1}{10}$ مع $k\in\{0\,،\,0{,}1\,،\,0{,}2\,،\dots،\,0{,}9\}$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{9} x_i\,p_i=\sum_{i=0}^{9}\frac{1}{10}\times\frac{i}{10}=\frac{1}{100}\sum_{i=0}^{9} i=0{,}45$$

$$V(X)=\sum_{i=0}^{9} x_i^2\,p_i-E^2(X)=\sum_{i=0}^{9}\frac{i^2}{100}\times\frac{1}{10}-(0{,}45)^2$$

$$=\frac{1}{1000}\sum_{i=0}^{9} i^2-(0{,}45)^2=\frac{1}{1000}\left(1^2+2^2+\dots+9^2\right)-(0{,}45)^2=\frac{285}{1000}-(0{,}45)^2=0{,}0825$$

تمرين تدريبي 2

دراسة احصائية بينت أنه في مجتمع تواتر ولادة بنت هو 0,55 .
نفرض ان جنس المولود عند الولادة غير متعلق بجنس المولود السابق.
نهتم بعدد البنات عند العائلات ذات الأربعة أطفال.

1-أ) ادرس قانون احتمال للمتغير العشوائي X الذي قيمه عدد البنات في هذه العائلات. مشكلا جدولا لهذا القانون وتمثيلا بيانيا.
ب) ما هي قيمة X الأكثر احتمالا في هذه العائلات ؟

2- احسب $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$.

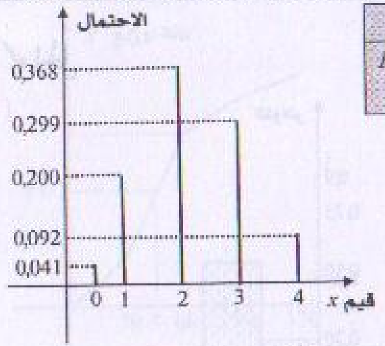
✓ الحل :

1) التجربة هي ولادة مولود والحدث الذي نهتم به هو " ولادة بنت" الذي نسميه S .
هذه التجربة لها مخرجين S و $\overline{S}$ واحتمالهما 0,55 و 0,45 على التوالي.
للحصول على اربع ولادات نكرر التجربة 4 مرات متوالية وهذه التجارب مستقلة عن بعضها البعض ومتماثلة.
إذن قانون المتغير العشوائي X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه $n=4$ و $p=0{,}55$
قيم X هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

$P(X=k)=C_n^k\,p^k\,q^{n-k}=C_4^k\,(0{,}55)^k\,(0{,}45)^{4-k}$ مع $4\geq k\geq 0$

$$P(X=0)=C_4^0\,(0{,}55)^0\,(0{,}45)^4=(0{,}45)^4=0{,}041$$
$$P(X=1)=C_4^1\,(0{,}55)(0{,}45)^3=0{,}200$$
$$P(X=2)=C_4^2\,(0{,}55)^2\,(0{,}45)^2=0{,}368$$
$$P(X=3)=C_4^3\,(0{,}55)^3\,(0{,}45)=0{,}299$$
$$P(X=4)=C_4^4\,(0{,}55)^4=0{,}092$$

X	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0,041	0,200	0,368	0,299	0,092



القيمة الأكبر احتمالا هي $X=2$

2) $E(X)=\sum_{i=0}^{4} x_i\,p_i=n\,p=4\times0{,}55=2{,}2$

$V(X)=P(1-p)\times n=4\times0{,}55\times0{,}45=0{,}99$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0{,}99}=0{,}995$

3 . قوانين الاحتمالات المستمرة

في كل الحالات السابقة، المتغير العشوائي X قيمه منتهية $x_1, x_2, \dots, x_m$. نقول عندئذ أن X متغير متقطع، لكن توجد متغيرات عشوائية غير متقطعة (مستمرة) والتي تأخذ كل القيم الموجودة في مجال محدود أو غير محدود من $\mathbb{R}$.

من غير الممكن عندئذ تعريف المتغير العشوائي بتقديم احتمالات الأحداث $(X=x_i)$ لأن أعداد هذه الأحداث غير منتهية وعليه فمن الضروري تقديم طرح آخر يأخذ بعين الاعتبار الأسئلة التي نطرحها لأنه بواسطة متغير عشوائي غير متقطع نهتم بأحداث مثل :
" X يأخذ قيم من المجال I " الذي نرمز له بـ $(X\in I)$ مجازا .

♦ مثال .

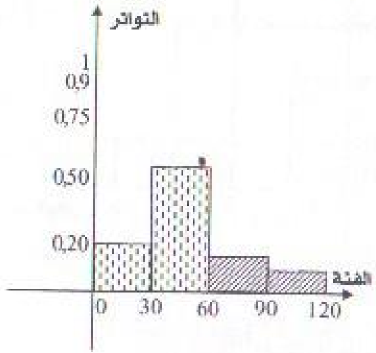
قمنا بدراسة حول أوزان أفراد مجتمع فكانت النتائج ملخصة في الجدول التالي:

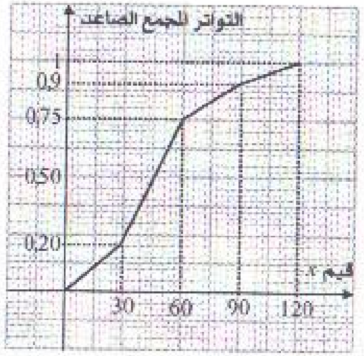
الفئات	$[0,30[$	$[30,60[$	$[60,90[$	$[90,120[$
التواتر	0,20	0,55	0,15	0,10
القيم العظمى	30	60	90	120
التواتر المجمع الصاعد	0,20	0,75	0,90	1

1-أ) مثل المدرج التكراري للتواترات
ب) مثل مضلع التواترات المجمعة الصاعدة
2) نختار عشوائيا شخص من هذا المجتمع وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه قيم هذا النمط
أ) ماهي قيم X ؟
ب) احسب $P(X\langle 60)$
جـ) احسب $P(45\leq X\leq 75)$
د) احسب $P(X\rangle 80)$

✓ الحل

1)





2) أ) قيم X تنتمي إلى المجال $]0,120[$

ب) حساب $P(X<60)$:

$P(X<x)$ هي مساحة الجزء من المدرج التكراري الموجود قبل قيمة x إذا كانت المساحة الكلية هي الوحدة أو هي قيمة التواتر المجمع الصاعد الموافق لـ x .

هذه التواترات تترجم بلغة الاحتمالات، فمثلا $75\ \%$ من الأفراد أوزانهم أقل تماما من $60\ Kg$.

وعليه $P(X<60)=0{,}75$.

إذن قيمة $P(X<60)$ هي القيمة الموافقة لـ 60 على مضلع التواترات المجمعة الصاعدة وتمثل كذلك مساحة المستطيلات الموجودة على يسار المستقيم ذو المعادلة $x=60$.

جـ) الحادث $45 \le X \le 75$ يعني أن الأفراد أوزانهم أكبر من أو يساوي 45 وأقل من أو يساوي 75 . المساحة الكلية للمدرجات هي 30 .

المساحة المحصورة بين $x=45$ و $x=75$ هي $10{,}5$

$P(45 \le X \le 75)$ هي نسبة $10{,}5$ على 30 .

أي $P(45 \le X \le 75)=\frac{10{,}5}{30}=0{,}35$

د) الحادث $(X>80)$ يعني أن أفراد المجتمع الذين أوزانهم أكبر تماما من 80 .

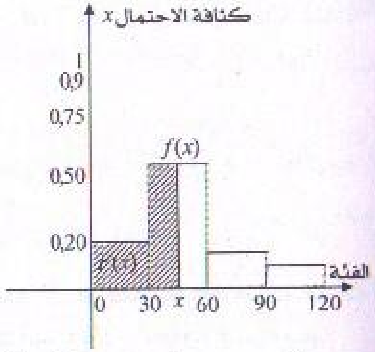
المساحة المحصورة بين 80 و 120 هي $4{,}5$

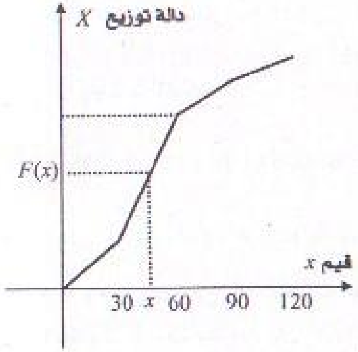
ومنه $P(X>80)=\frac{4{,}5}{30}=0{,}15$

إذا اقتصرنا على الأضلاع العلوية للمستطيلات المشكلة للمدرج التكراري نتحصل على تمثيل لدالة درجية f معرفة على مجالات من الشكل $]\alpha,\beta[$ ، والاحتمال $P(X>x)$ يساوي تكامل الدالة f على المجال $]0,x[$.

و إذا رمزنا بـ F للدالة التي تمثيلها البياني هو مضلع التواترات المجمعة الصاعدة، فإن اقتصار الدالة F على $]60,90[$ يحقق $F'(x)=f(x)$ و $F(x)=P(X<x)$

الدالة F تسمى دالة التوزيع X و f تسمى كثافة احتمال X .





3 . 1 متغير معرف بواسطة دالة الكثافة

تعريف

نقول عن متغير عشوائي X أنه مستمر (مستمر تماما) إذا وجدت دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ومستمرة على $\mathbb{R}$ ماعدا في بعض القيم وموجبة وبحيث مهما يكن المجال I من $\mathbb{R}$:

$P(X\in I)$ يساوي تكامل f على I ونكتب $P(X\in I)=\int_I f(x)dx$

الدالة f تسمى كثافة احتمال المتغير العشوائي X .

نتائج

1) إذا كان $I=[a,b]$ فإن $P(X\in I)=\int_a^b f(x)dx$

2) لما $a=b$ فإن $I=\{a\}$ ومنه $P(X=a)=0$

ونقول عندئذ أن احتمال أن يأخذ X قيمة معزولة وثابتة هو الصفر.

3) $P(X<a)=P(X\le a)$ لأن الحادث " $X\le a$ " هو الحادث " X يأخذ قيمة أصغر تماما أوتساوي a " الذي هو اتحاد الحادثين " $X<a$ " و " $X=a$ "

وعليه $P(X\le a)=P(X<a)+P(X=a)=P(X<a)$

4) بما أن " $X\in\mathbb{R}$ " هو حادث أكيد فإن $P(X\in\mathbb{R})=1$

إذن $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1$

5) إذا كان $I\cap J=\phi$ فإن $P(X\in I\cup J)=P(X\in I)+P(X\in J)=\int_I f(x)dx+\int_J f(x)dx$

ملاحظة

- إذا كان I مجال من الشكل $[a,+\infty[$ ، فإن العدد $\int_I f(x)dx$ يمثل النهاية عند $(+\infty)$ إن وجدت للدالة $t\mapsto\int_a^t f(x)dx$

- إذا كان I مجال من الشكل $]-\infty , a]$ ، فإن العدد $\int_I f(x)dx$ يمثل النهاية عند $(-\infty)$ إن وجدت للدالة $t \mapsto \int_t^a f(x)dx$

- القول أن $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ لدالة الكثافة f يعني أن الدالة $t \mapsto \int_0^t f(x)dx$ لها نهاية ℓ عند $(+\infty)$ والدالة $t \mapsto \int_t^0 f(x)dx$ لها نهاية ℓ' عند $(-\infty)$ و $\ell' + \ell = 1$

هذه الشروط على f تبين أنه ليست كل دالة f هي دالة كثافة. ونستخلص أنه إذا كانت f دالة كثافة فإن $\int_I f(x)dx$ معرف مهما كان I محدودا أو غير محدود.

مثال -

في كل حالة من الحالتين التاليتين، هل الدالة f المعطاة هي دالة كثافة لمتغير عشوائي أم لا ؟

أ) $\begin{cases} f(x) = \frac{3}{x^2} & , x \in [1, +\infty[\\ f(x) = 0 & , x \in]-\infty , 1] \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = \frac{3}{x^4} & , x \in [1, +\infty[\\ f(x) = 0 & , x \in]-\infty , 1] \end{cases}$

الحل

أ) لنحسب $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$

لدينا $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_J f(x)dx$ حيث $I = [1, +\infty[$ و $J =]-\infty , 1]$.

- التكامل $\int_I f(x)dx$ يمثل النهاية للدالة $t \mapsto \int_1^t f(x)dx$ عند $(+\infty)$

$$\int_1^t f(x)dx = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1$$

$$\lim_{t \to +\infty}\left(\int_1^t f(x)dx\right) = \lim_{t \to +\infty}\left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1$$

إذن $\int_I f(x)dx = 1 = \ell$

- التكامل $\int_J f(x)dx$ يمثل النهاية للدالة $t \mapsto \int_t^1 f(x)dx$ عند $(-\infty)$

لدينا $\int_t^1 f(x)dx = \int_t^1 0\,dx = 0$ إذن $\int_J f(x)dx = 0 = \ell'$

وبما أن $\ell' + \ell = 1$ فإن الدالة f هي دالة كثافة لمتغير عشوائي.

ب) الدالة f معرفة و مستمرة و موجبة على $\mathbb{R}$ لنحسب $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$

لدينا $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_J f(x)dx$ حيث $I = [1, +\infty[$ و $J =]-\infty , 1]$

- التكامل $\int_I f(x)dx$ يمثل النهاية للدالة $t \mapsto \int_1^t f(x)dx$ عند $(+\infty)$

لدينا $\int_1^t f(x)dx = \int_1^t \frac{3}{x^4}dx = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^t = \left[-\frac{1}{t^3} + 1\right]$

$$\lim_{t \to +\infty}\int_1^t f(x)dx = \lim_{t \to +\infty}\left(-\frac{1}{t^3} + 1\right) = 1 = \ell$$

- التكامل $\int_J f(x)dx$ يمثل النهاية للدالة $t \mapsto \int_t^1 f(x)dx$ عند $(-\infty)$

لدينا $\int_t^1 f(x)dx = \int_t^1 0\,dx = 0 = \ell'$

بما أن $\ell' + \ell = 1$ فإن الدالة f هي دالة كثافة لمتغير عشوائي.

3 . 2 قانون التوزيع المنتظم

تعريف ❶

X متغير عشوائي يأخذ أي قيمة من $[0,1]$.

- نقول عن المتغير العشوائي المستمر X أنه موزع بانتظام على المجال $[0,1]$ إذا كانت:

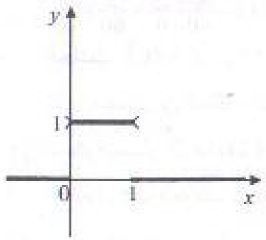
دالة كثافته f معرفة بـ $f(x) = 1$ لما $x \in]0,1[$

و $f(x) = 0$ لما x ينتمي إلى $\mathbb{R} -]0,1[$

ولدينا من أجل كل عددين حقيقيين a و b

بحيث $0 \le a < b \le 1$ ،

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1\,dx = b - a$$



نتيجة

- إذا أخذ X قيمة من مجال I جزئي من $[0,1]$ فإن احتماله يساوي طول المجال I.
- إذا كان I و J مجالان جزئيان من $[0,1]$ لهما نفس الطول فإن:
$P(X \in I) = P(X \in J)$

تعريف ❷ (تعميم):

نقول عن متغير عشوائي مستمر أنه منتظم على المجال $[\alpha , \beta]$ إذا كانت دالة كثافته f معرفة بـ $f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$ إذا كان $x \in]\alpha , \beta[$

و $f(x)=0$ إذا كان $x \in \mathbb{R} -]\alpha,\beta[$

و عليه إذا كان $[a,b]\subset[\alpha,\beta]$ فإن :

$$P(X\in[a,b]) = \frac{b-a}{\beta-\alpha} = \frac{\text{طول المجال } [a,b]}{\text{طول المجال } [\alpha,\beta]}$$

تمرين تدريبي

في موقف للحافلات تمر حافلة في كل نصف ساعة وهذا ابتداء من الساعة السادسة صباحا.

يلتحق مسافر بهذا الموقف ما بين السادسة والسابعة صباحا، لنفرض أن زمن وصوله إلى هذا الموقف هو متغير عشوائي موزع بانتظام على المجال $[0,60]$.

1- ما هو احتمال أن ينتظر هذا المسافر أقل من 5 دقائق ليركب في الحافلة الموالية؟

2- ما هو احتمال أن ينتظر هذا المسافر أكثر من 20 دقيقة ليركب في الحافلة الموالية؟

الحل :

ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه هو الوقت الذي مضى ما بين الساعة السادسة صباحا وزمن وصول المسافر (وحدة الزمن هي الدقيقة).

حسب الفرض X موزع بانتظام على المجال $[0,60]$

1) الانتظار يكون أصغر من 5 دقائق إذا التحق المسافر ما بين السادسة و 25 دقيقة والسادسة والنصف أو ما بين السادسة و 55 دقيقة والسابعة.

الحادث "المسافر يصل ما بين 6:25 و 6:30" هو الحادث $25\le X\le 30$ والذي احتماله هو

$$P(25\le X\le 30)=\frac{30-25}{60-0}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$$

الحادث $(55\le X\le 60)$ له نفس احتمال الحادث $(25\le X\le 30)$ ؛

إذن احتمال أن المسافر ينتظر أقل من خمسة دقائق هو $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

2) المسافر ينتظر 20 دقيقة أو أكثر إذا التحق بالموقف ما بين 6:00 و 6:10 أو ما بين 6:30 و 6:40

احتمال هذا الحادث يساوي $P(0<X<10)+P(30<X<40)=\frac{10}{60}\times 2=\frac{1}{3}$

3 . 3 القانون الأسي

تعريف

نقول عن متغير عشوائي مستمر أنه أسي وسيطه العدد الحقيقي $\lambda>0$ إذا كانت دالة كثافته f معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ لما $x\geq 0$ و $f(x)=0$ لما $x\leq 0$

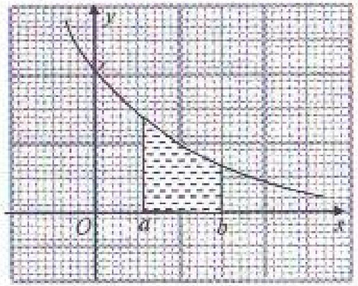
خواص

1) $P(x>a)=e^{-\lambda a}$

2) $f(x<a)=1-e^{-\lambda a}$

3) $P(a<x<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$

الإثبات



1) $\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$$=\left[\frac{-\lambda}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_a^t = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^t = -e^{-\lambda t}+e^{-\lambda a}$$

$$P(X>a)=\lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-\lambda t}+e^{-\lambda a}\right)=e^{-\lambda a}$$

2) $P(X<a)=\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$$=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a=-e^{-\lambda a}+1$$

3) $P(a\le X\le b)=P(X\le b)-P(X<a)$

$$=\int_0^b f(x)\,dx-\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^b\lambda e^{-\lambda x}\,dx-\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=\left[e^{-\lambda x}\right]_0^b-\left[e^{-\lambda x}\right]_0^a = -e^{-\lambda b}+e^{-\lambda a}$$

تمرين تدريبي

نفرض أن زمن مكالمة هاتفية مقاسة بالدقائق هو متغير عشوائي أسي وسيطه $\lambda=\frac{1}{20}$.

يصل شخص A إلى حجرة الهاتف وفي نفس اللحظة يمر قبله شخص اخر (دخل إلى الحجرة).

1) ما هو احتمال أن الشخص A ينتظر أكثر من 20 دقيقة ؟

2) ما هو احتمال أن الشخص A ينتظر ما بين 20 و 40 دقيقة ؟

الحل :

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل زمن المكالمة الهاتفية.

X هو متغير أسي وسيطه $\lambda=\frac{1}{20}$.

1) الحادث "الانتظار أكثر من 20 دقيقة" هو $(X>20)$ واحتماله هو :

$$P(X>20) = e^{-\frac{1}{20}\times 20}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

2) الحادث "الانتظار ما بين 20 و 40 دقيقة" هو $(20\le X\le 40)$ والذي احتماله هو :

$$P(20\le X\le 40)=e^{-\frac{20}{20}}-e^{-\frac{40}{20}}=e^{-1}-e^{-2}$$

4 . 3 مدة الحياة بدون شيخوخة (متغير عشوائي بدون ذاكرة)

خاصية المتغيرات العشوائية الأسية هي عدم وجود ذاكرة. مثلا المتغير العشوائي X الذي يعطي مدة حياة جهاز في وحدة زمنية مختارة.

الحادث "مدة الحياة لا تتجاوز y سنة" هو الحادث $(X\in[0,y])$ الذي نرمز له بـ $(X\le y)$ ، وحادثه العكسي هو الحادث "مدة الحياة على الأقل y" الذي نعبر عنه بـ $(X>y)$ الذي نرمز

له بـ ($X \in]y;+\infty[$) .

لنهتم بالحادث " مدة الحياة هي على الأقل $S+h$ سنة علما أن الجهاز قد عاش S سنة"

هذا الحادث هو الحادث $(X > S+h)$ علما أن $(X > S)$ الذي نرمز له بـ $P(X > S+h \,/\, X > S)$

الذي يحقق المساواة التالية :

$$P(X > S+h \,/\, X > S) = P(X > h) \quad .... \text{(I)}$$

هذه المساواة نترجمها بـ :

إذا علمنا أن الجهاز اشتغل S سنة فإن احتمال أنه يشتغل h سنة إضافية هو نفس احتمال أن يعيش h سنة ابتداء من بداية تشغيله.

- إثبات المساواة (I) :

$$P(X > S+h \,/\, X > S) = \frac{P((X > S+h) \cap (X > S))}{P(X > S)}$$

لكن $(X > S+h)$ هو الحادث $(X \in]S+h , +\infty[)$

و $(X > S)$ هو الحادث $(X \in]S,+\infty[)$

بما أن تقاطع المجالين $]S+h,+\infty[$ و $]S,+\infty[$ هو $]S+h,+\infty[$ فإن :

تقاطع الحادثين $(X > S+h)$ و $(X > S)$ هو الحادث $(X > S+h)$.

لكن $P(x > S) = e^{-\lambda S}$ و $P(x > S+h) = e^{-\lambda(S+h)}$

إذن $P(X > S+h \,/\, X > S) = \frac{P(X > S+h)}{P(X > S)} = \frac{e^{-\lambda(S+h)}}{e^{-\lambda S}} = e^{-\lambda h} = P(X > h)$

تعريف 1

نقول عن متغير عشوائي X أنه بدون ذاكرة إذا كان :

$P(X > S+h \,/\, X > S) = P(X > h)$ مهما يكن S و h

تعريف 2

نسمي نصف حياة، المدة x بحيث $P(X < x) = \frac{1}{2}$

ملاحظة

بما أن $P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$ فإنه من المساواة $1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}$ نجد $x = \frac{\ln 2}{\lambda}$

تمرين تدريبي

مدة الحياة (معبر عنها بالسنة) لبعض أنواع التلفاز هو متغير عشوائي X الذي يتبع قانون أسي وسيطه $\lambda = 0{,}01$.

1) احسب احتمال أن تلفازا من نفس النوع يحدث له عطب قبل 5 سنوات.
2) احسب احتمال أن تلفازا من نفس النوع لا يحدث له عطب قبل سنة.
3) احسب احتمال أن تلفازا من نفس النوع يبقى يشتغل حتى 6 سنوات ، علما أنه اشتغل 5 سنوات. ماذا تلاحظ ؟

✓ **الحل :**

1) نبحث عن احتمال أن مدة حياة تلفاز تكون أصغر من 5 سنوات :
$P(X < 5) = 1 - e^{-\lambda \times 5} = 1 - e^{-0{,}05} =$

2) نبحث عن احتمال أن مدة حياة تلفاز تكون أكبر من سنة :
$P(X > 1) = e^{-0{,}01} =$

3) احتمال أن تلفاز يبقى يشتغل حتى 6 سنوات ، علما أنه اشتغل 5 سنوات هو :
$P(X \geq 6 \,/\, X \geq 5)$

$P(X \geq 6 \,/\, X \geq 5) = P(X \geq 1) = e^{-0{,}01} =$

نلاحظ أن هذه النتيجة هي نفس نتيجة السؤال 2) وهذا ما يثبت خاصية عدم الذاكرة عند القوانين الأسية.

4. التلاؤم مع قانون احتمال متقطع متساوي

الهدف من هذه الدراسة هو المقارنة بين النتائج الملاحظة انطلاقا من التجارب مع القيم النظرية المعطاة في قانون الاحتمال.

مثال.

لاعب يريد التحقق إن كان حجر النرد الذي يلعب به متزن أو غير متزن.

نعلم أن قانون احتمال في حالة حجر نرد متزن هو قانون توزيع منتظم حيث :

$P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$.

يقوم هذا اللاعب برمي حجر النرد 100 مرة ويدون في كل مرة النتيجة المحصل عليها (الرقم المحصل عليه) والجدول التالي يبين ذلك :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	16	19	20	16	14	15
f_i	0,16	0,19	0,20	0,16	0,14	0,15

لمعرفة إن كان توزيع التواترات المتحصل عليها هو قريب من قانون التوزيع المنتظم نحسب الكمية d^2 التي تمثل مجموع مربعات الفروق بين كل تواتر متحصل عليه والاحتمال النظري المنتظر.

$$d^2 = \left(0{,}16 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}19 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}16 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}14 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(0{,}15 - \frac{1}{6}\right)^2$$

$d^2 \approx 0{,}002732$ لحد الآن لا يمكننا القول أن هذه الكمية كبيرة أم صغيرة.

قيم d^2 متأثرة بمقاس العينة أي تتغير من سلسلة رميات إلى أخرى. لذلك ندرس تذبذب العينات وهذا بإنشاء سلاسل ذات 100 رقم مأخوذة عشوائيا من $\{1,2,...,6\}$.

النتائج المتحصل عليها للعدد d^2 انطلاقا من 1000 محاكاة ملخصة في الجدول التالي:

MIN	D_1	Q_1	Me	Q_3	D_9	MAX
0,00372	0,00136	0,00254	0,00386	0,0065	0,00798	0,017

قيمة العشري التاسع (D_9) لهذه السلسلة هو 0,00798 هذا يعني أن 90% من قيم d^2 المحصل عليها خلال 1000 محاكاة تنتمي إلى المجال $[0 \text{ ، } 0{,}00798]$.

بما أن قيمة d^2 أصغر من D_9 نستطيع أن نقول أن هذا الحجر النردي متزن بعتبة مجازفة قدرها 10% . أي أننا نخطأ في 10% من الحالات.

فنقول عندئذ أنه لدينا عتبة الثقة 90% .

ملاحظة

لما يكون n كبيرا بالقدر الكافي فإن قيمة D_9 تصبح مستقرة ومستقلة عن السلاسل.

خاصية

لتكن تجربة مخارجها a_1 ، a_2 ، .... ، a_q .

تجريبيا إذا كررنا n مرة هذه التجربة ($n \geq 100$) نتحصل على تواترات f_1 ، .... ، f_q للمخارج a_1 ، a_2 ، .... ، a_q على الترتيب.

لمقارنة هذه المعطيات بالنسبة إلى قانون متساوي الاحتمال على المجموعة $\{a_1, ..., a_q\}$ نحسب العدد $d^2 = \sum_{i=1}^{i=q} \left(f_i - \frac{1}{q}\right)^2$

تعليق

انجاز عدد كبير من المحاكاة لهذه التجربة يولد لنا سلسلة إحصائية حول d^2 عشريها التاسع هو D_9 .

- إذا كان $d^2 \leq D_9$ نقول عندئذ أن المعطيات متلائمة مع نموذج التوزيع المنتظم المفترض بعتبة مجازفة قدرها 10% .
- إذا كان $d^2 \rangle D_9$ نقول ان المعطيات غير متلائمة مع النموذج المفترض بعتبة مجازفة 10% .

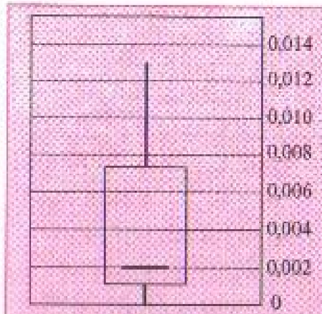
تمرين تدريبي

لمعرفة إن كانت قطعة نقدية مغشوشة أم لا، نرميها 100 مرة فنتحصل على 58 مرة الظهر (P) و42 مرة على الوجه (F).

بعتبة مجازفة 10% هل نستطيع أن نقول أن هذه القطعة مغشوشة ؟

لمعرفة ذلك نحاكي هذه التجربة 1000 مرة ونحسب في كل مرة d^2 .

المخطط بالعلبة المجاور موافق للسلسلة الاحصائية لقيم d^2 .



مخطط بالعلبة

الحل :

تواتر ظهور الظهر (P) هو $\frac{58}{100}$ أي 0,58

وتواتر ظهور الوجه (F) هو 0,42 .

وبما أن قانون التوزيع المنتظم على $\Omega = \{P , F\}$ هو $P(F) = P(p) = 0{,}5$ فإن قيمة d^2 الموافقة لهذه التجربة هي $d^2 = (0{,}58 - 0{,}5)^2 + (0{,}42 - 0{,}5)^2 = 0{,}0128$.

العشري التاسع (D_9) لهذه السلسلة هو 0,013 و بما أن $d^2 \leq D_9$ فإنه يمكننا أن نعتبر أن هذه القطعة متزنة بعتبة مجازفة 10% .

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 — تبسيط أعداد

1- بسط ما يلي :

أ) $\frac{18!}{16!}$ ، ب) $\frac{7!-6!}{4!}$ ، جـ) $\frac{6!}{3!\,3!}$ ، د) $\frac{1!}{4!}-\frac{30}{6!}$

هـ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ ، و) $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$ ، ن) $\frac{(2n+1)!}{(2n)!}$

2- باستعمال ترميز العاملي اعط كتابة أخرى للأعداد التالية :

$A=5\times6\times7\times8\times9\times10$ ، $B=\frac{9\times8\times7\times6\times5}{3\times2}$ ، $C=(n+2)(n+1)(n)(n-1)$

✓ الحل :

1) أ) $\frac{18!}{16!}=\frac{18\times17\times16!}{16!}=18\times17$

ب) $\frac{7!-6!}{4!}=\frac{7\times6!-6!}{4!}=\frac{6!(6)}{4!}=\frac{6\times5\times6\times4!}{4!}=180$

جـ) $\frac{6!}{3!\,3!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!\,3!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2}=20$

د) $\frac{1!}{4!}-\frac{30}{6!}=\frac{1}{4!}-\frac{30}{6\times5\times4!}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{4!}=0$

هـ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)(n)\left[(n-1)!\right]}{(n-1)!}=(n+1)n$

و) $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{(n-1)!}{n\times(n-1)!}-\frac{n!}{(n+1)\times n!}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

ن) $\frac{(2n+1)!}{(2n)!}=\frac{(2n+1)!\times(2n)!}{(2n)!}=2n+1$

2) $A=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4}=\frac{10!}{4!}$

$B=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}{(1\times2\times3)\times3\times2}=\frac{9!}{3!\,3!}$

$C=\frac{(n+2)!}{(n-2)!}$

تطبيق 2 — القوائم و الترتيبات

نريد وضع ثلاثة كراريس a,b,c في ثلاث محفظات T_1 ، T_2 ، T_3.

1- كم طريقة يمكننا بها وضع هذه الكراريس إذا علمت أن كل كراس يوضع في محفظة ؟

2- كم طريقة نستطيع بها وضع هذه الكراريس مع العلم أن كل محفظة يمكن أن نضع فيها العدد الذي نريده ؟

✓ الحل :

1) بما أن كل محفظة نضع فيها كراس واحد فإن المحفظة الأولى لها 3 امكانيات، ومن أجل كل امكانية لمحفظة T_1 توجد امكانيتين للمحفظة T_2 أي لدينا (3×2) امكانية لـ T_1 و T_2 معا ومن أجل كل امكانية لـ T_1 و T_2 لدينا امكانية واحدة لـ T_3

إذن لدينا $(3\times2)\times1$ امكانية لـ T_1 ، T_2 و T_3 .

إذن عدد الطرق الممكنة لوضع هذه الكراريس في المحفظات T_1 ، T_2 و T_3 هو $6=3\times2\times1=3!$

2) بما أن كل محفظة يمكن أن يوضع فيها على الأكثر 3 كراريس فإن المحفظة T_1 لها 3 امكانيات، و T_2 لها 3 امكانيات، و T_3 لها 3 امكانيات

وبالتالي عدد الطرق التي يمكن أن توضع بها هذه الكراريس في المحفظات هي $27=3^3=3\times3\times3$.

تطبيق 3 — القوائم و الترتيبات

في قاعة الانتظار في إحدى الإدارات بها 4 كراسي.

1- ما هو عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها 4 أشخاص على هذه الكراسي ؟

2- إذا كان في هذه القاعة 10 أشخاص وأردنا أن نفوض شخص ونائبه للتكلم مع المدير، فكم طريقة يمكننا بها أن نختار هذين الممثلين ؟

✓ الحل :

1) الشخص الأول له أربع امكانيات، ومن أجل كل امكانية للشخص الأول توجد 3 امكانيات للشخص الثاني، إذن توجد (4×3) امكانية للشخصين (1) و(2) .

ومن أجل كل امكانية للشخصين (1) و(2) توجد امكانيتين للشخص الثالث.

إذن توجد $(4\times3)\times2$ امكانية للأشخاص (1) و(2) و (3) .

ومن أجل كل امكانية للأشخاص (1) و(2) و (3) توجد امكانية واحدة للشخص الرابع.

إذن توجد $(4\times3\times2)\times1$ امكانية للأشخاص الأربعة.

وبالتالي توجد 24 طريقة يجلس بها هؤلاء الأشخاص على هذه الكراسي.

2) عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ممثل ونائبه هي عدد ترتيبات عنصرين من مجموعة ذات 10 عناصر ويساوي $90=9\times10$.

تطبيق 4 حساب مجموع الأعداد من الشكل PC_n^p

1- بين انه من اجل $n>2$ و من اجل كل p لدينا $nC_{n-1}^{p-1}=pC_n^p$ حيث $1\leq p\leq n$

2- احسب المجموع $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n$ بدلالة n.

✓ الحل :

1) $n\times C_{n-1}^{p-1} = n\times\frac{(n-1)!}{(n-p)!\,(p-1)!}=\frac{n!\times p}{(n-p)!\,(p-1)!\times p}$

$=p\times\frac{n!}{(n-p)!\,p!}=p\times C_n^p$

2) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=\sum_{p=1}^{p=n}pC_n^p=\sum_{p=1}^{n}nC_{n-1}^{p-1}$

$=n\sum_{p=1}^{n}C_{n-1}^{p-1}=n\times 2^{n-1}$

تطبيق 5 حل معادلات و جمل معادلات

1- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى.

ا) $4C_n^4-5C_n^{n-3}=0$ ، ب) $C_n^4-C_n^3=n^3-3n^2+2n$

2- عين الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث:

$C_{x+1}^y=C_x^{y-1}$ و $C_{x+y}^2=10$

✓ الحل :

1) ا) $C_n^4=n\times\frac{n!}{(n-4)!\,4!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}$

$C_n^{n-3}=\frac{n!}{[n-(n-4)]!\,(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$

الأعداد n إن وجدت تحقق $n\geq 4$

المساواة ا) تكتب على الشكل $\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}-5\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=0$

بالتبسيط نجد $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}(n-8)=0$ اي $(n=0)$ او $(n-2)$ أو $(n=8)$

وبما أن $n\geq4$ فإن قيمة n المطلوبة هي 8 .

ب) المساواة (ب) تكتب على الشكل :

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=n^3-3n^2+2n$

بالتبسيط نجد $n(n-1)(n-2)(n-31)=0$

ومنه ينتج $(n=0)$ أو $(n=1)$ او $(n=2)$ او $(n=31)$

وبما أن $n\geq4$ فإن قيمة n المطلوبة هي 31 .

2) الحلول إن وجدت تحقق $x+1\geq y$ و $x+y\geq2$

- المساواة $C_{x+1}^y=C_x^{y-1}$ تكافئ $x+1=y$ ... (1)

- المساواة $C_{x+y}^2=10$ تكافئ $(x+y)(x+y-1)=20$ ... (2)

نعوض y في (2) نجد $2x^2+x-10=0$ وبعد حل هذه المعادلة نجد $x=2$

وبالتالي $y=2+1=3$

لذن توجد ثنائية وحيدة هي $(2,3)$ تحقق الشرطين .

تطبيق 6 التوفيقات (تعيين عدد اللجان)

نريد تكوين لجنة مكونة من اربعة أشخاص من بين مجموعة مكونة من 14 رجل و 13 امراة.

1- ما هو عدد الطرق اللتي يمكن أن نختار بها هذه اللجنة ؟

2- نريد أن تكون هذه اللجنة مكونة من رجلين وامراتين، ما هو عدد الطرق التي يمكن بها أن نختار هذه اللجنة ؟

3- ما هو عدد الطرق التي يمكن بها أن نختار اللجنة إذا علمت ان اللجنة تشمل على الأكثر امراتين ؟

✓ الحل :

1) عدد الطرق التي يمكن ان نختار بها هذه اللجنة هو عدد توفيقات 4 عناصر من مجموعة ذات 27 عنصر و هو C_{27}^4 (عدد المجموعات الجزئية التي تشمل 4 عناصر).

$C_{27}^4=\frac{27!}{23!\,4!}=\frac{27\times26\times25\times24}{4\times3\times2}=17550$

2) من اجل كل رجلين مختارين من الرجال يوجد C_{13}^2 لاختيار امراتين من بين 13 امراة. وبما أن عدد المجموعات المختارة التي تشمل رجلين من بين 14 رجل هي C_{14}^2 فإن عدد المجموعات التي تشمل رجلين وامراتين هو $C_{13}^2\times C_{14}^2$ اي $13\times6\times7\times13$ ويساوي 7098

3) اللجنة تشمل امراتين على الأكثر ، هذا يعني إما امراتين ورجلين أو امراة وثلاثة رجال او 4 رجال. وبالتالي يكون عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو :

$C_{13}^2\,C_{14}^2+C_{13}^1\,C_{14}^3+C_{14}^4=7098+364+1001=8463$

تطبيق 7 توظيف دستور ثنائي الحد

n عدد طبيعي، ليكن العدد A_n حيث $A_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$

1- تحقق أن A_3 و A_4 عددين طبيعيين.

2- برهن من أجل كل عدد طبيعي n أن A_n عدد طبيعي.

✓ الحل :

(1
$$A_3=\left(2+\sqrt{3}\right)^3+\left(2-\sqrt{3}\right)^3=\sum_{p=1}^{3} C_3^p\, 2^p\left(\sqrt{3}\right)^{3-p}+\sum_{p=1}^{p=3} C_3^p\, 2^p\left(-\sqrt{3}\right)^{3-p}$$
$$=\sum_{p=1}^{3}\left[C_3^p\, 2^p\left(\left(\sqrt{3}\right)^{3-p}+\left(-\sqrt{3}\right)^{3-p}\right)\right]$$
$$=C_3^0\, 2^0\left((\sqrt{3})^3+(-\sqrt{3})^3\right)+C_3^1\, 2^1\left((\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2\right)$$
$$+C_3^2\, 2^2\left((\sqrt{3})^1+(-\sqrt{3})^1\right)+C_3^3\, 2^3\left((\sqrt{3})^0+(-\sqrt{3})^0\right)$$
$$=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6(3+3)+12\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)+8(1+1)$$
$$=36+16=52$$
$$A_4=\sum_{p=1}^{4} C_4^p\, 2^p\left(\sqrt{3}\right)^{4-p}+\sum_{p=1}^{4} C_4^p\, 2^p\left(-\sqrt{3}\right)^{4-p}$$
$$=C_4^0\, 2^0\left((\sqrt{3})^4+(-\sqrt{3})^4\right)+C_4^2\, 2^2(3+3)+C_4^4\, 2^4\,(1+1)$$
$$=18+24\times 6+16\times 2=194$$

(2
$$A_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, 2^{n-p}\left(\sqrt{3}\right)^p+\sum_{p=1}^{n} C_n^p\, 2^{n-p}\left(-\sqrt{3}\right)^p$$
$$=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, 2^{n-p}\left((\sqrt{3})^p+(-\sqrt{3})^p\right)$$

إذن $A_n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, 2^{n-p}(\sqrt{3})^p\left(1+(-1)^p\right)$

نضع $\alpha_p=C_n^p\, 2^{n-p}(\sqrt{3})^p\left(1+(-1)^p\right)$

إذن $A_n=\sum_{p=0}^{n}\alpha_p=\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_n=(\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+...+....)+(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+...)$

- إذا كان p زوجيا فإن $\left(\sqrt{3}\right)^p$ عدد طبيعي و بالتالي α_p عدد طبيعي
وعليه المجموع $\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+...$ عددا طبيعيا.
- إذا كان p فرديا فإن α_p يكون معدوما وعليه المجموع $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+...$ يكون معدوما.

إذن A_n هو عدد طبيعي.

تطبيق 8 التوفيقات (تعيين عدد الاختيارات)

في أحد الامتحانات على الطالب أن يجيب على 8 أسئلة من بين 10 أسئلة مقترحة.

1- ما هو عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة ؟

2- ما هو عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟

3- ما هو عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة إذا كان من الضروري أن يجيب على أربع أسئلة من بين الخمسة الأولى ؟

✓ الحل :

1) عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة هو $C_{10}^8=45$

2) عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية هو $C_7^5=21$

3) عدد الطرق التي يمكن للطالب أن يختار بها الأسئلة إذا كان من الضروري أن يجيب على أربع أسئلة من بين الخمسة الأولى هو $C_5^4\times C_5^4=25$

تطبيق 9 التوفيقات (تعيين عدد اللجان)

مجموعة مكونة من n شخص من بينهم الشخصين A و B . نريد تشكيل لجنة من p شخص من بين n شخص.

1- ما هو عدد اللجان المشكلة ؟

2- ما هو عدد اللجان في كل حالة من الحالات التالية:

أ) اللجان تشمل الشخصين A و B .

ب) اللجان لا تشمل الشخصين A و B .

جـ) اللجان تشمل الشخص A ولا تشمل B .

د) اللجان تشمل B ولا تشمل A .

3- استنتج علاقة بين C_{n-2}^{p-2} ، C_{n-2}^{p} ، C_{n-2}^{p-1}

✓ الحل :

1) عدد اللجان المشكلة هو C_n^p

2) أ) إذا اختير A و B فإنه يبقى لنا اختيار $p-2$ شخص من بين $n-2$ وعدد اللجان المشكلة في هذه الحالة هو C_{n-2}^{p-2} .

ب) إذا كانت اللجان لا تشمل A و لا B فإننا نختار p شخص من بين $n-2$ شخص

وعدد هذه اللجان هو C_{n-2}^{p} .

جـ) إذا شملت A ولا تشمل B هذا يعني اننا نختار $p-1$ شخص من $n-2$ شخص وعدد هذه اللجان هو C_{n-2}^{p-1}

د) بنفس كيفية السؤال (جـ) نجد عدد اللجان التي تشمل الشخص B ولا تشمل الشخص A والذي يساوي C_{n-2}^{p-1}

3) اللجان التي تشمل p شخص من بين n شخص ؛ إما تشمل الشخصين A و B وإما تشمل A ولا تشمل B ، أو تشمل B ولا تشمل A ، أو لا تشمل A ولا تشمل B

وبالتالي مجموع هذه اللجان يساوي C_n^p

أي $C_{n-2}^{p-2} + C_{n-2}^{p} + 2\,C_{n-2}^{p-1} = C_n^p$

تطبيق 10 حساب احتمال حوادث باستعمال التوفيقات

نختار عشوائيا 6 ارقام من بين الأعداد 1 ، 2 ، ..... ، 49 (ترتيب الأعداد المختارة غير مهم).
نتيجة السحب مشكلة من 6 ارقام بالإضافة إلى رقم إضافي.

1- ما هو احتمال التحصل على 6 ارقام صحيحة ؟
2- ما هو احتمال التحصل على 5 ارقام صحيحة (من بين الستة) وكذا الرقم الإضافي ؟
3- ما هو احتمال التحصل على 5 ارقام صحيحة (بدون الرقم الإضافي) ؟
4- ما هو احتمال التحصل على 4 ارقام صحيحة بالضبط وكذا الرقم الإضافي ؟

الحل :

1) A الحادث الحصول على 6 ارقام صحيحة ؛

$$P(A)=\frac{C_6^6}{C_{49}^6}=\frac{1}{1398386}=7{,}15\times10^{-8}$$

2) B الحادث الحصول على 5 أرقام صحيحة من بين 6 ارقام و كذا الرقم الإضافي ؛

$$P(B)=\frac{1}{49}\times\frac{C_6^5}{C_{49}^6}=\frac{1}{49}\times\frac{6}{1398386}=8{,}96\times10^{-8}$$

3) C هو الحادث الحصول على 5 أرقام صحيحة من بين 6 أرقام ؛

$$P(C)=\frac{C_6^5}{C_{49}^6}=\frac{6}{1398386}=4{,}30\times10^{-6}$$

4) D هو الحادث المطلوب حساب احتماله

$$P(D)=\frac{1}{49}\times\frac{C_6^4}{C_{49}^6}=\frac{1}{49}\times\frac{15}{1398386}=2{,}19\times10^{-7}$$

تطبيق 11 تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

كيس يحتوي على أربع كرات حمراء وثلاث خضراء وواحدة بيضاء. نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الكيس.
نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الألوان المتحصل عليها.

1- ما هي قيم X ؟
2- احسب الاحتمالات التالية $P(X=1)$ ، $P(X=3)$
3- استنتج قيمة $P(X=2)$
4- احسب الأمل الرياضي والانحراف المعيارة لـ X .

الحل :

1) قيم X هي 1 ، 2 ، 3

2) الحادث $(X=1)$ هو التحصل على لون واحد.
عدد الحالات الممكنة هو $C_8^3=56$
عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث $(X=1)$ هو $C_3^3+C_4^3=5$
إذن $P(X=1)=\frac{5}{56}=0{,}09$

$(X=3)$ هو الحادث ظهور ثلاثة الوان. وعدد الحالات الملائمة لتحقيقه هو $C_1^1\times C_3^1\times C_4^1$ ويساوي 12 . إذن $P(X=3)=\frac{12}{56}=0{,}21$

3) بما ان $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$
فإن $P(X=2)=1-P((X=1)+P(X=3))=1-0{,}30=0{,}7$

4) $E(X)=\frac{5}{56}+\frac{24}{56}+\frac{117}{56}=2{,}61$

X	1	2	3
P_i	$\frac{5}{56}$	$\frac{12}{56}$	$\frac{39}{56}$

$$V(X)=\frac{5}{56}+4\times\frac{12}{56}+9\times\frac{39}{56}-(2{,}61)^2=0{,}40$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{0{,}40}=0{,}63$$

تطبيق 12 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

كيس يحتوي على كرات بيضاء و كرات سوداء بحيث عدد الكرات السوداء يساوي 4 مرات عدد الكرات البيضاء.

1- نسحب عشوائيا كرة، ما هو احتمال أن تكون سوداء ؟
2- نسحب الآن ثلاث كرات متتالية بالإرجاع.
X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الكرات السوداء المسحوبة خلال الثلاث سحابات. اعط قانون احتمال X .

✓ **الحل :**

1) p احتمال الحادث S "سحب كرة سوداء"

q احتمال الحادث $\overline{S}$ "سحب كرة بيضاء"

إذن $\Omega \in \{S, \overline{S}\}$

بما أن S و $\overline{S}$ غير متلائمين فإن $P(S)+P(\overline{S})=1$

وبما أن عدد الكرات السوداء يساوي 4 مرات عدد الكرات البيضاء فإن $P(S)=4P(\overline{S})$

بالتعويض في المساواة $P(S)+P(\overline{S})=1$ نجد $5P(\overline{S})=1$ ومنه $P(\overline{S})=\frac{1}{5}$

وعليه $P(S)=\frac{4}{5}$

2) يمكن اعتبار سحب ثلاث كرات متتالية بالإرجاع كتجربة سحب كرة مكررة ثلاث مرات.
لاحظ أن مخارج كل تجربة مستقلة عن الأخرى وأن احتمال كل مخرج هو دائما ثابت في التجارب الثلاث.

إذن نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين $n=3$ و $p=\frac{4}{5}$

قيم X هي 0، 1، 2، 3

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

$$P(X=0)=C_3^0\,p^0q^3=q^3=\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$P(X=1)=C_3^1\,p^1q^2=3\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{(5)^3}$$

$$P(X=2)=C_3^2\,p^2q=3\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{48}{(5)^3}$$

$$P(X=3)=C_3^3\,p^3q^0=p^3=\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{5^3}$$

تطبيق 13 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

احتمال أن آلة تتعطل يوما ما باستقلالية عن هذا اليوم هو 0,06 .
1- احسب احتمال أن الآلة لا تتعطل في خمسة أيام.
2- احسب احتمال أن الآلة لا تتعطل أكثر من يوم في هذه الأيام الخمسة.

✓ **الحل :**

التجربة تتمثل في تعطل الآلة أم لا في يوم ما ولها مخرجين S و $\overline{S}$.
S الحادث "الآلة لا تتعطل في يوم ما"
النجاح S دائما له نفس الاحتمال 0,94
من النص نستخلص استقلالية هذه التجارب وبذلك يمكننا تطبيق قانون ثنائي الحد.

1) A هو الحادث "الآلة لا تتعطل في خمسة أيام"
للحصول على الحادث A نكرر التجربة 5 مرات متتالية
وسيطا قانون ثنائي الحد هما $p=0{,}94$ و $n=5$
إذن $P(A)=C_5^5\,p^5q^0=p^5=(0{,}94)^5=0{,}739$

2) نسمي B الحادث "الآلة لا تتعطل أكثر من يوم"
الحادث B هو الحادث العكسي للحادث A وبالتالي $P(B)=1-P(A)=0{,}266$.

تطبيق 14 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

نرمي حجر نرد متزن 4 مرات متتالية، وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات ظهور الوجه المرقم بـ 2 .
1- بين أن قانون X هو قانون ثنائي الحد يطلب تعيين وسيطيه n و p .
2- احسب $P(X=3)$ ، ثم $P(X<3)$
3- احسب $E(X)$ ، ثم $\sigma(X)$.

✓ **الحل :**

1) لدينا مخرجين هما التحصل على الرقم 2 (نجاح) وعدم التحصل على 2 (رسوب).
الرميات متماثلة ومستقلة عن بعضها البعض.
إذن قانون X هو قانون ثنائي الحد و سيطيه $n=4$ و $p=\frac{1}{6}$

2) $P(X=3)=C_4^3\,p^1q^0=4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{5}{6}=20\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$

الحادث " $X<3$ " يعني أن X يأخذ القيم 0 أو 1 أو 2
إذن $(X<3)=(X=0)\cap(X=1)\cap(X=2)$
وبما أن الحوادث $(X=0)$ و $(X=1)$ و $(X=2)$ غير متلائمة مثنى مثنى فإن،

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=C_4^0\,p^0q^4+C_4^1\,p^1q^3+C_4^2\,p^2q^2$$
$$=q^4+4pq^3+6p^2q^2=0{,}979$$

3) $E(X)=np=4\times\frac{1}{6}=0{,}66$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{4\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=0{,}75$

تطبيق 15 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

لدينا عينة من الأجهزة ربعها معطل. نسحب واحدا منها عشوائيا، ثم آخرا بعد الارجاع . ما هو احتمال كل حادث من الحوادث التالية :

A " و لا جهاز معطل"

B " كلا الجهازين معطل"

C " جهاز واحد معطل"

D " على الأقل جهاز معطل"

✓ الحل :

نعتبر التجربة سحب جهاز من عينة. تكرار هذه التجربة مرتين يحقق التجربة المفروضة في النص.

التجربة سحب جهازا من عينة تفرز لنا مخرجين S و $\overline{S}$ حيث :

S الحادث " سحب جهاز غير معطل"

$\overline{S}$ الحادث " سحب جهاز معطل"

احتمال S هو $\frac{3}{4}=0{,}75$.

من المعطيات نستنتج أن التجربتين مستقلتين ومتماثلتين.

إذن نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $p=0{,}75$ و $n=2$.

X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات ظهور جهاز سليم

وبالتالي قيمه هي 0 ، 1 ، 2

$$P(A) = P(X=2) = C_2^2\, p^2 q^0 = p^2 = (0{,}75)^2 = 0{,}5625$$

$$P(B) = P(X=0) = C_2^0\, p^0 q^2 = p^2 = (0{,}25)^2 = 0{,}0625$$

$$P(C) = P(X=1) = C_2^1\, p^1 q^1 = 2\,p\,p = 0{,}375$$

D هو الحادث العكسي للحادث A

ومنه $P(D)=P(\overline{A}) = 1-P(A) = 1-0{,}5625 = 0{,}4375$

تطبيق 16 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

قطعة نقدية مغشوشة حيث أن احتمال الحصول على الظهر يساوي $\frac{1}{3}$.

1- نرمي هذه القطعة 4 مرات متتالية. احسب احتمال الحصول على الظهر على الأقل مرتين.

2- كم مرة يجب رمي القطعة حتى يكون احتمال التحصل على الظهر ثلاث مرات أكبر من 0,09 .

✓ الحل :

1) التجربة (رمي قطعة نقدية) تفرز مخرجين هما التحصل على الظهر (S) والوجه $(\overline{S})$ ، الرميات الأربع متماثلة ومستقلة عن بعضها البعض.

X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات ظهور الظهر.

وبالتالي فإن قيمه هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

قانون X هو قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=4$ و $p=\frac{1}{3}$

نسمي A الحادث " ظهور الظهر على الأقل مرتين " ونرمز له بـ $(X \geq 2)$.

$\overline{A}$ هو الحادث $(X < 2)$ الذي يساوي $(X=0)\cup(X=1)$

وبما أن $(X=0)$ و $(X=1)$ غير متلائمين فإن :

$$P(\overline{A}) = P(X=0) + P(X=1) = C_4^0\, p^0 q^4 + C_4^1\, p\, q^3$$

$$= (\tfrac{2}{3})^4 + \frac{4}{3} \times (\tfrac{2}{3})^3 = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{48}{81}$$

إذن $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{48}{81}=\frac{33}{81}=\frac{11}{27}$

2) نكرر التجربة " رمي القطعة النقدية " n مرة ، وليكن X المتغير العشوائي المعرف في السؤال (1)

قانون X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه n و $\frac{1}{3}$.

احتمال الحصول على الظهر ثلاث مرات في n مرة هو :

$$P(X=3) = C_n^3\, p^3 q^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times (\tfrac{1}{3})^2 \times (\tfrac{2}{3})^{n-3}$$

$$= (\tfrac{1}{3})^4 \times \frac{1}{2} \times n(n-1)(n-2) \times (\tfrac{2}{3})^{n-3}$$

عدد المرات المطلوبة هو 4

تطبيق 17 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

احتمال أن يبلغ رامي رمح هدفه هو 0,6 .

في منافسة هذا المتسابق يملك أربع رميات (4 أسهم) ، Y يمثل عدد الأسهم التي تبلغ الهدف خلال أربع محاولات.

1- بين أن قانون Y هو قانون ثنائي الحد يطلب تعيين وسيطيه.

2- احسب $E(Y)$ و $\sigma(Y)$.

3- الرامي يربح 10 نقاط إذا بلغت على الأقل ثلاثة من السهام الهدف ويخسر 5 نقاط في الحالات الأخرى.

Z هو المتغير العشوائي الذي يمثل الربح (أو الخسارة) الممكنة للرامي.

- اعط قانون Z ، ثم احسب $E(Z)$ و $\sigma(Z)$.

✓ الحل :

1) كل الرميات مستقلة ومتماثلة وكل رمية لها مخرجان S و $\overline{S}$ حيث :

S " السهم يبلغ الهدف ".

إذن Y هو متغير عشوائي قانونه ثنائي الحد الذي وسيطيه $p=0{,}6$ و $n=4$

2) قيم Y هي $0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4$

Y	0	1	2	3	4
p_i	q^4	$4\,p\,q^3$	$6\,p^2\,q^2$	$4\,p^3\,q$	p^4

$$P(Y=0)=C_4^0\,p^0\,q^4=q^4=0{,}0256$$
$$P(Y=1)=C_4^1\,p^1\,q^3=0{,}1536$$
$$P(Y=2)=C_4^2\,p^2\,q^2=0{,}3456$$
$$P(Y=3)=C_4^3\,p^3\,q=4\times(0{,}6)^3\times 0{,}4=0{,}3456$$
$$P(Y=4)=C_4^4\,p^4\,q^0=p^4=(0{,}6)^4=0{,}1296$$
$$E(Y)=n\,p=4\times 0{,}6=2{,}4$$
$$\sigma(Y)=\sqrt{n\,p\,q}=\sqrt{4\times 0{,}6\times 0{,}4}=0{,}979$$

3) قيم Z هي $10+$ ، -5.

Z	10	-5
p_i	0,4752	0,5248

$$P(Z=10)=P(Y=4)+P(Y=3)=0{,}4752$$
$$P(Z=-5)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)=0{,}5248$$
$$E(Z)=10\times 0{,}4752-5\times 0{,}5248=2{,}28$$
$$V(Z)=100\times 0{,}4752+25\times 0{,}5248-(2{,}28)^2=47{,}52+13{,}2-(2{,}28)^2=55{,}44$$
$$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{55{,}44}=7{,}44$$

تطبيق 18 تعيين قانون احتمال متغير عشوائي

حجر نرد له أربعة وجوه سوداء ووجهين بيضاوين، عندما نرمي هذا النرد فإن كل الوجوه لها نفس احتمال الظهور.

نرمي هذا الحجر 5 مرات متتالية.

1) ما هو احتمال أن الوجه الأبيض يظهر في الرمية الخامسة ؟

2) ما هو احتمال أن الوجه الأبيض يظهر على الأقل مرة ؟

3) X هو المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الوجوه السوداء المحصل عليها.

- ما هو قانون X ؟

✓ الحل :

1) تجربة رمي حجر النرد لها مخرجين S و $\overline{S}$ حيث :

S " ظهور الوجه الأبيض" واحتماله $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\overline{S}$ " ظهور الوجه الأسود " واحتماله $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

الحادث " الوجه الأبيض يظهر في الرمية الخامسة " يعني الحادث "$\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,S$"

واحتمال هذه القائمة هو :

$$P(\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,S)=(P(\overline{S}))^4\times P(S)=(1-P(S))^4\times P(S)=(\frac{2}{3})^4\times\frac{1}{3}=\frac{16}{243}=0{,}0660$$

2) نسمي A " الحادث الوجه الأبيض يظهر على الأقل مرة "

الحادث العكسي للحادث A هو " الوجه الأبيض لا يظهر و لا مرة ". أي $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$

إذن $P(\overline{A})=P(\overline{S})^5=(\frac{2}{3})^5=0{,}13$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0{,}87$$

3) قيم X هي $0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5$

بما أن الرميات الخمسة مستقلة ومتماثلة وكل منها لها مخرجين S و $\overline{S}$

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	q^5	$5\,p\,q^4$	$10\,p^2\,q^3$	$10\,p^3\,q^2$	$5\,p^4\,q$	p^5

فإن : قانون احتمال X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ و $n=5$

$$P(X=0)=C_5^0\,p^0\,q^5=q^5=(\frac{1}{3})^5=0{,}004$$
$$P(X=1)=C_5^1\,p^1\,q^4=5\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^4=0{,}041$$
$$P(X=2)=C_5^2\,p^2\,q^3=10\,p^2\,q^3=10(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^3=0{,}165$$
$$P(X=3)=C_5^3\,p^3\,q^2=10\,p^3\,q^2=10(\frac{2}{3})^3\times(\frac{1}{3})^2=0{,}329$$
$$P(X=4)=C_5^4\,p^4\,q^1=5\,p^4\,q=5\times(\frac{2}{3})^4\times\frac{1}{3}=0{,}329$$
$$P(X=5)=C_5^5\,p^5=(\frac{2}{3})^5=0{,}132$$

تطبيق 19 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

فريق كرة السلة لثانوية ما يشارك في دورة أخوية، 8 تلاميذ اختيرو لهذه المناسبة من بينهم يونس.

I- لمقابلة ما اختار المدرب عشوائيا مجموعة من خمسة لاعبين من بين الثمانية المختارين.

نسمي هذه المجموعة " خماسي ".

أ) كم من مجموعة ذات خمسة لاعبين يمكن للمدرب تشكيلها ؟

ب) بين أن احتمال أن يكون يونس من بين الخمسة المختارين هو $\frac{5}{8}$.

2- في هذه الدورة الرياضية، يلعب الفريق ثلاث مقابلات، في كل مباراة يقوم المدرب بتشكيل فريق خماسي بصفة عشوائية.
- احسب احتمال أن يونس يشارك :
أ) في ولا لقاء.
ب) في لقاء واحد فقط.
جـ) لقائين فقط.
د) ثلاثة لقاءات فقط.

✓ الحل :

1) أ) عدد المجموعات التي تشمل خمسة لاعبين من بين ثمانية لاعبين هو : $C_8^5 = \frac{8\times7\times6}{6} = 56$

ب) A هو الحادث " يونس من بين الخمسة لاعبين المختارين "
عدد الحالات الملائمة لتحقيق A هو C_7^4 أي : $C_7^4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\times6\times5}{6} = 7\times5 = 35$

إذن $P(A) = \frac{7\times5}{8\times7} = \frac{5}{8}$

2) المباريات مستقلة ومتماثلة وكل منها لها مخرجان هما " يونس يشارك في المباراة " الذي نرمز له بـ S و " يونس لا يشارك في المباراة " نرمز له بـ $\overline{S}$. واحتمال S هو $\frac{5}{8}$.

X هو المتغير العشوائي الذي قيمه تمثل عدد مشاركات يونس في المباريات الثلاث.

قانون X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه $n=3$ ، $p=\frac{5}{8}$.

أ) نرمز إلى الحادث المطلوب بـ A :

$$P(A) = P(X=0) = C_3^0\, p^0 q^3 = q^3 = (\frac{3}{8})^3 = 0{,}053$$

ب) نرمز إلى الحادث المطلوب بـ B :

$$P(B) = P(X=1) = C_3^1\, p^1 q^2 = 3\times\frac{5}{8}\times(\frac{3}{8})^2 = 0{,}263$$

جـ) $$P(X=2) = C_3^2\, p^2 q = 3p^2 q = 3\times(\frac{5}{8})^2\times\frac{3}{8} = 0{,}44$$

د) $$P(X=3) = C_3^3\, p^3 q^0 = p^3 = (\frac{5}{8})^3 = 0{,}244$$

تطبيق 20 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

في مسابقة قرآنية يعطى اسم سورة و 7 آيات من بينها ثلاث آيات فقط موجودة في هذه السورة. على المشارك اختيار ثلاث آيات مختلفة من بين السبعة، فوزه متعلق بإيجاده الثلاث آيات الموجودة في السورة.
1- مشارك لا يعرف السورة ويجيب عشوائيا :

أ) ما هو احتمال فوزه ؟
ب) ما هو احتمال أن يجد على الأقل آيتين من السورة ؟
2- المشارك يعرف آية من الثلاث آيات ويختار الأخرتين عشوائيا :
- ما هو احتمال أن يكون فائزا ؟
3- خمسة مشاركين يختارون عشوائيا وبصفة مستقلة عن بعضهم البعض ثلاث آيات من بين السبع آيات المقترحة :
أ) ما هو احتمال أن يكون واحدا فقط فائزا ؟
ب) ما هو احتمال أن يكون على الأقل واحدا منهم فائزا ؟

✓ الحل :

1) أ) عدد الحالات الممكنة لاختيار ثلاث آيات من بين 7 آيات هو $C_7^3 = 35$
A هو الحادث " المشارك يفوز بالمسابقة "
عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث A هو $C_3^3 = 1$

إذن $P(A) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$

ب) B هو الحادث " المشارك يجد على الأقل آيتين"
عدد الحالات الملائمة $C_3^2\, C_4^1 + C_3^3$ أي 13

ومنه $P(B) = \frac{13}{35}$

2) نسمي هذا الحادث بـ C وعدد الحالات الممكنة له هو C_6^2 (بقيت 6 آيات ليختار منها 2)
عدد الحالات الملائمة هو $C_2^2 = 1$

إذن $P(B) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$

3) E_1 تجربة معرفة كمايلي (المشارك يختار ثلاث آيات من بين 7)
نكرر هذه التجربة 5 مرات فنحصل على التجربة المعطاة في النص.
مخارج E_1 هي S و $\overline{S}$ حيث S هو الحادث " الآيات المختارة موجودة في السورة " واحتماله هو $p=\frac{1}{35}$
التجارب E_1 ، E_2 ، ... ، E_5 مستقلة ومتماثلة.
X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات الفوز وهي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 .
قانون هذا المتغير العشوائي هو قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=5$ ، $p=\frac{1}{35}$.

أ) احتمال أن يكون واحدا فقط فائز هو $P(X=1)$

$$P(X=1) = C_5^1\, p^1 q^4 = 5\,p\,q^4 = 5\times\frac{1}{35}\times(\frac{34}{35})^4 = 0{,}127$$

ب) D هو الحادث " على الأقل واحد منهم فائز "
$\overline{D}$ هو الحادث " ولا أحد فائز " واحتماله هو $P(\overline{D}) = P(X=0)$

إذن $P(D) = 1-P(\overline{D}) = 1-P(X=0) = 1-C_5^0\, p^0 q^5 = 1-q^5 = 1-(\frac{34}{35})^5 = 0{,}135$

تطبيق 24 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

A و B لاعبان يتقابلان في دورة لتنس الطاولة.
الاحصائيات حول المباريات السابقة اعطت احتمال ان اللاعب A يربح مقابلة هو 0,6 .
A و B يلعبان عددا فرديا من المباريات، الرابح هو الذي يفوز بأكبر عدد من المباريات.
ما هو احتمال الحادث " B يربح الدورة " في كل حالة من الحالتين التاليتين :
ا) الدورة تشمل على مقابلة واحدة.
ب) الدورة تشمل على ثلاث مقابلات.

✓ الحل :

ا) احتمال الحادث المفروض هو $1-0{,}6=0{,}4$
(الحادث المفروض هو الحادث العكسي للحادث " اللاعب A يربح مقابلة ").

ب) E_1 التجربة : " اللاعب يلعب مقابلة " هذه التجربة تفرز مخرجين هما S و $\overline{S}$ حيث :
S " اللاعب B يربح مقابلة " واحتماله هو 0,4 .
نكرر التجربة E_1 ثلاث مرات فنحصل على التجربة المفروضة في هذا السؤال.
التجارب E_1 ، E_2 ، E_3 مستقلة ومتماثلة.
X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات فوز اللاعب B وهي 0 ، 1 ، 2 ، 3 .
قانون X هو قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=3$ ، $p=0{,}4$.
L الحادث " اللاعب B يربح الدورة " وهو $(X=2)$ أو $(X=3)$
وهذين الحادثين غير متلائمين.

$$P(L)=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\,p^2\,q^1+C_3^3\,p^3\,q^0$$
$$=3\,p^2\,q+p^3=3\times(0{,}4)^2\times0{,}6+(0{,}4)^3=0{,}352$$

تطبيق 25 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

مكتب مجهز بـ 20 كمبيوتر، احتمال أن واحدا منهم يتعطل خلال السنة هو 0,3 ، لنفرض أن التعطلات التي تحدث للأجهزة مستقلة الواحدة عن الأخرى.
1- احسب احتمال أن 4 أجهزة كمبيوتر تتعطل خلال السنة.
2- احسب احتمال أن جهازين على الأكثر يتعطلان خلال السنة.

✓ الحل :

التجربة هي " تعطل كمبيوتر خلال السنة ". هذه التجربة تفرز مخرجين هما S و $\overline{S}$ حيث :
S " جهاز كمبيوتر يتعطل خلال السنة "

نكرر هذه التجربة 20 مرة لنحصل على التجربة المفروضة في النص.
لاحظ أن هذه التجارب مستقلة ومتماثلة فيما بينها.
X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الأجهزة المعطلة وهي 0 ، 1 ، ... ، 20 .
قانون X هو قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه $n=20$ ، $p=0{,}3$.

1) احتمال الحادث المطلوب هو $P(X=4)$

$$P(X=4)=C_{20}^4\,p^4\,q^{16}=15\times19\times17\times(0{,}3)^4\times(0{,}7)^{16}=0{,}13$$

2) الحادث " على الأكثر جهازين يتعطلان خلال السنة " هو $(X\le 2)$

$$P(X\le 2)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$$
$$=C_{20}^2\,p^2\,q^{18}+C_{20}^1\,p^1\,q^{19}+C_{20}^0\,p^0\,q^{20}$$
$$=10\times19\times18\,p^2\,q^{18}+20\,p\,q^{19}+q^{20}$$
$$=q^{18}\,(190\times18\,p^2+20\,p\,q+q^2)=0{,}51$$

تطبيق 26 حساب احتمال حوادث

1- من اجل قانون ثنائي الحد وسيطيه n و p بين أن :
$$P(X=k+1)=\frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{1-p}\times P(X=k)$$
2- من اجل قانون ثنائي الحد وسيطيه $n=4$ و $p=0{,}2$. احسب $P(X=0)$ ، ثم استنتج قيم $P(X=1)$ ، $P(X=2)$ و $P(X=3)$ ، $P(X=4)$
3- ما هي قيم X الأكثر احتمالا ؟

✓ الحل :

1) لدينا $P(X=k)=C_n^k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$
إذن $P(X=k+1)=C_n^{k+1}\,p^{k+1}\,(1-p)^{n-(k+1)}$

$$=\frac{n!}{[n-(k+1)]!\,(k+1)]!}\,p^k\times p\,(1-p)^{n-k}\,(1-p)^{-1}$$
$$=\frac{n!\times(n-k)}{(n-k)\,(n-k-1)!\,(k+1)\times k!}\,p^k\times p\,(1-p)^{n-k}\,(1-p)^{-1}$$
$$=\left[\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,p^k(1-p)^{n-k}\right]\frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{1-p}$$
$$=P(X=k)\times\frac{n-k}{k+1}\times\frac{p}{1-p}$$

2)
$$P(X=0)=C_4^0\,p^0\,(1-p)^4=(0{,}8)^4=0{,}41$$
$$P(X=1)=P(X=0)\times4\times\frac{0{,}2}{0{,}8}=0{,}41$$
$$P(X=2)=P(X=1)\times\frac{3}{2}\times\frac{0{,}2}{0{,}8}=0{,}15$$

$P(X=3) = P(X=2) \times \frac{2}{3} \times \frac{0,2}{0,8} = 0,02$

$P(X=4) = P(X=3) \times \frac{1}{4} \times \frac{0,2}{0,8} = 0,01$

3) قيم X الأكثر احتمالا هي 0 و 1 .

تطبيق 24 استعمال قانون ثنائي الحد في حساب الاحتمالات

1- كيس يحتوي على 36 كرة لا نفرق بينها عند اللمس، منها كرتان بيضاويتان واثنتان حمراوتان والأخرى خضراء. نفرض أن كل السحابات متساوية الاحتمال.

- نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس.

احسب احتمال كل من الحوادث التالية :

A " نتحصل على كرات مختلفة اللون"

B " لا نتحصل على اي كرة خضراء "

C " لا نتحصل إلا على كرة خضراء "

2- تركيبة الكيس لا تتغير، نسحب ثلاث مرات متتالية بالارجاع كرة من الكيس، وليكن X المتغير اللعشوائي الذي قيمه عدد الكرات الحمراء المتحصل عليها في الثلاث سحابات. اعط قانون X .

3- نفرض الآن ان الكيس يحتوي على 36 كرة بحيث توجد n كرة بيضاء و n كرة حمراء والأخرى خضراء. حيث $17 \geq n \geq 1$.

نسحب في آن واحد ثلاث كرات من الكيس.

نعتبر الحوادث A ، B ، C المذكورة اعلاه.

ا) احسب $P(A)$ بدلالة n ، ثم عين n بحيث $P(A)$ يكون أعظميا.

ب) احسب $P(B)$.

ابتداءا من اي قيمة لـ n يكون $P(B) \rangle 0,6$

جـ) احسب $P(C)$.

✓ الحل :

1) عدد الحالات الممكنة للسحب هو $C_{36}^3 = 7140$

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث A هو $C_2^1 C_2^1 C_{32}^1 = 128$

إذن $P(A) = \frac{C_2^1 C_2^1 C_{32}^1}{C_{36}^3} = \frac{128}{7140} = 0,018$

ـ عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث B هو $C_4^3 = 4$

ومنه $P(B) = \frac{C_4^3}{C_{36}^3} = \frac{4}{7140} = 0,00056$

عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث C هو $C_{32}^1 C_4^2 = 192$

ومنه $P(C) = \frac{192}{7140} = 0,027$

2) قيم X هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{39304}{46656}$	$\frac{6936}{46656}$	$\frac{408}{46656}$	$\frac{8}{46656}$

E_1 هي التجربة سحب كرة من الكيس وهذه التجربة لها مخرجان S و $\overline{S}$ حيث ؛

S " التحصل على كرة حمراء " واحتماله هو $p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

يتكرار التجربة E_1 ثلاث مرات نحصل على التجربة المعطاة في النص.

التجارب الثلاث مستقلة ومتماثلة واحتمال S هو نفسه في كل منها.

إذن قانون X هو قانون ثنائي الحد وسيطيه هما $n=3$ ، $p = \frac{1}{18}$.

$$P(X=0) = C_3^0\, p^0 q^3 = q^3 = \frac{39304}{46656}$$

$$P(X=1) = C_3^1\, p^1 q^2 = 3 \times \frac{2}{36} \times \frac{1156}{(36)^2} = \frac{6936}{46656}$$

$$P(X=2) = C_3^2\, p^2 q = 3 \times \frac{4}{(36)^2} \times \frac{34}{36} = \frac{408}{46656}$$

$$P(X=3) = C_3^3\, p^3 = \frac{8}{46656}$$

3-ا) $P(A) = \frac{C_n^1 \times C_n^1 \times C_{36-2n}^1}{C_{36}^3} = \frac{n \times n(36-2n)}{7140} = \frac{n^2(36-2n)}{7140}$

نضع $f(x) = \frac{x^2(36-2x)}{7140}$.

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = \frac{6}{7140}(-x^2+12)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		$\sqrt{12}$		$+\infty$
f'		-	0	+	0	-	
f		↘		↗		↘	

$P(A) = f(n)$

$P(A)$ يكون أعظميا إذا كان $f(n)$ أعظميا مع $17 \geq n \geq 1$

من الجدول نستنتج أن $f(n)$ أعظميا من اجل $n=3$ لأن $\sqrt{12} = 3,46$.

والقيمة الأعظمية لـ $P(A)$ هي $\frac{9 \times 30}{7140} = 0,037$

ب) $P(B) = \frac{C_{2n}^3}{C_{36}^3} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{42840} = \frac{2n(2n-1)(n-1)}{21420}$

$P(B) \rangle 0,6$ يعني $\frac{2n(2n-1)(n-1)}{21420} \rangle 0,6$

اي $2n(2n-1)(n-1) > 12852$

بالقسمة على 2 نجد $n(n-1)(2n-1) > 6426$ وهذه المتراجحة محققة ابتداء من $n=16$

جـ) $P(C) = \frac{C^1_{36-2n} \times C^2_{2n}}{7140} = \frac{2n(36-2n)}{7140}$

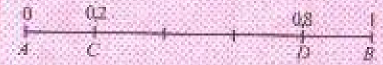
تطبيق 25 قانون التوزيع المنتظم

نختار نقطة M عشوائيا من القطعة $[AB]$ بحيث $AB=1$

ما هو احتمال :

1) النقطة M تنتمي إلى $[CD]$.

2) M تكون قريبة من C أكثر من D



الحل :

1) X المتغير العشوائي الذي قيمه فواصل النقط M من القطعة $[AB]$

إذن X هو متغير عشوائي مستمر.

بما أن X يمسح المجال $[0,1]$ فإن دالة الكثافة هي $f(x)=1$.

إذن قانونه هو منتظم. وعليه نجد $P(0{,}2 \le X \le 0{,}8) = \int_{0{,}2}^{0{,}8} 1\,dx = 0{,}6$

2) الحادث " النقطة M تكون قريبة من C أكثر من D " هو الحادث " $0 \le X \le 0{,}5$ "

واحتماله هو $P(0 \le X \le 0{,}5) = 0{,}5$

تطبيق 26 قانون التوزيع المنتظم

تصل هدى إلى موقف الحافلات على الساعة الثامنة.

إذا علمت أن الحافلة التي تصل في لحظة ما تتبع قانونا منتظما ما بين الثامنة والثامنة والنصف.

1- ما هو احتمال أن هدى تنتظر أكثر من 10 دقائق ؟

2- إذا جائت الثامنة و 15 دقيقة ولم تصل بعد الحافلة ما هو احتمال أن انتظار هدى يدوم على الأقل 10 دقائق إضافية.

الحل :

نسمي X المتغير العشوائي الذي قيمه الوقت الذي مضى ما بين 8 صباحا وزمن وصول الحافلة (وحدة الزمن هي الدقيقة).

حسب الفرض X موزع بانتظام على المجال $[0,30]$

1) الحادث العكسي للحادث المفروض هو " $0 < X \le 10$ " واحتماله هو

$$P(0 \le X \le 10) = \frac{10-0}{30-0} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

إذن احتمال الحادث المفروض هو $1-P(0 \le X \le 10) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2) الحادث " هدى تنتظر على الأقل 10 دقائق إضافية " هو $(30 \ge X \ge 25)$ واحتماله هو

$$P(25 \le X \le 30) = \frac{30-25}{30-0} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

تطبيق 27 القانون الأسي

مدة حياة مركب إلكتروني هو متغير عشوائي T (معبر عنه بالأيام) الذي يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 0{,}006$.

1- ما هو احتمال أن واحدا من هذه المركبات يكون له حياة أكبر من 400 يوم ؟

2- إذا علمت أنه عاش 400 يوما، ما هو احتمال أن يعيش 50 يوما إضافيا ؟

الحل :

1) $P(X \ge 400) = e^{-\lambda \times 400} = e^{-0{,}006 \times 400}$

$= e^{-2{,}4} = 0{,}09$

2) $P(T > 400+h / T > 400) = P(T > h)$

و h في هذه الحالة هو 50

إذن $P(T > 50+h / T > 400) = e^{-0{,}006 \times 50} = e^{-0{,}3} = 0{,}74$

تطبيق 28 مدة حياة عنصر كيميائي مشع

لتكن X مدة حياة عنصر كيميائي مشع بحيث X يتبع قانونا أسيا وسيطه λ

نعتبر أن نصف حياة C_6^{14} (كربون 14) هو $T=5568$ سنة.

أ) احسب $P(X < 200)$.

ب) احسب x علما أن $P(X < x) = 0{,}3$.

الحل :

1) $P(X < 200) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \times 200}$

لكن لدينا $T = \frac{Ln 2}{\lambda}$ ومنه $\lambda = T\,Ln 2 = 3859{,}44$

إذن $= P(X < 200) = 1 - e^{-3859,44\times 200}$

ب) $P(X < x) = 0,3$ يكافئ $1-e^{-\lambda x}=0,3$

يكافئ $x = \frac{-Ln\,0,7}{\lambda}$ يكافئ $x = 64057\times10^{-9}$

تطبيق 29 مدة حياة آلة خياطة

مدة حياة آلة خياطة تتبع قانون أسي وسيطه $\lambda = 0,02$.

1- ما هو احتمال عدم تعطل هذه الآلة خلال 1000 ساعة الأولى من استعمالها ؟

2- إذا علمت أن هذه الآلة لم يحصل لها أي عطب خلال 1000 ساعة الأولى.

ما هو احتمال أن لا يحدث لها عطب خلال 5000 ساعة الأولى من استعمالها ؟

الحل :

1) الحادث " عدم تعطل الآلة خلال 1000 ساعة الأولى من استعمالها " هو " $X > 1000$ "

$P(X>1000)=e^{-\lambda\times1000}=e^{-0,02\times1000}=2,06\times10^{-9}$

2) احتمال أن لا يحدث عطب للآلة خلال 5000 ساعة علما أنه لم يحدث لها عطب خلال 1000 ساعة هو $P(X>4000+1000 / X>1000)$

$P(X>4000+1000 / X>1000)=P(X>4000)=e^{-0,02\times4000}=1,8\times10^{-35}$

تطبيق 30 القانون الأسي ومدة حياة عنصر إلكتروني

مصنع ينتج ألعابا إلكترونية. نفرض أن T متغير عشوائي يمثل مدة حياة عنصر إلكتروني داخل في تركيب هذه الألعاب (بالأيام). يتبع قانونا أسيا وسيطه $\frac{1}{700}$.

1- عين الدالة F المعرفة من $[0,+\infty[$ في $\mathbb{R}$ بحيث $F(t)=P(T\le t)$.

2- أ) ما هو احتمال أن العنصر الإلكتروني لا يحدث له عطب في الأربع الأشهر الأولى ؟

ب) احسب احتمال أن العنصر الإلكتروني يبقى يشتغل لمدة عامين.

جـ) ما هو احتمال أن عنصر إلكتروني يبقى يشتغل حتى 5 سنوات، علما أنه اشتغل عامين ؟

د) خلال أي مدة زمنية يكون لدينا 10% من العناصر معطلة ؟

3- نقوم بإنتاج عنصرين إلكترونيين A و B لهذه اللعبة. وليكن T_A ، T_B متغيرين عشوائيين يمثلان مدتي حياة هذين العنصرين.

ولنفرض أن T_A و T_B مستقلين.

أ) احسب $P(T_A\ge300)$.

ب) ما هو احتمال أن اللعبة تشتغل بعد 300 يوم من إنتاجها، علما أن العنصرين A و B مركبان على التسلسل ؟

جـ) ما هو احتمال أن اللعبة تشتغل بعد 300 يوم من إنتاجها، علما أن العنصرين A و B مركبان على التفرع ؟ (اللعبة لا تشتغل إلا إذا كان كلا العنصرين معطلين).

الحل :

1) بما أن T يتبع قانونا أسيا فإن دالة كثافته f معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f(t)=\lambda e^{-\lambda x}$

$$F(t)=P(T\le t)=\int_0^t f(t)\,dt = 1-e^{-\lambda t}$$

2) أ) العنصر الإلكتروني لا يحدث له عطب في الأربع الأشهر الأولى، هذا معناه أن مدة حياته أكبر من 4 أشهر. واحتماله هو $P(T>120)$.

$P(T>120)=e^{-\frac{1}{700}\times120}=0,84$

ب) $P(T>730)=e^{-730\times\frac{1}{700}}=0,35$

جـ) $P(T>1825 / T>730)=P(T>1095)$

$=e^{-1095\times\frac{1}{700}}=0,21$

د) لتكن t المدة الزمنية التي تتعطل خلالها 10% من العناصر .

هذا يعني توجد 90% من العناصر مدة حياتها أكبر من t .

أي أنه إذا أخذنا أي عنصر من هذه العناصر فإن احتمال أن يبقى يشتغل بعد المدة t هو 0,9 . لكن $P(T>t)$ هو احتمال أن العنصر يبقى يشتغل بعد المدة t .

إذن $P(T>t)=0,9$

$P(T>t)=0,9$ تكافئ $e^{-\frac{1}{700}t}=0,9$ تكافئ $t=73,75$ يوم.

3) أ) $P(T_A\ge300)=e^{-\frac{1}{700}\times300}=0,65$

ب) بما أن العنصرين A و B مركبين على التسلسل فإن اللعبة تشتغل إذا اشتغل كل من A و B .

وبالتالي احتمال أن اللعبة تشتغل بعد 300 يوم هو $P((T_A\ge300)\cap(T_B\ge300))$

وبما أن المتغيرين T_A و T_B مستقلين فإن :

$P_1=P((T_A\ge300)\cap(T_B\ge300))=P(T_A\ge300)\times P(T_B\ge300)$

$=0,65\times0,65=0,42$

جـ) بما أن العنصرين A و B مركبين على التفرع فإن اللعبة تشتغل إذا اشتغل A أو B .

وبالتالي احتمال أن اللعبة تشتغل بعد 300 يوم هو $P((T_A\ge300)\cup(T_B\ge300))$

$P((T_A\ge300)\cup(T_B\ge300))=P(T_A\ge300)+P(T_B\ge300)-P_1$

$=0,65+0,65-0,42=0,87$

تطبيق 31 — القانون الأسي

مدة حياة عنصر إلكتروني تتبع قانونا أسيا وسيطه λ.
لضمان حياة أطول لآلة إلكترونية تعوض هذا العنصر بعنصرين متماثلين A و B مركبين على التفرع. في هذه الحالة لا تتعطل الآلة إلا إذا تعطل كلا العنصرين.
نقبل أن تعطل العنصر A مستقل عن العنصر B.
مدة حياة الآلة الإلكترونية هو T.
نسمي T_A و T_B مدتي حياة العنصرين A و B على الترتيب.

1- برر المساواة $P(T\le t)=P(T_A\le t)\times P(T_B\le t)$

2- استنتج أن $P(T\le t)=(1-e^{-\lambda t})^2$

3- نفرض أن $\lambda=3\times10^{-2}$.
ما هو احتمال أن الآلة تشتغل أكثر من سنتين ؟

4- إذا كانت الآلة مركبة من ثلاث عناصر مربوطة على التفرع، ما هو احتمال أنها تشتغل أكثر من سنتين ؟

✓ الحل :

1) الآلة تتعطل قبل الزمن t إذا تعطل كلا العنصرين A و B.
- تكون مدة حياة الآلة أقل أو يساوي t إذا وفقط إذا كانت مدة حياة كلا العنصرين A و B أقل من أو يساوي t.
وهذا يعني أن $(T\le t)=(T_A\le t)\cap(T_B\le t)$
وعليه $P(T\le t)=P\left((T_A\le t)\cap(T_B\le t)\right)$
وبما أن الحادثين $(T_A\le t)$ و $(T_B\le t)$ مستقلين فإن: $P(T\le t)=P(T_A\le t)\times P(T_B\le t)$

2) بما أن $P(T_A\le t)=P(T_B\le t)$ فإن $P(T\le t)=\left[P(T_A\le t)\right]^2$
لكن $P(T_A\le t)=1-e^{-\lambda t}$ إذن $P(T\le t)=(1-e^{-\lambda t})^2$

3) لدينا $\lambda=3\times10^{-2}$
احتمال أن الآلة تشتغل أكثر من سنتين هو $P(T\ge730)$
$$P(T\ge730)=1-P(T\le730)=1-(1-e^{-3\times10^{-2}\times730})^2=6{,}16\times10^{-10}$$

4) $$P(T\ge730)=1-P(T\le730)=1-(1-e^{-3\times10^{-2}\times730})^3=9{,}25\times10^{-10}$$

تطبيق 32 — القانون الأسي ومدة حياة عنصر الكتروني

يقوم مصنع بإنتاج عناصر إلكترونية.
نتقبل أن المتغير العشوائي T الذي يرفق بكل عنصر إلكتروني أخذ عشوائيا من العناصر المنتجة بمدة حياته t المعبر عنها بالساعات، يتبع قانونا أسيا وسيطه λ.

1- ليكن $F(t)$ احتمال أن العنصر الإلكتروني لم يحدث له عطب حتى اللحظة t.
أكتب $F(t)$ بدلالة t.

2- إذا علمت أن $F(500)=0{,}80$، اعط القيمة الدقيقة للوسيط λ ثم قيمة مقربة له إلى 10^{-4}

3- احسب بتقريب 10^{-2} احتمال أن مدة حياة عنصر تتجاوز 2008 ساعة.

✓ الحل :

1) $F(t)=P(T\le t)=1-e^{-\lambda t}$

2) $F(500)=0{,}80$ يكافئ $e^{-500\lambda}=0{,}2$ يكافئ $\lambda=-\frac{Ln\,0{,}2}{500}$
$$\lambda=-\frac{Ln\,0{,}2}{500}=0{,}0014=14\times10^{-4}$$

3) احتمال أن مدة حياة عنصر تتجاوز 2008 ساعة هو $P(T\ge2008)$
$$P(T\ge2008)=e^{-14\times10^{-4}\times2008}=0{,}06$$

تطبيق 33 — القانون الأسي وقانون ثنائي الحد

تقوم مؤسسة بكراء سيارات في منطقة جبلية، هذه السيارات تتوقف على الطريق لأسباب خارجية عدة، منها سقوط أحجار، مرور قطيع من الحيوانات ... إلخ.
تنطلق سيارة من مرآبها وليكن D متغير عشوائي الذي يقيس بالكيلومتر المسافة التي ستقطعها هذه السيارة حتى يحدث لها حادث.
نقبل أن D يتبع قانونا أسيا وسيطه $\frac{1}{80}$.
في كل هذا التمرين النتائج مدورة إلى 10^{-3}.

1- احسب احتمال أن المسافة المقطوعة بدون حادث تكون:
أ) محصورة بين 50 و 100 كيلومتر.
ب) أكثر من 300 كيلومتر.

2- إذا علمت أن هذه السيارة قطعت 350 كيلومتر بدون توقف (بدون حادث)، ما هو احتمال أنه لا يحدث لها توقف خلال $25\,Km$ المقبلة ؟

3- أ) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $I(A)$ حيث:
$I(A)=\int_0^A \frac{1}{82}x e^{-\frac{x}{82}}dx$ حيث A عدد حقيقي موجب.
ب) احسب $\lim_{A\to+\infty} I(A)$ (هذه النهاية تمثل المسافة المتوسطة المقطوعة بدون حادث).

4- المؤسسة تملك N_0 سيارة والمسافات المقطوعة من طرف كل سيارة ما بين خروجها من المرآب حتى مكان حدوث سبب لتوقفها، هي متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى تتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda=\frac{1}{82}$.

d عدد حقيقي موجب، وليكن X_d المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السيارات التي لم يحدث لها حادث بعد قطعها مسافة d كيلومتر.

ا) بين أن X_d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه N_0 و $e^{-\lambda d}$

ب) اعط متوسط عدد السيارات التي لم يحدث لها أي حادث بعد قطعها $d\ Km$.

✓الحل :

1) ا) $P(50 \le D \le 100) = \int_{50}^{100} \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}}\, dx = \left[-e^{-\frac{x}{82}}\right]_{50}^{100} = 0{,}248$

ب) $P(D \ge 300) = 1 - P(D \le 300) = 1 - \int_{0}^{300} \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}}\, dx = 0{,}026$

2) احتمال أن السيارة تقطع $25\ Km$ إضافية علما أنها قطعت $350\ Km$ هو :

$P(D \ge 375 / D \ge 350)$

$P(D \ge 375 / D \ge 350) = P(D \ge 25) = e^{-\frac{25}{82}} \approx 0{,}737$

3) ا) بوضع $U(x) = x$ ، $V(x) = -e^{-\frac{x}{82}}$ يكون $U'(x) = 1$ و $V'(x) = \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}}$

$$I(A) = \left[-x e^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-\frac{x}{82}}\, dx = -A e^{-\frac{A}{82}} - \left[82 e^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A$$

$$= -A e^{-\frac{A}{82}} - 82 e^{-\frac{A}{82}} + 82$$

ب) بما أن: $\lim_{A \to +\infty} e^{-\frac{A}{82}} \times A = 0$ و $\lim_{A \to +\infty} e^{-\frac{A}{82}} = 0$ فإن $\lim_{A \to +\infty} I(A) = 82$

4) ا) التجربة E_1 هي قطع مسافة من طرف سيارة ونراقب هل تتعرض لحادث أم لا .

نكرر هذه التجربة N_0 مرة ونسجل في كل مرة عدد السيارات التي لم يحدث لها أي حادث بعد قطعها مسافة $d\ Km$.

التجارب مستقلة عن بعضها البعض ومتماثلة.

لكل سيارة مختارة لها إمكانيتين :

- إما السيارة لم يحدث لها أي حادث بعد قطعها مسافة $d\ Km$ ونسمي هذا الحادث S (نجاح).

واحتماله هو $P(S) = P(D \ge d) = e^{-\frac{d}{82}}$

- إما السيارة يحدث لها على الأقل توقف، هذا الحادث نسميه $\overline{S}$

واحتماله هو $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - e^{-\frac{d}{82}}$

X_d هو المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السيارات التي لم يحدث لها حادث خلال قطعها المسافة $d\ Km$. أي عدد مرات تحقق الحادث S .

إذن X_d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه N_0 و $p = e^{-\frac{d}{82}}$

ب) متوسط عدد السيارات التي لم يحدث لها أي حادث بعد قطعها مسافة d هو $E(X_d)$.

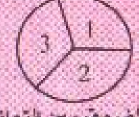
$E(X_d) = N_0 \times p = N_0 e^{-\frac{d}{82}}$

تطبيق 34

تلاؤم معطيات مع نموذج احتمالي

1- عجلة سحرية مقسمة إلى ثلاثة أجزاء مرقمة على التوالي 1 ، 2 ، 3 النتائج المتحصل عليها خلال 300 لعبة مدونة في الجدول التالي :

1	2	3
101	107	92



- احسب d^2 مجموع مربعات الفروق بين التواترات الملاحظة والتواترات النظرية.

2- لعرفة إن كانت هذه العجلة تعطينا أرقاما عشوائية أم لا . وهذا بعتبة مجازفة 10% قمنا بمحاكاة التجربة السابقة 2000 مرة. وفي كل مرة حسبنا d^2 فتحصلنا على سلسلة عشريها التاسع (D_9) هو 3×10^{-3} .

ماذا تستنتج ؟

✓الحل :

1) بما أن العجلة مقسمة إلى ثلاثة أجزاء فإن كل الأرقام لها نفس الحظوظ نظريا أي:

$P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$

تواترات الأرقام 1، 2، 3 هي f_1 ، f_2 ، f_3 حيث $f_3 = \frac{92}{300}$ ، $f_2 = \frac{107}{300}$ ، $f_1 = \frac{101}{300}$

إذن $d^2 = (f_1 - \frac{1}{3})^2 + (f_2 - \frac{1}{3})^2 + (f_3 - \frac{1}{3})^2$

$= (\frac{101}{300} - \frac{1}{3})^2 + (\frac{107}{300} - \frac{1}{3})^2 + (\frac{92}{300} - \frac{1}{3})^2$

$= \frac{1 + 7^2 + 8^2}{(300)^2} = \frac{114}{90000} = 1{,}26\times10^{-3}$

2) بما أن $d^2 \le D_9$ فإن المعطيات متلائمة مع النموذج النظري بعتبة مجازفة 10% أي أن العجلة غير مغشوشة (متزنة).

تطبيق 35

القانون الأسي

يقوم رئيس مصلحة الحالة المدنية لبلدية بن طلحة في نهاية السنة بتفحص دفاتر الولادات وهذا بحساب عدد البنات والبنين المولودين خلال تلك السنة.

النتائج المحصل عليها مدونة في الجدول التالي :

البنين	البنات
113	129

السؤال المطروح هو : هل هذه المعطيات متلائمة مع الفرضية " حظوظ ازدياد بنت هو نفس

حظوظ ازدياد ولد " ؟
لذلك قام بمحاكاة التجربة المتمثلة في تكرار 242 مرة سحب رقما عشوائيا من رقمين.
بعد إنجاز 6000 محاكاة حسبنا في كل مرة d^2 فتحصلنا على السلسلة الإحصائية للقيم $10^4 \times d^2$ التي نتائجها مدونة في الجدول الجانبي.

D_1	Q_1	Med	Q_3	D_9
0,27	7,8	22,1	42,3	54,6

بعتبة مجازفة 10% هل نستطيع تقبل الفرض الذي طرحه رئيس المصلحة ؟

✓ الحل :

بما أن حظ ازدياد ولد يساوي حظ ازدياد بنت فإن احتمال كل منهما يساوي $\frac{1}{2}$.

f_1 ، f_2 تواتري ازدياد بنت وازدياد ولد على التوالي.

$$f_1 = \frac{113}{242} \quad \text{و} \quad f_2 = \frac{129}{242}$$

لدينا $d^2 = (f_1 - \frac{1}{2})^2 + (f_2 - \frac{1}{2})^2 = 21,85 \times 10^{-4}$

بما أن $10^4 \times d^2 < D_9$ فإن المعطيات متلائمة مع الفرضية بعتبة مجازفة 10%.

تطبيق 36 تلاؤم معطيات مع نموذج احتمالي

I - حجر نرد رباعي الوجوه منتظم له وجه أبيض ووجهين حمراوين ووجه أخضر. نفرض أن الحجر متزن.
لعبة تتمثل في رمي هذا الحجر مرتين متتاليتين وبصفة مستقلة .
وفي كل رمية نسجل لون الوجه المخفي ولنعتبر الأحداث التالية :
E هو الحادث " الوجهان المتحصل عليهما خضراوين".
F هو الحادث " الوجهان لهما نفس اللون".

1- احسب احتمالي الحادثين E و F وكذلك احتمال E علما F .

2- نقوم بعشرة لعبات متماثلة ومستقلة.
احسب احتمال التحصل على الأقل مرتين على الحادث F خلال هذه العشرة لعبات. (تعطى النتائج مقربة إلى 10^{-3}).

II - نريد معرفة إن كان الحجر المستعمل متزن أم لا. لذلك نرقم أوجهه بالأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 . ثم نرمي هذا الحجر 160 مرة ونُدون العدد n_i عدد مرات ظهور الوجه i (i الوجه المخفي).
فتحصلنا على النتائج التالية :

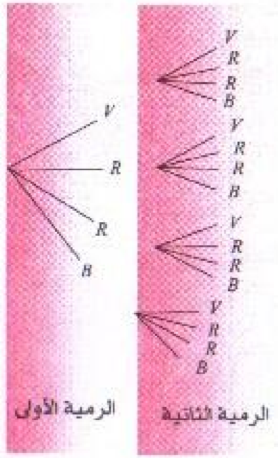
الوجه i	التكرار n_i
1	30
2	48
3	46
4	32

ليكن f_i تواتر الوجه i و d^2 العدد الحقيقي المعرف بـ $d^2 = \sum_{i=1}^{4} (f_i - \frac{1}{4})^2$

نحاكي 1000 مرة التجربة التي تتمثل في سحب رقم عشوائي 160 مرة من بين عناصر المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ ولكل محاكاة نسحب العدد d^2

العشري التاسع (D_9) للسلسلة الإحصائية لـ 1000 قيمة لـ d^2 يساوي 0,0098 .
بعتبة مجازفة 10% هل يمكن اعتبار هذا الحجر متزن ؟

✓ الحل :



I - 1) عدد الحالات الممكنة هي $4 \times 4 = 16$

ـ عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث E هي 1

ومنه $P(E) = \frac{1}{16}$

ـ عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادث F هي 6

ومنه $P(F) = \frac{6}{16}$

لدينا $P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$.

الحادث $E \cap F$ هو :

" الحصول على وجهين يحملان نفس اللون الأخضر ".

إذن $E \cap F = E$

وبالتالي $P_F(E) = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{6}$

2) لتكن التجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين مستقلتين. وليكن F و $\overline{F}$ مخرجيها نكرر هذه التجربة عشرة مرات.

بما أن التجارب متماثلة ومستقلة فيما بينها. واحتمال النجاح F في كل تجربة هو $p = \frac{1}{16}$

واحتمال الرسوب $\overline{F}$ هو $\frac{15}{16}$ فإننا نستطيع تطبيق قانون ثنائي الحد الذي وسيطيه

$p = \frac{1}{16}$ و $n = 10$.

ليكن A الحادث "الحصول على F مرتين على الأقل" و $\overline{A}$ هو الحادث العكسي للحادث A

$\overline{A}$ هو الحادث " التحصل على الوجه F على الأكثر مرة "

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (C_{10}^{0}\, p^0 q^{10} + C_{10}^{1}\, p^1 q^9)$$
$$= 1 - (q^{10} + 10\, p\, q^9) = 1 - q^9 (q + 10\, p)$$

$$=1-(\frac{15}{16})^9(\frac{15}{16}+\frac{10}{16})=1-(\frac{15}{16})^9(\frac{25}{16})=0{,}126$$

II - بما أن الحجر له أربعة أوجه لها نفس حظ الظهور فإن احتمال ظهور كل وجه هو $\frac{1}{4}$ (نظريا).

$$f_4=\frac{32}{160} \text{ ، } f_3=\frac{46}{160} \text{ ، } f_2=\frac{48}{160} \text{ ، } f_1=\frac{30}{160}$$

$$d^2=\sum_{i=1}^{4}(f_i-\frac{1}{4})^2=(\frac{30}{160}-\frac{1}{4})^2+(\frac{48}{160}-\frac{1}{4})^2+(\frac{46}{160}-\frac{1}{4})^2+(\frac{32}{160}-\frac{1}{4})^2$$

$$d^2=\frac{100+64+36+64}{(160)^2}=\frac{264}{(160)^2}=0{,}0103$$

بما أن $d^2 \langle D_9$ فإن المعطيات غير متلائمة مع النموذج الاحتمالي المفترض بعتبة مجازفة 10% .

تمارين و مسائل

1 - 1) كم لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء يمكن انتخابها من بين 20 شخصا ؟
2) كم عدد المجموعات الجزئية المشكلة من ثلاثة عناصر من مجموعة تشمل A ، B ، C ، D ، E ، F ؟ ثم عين كل هذه المجموعات الجزئية.

2 - 10 نقط موزعة في مستو بحيث أي ثلاث نقط كيفية منها لا تقع على استقامة واحدة.
أ) كم من مستقيم يمكننا تشكيله وذلك بربط النقط مثنى مثنى ؟
ب) كم يوجد من شعاع مبدؤه ونهايته هما نقطتان مختلفتان من بين 10 نقط ؟
(الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ مختلفان)
جـ) كم مثلث يمكن تشكيله ؟

3 - في قسم مشكل من 15 بنتا و 13 ولدا نريد اختيار ممثلين :
أ) كم طريقة يمكننا بها اختيار هذين الممثلين ؟
ب) كم طريقة يمكننا بها اختيار ولد و بنت ؟
جـ) كم طريقة يمكننا بها اختيار ولدين ؟
د) كم طريقة يمكننا بها اختيار بنتين ؟
هـ) كم طريقة يمكننا بها اختيار ولد على الأقل ؟

4 - نرمي ثلاث مرات متتالية حجر النرد أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 .
1) ما هو عدد النتائج الممكنة ؟
2) كم عدد الطرق الممكنة لتشكيل أعداد لها نفس الأرقام ؟
3) كم عدد الطرق الممكنة لتشكيل عدد له ثلاثة أرقام مختلفة ؟
4) كم عدد الطرق التي يمكن بها أن نشكل أعدادا مؤلفة من رقمين ؟

5 - كيس يحتوى على n كرة بيضاء و n كرة سوداء نسحب n كرة في آن واحد (n غير معدوم).
1) ما هو عدد النتائج الممكنة ؟
2) p عدد طبيعي بحيث $0 \le p \le n$
بين أن $(C_n^p)^2$ هو عدد إمكانيات الحصول على p كرة بيضاء.

3) استنتج قيمة المجموع $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+...+(C_n^n)^2$

4) باستعمال نشر $(1+x)^{2n}$ بين أن $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+...+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

6 - 1) انشر كثير الحدود $F(x)=(1+x)^n$

2) استنتج انه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$n\,(1+x)^{n-1}=C_n^1+2\,C_n^2\,x+3\,C_n^3\,x^2+...+n\,C_n^n\,x^{n-1}$$

ثم استنتج المجموع $S=C_n^1+2\,C_n^2+3\,C_n^3+....+n\,C_n^n$

7 جمعية تشمل n عضوا، نشكل من أعضائها لجنة مكونة من p عنصرا ، ومن هذه اللجنة نشكل مكتبا من q عنصرا، ومن هذا المكتب نشكل امانة مكونة من r عنصرا بين أن $C_n^p\times C_p^q\times C_q^r = C_n^r\times C_{n-r}^{q-r}\times C_{n-q}^{p-q}$ وهذا باستعمال تجميع كل الطرق المختلفة.

8 - (U_n) متتالية معرفة ب $U_0=1$ و $U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}$ مع $n\rangle 0$

1) نفرض أن $n\geq 3$

أ) بين أن $U_n=2+\frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}$

ب) بين انه من أجل كل k بحيث $n-2\geq k\geq 2$ يكون $C_n^k\geq\frac{n\,(n-1)}{2}$

2) استنتج من السؤال (1) حصرا للعدد U_n ، ثم بين أن نهاية (Un) هي 2

9 - نضع $f(x)=x\,(1+x)^n$ مع n عدد طبيعي غير معدوم

1) انشر $f(x)$

2) احسب $f'(x)$ بطريقتين مختلفتين ، ثم استنتج عبارة $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,C_n^k$

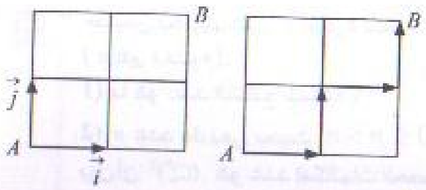
10 - 1) نستطيع التحرك على شبكة مربعة الشكل أبعادها 2×2 منسوبة إلى معلم متعامد ومتجانس $(A,\vec i,\vec j)$ كما هو موضح في الشكل (1)

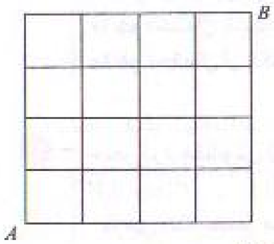
النقطة B إحداثياتها (2.2)

نسمي اصغر مسلك من A إلى B

كل تتابع لأربع أشعة $\vec j$ أو $\vec i$

بحيث مجموعها يساوى $\overrightarrow{AB}$.





فمثلا التتابع $(\vec i ، \vec j ، \vec i ، \vec j)$ في الشكل (2) .

هو أصغر مسلك من A إلى B

ارسم كل المسالك الأصغرية الممكنة من A إلى B

ثم أوجد طريقة لمعرفة عددها.

2) في هذا السؤال نتحرك على شبكة مربعة الشكل أبعادها (4×4) ، B نقطة إحداثياتها $(4،4)$)

كم عدد الطرق الأصغرية الممكنة من A إلى B

ب) كم عدد هذه الطرق التي تمر بالنقطة O مركز الشبكة .

11 - برنامج مسابقة يشمل 40 موضوعا، 4 مواضيع تختار عشوائيا وتعرض على المتسابقين ، على كل مترشح معالجة واحد من المواضيع الأربعة المختارة.

1) مترشح لم يراجع إلا $\frac{1}{4}$ من المواضيع المدرجة في المسابقة.

أ) احسب احتمال أن المترشح لم يراجع ولا موضوعا واحدا من المواضيع الأربعة المختارة.

ب) احسب احتمال انه راجع على الأقل موضوعا واحدا من المواضيع المختارة .

2) اجب على نفس السؤال السابق وهذا بفرض أن المترشح راجع نصف المواضيع المدرجة في المسابقة.

12 - كيس يحتوى على 7 كرات بيضاء و 7 كرات خضراء و 5 كرات حمراء . نختار عشوائيا وفي نفس الوقت 5 كرات.

1)ما هو احتمال أن يكون من بين الخمسة الكرات المختارة 3 كرات بيضاء ؟

2)ما هو احتمال الحادث "من بين الكرات المختارة ثلاث حمراء " ؟

3) ما هو احتمال الحادث "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون" ؟

13 - في محطة خروبة للحافلات ، اشترى 13 مسافر تذاكر، 4 منها باتجاه قسنطينة و 4 منها باتجاه تمنراست و 5 باتجاه بجاية.

نختار عشوائيا ثلاثة مسافرين .

ما هو احتمال كل حادث من الحوادث التالية :

A " ثلاثة مسافرين لهم اتجاهات مختلفة "

B " ثلاثة مسافرين يتوجهون إلى بجاية "

C " ثلاثة مسافرين لهم نفس الاتجاه "

D " مسافر واحد على الأقل يتجه نحو قسنطينة "

14 - نضع في كيس 7 قصاصات على كل منها مكتوب حرف من حروف كلمة " $SOFIANE$ " ، نسحب على التوالي ثلاث قصاصات ونرتبها حسب ترتيب ظهورها من

اليسار إلى اليمين، نشكل عندئذ كلمة من ثلاثة أحرف.

ما هو احتمال التحصل على كلمة "son" ؟

ما هو احتمال أن الكلمة المشكلة تنتهي بواحد من الحروف التالية A , E , I , O ؟

15 - حجر نرد مغشوش (غير متزن) بحيث:

$P(1)=P(4)=P(3)=P(5)=0{,}15$, $P(2)=0{,}1$, $P(6)=0{,}3$

نرمي هذا الحجر مرتين متتاليتين ونسجل في كل مرة رقم الوجه العلوي.

X هو المتغير العشوائي الذي قيمه مجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي

1) اعط قانون احتمال X

2) احسب $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$

16 - يلتقي تاجر متنقل بـ 20 شخصا يوميا، احتمال أن يشترى واحد منهم هو 0,2 مما يعرضه عليهم.

1) ما هو احتمال أن التاجر لا يبيع لأي شخص خلال يوم ؟

2) ما هو احتمال أن يبيع لشخصين على الأقل ؟

17 - نرمي قطعة نقدية متزنة، احسب احتمال الحوادث التالية:

أ) الحصول على الظهر مرة واحدة على الأقل وذلك عندما نقوم بـ 6 رميات.

ب) الحصول على الظهر مرة واحدة على الأكثر وذلك عند القيام بـ 6 رميات.

جـ) الحصول على الظهر مرتين على الأقل وذلك عند القيام بـ 10 رميات.

د) الحصول على نفس عدد الأظهر والأوجه خلال 10 رميات.

18 - مجلس مكون من 8 أشخاص وكل عضو منه يشارك مرة واحدة في كل اجتماعين.

احسب احتمال الحوادث التالية:

أ) 8 أشخاص حاضرون في الاجتماع.

ب) هناك أكثر من 3 أشخاص حاضرون في الاجتماع.

جـ) هناك على الأقل 4 أشخاص حاضرون في الاجتماع.

19 - احتمال ازدياد بنت هو نفس احتمال ازدياد ولد.

1) ما هو احتمال أن يكون عدد الإناث أكبر من عدد الذكور في عائلة ذات ثلاثة أطفال ؟

2) اجب عن نفس السؤال إذا علمت أن عدد أولاد العائلة هو 7.

20 - مصنع ينتج براغي منها 7% مشوهة.

علبة تحتوي على 25 برغيا. وجود تشوه في برغي مستقل عن اختياره.

1) ما هو احتمال أن العلبة لا تحتوي على أي برغي مشوه ؟

2) ما هو احتمال أن العلبة تحتوي على الأقل 12 برغيا غير مشوه ؟

21 - يقوم بائع متجول بعرض صهاريج تخزين المياه في المناطق الجبلية بحيث يلتقي بعشرة زبائن يوميا، نقبل أن احتمال بيع صهريج لزبون هو $\frac{1}{7}$ وأن قرار شراء كل زبون مستقل عن الآخرين.

X هو عدد الصهاريج المباعة يوميا.

1) برر أن قانون X هو قانون ثنائي الحد ثم عين وسيطيه.

2) اعط عبارة $P(X=k)$ من أجل $0 \le k \le n$

ثم احسب $P(X=0)$ ، $P(X=2)$ ، $P(X=4)$.

3-1) احسب $E(X)$.

ب) التاجر يربح $500\ DA$ لكل صهريج، ما هو الربح المتوسط الذي يتوقعه هذا التاجر (استعمال متغير عشوائي آخر Y)

22 - احتمال أن قناصا يبلغ هدفه هو 0,85.

1) خلال خمس طلقات مستقلة عن بعضها البعض ما هو احتمال أن القناص يبلغ هدفه على الأقل مرتين ؟

2) كم يجري من طلقة حتى يكون احتمال إصابة الهدف هو أكبر من 0,92 على الأقل مرة ؟

23 - يقوم مصنع بإنتاج برامج الكمبيوتر، وبينت دراسة حول نوعية هذه البرامج أن 4% منها يوجد بها خلل. يقوم تاجر في الإعلام الآلي بطلبية مكونة من 100 برنامج، وليكن X هو عدد البرامج الموجودة في هذه الطلبية والتي بها خلل.

1) ما هو قانون احتمال X ؟

2) احسب $P(X=k)$ من أجل k ينتمي إلى $\{0,1,2,3\}$

24 - هناك 4 حظوظ من بين 40 لاكتشاف بئر بترول في منطقة حاسي مسعود.

1) نقوم بـ 15 عملية تنقيب. ما هو احتمال أن نتحصل على:

أ) اكتشاف واحد.

ب) 5 اكتشافات.

جـ) على الأقل 4 اكتشافات.

د) أقل من 4 اكتشافات.

هـ) أكثر من 5 اكتشافات.

2) كم من عملية تنقيب يجب إدراجها حتى يكون لدينا 39 حظا من بين 40 للحصول

على الأقل على اكتشاف واحد ؟

3) كم يصبح احتمال نجاح عملية التنقيب إذا علمت أنه في هذه المنطقة لدينا 39 حظا من بين 40 للتحصل على الأقل على اكتشاف واحد من بين 20 تنقيبا ؟

---

25 - مصنع ينتج ساعات. خلال عملية الإنتاج من الممكن حدوث نوعين من الخلل نرمز لهما بـ a و b وهذا بصفة مستقلة.

5% من الساعات بها العطب a و 7% بها العطب b.

نختار عشوائيا ساعة من الإنتاج ونعرف الحوادث التالية :

A " الساعة المختارة بها العطب a "

B " الساعة المختارة بها العطب b "

C " الساعة المختارة لا يوجد فيها اي عطب "

D " الساعة المختارة بها عطب واحد "

1) احسب احتمال الحادثين C و D

2) خلال عملية الإنتاج نختار عشوائيا وعلى التوالي 5 ساعات ولنعتبر أن عدد الساعات المنتجة كبير بالقدر الكافي بحيث نستطيع أن نفرض أن السحابات تنجز بالإرجاع وبصفة مستقلة.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الساعات التي ليس بها اي عطب ونرمز بـ E إلى الحادث " 4 ساعات على الأقل ليس بها اي عطب "

احسب احتمال E.

---

26 - في امتحان نستعمل طريقة سؤال باختيارات متعددة نهتم بـ 10 أسئلة مستقلة عن بعضها البعض.

نرفق بكل سؤال 4 اختيارات مرقمة 4,3,2,1 حيث أن واحدة منها فقط صحيحة.

من اجل كل سؤال يجب على المترشح شطب اختيار من بين الأربعة اختيارات بحيث يكون الجواب صحيحا إذا شطب على الرقم الصحيح .

1) مترشح يجيب على الأسئلة بشكل عشوائي (الأربعة اختيارات متساوية الاحتمال)

أ) احسب احتمال كل حادث من الأحداث التالية :

A " المترشح يجيب صحيحا على السؤال الأول من العشرة أسئلة "

B " المترشح يجيب صحيحا على الأقل على اثنين من بين 10 أسئلة "

ب) نمنح نقطتين لكل جواب صحيح و (-1) لكل جواب خاطئ.

احسب احتمال الحادث C "المترشح يتحصل على الأقل على 10 نقط في الأسئلة العشرة".

2) نفرض الآن أن المترشح يعرف الأجوبة الصحيحة للسؤالين الأولين ويجيب عشوائيا على الثمانية الأخرى .

ما هو احتمال الحادث C ؟

27 - X متغير عشوائي يتبع قانون منتظم ومستمر على المجال $[0,1]$

عين احتمال كل حادث من الحوادث التالية :

$B=\{X>0{,}07\}$ ، $A=\{X<0{,}3\}$ ، $C=\{X=0{,}5\}$ ، $D=\{0{,}09>X>0{,}01\}$

---

28 - X متغير عشوائي مستمر على المجال $[0,+\infty[$ يساوى مدة الحياة بالأعوام لآلة غسيل ملابس مع $\lambda=0{,}02$.

1) ما هو احتمال أن هذه الآلة تتعطل قبل 10 سنوات ؟

2) ماهو احتمال انها تتعطل لأول مرة بعد 10 سنوات من الخدمة ؟

---

29 - يحتوي مخبر فيزياء بثانوية على مجموعة من كاشفات التذبذب متماثلة. مدة الحياة بالأعوام لكاشف تذبذب هو متغير عشوائي نرمز له بـ X الذي يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda>0$

1) إذا علمت أن $P(X>10)=0{,}286$

بين أن $0{,}125$ هي القيمة المقربة إلى 10^{-3} للعدد λ

2) في كل ما يلي $\lambda=0{,}125$

احسب احتمال أن الكاشف له مدة حياة أقل من 6 اشهر .

3) إذا علمت أن الجهاز اشتغل 8 أعوام فما هو احتمال أن تكون مدة حياته اكبر من 10 سنوات.

---

30 - الوقت اللازم بالساعات لإصلاح آلة يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda=0{,}05$

1) ما هو احتمال أن وقت إصلاح الآلة يتجاوز الساعتين ؟

2)ما هو احتمال أن عملية إصلاح الآلة تستغرق على الأقل 10 ساعات إذا علمت أنها استغرقت 9 ساعات من قبل ؟

---

31 - مؤسسة A مختصة في إنتاج دراجات نارية، عملية مراقبة الجودة بينت أن كل منتوج يمكن أن يكون فيه خللين.

- خلل في التلحيم احتماله يساوى $0{,}03$ وآخر في عنصر كهربائي احتماله هو $0{,}02$. المراقبة بينت كذلك أن الخللين مستقلين.

نقول أن الدراجة غير صالحة إذا كان بها على الأقل أحد الخللين.

1- بين أن احتمال أن تكون الدراجة غير صالحة هو $0{,}0494$.

2- بائع الجملة يستقبل 800 دراجة من المؤسسة A وليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه عدد الدراجات غير الصالحة من بين 800 دراجة.

ا) بين أن X يتبع قانون ثنائي الحد .

ب) احسب الأمل الرياضي واعط معنى له.

3-أ) تاجر صغير يقوم بطلبية 25 دراجة، احسب بتقريب 10^{-3} احتمال أن تكون

أكثر من دراجتين غير صالحة.

ب) يريد هذا التاجر أن يكون احتمال الحصول على الأقل على دراجة غير صالحة أصغر من 50% . عين عندئذ القيمة الأعظمية للعدد n حيث n عدد الدراجات التي يستطيع طلبها.

4- المتغير العشوائي الذي يرفق بكل دراجة منتجة مدة حياتها بالأعوام يتبع قانونا أسيا وسيطه $0{,}0007$ أي دالة كثافة احتماله المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ ب :

$f(x)=0{,}0007\times e^{-0{,}0007x}$.

احسب احتمال أن تكون مدة حياتها محصورة بين 500 و 600 يوم بتقريب 10^{-3}

32 - دراسة حول عدد تدخلات الحماية المدنية أجريت خلال مدة 200 أسبوع، وهذا لغرض معرفة أكثر الأيام تدخلا. نتائجها في الجدول التالي :

السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
26	27	29	39	30	23	26

هل نستطيع بعتبة مجازفة 10% القول أن هناك تساوي احتمال في عدد التدخلات بين أيام الأسبوع ؟ لهذا الغرض استعملنا نتائج 6000 محاكاة لتجربة تتمثل في اختيار يوم من الأسبوع عشوائيا خلال 200 أسبوع .

ولكل محاكاة حسبنا قيمة d^2 .

السلسلة الإحصائية لـ d^2 نتائجها مدونة في الجداول التالي :

D_1	Q_1	Me	Q_3	D_9
0,0015	0,0015	0,0025	0,0061	0,0072

ماذا تستنتج ؟

33 - نرمي 60 مرة حجر النرد.

1) عين التواترات المتحصل عليها لكل وجه باستعمال قانون تساوي الاحتمال

2) رمينا حجر النرد 60 مرة على التتابع فتحصلنا على النتائج التالية :

وجه الحجر	1	2	3	4	5	6
التكرر	13	8	9	10	7	13

احسب d^2 مجموع مربعات الفروق بين التواترات النظرية والتواترات الملاحظة .

3) بمحاكاة التجربة السابقة (رمي حجر النرد 60 مرة) 1000 و 2000 مرة حسبنا لكل محاكاة قيمة d^2 فكانت النتائج هي :

عدد المرات	1000	2000
D_9	0,16665	0,16665

ماذا يمكن القول حول هذا الحجر (هل هو مغشوش أم لا ؟).

الدرس 10

الأعداد المركبة (قسم أول)

تمهيد

ندرس كيف أنه من دراسة حل المعادلات اضطررنا إلى توسيع مفهوم مجموعات الأعداد.

- المعادلة $x+2=0$ ليس لها حلول في $\mathbb{N}$ وهذا ما قادنا إلى إنشاء مجموعة جديدة أوسع لـ $\mathbb{N}$ بحيث تصبح للمعادلة $x+2=0$ حلول في هذه المجموعة والتي نرمز لها $\mathbb{Z}$

- المعادلة $2x+3=0$ ليس لها حلول في $\mathbb{Z}$ وهذا ما قادنا إلى إنشاء مجموعة جديدة أوسع لـ $\mathbb{Z}$ بحيث تكون للمعادلة $2x+3=0$ حلول في هذه المجموعة التي نرمز لها بـ $\mathbb{Q}$

- المعادلة $x^2=-1$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ لذلك لجأنا إلى إنشاء مجموعة أوسع لـ $\mathbb{R}$ بحيث تكون لمعادلتنا حلول في هذه المجموعة الجديدة.

خطرت لبعض الرياضيين فكرة تعريف أعداد ليست حقيقية وإعطاء معنى لـ $\sqrt{-1}$ وفي منتصف القرن الثامن عشر (1777) اقترح العالم "أولر" استبدال $\sqrt{-1}$ بـ i حيث i يمثل الحرف الأول من كلمة " imaginaire " إذن $i^2=-1$.

العالم "دالمبار" بين أن كل عناصر المجموعة الجديد هي من الشكل $a+ib$ مع a و b عددين حقيقيين والتي تسمى مجموعة الأعداد المركبة (Complexe) و يرمز لها بـ $\mathbb{C}$.

- كما مثلنا كل مجموعة الأعداد الحقيقية على مستقيم نستطيع تمثيل الأعداد الحقيقية والمركبة في مستوي بحيث أن كل نقطة منه تحدد بفاصلتها a وترتيبتها b والتي تمثل العدد $a+ib$ وهذا المستوي يسمى بالمستوي المركب.

1. مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

نعرف مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، تمديدا لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، المزودة بعمليتي الجمع والضرب اللتين لهما نفس الخواص كما في $\mathbb{R}$.

a و b عددان حقيقيان، المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ يسمى بالمستوي المركب.

I و J نقطتان إحداثياتهما $(1,0)$ و $(0,1)$ على الترتيب.

1.1 نقط المستوي و الأعداد المركبة

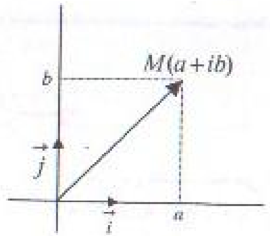
تعريف 1

نرفق النقطة I بالعدد الحقيقي 1 ونرفق النقطة J بالعدد المركب i بحيث $i^2=-1$.

نرفق بكل نقطة M إحداثياتها (a,b) من المستوي المركب العدد المركب الوحيد الذي نرمز له بـ Z والذي يكتب $Z=a+ib$

عكسيا نرفق بكل عدد مركب $Z=a+ib$ النقطة M الوحيدة من المستوي المركب التي إحداثياتها (a,b)

ونقول عندئذ أنه يوجد تقابل بين مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ومجموعة نقاط المستوي.



تسمية

نسمي النقطة $M(a,b)$ صورة العدد المركب Z ويسمى بلاحقة النقطة M ونرمز له بـ Z_M

تعريف 2

نرفق بكل شعاع $\overrightarrow{OM}(a,b)$ العدد المركب $Z=a+ib$ والذي يسمى لاحقة هذا الشعاع وعكسيا نرفق بكل عدد مركب $Z=a+ib$ الشعاع الذي مركباته (a,b) والذي يسمى شعاع الصورة لـ Z ويرمز له بـ $Z_{\overrightarrow{OM}}$.

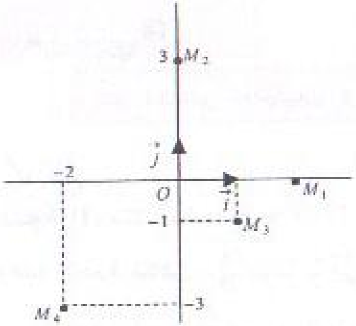
مثال -

1) لتكن الأعداد المركبة Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، Z_4 حيث : $Z_1=2$ ، $Z_2=3i$ ، $Z_3=1-i$ ، $Z_4=-2-3i$ ولتكن M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 صورها على الترتيب. مثل هذه النقط في المستوي المركب.

2) اعط الأعداد المركبة الممثلة بالنقطتين $M_5(3,6)$ ، $M_6(-1{,}5 \,;\, 3)$.

✓ **الحل**

1) $M_1(2,0)$ ، $M_3(1,-1)$
$M_2(0,3)$ ، $M_4(-2,-3)$



2) العدد المركب الممثل لـ M_5 هو $Z_5=3+6i$

- العدد المركب الممثل لـ Z_6 هو $Z_6=-1{,}5+3i$

1.2 الشكل الجبري لعدد مركب

تعريف

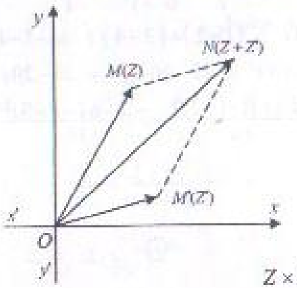
الكتابة $Z=a+ib$ لعدد مركب حيث a و b عددين حقيقيين تسمى الشكل الجبري (أو الديكارتي) لـ Z.

- يسمى a بالجزء الحقيقي لـ Z ونرمز له بـ $\mathrm{Re}(z)$
- يسمى b بالجزء التخيلي لـ Z ونرمز له بـ $\mathrm{Im}(z)$
- القول أن العدد المركب Z حقيقي يعني أن $\mathrm{Im}(z)=0$
- القول أن العدد المركب Z تخيلي صرف يعني أن $\mathrm{Re}(z)=0$
- محور الفواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- محور التراتيب يمثل مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة.
- نقول عن عددين مركبين انهما متساويان إذا كانا ممثلين بنفس النقطة اي لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.

$a+ib=a'+ib'$ يكافئ $a=a'$ و $b=b'$.

$a+ib=0$ يكافئ $a=0$ و $b=0$.

1.3 قواعد الحساب في $\mathbb{C}$



Z و Z' عددان مركبان بحيث $Z=a+ib$ و $Z'=a'+ib'$

أ) $Z+Z'=(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$

ب) $Z\times Z'=(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$

جـ) $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

د) $Z^2+Z'^2=(Z-iZ')(Z+iZ')$

و) إذا كان $Z\neq 0$ فإن مقلوب العدد Z هو $\frac{1}{Z}$ بحيث $\frac{1}{Z}=\frac{1}{a+ib}$

في الشكل الجبري لعدد مركب لا يسمح بترك i في المقام ولكتابة $\frac{1}{Z}$ على الشكل الجبري نضرب البسط والمقام في $a-ib$ فنجد $\frac{1}{Z}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

هـ) من اجل $Z'\neq 0$ يكون $\frac{Z}{Z'}=(a+ib)\times\frac{1}{a'+ib'}$.

تمرين تدريبي 1

عين العددين الحقيقيين x و y بحيث $(x+2y)+i(x-3y)=2$ .... (I)

الحل

المساواة (I) تكتب بالصيغة $(x+2y)+i(x-3y)=2+i\times 0$

وهذه الأخيرة تكافئ $\begin{cases} x+2y=2 & \text{....... (1)}\\ x-3y=0 & \text{....... (2)}\end{cases}$ .... (II)

من (2) نجد $x=3y$ نعوض x في (1) نجد $5y=2$ ومنه $y=\frac{2}{5}$

إذن $x=\frac{6}{5}$ وبالتالي $(x,y)=\left(\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right)$.

تمرين تدريبي 2

اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة $Z_1=\frac{1}{i}$ ، $Z_2=1+3i-(2+4i)$

$Z_3=(5-2i)^2$ ، $Z_4=\frac{2+i}{-1+3i}$

الحل

$Z_1=\frac{1}{i}=\frac{-i\times 1}{0^2+1^2}=\frac{-i}{1}=-i$

$Z_2=1+3i-2-4i=(1-2)+(3-4)i=-1-i$

$Z_3=25-20i+4i^2=25-20i-4=21-20i$

$Z_4=(2+i)\times\frac{1}{-1+3i}=(2+i)\times\frac{-1-3i}{(-1)^2+3^2}=\frac{(2+i)(-1-3i)}{10}=\frac{-2-6i-i-3i^2}{10}$

$=\frac{-2-7i+3}{10}=\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$

تمرين تدريبي 3

ليكن $z=x+iy$ و $Z=\frac{z-i}{z+i}$ حيث z عدد مركب يختلف عن $-i$

1) عين الشكل الجبري لـ Z.

2) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z حقيقي.

3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z تخيلي صرف.

الحل

1) $Z=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$

$=\frac{[x^2+(y+1)(y-1)]+i[-x(y+1)+x(y-1)]}{x^2+(y+1)^2}$

$=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$

2) Z حقيقي هذا معناه أن $\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}=0$ أي $-2x=0$ و $x^2+(y+1)^2\neq 0$

أي $x=0$ و $(x,y)\neq(0,-1)$

ومنه مجموعة النقط M بحيث Z حقيقي هي المستقيم ذو المعادلة $x=0$ ما عدا النقطة $A(0,-1)$.

3) Z تخيلي صرف هذا معناه أن $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}=0$

أي $x^2+y^2-1=0$ و $(x,y)\neq(0,-1)$.

ومنه مجموعة النقط M بحيث Z تخيلي صرف هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ ماعدا النقطة $A(0,-1)$.

2. اللواحق والهندسة

Z_A و Z_B لاحقتا النقطتين A و B على الترتيب. $Z_{\vec{AB}}$ لاحقة الشعاع $\vec{AB}$.

$Z_{\vec{u}}$ ، $Z_{\vec{v}}$ لاحقتي الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ على الترتيب و k عدد حقيقي.

لدينا :

أ) $Z_{\vec{AB}}=z_B-z_A$

ب) $Z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$

جـ) $Z_{k\vec{u}}=k\,Z_{\vec{u}}$

د) لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

لدينا $Z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$ و $Z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

البرهان

أ) الشعاع $\vec{AB}$ مركباته هي $\begin{pmatrix} x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$

إذن ،

$Z_{\vec{AB}}=(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)$

$=(x_B+iy_B)-(x_A+iy_A)=z_B-z_A$

(ب) و (جـ) و (د) تبرهن بنفس الكيفية السابقة.

تمرين تدريبي 1

نعطي ثلاث نقط A ، B ، C لواحقها $1+2i$ ، $3+2i$ ، $3+5i$ على الترتيب.

1) ما هي لواحق الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ؟

2) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

الحل

1) $Z_{\overrightarrow{BA}} = z_A - z_B = 1+2i-3-2i = -2$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 3+5i-3-2i = 3i$

2) $ABCD$ متوازي أضلاع يعني أن $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ أي $Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_{\overrightarrow{AB}}$ أي $z_C - z_D = z_B - z_A$

ومنه نستنتج $3+5i-z_D=2$ إذن $z_D = 1+5i$

تمرين تدريبي 2

لتكن A، B، C، A'، B'، C' نقط من المستوي لواحقها على التوالي: $2-i$ ، $3+3i$ ، $4+i$ ، $3i$ ، $4-i$ ، $5+i$.

1) بين أن $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

ب) بين أن مركزي ثقل المثلثين ABC ، $A'B'C'$ متطابقان.

الحل

أ) $Z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{A'} - z_A = -2+4i$

$Z_{\overrightarrow{BB'}} = z_{B'} - z_B = 1-4i$

$Z_{\overrightarrow{CC'}} = z_{C'} - z_C = 1$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ هي $(-2+4i)+(1-4i)+1$ أي 0

وعليه $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

ب) لتكن G مركز ثقل ABC و G' مركز الثقل $A'B'C'$

$$Z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{9+3i}{3} = 3+i$$

$$Z_{G'} = \frac{z_{A'}+z_{B'}+z_{C'}}{3} = \frac{9+3i}{3} = 3+i$$

بما أن $Z_G = Z_{G'}$ فإن النقطة G منطبقة على G' .

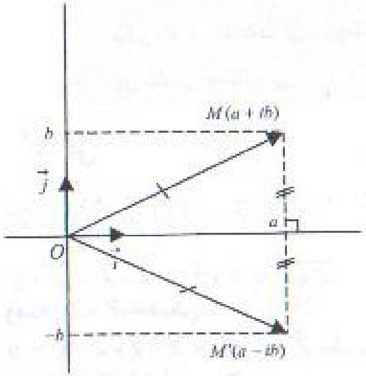
3 . مرافق عدد مركب

3 . 1 تعريف

مرافق العدد المركب $Z=a+ib$ مع a و b عددان حقيقيان، هو العدد المركب الذي نرمز له بـ $\overline{Z}$ و المعرف بـ $\overline{Z}=a-ib$ ويقرأ $\overline{Z}$ " Z بار"

التفسير الهندسي

النقطة M' ذات اللاحقة $\overline{Z}=a-ib$ هي نظيرة النقطة M ذات اللاحقة $Z=a+ib$ بالنسبة إلى محور الفواصل.



مثال .

مرافق $1+i$ هو $1-i$

مرافق $-i$ هو i

مرافق $-1-3i$ هو $-1+3i$

مرافق 2 هو 2

نتائج

Z و Z' عددان مركبان

1) $Z=Z'$ يكافئ $\overline{Z}=\overline{Z'}$

2) $\overline{\overline{Z}}=Z$ (مرافق مرافق Z هو Z)

3) إذا كان $Z=a+ib$ و a و b عددان حقيقيان فإن $Z+\overline{Z}=2a$ و $Z-\overline{Z}=2bi$

أي $Z+\overline{Z}=2\operatorname{Re}(Z)$ و $Z-\overline{Z}=2i\operatorname{Im}(Z)$

4) Z حقيقي يكافئ $Z=\overline{Z}$

Z تخيلي صرف يكافئ $Z+\overline{Z}=0$

5) إذا كان $Z=a+ib$ فإن $Z\overline{Z}=a^2+b^2$.

3 . 2 خواص

أ) مرافق مجموع عددين مركبين هو مجموع مرافقيهما أي $\overline{Z+Z'}=\overline{Z}+\overline{Z'}$

ب) مرافق جداء عددين مركبين هو جداء مرافقيهما أي $\overline{Z Z'}=\overline{Z}\times\overline{Z'}$

جـ) مرافق حاصل قسمة عددين مركبين هو حاصل قسمة مرافقيهما ؛

أي $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)}=\frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$ مع $Z'\neq 0$

الإثبات

ليكن $Z=a+ib$ و $Z'=a'+ib'$ عددان مركبان.

$\overline{Z+Z'}=\overline{(a+a')+i(b+b')}=(a+a')-i(b+b')$

$$= (a - i\,b) + (a' - i\,b') = \overline{Z} + \overline{Z'}$$

نبرهن (ب) و (جـ) بنفس الكيفية السابقة.

ملاحظة

نتائج الخاصية السابقة تمتد إلى مجموع n حدا أو جداء n عاملا وبالأخص $\overline{(Z^n)} = (\overline{Z})^n$

تمرين تدريبي 1

ليكن Z و Z' عددان مركبان حيث $Z = \frac{2+i}{1-i}$ و $Z' = \frac{2-i}{1+i}$

بين بدون حساب أن $Z+Z'$ حقيقي و $Z-Z'$ تخيلي صرف.

الحل

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{2+i}{1-i}\right)} = \frac{2-i}{1+i} = Z'$$

$$\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'} = Z' + \overline{\overline{Z}} = Z' + Z$$

ومنه $Z+Z'$ حقيقي

$$\overline{Z-Z'} + Z - Z' = \overline{Z} - \overline{Z'} + Z - Z' = Z' - Z + Z - Z' = 0$$

ومنه $Z - Z'$ تخيلي صرف.

تمرين تدريبي 2

حل المعادلتين ذواتي المجهول Z التاليتين:

أ) $3\overline{Z} + 2 - i = -i\overline{Z} - 1$ .... (I)

ب) $Z^2 - 3\overline{Z} + 2 = 0$ .... (II)

الحل

أ) المعادلة (I) تكافئ $3Z + 2 + i = iZ - 1$ بنقل المجاهيل إلى طرف والمعالم إلى طرف نجد:

$(i-3)Z = 2+i+1$ ومنه $Z = \frac{3+i}{i-3}$.

$$Z = \frac{3+i}{-3+i} \times \frac{-3-i}{-3-i} = \frac{(-9+1)+i(-3-3)}{(-3)^2+(-1)^2} = \frac{-8-6i}{10} = \frac{-4}{5} - \frac{3}{5}i$$

ب) بوضع $Z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان:

المعادلة المعطاة تكافئ $(x+iy)^2 - 3(x - iy) + 2 = 0$

وهذه الأخيرة تكافئ $\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ 2xy + 3y = 0 \end{cases}$ اي $\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ \text{و} \\ y(2x+3) = 0 \end{cases}$

وهذا يعني $\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ \left(x = \frac{-3}{2}\right) \text{ أو } (y=0) \end{cases}$

ومنه نستنتج $\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ \text{و} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$ أو $\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ \text{و} \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ \text{و} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y = \sqrt{\frac{17}{4}} \text{ أو } y = -\sqrt{\frac{17}{4}} \\ \text{و} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ \text{و} \\ y = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \text{و} \\ y = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x=1) \text{ أو } (x=2) \\ \text{و} \\ y = 0 \end{cases}$

إذن المعادلة المعطاة لها أربعة حلول هي $Z_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}i$ ، $Z_2 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}i$ ، $Z_3 = i$ و $Z_4 = 2i$

4. طويلة عدد مركب

تعريف

إذا كانت M صورة العدد المركب Z فإن الطول OM اي $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ يسمى طويلة العدد المركب Z والتي نرمز لها بـ $|Z|$.

إذا كان $Z = a + ib$ مع a و b عددان حقيقيان فإن طويلة العدد Z هو العدد الحقيقي الموجب أو المعدوم المعرف بـ $|Z| = OM = \sqrt{a^2+b^2}$ أو $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}}$.

مثال

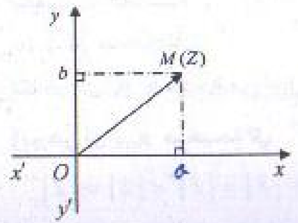
$$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

$$|3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

$$|3-2i| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$|2| = \sqrt{2^2+0^2} = 2$$

$$|-2| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$$



خواص

1) من اجل كل نقطتين A و B لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب

لدينا $|Z_B - Z_A| = AB$ و $|\overline{Z_A}| = |Z_A|$ و $Z_A \times \overline{Z_A} = |Z_A|^2$

من اجل كل شعاع $\vec{u}$ لدينا $|Z_{\vec{u}}| = \|\vec{u}\|$

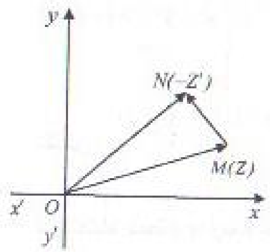
2) $Z = 0$ يكافئ $|Z| = 0$

3) $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$

4) $|Z.Z'| = |Z|.|Z'|$

5) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $|Z^n| = (|Z|)^n$.

6) من اجل $Z' \neq 0$ لدينا $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ و $\left|\frac{1}{Z'}\right| = \frac{1}{|Z'|}$



الإثبات

1) ليكن $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ و M لاحقتها $Z_B - Z_A$.

$AB = OM$ هذا معناه أن $AB = |Z_B - Z_A|$

- إذا كان $Z_A = a + ib$ فإن $\overline{Z_A} = a - ib$

$|\overline{Z_A}| = \sqrt{a^2 + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |Z_A|$

2) $|Z| = 0$ يكافئ $OM = O$ أي M منطبقة على O وعليه $Z = 0$.

3) M و N نقطتان لاحقتاهما Z و $-Z'$

حسب المتباينة الثلاثية لدينا $NM \leq OM + ON$

لكن $ON = |Z'|$ و $OM = |Z|$ و $NM = |Z - (-Z')| = |Z + Z'|$

وعليه $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$.

4) $|Z \times Z'|^2 = (Z \times Z') \times \overline{(Z \times Z')} = Z \times Z' \times \overline{Z} \times \overline{Z'}$

$= (Z \times \overline{Z})(Z' \times \overline{Z'}) = |Z|^2 \times |Z'|^2$

بما أن الطويلة عدد حقيقي موجب فإنه من المساواة $|Z \times Z'|^2 = |Z|^2 \times |Z'|^2$

نستنتج $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$.

5) نبرهن على هذه المساواة بالتراجع على n.

نسمي p_n الخاصية " $|Z^n| = |Z|^n$ "

p_0 و p_1 صحيحتان.

نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $|Z^n| = |Z|^n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $|Z^{n+1}| = |Z|^{n+1}$.

$|Z^{n+1}| = |Z^n \times Z| = |Z^n| \times |Z| = |Z|^n \times |Z| = |Z|^{n+1}$ ومنه p_{n+1} صحيحة

ومنه p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n.

6) إذا كان $ZZ' = 1$ فإن $|Z| \times |Z'| = 1$

وهذا يعني $|Z'| = \frac{1}{|Z|}$ اي $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$

$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \left|Z \times \frac{1}{Z'}\right| = |Z| \times \left|\frac{1}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$

تمرين تدريبي 1

عين طويلة كل عدد مركب من الأعداد التالية :

$-5i$ ، $(2+5i)(7-8i)$ ، $(3+4i)^5$ ، $\frac{3}{(2-i)^3}$ ، $\frac{1+3i}{-1-3i}$

✓ الحل

$|-5i| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

$|(2+5i)(7-8i)| = |2+5i|\ |7-8i| = \sqrt{29} \times \sqrt{113}$

$|(3+4i)^5| = |3+4i|^5 = (\sqrt{9+16})^5 = 5^5 = 3125$

$\left|\frac{3}{(2-i)^3}\right| = \frac{|3|}{|(2-i)^3|} = \frac{3}{|2-i|^3} = \frac{3}{(\sqrt{5})^3}\ \frac{3}{5\sqrt{5}}$

$\left|\frac{1+3i}{-1-3i}\right| = \frac{|1+3i|}{|-1-3i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$

تمرين تدريبي 2

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $1-i$ و $3+i$.

عين هندسيا ثم جبريا :

أ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث $|Z-1+i| = 3$

ب) مجموعة نقط M ذات اللاحقة Z بحيث $|Z-1+i| = |Z-3-i|$

✓ الحل

أ) - لدينا $|Z-1+i| = |Z-(+1-i)| = |Z - Z_A|$

لكن $|Z - Z_A| = AM$ إذن $AM = 3$

وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي دائرة مركزها A ونصف قطرها 3 .

- إذا كان $Z = x + iy$

فإن $|Z-1+i| = |x+iy-1+i| = |(x-1)+i(y+1)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$

لكن $|Z-1+i|=3$ ومنه $(x-1)^2+(y+1)^2=9$

إذن مجموعة النقط المطلوبة هي دائرة مركزها $A(1,-1)$ ونصف قطرها 3 .

ب) $|Z-1+i| = |Z-Z_A| = AM$

$|Z-3-i| = |Z-(3+i)| = |Z-Z_B| = BM$

بما أن $|Z-1+i|=|Z-3-i|$

فإن $AM=BM$

وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

$|Z-1+i| = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$

$|Z-3+i|=|(x+iy)-3-i| = |(x-3)+i(y-1)| = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$|Z-1+i|=|Z-3-i|$ يكافئ $(x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y-1)^2$

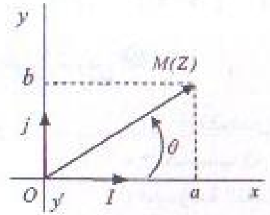
ومنه ينتج $x+y-2=0$

إذن مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$ ومعادلته هي $x+y-2=0$

5 - عمدة عدد مركب غير معدوم – الشكل المثلثي

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$ ، M نقطة منه تختلف عن المبدإ O لاحقتها العدد المركب الغير معدوم Z .

5 . 1 تعريف



عمدة عدد مركب غير معدوم Z

هي أي قيس معبر عنه بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{OI},\vec{OM})$

ونرمز لها بـ $arg(Z)$

ملاحظة

إذا كان θ قيس للزاوية $(\vec{OI},\vec{OM})$ فإن أي قيس آخر لهذه الزاوية يكون من الشكل $\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

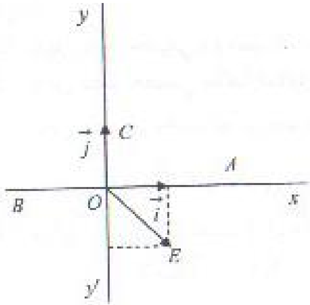
مثال -

2 ، -2 ، i ، $-i$ ، $1-i$ أعداد مركبة عين عمدة كل منها.

الحل ✓

- لتكن A لاحقة العدد 2 ومنه $A(2,0)$ و B لاحقة العدد -2 و C لاحقة i و D لاحقة $-i$ و E لاحقة $1-i$

$arg(2)=(\vec{OI},\vec{OA})=0+2k\pi$



$arg(-2)=(\vec{OI},\vec{OB})=\pi+2k\pi$

$arg(i)=(\vec{OI},\vec{OJ})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$arg(-i)=(\vec{OI},\vec{OD})=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

$arg(1-i)=(\vec{OI},\vec{OE})=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$

5 . 2 الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

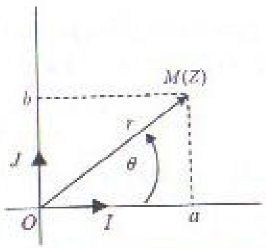
النقطة M ذات اللاحقة العدد المركب الغير معدوم $Z=a+ib$ إحداثياتها القطبية هي $[r,\theta]$ حيث $r=|Z|=OM$ و θ عمدة Z أي $\theta=arg(Z)$

إذن $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta]$ وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب Z .

الانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي والعكس

ليكن Z عدد مركب غير معدوم بحيث $Z=a+ib$ مع a و b عددان حقيقيان غير معدومين معا.

$|Z|=r$ و $arg(Z)=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$



- إذا عرفنا r و θ فإن $a=r\cos\theta$ و $b=r\sin\theta$
- إذا عرفنا a و b فإن $|Z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

و θ معرفة بـ $\begin{cases}\cos\theta=\frac{a}{r}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}\end{cases}$

ملاحظة

الكتابة $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ لا تمثل الشكل المثلثي في حالة $r<0$

مثال -

1) إذا كان $Z=1+i$ فإن $|Z|=\sqrt{2}$ و θ تحقق $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

اي $\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن $Z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) إذا كان $Z=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ فإن $Z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

خواص

1) كل عدد حقيقي موجب تماما عمدته تساوي 0
2) كل عدد حقيقي سالب تماما عمدته تساوي π
3) كل عدد مركب تخيلي صرف جزءه التخيلي موجب تماما عمدته $\frac{\pi}{2}$.

وكل عدد مركب تخيلي صرف جزءه التخيلي سالب تماما عمدته $-\frac{\pi}{2}$.

4) ليكن Z و Z' بحيث $Z=[r,\theta]$ و $Z'=[r',\theta']$

$Z=Z'$ يكافئ $(r=r')$ و $\theta'=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

5 . 3 العمدة والعمليات

1) $arg\left(\overline{Z}\right)=-arg\,(Z)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ و $arg\,(-Z)=arg\,(Z)+\pi$

2) عمدة جداء عددين مركبين هي مجموع عمدتيهما اي :

$arg\,(Z\times Z)=arg\,(Z)+arg\,(Z')+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

3) عمدة مقلوب عدد مركب غير معدوم هي نظير عمدة هذا العدد اي :

$arg\left(\frac{1}{Z}\right)=-arg\,(Z)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

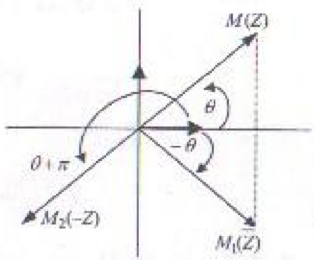
4) عمدة حاصل قسمة عددين مركبين غير معدومين هي الفرق بين عمدة البسط و عمدة المقام اي :

$arg\left(\frac{Z}{Z}\right)=arg\,(Z)-arg\,(Z')+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

5) من اجل كل عدد صحيح n :

$arg\,(Z^n)=n\,arg\,(Z)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

الإثبات



1) بما ان M_1 نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل فإن :

$\left(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM_1}\right)=-\left(\overrightarrow{OI}\ ,\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

لكن $\left(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right)=arg\,(Z)$ و $\left(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM_1}\right)=arg\,(\overline{Z})$

إذن $arg\,(\overline{Z})=-arg\,(Z)+2k\pi$

- بما ان M_2 نظيرة M بالنسبة إلى المبدأ O

$$\left(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM_2}\right)=\left(\overrightarrow{OI}\ ,\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\ ,\overrightarrow{OM_2}\right)+2k\pi$$

اي $arg\,(-Z)=arg\,(Z)+\pi+2k\pi$

2) $Z=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $Z'=r'\,(\cos\theta'+i\sin\theta')$ مع $r>0$ و $r'>0$

$$ZZ'=rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i\,(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')\right]$$

$$ZZ'=rr'\left[\cos\,(\theta+\theta')+i\sin\,(\theta+\theta')\right]$$

وبما أن $r'r>0$ فإن $\theta+\theta'$ هي عمدة العدد ZZ'

إذن $arg\,(ZZ')=arg\,(Z)+arg\,(Z')+2k\pi$

3) إذا كان $ZZ'=1$ فإن $arg\,(ZZ')=0+2k\pi$

اي $arg\,(Z)+arg\,(Z')=0+2k\pi$

وبالتالي $arg\,(Z')=-arg\,(Z)+2k\pi$

4) $arg\left(\frac{Z}{Z'}\right)=arg\left(Z\times\frac{1}{Z'}\right)=arg\,(Z)+arg\left(\frac{1}{Z'}\right)+2k\pi$

$=arg\,(Z)-arg\,(Z')+2k\pi$

5) نبرهن على صحة المساواة بالتراجع على n $(n\geq 0)$ في حالة n سالب نضع $n=-n'$.

تمرين تدريبي

- عين الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي للعدد $Z=(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ثم استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

✓ الحل

$$Z=(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(1-\sqrt{3}\right)$$

$$|Z|=|1+i|\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$$

لدينا $arg\,(Z)=arg\,(1+i)+arg\left(1-i\sqrt{3}\right)$

لتكن θ عمدة $1+i$ و θ' عمدة $1-i\sqrt{3}$

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\begin{cases}\cos\theta'=\frac{1}{2}\\ \sin\theta'=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta'=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$

وبالتالي $arg\,(Z)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi=-\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

إذن $Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$

بالمطابقة بين الشكل الجبري والمثلثي نجد
$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=1+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3} \end{cases}$$

ومنه
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

وبما أن $\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}$

فإن $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

5 . 4 العمدة و الهندسة

خواص

1) من أجل كل نقطتين مختلفتين A و B لدينا ، $arg(Z_B-Z_A)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)+2k\pi$

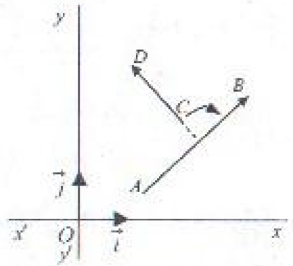
2) من أجل كل النقط A ، B ، C ، D بحيث $A\neq B$ و $C\neq D$

لدينا $arg\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_D-Z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right)+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

3) إذا كان $\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_C}=k$ مع $k\in\mathbb{R}$ فإن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CB}$

الإثبات

$$arg\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_D-Z_C}\right)=arg(Z_B-Z_A)-arg(Z_D-Z_C)+2k\pi \ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{CD}\right)+2k\pi$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OI}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{CD}\right)+2k\pi$$
$$=-\left[\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{CD}\right)\right]+2k\pi$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)+2k\pi$$
$$=\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right)+2k\pi$$



تمرين تدريبي

نعطي في المستوي المركب النقط A ، B ، C لواحقها على التوالي :
$1+i$ ، $3+i$ ، $2+i\left(\sqrt{3}+1\right)$
- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

✓ الحل

لإثبات أن المثلث متقايس الأضلاع يكفي أن نثبت أنه متقايس الساقين وأن إحدى زواياه الموجهة قيسها $\frac{\pi}{3}$ أو $\frac{-\pi}{3}$

لنبين أن $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ طويلته 1 وعمدته $\frac{\pi}{3}$ أو $\frac{-\pi}{3}$.

$$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\frac{2+i\left(\sqrt{3}+1\right)-1-i}{3+i-1-i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$$

ومنه $|Z_C-Z_A|=|Z_B-Z_A|$ أي $AC=AB$

$$arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)=arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

أي $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

5 . 5 دستور موافر

من أجل كل عدد حقيقي θ ومن أجل كل عدد صحيح n :
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

مثال - ♦

عين الشكل الجبري للعدد المركب $Z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50}$

✓ الحل

نضع $Z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ عندئذ $|Z|=1$ و $arg(Z)=\frac{\pi}{3}$

إذن $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ومنه $Z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{50}=\cos 50\frac{\pi}{3}+\sin 50\frac{\pi}{3}$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

تمرين تدريبي

A ، B ، C ، D نقط لواحقها $3-2i$ ، $-3-2i$ ، $5+2i$ ، $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$

قارن بين $\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_D}$ و $\frac{Z_A-Z_D}{Z_B-Z_D}$.

ماذا يمكننا القول حول الزاويتين $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right)$ ؟

✓ الحل

$$\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_D}=\frac{5+2i-\frac{3}{2}+\frac{-5}{2}i}{3-2i-\frac{3}{5}-\frac{5}{2}i}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}=\frac{7-i}{3-9i}$$

$$=\frac{(7-i)(3+9i)}{90}=\frac{30+60i}{90}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

$$\frac{Z_A-Z_D}{Z_B-Z_D}=\frac{3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{-3-2i-\frac{3}{5}-\frac{5}{2}i}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i}=\frac{3-9i}{-9-9i}$$

$$=\frac{1-3i}{-3-3i}\times\frac{-3+3i}{-3+3i}=\frac{6+12i}{18}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

. بما أن العددين $\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_D}$ و $\frac{Z_A-Z_D}{Z_B-Z_D}$ متساويان

و $arg\left(\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_D}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$ و $arg\left(\frac{Z_A-Z_D}{Z_B-Z_D}\right)=\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right)$

فإن $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$

6 . الكتابة الأسية لعدد مركب - ترميز أولر

6 . 1 الكتابة الأسية

كل عدد مركب طويلته 1 نستطيع كتابته على الشكل $Z=\cos\theta+i\sin\theta$

لتكن U مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها 1 و f الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي θ

العدد المركب $f(\theta)$ من U حيث $f(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$

لنبين أنه من أجل كل عددين حقيقيين θ و θ' لدينا :

$$f(\theta+\theta')=f(\theta)\times f(\theta')$$

لدينا $f(\theta+\theta')=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')$

$$f(\theta)\times f(\theta')=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$$

$$=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')$$

ومنه نستنتج أن $f(\theta+\theta')=f(\theta)f(\theta')$.

بما أن الدالة الأسية ذات الأساس (هـ) تحول المجاميع إلى جداءات والدالة f تحقق هذه الخاصية

هذا ما يقودنا إلى الترميز التالي $f(\theta)=e^{i\theta}$ أي $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

تعريف 1

العدد المركب الذي طويلته 1 وعمدته θ نرمز له بـ $e^{i\theta}$ ونكتب $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

مثال .

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$$

تعريف 2

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم Z عمدته θ هو $Z=|Z|e^{i\theta}$

مثال .

- إذا كان $Z=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن الكتابة الأسية له هي $Z=2e^{i\frac{\pi}{2}}$
- الكتابة الأسية للعدد $Z=\left[\frac{1}{3},3\frac{\pi}{2}\right]$ هي $Z=\frac{1}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$

ملاحظة

بما أن $|\overline{Z}|=|Z|$ و $arg(\overline{Z})=-arg(Z)$

فإننا نستنتج من $Z=|Z|e^{i\theta}$ أن $\overline{Z}=|Z|e^{-i\theta}$

6 . 2 قواعد الحساب باستعمال الشكل الأسي

Z و Z' عددان مركبان حيث $Z=[r,\theta]$ و $Z'=[r',\theta']$ و $r>0$ و $r'>0$:

1) $\left(re^{i\theta}\right)\left(r'e^{i\theta'}\right)=rr'e^{i(\theta+\theta')}$

2) $\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

3) $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

4) $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$

5) $\left(re^{i\theta}=r'e^{i\theta'}\right)$ يكافئ $(r=r'$ و $\theta=\theta'+2k\pi)$

مثال - ♦

ليكن Z و Z' عددان مركبان حيث $Z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $Z'=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$ZZ'=(2\times 3)e^{-i\frac{\pi}{3}}\ e^{i\frac{\pi}{4}}=6e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}=6e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{Z}{Z'}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3}e^{i\left(7\frac{\pi}{12}\right)}$$

دستوري موافر و أولر

- من أجل كل عدد حقيقي θ ومن أجل كل عدد صحيح n لدينا $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$
- بما أن $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ فإننا نستنتج :

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) \quad \text{و} \quad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$$

تمرين تدريبي

اعط الشكل الأسي للأعداد المركبة الآتية $\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}$ ، $\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$ ، $(1-i)^{14}$

✓ الحل

$$\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}=-e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i4\frac{\pi}{3}}=e^{-i\frac{5\pi}{3}}$$

بما أن $1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ فإن $(1-i)^{14}=\left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{14}=2^7\times e^{\frac{-7}{2}\pi i}=128\ e^{\frac{-3}{2}\pi i}$

لأن $\frac{-7}{2}\pi=-2\pi-\frac{-3}{2}\pi$

6 . 3 الكتابة الخطية لـ $\sin^n x$ و $\cos^n x$

- تعني بالكتابة الخطية التعبير عن $\cos^n x$ أو $\sin^n x$ أو بصفة عامة عن مجموع حدود من الشكل $a\cos^n x\sin^p x$ بواسطة مجموع حدود من الشكل $b\cos qx$ أو $c\sin qx$ مع a ، b ، c أعداد حقيقية و n ، p ، q أعداد طبيعية.
- فائدة هذه الكتابة تظهر جليا في تعيين الدوال الأصلية وحساب التكاملات.
- ليكن Z عدد مركب طويلته 1 وعمدته x .

إذن $Z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$ و $\overline{Z}=e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

ومنه نستنتج $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ و $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

و $\cos^n x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ و $\sin x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$

$$e^{inx}+e^{-inx}=2\cos(nx)\ \dots\dots\dots\dots\ (1)$$

$$e^{inx}-e^{-inx}=2i\sin(nx)\ \dots\dots\dots\dots\ (2)$$

لنشر $\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ أو $\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$ نستعمل دستور ثنائي الحد والمساوتين (1) و (2)

مثال - ♦

أوجد العبارة الخطية لكل من $\cos^5 x$ و $\sin^5 x$

✓ الحل

1) لدينا $\cos^5 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$

$$\cos^5 x=\frac{1}{2^5}\left[e^{i5x}+5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}+10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}+e^{-5ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^5}\left[\left(e^{5ix}+e^{-5ix}\right)+10\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)+5\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^5}\left[2\cos 5x+20\cos x+10\cos 3x\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x)\right]$$

2) لدينا $\sin^5 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)$

$$\sin^5 x=\frac{1}{i^5 2^5}=\left[e^{5ix}-5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}-10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}-e^{-5ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^5 i}\left[\left(e^{5ix}-e^{-5ix}\right)-5\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^5 i}\left[2i\sin(5x)-10i\sin(3x)+20i\sin(x)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\right]$$

تمرين تدريبي 1

ليكن $Z=5e^{i\frac{\pi}{4}}$ بين أن Z^{52} حقيقي ثم عين إشارته.

✓ الحل

$$Z^{52}=\left(5e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{52}=5^{52}\times e^{i\frac{52}{4}}$$

ومنه $arg\left(Z^{52}\right) = \frac{52\pi}{4}$ ولكن $52\frac{\pi}{4} = 13\pi = \pi + 6(2\pi)$

إذن $arg\left(Z^{52}\right) = \pi$ ومنه نستنتج ان $Z^{52} = 5^{52} e^{i\pi} = -5^{52}$

ومنه فإن إشارة Z^{52} سالبة.

تمرين تدريبي 2

θ عدد حقيقي من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ اعط الكتابة الأسية للعدد المركب $Z = 1 + e^{i\theta}$

الحل

لدينا $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ومنه $Z = 1+\cos\theta + i\sin\theta$

لكن $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ و $\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

إذن $Z = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

بما أن $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\frac{\theta}{2} > 0$

إذن $Z = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

7. معادلات من الدرجة الثانية ذات المجهول Z بمعادلات حقيقية

مبرهنة

لتكن المعادلة $aZ^2+bZ+c=0$ ذات المجهول المركب Z و a ، b ، c أعداد حقيقية مع $a\neq0$.

مميز هذه المعادلة هو العدد الحقيقي $\Delta = b^2-4ac$

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة لها حلان حقيقيان مختلفان هما $Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة لها حل مضاعف $Z_0 = \frac{-b}{2a}$
- إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة لها حلان مركبان مترافقان $Z' = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $Z'' = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

الإثبات

المعادلة من الدرجة الثانية لها حلان في المجموعة $\mathbb{C}$ مهما كانت المعاملات الحقيقية a ، b ، c و $a\neq0$.

نضع $f(Z) = aZ^2+bZ+c$ مع $a\neq 0$.

الشكل النموذجي لـ $f(Z)$ هو $f(Z) = a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta>0$ نضع $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$

وبالتالي $f(Z) = a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt\Delta}{2a}\right)^2\right] = a\left(Z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt\Delta}{2a}\right)\left(Z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt\Delta}{2a}\right)$

$f(Z)=0$ يكافئ $\left(Z = \frac{-b+\sqrt\Delta}{2a}\right)$ أو $\left(Z=\frac{-b-\sqrt\Delta}{2a}\right)$

- إذا كان $\Delta=0$ فإن $f(Z) = a\left(Z+\frac{b}{2a}\right)^2$

$f(Z)=0$ يكافئ $Z = \frac{-b}{2a}$

- إذا كان $\Delta<0$ فإن $-\Delta>0$ وبالتالي نستطيع وضع $-\Delta = \left(\sqrt{-\Delta}\right)^2$

وبالتالي $f(Z) = a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$$= a\left[Z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]\left[Z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]$$

$f(Z)=0$ يكافئ $\left(Z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$ أو $\left(Z = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$

مثال -

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين :

أ) $Z^2+Z+1=0$

ب) $Z^2+3Z+2=0$

الحل

أ) $\Delta = 1^2-4(1)(1) = -3$

$\Delta<0$ ومنه المعادلة (أ) لها حلان مركبان هما $Z_1 = \frac{-1+i\sqrt3}{2}$ ، $Z_2 = \frac{-1-i\sqrt3}{2}$

ب) $\Delta = 9-4(1)(2)=1$ ومنه المعادلة لها حلان حقيقيان مختلفان هما :

$Z_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ ، $Z_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$

خاصية

ليكن $f(Z) = aZ^2+bZ+c$ حيث a و b ، c أعداد حقيقية مع $a\neq0$ و $\Delta = b^2-4ac$.

- إذا كان $\Delta\neq0$ فإن $aZ^2+bZ+c = a(Z-Z_1)(Z-Z_2)$ حيث Z_1 ، Z_2 جذرين مختلفين لـ $f(Z)$.
- إذا كان $\Delta=0$ فإن $f(Z) = a(Z-Z_0)^2$ حيث Z_0 الجذر المضاعف لـ $f(Z)$.

8. الجذرين التربيعيين لعدد مركب غير معدوم

8.1 تعريف

ليكن $z=a+ib$ عدد مركب غير معدوم

الجذر التربيعي للعدد المركب z هو العدد المركب Z الذي يحقق $Z^2=z$.

8.2 إيجاد الجذرين التربيعيين

تعيين الجذرين التربيعيين يؤول إلى حل المعادلة ذات المجهول Z التالية $Z^2=z$.

$Z=x+iy$ ومنه $Z^2=(x^2-y^2)+i2xy$.

$Z^2=z$. يكافئ $\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$

بما أن $|Z^2|=|z|$ فإن $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$

إذن من المساواة $Z^2=z$ نستنتج $\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\\x^2-y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$ .... (I)

بعد حل الجملة (I) ذات المجهولين x و y نكون قد عينا الجذرين التربيعيين لـ z .

مثال - ♦

عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=3-4i$

الحل ✓

ليكن $Z=x+iy$ جذر تربيعي لـ z ومنه $\begin{cases}x^2-y^2=3 \;...\;(1)\\2xy=-4 \;...\;(2)\\x^2+y^2=5 \;...\;(3)\end{cases}$ .... (I)

بجمع (1) و (3) طرف لطرف نجد $2x^2=8$ ومنه $x^2=4$

$x^2=4$ يكافئ $(x=2)$ و $(x=-2)$.

- إذا كان $x=2$ فإن $y=\frac{-4}{2x}=-1$
- إذا كان $x=-2$ فإن $y=\frac{-4}{2x}=1$

إذن الجذرين التربيعيين للعدد المركب z هما $Z_1=2-i$ و $Z_2=-2+i$.

8.3 حل معادلات من الدرجة الثانية بمعاملات مركبة

$f(Z)=aZ^2+bZ+c$ مع a و b ، c أعداد مركبة و $a\neq0$.

بما أن القواعد في $\mathbb{C}$ هي نفسها في $\mathbb{R}$ فإن مميز $f(Z)$ هو $\Delta=b^2-4ac$.

الشكل النموذجي لـ $f(Z)$ هو $f(Z)=a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

ليكن δ الجذر التربيعي لـ Δ ومنه $\Delta=\delta^2$

وبالتالي $f(Z)=a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\delta^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(Z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\right]$

إذن المعادلة $f(Z)=0$ لها حلان هما $Z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ و $Z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$

مثال - ♦

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين :

أ) $iZ^2-iZ-3-i=0$

ب) $Z^2+(3-2i)Z+5-5i=0$

الحل ✓

أ) $\Delta=(-i)^2-4(i)(-3-i)=-5+12i$

نبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ

ليكن $\delta=a+ib$ جذر تربيعي لـ Δ ومنه $\delta^2=\Delta$

وعليه نستنتج $\begin{cases}a^2-b^2=-5 \;.....(1)\\2ab=12 \;......\;(2)\\a^2+b^2=13 \;......(3)\end{cases}$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد $a^2=4$ ومنه $(a=2)$ أو $(a=-2)$

لما $a=2$ نجد $b=3$ ولما $a=-2$ نجد $b=-3$

ومنه فإن الجذرين التربيعيين لـ Δ هما $\delta=2+3i$ و $\delta'=-2-3i$

ليكن Z_1 ، Z_2 حلان للمعادلة (أ) :

إذن $Z_1=\frac{i+2+3i}{2i}=\frac{2+4i}{2i}=\frac{-2i+4}{2}=2-i$

$Z_2=\frac{i-2-3i}{2i}=\frac{-2-2i}{2i}=\frac{2i-2}{2}=-1+i$

ب) $\Delta=(3-2i)^2-4(1)(5-5i)=9-12i-4-20+20i=-15+8i$

ليكن δ جذر تربيعي لـ Δ بحيث $\delta=a+ib$

المساواة $\delta^2=\Delta$ تعني $\begin{cases}a^2-b^2=-15 \;...\;(1)\\2ab=8 \;.........\;(2)\\a^2+b^2=17 \;.....\;(3)\end{cases}$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد $2a^2=2$ ومنه $a^2=1$ أي $a=1$ أو $a=-1$

لما $a=1$ نجد $b=4$ ولما $a=-1$ نجد $b=-4$

ومنه فإن الجذرين التربيعيين لـ Δ هما $1+4i$ و $-1-4i$

ليكن Z_1 و Z_2 حلان للمعادلة (ب) :

$$Z_1=\frac{-3+2i+1+4i}{2}=-1+3i \quad \text{و} \quad Z_2=\frac{-3+2i-1-4i}{2}=-2-i$$

9. المعادلات من الشكل $p(Z)=0$ حيث p كثير حدود معاملاته حقيقية

تعريف

القول أن p كثير حدود مركب بمعاملات حقيقية يعني أن p هو عبارة عن دالة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ من الشكل $Z \mapsto a_n Z^n+a_{n-1}Z^{n-1}+\dots+a_1 Z+a_0$ مع a_0 ، a_1 ،.....، a_n أعداد حقيقية.

لما $a_n \neq 0$ نقول أن p من الدرجة n.

مبرهنة

- إذا كان Z_0 جذرا لكثير الحدود p من الدرجة n أي $(p(Z_0)=0)$ فإنه يوجد كثير حدود q من الدرجة $n-1$ بمعاملات حقيقية بحيث من أجل كل عدد مركب Z يكون
$p(Z)=(Z-Z_0)q(Z)$
- كل كثير حدود من الدرجة n له n جذرا في $\mathbb{C}$ مختلفة أو متساوية

وهذه النتائج تبقى صحيحة حتى ولو كانت المعاملات ليست حقيقية.

مثال .

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود p المعرف كما يلي $p(Z)=2Z^3-3Z^2+2Z-1$

1) احسب $p(1)$ ثم بين انه يوجد $q(Z)$ بحيث من اجل كل Z من $\mathbb{C}$
$p(Z)=(Z-1)q(Z)$
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(Z)=0$
3) نسمي Z_1 ، Z_2 الحلين الآخرين للمعادلة $p(Z)=0$ ولتكن النقط A ، B ، C لواحقها 1 ، Z_1 ، Z_2 على الترتيب. احسب $\left|\frac{Z_1-Z_0}{Z_2-Z_0}\right|$ ماذا تستنتج ؟

الحل

1) $p(1)=2-3+2-1=0$ ومنه نستنتج أن 1 جذرا لـ $p(Z)$

بما أن $p(Z)$ من الدرجة الثالثة فإن $q(Z)$ من الدرجة الثانية وعليه من أجل كل Z من $\mathbb{C}$:

$$p(Z)=(Z-1)(aZ^2+bZ+c)=aZ^3+(b-a)Z^2+(c-b)Z-c$$

بالمطابقة مع عبارة $p(Z)$ نجد :

$$\begin{cases}a=2\\ b-a=-3\\ c-b=2\\ -c=-1\end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases}a=2\\ b=-1\\ c=1\end{cases}$$

إذن $p(Z)=(Z-1)(2Z^2-Z+1)$

2) $p(Z)=0$ يكافئ $\begin{cases}Z-1=0\\ \text{أو}\\ 2Z^2-Z+1=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}Z=1\\ 2Z^2-Z+1=0\end{cases}$

نحل المعادلة $2Z^2-Z+1=0$ .... (*)

$\Delta=1-4(2)(1)=-7$ ومنه فإن المعادلة (*) لها حلان هما $Z_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$ ، $Z_2=\frac{1-i\sqrt{7}}{4}$

إذن المعادلة $p(Z)=0$ لها ثلاثة حلول هي 1 ، Z_1 ، Z_2.

3) $\left|\frac{Z_1-Z_0}{Z_2-Z_0}\right|=\left|\frac{-3+i\sqrt{7}}{-3-i\sqrt{7}}\right|=\frac{\sqrt{9+7}}{\sqrt{9+7}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16}}=1$

ولدينا من جهة أخرى $\left|\frac{Z_1-Z_0}{Z_2-Z_0}\right|=\frac{AB}{AC}$

إذن $\frac{AB}{AC}=1$ وهذا يعني أن ABC مثلث متقايس الساقين راسه الأساسي هو A .

الحلول المرافقة

مبرهنة

p كثير حدود مركب بمعاملات حقيقية.

إذا قبلت المعادلة $p(z)=0$ حلا مركبا z_0 فإن مرافقه $\overline{z_0}$ هو أيضا حلا لهذه المعادلة

وعندئذ نكتب $p(z)=(z-z_0)(z-\overline{z_0})q(z)$

الإثبات

نعتبر كثير الحدود $p(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}\dots+a_1 z+a_0$

و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية مع $a_n \neq 0$

نفرض أن z_0 حلا للمعادلة $p(z)=0$ ونبين أن $\overline{z_0}$ حلا أيضا للمعادلة $p(z)=0$.

$p(z)=0$ يعني $p(\overline{z_0})=0$ وهذا يعني أن $\overline{a_n z_0^n+a_{n-1}z^{n-1}\dots+a_1 z_1+a_0}=0$

وحسب خواص مرافق مجموع أعداد مركبة نستنتج $a_n\overline{z_0}^n+a_{n-1}\overline{z_0}^{n-1}\dots+a_1\overline{z_0}+a_0=0$

وهذا يعني أن $\overline{z_0}$ حل للمعادلة $p(z)=0$

مثال .

$p(z)$ كثير حدود مركب حيث $p(z)=z^3-z^2+z-1$

بين أن $z_0=i$ حل للمعادلة $p(z)=0$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$

الحل

$p(z_0)=i^3-i^2+i-1=-i+1+i-1=0$

ومنه فإن i حل للمعادلة $p(z)=0$

وحسب المبرهنة السابقة فإن $-i$ حل أيضا لـ $p(z)=0$

وعليه من أجل كل z من $\mathbb{C}$

يكون $p(z)=(z-i)(z+i)q(z)$

بما أن $q(z)$ من الدرجة الأولى فإنه يكتب على الشكل $az+b$

وعليه $p(z)=(z-i)(z+i)(az+b)$

بعد النشر و المطابقة نجد $a=1$ ، $b=-1$

إذن $p(z)=(z-i)(z+i)(z-1)$

$p(z)=0$ يكافئ $(z=i)$ أو $(z=-i)$ أو $(z=1)$

تطبيقات نموذجية

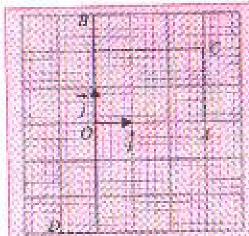
تطبيق 1

تعيين لواحق نقط وأشعة

استعمل الشكل المقابل لتعيين :

أ) لواحق النقط A ، B ، C ، D

ب) لواحق الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AD}$



✓ الحل

أ) $z_A=3$ ، $z_B=3i$ ، $z_C=3+2i$ ، $z_D=-1-3i$

ب) $z_{\overrightarrow{OA}}=z_A=3$ ، $z_{\overrightarrow{OB}}=z_B=3i$ ، $z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=3-i$ ، $z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=-3-3i$

تطبيق 2

تطبيق خاصية تساوي عددين مركبين

عين العددين الحقيقيين x و y بحيث :

أ) $2x-y+i(x+3y)=1-2i$ .... (1)

ب) $3x+2iy+i(x-iy)=i$ .... (2)

✓ الحل

أ) من المساواة (1) نستنتج $\begin{cases}2x-y=1\\x+3y=-2\end{cases}$ .... (I)

بعد حل الجملة (I) نجد $\begin{cases}x=\dfrac{1}{7}\\y=\dfrac{-5}{7}\end{cases}$

ب) بعد تبسيط المساواة (2) نجد $(3x+y)+i(x+2y)=i$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}3x+y=0\\x+2y=1\end{cases}$ .... (II)

بعد حل الجملة (II) نجد $\begin{cases} x=\frac{-1}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}$

تطبيق 3 تعيين مجموعة النقط

من اجل كل عدد مركب z حيث $z=x+iy$ نضع $f(z)=z^2-z+1$
مع x و y عددين حقيقيين

أ) اكتب $f(z)$ على الشكل الجبري

ب) ماهي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $f(z)$ حقيقي ؟

✓ الحل

أ) $f(z)=(x+iy)^2-(x+iy)+1=x^2-y^2+2ixy-x-iy+1$
$=(x^2-y^2-x+1)+i(2xy-y)$

ب) $f(z)$ حقيقي يعني أن $2xy-y=0$ اي $\begin{cases} y=0 \\ \text{او} \\ 2x-1=0 \end{cases}$

ومنه مجموعة النقط M بحيث $f(z)$ حقيقي هي إتحاد مستقيمين (d_1) و (d_2)
معادلتيهما (d_1) : $y=0$ و (d_2) : $2x-1=0$

تطبيق 4 تعيين الجزء الحقيقي والتخيلي لعدد مركب

أ) عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i}$

ب) استنتج الجزء الحقيقي و التخيلي للعددين $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ و $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{17}$

✓ الحل

أ) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{1^2+1^2}=\frac{1-2i-1}{2}=-i$

ب) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}=(-i)^{10}=i^{10}=i^8\times i^2=-1$ لأن $i^4=1$ و $i^2=-1$

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{17}=(-i)^{17}=-i^{17}=-i^{16}\times i=-i$

تطبيق 5 حل معادلات في المجموعة $\mathbb{C}$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ) $(z-2)(iz-1)=0$ ، ب) $iz+2-i=0$ ، جـ) $z^2+9=0$

د) $\frac{1}{z+i}=3+i$ ، هـ) $\frac{z+3i}{z-3}=i$ ، و) $z^2-9=0$

✓ الحل

أ) $(z-2)(iz-1)=0$ تكافئ $z-2=0$ او $iz-1=0$

اي $z=2$ او $z=\frac{1}{i}=-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (أ) هي $S=\{2,-i\}$

ب) المعادلة $iz+2-i=0$ تكافئ $iz=i-2$

ومنه نستنتج $z=\frac{-2+i}{i}=1+2i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{1+2i\}$

جـ) $z^2+9=0$ يكافئ $z^2=-9=(3i)^2$

ومنه المعادلة $z^2+9=0$ لها حلان هما $z_1=3i$ و $z_2=-3i$

فتكون مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{3i,-3i\}$

د) المعادلة $\frac{1}{z+i}=3+i$ تكافئ $z+i=\frac{1}{3+i}$ اي $z=\frac{1}{3+i}-i$

ومنه $z=\frac{3-i}{(3+i)(3-i)}-i=\frac{3-i}{3^2+(-1)^2}-i=\frac{3}{10}-\frac{13}{10}i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{3}{10}-\frac{13}{10}i\right\}$

هـ) المعادلة $\frac{z+3i}{z-3}=i$ تكافئ $(1-i)z=-6i$ يكافئ $z=\frac{-6i}{1-i}$

بما أن $\frac{-6i}{1-i}=\frac{-6i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-6i+6}{2}=3-3i$ فإن $z=3-3i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{3-3i\}$

و) $z^2-9=0$ تعني $z^2=3^2$ ومنه $z=3$ او $z=-3$

ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{3,-3\}$.

تطبيق 6 حل جملة معادلتين

حل الجملتين التاليتين $\begin{cases} 2z+z'=1 \\ z-iz'=i \end{cases}$ ، $\begin{cases} z-3z'=1+i \\ 2z+iz'=1 \end{cases}$

الحل

أ) $\begin{cases} 2z + z' = 1 \;...\; (1) \\ z - i z' = i \;...\; (2) \end{cases}$

من المساواة (2) نجد $z = i z' + i$

نعوض z في (1) نجد $2(i z' + i) + z' = 1$

وبالتبسيط نجد $(2i+1)z' = 1 - 2i$

ومنه $z' = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)^2}{5} = \frac{1-4-4i}{5} = \frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i$

وعليه نجد $z = i\left(\frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i\right) + i = \frac{-3}{5}i + \frac{4}{5} + i = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

ب) $\begin{cases} z - 3z' = 1 + i \;...\; (1) \\ 2z + i z' = 1 \;...\; (2) \end{cases}$

من المساواة (2) نجد $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i z'$

نعوض z في (1) نجد $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i z' - 3z' = 1 + i$

وبالتبسيط نجد $\left(-\frac{1}{2}i - 3\right)z' = \frac{1}{2} + i$ ومنه $z' = \frac{\frac{1}{2}+i}{-\frac{1}{2}i - 3}$

لكن $\frac{\frac{1}{2}+i}{-3-\frac{1}{2}i} = -\frac{8}{37} - \frac{11}{37}i$ ومنه $z' = -\frac{8}{37} - \frac{11}{37}i$

إذن $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i z' = \frac{13}{37} + \frac{4}{37}i$

تطبيق 7 — تعيين مجموعة النقط

ليكن z عددا مركبا حيث $z = x + iy$ وليكن Z عددا مركبا حيث $Z = \frac{z}{1+i}$

أ) اكتب Z على الشكل الجبري.

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث Z حقيقي.

جـ) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z تخيلي صرف.

الحل

أ) $Z = \frac{x+iy}{1+i} = \frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{x - ix + iy + y}{2} = \frac{x+y}{2} - i\frac{(x-y)}{2}$

ب) Z حقيقي يعني أن $\frac{x-y}{2} = 0$ أي $y = x$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $y = x$

جـ) Z تخيلي صرف هذا معناه $\frac{x+y}{2} = 0$ أي $y = -x$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $y = -x$

تطبيق 8 — المتتالية الدورية والمتتالية الهندسية

1) اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد i^6 ، i^5 ، i^4 ، i^2

2) بين أن متتالية الأعداد المركبة (z_n) المعرفة بـ $z_n = i^n$ دورية يطلب إيجاد دورها.

3) نضع $S_n = 1 + i + i^2 + ... + i^n$

أ) احسب S_1 و S_2 ، S_3 ، S_4 ، S_5 .

ب) تحقق أن $S_n - i S_n = 1 - i^{n+1}$

جـ) بسط S_n في كل حالة من الحالات التالية :

$n = 4p$ ، $n = 4p+1$ ، $n = 4p+2$ ، $n = 4p+3$ مع $p \in \mathbb{N}$.

الحل

1) $i^2 = -1$ ، $i^4 = (i^2)^2 = 1$ ، $i^5 = i^4 i = i$ ، $i^6 = i^4 i^2 = -1$

2) (z_n) دورية دورها T هذا معناه أنه من أجل n من $\mathbb{N}$ لدينا $z_{n+T} = z_n$

$z_{n+T} = z_n$ يكافئ $i^{n+T} = i^n$ أي $i^T = 1$

ومن السؤال الأول نجد $T = 4$ لأن الدور هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم.

3) الأعداد 1 ، i ، i^2 ، ... ، i^n حدود لمتتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها i

ومنه $S_n = \frac{1-i^{n+1}}{1-i} = \frac{(1-i^{n+1})(1+i)}{2}$

أ) $S_1 = \frac{(1-i^2)(1+i)}{2} = 1 + i$

$S_2 = \frac{(1-i^3)(1+i)}{2} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1-1+2i}{2} = i$

$S_3 = \frac{(1-i^4)(1+i)}{2} = 0$

$S_4 = \frac{(1-i^5)(1+i)}{2} = \frac{(1-i)(1+i)}{2} = 1$

$S_5 = \frac{(1-i^6)(1+i)}{2} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i$

ب) $S_n - i S_n = \frac{(1-i^{n+1})(1+i)}{2} - \frac{i(1-i^{n+1})(1+i)}{2}$

$= \frac{(1-i^{n+1})[1+i-i+1]}{2} = \frac{(1-i^{n+1})(2)}{2} = 1 - i^{n+1}$

جـ) في حالة $n=4p$ لدينا :

$$S_n=\frac{\left(1-i^{4p+1}\right)(1+i)}{2}=\frac{\left(1-\left(i^4\right)^p i\right)(1+i)}{2}$$
$$=\frac{\left(1-1^p i\right)(1+i)}{2}=\frac{(1-i)(1+i)}{2}=1$$

• في حالة $n=4p+1$ لدينا :

$$S_n=\frac{\left(1-i^{4p+2}\right)(1+i)}{2}=\frac{\left(1-i^2\right)(1+i)}{2}=1+i$$

• في حالة $n=4p+2$ لدينا :

$$S_n=\frac{\left(1-i^{4p+3}\right)(1+i)}{2}=\frac{\left(1-i^3\right)(1+i)}{2}=\frac{(1+i)^2}{2}=1$$

• في حالة $n=4p+3$ لدينا $S_n=\frac{\left(1-\left(i^4\right)^{p+1}\right)(1+i)}{2}=0$

تطبيق 9 تعيين مرافق عدد مركب

اكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافقات الأعداد المركبة Z التالية :

أ) $Z=z^2+3iz-1$ ، ب) $Z=(z-i)(z+3)$

جـ) $Z=\frac{3z^2-3iz+3}{-iz+2i}$ ، د) $Z=(3-2iz)^2$

✓ الحل

أ) $\overline{Z}=\overline{\left(z^2+3iz-1\right)}=\overline{z^2}+\overline{3iz}-1=\bar{z}^2+\overline{3i}\times\bar{z}-1=\bar{z}^2-3i\bar{z}-1$

ب) $\overline{Z}=\overline{(z-i)(z+3)}=\overline{(z-i)}\times\overline{(z+3)}=\left(\bar{z}-\bar{i}\right)\left(\bar{z}+\bar{3}\right)=\left(\bar{z}+i\right)\left(\bar{z}+3\right)$

جـ) $\overline{Z}=\overline{\left(\frac{3z^2-3iz+3}{-iz+2i}\right)}=\frac{\overline{\left(3z^2-3iz+3\right)}}{\overline{\left(-iz+2i\right)}}=\frac{3\bar{z}^2+3i\bar{z}+3}{i\bar{z}-2i}$

د) $\overline{Z}=\overline{(3-2iz)^2}=\left(\overline{3-2iz}\right)^2=\left(3+2i\bar{z}\right)^2$

تطبيق 10 تصنيف الأعداد المركبة

بين بدون حساب أن كل من الأعداد المركبة التالية حقيقية أو تخيلية صرفة:

أ) $Z=z^2-\bar{z}^2$ ، ب) $Z=\frac{z^3+\bar{z}^3}{z+\bar{z}}$ ، جـ) $Z=\frac{z^2+\bar{z}^2}{z\bar{z}+1}$

✓ الحل

أ) $z^2-\bar{z}^2=(z-\bar{z})(z+\bar{z})$

بما أن $z+\bar{z}$ حقيقي و $z-\bar{z}$ تخيلي صرف فإن $z^2-\bar{z}^2$ تخيلي صرف

وبالتالي Z تخيلي صرف

ب) $\overline{\left(\frac{z^3+\bar{z}^3}{z+\bar{z}}\right)}=\frac{\overline{\left(z^3+\bar{z}^3\right)}}{\overline{(z+\bar{z})}}=\frac{\bar{z}^3+z^3}{\bar{z}+z}$

بما أن $\overline{Z}=Z$ فإن Z حقيقي

جـ) $\overline{Z}=\frac{\bar{z}^2+z^2}{\bar{z}z+1}=Z$ ومنه Z حقيقي.

تطبيق 11 تصنيف الأعداد المركبة

نضع $z_1=\frac{2i+1}{i+2}$ و $z_2=\frac{1-2i}{2-i}$

1) بين بدون حساب أن z_1+z_2 حقيقي و z_1-z_2 تخيلي صرف.

2) أوجد النتائج السابقة بالحساب.

✓ الحل

1) z_1+z_2 حقيقي هذا معناه أن $\overline{z_1+z_2}=z_1+z_2$

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}=\frac{1-2i}{2-i}+\frac{1+2i}{2+i}=z_1+z_2$$

ومنه z_1+z_2 حقيقي.

z_1-z_2 تخيلي صرف هذا معناه $\overline{z_1-z_2}+z_1-z_2=0$

$$\overline{z_1-z_2}+z_1-z_2=\overline{z_1}-\overline{z_2}+z_1-z_2=z_2-z_1+z_1-z_2=0$$

ومنه z_1-z_2 تخيلي صرف.

2) $$z_1+z_2=\frac{1+2i}{2+i}+\frac{1-2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2-i)+(2+i)(1-2i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{2-i+4i+2+2-4i+i+2}{5}=\frac{8}{5}$$
$$z_1-z_2=\frac{1+2i}{2+i}-\frac{1-2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2-i)-(1-2i)(2+i)}{8}$$
$$=\frac{2-i+4i+2-2-i+4i-2}{8}=\frac{6i}{8}=\frac{3}{4}i$$

تطبيق 12 — حل المعادلات في $\mathbb{C}$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ) $i\bar{z}=2+i$ ؛ ب) $(\bar{z}+1-3i)(z+2i)(iz-2)=0$

جـ) $z+2\bar{z}=(1-i)^2$ ؛ د) $z^2-\bar{z}^2=0$

✓ الحل

أ) المعادلة (أ) تكتب على الشكل $-iz=2-i$ ومنه $z=\dfrac{2-i}{-i}=\dfrac{(2-i)i}{1}=1+2i$

ب) المعادلة (ب) تكافئ $(iz-2=0)$ او $(z+2i=0)$ أو $(\bar{z}+1-3i=0)$

تكافئ $\left(z=\dfrac{2}{i}\right)$ او $(z=-2i)$ أو $(\bar{z}=-1+3i)$

تكافئ $(z=-2i)$ أو $(z=-2i)$ او $(z=-1-3i)$

ومنه مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{-1-3i\ ,-2i\}$

جـ) بما أن $(1-i)^2=-2i$ فإن المعادلة (جـ) تكتب على الشكل $z+2\bar{z}=-2i$

إذا كان $z=x+iy$ فإن $\bar{z}=x-iy$ ومنه المعادلة (جـ) تصبح $3x-iy=-2i$

وهذه الأخيرة تكافئ $3x=0$ و $-y=-2$ اي $x=0$ و $y=2$ ومنه $z=2i$

د) $z^2-\bar{z}^2=0$ يكافئ $x^2-y^2+2ixy-(x^2-y^2-2ixy)=0$

يكافئ $4ixy=0$ يكافئ $xy=0$

$xy=0$ يكافئ $(x=0)$ او $(y=0)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{iy\ ,x\}$

تطبيق 13 — تبسيط أعداد

بسط العددين التاليين $z_1=\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$ ، $z_2=(3+i)^4$

✓ الحل

أ) $$z_1=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(\cos\theta-i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{1}=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$$

ب) $$z_2=(3+i)^2(3+i)^2$$

$$=(9-1+6i)^2=64-36+96i=28+96i$$

تطبيق 14 — إثبات أن عددا مركبا يكون حقيقيا

z و z' عددان مركبان بحيث $zz'\neq -1$ و $z\bar{z}=z'\bar{z}'=1$

بين أن $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ عدد حقيقي.

✓ الحل

$\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي هذا معناه أن $\dfrac{z+z'}{1+zz'}=\overline{\left(\dfrac{z+z'}{1+zz'}\right)}$

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)}=\frac{\bar{z}+\bar{z}'}{1+\bar{z}\times\bar{z}'}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}\times\frac{1}{z'}}=\frac{z+z'}{1+zz'}$$

ومنه نستنتج أن $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي.

تطبيق 15 — تعيين مجموعة النقط

u عدد مركب غير معدوم.

عين مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث :

$\left(\dfrac{u-\bar{u}z}{1-z}\right)$ حقيقي.

✓ الحل

$\dfrac{u-\bar{u}z}{1-z}$ حقيقي هذا معناه أن $0=\dfrac{u-\bar{u}\times z}{1-z}-\overline{\left(\dfrac{u-\bar{u}\times z}{1-z}\right)}$

$$\frac{u-\bar{u}z}{1-z}-\frac{\bar{u}-u\times\bar{z}}{1-\bar{z}}=\frac{u-\bar{u}z-u\bar{z}+\bar{u}\bar{z}z+\bar{u}z+u\bar{z}-uz\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})}$$

$$=\frac{z\bar{z}(\bar{u}-u)+u}{(1-z)(1-\bar{z})}$$

إذن لكي يكون $\dfrac{u-\bar{u}z}{1-z}$ حقيقيا يجب أن يكون $\begin{cases} z\bar{z}(\bar{u}-u)+u=0 \\ z\neq 1 \text{ و } \bar{z}\neq 1\end{cases}$

اي $z\bar{z}(u-\bar{u})=u$ .... (1)

بما أن $u-\bar{u}$ تخيلي صرف و $z\bar{z}$ حقيقي فإن u تخيلي صرف

وبالتالي $u=bi$ مع $b\in\mathbb{R}^*$.

إذا كان $z=x+iy$ فإن المساواة (1) تكتب $(x^2+y^2)\,2bi=bi$

وبقسمة طرفي المساواة الأخيرة على $2bi$ نجد $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$

إذن مجموعة النقط M بحيث $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ حقيقي هي دائرة (c) مركزها $O(0\ ,\ 0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

تطبيق 16 تعيين طويلة عدد مركب

عين طويلة كل عدد من الأعداد المركبة التالية :

ا) $z=\sqrt{2}+i$ ، ب) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{3}$ ، جـ) $z=\cos\theta+i\sin\theta$

د) $z=\cos\theta-i\sin\theta$ ، هـ) $z=\sin\theta+i\cos\theta$ ، و) $z=(2-3i)(1+5i)$

ن) $z=(1-2i)^3$ ، ي) $z=\frac{4}{(1+i)^2}$ ، ف) $z=\frac{a+ib}{a-ib}$

حيث a و b حقيقيين غير معدومين.

✓ الحل

ا) $|z|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$

ب) $|z|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$

جـ) $|z|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

د) $|z|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

هـ) $|z|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

و) $|z|=|2-3i||1+5i|=\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{338}$

ن) $|z|=|(1-2i)^3|=|1-2i|^3=(\sqrt{1^2+2^2})^3=(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$

ي) $|z|=\frac{4}{|(1+i)^2|}=\frac{4}{|1+i|^2}=\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2$

ف) $|z|=\left|\frac{a+ib}{a-ib}\right|=\frac{|a+ib|}{|a-ib|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

تطبيق 17 تعيين مجموعة النقط باستعمال الطويلة

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق الشرط المعطى :

ا) $|z|=2$ ، ب) $|z-1+2i|=2$ ، جـ) $|z-1|=4$ ، د) $|z|=|z-2i|$

هـ) $|\bar{z}+i|=2$ ، و) $|z+1-2i|=|\bar{z}-i|$ ، ن) $|2z+4|=|1-2z|$

✓ الحل

بوضع $z=x+iy$ يكون $\bar{z}=x-iy$

ا) $|z|=2$ تعني $\sqrt{x^2+y^2}=2$ وبتربيع الطرفين نجد $x^2+y^2=4$

وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها 2 .

ب) لدينا $z-1+2i=(x-1)+i(y+2)$ ومنه $|z-1+2i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$

$|z-1+2i|=2$ تعني $\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=2$ بالتربيع نجد $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(1,-2)$ ونصف قطرها 2 .

جـ) المساواة $|z-1|=4$ تعني $|(x-1)+iy|=4$

لكن $|(x-1)+iy|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

إذن المساواة $|z-1|=4$ تصبح $(x-1)^2+y^2=16$

وعليه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(1,0)$ ونصف قطرها 4 .

د) لدينا $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ و $|z-2i|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

المساواة $|z|=|z-2i|$ تعني $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ بتربيع الطرفين نجد ،

$x^2+y^2=x^2+(y-2)^2$ وبالتبسيط نجد $-y+1=0$

ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $y=1$.

هـ) المساواة $|\bar{z}+i|=2$ تعني $|x+i(-y+1)|=2$ اي $\sqrt{x^2+(-y+1)^2}=2$

بتربيع الطرفين نجد $x^2+(y-1)^2=4$

وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(0,1)$ ونصف قطرها 2 .

و) لدينا $|z+1-2i|=|(x+1)+i(y-2)|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

$|\bar{z}-i|=|x-i(y+1)|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

المساواة $|z+1-2i|=|\bar{z}-i|$ تكافئ $\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

بتربيع الطرفين نجد $x^2+(y+1)^2=(x+1)^2=(y-2)^2$

وبالتبسيط نجد $x-3y+2=0$

ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $x-3y+2=0$.

ن) لدينا $|2z+4|=|(2x+4)+2iy|=\sqrt{(2x+4)^2+4y^2}$

$|1-2z|=|(1-2x)+i(-2y)|=\sqrt{(1-2x)^2+4y^2}$

المساواة $|2z+4|=|1-2z|$ تكافئ $\sqrt{(2x+4)^2+4y^2}=\sqrt{(1-2x)^2+4y^2}$

بتربيع الطرفين نجد $(2x+4)^2=(1-2x)^2$ وبالتبسيط نجد $4x-3=0$

ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $x=\frac{3}{4}$.

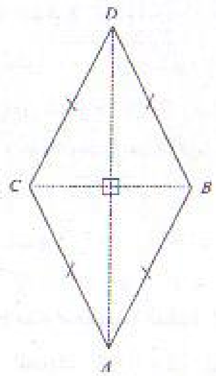
تطبيق 18 تعيين طبيعة أشكال

A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على التوالي $5i$ ، $2+i$ ، $4+3i$

أ) عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ثم احسب طويلة كل منها،
واستنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ معينا.

✓ الحل



أ) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.

$z_B - z_A = 2+i-5i = 2-4i$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هي $z_C - z_A$

$z_C - z_A = 4+3i-5i = 4-2i$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = |z_C - z_A| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

بما أن $AB = AC$ فإن المثلث ABC متقايس الساقين رأسه الأساسي A.

ب) $ABCD$ معين يعني $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

وهذا يعني أيضا $z_B - z_A = z_D - z_C$

ومنه $z_D = z_B - z_A + z_C$

$z_D = 2+i-5i+4+3i = 6-i$

تطبيق 19 تعيين عمدة عدد مركب

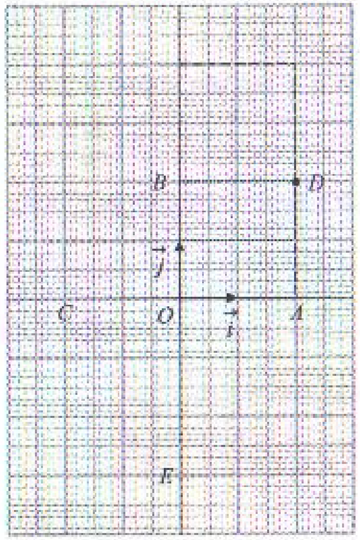
بقراءة بيانية اعط العمدة بالراديان لكل من لواحق مايلي:

أ) النقط A ، B ، D ، E

ب) الأشعة $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{OE}$ ، $\overrightarrow{DA}$

✓ الحل

أ) $arg(z_A) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + 2k\pi = 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$



$arg(z_B) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi$

$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$arg(z_D) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) + 2k\pi$

$= \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$arg(z_E) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}) + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

ب) $arg(z_{\overrightarrow{AC}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi$

$= \pi + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$arg(z_{\overrightarrow{AD}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AD}) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$

$= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$arg(z_{\overrightarrow{OE}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}) + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$arg(z_{\overrightarrow{DA}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{DA}) + 2k\pi = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

تطبيق 20 تعيين عدد مركب علمت عمدته

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $2-5i$ و $1+2i$

و M نقطة مختلفة عن A و B لاحقتها z.

أ) عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{BM}$

ب) أوجد عددا مركبا عمدته هي قيس للزاوية $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$

✓ الحل

أ) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM}$ هي $z_M - z_A$

$z_M - z_A = (x+iy) - (2-5i) = (x-2) + i(y+5)$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $z_M - z_B$

$z_M - z_B = (x+iy)-(1+2i) = (x-1)+i(y-2)$

ب) ليكن Z' عددا مركبا عمدته $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$

$arg(Z') = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right)$

ومنه Z' هي احد الأعداد المركبة التي تكتب على الشكل $\alpha\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$ حيث $\alpha \rangle 0$

تطبيق 21 تعيين مجموعة النقط باستعمال العمدة

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث:

$arg(z+2i) = \frac{-\pi}{4} + k\pi \quad ، \quad k\in\mathbb{Z}$

الحل

لدينا $z+2i = x+i(y+2)$

نضع $arg(z+2i)=\theta$ و $r=|z+2i|$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ و $\sin\theta = \frac{y+2}{r}$ ومنه $\tan\theta = \frac{y+2}{x}$

و بما أن $\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ فإن $\tan\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

وعليه $\frac{y+2}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ إذن $y = \frac{-\sqrt{2}}{2}x - 2$

تطبيق 22 تعيين القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

نعطي العددين المركبين $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1-i$

1) اعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد z_1 ، z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$

2) اعط الشكل الجبري لـ $\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الحل

1) ـ لدينا $|z_1| = \sqrt{\frac{6+2}{4}} = \sqrt{2}$

نضع $arg(z_1) = \theta_1$ تحقق $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta_1 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ إذن $z_1 = \left[\sqrt{2}, \frac{-\pi}{6}\right]$

ـ لدينا $|z_2| = \sqrt{2}$ و $\theta_2 = arg(z_2)$ تحقق $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta_2 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ إذن $z_2 = \left[\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right]$

نعلم أن $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

و $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) + 2k\pi$

$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{-2\pi+3\pi}{12} + 2k\pi \quad ، \quad k\in\mathbb{Z}$

إذن $\frac{z_1}{z_2} = \left[1, \frac{\pi}{12}\right]$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

بالمطابقة بين الشكل الجبري والمثلثي لـ $\frac{z_1}{z_2}$ نجد:

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

تطبيق 23 كتابة عدد مركب على شكله المثلثي

اكتب على الشكل المثلثي كل من الأعداد المركبة التالية:

أ) $z = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

ب) $z = (\sqrt{3}+i)^{2007}$

جـ) $z = (\cos\theta - i\sin\theta)^6$

د) $z = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$

الحل

أ) z هو جداء لعددين مركبين هما $z_1=1+i$ و $z_2=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$

$z_1=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $z_2=\left[1,\frac{\pi}{8}\right]$ ومنه $z=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right]$

إذن $z=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{8}\right]$

ب) بوضع $z_1=\sqrt{3}+i$ يكون $z=z_1^{2007}$

$z_1=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$ ومنه $z=\left[2^{2007},\frac{2007\pi}{6}\right]$

لكن $\frac{2007\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+334\pi$ ومنه $z=\left[2^{2007},\frac{\pi}{2}\right]$

جـ) نضع $z_1=\cos\theta-i\sin\theta$ ومنه $z=z_1^6$

$z_1=[1,-\theta]$ ومنه $z=[1,-6\theta]$

د) $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]^5+\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]^5$

$=\left[32,5\frac{\pi}{3}\right]+\left[32,-5\frac{\pi}{3}\right]=64\cos5\frac{\pi}{3}=32\sqrt{3}$

ومنه $z=\left[32\sqrt{3},0\right]$

تطبيق 24 توظيف دستور موافر

كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ حقيقيا ؟ حقيقيا موجبا ؟ تخيليا صرفا ؟

الحل

نضع $z=\sqrt{3}+i$ ، الشكل المثلثي لـ z هو $z=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$

ومنه $z^n=\left[2^n,\frac{n\pi}{6}\right]$

- يكون z^n حقيقيا إذا كان $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0$ أي $\frac{n\pi}{6}=k\pi$ مع $k\in\mathbb{N}$

ومنه نجد $n=6k$

ومنه مجموعة قيم n المطلوبة هي مضاعفات العدد 6 .

- يكون z^n حقيقيا موجبا إذا كان $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\geq 0$

وهذا يعني أيضا $n=6k$ و $\cos k\pi\geq 0$ لكن $\cos(k\pi)=(-1)^k$

إذن حتى يكون $\cos(k\pi)\geq 0$ يجب ان يكون k زوجي

أي $k=2k'$ ومنه $n=12k'$.

إذن مجموعة قيم n المطلوبة هي مضاعفات العدد 12 .

- يكون z^n تخيليا صرفا إذا كان $\cos\frac{n\pi}{6}=0$

ومنه ينتج $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{N}$

ومنه نجد $n=3+6k$ مع $k\in\mathbb{N}$

إذن قيم n المطلوبة هي متتالية حسابية حدها الأول 3 واساسها 6 .

تطبيق 25 تعيين عمدة عدد مركب

اوجد عمدة العدد المركب z وذلك حسب قيم العدد الحقيقي x حيث : $z=\sqrt{2}\left(x^2-3x+2\right)(\cos\theta+i\sin\theta)$

الحل

$$|z|=\left|\sqrt{2}\left(x^2-3x+2\right)\right|=\begin{cases}\sqrt{2}\left(x^2-3x+2\right) & , x\in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[\\ -\sqrt{2}\left(x^2-3x+2\right) & , x\in]1,2[\\ 0 & , x=1 \text{ أو } x=2\end{cases}$$

الحالة الأولى لما $x\in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

لتكن $arg(z)=\alpha$ تحقق $\begin{cases}\cos\alpha=\cos\theta\\ \sin\alpha=\sin\theta\end{cases}$ (I) .... ومنه $\tan\alpha=\tan\theta$

$\tan\alpha=\tan\theta$ تكافئ $\alpha=\theta+k\pi$ تكافئ $\begin{cases}\alpha=\theta+2k'\pi\\ \alpha=\theta+\pi+2k'\pi\end{cases}$

$\alpha=\pi+\theta+2k'\pi$ لا تحقق الجملة (I)

و $\alpha=\theta+2k'\pi$ تحقق الجملة (I) ومنه $z=\left[\sqrt{2}\left(x^2-3x+2\right),\theta\right]$

الحالة الثانية $x\in]1,2[$

$|z|=-\sqrt{2}\left(x^2-3x+2\right)$

و $arg(z)=\alpha$ تحقق $\begin{cases}\cos\alpha=-\cos\theta\\ \sin\alpha=-\sin\theta\end{cases}$ (II) .... ومنه $\tan\alpha=\tan\theta$

$\tan\alpha=\tan\theta$ تكافئ $(\alpha=\theta+\pi+2k\pi)$ او $(\alpha=\theta+2k\pi)$

$\alpha=\theta+\pi+2k\pi$ تحقق الجملة (II)

و $\alpha=\theta+2k\pi$ لا تحقق (II) ومنه $z=\left[-\sqrt{2}\left(x^2-3x+2\right),\theta+\pi\right]$

تطبيق 26 إثبات أن أربع نقط تقع على نفس الدائرة

نعتبر النقط A ، B ، C ، D لواحقها على الترتيب :
$z_A=-1+2i$ ، $z_B=4+3i$ ، $z_C=3i$ ، $z_D=4-3i$

أ) احسب $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ و $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}$

ب) ماهي طبيعة المثلثين ACD و BCD ؟

جـ) بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

الحل

أ) $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{3i+1-2i}{4-3i+1-2i}=\frac{1+i}{5-5i}=\frac{(1+i)^2}{5(1-i)(1+i)}=\frac{-2i}{10}=\frac{-i}{5}$

$\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}=\frac{3i-4-3i}{4-3i-4-3i}=\frac{-4}{-6i}=\frac{-4i}{6}=\frac{-2}{3}i$

ب) $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ومنه فإن المثلثين ACD و BCD قائمان في A و B على الترتيب.

جـ) بما أن ACD قائم في A فإن النقط A ، D ، C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها I منتصف $[DC]$

لكي تنتمي B إلى الدائرة (C) يكفي أن نبين أن $IB=IA$.

$z_I=2$ ومنه $IB=\sqrt{13}$ و $IA=\sqrt{13}$ إذن B تنتمي إلى (C)

وعليه النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) .

تطبيق 27 الأعداد المركبة والمتتالية الهندسية

(z_n) متتالية الأعداد المركبة معرفة بـ $\begin{cases} z_0=4 \\ z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n \end{cases}$ مع $n\in\mathbb{N}$

1) أوجد عمدة و طويلة كل من z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 ، z_5

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $\Delta_n=|z_{n+1}-z_n|$.

أ) احسب Δ_{n+1} بدلالة Δ_n

ب) بين أن المتتالية (Δ_n) هندسية يطلب إيجاد حدها الأول و أساسها.

جـ) احسب Δ_n واستنتج العدد الطبيعي n_0 بحيث لما $n\geq n_0$ يكون $\Delta_n<10^{-2}$

الحل

1) $z_0=[4,0]$ و $\alpha=\frac{1}{2}(1+i)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right]$

$z_1=\alpha z_0$ ومنه $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

$z_2=\alpha z_1$ ومنه $z_2=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$

$z_3=\alpha z_2$ ومنه $z_3=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

$z_4=\alpha z_3$ ومنه $z_4=[1,\pi]$

$z_5=\alpha z_4$ ومنه $z_5=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$

2- أ) $\Delta_{n+1}=|z_{n+2}-z_{n+1}|=\left|\frac{1}{2}(1+i)z_{n+1}-\frac{1}{2}(1+i)z_n\right|$

$=\left|\frac{1}{2}(1+i)\right||z_{n+1}-z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_n$

ب) من المساواة $\Delta_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_n$ نستنتج أن (Δ_n) متتالية هندسية أساسها $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

وحدها الأول $\Delta_0=|z_1-z_0|=2\sqrt{2}$ ومنه $\Delta_n=\Delta_0\times r^n=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$\Delta_n<10^{-2}$ يكافئ $2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n<10^{-2}$ يكافئ $2^{-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}}<10^{-2}$

يكافئ $-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}<-\frac{2Ln(10)}{Ln(2)}$ يكافئ $-\frac{1}{2}n<-8,15$

أصغر عدد طبيعي n_0 هو 17 .

تطبيق 28 كتابة عدد مركب على الشكل المثلثي

u عدد مركب حيث $u=1+i$

1) اكتب كل من u و $\overline{u}$ على الشكل المثلثي

2) ليكن n عدد طبيعي، نضع $S_n=u^n+\overline{u}^n$

أ) اكتب S_n على الشكل المثلثي ثم استنتج أن $S_n=\lambda_n\cos\frac{n\pi}{4}$

حيث λ_n عدد حقيقي يطلب إيجاده بدلالة n .

ب) أوجد قيمة n بحيث $S_n=0$

جـ) بين أنه إذا كان n زوجيا فإن S_n عدد صحيح .

✓ الحل

1) الشكل المثلثي للعددين u و $\bar{u}$ هما $u=\left[\sqrt{2}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ و $\bar{u}=\left[\sqrt{2}\,,\,-\frac{\pi}{4}\right]$

2) أ) $S_n=\left[(\sqrt{2})^n\,,\,\frac{n\pi}{4}\right]+\left[(\sqrt{2})^n\,,\,-\frac{n\pi}{4}\right]=2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$

ومنه $\lambda_n=2(\sqrt{2})^n$

ب) $S_n=0$ تكافئ $\cos\frac{n\pi}{4}=0$ تكافئ $\frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{N}$

ومنه $n=2+4k$

جـ) n زوجي هذا معناه أن $n=2n'$ ومنه $S_n=2(\sqrt{2})^{2n'}\cos\frac{n'\pi}{2}$

$$S_n=2\times\left[(\sqrt{2})^2\right]^{n'}\times\cos\frac{n'\pi}{2}$$

$$=2\times(2)^{n'}\cos\frac{n'\pi}{2}=2^{n'+1}\cos\frac{n'\pi}{2}$$

من اجل كل عدد طبيعي n' فإن $\cos n'\frac{\pi}{2}$ يأخذ القيم $-1\,,\,0\,,\,1$.

وبالتالي نستنتج أن S_n عدد صحيح.

تطبيق 29 الأعداد المركبة والأشكال الهندسية

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لواحقها 1 ، $2i$ ، z على التوالي.

1) ماذا تمثل هندسيا $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$ و $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$ ؟

2) في مايلي نرمز بـ α إلى العدد الحقيقي من المجال $]-\pi,0[$ بحيث $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$

النقطة C معرفة بـ $BC=\sqrt{\frac{2}{5}}BA$ و $\left(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC}\right)=\alpha$

احسب القيمة المضبوطة لـ $\sin\alpha$

3) بين أن $\frac{z-2i}{1-2i}=\frac{1-3i}{5}$ واستنتج قيمة z .

4) علم النقطة C ثم تحقق أن المثلث ABC متقايس الساقين رأسه الأساسي A .

✓ الحل

1) $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|=\left|\frac{z-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{BC}{BA}$

$$\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)=\left(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC}\right)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

2) لدينا $\cos\alpha^2+\sin\alpha^2=1$ ومنه $\sin\alpha^2=\frac{9}{10}$

ومنه ينتج $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$ أو $\sin\alpha=\frac{-3}{\sqrt{10}}$

بما أن $\cos\alpha>0$ و $\alpha\in]-\pi,0]$ فإن $\sin\alpha=\frac{-3}{\sqrt{10}}$

3) $\frac{BC}{BA}=\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|=\sqrt{\frac{2}{5}}$

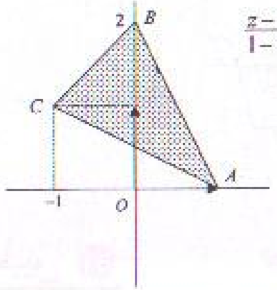
$$\left(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)=\alpha$$

ومنه $\frac{z-2i}{1-2i}=\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}i\right)=\frac{1}{5}-\frac{-3}{5}i=\frac{1}{5}(1-3i)$

استنتاج قيمة z :

من المساواة $\frac{z-2i}{1-2i}=\frac{1-3i}{5}$ نجد $z-2i=-1-i$

إذن $z=-1+i$



4) لدينا $AB=|z_B-z_A|=\sqrt{5}$ و $AC=|z_C-z_A|=\sqrt{5}$

ومنه ABC مثلث متقايس الساقين رأسه الأساسي A .

تطبيق 30 الكتابة الأسية لعدد مركب

z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $z_1=-1-i$ و $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكلين الجبري والأسي.

2) استنتج طويلة و عمدة $\frac{z_1}{z_2}$ ثم عين القيمة المضبوطة لكل من :

$\cos\frac{11\pi}{2}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

✓ الحل

1) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1-i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{1} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

لدينا $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$ و $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i5\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$ و $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من(1) و (2) نجد
$$\begin{cases} \cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

تطبيق 31 الكتابة الأسية وطبيعة أشكال

A و B نقطتان لاحقتاهما $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $Z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1) عين النقطة C بحيث الرباعي $OACB$ متوازي أضلاع حيث O مبدأ المعلم $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$

2) عين قيسا للزاوية $(\vec{OA}, \vec{OB})$ ماذا تستنتج حول الرباعي $OACB$ ؟

✓ الحل

1) $OACB$ متوازي اضلاع يعني $\vec{OB} = \vec{AC}$ و $\vec{OA} = \vec{BC}$ و $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$

المساواة $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ تعني $z_C = z_B + z_A$

ومنه $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z_C = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + 1 + \sqrt{3}\,i$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right) + i\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

2) $(\vec{OA}, \vec{OB}) = arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = arg(z_B) - arg(z_A)$

$$= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه $\vec{OA}$ عمودي على $\vec{OB}$ وعليه الرباعي $OACB$ مستطيل.

تطبيق 32 الكتابة الأسية ودساتير التحويل

θ عدد حقيقي يختلف عن $\pi + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$

1) احسب $\frac{2t}{1+t^2}$ و $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\frac{2t}{1-t^2}$ بدلالة θ

2) بين أن $\sin\theta = \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$ و $\cos\theta = \frac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

و $\tan\theta = \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

✓ الحل

1) $t = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = i\tan(\frac{\theta}{2})$

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2i\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} \quad ، \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2i\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})} \quad ، \quad \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}$$

2) $\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{\cos\theta} + i\tan\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})} + \frac{2i\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من(1) و (2) نجد
$$\begin{cases} \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})} \\ \tan\theta = 2\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

ومنه $\cos\theta = \frac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$ و $\tan\theta = \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

ولدينا $\sin\theta = \cos\theta \times \tan\theta$

إذن $\sin\theta = \frac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} \times \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{2\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

تطبيق 33 حساب مجاميع

1) احسب u^7 حيث $u = e^{2i\frac{\pi}{7}}$

2) نضع $S = u+u^2+u^4$ و $T = u^3+u^5+u^6$

بين أن S و T مترافقان وأن الجزء التخيلي لـ S عدد حقيقي موجب.

3) احسب $S+T$ و ST

4) استنتج أن $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = \frac{-1}{2}$

و $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

الحل

(1 $u^7 = (e^{2i\frac{\pi}{7}})^7 = e^{2i\frac{\pi}{7}\times 7} = e^{2i\pi} = 1$

(2 $\overline{S} = \overline{u+u^2+u^4} = \overline{u} + \overline{u}^2 + \overline{u}^4 = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4} = \frac{u^3+u^2+1}{u^4}$

$= \frac{u^6+u^5+u^3}{u^7} = u^6+u^5+u^3 = T$

(لأن $u\overline{u}=1$ و $u^7=1$)

ومنه S و T مترافقين

الجزء التخيلي لـ T هو $\sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7}$

وبما أن الزوايا $\frac{6\pi}{7}$ و $\frac{10\pi}{7}$ و $\frac{12\pi}{7}$ تنتمي إلى $]\pi, 2\pi[$

فإن $\sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7} < 0$

وبما أن الجزء التخيلي لـ S هو نظير الجزء التخيلي لـ T

أي $\text{Im}(S) = -\text{Im}(T)$ فإن $\text{Im}(S) > 0$

(3 $S+T = u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6$
$= 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6-1$

$= \frac{1-u^7}{1-u} - 1 = -1$

$ST = (u+u^2+u^4)(u^3+u^5+u^6)$
$= 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6+2$
$= \frac{1-u^7}{1-u} + 2 = 2$

إذن $\begin{cases} S+T=-1 \\ ST=2 \end{cases}$ .... (I)

4) من المساواة $S+T=-1$ نجد $T=-1-S$ نعوضه في المساواة $S\times T=2$ نجد ؛

$S^2+S+2=0$ وبعد حل هذه المعادلة نجد $S=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ ، $S=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

وبما أن الجزء التخيلي لـ S موجب فإن $S=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

لدينا $S = (\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}) + i(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7})$

بالمطابقة بين الشكل الجبري و الشكل المثلثي لـ S نجد :

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7} = \frac{-1}{2} \\ \sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

تطبيق 34 الشكل الأسي والجبري والمتتالية الهندسية

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$،

a و z_0 عددان مركبان بحيث $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ، $z_0=6+6i$

ولتكن A_0 صورة z_0

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نرمز بـ A_n إلى النقطة ذات اللاحقة z_n المعرفة بـ $z_n = a^n \times z_0$

1) أ) اكتب z_1 و a^2 على الشكل الجبري ثم اكتب z_1 على الشكل الأسي

وبين أن $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب) عبر عن z_3 ثم z_7 بدلالة z_1 و a^2 مستنتجا عبارتي z_3 و z_7 على الشكل الأسي.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $|z_n| = r_n$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

ب) استنتج أن المتتالية (r_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

ج) عين نهاية المتتالية (r_n) وفسر هندسيا النتيجة المحصل عليها.
د) عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم p بحيث $OA_p \le 10^{-3}$
واعط قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_p})$

✓ الحل

1) أ) $z_1 = a^1 z_0 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)(6+6i)$

$$z_1 = \left[\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2} - \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\right] + i\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+1\right) + \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]$$

$$z_1 = 3 + i\,3\sqrt{3}$$

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 + 2i\,\frac{\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{16} - \frac{4-2\sqrt{3}}{16} + 2i\,\frac{3-1}{16}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{16} + \frac{4i}{16} = \frac{4}{16}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

لدينا $|z_1| = 6$ و $arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$ ومنه $z_1 = 6\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

لدينا $|a^2| = \frac{1}{2}$ و $arg(a^2) = \frac{\pi}{6}$ ومنه $a^2 = \frac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب) لدينا $a^4 = \frac{1}{24} z_1^2$

$$z_7 = a^7 z_0 = a^4 a^2 a z_0 = \frac{1}{24} z_1 a^2 z_1 = \frac{1}{24} a^2 z_1^2$$

$$z_7 = \frac{1}{24} \times \frac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \times 36\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{4}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_3 = a^3 z_0 = a^2 z_1 = \frac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}} \times 6\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2) أ) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$ ومنه $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|z_n| = |a^n|\,|z_0| = |a|^n \times |z_0|$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times 6\sqrt{2} = 12\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$$

ب) $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه $|z_n|$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدها الأول

$$|z_0| = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

ج) بما أن $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$

بما أن $|z_n| = \left\|\overrightarrow{OA_n}\right\|$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$

فإنه كلما كبر n كلما اقتربت النقط A_n من النقطة O على مسار حلزوني.

د) $OA_p < 10^{-3}$ هذا معناه أن $|z_p| \le 10^{-3}$ أي $r_p \le 10^{-3}$

$r_p \le 10^{-3}$ تكافئ $12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1} \le 10^{-3}$ تكافئ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1} \le \frac{10^{-3}}{12}$

ومنه $p+1 \ge \dfrac{Ln\left(\frac{10^{-3}}{12}\right)}{-Ln\left(\sqrt{2}\right)}$

إذن $p \ge 26{,}09$.

وبالتالي فإن أصغر عدد طبيعي p هو 27 .

حساب قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_p}\right)$:

$$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_p}\right) = arg(z_{27}) = arg(a^{27} \times z_0) + 2k\pi$$

$$= arg(a^{27}) + arg(z_0) + 2k\pi = \frac{\pi}{12}\,27 + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$= \frac{30\pi}{12} + 2k\pi = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

تطبيق 35 حل معادلات من الدرجة الرابعة

نعتبر كثير الحدود $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ حيث z عدد مركب
1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث
$p(z) = (z^2+az+b)(z^2+4z+2a)$
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.

✓ الحل

1) بعد نشر $(z^2+az+b)(z^2+4z+2a)$ ومطابقته مع عبارة $p(z)$ نجد :

$$\begin{cases} a+4=0 \\ 6a+b=-19 \\ 4b+2a^2=52 \\ 2ab=-40 \end{cases}$$ ومنه ينتج $$\begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$$

2) $p(z)=0$ يعني $$\begin{cases} z^2-4z+5=0 \;...\;(1) \\ \text{أو} \\ z^2+4z-8=0 \;...\;(2) \end{cases}$$

حل المعادلة (1):

$$\Delta = 16-4(1)(5) = -4 = (2i)^2$$

$$z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2-i \quad ، \quad z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

حل المعادلة (2):

$\Delta=16-4(1)(-8)$ ومنه $\Delta=48$

$$z_4=\frac{-4-4\sqrt{3}}{2} = -2-2\sqrt{3} \quad ، \quad z_3 = \frac{-4+4\sqrt{3}}{2} = -2+2\sqrt{3}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $\{z_1 , z_2 , z_3 , z_4\}$

تطبيق 36 حل معادلات من الدرجة الرابعة

من أجل كل عدد مركب z نضع $p(z)=z^4-1$

1) أ) حلل $p(z)$ إلى جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية.

ب) استنتج حلول المعادلة $p(z)=0$ في $\mathbb{C}$.

2) استنتج من السؤال السابق حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$ .... (*) في $\mathbb{C}$.

الحل

1) أ) $p(z)=(z^2-1)(z^2+1)$

ب) $p(z)=0$ يعني $z^2-1=0$ أو $z^2+1=0$

حلا المعادلة $z^2-1=0$ هما 1 ، -1

حلا المعادلة $z^2+1=0$ هما i ، $-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $\{1,-1,i,-i\}$

2) نضع $z'=\frac{2z+1}{z-1}$ عندئذ المعادلة (*) تصبح $z'^4=1$ أي $z'^4-1=0$

ومنه z' عنصر من $\{1,-1,i,-i\}$

$z'=\frac{2z+1}{z-1}$ يكافئ $z=\frac{z'+1}{z'-2}$

- إذا كان $z'=-1$ فإن $z=0$
- إذا كان $z'=i$ فإن $z=-\frac{3}{5}-\frac{3}{5}i$
- إذا كان $z'=-i$ فإن $z=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$
- إذا كان $z'=1$ فإن $z=-2$

إذن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $\left\{0 ، -\frac{3}{5}-\frac{3}{5}i ، -\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i ، -2\right\}$

تطبيق 37 حل معادلات من الدرجة الثالثة

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i=0$ .... (1)

مع العلم أنها تقبل حلا تخيليا صرفا.

الحل

$z=iy$ حل تخيلي صرف للمعادلة (1) معناه أن:

$$(iy)^3-(3+4i)(iy)^2-6(3-2i)(iy)+72i=0$$

$$-iy^3+3y^2+4y^2i-18iy-12y+72i=0$$

$$(3y^2-12y)+i(-y^3+4y^2-18y+72)=0$$

ومن المساواة الأخيرة ينتج $\begin{cases} 3y^2-12y=0 \\ -y^3+4y^2-18y+72=0 \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $y=4$

إذن $z=4i$ حل تخيلي لـ (1)

من أجل كل z من $\mathbb{C}$ لدينا:

$$z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i=(z-4i)(z^2+az+b)$$

بعد النشر والتبسيط و المطابقة نجد $b=-18$ و $a=-3$

المعادلة (1) تكافئ $z=4i$ أو $z^2-3z-18=0$ .... (I)

حل المعادلة (I)

$$\Delta=9-4(1)(-18)=81$$

ومنه المعادلة (I) لها حلان $z_1=\frac{3+9}{2}=6$ و $z_2=\frac{3-9}{2}=-3$

إذن المعادلة (1) لها ثلاثة حلول -3 ، 6 ، $4i$

تطبيق 38 حل معادلات وكتابة الحلول على الشكل المثلثي

ليكن α عددا حقيقيا من المجال $[0\,,\,\pi]$ و z عدد مركب.
نعتبر كثير الحدود $p(z)$ المعرف بـ:
$$p(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)\,z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$$
1) بين أن $p(z)=(z-1)\left[\,z^2+(2\sin\alpha)z+1\,\right]$
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$ ثم عين عمدة و طويلة كل حل.

✓ الحل

1)
$$(z-1)\left[\,z^2+(2\sin\alpha)z+1\,\right]=z^3+2\sin\alpha\;z^2+z-z^2-2\sin\alpha\,z-1$$
$$=z^3+(2\sin\alpha-1)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1=p(z)$$

2) $p(z)=0$ يكافئ $(z=1)$ أو $\left(z^2+2\sin\alpha\,z+1=0\right)$

حل المعادلة $z^2+2\sin\alpha\;z+1=0$ .... (*)
$$\Delta=4\sin^2\alpha-4=4\left(-\cos^2\alpha\right)=(2i\cos\alpha)^2$$
ليكن z_1 ، z_2 حلي المعادلة (*)
$$z_1=\frac{-2\sin\alpha+2i\cos\alpha}{2}=-\sin\alpha+i\cos\alpha$$
$$z_2=\frac{-2\sin\alpha-2i\cos\alpha}{2}=-\sin\alpha-i\cos\alpha$$
تعيين طويلة و عمدة الحلول :

الحل الأول هو 1 ومنه $1=[1,0]$

$|z_1|=1$ و $arg(z_1)=\theta_1$ تحقق $\begin{cases}\cos\theta_1=-\sin\alpha\\ \sin\theta_1=\cos\alpha\end{cases}$

ومنه $\theta_1=\frac{\pi}{2}+\alpha+2k\pi$ إذن $z_1=\left[1\,,\,\frac{\pi}{2}+\alpha\right]$

$|z_2|=1$ و $arg(z_2)=\theta_2$ تحقق $\begin{cases}\cos\theta_2=-\sin\alpha\\ \sin\theta_2=-\cos\alpha\end{cases}$

ومنه $\theta_2=\frac{3\pi}{2}-\alpha$ إذن $z_2=\left[1\,,\,\frac{3\pi}{2}-\alpha\right]$

تطبيق 39 حل معادلات من الدرجة الرابعة

من أجل كل عدد مركب z نضع $p(z)=z^4-z^3+z^2+2$
1) بين أنه إذا كان α حلا للمعادلة $p(z)=0$ فإن $\overline{\alpha}$ حل آخر لهذه المعادلة.

2) بين أن $(1+i)$ و $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ حلان للمعادلة $p(z)=0$
3) استنتج أن $p(z)$ هو جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية.

✓ الحل

1) α حل للمعادلة $p(z)=0$ يعني $p(\alpha)=0$

لدينا $\overline{p(\alpha)}=0$ أي $\overline{\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2+2}=0$

وحسب خواص المرافق نجد $\overline{\alpha}^4-\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^2+2=0$ لكن $\overline{\alpha}^4-\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^2+2=p(\overline{\alpha})$

إذن $p(\overline{\alpha})=0$

وهذا يعني أن $\overline{\alpha}$ حل للمعادلة $p(z)=0$.

2) يمكنك التحقق أن $p(1+i)=0$ و $p\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$

3) بما أن $\alpha=1+i$ حل فإن $1-i$ حل أيضا

بما أن $\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ حل فإن $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ حل أيضا

وعليه $p(z)=(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z-\overline{\beta})$
$$=\left[z^2-(\alpha+\overline{\alpha})\,z+\alpha\overline{\alpha}\right]\left[z^2-(\beta+\overline{\beta})z+\beta\overline{\beta}\right]$$
$$=\left[z^2-2z+2\right]\left[z^2+z+1\right]$$

تطبيق 40 معادلة من الدرجة الثالثة بمعاملات مركبة

$p(z)$ كثير حدود معرف بـ:
$$p(z)=z^3+(5i-6)z^2+(9-24i)\,z+13i+18$$
1) بين أن المعادلة $p(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.
3) النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 حلول المعادلة $p(z)=0$ حيث $|z_0|\langle|z_1|\langle|z_2|$ ما نوع المثلث ABC ؟

✓ الحل

1) $z=iy$ حل للمعادلة $p(z)=0$ هذا معناه أن $p(iy)=0$ بعد الحساب نجد :

$y=-1$ ومنه $z=-i$

2) لدينا $p(z)=(z+i)\left[\,z^2+(4i-6)z+13-18i\,\right]$

$p(z)=0$ يكافئ $(z=-i)$ أو $\left(z^2+(4i-6)\,z-18i=0\right)$

نضع $z^2+(4i-6)\,z-18i=0$ .... (1)

$$\Delta' = (2i-3)^2 - (-18i+13) = -8+6i$$

الجذران التربيعيان لـ Δ هما $1+3i$ و $-1-3i$ ومنه حلا المعادلة (1) هما :

$$z_1 = \frac{-2i+3+1+3i}{1} = 4+i \quad \text{و} \quad z_2 = -2i+3-1-3i = 2-5i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $-i$ ، z_1 ، z_2

$$arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = arg\left(\frac{2-5i+i}{4+i+i}\right) = arg\left(\frac{2-4i}{4+2i}\right)$$

$$= arg\left(\frac{-20i}{20}\right) = arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

إذن المثلث ABC قائم في A .

تطبيق 41 تعيين مجموعة النقط

z عدد مركب غير معدوم و z' عدد مركب حيث $z' = \frac{-2}{z}$

1) ماهي العلاقة التي تربط بين طويلتي و عمدتي z و z' ؟

2) في المستوي المركب M نقطة لاحقتها z و M' لاحقتها z' ،

(D) قرص مركزه النقطة O ونصف قطره 2 ماعدا النقطة O ،

A نقطة لاحقتها a بحيث $|a|=2$ و $arg(a)=\frac{\pi}{4}$

أ) ماهي مجموعة النقط M' لما M تمسح (D) ؟

ب) ماهي مجموعة النقط M' لما M تمسح القطعة $[OA]$ ما عدا O ؟

الحل

1) $|z'| = \frac{2}{|z|}$ و $arg(z') = arg(-2) - arg(z)$

$$arg(z') = \pi - arg(z)$$

2) أ) M تمسح (D) هذا معناه أن $OM < 2$ اي $|z| < 2$ ومنه $|z'| > 1$

ومنه مجموعة النقط M' تمسح كل المستوي ماعدا القرص (D') الذي مركزه النقطة O ونصف قطره 1 .

ب) M تمسح القطعة $[OA]$ ما عدا النقطة O هذا معناه ان :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = 0 \quad \text{و} \quad OM < OA$$

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$$

$$= -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$$

$$= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) - \pi + \frac{\pi}{4}$$

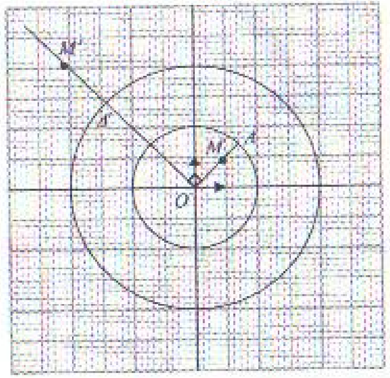
$$= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) - \frac{3\pi}{4}$$

إذن $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{3\pi}{4}$

$OM < OA$ هذا معناه $|z| < 2$

ومنه $|z'| > 1$

وبالتالي
$$\begin{cases} (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{3\pi}{4} \\ \text{و} \\ \|\overrightarrow{OM'}\| > 1 \end{cases} \quad \text{........ (I)}$$

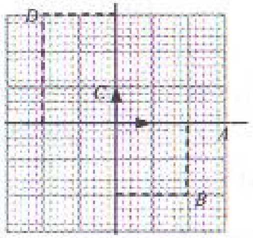


لتكن A' نقطة حيث $OA' = 1$ و $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{3\pi}{4}$

إذن لما M تمسح القطعة $[OA]$ ما عدا النقطة O

فإن النقطة M' تمسح نصف المستقيم (OA') ما عدا القطعة $[OA']$.

تمارين و مسائل



1 اعتمادا على الشكل التالي عين لواحق :

أ) النقط A ، B ، C ، D

ب) الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OD}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AB}$

2 اعط الشكل الجبري للأعداد المركبة التالية :

أ) $z=(2+i)(3-2i)$ ، ب) $z=(1-i)^5$ ، جـ) $z=(3+i)^2(1-i)$

د) $z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ ، هـ) $z=\frac{3-2i}{3+2i}$

و) $z=\frac{1-2i}{2+i}-\frac{3}{2-i}$ ، ن) $z=\left(\frac{2-3i}{1-i}\right)\left(\frac{1+3i}{-1+i}\right)$

3 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات والجمل المقترحة (إعطاء الحل على الشكل الجبري) :

أ) $(1+3i)z=2-i$ ، ب) $(1+2i)z=2+z$ ، جـ) $z^2-(1-i)^2=0$

د) $(z-4)(-iz+1)=0$ ، هـ) $z^2-9=0$ ؛ و) $z^2+16=0$

ن) $\frac{z+3}{z-3}=2i$ ، ي) $\begin{cases} z-z'=2 \\ iz-z'=2i \end{cases}$

4 نضع $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان :

نرفق بكل عدد مركب z العدد $Z=2\bar{z}-2+6i$

1) احسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي لـ Z

2) هل يوجد عدد حقيقي z بحيث $Z=z$ ؟

5 من أجل كل عدد مركب $z \neq -1$ نضع $Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ مع $z=x+iy$

1) احسب بدلالة x و y الجزء التخيلي والحقيقي للعدد المركب Z .

2) z لاحقته النقطة M في المستوي المركب.

ما هي مجموعة النقط M لما يكون Z تخيليا صرفا ؟

6 1) عين الأعداد المركبة z بحيث العدد $\frac{z}{1-2i}$

أ) عددا حقيقيا ، ب) عددا تخيليا صرفا.

2) ارسم في المستوي المركب مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق شرطي السؤال (1)

7 عين مرافق كل عدد من الأعداد المركبة التالية :

أ) $z=8$ ، ب) $z=i(5-3i)$ ، جـ) $z=(1+i)(3-5i)$ ،

د) $z=(2-3i)^7$ هـ) $z=(3-2i)^4(5-i)^6$ ، و) $z=\frac{4i-1}{3-i}$ ،

ن) $z=\frac{(1-i)^5}{3-i}$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ) $z-2\bar{z}+2=0$ ، ب) $(1-i)\bar{z}=1+i$ ،

جـ) $\bar{z}+1-i=i\bar{z}+3$ ، د) $(3z+1-i)(i\bar{z}+i-1)=0$ ،

هـ) $z+2\bar{z}=(1-i)^2$ و) $\frac{\bar{z}-2}{\bar{z}+2}=i$

8 من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة z نعتبر العدد المركب $z'=z^2$

1) نضع $z=x+iy$ مع x و y حقيقيان.

أ) عبر عن الجزء التخيلي والحقيقي لـ z' بدلالة x و y .

ب) عين ثم ارسم مجموعة النقط M بحيث يكون العدد z' ؛

- حقيقيا.
- تخيليا صرفا.

2) أوجد النتائج السابقة وهذا باستعمال خصائص المرافق.

9 z عدد مركب بحيث $z=x+iy$ مع x و y حقيقيان

ليكن Z عددا مركبا بحيث $Z=iz-2i+\bar{z}-3$

1) احسب بدلالة x و y الجزء التخيلي والجزء الحقيقي لـ Z

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z=0$ ذات المجهول z .

10 z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $z_1=1+\cos x+i\sin x$ و $z_2=1-\cos x-i\sin x$

1) اكتب كل من z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

2) ليكن j عددا مركبا بحيث $j=\frac{z_2}{z_1}$

أ) عين قيم x بحيث يكون العدد المركب j له معنى.

ب) بسط عبارة j وهذا باستعمال نتائج السؤال (1) وباستعمال خصائص المرافق.

11 A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها الأعداد المركبة a ، b ، c على الترتيب.

بين أن ABC مثلث قائم في A يكافئ أن $\frac{b-a}{c-a}+\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}=0$.

12 A ، B ، C نقط لواحقها على التوالي $3+5i$ ، $5+i$ ، $7+3i$.

1) عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم عين طويلة كل منهما ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2) عين النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ عبارة عن معين.

13 A و B نقطتان مختلفتان من المستوي المركب لاحقتيهما العددين المركبين a و b على الترتيب ، M نقطة كيفية لاحقتها العدد المركب z .

عين لاحقة النقطة M' نظيرة النقطة M بالنسبة إلى المستقيم (AB) .

14 A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها الأعداد المركبة a ، b ، c على التوالي

1) بين أن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة يكافئ أن :

$a(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b})=0$

2) نفرض أن $A(1+i)$ ، $B(3-i)$

عين العلاقة بين z و $\overline{z}$ بحيث تكون النقطة M ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم (AB) .

15 اكتب على الشكل المثلثي كل عدد من الأعداد المركبة التالية :

أ) $z=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^7$ ، ب) $z=(1-i)^{2007}$

جـ) $z=(1-i)\left(\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}\right)$ ، د) $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$

16 j عدد مركب بحيث $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) اكتب على الشكل الجبري الأعداد j^2 ، j^3 ، j^5 ، j^{10} .

2) بين أن متتالية الأعداد المركبة z_n المعرفة بـ $z_n=j^n$ دورية يطلب تحديد دورها.

3) نضع $S_n=1+j+j^2+j^3+\dots+j^n$.

أ) احسب S_2

ب) بين أن $S_n=\frac{1-j^{n+1}}{1-j}$

جـ) بسط عبارة S_n لما $n=3p$ ، $n=3p+1$ ، $n=3p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$.

17 z عدد مركب بحيث $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

نضع $A=z+z^4$ و $B=z^2+z^3$

1) بين أن $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ ثم استنتج أن A و B هما حلان للمعادلة (E)

$x^2+x-1=0$ ....

2) أوجد A بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$

3) حل المعادلة (E) ثم استنتج قيمة $\cos\frac{2\pi}{5}$

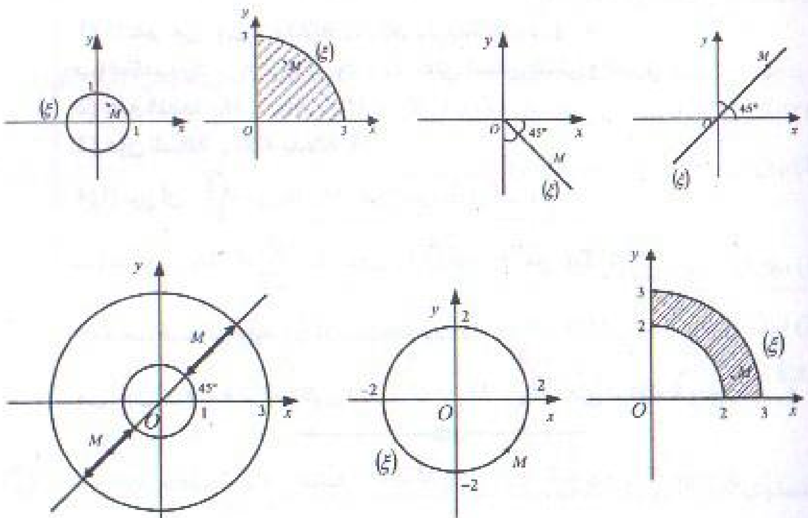
18 A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على التوالي $1+\sqrt{3}+i$ ، $1+\sqrt{3}-i$ ، $1-2i$.

1) بين أن النقط A ، B ، C تقع على نفس الدائرة التي مركزها O مبدأ المعلم.

2) قارن بين z_C و z_B-z_A ثم بين أن الرباعي $OABC$ عبارة عن معين.

19 في كل حالة من الحالات التالية مثلنا المجموعة (ξ) من النقاط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث $z=[r,\theta]$

عبر بدلالة θ أو r أو كلاهما عن هذه المجموعة (ξ)



20 θ عدد حقيقي من $\left]\frac{-\pi}{2},0\right[$

عين عمدة و طويلة العدد المركب $Z=\sin 2\theta-2i\sin^2\theta$

21 عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالتين التاليتين و مثلها

1) $|z| = 2|z-i|$

2) $|z| \leq 2|z-i|$

22 في المستوي المركب، مثل مجموعة النقط M التي لواحقها Z تحقق الشرط المعطى مع $(k \in \mathbb{Z})$

1) $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

2) $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

3) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2\pi}{3}$

4) $\arg(z+i) = \arg(z) + \arg(i) + 2\pi k$

23 في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$

نعتبر النقط M_n ذات اللواحق z_n حيث $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \left(1+i\sqrt{3}\right)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

1) أ) عبر عن z_{n+1} بدلالة z_n ثم z_n بدلالة z_0 و n.

ب) اكتب z_0 ، z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 على الشكل المثلثي والجبري.

2) علم النقط M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4.

3) عين المسافة OM_n بدلالة n.

4) أ) بين أن $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب) نضع $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_k M_{k+1}$ عين L_n بدلالة n ثم $\lim_{n \to +\infty} L_n$.

5) أوجد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ بدلالة n،

من أجل أي قيمة لـ n تكون النقط O ، M_0 ، M_n على استقامة واحدة.

24 من اجل كل $n \geq 2$ نضع $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

1) بين ان $S_n = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

2) ما هي $\lim_{n \to +\infty} (S_n)$ و $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ ؟

25 Z عدد مركب بحيث $Z = \left(2\sqrt{3}+2\right) + i\left(2\sqrt{3}-2\right)$

1) عين الأعداد الطبيعية n بحيث Z^n تخيليا صرفا.

2) عين الأعداد الطبيعية n بحيث Z^n حقيقيا سالبا. عبر عن Z^n بدلالة n.

26 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$

A ، B ، C ، D اربع نقط لواحقها على التوالي ؛

$a = 1$ ، $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ $d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$

1) اكتب c على الشكل الأسي و d على الشكل الجبري.

2) أ) علم النقط A ، B ، C ، D في المعلم السابق.

ب) بين أن الرباعي $OACB$ عبارة عن معين.

27 نضع $Z = re^{i\theta}$ مع $r > 0$

و ليكن Z_n حيث $Z_n = (z+\bar{z})\left(z^2+\bar{z}^2\right) \times \dots \times \left(z^n+\bar{z}^n\right)$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

1) احسب Z_3 و Z_4 بدلالة r و θ.

2) احسب Z_n بدلالة r و θ.

28 z_1 و z_2 عددان مركبان بحيث $|z_1| = |z_2| = 1$ عمدتاهما على التوالي α و β.

1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

2) بين ان $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ عدد حقيقي موجب تماما.

29 1) بين ان $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}$

2) استنتج من السؤال (1) قيمة كل من المجموعين S و T حيث ؛

$T = \sum_{k=0}^{4} \sin\frac{k\pi}{5}$ ، $S = \sum_{k=0}^{4} \cos\frac{k\pi}{5}$

30 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$

A و B نقطتان لاحقتاهما على التوالي -1 و 1.

M نقطة لاحقتها z_M حيث $z_M \neq 0$ ونسمي N النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z_M}$

1) بين ان $AN = \frac{AM}{OM}$

2) في كل ما يلي نفرض ان النقطة M تنتمي إلى دائرة مركزها B ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$

نضع $z_M=x+iy$ مع x و y حقيقيان.

أ) بين أن $x^2+y^2=2x+1$

ب) بين أن $|z_M+1|^2=2|z_M|^2$ ثم استنتج الطول AM بدلالة OM.

3) باستعمال السؤال (1) احسب الطول AN

4) أ) باستعمال نتيجة السؤال (2) بين أن $1-\frac{1}{z_M}=\frac{1}{|z_M|^2}(z_M+1)$

ب) استنتج أن الشعاعين $\overrightarrow{NB}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا.

- عين طبيعة الرباعي $ANBM$ إذا كانت النقطة M لا تنتمي إلى المستقيم (AB).

جـ) بين أنه إذا كان $|z_M|=1$ فإن $\|\overrightarrow{NB}\|=\|\overrightarrow{AM}\|$ ثم حدد وضعيتي النقطة M الممكنة في كلتا الحالتين ثم عين طبيعة الرباعي $ANBM$.

31 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$4(1-\sin\theta)z^2-2(1+\cos 2\theta)z+1+\sin\theta=0 \quad ..... (I)$$

حيث θ من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

2) اوجد طويلة و عمدة حلول المعادلة (I) بدلالة θ.

32 عين الجذور التكعيبية للعدد المركب $4\sqrt{2}(1+i)$

ثم مثل صور هذه الجذور في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

33 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3-i=0$ .... (1)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) ثم اكتب الحلول على الشكل المثلثي.

2) z_0 و z_1 حلي المعادلة (1) يختلفان عن $(-i)$، احسب z_0+z_1 و $z_0\times z_1$.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3-i=6(z+1)$

34 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$.

35 ليكن $p(z)$ كثير حدود معرف كما يلي $p(z)=z^3-2z^2-iz+3-i$

1) بين ان المعادلة $p(z)=0$ لها حل حقيقي ثم حل المعادلة $p(z)=0$

2) لتكن A ، B ، C نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ لواحقها حلول المعادلة $p(z)=0$ حيث C فاصلتها (-1)

برهن أن النقطة O هي مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,3)\}$

36 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $a^2-2ia-1=0$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z:

$$z^2-a(a+i)z+i\,a^3=0 \quad .... (1)$$

3) نضع $|a|=r$ و $\arg(a)=\theta$

احسب طويلة وعمدة حلي المعادلة (1) بدلالة r و θ.

37 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+(2i-1)z-1-i=0 \quad .... (1)$$

2) اكتب حلول المعادلة (1) على الشكل المثلثي.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^8+(2i-1)z^4-1-i=0$ .... (2)

38 $p(z)$ كثير حدود معرف كما يلي:

$$p(z)=z^3+(7-4i)z^2+(9-16i)z-9-12i$$

1) بين أن المعادلة $p(z)=0$ لها حل حقيقي z_0 عينه ثم اكتب $p(z)$ على الشكل $(z-z_0)(z^2+bz+c)$ حيث b و c عددان مركبان.

2) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، لتكن النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 حلول المعادلة $p(z)=0$ مع $|z_1|<|z_2|$

ما نوع المثلث ABC ؟

39 ليكن α عددا مركبا و $p_\alpha(z)$ كثير حدود معرف كما يلي:

$$p_\alpha(z)=z^3-\bar{\alpha}z^2+\alpha z-1$$

1) بين أنه إذا كانت z_0 ، z_1 ، z_2 حلولا للمعادلة $p_\alpha(z)=0$ فإن $z_0\,z_1\,z_2=1$

2) بين أنه إذا كان $p_\alpha(z)=0$ فإن $p_\alpha\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=0$

3) استنتج من السؤالين (1) و (2) انه يوجد عدد مركب z بحيث $p_\alpha(z)=0$ و $|z|=1$

4) نفرض أن $|\alpha|=1$ ، حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p_\alpha(z)=0$.

5) استنتج حلول المعادلة $\sqrt{2}z^3-(1+i)z^2+(1-i)z-\sqrt{2}=0$

40 نعتبر كثير الحدود ذو المتغير المركب z التالي $p(z)=2z^3+14z^2+41z+68$

1) أ) بين انه من أجل كل z يكون $p(z)=(z+4)(2z^2+6z+17)$

ب) حل المعادلة $p(z)=0$.

2) نرمز بـ z_1 ، z_2 ، z_3 إلى جذور $p(z)$

z_1 حقيقي و $\text{Im}(z_2) \rangle 0$.

نسمي النقط A ، B ، C لواحق z_1 ، z_2 ، z_3 على الترتيب.

أ) احسب $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ ماذا يمكن القول حول المثلث ABC ؟

ب) عين النقطتين D و E بحيث $BCDE$ مربع مركزه النقطة A .

41 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

أ) $81z^4-1=0$ ، ب) $z^4+2z^2-3=0$

جـ) $3z^4+2z^2-5=0$ ، د) $-z^4-z^2+2=0$

42 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-10z+169=0$

2) لتكن المعادلة $z^4-10z^3+171z^2-10z+1=0$ .... (I)

أ) بين أن المعادلة (I) تكافئ المعادلة $a\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+b\left(z+\frac{1}{z}\right)+c=0$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) .

43 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4+7+24i=0$ .... (I)

1) ليكن $z_0=2-i$

بين أن المعادلة (I) تكافئ المعادلة $z^4-z_0^4=0$

2) اكتب $z^4-z_0^4$ على شكل جداء اربع كثيرات حدود من الدرجة الأولى ، ثم استنتج حلول المعادلة (I).

3) بين أن صور الحلول في المستوي المركب هي رؤوس مربع.

44 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+12=0$ .... (I)

1-أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) نرمز بـ u و $\overline{u}$ إلى حلول (I)

حيث يكون الجزء التخيلي لـ u موجبا.

ب) احسب طويلة وعمدة u ثم استنتج طويلة وعمدة $\overline{u}$.

2-أ) لنعتبر العدد المركب $u-4$ اكتبه على الشكل الجبري ثم الأسي .

ب) احسب طويلة وعمدة العدد $\frac{u}{u-4}$ ثم استنتج طويلة وعمدة $\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$

ثم أنشئ صورة كل من u و $\overline{u}$.

45 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$ ، نسمي هذين الحلين z_1 و z_2 مع z_1 له جزء تخيلي موجب. اعط الشكل الأسي لـ z_1 و z_2 .

2) أ) علم في المستوي المركب النقطة A ذات اللاحقة 2 ، و B و C لاحقتاهما z_1 و z_2 و I منتصف $[AB]$

ب) برهن أن المثلث OAB متقايس الساقين ثم استنتج قيسا للزاوية $\left(\vec{u},\overrightarrow{OI}\right)$

جـ) احسب اللاحقة z_I للنقطة I ثم طويلة z_I .

3) استنتج مما سبق القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

46 ليكن z عددا مركبا حيث $z=x+iy$ و $\overline{z}$ مرافقه و لنعتبر z' العدد المركب المعرف كما يلي $z'=z^2+z\overline{z}+i\left(z-\overline{z}\right)-2i$

1) عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

2) عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' تخيليا صرفا.

47 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، من أجل كل نقطة m ذات اللاحقة z غير المعدومة نرفق النقطة M ذات اللاحقة $z'=\frac{1}{z^2}$

نضع $z=re^{i\theta}$.

1) اكتب z' على الشكل الأسي.

2) نفرض أن z'_0 عدد مركب معطى غير معلوم.

هل دائما يوجد z_0 بحيث :

$z'_0=\frac{1}{z_0^2}$ ؟ هل هو وحيد ؟

3) نفرض في هذا السؤال أن z طويلته 1 .

أ) إذا كانت m معطاة أنشئ M .

ب) ما هي مجموعة النقط m بحيث $z'=z$ ؟

4) نرمز بـ (d^*) إلى نصف المستقيم الذي يمر من O ما عدا النقطة O .

أ) ما هي مجموعة النقط M لما m تمسح (d^*) ؟

ب) ما هي مجموعة النقط m لما M تمسح (d^*) ؟

48 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس مباشر $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، من أجل كل نقطة m ذات اللاحقة z ترفق النقطة M ذات اللاحقة z' حيث :

$z'=\frac{z^3}{2+|z|^3}$ و $z=re^{i\alpha}$ و $z'=pe^{i\theta}$

1) عبر عن p و θ بدلالة r و α .

2) نرمز بـ (γ) إلى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 و T النقطة ذات اللاحقة $1-i$

أ) ما هي مجموعة النقط M لما m تمسح الدائرة (γ) ؟

ب) ما هي مجموعة النقط M لما m تمسح نصف المستقيم $[OT)$ ؟

3) لتكن f الدالة المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x^3}{2+x^3}$.

أ) ادرس تغيرات f ثم استنتج أن f متزايدة تماما على I وأن صورة I بالدالة f هي $[0,1[$

ب) استنتج أنه لما تكون m نقطة كيفية من المستوي المركب، فإن النقطة M هي من قرص يطلب تعيينه.

49 ليكن العدد المركب $z_0=\sqrt{2}(1+i)$

1) عين طويلة و عمدة z_0 و $\frac{1}{z_0}$.

2) علم في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين H و H' ذواتا اللاحقتين على الترتيب z_0 ، $\frac{1}{z_0}$.

3) لتكن M نقطة لاحقتها z حيث $z\neq 0$ وليكن M' لاحقتها $\frac{1}{z}$ وليكن D مرجح الجملة $\{(M,2),(M',1)\}$

احسب z' بدلالة z حيث D لاحقتها z'

4) حدد وضعية D لما $z=z_0$ ، ثم احسب z بحيث تكون D لاحقتها $\frac{1}{3}$.

5) بين أن الإحداثيتين $(x\ ,\ y)$ للنقطة D يمكن كتابتهما على الشكل :

$x=\frac{1}{3}\left(2r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta$ و $y=\frac{1}{3}\left(2r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$ حيث r و θ طويلة وعمدة z على الترتيب.

6) ما هي مجموعة النقط D لما M تمسح دائرة مركزها O ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

50 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

1) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $arg(z)+arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$

2) هل يوجد عدد مركب يحقق الشرطين :

$arg(z)+arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$ و $arg(z)-arg(z-1)=\theta$ ؟ مع $\theta\in[-\pi,\pi]$.

51 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ و z' عدد مركب حيث $z'=\frac{z+i}{iz-2}$

1) عين و ارسم (γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

2) عين و ارسم (γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' تخيليا صرفا.

3) عين و ارسم (γ_3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون :

$arg(z')=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

4) عين مجموعة النقط ذات اللاحقة z بحيث $z'=z$.

الدرس 11

الأعداد المركبة (قسم ثانٍ)

1 - الأعداد المركبة وحساب المثلثات

من اجل كل عدد حقيقي θ ، ومن اجل كل عدد صحيح n لدينا $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

اي $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

مبرهنة

من اجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا :

1) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\,\cos a + \sin b\,\cos a$

2) $\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

الإثبات

1) لدينا $e^{i(a+b)} = e^{ia}\times e^{ib}$

اي $\sin(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$

بعد تفكيك الطرف الثاني من المساواة وتبسيطه فإنه يكتب على الشكل التالي:

$(\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i\,(\sin a\cos b + \sin b\cos a)$

إذن بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases}\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a\end{cases}$$

2) لدينا $e^{i(a-b)} = e^{ia}\times e^{-ib}$

اي $\cos(a-b) + i\sin(a-b) = (\cos a + i\sin a)(\cos(-b) + i\sin(-b))$

بعد تفكيك وتبسيط الطرف الثاني فإنه يكتب بالصيغة الآتية :

$(\cos a\cos b + \sin a\sin b) + i\,(\sin a\cos b - \sin b\cos a)$ وبالمطابقة نجد :

$$\begin{cases}\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b\\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a\end{cases}$$

نتائج

1) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

2) $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

3) $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

4) $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

5) $\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p \;,\; \sin 2p = 2\sin p\cos p$

تمرين تدريبي

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$ ....(1)

2) بين أن المثلث ABC متقايس الساقين رأسه A إذا وفقط إذا كان :

$2\sin\hat{B}\,\cos\hat{C} = \sin\hat{A}$

✓ الحل

1) $\cos 3x - \cos 5x = -2\sin(4x)\sin(-x) = 2\sin 4x\,\sin x$

$\sin 6x + \sin 2x = 2\sin(4x)\cos x$

إذن المعادلة (1) تكتب على الشكل $2\sin 4x\sin x = 2\sin(4x)\cos x$

بالقسمة على 2 نجد $\sin 4x\sin x = \sin 4x\cos x$

ومنه ينتج $(\sin 4x)(\sin x - \cos x) = 0$

وهذا يعني $\sin 4x = 0$ أو $\sin x = \cos x$

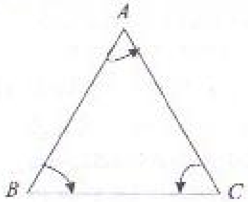
$\sin 4x = 0$ يكافئ $4x = k\pi \;,\; k\in\mathbb{Z}$ يكافئ $x = \frac{k\pi}{4}$

$\sin x = \cos x$ يكافئ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الأعداد الحقيقية من الشكل :

$\frac{k\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} + k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

2) - نفرض أن ABC متقايس الساقين يعني أن $\hat{B}=\hat{C}$



لدينا $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$ ومنه $\hat{A}=\pi-(\hat{B}+\hat{C})$

$$\sin\hat{A} = \sin\left(\pi-(\hat{B}+\hat{C})\right) = \sin(\hat{B}+\hat{C})$$

$$= \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{B}\cos\hat{C} = 2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$$

- عكسيا نفرض أن $\sin\hat{A} = 2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$ .... (*)

ونبين أن $\hat{C}=\hat{B}$

$$\sin\hat{A} = \sin\left(\pi-(\hat{B}+\hat{C})\right) = \sin(\hat{B}+\hat{C}) = \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{C}\cos\hat{B}$$

إذن المساواة (*) تكتب $2\sin\hat{B}\cos\hat{C} = \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{C}\cos\hat{B}$

بالتبسيط نجد $\sin\hat{B}\cos\hat{C} = \sin\hat{C}\cos\hat{B}$

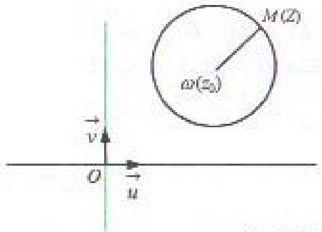
أي $\sin\hat{B}\cos\hat{C} - \sin\hat{C}\cos\hat{B} = 0$ أي $\sin(\hat{B}-\hat{C}) = 0$

ومنه نجد $\hat{B}-\hat{C}=0$ أي $\hat{B}=\hat{C}$

2 - الأعداد المركبة والأشكال الهندسية

استعمال الأعداد المركبة لمعالجة مشكل في الهندسة يضطرنا للعمل في معلم متعامد ومتجانس مباشر وذلك لحساب الطويلة والعمدة.

2 - 1 الدائرة



تعريف

r عدد حقيقي موجب تماما و ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها Z_0.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z

بحيث $|Z-Z_0| = r$ هي الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها r.

خاصية

المعادلة الوسيطية للدائرة التي مركزها ω ذات اللاحقة Z_0 ونصف قطرها r هي:

$$Z = Z_0 + r e^{i\theta}$$

أو $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$ حيث θ يمسح $\mathbb{R}$ و r عدد حقيقي موجب ثابت.

الإثبات

ليكن θ قيسا للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{\omega M})$ حيث M نقطة كيفية من الدائرة (C)

M نقطة من (C) إذا وفقط إذا كانت إحداثيات $\overrightarrow{\omega M}$ هي $(r\cos\theta , r\sin\theta)$.

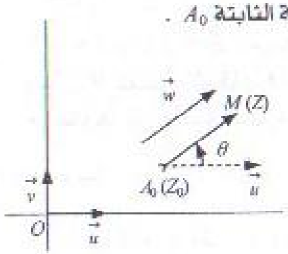
لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\omega M}$ هي $r\cos\theta + i r\sin\theta = r e^{i\theta}$

لكن $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{\omega M}$ ومنه ينتج $Z = Z_0 + r e^{i\theta}$

مثال - ♦

الدائرة التي مركزها $\omega(1,2)$ ونصف قطرها 2 معادلتها الوسيطية هي: $Z = 1+2i+2e^{i\theta}$ حيث θ تمسح $\mathbb{R}$.

2 - 2 نصف المستقيم - المستقيم



- ليكن θ عدد حقيقي ثابت و Z_0 عدد مركب صورته النقطة الثابتة A_0.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z مع $Z \neq Z_0$

بحيث $arg(Z-Z_0)=\theta$ هو نصف المستقيم المفتوح

الذي مبدؤه A_0 والموجه بالشعاع $\vec{w}$

بحيث $(\vec{u} , \vec{w}) = \theta$ ونرمز له ب $]A_0 t)$

خاصية

المعادلة الوسيطية لنصف المستقيم الذي مبدؤه A_0 ذات اللاحقة Z_0 وشعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث: $(\vec{u} , \vec{w}) = \theta$ هي $Z = Z_0 + r e^{i\theta}$ مع r يمسح $]0,+\infty[$ و θ عدد حقيقي ثابت.

الإثبات

لتكن M نقطة كيفية من نصف المستقيم (Δ) الذي مبدؤه A_0 وشعاع توجيهه $\vec{w}$

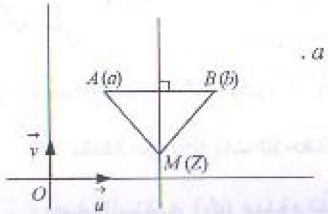
إذن $\overrightarrow{A_0M} = k\vec{w}$ مع $k \geq 0$

المساواة $\overrightarrow{A_0M} = k\vec{w}$ تكتب $Z - Z_0 = k \times k_1 e^{i\theta}$

حيث $\theta = arg(Z_{\vec{w}})$ و $\|Z_{\vec{w}}\| = k_1$

بوضع $k k_1 = r$ نجد $Z - Z_0 = r e^{i\theta}$ وهو المطلوب.

محور قطعة مستقيمة



A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب a و b مع $a \neq b$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z

بحيث $|Z-a| = |Z-b|$

هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

لأن $|Z-a| = |Z-b|$ تعني أن $AM = BM$

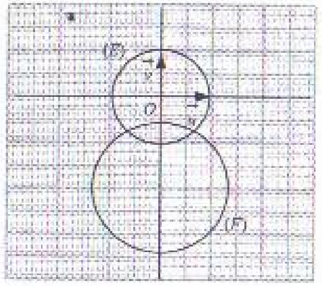
تمرين تدريبي 1

M نقطة لاحقتها $Z = e^{i\theta}$ مع θ عدد حقيقي كيفي.
نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة $Z \neq 0$ النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:

$$Z' = \frac{1+i}{Z} - 2i$$

1- ما هي E مجموعة النقط M لما θ تمسح $\mathbb{R}$؟
2- عبر عن Z' بدلالة θ واستنتج طبيعة F مجموعة النقط M'، ثم ارسم E و F.

الحل:



1) $Z = Z_0 + 1 \times e^{i\theta}$ حيث $Z_0 = 0$
بما أن θ تمسح $\mathbb{R}$ فإن M تمسح دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = 1$.

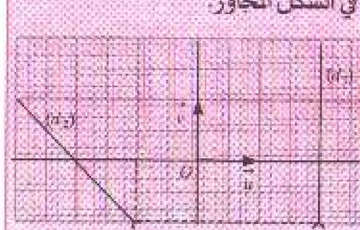
2) أ) لدينا $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن:

$$Z' = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\theta}} - 2i = -2i + \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

ب) مجموعة النقط M' لما θ تمسح $\mathbb{R}$ هي دائرة مركزها A ذات اللاحقة $-2i$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$

تمرين تدريبي 2

1) عبر بدلالة العمدة عن مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z لكل من نصفي المستقيمين المفتوحين (d_1) و (d_2) الموضحين في الشكل المجاور.



2) في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق الشرط المعطى:
أ) $\arg(Z+i) = \frac{\pi}{3}$ ،
ب) $\arg(Z-i) = \pi$

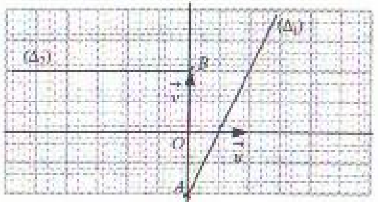
الحل

1) نصف المستقيم (d_1) مبدؤه A ذات اللاحقة $a = 2-i$
M نقطة من (d_1) ذات اللاحقة Z يعني $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}$ أي $\arg(Z-a) = \frac{\pi}{2}$
- نصف المستقيم (d_2) مبدؤه النقطة B ذات اللاحقة $b = -1-i$

M نقطة من (d_2) ذات اللاحقة Z يعني $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \frac{3\pi}{4}$ أي $\arg(Z-b) = \frac{3\pi}{4}$

2) أ) لدينا $\arg(Z+i) = \arg(Z-(-i))$
لتكن A نقطة ذات اللاحقة $-i$ و M نقطة ذات اللاحقة Z
إذن $\arg(Z+i) = \frac{\pi}{3}$ يكافئ $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3}$
ومنه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم المفتوح (Δ_1) الذي مبدؤه A.

ب) لتكن B نقطة ذات اللاحقة i و M نقطة ذات اللاحقة Z.
$\arg(Z-i) = \pi$ يكافئ $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \pi$
ومنه مجموعة النقط هي نصف المستقيم المفتوح (Δ_2) ومبدؤه B.



3- الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

مثال -

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{C}$ بـ $f(z) = iz$ و $g(z) = \frac{1}{2}z$

1) احسب $f(1)$ و $(gof)(1)$ ، $fog\,of(1)$ ، $gof\,og\,of(1)$
وعلم النقط الموافقة لهذه القيم في المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

2) نعتبر M النقطة ذات اللاحقة z و N ، P ، Q ، R النقط ذات اللواحق: $f(z)$ ، $gof(z)$ ، $fog\,of(z)$ ، $gof\,og\,of(z)$ على الترتيب.
أ) عين بدلالة z لواحق كل من هذه النقط.
ب) باستعمال النقط O ، M ، N فسر هندسيا المساواة $f(z) = iz$ مستنتجا طبيعة التحويل r من المستوي بحيث $r(M) = N$ ، $r(P) = Q$.
جـ) ما هو التحويل H من المستوي بحيث $H(N) = P$ و $H(Q) = R$

3) نضع $z = a + ib$ مع a و b عددين حقيقيين.
عين إحداثيات النقط M ، N ، P ، Q ، R بدلالة a و b.

الحل

1) $f(1) = i$ ، $(gof)(1) = g(f(1)) = g(i) = \frac{1}{2}i$

$$(fog\,of)(1) = fog\,(f(1)) = (fog)(i) = f(g(i)) = f\left(\frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2}$$

$$gof\,og\,of(1) = gof\,og\,(i) = gof\left(\frac{1}{2}i\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

نسمي A ، B ، C ، D لواحق $f(1)$ ، $(gof)(1)$ و $fog\,of(1)$ و $gof\,og\,of(1)$ على الترتيب.

2) 1) M لاحقتها z

N لاحقتها $f(z)$ أي iz

P لاحقتها $gof(z)$

حيث $gof(z) = g(f(z)) = g(iz) = \frac{1}{2}iz$

Q لاحقتها $fog\,of(z)$ حيث $fog\,of(z) = fog(iz) = f\left(\frac{1}{2}iz\right) = -\frac{1}{2}z$

R لاحقتها $gof\,og\,of(z)$ حيث $gof\,og\,of(z) = g\left(-\frac{1}{2}z\right) = -\frac{1}{4}z$

لدينا $f(z) = iz$

إذا كان $z \neq 0$ فإنه ينتج $\frac{f(z)}{z} = i$ أي $\frac{ON}{OM} = 1$ و $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \frac{\pi}{2}$

وهذا يعني أن N هي صورة M بدوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- بما أن $Z_Q = iZ_P$ فإن Q هي صورة P بدوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

إذن التحويل r هو دوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

جـ) $Z_N = iz$ و $Z_P = \frac{1}{2}iz$ أي $Z_P = \frac{1}{2}Z_N$

$Z_Q = -\frac{1}{2}z$ و $Z_R = -\frac{1}{4}z$ أي $Z_R = \frac{1}{2}Z_Q$

إذن التحويل الذي يحول N إلى P و Q إلى R هو تحاكي نسبته $\frac{1}{2}$ ومركزه النقطة O.

3) $M(a,b)$ ، $N(-b,a)$ ، $P\left(-\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a\right)$ ، $Q\left(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b\right)$ ، $R\left(-\frac{1}{4}a, -\frac{1}{4}b\right)$.

3 - 1 الكتابة المركبة لتحويل نقطي

ليكن F تحويل نقطي من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $F(M) = M'$

التطبيق f من $\mathbb{C}$ الذي يرفق بكل عدد مركب Z العدد المركب Z' حيث $f(Z) = Z'$ يسمى الدالة المركبة المرفقة للتحويل F.

$P \to P$	$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$F: M(Z) \mapsto M'(Z')$	$f: Z \mapsto Z'$

3 - 2 الكتابة المركبة للانسحاب

مبرهنة

الكتابة المركبة المرفقة للانسحاب t الذي شعاعه $\vec{w}$ هي $Z' = Z + b$ حيث b لاحقة $\vec{w}$.

الإثبات

من أجل كل نقطة $M(Z)$ النقطة M' صورة M بـ t يعني $t(M) = M'$ و $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$ أي $Z' - Z = b$ ومنه نجد $Z' = Z + b$

خاصية

M' و N' صورتي M و N على الترتيب بالانسحاب $t_{\vec{w}}$ يكافئ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

الإثبات

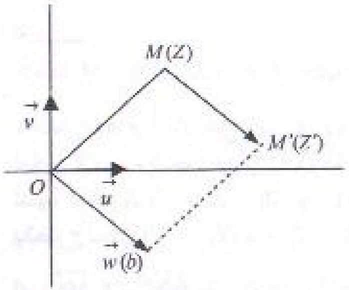
$t_{\vec{w}}(N) = N'$ يعني $Z_{N'} = Z_N + b$ .... (1)

$t_{\vec{w}}(M) = M'$ يعني $Z_{M'} = Z_M + b$ .... (2)

حيث $\vec{w}$ صورة العدد المركب b

بطرح (1) من (2) نجد $Z_{M'} - Z_{N'} = Z_M - Z_N$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{N'M'} = \overrightarrow{NM}$



مثال -

الكتابة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ هي $Z' = Z + 1 + 2i$

تمرين تدريبي

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي.

A ، B نقطتان لاحقتاهما $1+2i$ ، $3+5i$ على الترتيب.

عين الانسحاب الذي يحول A إلى B.

✓ الحل :

$Z_B = Z_A + b$ ومنه $b = Z_B - Z_A = 2 + 3i$

ومنه فإن الكتابة المركبة للانسحاب المطلوب هي $Z' = Z + 2 + 3i$

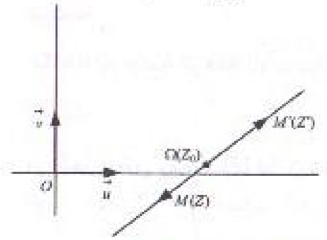
3 - 3 الكتابة المركبة للتحاكي

مبرهنة

k عدد حقيقي غير معدوم.

الكتابة المركبة المرفقة للتحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته k هي $Z'=kZ$

الكتابة المركبة المرفقة للتحاكي الذي مركزه Ω ذات اللاحقة Z_0 هي $Z'-Z_0=k(Z-Z_0)$



الإثبات

ليكن h تحاكي مركزه النقطة Ω ونسبته k

$h(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$

أي $Z'-Z_0=k(Z-Z_0)$

خاصية

إذا كانت M' و N' صورتي M و N على التوالي بالتحاكي الذي نسبته k فإن:

$\overrightarrow{M'N'}=k\,\overrightarrow{MN}$ و $M'N'=|k|\,MN$.

الإثبات

النقط M ، N ، M' ، N' لواحقها على التوالي Z_1 ، Z_2 ، Z_1' ، Z_2'.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MN}$ هي Z_2-Z_1 ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{M'N'}$ هي $Z_2'-Z_1'$

ليكن k نسبة التحاكي و Ω مركزه حيث Ω ذات اللاحقة Z_0.

لدينا $Z_1'-Z_0=k(Z_1-Z_0)$ و $Z_2'-Z_0=k(Z_2-Z_0)$

بالطرح نجد $Z_2'-Z_1'=k(Z_2-Z_1)$

أي $\overrightarrow{M'N'}=k\,\overrightarrow{MN}$

ملاحظة

التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته -1 هو التناظر المركزي الذي مركزه Ω.

تمرين تدريبي

t انسحاب شعاعه $\vec{w}(1+i)$ و h تحاكي مركزه $\Omega(1-i)$ ونسبته -2.

1) عين الكتابة المركبة المرفقة لـ t و h.

2) عين الكتابة المركبة المرفقة لـ $F=h\circ t$ ثم عين طبيعة F.

الحل

1) الكتابة المركبة المرفقة لـ t هي $Z'=Z+1+i$

الكتابة المركبة المرفقة لـ h هي $Z'-(1-i)=-2(Z-(1-i))$

أي $Z'-1+i=-2(Z-1+i)$

2) $t(M)=M'$ و $h(M')=M''$ ومنه $F(M)=M''$

لدينا $Z'=Z+1+i$ و $Z''-1+i=-2(Z'-1+i)$

إذن $Z''-1+i=-2\left[Z+1+i-1+i\right]$

$Z''-1+i=-2(Z+2i)$

$Z''=-2Z+1-5i$ .... (1)

لاحظ أنه يمكن كتابة (1) على الشكل:

$$Z''-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\right)=-2\left(Z-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\right)\right)$$

إذن $h\circ t$ هو أيضا تحاكي مركزه النقطة $B\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\right)$ ونسبته -2.

(مركز التحاكي هي النقطة الصامدة M حيث $F(M)=M$ أي $Z'=Z$)

3-4 الكتابة المركبة للدوران

مبرهنة

Ω نقطة ذات اللاحقة Z_0 و θ عدد حقيقي.

- الكتابة المركبة المرفقة للدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته θ هي $Z'=e^{i\theta}Z$
- الكتابة المركبة المرفقة للدوران r الذي مركزه النقطة Ω وزاويته θ هي:

$Z'-Z_0=e^{i\theta}(Z-Z_0)$

الإثبات

r دوران مركزه النقطة Ω وزاويته θ و M نقطة من المستوي تختلف عن Ω و M' صورة M بهذا الدوران.

$r(M)=M'$ تكافئ $(M=M')$ او $\left(\Omega M=\Omega M' \text{ و } (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta+2k\pi\right)$

- من أجل M تختلف عن Ω لدينا:

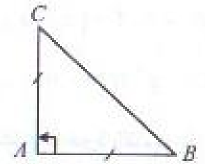
$$\left|\frac{Z'-Z_0}{Z-Z_0}\right|=1 \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{Z'-Z_0}{Z-Z_0}\right)=\theta+2k\pi$$

وهذا يعني أن $\frac{Z'-Z_0}{Z-Z_0}=e^{i\theta}$

أي $Z'-Z_0=e^{i\theta}(Z-Z_0)$ .... (*)

- من أجل M منطبقة على Ω العلاقة (*) تبقى صحيحة.

حالة خاصة



a ، b ، c لواحق النقط A ، B ، C على الترتيب.

- ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين.

- إذا كان اتجاه ABC مباشرا أي $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$

فإن الدوران $r\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول النقطة B إلى C

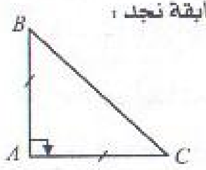
إذن $Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$

وهذه العلاقة تكتب $c - a = i(b-a)$

- إذا كان اتجاه ABC غير مباشر اي $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$

فإن الدوران $r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ يحول النقطة B إلى C وبنفس الكيفية السابقة نجد :

$Z_C - Z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$ اي $c - a = -i(b-a)$

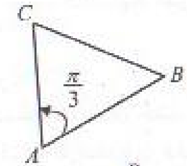


• ABC مثلث متقايس الأضلاع

- إذا كان اتجاه ABC مباشرا اي $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

فإن الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ يحول B إلى C

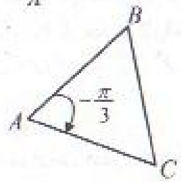
إذن $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$



- إذا كان اتجاه ABC غير مباشر اي $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$

فإن الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ يحول B إلى C

إذن $c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$



خاصية

- إذا كانت النقطتان M' و N' صورتي النقطتين المختلفتين M و N على الترتيب بالدوران الذي زاويته θ فإن $MN = M'N'$ و $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

الإثبات

ليكن Z_0 لاحقة مركز الدوران.

$M'N' = |Z_{N'} - Z_{M'}|$ و $MN = |Z_N - Z_M|$

لكن $Z_{N'} - Z_0 = e^{i\theta}(Z_N - Z_0)$ و $Z_{M'} - Z_0 = e^{i\theta}(Z_M - Z_0)$

بطرح طرفي هاتين المساواتين نجد :

$Z_{N'} - Z_{M'} = e^{i\theta}(Z_N - Z_M)$ ومن هذه المساواة ينتج :

$|Z_{N'} - Z_{M'}| = |Z_N - Z_M|$ و $\arg(Z_{N'} - Z_{M'}) = \theta + \arg(Z_N - Z_M) + 2k\pi$

اي $M'N' = MN$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta + (\vec{u}, \overrightarrow{MN}) + 2k\pi$

وهذه الأخيرة تكتب :

$M'N' = MN$ و $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta + 2k\pi$

خلاصة

F تحويل نقطي من المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :

$Z' = aZ + b$ مع a و b عددان مركبان و $a \neq 0$

- إذا كان $a = 1$ فإن F انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة b
- إذا كان $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإن F تحاكي نسبته a ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1-a}$
- إذا كان a عددا مركبا وليس حقيقيا و $|a| = 1$ فإن F دوران زاويته $\arg(a)$

ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1-a}$

تمرين تدريبي 1

r دوران مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $3i$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و r' دوران مركزه النقطة O مبدأ المعلم وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

1) عين الكتابة المركبة لـ $r'or$

2) استنتج طبيعة التحويل $r'or$.

الحل :

1) $$\begin{tikzcd} M(Z) \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "r'or"'] & M'(Z') \arrow[r, "r'"] & M''(Z'') \end{tikzcd}$$

الكتابة المركبة للدوران r هي $Z' - 3i = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - 3i)$

اي $Z' = iZ + 3i + 3$

الكتابة المركبة للدوران r' هي $Z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z'$ اي $Z'' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z'$

إذن $Z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(iZ + 3i + 3)$

$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$

وهي الكتابة المركبة لـ $r'or$

2) بما ان $Z'' = aZ + b$ حيث $a = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

و $b = \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$ و $|a| = 1$ فإن $r'or$ دوران زاويته $\arg(a) = 5\frac{\pi}{6}$

ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1-a}$

تمرين تدريبي 2

في المستوي الموجه نعتبر المثلثين ABC و ADE القائمين في A ومتساويي الساقين

بحيث $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{\pi}{2}$

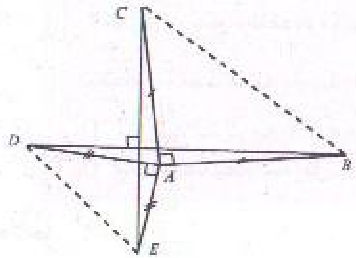
بين أن $BD = CE$ وأن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

1) باستعمال طرق هندسية.

2) باستعمال الأعداد المركبة.

الحل :

1) بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، صورة النقطة B هي C، و صورة النقطة D هي E ومنه :



$BD=CE$ و $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

و (CE) صورة (BD) بالدوران r.

المساواة $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

تعني أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

2) نرمز بـ b ، c ، d ، e إلى لواحق النقط B ، C ، D ، E في معلم متعامد ومتجانس مباشر مركزه النقطة A .

$r(B)=C$ و $r(D)=E$

إذن $c=ib$ و $e=id$ بالطرح نجد :

$e-c=i(d-b)$ وبالقسمة على $d-b$ نجد $\frac{e-c}{d-b}=i$

بما أن $\left|\frac{e-c}{d-b}\right|=1$ و $arg\left(\frac{e-c}{d-b}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

فإن $BD=CE$ و $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

إذن $BD=CE$ و (BD) يعامد (CE).

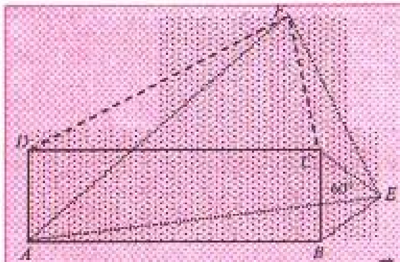
تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 الأشكال والأعداد المركبة

في الشكل المجاور $ABCD$ مستطيل CBE و DCF مثلثين متقايسي الأضلاع و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$

و $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}\right)=\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}\right)=\frac{\pi}{3}$

نفرض أن $AD=1$ و $AB=3$



1) اختر معلما متعامدا ومتجانسا $(O,\vec{u},\vec{v})$ مباشر يطلب تحديده، ثم عين لواحق النقط A ، B ، C ، D ، E ، F في هذا المعلم.

2) باستعمال السؤال 1) بين أن المثلث AEF متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر.

الحل

1) نختار المعلم $\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

بما أن $\left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=1$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$

فإن $\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ معلم متعامد ومتجانس مباشر.

لتكن Z_A ، Z_B ، Z_C ، Z_D ، Z_E ، Z_F لواحق A ، B ، C ، D ، E ، F على الترتيب.

$Z_A=0$ ، $Z_B=3$ ، $Z_C=3+i$ ، $Z_D=i$

- بما أن المثلث ECB متقايس الأضلاع فإن $Z_B-Z_E=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_C-Z_E\right)$

بالتبسيط نجد $Z_E=\frac{Z_B-e^{i\frac{\pi}{3}}Z_C}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}=\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}i$

- بما أن DCF متقايس الأضلاع فإن $Z_C-Z_F=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_D-Z_F\right)$

بالتبسيط نجد $Z_F=\frac{Z_C-e^{i\frac{\pi}{3}}Z_D}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{3}{2}+\left(1+3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

2) لإثبات أن المثلث AEF متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر يكفي أن نبين أن :

$$(Z_F - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_E - Z_A)$$

$$Z_F - Z_A = \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - 0 = \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$Z_E - Z_A = Z_E$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} Z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= \left(\frac{6+\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + i\left[\frac{1}{4} + \frac{6+\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

إذن AEF مثلث متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر.

تطبيق 2 إثبات التعامد والاستقامية

A ، B ، C ثلاث نقاط مختلفة فيما بينها لواحقها على التوالي a ، b ، c

1) ما هي الخاصية التي تحققها عمدة العدد $\frac{b-a}{c-a}$ لكي :

- النقط A ، B ، C على استقامة واحدة.
- المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

2) بين أن (CA) و (CB) متعامدان إذا علمت أن :

$a = -1 + 2\sqrt{3}i$ و $b = -1 - 2i\sqrt{3}$ و $c = 2 - i\sqrt{3}$ ،

الحل

1) لدينا $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$

- النقط A ، B ، C على استقامة واحدة تعني أن :

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \quad \text{أو} \quad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \pi$$

أي $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0$ أو $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \pi$

ومنه نستنتج أن $\frac{b-a}{c-a}$ حقيقي.

- المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان يعني :

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

أي $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

وهذا يعني أيضا أن $\frac{b-a}{c-a}$ تخيلي صرف.

2) $$\frac{b-a}{a-c} = \frac{-1-2\sqrt{3}i-2+i\sqrt{3}}{-1+2\sqrt{3}i-2+i\sqrt{3}} = \frac{-3-\sqrt{3}i}{-3+3\sqrt{3}i} \times \frac{-3-3\sqrt{3}i}{-3-3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{9-9+9\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i}{36} = \frac{12\sqrt{3}i}{36} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

بما أن $\frac{b-c}{a-c}$ تخيلي صرف فإن المستقيمين (CA) و (CB) متعامدان.

تطبيق 3 تعيين طبيعة مثلث

1) A و B نقطتان لاحقتاهما على التوالي $3\times\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و $3\times\left(1-i\sqrt{3}\right)$

بين أن النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 6.

2) عين لاحقة النقطة C بحيث النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC.

3) ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

الحل

1) لدينا $|Z_A| = 6$ و $|Z_B| = 6$ ومنه $|Z_A| = |Z_B| = 6$

وهذا يعني أن النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 6.

2) O مركز ثقل المثلث ABC يعني $Z_O = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

ومنه $Z_C = -Z_A - Z_B = -6$

بما أن $|Z_C| = 6$ فإن C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 6.

- بما أن مركز ثقل المثلث ABC منطبق على مركز الدائرة التي تشمل الرؤوس A ، B ، C فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع (المتوسط يصبح محورا).

تطبيق 4 المستقيمات الخاصة في مثلث

A ، B ، C ، D أربع نقط لواحقها على التوالي :

$a = 3-2i$ ، $b = 7i$ ، $c = 5+2i$ ، $d = -3-2i$

1) Ω نقطة لاحقتها $2i$.

بين أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 5.

2) E منتصف $[AB]$ لاحقتها e.

أ) احسب e ثم بين أن $\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$

ب) ما هي طبيعة المستقيم (EA) في المثلث DEC ؟

الحل

1) لدينا $|b-2i|=|5i|=5$ و $|a-2i|=5$ و $|c-2i|=5$ و $|d-2i|=5$

ومنه النقط A ، B ، C ، D تقع على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها 5 .

2) أ) لدينا $e=\frac{a+b}{2}=\frac{3+5i}{2}$

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{-3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i}=\frac{1-3i}{-3-3i}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

$$\frac{c-e}{a-e}=\frac{5+2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}=\frac{5-i}{3-9i}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

ومنه $\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$

ب) لدينا $arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right)=(\vec{ED},\vec{EA})$ و $arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)=(\vec{EA},\vec{EC})$

ومنه ينتج $(\vec{ED},\vec{EA})=(\vec{EA},\vec{EC})$

وهذا يعني أن (EA) منصف للزاوية $(\vec{ED},\vec{EC})$

وعليه المستقيم (EA) منصف للزاوية $(\vec{ED},\vec{EC})$ في المثلث DEC .

تطبيق 5 الكتابة المركبة والتحويل النقطي

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

M نقطة ذات اللاحقة $Z=1+2i$

عين Z' لاحقة النقطة M' صورة M بالتحويل المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

أ) الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}$.

ب) التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته 2 .

ج) الدوران الذي مركزه $A(1,3)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

د) التناظر المركزي الذي مركزه النقطة $B(1,-2)$.

هـ) التناظر المحوري الذي محوره (ox).

الحل

أ) $Z'=Z+1-2i=1+2i+1-2i=2$

ب) $Z'=2Z=2(1+2i)=2+4i$

ج) $Z'-(1+3i)=e^{i\frac{\pi}{3}}(Z-1-3i)=e^{i\frac{\pi}{3}}(-i)$

$Z'=1+3i-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{5}{2}\right)$

د) التناظر المركزي الذي مركزه B هو تحاكي مركزه B ونسبته -1.

$Z'-(1-2i)=-(Z-1+2i)$

$Z'=1-2i-1-2i+1-2i=1-6i$

هـ) $Z'=\overline{Z}=\overline{(1+2i)}=1-2i$

تطبيق 6 التعرف على طبيعة تحويل نقطي

a و b لاحقتا النقطتين A و B على الترتيب مرتبطتان بالعلاقة المعطاة.

ما هو التحويل الذي يحول A إلى B في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $b=a+2-3i$ ، ب) $b=-2a$ ، ج) $b-i=e^{i\frac{\pi}{4}}(a-i)$

د) $b=-\overline{a}$ ، هـ) $b+2+i=e^{i\frac{\pi}{6}}(a+2+i)$

الحل

أ) التحويل الذي يحول A إلى B هو انسحاب شعاعه $\vec{w}(2,-3)$

ب) التحويل الذي يحول A إلى B هو تحاكي نسبته -2 ومركزه النقطة O

ج) التحويل الذي يحول A إلى B هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة i وزاويته $\frac{\pi}{4}$

د) التحويل الذي يحول A إلى B هو التناظر المحوري الذي محوره المستقيم (oy)

هـ) التحويل الذي يحول A إلى B هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $-2-i$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

تطبيق 7 تعيين طبيعة تحويل وعناصره الأساسية

A ، B ، C ثلاث نقاط لواحقها على التوالي:

$a=6$ ، $b=-6+4i$ ، $c=-2-4i$

1- أ) تحقق أن $b-c=i(a-c)$

ب) استنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث :

$Z'=e^{i\frac{\pi}{3}}Z$

أ) ما هي طبيعة هذا التحويل ؟

ب) احسب a' ، b' ، c' لواحق النقط A' ، B' ، C' صور A ، B ، C بهذا التحويل.

3) P ، Q ، R منتصفات القطع $[A'B]$ ، $[B'C]$ ، $[C'A]$ لواحقها هي : p ، q ، r على الترتيب.

أ) احسب p ، q ، r

ب) تحقق أن $r-p=e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$ واستنتج أن المثلث PQR متقايس الأضلاع.

✓ الحل

1) أ) لدينا $b-c=(-6+4i)-(-2-4i)=-4+8i$

$i(a-c)=i(6+2+4i)=i(8+4i)=-4+8i$

ومنه $b-c=i(a-c)$ .... (*)

ب) من العلاقة (*) نستنتج أن B هي صورة A بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

إذن $CA=CB$ و $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}$

وبالتالي المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

2) أ) طبيعة التحويل هو دوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ب) $a'=e^{i\frac{\pi}{3}}a=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3+3\sqrt{3}i$

$b'=e^{i\frac{\pi}{3}}b=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-6+4i)=(-3-2\sqrt{3})+i(2-3\sqrt{3})$

$c'=e^{i\frac{\pi}{3}}c=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2-4i)=(-1+2\sqrt{3})+i(-2-\sqrt{3})$

3) أ) $p=\frac{a'+b}{2}=\frac{3+3\sqrt{3}i+4i-6}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}+4}{2}i$

$q=\frac{b'+c}{2}=\frac{(-3-2\sqrt{3})+i(2-3\sqrt{3})-2-4i}{2}=\frac{-5-2\sqrt{3}}{2}+\frac{i(-2-3\sqrt{3})}{2}$

$r=\frac{c'+a}{2}=\frac{(-1+2\sqrt{3})+i(-2-\sqrt{3})+6}{2}=\frac{5+2\sqrt{3}}{2}+i\frac{(-2-\sqrt{3})}{2}$

ب) $r-p=\frac{8+2\sqrt{3}}{2}+i\frac{(-2-\sqrt{3}-3\sqrt{3}-4)}{2}=(4+\sqrt{3})+i(-3-2\sqrt{3})$

$e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left[\left(\frac{-2-2\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{-2-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-4}{2}\right)\right]$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left[(-1-\sqrt{3})+i(-3-3\sqrt{3})\right]$

$=\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(-3-3\sqrt{3})\right]+i\left[\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(-1-\sqrt{3})\right]$

$=\left[\frac{-1-\sqrt{3}+3\sqrt{3}+9}{2}\right]+i\left[\frac{-3-3\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}{2}\right]$

$=\left[4+\sqrt{3}\right]+i\left[-3-2\sqrt{3}\right]$

ومنه نستنتج أن $r-p=e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$ .... (**)

من المساواة (**) نستنتج أن R هي صورة Q بالدوران الذي مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

إذن المثلث PQR متقايس الأضلاع.

تطبيق 8 صورة مربع بتحاكي

A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها :

$a=3i$ ، $b=3+3i$ ، $c=3+6i$ ، $d=6i$ على الترتيب.

1) بين أن الرباعي $ABCD$ مربع.

2) بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته $-\frac{1}{2}$ عين لواحق النقط A' ، B' ، C' ، D' صور A ، B ، C ، D على التوالي بهذا التحويل.

3) تحقق أن الرباعي $A'B'C'D'$ مربع.

✓ الحل

1) بما أن $c-b=3i$ ، $a-b=-3$ فإن $c-b=-i(a-b)$

وبالتالي $\frac{c-b}{a-b}=-i$

إذن $\left|\frac{c-b}{a-b}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)=-\frac{\pi}{2}$

وهذا يعني أن $BC=BA$ و $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{2}$.

إذن المثلث ABC متقايس الساقين وقائم في B .... (1)

بما أن $d-a=6i-3i=3i$ فإن $c-b=d-a$

و هذا يعني أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي $ABCD$ مربع.

2) لتكن a' ، b' ، c' ، d' لواحق A' ، B' ، C' ، D' على التوالي.

$$c' = -\frac{1}{2}c = -\frac{3}{2} - 3i \quad \text{و} \quad a' = -\frac{1}{2}a = -\frac{3}{2}i$$

$$d' = -\frac{1}{2}d = -3i \quad \text{و} \quad b' = -\frac{1}{2}b = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

3) بما أن $c' - b' = -i(a' - b')$ فإن $\frac{c'-b'}{a'-b'} = -i$

إذن $\left|\frac{c'-b'}{a'-b'}\right| = 1$ و $arg\left(\frac{c'-b'}{a'-b'}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$

وهذا يعني أن الرباعي $A'B'C'D'$ مربع.

تطبيق 9 الكتابة الأسية لعدد مركب - صور نقط بدوران

1) لتكن A نقطة لاحقتها $Z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ و B لاحقتها $Z_B = -Z_A$

اكتب Z_A و Z_B على الشكل الأسي، ثم علم النقطتين A و B.

2) C هي صورة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

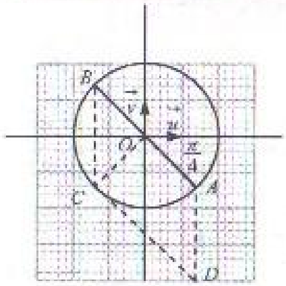
و D هي صورة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) علم النقطتين C و D، ثم اكتب لاحقة C على الشكل الجبري.

ب) عبر عن Z_D لاحقة D بدلالة Z_C و Z_A، ثم بين أن $Z_D = \sqrt{2} - i3\sqrt{2}$

3) ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

✓ الحل



1) لدينا $Z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ و $Z_B = -Z_A$

الكتابة الأسية لـ Z_A و Z_B هي:

$$Z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{و} \quad Z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

بما أن $|Z_B| = |Z_A|$ فإن النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{و} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ ، \ k \in \mathbb{Z}$$

2) أ) $\begin{cases} OC = OB \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ و $\begin{cases} AC = AD \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

بما أن C هي نظيرة B بالنسبة إلى (ox) فإن $Z_C = \overline{Z_B} = -\overline{Z_A} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

ب) $Z_D - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_A)$

$$Z_D = Z_A + e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_A) = Z_A + iZ_C - iZ_A$$

$$Z_D = (1-i)Z_A + iZ_C = (1-i)\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) + i\left(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\right) + i\left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}\right) - i\sqrt{2} + \sqrt{2} = -3\sqrt{2}i + \sqrt{2}$$

3) لدينا $Z_D - Z_A = -2\sqrt{2}i$ و $Z_C - Z_B = -2\sqrt{2}i$

ومنه ينتج $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = BC$

ولدينا $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{4}$

إذن نستنتج مما سبق أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

تطبيق 10 صور نقط بتحاكي ودوران وتعيين طبيعة رباعي

A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على التوالي:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ، \ b = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \ ، \ c = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1) عين d لاحقة D صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته -3.

2) عين e لاحقة E صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

3-أ) احسب $Z = \frac{d-b}{e-b}$

ب) I منتصف $[DE]$ و F نظيرة B بالنسبة إلى I، بين أن $BDFE$ مربع.

✓ الحل

1) لدينا $Z_D - Z_A = -3(Z_C - Z_A)$

$$d = Z_D = -3Z_C + 4Z_A = -3\left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 2\sqrt{2}$$

$$d = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i + 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

2) $e = Z_E = e^{-\frac{\pi}{2}i}Z_C = -iZ_C = -i(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

3) أ) $Z = \frac{d-b}{e-b} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{-\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

$$= \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

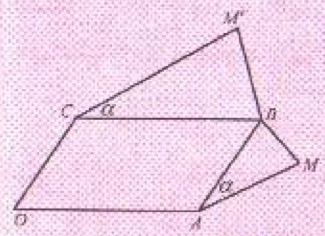
ومنه نستنتج أن $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{2}$ و $BE = BD$

ب) بما أن F نظيرة B بالنسبة إلى I و E نظيرة D بالنسبة إلى I فإن $BD = EF$ (التناظر تقايس) إذن $BDEF$ مربع.

تطبيق 11 — صورة نقطة بدوران

$OABC$ متوازي أضلاع مركتز بحيث الرأس O يبقى ثابتا، M و M' نقطتان بحيث $AM = AB$ و $CM' = CB$ و $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM'}) = \alpha$

نريد أن نبرهن أن النقطة M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته α.



1) نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا مركزه النقطة O ولتكن a و c لاحقتا A و C على الترتيب.

- احسب لاحقة النقطة B.

2) بواسطة دورانات عبر عن Z و Z' لاحقتي M و M' على التوالي بدلالة a، α و c ثم بين أن $Z' = e^{i\alpha} Z$ ماذا تستنتج ؟

✔ الحل

1) لدينا $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ (علاقة شال)

$Z_B = Z_A + Z_C = a + c$

2) M صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\alpha$

ومنه $Z - a = e^{-i\alpha}(a + c - a) = e^{-i\alpha} c$ ومنه $Z = a + e^{-i\alpha} \times c$

M' صورة B بالدوران الذي مركزه النقطة C وزاويته α

ومنه $Z' - c = e^{i\alpha}(b - c) = e^{i\alpha}(a)$ ومنه $Z' = c + e^{i\alpha} \times a$

لدينا $Z' = e^{i\alpha} \times a + (Z - a)e^{i\alpha} = a \times e^{i\alpha} + Z e^{i\alpha} - a \times e^{i\alpha} = Z \times e^{i\alpha}$

من المساواة $Z' = e^{i\alpha} Z$ نستنتج أن M' صورة M بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته α.

تطبيق 12 — المحل الهندسي

في المستوي الموجه $ABCD$ مربع مباشر مركزه النقطة O، النقطة M تتغير على القطعة $[BC]$ و N صورة M بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

منتصف $[MN]$.

نريد إيجاد المحل الهندسي للنقطة I لما M تمسح $[BC]$.

ليكن a طول نصف قطر المربع $ABCD$، نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا $(O, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{OC} = a\vec{u}$ و $\overrightarrow{OD} = a\vec{v}$

نضع $\overrightarrow{BM} = t\,\overrightarrow{BC}$ حيث t عدد حقيقي من $[0, 1]$.

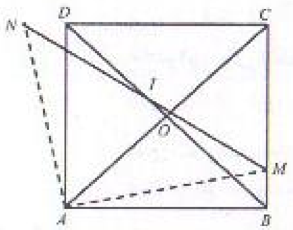
1- أ) عبر عن Z_M و Z_N لاحقتي M و N على الترتيب بدلالة a و t.

ب) تحقق أن النقط C، D، N على استقامة واحدة.

2- أ) احسب لاحقة النقطة I.

ب) استنتج المحل الهندسي للنقطة I.

✔ الحل



1) أ) لدينا $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{OD} + t\,\overrightarrow{BC}$

ومنه $Z_M = -Z_D + t(Z_C - Z_B)$

$= -ai + t(a + ai)$

$= -ai + ta + tai = (ta) + i(-a + ta)$

لدينا $Z_N - Z_A = i(Z_M - Z_A)$

ومنه $Z_N = Z_A + iZ_M - iZ_A = (1 - i)Z_A + iZ_M$

$= (1 - i)(-a) + i(ta + i(-a + ta))$

$= -a + ia + ita - (-a + ta)$

$= -ta + i(a + ta)$

ب) $\frac{Z_N - Z_D}{Z_C - Z_D} = \frac{-ta + i(a + ta) - ai}{a - ia} = \frac{-ta + ia + ita - ai}{a - ia}$

$= \frac{ta(-1 + i)}{-a(-1 + i)} = -t$

ومنه النقط N، D، C تقع على استقامة واحدة.

2) أ) لدينا $Z_I = \frac{Z_M + Z_N}{2}$

$Z_I = \frac{Z_M + Z_N}{2} = \frac{ta + i(-a + ta) - ta + i(a + ta)}{2} = ita$

ب) بما أن $a \geq ta \geq 0$ فإن I تنتمي إلى القطعة $[OD]$

ومنه المحل الهندسي للنقطة I هي القطعة $[OD]$.

تطبيق 13 — الدوران والتحاكي - مجموعة النقط

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$،

B و M_1 نقطتان لاحقتاهما على الترتيب i و $Z_1 = (\frac{\sqrt{3} - 1}{2}) \times (1 - i)$

1) احسب طويلة وعمدة Z_1

2) M_2 نقطة لاحقتها Z_2 صورة M_1 بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أوجد طويلة وعمدة Z_2 ثم استنتج أن M_2 تنتمي إلى المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x$

3) M_3 نقطة لاحقتها Z_3 صورة M_2 بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته $\sqrt{3}+2$

أ) تحقق أن $Z_3=\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$

ب) بين أن النقطتين M_1 و M_3 تنتميان إلى الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$

4) نرفق بكل نقطة M مختلفة عن B ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=\frac{1}{i-Z}$

عين ثم ارسم مجموعة النقط M بحيث النقطة M' تنتمي إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 .

الحل

1) $|Z_1|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}|1-i|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$$arg(Z_1)=arg(\frac{\sqrt{3}-1}{2})+arg(1-i)=0-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن $Z_1=\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{-\pi}{4}\right]$

2) لدينا $Z_2=e^{i\frac{\pi}{2}}Z_1=iZ_1$

$$|Z_2|=|i|\ |Z_1|=|Z_1|=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$arg(Z_2)=arg(i)+arg(Z_1)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن $Z_2=\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$

بما أن $arg(Z_2)=\frac{\pi}{4}$ فإن M_2 تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

3) أ) $Z_3=(\sqrt{3}+2)Z_2$

$$Z_3=(\sqrt{3}+2)iZ_1=(\sqrt{3}+2)i(\frac{\sqrt{3}-1}{2})(1-i)=(\sqrt{3}+2)(\frac{\sqrt{3}-1}{2})(1+i)$$

$$=(\frac{3-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2}{2})(1+i)=(\frac{1+\sqrt{3}}{2})(1+i)$$

ب) $|Z_1-i|=\left|(\frac{\sqrt{3}-1}{2})(1-i)\right|=\left|(\frac{\sqrt{3}-1}{2})-i(\frac{\sqrt{3}+1}{2})\right|$

$$=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2}$$

$$|Z_3-i|=\left|(\frac{1+\sqrt{3}}{2})+i(\frac{1+\sqrt{3}}{2})-i\right|$$

$$=\left|\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right|=\sqrt{(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2}$$

ومنه $|Z_3-i|=|Z_1-i|$ أي $BM_3=BM_1$

وهذا يعني أن M_1 و M_3 تنتميان إلى دائرة مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$

4) بما أن $OM'=1$ فإن $|Z'|=1$

لكن $|Z'|=\frac{1}{|Z-i|}$ ومنه $|Z-i|=1$

وهذا يعني أن النقطة M ذات اللاحقة Z تنتمي إلى دائرة مركزها B ونصف قطرها 1 .

تطبيق 14 متتالية الأعداد الحقيقية ومتتالية النقط

$(\vec{O},\vec{u},\vec{v})$ معلما للمستوي المركب ، نعتبر متتالية الأعداد الحقيقية (α_n) المعرفة بـ $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\alpha_{n+1}=\alpha_n+\frac{5\pi}{6}$

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي M_n نقطة من الدائرة (γ) ذات المركز O ونصف قطرها 1 بحيث الزاوية $(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM})$ قيسها α_n .

1) علم النقط M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 .

2) نسمي Z_n لاحقة النقطة M_n ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $Z_n=e^{i(\frac{\pi}{2}+5n\frac{\pi}{6})}$

3-أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ما يلي :

- النقطتان M_n و M_{n+6} متقابلتان قطريا.
- النقطتان M_n و M_{n+12} منطبقتان.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $Z_{n+4}=e^{-2i\frac{\pi}{3}}\times Z_n$

ثم استنتج أن المسافة M_nM_{n+4} تساوي $\sqrt{3}$.

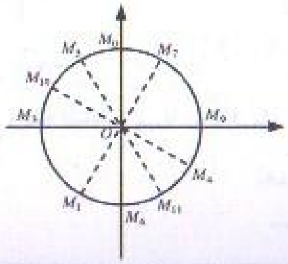
وأن المثلث $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ متقايس الأضلاع.

الحل

1) $M_0=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ، $M_1=\left[1\ ,\ \frac{4\pi}{3}\right]$ ، $M_2=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]$ ،

$M_3=[1\ ,\ \pi]$ ، $M_4=\left[1\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right]$ $M_5=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]$ ،

$M_6=\left[1,\frac{3\pi}{2}\right]$ ، $M_7=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$ $M_8=\left[1\ ,\ \frac{7\pi}{6}\right]$ ،



$M_{12}=\left[1\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ ، $M_{11}=\left[1\,,\,\frac{5\pi}{3}\right]$ $M_{10}=\left[1\,,\,\frac{5\pi}{6}\right]$ ، $M_9=[1\,,\,0]$

2) $Z_n=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5n\frac{\pi}{6}\right)}$

• نبرهن بالتراجع على هذه الخاصية :

- من اجل $n=0$ فإن $Z_0=\left[1\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ اي $Z_0=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\times 0\pi}{6}\right)}$

ومنه الخاصية محققة من اجل $n=0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n اي $Z_n=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5\frac{n\pi}{6}\right)}$

ونبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اي $Z_{n+1}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5\frac{(n+1)\pi}{6}\right)}$

$$Z_{n+1}=e^{i\alpha_{n+1}}=e^{i\left(\alpha_n+5\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\alpha_n}\times e^{i5\frac{\pi}{6}}$$

$$=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5\frac{n\pi}{6}\right)}\times e^{i5\frac{\pi}{6}}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3) M_n و M_{n+6} متقابلتان قطريا هذا معناه أن :

$$Z_{n+6}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5\frac{(n+6)\pi}{6}\right)}\quad ،\quad Z_{n+6}=-Z_n$$

$e^{i5\pi}=-1$ لأن $Z_{n+6}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}\times e^{i5\pi}=-e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

إذن M_n و M_{n+6} متقابلتين قطريا.

- النقطتان M_n و M_{n+12} منطبقتان إذا وفقط إذا كانت $Z_{n+12}=Z_n$

$e^{i10\pi}=1$ لأن $Z_{n+12}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+12)\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}\times e^{i10\pi}=Z_n$

ب) $Z_{n+4}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+4)\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}\times e^{i\frac{10}{3}\pi}$

$$Z_{n+4}=Z_n\times e^{i2\left(\frac{5\pi}{3}\right)}=Z_n\times e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

نعلم أن $M_{n+4}M_n=\left|Z_{n+4}-Z_n\right|$

$$\left|Z_{n+4}-Z_n\right|=\left|Z_n\right|\left|e^{-2i\frac{\pi}{3}}-1\right|=\left|e^{-2i\frac{\pi}{3}}-1\right|=\sqrt{3}$$

إذن $M_{n+4}M_{n+8}=\sqrt{3}$ و $M_nM_{n+4}=\sqrt{3}$ يبقى لنا ان نبين ان $M_nM_{n+8}=\sqrt{3}$

$$M_{n+8}M_n=\left|Z_{n+8}-Z_n\right|=\left|e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5(n+8)\frac{\pi}{6}\right)}-e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5n\frac{\pi}{6}\right)}\right|$$

$$=\left|e^{i\left(\frac{\pi}{2}+5n\frac{\pi}{6}\right)}\right|\left|e^{i\frac{20\pi}{3}}-1\right|=\sqrt{3}$$

ومنه المثلث $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ متقايس الأضلاع.

تمارين و مسائل

1

- A ، B ، C ثلاث نقاط لواحقها على الترتيب :

$Z_A=2+i$ ، $Z_B=5+2i$ ، $Z_C=-4-i$

1) علم النقط A ، B ، C في معلم متعامد ومتجانس.

2) احسب لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

ثم استنتج أن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة.

2

- A ، B ، C ، A' ، B' ، C' نقط لواحقها على الترتيب :

$a=2-i$ ، $b=3+3i$ ، $c=4+i$ ، $a'=3i$ ، $b'=4-i$ ، $c'=5+i$

1) عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$

2) احسب لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

3) بين أن G مركز ثقل المثلث $A'B'C'$.

3

- A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $a=\frac{3}{4}i$ ، $b=1-\frac{5}{4}i$ ، $c=2+\frac{7}{4}i$

1) علم النقط A ، B ، C .

2) أ) أوجد العلاقة بين $Z_{\overrightarrow{AB}}$ و $Z_{\overrightarrow{AC}}$

ب) استنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

3) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ مربعا.

4

- A_1 ، B_1 ، C_1 ثلاث نقط لواحقها على الترتيب :

$a_1=4$ ، $b_1=2+i\sqrt{3}$ ، $c_1=-2+3\sqrt{3}i$

ننشئ المربعات المباشرة $OA_1A_2A_3$ ، $OB_1B_2B_3$ ، $OC_1C_2C_3$

1) بين أن النقط A_1 ، B_1 ، C_1 على استقامة واحدة.

2) بين أن النقط A_3 ، B_3 ، C_3 على استقامة واحدة.

3) أ) بين أن لاحقة النقطة C_2 هي $c_2=(1+i)c_1$.

ب) استنتج أن النقط A_2 ، B_2 ، C_2 على استقامة واحدة.

5 - المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

1-1) اعط كتابة جبرية للعدد المركب الذي طويلته 2 وعمدته $\frac{\pi}{2}$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $iz-2=4i-z$.

2) نرمز بـ I ، A ، B للنقط ذات اللواحق $Z_I=1$ ، $Z_A=2i$ ، $Z_B=3+i$

أ) علم النقط A ، B ، I

ب) عين Z_C لاحقة النقطة C صورة A بالتناظر المركزي الذي مركزه I

ج) اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}$ ثم استنتج طويلته وعمدته.

د) D نقطة لاحقتها Z_D بحيث $Z_D-Z_C=Z_A-Z_B$ بين أن $ABCD$ مربع.

3) من أجل كل نقطة M من المستوي نعتبر الشعاع $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}$

أ) عبر عن هذا الشعاع بدلالة الشعاع $\vec{MI}$

ب) بين أن النقطة K التي تحقق $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{KD}+\vec{KC}=2\vec{AB}$ هي منتصف $[AD]$.

ج) عين (γ) مجموعة النقط M بحيث $\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\|=\|2\vec{AB}\|$ ثم ارسمها.

6 - A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $a=3$ ، $b=5-4i$ ، $c=5+i$

1) اكتب العدد المركب $\frac{b-a}{c-a}$ على الشكل الجبري.

2) استنتج عبارة $Z_{\vec{AB}}$ بدلالة $Z_{\vec{AC}}$ ثم بين أن (AB) و (AC) متعامدان.

7 - a و b عددان حقيقيان غير معدومين و x عدد حقيقي، r و θ هما على التوالي طويلة وعمدة العدد المركب $a+ib$

1) بين أن $\cos x+b\sin x=r\cos(x-\theta)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$

8 - A ، B ، C ، D أربع نقط لواحقها على الترتيب:

$a=1+2i$ ، $b=1-2i$ ، $c=2+3i$ ، $d=6-3i$

1) اكتب العددين المركبين $\frac{c-a}{d-a}$ و $\frac{c-b}{d-b}$ على الشكلين الجبري والمثلثي

2) استنتج من السؤال (1) طبيعة المثلثين ACD و BCD

3) بين أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة والتي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

9 - نرفق بكل عدد مركب $Z\neq i$ العدد المركب Z' المعرف بـ $Z'=\frac{Z-1+2i}{Z-i}$

1) احسب Z' من أجل القيمتين 1 و $1-i$ للعدد Z

2) نضع $Z=x+iy$ و $Z'=x'+iy'$ حيث x ، y ، x' ، y' أعداد حقيقية

أ) اكتب x' و y' بدلالة x و y

ب) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث Z' حقيقي.

ج) عين (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث Z' تخيلي صرف

د) مثل المجموعتين (E) و (F) في المستوي المركب.

3) A و B نقطتان لاحقتاهما على التوالي i ، $1-2i$ باعتبار الشعاعين الذين لاحقتيهما على التوالي $Z-1+2i$ و $Z-i$ عبر عن عمدة Z' .

10 - 1) عين ثم ارسم في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M التي لاحقتها Z تحقق:

أ) $|Z-2|=|Z-(1-i)|$

ب) $|Z-1-i|=|Z+2-3i)|$

ج) $|Z-3-i|=\sqrt{3}$

د) $|Z+2+i|\leq 2$

2) عين ثم ارسم في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M التي لاحقتها Z تحقق:

أ) $arg(Z+1)=\frac{\pi}{3}$ ، ب) $arg(Z-i)=\frac{\pi}{2}$

ج) $arg(Z-1+i)=\pi$ ، د) $arg(Z+i)=\frac{\pi}{3}$

11 - عين طبيعة التحويل الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $Z'=Z+2-i$ ، ب) $Z'=-\overline{Z}$

ج) $Z'-2+i=Z-i+2$ ، د) $Z'-1=2e^{i\frac{\pi}{3}}(Z-1)$

هـ) $Z'=6Z$ ، و) $Z'=(\frac{\sqrt{3}+i}{2})Z$

12 - 1) t هو انسحاب يحول $A(2-i)$ إلى $B(4+2i)$

أ) ما هي لاحقة شعاع الانسحاب t ؟

ب) ما هي الكتابة المركبة لـ t ؟

2) h تحاكي مركزه النقطة O يحول $C(-2i)$ إلى $D(-5+3i)$

أ) ما هي نسبة التحاكي h ؟

ب) ما هي الكتابة المركبة لـ h ؟

13 - A و B نقطتان حيث لاحقتيهما $Z_A = 2-i$ ، $Z_B = 1-3i$

1) عين لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالتناظر الذي مركزه A

2) عين لاحقة النقطة D صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

3) عين لاحقة النقط E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CA}$

4) عين لواحق النقط A' ، C' ، D' ، E' صور النقط A ، C ، D ، E بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ و ما هي طبيعة الرباعي $A'C'D'E'$ ؟

---

14 - A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $Z_A = 2+i$ ، $Z_B = -1+2i$ ، $Z_C = 1-2i$

1- أ) احسب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ واعط شكله الجبري.

ب) استنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

2) عين لاحقة النقطة D بحيث $ABCD$ متوازي أضلاع.

3) لتكن E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CA}$

عين لاحقة E ثم عين طبيعة الرباعي $ACDE$.

---

15 - A و B نقطتان حيث أن لاحقتيهما على التوالي $Z_A = 1$ و $Z_B = 2$ و θ عدد حقيقي من $]0 , \pi[$ ولتكن M نقطة لاحقتها $Z = 1 + e^{2i\theta}$

1) ما هي (γ) مجموعة النقط M لما θ يمسح $]0 , \pi[$ ؟

2) لتكن M' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته -2θ

نرمز بـ Z' لاحقة M' ،

بين أن $Z' = \overline{Z}$ ثم بين أن M' تنتمي إلى الدائرة (C_1) التي مركزها النقطة A ونصف قطرها 1 .

3) في كل ما يلي نضع $\theta = \frac{\pi}{3}$ ونسمي r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{-2\theta}{3}$

بحيث $r(A) = A'$

أ) عين (C_2) صورة (C_1) بالدوران r ثم مثل A ، B ، C ، M ، (C_1) ، (C_2) و M'

ب) بين أن المثلث AMO متقايس الأضلاع.

جـ) بين أن (C_1) ، (C_2) تتقاطعان عند O و M'

د) لتكن النقطة P نظيرة M بالنسبة إلى A بين أن M' هي منتصف $[A'P]$

---

16 - في مستوي موجه ABC مثلث متقايس الساقين مباشر رأسه A ، M منتصف $[BC]$ و O مسقطها العمودي على المستقيم (AC) ، I منتصف القطعة $[OM]$

الهدف من هذا التمرين هو الإثبات بواسطة الأعداد المركبة أن :

المستقيمين (IA) و (OB) متعامدان.

نضع $a = OA$ ، $c = OC$ ، $m = OM$

نختار المعلم المتعامد المتجانس المباشر $(O , \vec{u} , \vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{OA} = a\vec{u}$ ، $\overrightarrow{OM} = m\vec{v}$

1) أ) ما هي اللواحق Z_A ، Z_M ، Z_C ، Z_I للنقط A ، M ، C ، I على الترتيب ؟

ب) عين Z_B لاحقة النقطة B

2) أ) عبر عن $\theta = \frac{Z_A - Z_I}{Z_B}$ بدلالة a ، c ، m .

ب) بين أن الأعداد الحقيقية الموجبة a ، c ، m تحقق $ac = m^2$

جـ) استنتج أن θ تخيلي صرف.

د) ماذا تستنتج حول (IA) و (OB) ؟

الدرس 12

الجداءُ السُّلمِي في الفضاءِ

1. الجداء السلمي في المستوي (تذكير)

تعريف

$\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعان من المستوي.

- إذا كان أحد الشعاعين معدوم فإن الجداء السلمي معدوم أي $\vec{U}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{V}=0$
- إذا كان الشعاعان غير معدومين فإن الجداء السلمي لـ $\vec{U}$ و $\vec{V}$ هو العدد الحقيقي $\vec{U}\cdot\vec{V}$

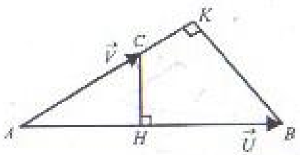
حيث $\vec{U}\cdot\vec{V}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos(B\hat{A}C)$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ممثلان على التوالي لـ $\vec{U}$ و $\vec{V}$

خواص

1) - إذا كانت H المسقط العمودي للنقطة C على (AB) و K المسقط العمودي لـ B على (AC)

فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}$



- إذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{CD}$ على (AB)

فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

2) إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعين مرتبطين خطيا وفي نفس الاتجاه فإن $\vec{U}\cdot\vec{V}=\|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|$

أي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

- إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ مرتبطين خطيا ومختلفين في الاتجاه فإن:

$$\vec{U}\cdot\vec{V}=-\|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|=-AB\times AC$$

3) $\vec{U}\cdot\vec{U}=\vec{U}^2=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$ يسمى $\vec{U}^2$ المربع السلمي لـ $\vec{U}$.

4) $\vec{U}$ ، $\vec{V}$ ، $\vec{W}$ ثلاث أشعة من المستوي و k عدد حقيقي لدينا:

$$\vec{U}\cdot\vec{V}=\vec{V}\cdot\vec{U}$$

$$\vec{U}\cdot(k\vec{V})=(k\vec{U})\cdot\vec{V}=k(\vec{U}\cdot\vec{V})$$

$$\vec{U}\cdot(\vec{V}+\vec{W})=\vec{U}\cdot\vec{V}+\vec{U}\cdot\vec{W}$$

$$(\vec{U}+\vec{V})^2=\vec{U}^2+2(\vec{U}\cdot\vec{V})+\vec{V}^2$$

$$(\vec{U}+\vec{V})\cdot(\vec{U}-\vec{V})=\vec{U}^2-\vec{V}^2$$

$$\left(\vec{U}-\vec{V}\right)^2=\vec{U}^2-2\left(\vec{U}\cdot\vec{V}\right)+\vec{V}^2$$

5) $\vec{U}\cdot\vec{V}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{U}+\vec{V}\|^2-\|\vec{U}\|^2-\|\vec{V}\|^2\right]$

6) $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{U}\cdot\vec{V}=0$

7) - في معلم متعامد ومتجانس إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ إحداثياتهما على التوالي (x,y) و (x',y')

فإن $\vec{U}\cdot\vec{V}=xx'+yy'$ و $\|\vec{U}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

- إذا كانت A و B نقطتين من المستوي إحداثياتهما على التوالي (x_A,y_A) ، (x_B,y_B)

فإن $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

نتائج

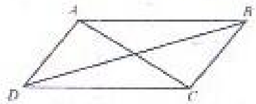
- في المتوازي الأضلاع $ABCD$ لدينا:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[AD^2-AB^2-AC^2\right]$$

- في المثلث ABC لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[AB^2+AC^2-BC^2\right]$
- إذا كانت A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$ فإن:

من أجل كل نقطة M من المستوي يكون $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ (نظرية التوسط).

- إذا كان ABC مثلثا كيفيا و a ، b ، c أطوال أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ فإن :
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})$ (نظرية الكاشي)
- في المتوازي الأضلاع $ABCD$ لدينا :
$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$ نظرية (فان نيومان).



تمرين تدريبي 1

$ABCD$ مستطيل بحيث $AB=5$ ، $AD=3$
لتكن B' ، D' مسقطي B و D على المستقيم (AC)
1-أ) احسب $\vec{AD}\cdot\vec{AC}$
ب) استنتج قيمة $\cos(D\hat{A}C)$ ، ثم القيمة المقربة لـ $D\hat{A}C$.
2-أ) احسب $\vec{CA}\cdot\vec{DB}$
ب) استنتج الطول $D'B'$

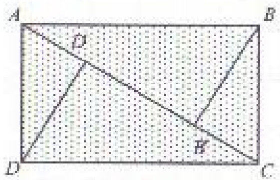
الحل :

1) أ) $\vec{AD}\cdot\vec{AC}=AD^2=9$ لأن D هي مسقط C على (AD)

ب) لدينا $\vec{AD}\cdot\vec{AC}=AD\times AC\cos(D\hat{A}C)$ ومنه $\cos(D\hat{A}C)=\frac{\vec{AD}\cdot\vec{AC}}{AD\times AC}$

$\cos(D\hat{A}C)=\frac{9}{3\times\sqrt{34}}=0{,}51$

القيمة المقربة لـ $D\hat{A}C$ هي 59,04 درجة.



2) أ) $\vec{CA}\cdot\vec{DB}=\vec{CA}\cdot\vec{D'B'}=-CA\times D'B'$ ...... (I)

$\vec{CA}\cdot\vec{DB}=\vec{CA}\cdot(\vec{DA}+\vec{AB})=\vec{CA}\cdot\vec{DA}+\vec{CA}\cdot\vec{AB}$

$=\vec{AC}\cdot\vec{AD}+\vec{CA}\cdot\vec{AB}=\vec{AC}\cdot\vec{AD}+(-\vec{AC})\cdot\vec{AB}$

$=\vec{AC}\cdot\vec{AD}-\vec{AC}\cdot\vec{AB}=AD^2-AB^2=9-25=-16$

ب) من المساواة (I) نجد $D'B'=\frac{-\vec{CA}\cdot\vec{DB}}{CA}=\frac{16}{\sqrt{34}}$

تمرين تدريبي 2

ABC مثلث قائم في A ، M منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ و H المسقط العمودي لـ A على (BC)، K و L مسقطي H على التوالي على $[AB]$ و $[AC]$
بين أن المستقيمين (AM) و (KL) متعامدان.

الحل :

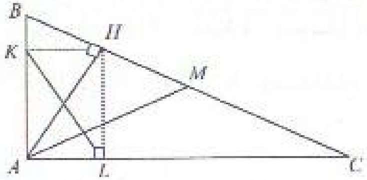
لإثبات أن (AM) و (KL) متعامدان نثبت أن $\vec{AM}\cdot\vec{KL}=0$

بما أن M منتصف $[BC]$ فإن $\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$

نحسب $\vec{AB}\cdot\vec{KL}$ و $\vec{AC}\cdot\vec{KL}$

$\vec{AB}\cdot\vec{KL}=\vec{AB}\cdot\vec{KA}=\vec{AB}\cdot\vec{HA}$ (استعملنا الإسقاط العمودي على (AB))

$\vec{AC}\cdot\vec{KL}=\vec{AC}\cdot\vec{AL}=\vec{AC}\cdot\vec{AH}$



- $\vec{AM}\cdot\vec{KL}=\frac{1}{2}(\vec{AB}\cdot\vec{KL})+\frac{1}{2}(\vec{AC}\cdot\vec{KL})$

$=\frac{1}{2}(\vec{AB}\cdot\vec{HA})+\frac{1}{2}(\vec{AC}\cdot\vec{AH})$

$=\frac{1}{2}\vec{AH}\cdot(-\vec{AB}+\vec{AC})$

$=\frac{1}{2}\vec{AH}\cdot\vec{BC}=0$

لأن H مسقط A على (BC).

2 - معادلة مستقيم ودائرة في المستوي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

- إذا كان $\vec{n}(a,b)$ الشعاع الناظم لمستقيم (d) فإن معادلة (d) تكتب على الشكل $ax+by+c=0$
وبالعكس إذا كان a و b عددين حقيقيين غير معدومين معا، فإن المعادلة $ax+by+c=0$ هي معادلة لمستقيم شعاعه الناظم إحداثياته (a,b)
- الدائرة ذات المركز $I(a,b)$ وطول نصف القطر r هي مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $IM=r$. ومعادلة هذه الدائرة هي $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
- الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M بحيث $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

تمرين تدريبي

في معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط $A(2,3)$ ، $B(3,5)$ ، $C(0,4)$
1- بين أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.
2- عين معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .
3- عين معادلة متوسط القطعة $[BC]$.

✓ الحل :

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(1,2)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,1)$ ، $\overrightarrow{BC}(-3,-1)$

نلاحظ أن $AB = AC = \sqrt{5}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

2) بما أن الدائرة محيطة بالمثلث القائم والمتساوي الساقين ABC ، فإن قطرها هو $[BC]$
ومركزها هو I منتصف $[BC]$.
إحداثيتا I هما $(1,5 ، 4,5)$ و $BC = \sqrt{10}$
إذن معادلة الدائرة هي $(x-1,5)^2 + (y-4,5)^2 = 10$

4) الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع الناظم لمتوسط القطعة $[BC]$.
لتكن $M(x,y)$ نقطة من متوسط القطعة $[BC]$.

لدينا إذن $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ ومنه ينتج $3x + y - 9 = 0$.

3 . المسافة بين نقطة ومستقيم في المستوي

تعريف

ليكن (d) مستقيم من المستوي و M نقطة كيفية من المستوي .
نسمي مسافة بين النقطة M والمستقيم (d) . العدد الحقيقي الموجب HM
حيث H المسقط العمودي للنقطة M على (d) .

خاصية

ليكن (d) مستقيما معادلته $ax + by + c = 0$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و M_0 نقطة من المستوي إحداثيتاها (x_0 , y_0) .

المسافة بين M_0 و (d) تساوي $\dfrac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمرين تدريبي

نعتبر في معلم متعامد ومتجانس المستقيم (d) ذا المعادلة $x + 2y + 3 = 0$
ولتكن A نقطة إحداثياتها $(1,2)$
1) عين المسافة بين A و (d)
2-أ) تحقق أن النقطتين $B(-1,-1)$ ، $C(-5,1)$ تنتميان إلى (d) ،
ثم عين مساحة المثلث ABC
ب) عين المسافة بين B و (AC) ثم اعط قيمة مقربة لها.

✓ الحل :

1) المسافة بين A و (d) هي $\dfrac{|1+2\times 2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

2) أ) بما أن $-1+2(-1)+3=0$ فإن النقطة B تنتمي إلى (d) .
وبنفس الطريقة نبين أن النقطة C تنتمي إلى (d) .

مساحة المثلث ABC هي $\dfrac{BC\times AH}{2}$ حيث $[AH]$ هو الارتفاع المرسوم من A في المثلث ABC

ومن السؤال (1) لدينا $AH = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ إذن $\dfrac{BC\times AH}{2} = \dfrac{5\times\frac{8}{\sqrt{5}}}{2} = 4\sqrt{5}$

ب) مساحة المثلث ABC هي $\dfrac{1}{2}h\,AC$ حيث h طول العمود المرسوم من B في المثلث ABC

إذن $\dfrac{1}{2}h\ AC = 4\sqrt{5}$ ومنه $h = \dfrac{8\sqrt{5}}{AC} = \dfrac{8\sqrt{5}}{\sqrt{37}}$

4 . الجداء السلمي في الفضاء

مثال - ♦

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات قائم حيث $AB = 2a$ و $BC = BF = a$
مع a عدد حقيقي موجب تماما.

1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}$ في المستوي (AED) .

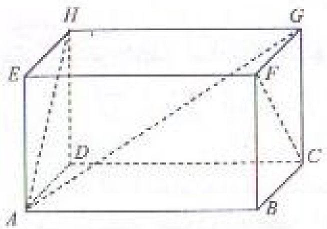
2-أ) الأشعة $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{CF}$ من نفس المستوي لماذا ؟

ب) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AH}$ في المستوي (AED) مستنتجا $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AH}$.

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$ في المستوي (ABC) مستنتجا $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HG}$.

4-أ) المستقيمان (AD) و (GD) متعامدان لماذا ؟

ب) احسب $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}$ في المستوي (ADG)
وتحقق باستعمال السؤالين (1) و (3) أن
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HG}$



✓ الحل :

1) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} = AD^2 = a^2$
لأن D هي المسقط العمودي للنقطة H على (AD)

2) أ) بما أن $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ فإن الأشعة $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{CF}$ تنتمي إلى نفس المستوي (AED)

ب) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ لأن الرباعي $AEHD$ مربع

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$

3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ لأن الرباعي $ABDC$ مستطيل

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$

4) أ) بما أن (AD) عمودي على المستوي (GDC) فإنه عمودي على كل مستقيم منه، إذن فهو عمودي على (DG)

ب) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG})$

$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DG} = AD^2 + 0 = a^2$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HG} = a^2 + 0 = a^2$

إذن $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$

4 . 1 تعريف

ليكن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعين من الفضاء.

- إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ غير معدومين و $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ممثليهما على التوالي، فإنه يوجد على الأقل مستوي يشمل النقط A ، B ، (E).

نسمي الجداء السلمي للشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بالجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ المحسوب في المستوي (ABC)

أي $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC . \cos(B\hat{A}C)$

- إذا كان أحد الشعاعين معدوما فإن جداءهما السلمي معدوم أي $\vec{U} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{V} = 0$

خواص

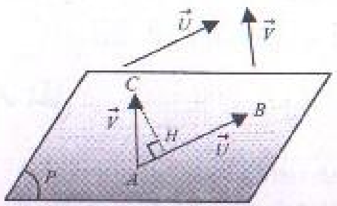
كل خواص الجداء السلمي في المستوي تبقى صحيحة في الفضاء وبالأخص:

1) $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$

حيث H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

و K المسقط العمودي للنقطة B على (AC)



2) $\vec{U} \cdot (k\vec{V}) = k(\vec{U} \cdot \vec{V})$

3) $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$

4 - 2 العبارة التحليلية للجداء السلمي - المسافة بين نقطتين

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

- إذا كان $\vec{V}$ و $\vec{U}$ شعاعان إحداثياتهما على التوالي (x, y, z) ، (x', y', z') في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

فإن $\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy' + zz'$

وبصفة خاصة $\vec{U} \cdot \vec{U} = x^2 + y^2 + z^2$ و $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- إذا كانت A و B نقطتين من الفضاء إحداثياتهما على التوالي (x_A, y_A, z_A) ، (x_B, y_B, z_B)

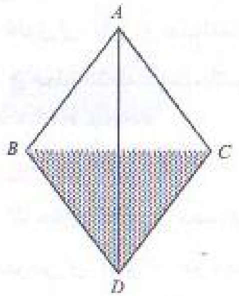
فإن $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

تمرين تدريبي 1

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم بحيث كل وجه هو مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه $C(3.5)$

- احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

✓ الحل:



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB . AC \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} a^2$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} a^2$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = 0$

تمرين تدريبي 2

$ABCDEFGH$ مكعب و $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

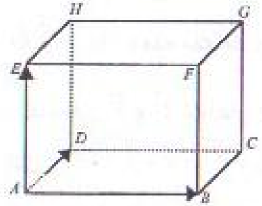
أ) عين إحداثيات الأشعة $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{ED}$

ب) بين أن المستقيم (AG) يعامد المستوي (BED)

✓ الحل:

أ) $A(0,0,0)$ ، $B(1,0,0)$ ، $C(1,1,0)$ ، $D(0,1,0)$ ، $E(0,0,1)$ ، $F(1,0,1)$ ، $G(1,1,1)$ ، $H(0,1,1)$ ، $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$ ، $\overrightarrow{BE}(-1,0,1)$ ، $\overrightarrow{ED}(0,1,-1)$.

ب) كل مستقيم يعامد مستقيمين متقاطعين فإنه يعامد المستوي الذي يشملهما.



$\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{BE} = -1+0+1=0$ ومنه (AG) عمودي على (BE).

$\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{ED} = 0+1-1=0$ ومنه (AG) عمودي على (ED).

بما أن (AG) عمودي على (ED) وعلى (BE).

و (ED) و (BE) متقاطعين فإنه عمودي على المستوي الذي يشمل (ED) و (BE) أي عمودي على (BED).

5- التعامد في الفضاء

1.5 أشعة متعامدة

في الفضاء، القول أن الشعاعين الغير المعدومين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان يعني أنه إذا كان $\vec{U}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{V}=\overrightarrow{CD}$ فإن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

مبرهنة

1- القول أن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان يكافئ القول أن $\vec{U}\,.\,\vec{V}=0$

2- في معلم متعامد ومتجانس، الشعاعان $\vec{U}(x,y,z)$ و $\vec{V}(x',y',z')$ متعامدان يكافئ $xx'+yy'+zz'=0$

الإثبات

1- إذا كان $\vec{U}$ أو $\vec{V}$ معدوم فإن $\vec{U}\,.\,\vec{V}=0$

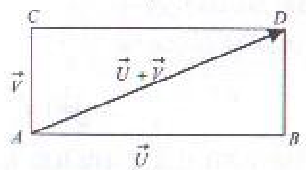
- نفرض أن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ غير معدومين عندئذ توجد نقط مختلفة A ، B ، C بحيث:

$\vec{U}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{V}=\overrightarrow{AC}$

ولتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

حسب تعريف الجداء السلمي لدينا:

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right]$$



$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$

يكافئ $AD^2=AB^2+AC^2$

إذن وحسب نظرية فيثاغورس ينتج أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان

وعليه $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان.

2- لدينا $\vec{U}\,.\,\vec{V}=xx'+yy'+zz'$ ومن (1) نستنتج أن:

$\vec{U}\,.\,\vec{V}=0$ يكافئ $xx'+yy'+zz'=0$.

2.5 الشعاع الناظم لمستوي - تعامد مستقيم ومستوي

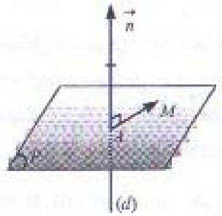
الشعاع الناظم لمستوي

- القول ن الشعاع الغير معدوم $\overrightarrow{AB}$ ناظم للمستوي (P) يعني أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (P)
- الشعاع الناظم لمستوي (P) هو شعاع غير معدوم $\vec{n}$ بحيث منحاه يعامد المستوي (P)

تعامد مستقيم و مستوي

- (d) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{n}$ و A نقطة منه.

المستوي (P) العمودي على (d) في A هو مجموعة النقط M حيث أن المستقيم (AM) عمودي على المستقيم (d).



إذن (P) هو مجموعة النقط M حيث أن (AM) يعامد $\vec{n}$.

وعليه يكون $\vec{n}$ هو الشعاع الناظم لـ (P).

- مجموعة نقط المستوي

- المستوي الذي يمر من النقطة A و شعاعه الناظمي $\vec{n}$

هو مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n}=0$

ملاحظة

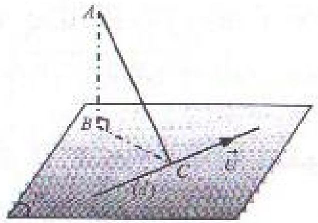
$\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ شعاعان ناظمان لـ (P_1) و (P_2) على الترتيب

- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطين خطيا فإن (P_1) و (P_2) متوازيان أو منطبقان.
- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ متعامدين فإن (P_1) و (P_2) متعامدان والعكس صحيح.
- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مستقلين خطيا فإن (P_1) و (P_2) متقاطعان.

تمرين تدريبي

(d) مستقيم محتوى في (P) و A نقطة خارجة عن (P) و B مسقطها عليه.
و C هي المسقط العمودي للنقطة B على (d).
بين أن المستقيمين (AC) و (d) متعامدان.

✓ الحل :



للبرهان على أن مستقيمين متعامدان يكفي أن نبرهن أن الجداء السلمي لشعاعي توجيههما معدوم.

$\overrightarrow{AC}.\vec{U} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).\vec{U}$

$= \overrightarrow{AB}.\vec{U}+\overrightarrow{BC}.\vec{U} = 0+0=0$

لأن (AB) عمودي على (P) و $\overrightarrow{BC}$ عمودي على $\vec{U}$.

6. المعادلة الديكارتية لمستوي

6-1 المعادلة الديكارتية لمستو

مبرهنة

- كل مستوي (P) شعاعه الناظم $\vec{n}(a,b,c)$ له معادلة ديكارتية من الشكل :

$ax+by+cz+d=0$

حيث a,b,c أعداد حقيقية غير معدومة معا.

- بالعكس مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث $ax+by+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ هي مستوي شعاعه الناظم $\vec{n}(a,b,c)$

الإثبات

لتكن $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من المستوي (P) .

- النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى (P) يكافئ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

وعليه ينتج $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بعد النشر والتبسيط

نجد $ax+by+cz+d=0$ حيث $d=-ax_0-by_0-cz_0$

- بما أن a,b,c ليست كلها معدومة معا فيمكننا أن نفرض $a\neq 0$.

نسمي (E) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $ax+by+cz+d=0$

النقطة $A\left(-\frac{d}{a},0,0\right)$ تنتمي إلى (E) .

وبالتالي فإن معادلة (E) تكتب على الشكل $a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$

أي $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ حيث $\vec{n}(a,b,c)$

إذن (E) هو المستوي المار من النقطة A وشعاعه الناظم هو $\vec{n}(a,b,c)$.

مثال -

في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1,1,-1)$ ، $B(3,1,-2)$ ، $C(2,0,-2)$

أ) بين أن النقط A ، B ، C تحدد مستوي.

ب) عين شعاعا ناظما للمستوي (ABC)

جـ) عين معادلة للمستوي (ABC) .

✓ الحل :

أ) حتى تحدد النقط A ، B ، C مستويا يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا وبالتالي

فإن النقط A ، B ، C تحدد مستوي.

ب) ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC) فهو إذن عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$

إذن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ يكافئ $2a-c=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $a-b-c=0$

ومنه نستنتج $c=2a$ و $b=-a$

إذن $\vec{n}(a,-a,2a)$ أي $\vec{n}=a(1,-1,2)$

إذن يوجد عدد غير منته من الأشعة الناظمية، نختار على سبيل المثال الشعاع الموافق للعدد $a=1$ فنجد $\vec{n}(1,-1,2)$

جـ) تعيين معادلة المستوي (ABC) :

طريقة- 1 :

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من (ABC) عندئذ:

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ ومنه ينتج $(x-1)-1(y-1)+2(z+1)=0$

بالتبسيط نجد $x-y+2z+2=0$.

طريقة- 2 :

بما أن $\vec{n}(1,-1,2)$ ناظم للمستوي (ABC)

فإن معادلة (ABC) هي $x-y+2z+d=0$

وبما أن $A\in(ABC)$ فإن $1-1-2+d=0$ أي $d=2$

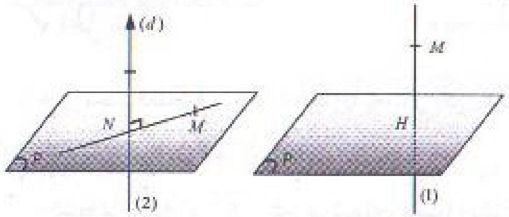
ومنه تكون معادلة المستوي (ABC) هي $x-y+2z+2=0$.

6 . 2 المسافة بين نقطة و مستوي

تعريف

1) M نقطة من الفضاء و (P) مستوي.
يوجد مستقيم واحد عمودي على (P) يمر بالنقطة M . هذا المستقيم يقطع (P) في نقطة وحيدة H والتي تسمى بالمسقط العمودي للنقطة M على (P)
نسمي المسافة بين M و (P) بالطول MH

2) لتكن M نقطة من الفضاء و (d) مستقيم.
يوجد مستوي وحيد يمر بالنقطة M ويعامد (d) ويقطعه في نقطة وحيدة .
هذه النقطة تسمى بالمسقط العمودي للنقطة M على (P) .



مبرهنة

في معلم متعامد ومتجانس المسافة بين النقطة $A(\alpha, \beta, \gamma)$ والمستوي (P) ذو المعادلة : $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال - ◆

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.
$A(1,2,3)$ نقطة منه و (P) مستوي معادلته الديكارتية $2x+3y+z-2=0$
- بين أن A لا تنتمي إلى (P) ، ثم احسب المسافة بين A و (P) .

✔ الحل :

بما أن $2\times1+3\times2+3-2=9$ فإن المعادلة غير محققة وبالتالي A لا تنتمي إلى (P) .

المسافة بين A و (P) هي $\dfrac{|2\times1+3\times2+3-2|}{\sqrt{4+9+1}}=\dfrac{9}{\sqrt{14}}$

6 . 3 نصف الفضاء

ليكن (P) مستوي معادلته $ax+by+cz+d=0$ مع a,b,c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة. ولتكن $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من هذا المستوي.

المستوي (P) يُقسم الفضاء إلى نصفي فضاء حيث أن في أحدهما يكون فيه $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} > 0$ وفي الآخر يكون $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} < 0$.

لكن $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

وبما أن $A\in(P)$ فإن $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = ax+by+cz+d$

تعريف

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $ax+by+cz+d > 0$ حيث a و b و c ليست كلها معدومة هي نصف فضاء مفتوح حده المستوي (P) ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$.
ونصف الفضاء الآخر هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $ax+by+cz+d < 0$ المحدودة بالمستوي (P) .

مثال - ◆

في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(2,1,1)$ ، $B(4,-1,-3)$.
1- عين معادلة المستوي المتوسط للقطعة $[AB]$
2- عين متراجحة نصف الفضاء المحدود بالمستوي المتوسط للقطعة $[AB]$ والذي يشمل النقطة B .

✔ الحل :

1) لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ إحداثياتها $(3,0,-1)$ ، المستوي المتوسط للقطعة $[AB]$ يمر بالنقطة I وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$.
لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من الفضاء
$M(x,y,z)$ تنتمي إلى هذا المستوي وهذا معناه أن $\overrightarrow{IM}\,.\,\overrightarrow{AB}=0$
$\overrightarrow{IM}\,.\,\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $x-y-2z-5=0$
إذن معادلة (P) هي $x-y-2z-5=0$

2) هذا المستوي يقسم الفضاء إلى قسمين حيث أن كل النقاط في أحدهما تحقق : $x-y-2z-5\le0$ وفي القسم الآخر فإن كل النقاط تحقق $x-y-2z-5\ge0$
إذن المتراجحة التي تعبر عن نصف الفضاء الذي يشمل B والمحدود بالمستوي (P) هي $x-y-2z-5\ge0$.

تمرين تدريبي

في كل حالة من الحالات التالية هل المستويان (P) و (q) متقاطعان ؟ متعامدان ؟ متوازيان ؟

1) $(P) : x+2y-z+4=0$ ، $(q) : 2x+3y+8z-1=0$
2) $(P) : x+y-3z+2=0$ ، $(q) : 2x+2y-6z+7=0$
3) $(P) : 2x+y-z+2=0$ ، $(q) : x+2y+3z-1=0$

✔ الحل :

نسمي $\vec{n}_1$ ناظم (P) و $\vec{n}_2$ ناظم (q)

1) الشعاع الناظم لـ (P) هو $\vec{n}_1(1,2,-1)$

والشعاع الناظم لـ (q) هو $\vec{n}_2(2,3,8)$

$\vec{n}_1.\vec{n}_2=0$ ومنه المستويان (P) و (q) متعامدان

2) $\vec{n}_1(1,1,-3)$ ، $\vec{n}_2(2,2,-6)$ لاحظ ان $\vec{n}_2=2\vec{n}_1$ أي $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ مرتبطان خطيا

وعليه فإن المستويين (P) و (q) متوازيان تماما.

3) $\vec{n}_1(2,1,-1)$ و $\vec{n}_2(1,2,8)$

$\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ غير متعامدين وغير مرتبطين خطيا ومنه (P) و (q) متقاطعان.

7. المعادلة الديكارتية لسطح كرة

تعريف

سطح الكرة التي مركزها I وطول نصف قطرها R هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $IM=R$

خاصية

1) معادلة سطح الكرة التي مركزها $I(\alpha,\beta,\gamma)$ وطول نصف قطرها R في معلم متعامد ومتجانس هي $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

2) سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{MA}.\vec{MB}=0$

تمرين تدريبي

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء.

1) بين أن مجموعة النقط M التي إحداثياتها تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x+2y-7=0$ هي معادلة لسطح كرة يطلب تعيين عناصرها الأساسية (المركز ونصف القطر).

2) ادرس وضعية المستوي (P) ذو المعادلة $2x+2y+z-3=0$ بالنسبة إلى الكرة.

الحل:

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x^2-2x=(x-1)^2-1$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ لدينا:
$y^2+2y=(y+1)^2-1$

إذن المعادلة المعطاة تكتب على الشكل $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1+z^2-7=0$

أي $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$

إذن مجموعة النقط المعطاة هي سطح كرة مركزها $I(1,-1,0)$ وطول نصف قطرها $R=3$

2) لدراسة الوضع النسبي لـ (P) وسطح الكرة نقوم بحساب المسافة بين مركز سطح الكرة والمستوي (P)

المسافة بين I والمستوي (P) هي $d=\frac{|2-1+0-3|}{\sqrt{4+1+1}}$ أي $d=\frac{2}{\sqrt{6}}$

بما أن $d<R$ فإن المستوي (P) يقطع سطح الكرة في دائرة.

8. دراسة مجموعة النقط من الشكل $\vec{AM}.\vec{U}=k$ و $\alpha\vec{MA}^2+\beta\vec{MB}^2=k$

• دراسة مجموعة النقط $\vec{AM}.\vec{U}=k$ حيث k عدد حقيقي.

نسمي (γ) هذه المجموعة.

• حالة $k=0$:

- إذا كان $\vec{U}=\vec{0}$ فإن (γ) هي كل الفضاء.
- إذا كان $\vec{U}\neq\vec{0}$ فإن (γ) هي المستوي المار بالنقطة A وشعاع ناظمه هو $\vec{U}$

• حالة $k\neq 0$:

- إذا كان $\vec{U}=\vec{0}$ فإن (γ) هي مجموعة خالية.
- إذا كان $\vec{U}\neq\vec{0}$ ، نضع $\vec{AB}=\vec{U}$ مع $A\neq B$

مجموعة النقط المفروضه هي $\vec{AM}.\vec{AB}=k$.

لتكن H المسقط العمودي لـ M على (AB) عندئذ:

$$\vec{AM}.\vec{AB}=\vec{AH}.\vec{AB}=\overline{AH}.\overline{AB}$$

$\vec{AM}.\vec{AB}=k$ يكافئ $\overline{AH}.\overline{AB}=k$ يكافئ $\overline{AH}=\frac{k}{AB}$

بما أن A و B و k ثوابت فإنه توجد نقطة وحيدة H تحقق $\overline{AH}=\frac{k}{AB}$

إذن مجموعة النقط M التي تحقق $\vec{AM}.\vec{AB}=k$ هي المستوي الذي يشمل H والعمودي على (AB) .

• دراسة مجموعة النقط $\alpha\vec{MA}^2+\beta\vec{MB}^2=k$

- إذا كان $\alpha+\beta=0$ و $\beta\neq 0$ فإن:

$$\alpha\vec{MA}^2+\beta\vec{MB}^2=\alpha\vec{MA}^2+\beta\left(\vec{MA}+\vec{AB}\right)^2$$

$$=(\alpha+\beta)\vec{MA}^2+\beta\vec{AB}^2+2\beta\vec{MA}.\vec{AB}$$

$$=\beta\vec{AB}^2+2\beta\vec{MA}.\vec{AB}$$

$\alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 = k$ يكافئ $2\beta \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = -\beta \overrightarrow{AB}^2 + k$

يكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \frac{-\beta \overrightarrow{AB}^2 + k}{2\beta}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k'$

مجموعة النقط $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k'$ درست في الحالة الأولى

- إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإن الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ لها مرجح G يحقق $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

من اجل كل نقطة كيفية M لدينا :

$$\alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}^2 + \alpha \overrightarrow{GA}^2 + \beta \overrightarrow{GB}^2$$

$\alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 = k$ يكافئ $\alpha \overrightarrow{GA}^2 + \beta \overrightarrow{GB}^2 + (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}^2 = k$

يكافئ $\overrightarrow{MG}^2 = \frac{k - \alpha \overrightarrow{GA}^2 - \beta \overrightarrow{GB}^2}{\alpha+\beta}$

بوضع $k' = \frac{k - \alpha \overrightarrow{GA}^2 - \beta \overrightarrow{GB}^2}{\alpha+\beta}$ تصبح مجموعة النقط (γ) هي $MG^2 = k'$

- إذا كان $k' < 0$ فإن (γ) هي ϕ
- إذا كان $k' = 0$ فإن $(\gamma) = \{G\}$
- إذا كان $k' > 0$ فإن (γ) سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = \sqrt{k'}$

تمرين تدريبي

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء، $A(1,1,1)$ ، $B(0,1,1)$ نقطتين منه.

1) عين مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = 2$

2) عين مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $2\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 = -5$

✓ الحل :

1) ليكن G مرجح الجملة $\{(A,2),(B,3)\}$ تحقق $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

من اجل كل نقطة M من الفضاء لدينا :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = 5\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 = 5\overrightarrow{MG}^2 + \frac{21}{4}\overrightarrow{GB}^2$$

$2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = 2$ يكافئ $\overrightarrow{MG}^2 = \frac{2}{5} - \frac{21}{20} GB^2$

$x_G = \frac{2+3\times 0}{5} = \frac{2}{5}$ ، $y_G = \frac{2+3}{5} = 1$ ، $z_G = \frac{2+3}{5} = 1$ ومنه $G(\frac{2}{5},1,1)$

إذن $GB^2 = (\frac{2}{5}-0)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2 = \frac{4}{25}$ و $MG^2 = \frac{2}{5} - \frac{21}{20}\times\frac{4}{25} = \frac{29}{125}$

وبالتالي (γ) هي سطح كرة مركزها G وطول نصف قطرها $R = \sqrt{\frac{29}{125}}$

2) بما أن $2-2=0$ فإن الجملة $\{(A,2),(B,-2)\}$ ليس لها مرجح وبالتالي :

$$2\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 = -4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} - 2AB^2$$

$$AB^2 = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$$

$2\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 = -5$ يكافئ $-4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} - 2 = -5$

يكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}$ يكافئ $x-1 = \frac{3}{4}$ يكافئ $x = \frac{7}{4}$

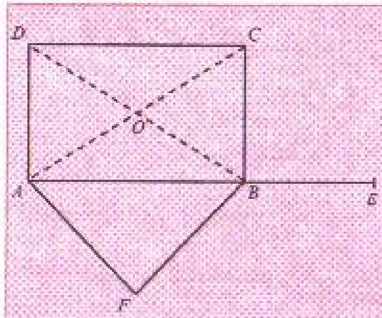
إذن مجموعة النقط المطلوبة هي المستوي ذو المعادلة $x = \frac{7}{4}$.

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 الجداء السلمي في المستوي

$ABCD$ مستطيل مركزه النقطة O حيث $AB=4$ و $AD=3$

E نقطة بحيث $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$ و F نقطة بحيث المثلث ABF متقايس الأضلاع مرسوم خارج المستطيل.



-1 احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}$

-2 احسب $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FB}$

✓ الحل :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-AB^2=-16$

لأن D مسقطها A على (AB)

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot(2\overrightarrow{AB})=2(AB^2)=32$

2) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}=BF\times BA\cos(-\frac{\pi}{3})=AB^2\cos(\frac{\pi}{3})=16\times\frac{1}{2}=8$

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FB}=AF\times FB\cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\times16=-8$

تطبيق 2 تعيين مماس لدائرة

لتكن (C) مجموعة النقط من المستوي ذات المعادلة :

$x^2-3x+y^2+4y=0$ .... (I)

1) بين أن (C) هي دائرة يطلب تعيين مركزها I ونصف قطرها.

2) لتكن A نظيرة O بالنسبة إلى I حيث O مبدأ المعلم المتعامد والمتجانس

بين أن A تنتمي إلى (C) معينا معادلة المماس لـ (C) عندها.

✓ الحل :

1) المعادلة (I) تكتب $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}$

ومنه نستنتج أن (C) دائرة مركزها $I\left(\frac{3}{2},-2\right)$ وطول نصف قطرها $\frac{5}{2}$

2) بما أن O تنتمي إلى (C) و A نظيرة O بالنسبة إلى I فإن A تنتمي إلى (C).

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المماس المطلوب تحقق عندئذ $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

إحداثيات A هي $(3,-4)$ ومنه $\overrightarrow{AM}(x-3,y+4)$ و $\overrightarrow{IA}\left(\frac{3}{2},-2\right)$

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ يكافئ $3x-4y-25=0$

إذن معادلة المماس لـ (C) عند النقطة A هي $3x-4y-25=0$

تطبيق 3 تعيين أطوال الارتفاعات في مثلث

لتكن النقط $A(2,-1)$ ، $B(-3,-3)$ ، $C(3,5)$

1) بين أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2) أ) عين معادلة العمود المرسوم من A في المثلث ABC

ب) أوجد طول هذا الارتفاع

3) استنتج مساحة المثلث ABC

4) عين أطوال الارتفاعين الآخرين المتعلقين بالمثلث ABC .

✓ الحل :

1) $\overrightarrow{AB}(-5,-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,6)$ ، $\overrightarrow{BC}(6,8)$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B ، C لا تقع على استقامة واحدة.

2) أ) العمود المرسوم من A ناظمه هو $\overrightarrow{BC}$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من هذا العمود إذن فهي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ومنه ينتج :
$3x+4y-2=0$

ب) لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}=BH\times BC\cos(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC})$

ومنه ينتج $\left|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right|=BH\times BC$

إذن $BH = \frac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{BC} = \frac{46}{10} = 4{,}6$

حسب نظرية فيتاغورس نجد $AH = \sqrt{BA^2 - BH^2} = 2{,}8$

3) مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2}AH \times BC = 14$

4) ليكن h_1 طول الارتفاع المرسوم من B في المثلث ABC

لدينا $\frac{1}{2}h_1 . AC = 14$ ومنه $h_1 = \frac{28}{AC} = \frac{28}{\sqrt{37}} = 4{,}6$

ليكن h_2 طول الارتفاع المرسوم من C في المثلث ABC

لدينا $\frac{1}{2}h_2 . AB = 14$ ومنه $h_2 = \frac{28}{AB} = 5{,}20$

تطبيق 4 حساب الجداء السلمي وتعيين قيمة مقربة لزاوية

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم حيث $AB = 2$ و $AD = AE = 1$

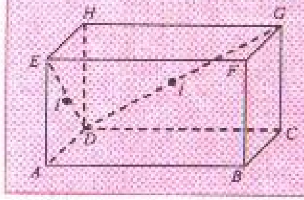
ولتكن النقط I ، J ، K منتصفات القطع $[DE]$ ، $[DG]$ و $[EB]$ على التوالي.

نعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(D, \overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

1) عين إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$

ثم احسب $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$ و $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{IK}\right\|$

2) عين قيمة مقربة للزاوية $J\hat{I}K$



الحل:

1) $A(1,0,0)$ ، $B(1,2,0)$ ، $C(0,2,0)$ ، $D(0,0,0)$ ، $E(1,0,1)$ ، $F(1,2,1)$

$G(0,2,1)$ ، $H(0,0,1)$ ، $I\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ ، $J\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ ، $K\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ ، $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$

2) لدينا $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$

و $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

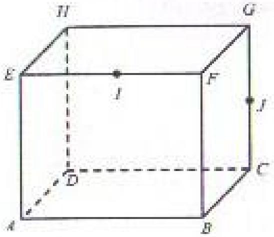
بما أن $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = IJ \times IK \cos(J\hat{I}K)$ فإن $\cos(J\hat{I}K) = \frac{\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}}{IJ \times IK} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$

القيمة المقربة للزاوية $J\hat{I}K$ هي $53{,}13$ درجة

تطبيق 5 حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a ، ولتكن النقطتان I و J منتصفي القطعتين $[EF]$ و $[GC]$ على التوالي.

احسب $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$ ، $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$ ، $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ}$ ، $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IA}$ ، $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD}$.



الحل:

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA} = 0$

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EI}.(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{AD} = 0 + 0 = 0$

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}).(\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CG}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BF}) = 0$

$\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IE}.(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA}) = \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EA} = IE^2 + 0 = (\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$

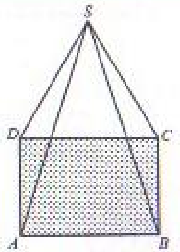
$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = (\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH}).(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD}$

$= -\frac{a^2}{4} + 0 + 0 + a^2 = \frac{3}{4}a^2$

تطبيق 6 حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

$ABCDS$ هرم قاعدته مربع و رأسه S بحيث كل الأحرف لها نفس الطول a

احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$ ، $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$ ، $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$



الحل:

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = SA \times SB \cos(60°) = \frac{SA^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}$

$= \frac{a^2}{2} + \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} - \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{DC}$

$= -\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -a^2$

تطبيق 7 تعيين قيمة مقربة لزاوية في الفضاء

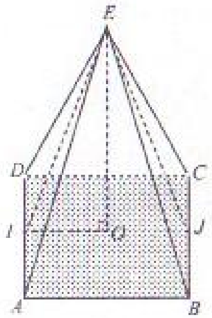
$ABCDE$ هرم منتظم قاعدته المربع $ABCD$ ، ولتكن النقطتان I و J منتصفي $[AD]$ و $[BC]$ على الترتيب.

1) عين قيمة مقربة للزاوية $E\hat{I}J$.
2) لتكن F نقطة بحيث $ABCDEF$ ثماني وجوه منتظم.
3) عين قيمة مقربة للزاوية $E\hat{I}F$.

✓ **الحل :**

1) نضع $AB=a$

$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EJ}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BJ})=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}$$
$$=a^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{a^2}{4}$$



$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EJ}=EI\times EJ\times\cos(E\hat{I}J)\ \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EJ}=\frac{a^2}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من(1) و (2) نجد $\cos(E\hat{I}J)=\dfrac{\frac{a^2}{4}}{EI\times EJ}=\dfrac{\frac{a^2}{4}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2}=\dfrac{\frac{a^2}{4}}{\frac{5}{4}a^2}=\dfrac{1}{5}$

إذن القيمة المقربة للزاوية $E\hat{I}J$ هي $78{,}46°$.

2) بما أن F هي نظيرة E بالنسبة إلى مركز المربع $ABCD$ فإن $E\hat{I}F=2\,E\hat{I}O$

لدينا $\cos(E\hat{I}O)=\dfrac{IO}{IE}=\dfrac{0{,}5\,AB}{IE}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

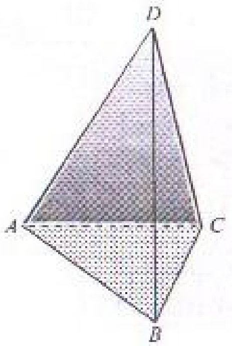
ومنه نجد $E\hat{I}O=63{,}43°$ وبالتالي $E\hat{I}F=126{,}87°$

تطبيق 8 إثبات التعامد في الفضاء باستعمال الجداء السلمي

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a

1) احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
2) احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ ماذا تستنتج حول المستقيمين (AB) و (CD) ؟

✓ **الحل :**



1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}a^2$

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})$

$$-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$
$$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$$

بما أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدان وبالتالي (AB) و (CD) متعامدان.

تطبيق 9 تعيين حجم رباعي في الفضاء

لتكن النقط $A(3,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $D(1,0,-3)$ من الفضاء

1) بين أن المثلث BCD قائم في D ثم عين مساحته.
2) بين أن المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD)
3) عين حجم رباعي الوجوه A .

✓ **الحل :**

1) لدينا $\overrightarrow{DB}(0,4,0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0,0,6)$

بما أن $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ فإن المثلث BCD قائم في D

مساحة المثلث BCD هي $\frac{1}{2}DC\times DB$ أي 12

2) لدينا $\overrightarrow{AC}(-2,0,0)$

بما أن $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ فإن (AC) عمودي على (DB) وعمودي على (DC) .
فهو إذن عمودي على تقاطعهما وبالتالي فهو عمودي على المستوي (BCD)

3) حجم رباعي الوجوه يساوي $\frac{1}{3}\beta h$ حيث β مساحة القاعدة و h ارتفاعه.

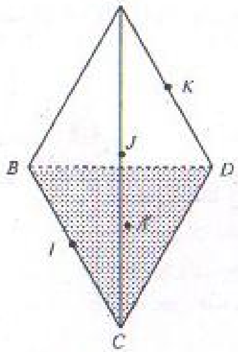
مساحة القاعدة هي $\beta=12$ وارتفاعه $h=AC=2$ إذن حجمه هو $\vec{n_q}(1,1,1)$.

تطبيق 10 تعامد مستقيم ومستوي

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a (كل أحرفه متساوية الطول).
I و J ، K منتصفات القطع $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AD]$ على التوالي.
لتكن A' مركز ثقل المثلث BCD

1) احسب $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}$
2) احسب $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AD}$
3) بين أن المستقيم (AA') عمودي على المستوي (BCD)

✓ الحل :



1) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=DC\times CA\times\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{a^2}{2}$

2) $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{4}$

$$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{KJ}).\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}.\frac{a^2}{2}=0$$

3) $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IA'}).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}).\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{CD}$

$$=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}^2$$

$$=-\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}a^2=0$$

إذن (AA') عمودي على (CD) وبنفس الكيفية نبين أن (AA') عمودي على (CB)
وبالتالي (AA') عمودي على (BCD) .

تطبيق 11 حساب طول ارتفاع رباعي وجوه

$ABCD$ رباعي وجوه بحيث المثلثات ABC ، ABD ، ACD قائمة عند A ومتساوية الساقين و $AD=AC=AB=a$ ، نسمي A_1 مركز ثقل المثلث BCD

1) بين أن المستقيم (AA_1) عمودي على المستوي (BCD)
2) بالتعبير عن حجم الرباعي $ABCD$ بطريقتين مختلفتين، احسب AA_1 .

✓ الحل :

1) حتى يكون المستقيم (AA_1) عموديا على المستوي (BCD) يجب أن يكون (AA_1) عموديا على المستقيمين (CB) و (CD) :

$$\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}).\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{CB}$$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2$$

$$=0+a^2-\frac{1}{3}\times BD\times BC\times\cos(-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{3}BC^2=0+a^2-\frac{1}{3}(\sqrt{2}a)(\sqrt{2}a)\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a^2$$

$$=a^2-\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a^2=0$$

لأن المثلث BCD متقايس الأضلاع طول ضلعه $\sqrt{2}\,a$.

$$\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA_1}).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}).\overrightarrow{CD}$$

$$=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}^2=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}^2$$

$$a\times\sqrt{2}\,a\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{2}\,a\sqrt{2}\,a.\frac{1}{2}-\frac{1}{3}2a^2$$

$$=a^2-\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a^2=0$$

إذن (AA_1) عمودي على (CD) وعمودي على (CB)
وبما أن (CD) و (CB) متقاطعان فإن (AA_1) عمودي على (BCD) .

2) باعتبار أن رباعي الوجوه $ABCD$ قاعدته المثلث ABC يكون ارتفاعه الضلع BD
وعليه الحجم هو V حيث $V=\frac{1}{3}\times BD\times\beta$ حيث β مساحة المثلث ABC والتي تساوي $\frac{a^2}{2}$

إذن $V=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\,a\times\frac{a^2}{2}$ أي $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ .... (1)

باعتبار أن قاعدة رباعي الوجوه هي المثلث BDC يكون $V=\frac{1}{3}\times AA_1\times\beta_1$ حيث β_1
مساحة المثلث BDC وتساوي $\frac{1}{2}CD.CB\sin\frac{\pi}{3}$

إذن $V=\frac{1}{3}\times AA_1\times\frac{1}{2}CD.CB\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$V=\frac{1}{3}AA_1\times\frac{1}{2}CB^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\times AA_1\times\frac{1}{2}2a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$V=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2\,AA_1$ .... (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2AA_1=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ ومنه نجد $AA_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$

تطبيق 12 تعيين معادلة مستوي

في كل حالة من الحالات التالية، المستوي (p) ممثل بواحدة من معادلاته الديكارتية، A و B نقطتان علم إحداثياهما.
بعد التحقق من أن (AB) ليس عموديا على (p) أعط معادلة للمستوي (q) العمودي على (p) و المار من A و B.

أ) $(p) : x+y+z=0$ ، $A(1,0,0)$ ؛ $B(0,1,1)$

ب) $(p) : x+z=0$ ، $A(1,2,0)$ ؛ $B(1,0,1)$

✓ الحل :

لتكن $ax+by+cz+d=0$ معادلة المستوي (q) الذي ناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

أ) ناظم (p) هو $\vec{n_1}(1,1,1)$ و $\overrightarrow{AB}(-1,1,1)$

بما أن $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n_1}=1$ فإن (AB) ليس عموديا على المستوي (p)

بما أن (q) عمودي على (p) فإن $\vec{n} \cdot \vec{n_1}=0$ ومنه ينتج $a+b+c=0$ ....(1)

A تنتمي إلى (q) تعني $a+d=0$ ....(2)

B تنتمي إلى (q) تعني $b+c+d=0.$ ....(3)

من (1) و (2) و (3) نجد $d=a=0$ و $c=-b$

إذن (q) معادلته $by-bz=0$

وبما أن $\vec{n}$ ليس معدوما و $a=0$ فإن $b \neq 0$

وبالتالي معادلة (q) تصبح $y-z=0$

ب) ناظم (p) هو $\vec{n_2}(1,0,1)$ ولدينا $\overrightarrow{AB}(0,-2,1)$

بما أن $\vec{n_2} \cdot \overrightarrow{AB}=+1$ فإن (AB) ليس عموديا على المستوي (p)

(q) عمودي على (p) يعني أن $\vec{n} \cdot \vec{n_2}=0$

وهذا يعني أيضا $a+c=0$ ....(1)

A تنتمي إلى (q) تعني أن $a+2b+d=0$ ....(2)

B تنتمي إلى (q) تعني أن $a+c+d=0$ ....(3)

من (1) و (2) و (3) نجد $d=0$ و $c=-a$ و $b=-\frac{a}{2}$

ومنه معادلة (q) تصبح $ax-\frac{a}{2}y-az=0$

وبما أن $a \neq 0$ فإن معادلة (q) تصبح $x-\frac{1}{2}y-z=0$

تطبيق 13 تعيين معادلة مستوي عمودي على مستويين

نعتبر المستويين (p) و (q) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتية
$(p) : x-2y+3z-5=0$ و $(q) : x+y+z+1=0$

1) بين أن (p) و (q) متقاطعان في المستقيم (d).

2) بين أن المستقيم (d) هو مجموعة النقط M بحيث :
$M(\frac{-5}{3}z+1 ، \frac{3}{2}z-2 ، z)$ مع z عدد حقيقي

3) عين شعاع توجيه المستقيم (d)

4) عين معادلة المستوي (R) العمودي على (p) و (q) و المار بالنقطة $A(2,5,-2)$

✓ الحل :

1) حتى يكون (p) و (q) غير متقاطعين يجب أن يكون ناظماهما مستقلين خطيا

ليكن $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ ناظما (p) و (q) على الترتيب.

$\vec{n_1}(1 ، -2 ، 3)$ ، $\vec{n_2}(1 ، 1 ، 1)$

واضح أن الشعاعين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين وبالتالي (p) و (q) متقاطعان.

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (d) إحداثياتها تحقق معادلة (p) و (q) في آن واحد ،
وهذا يعني أن $x-2y+3z-5=0$ ....(1) و $x+y+z+1=0$ ....(2)

من (1) نجد $x=2y-3z+5$ نعوضه في (2) نجد $3y-2z+6=0$ أي $y=\frac{2}{3}z-2$

إذن $x=2(\frac{2}{3}z-2)-3z+5=-\frac{5}{3}z+1$

وبالتالي إحداثيات M هي $M(-\frac{5}{3}z+1 ، \frac{2}{3}z-2 ، z)$ مع $z \in \mathbb{R}$

3) من أجل $z=0$ نحصل على النقطة M_0 من (d) إحداثيتاها $M_0(1,-2,0)$
ومن أجل $z=3$ نحصل على النقطة M_1 تنتمي إلى (d) إحداثياتها $M_1(-4 ، 0 ، 3)$

إذن شعاع توجيه (d) هو $\overrightarrow{M_0M_1}$ أي $\overrightarrow{M_0M_1}(-5 ، 2 ، 3)$

4) لتكن $ax+by+cz+d=0$ معادلة (R) مع $(a ، b ، c) \neq (0 ، 0 ، 0)$

(R) عمودي على (p) يعني $\vec{n_R} \cdot \vec{n_p}=0$ أي $a-2b+3c=0$ .... (1)

(R) عمودي على (q) يعني $\vec{n_R} \cdot \vec{n_q}=0$ أي $a+b+c=0$ .... (2)

$A(2 ، 5 ، -2)$ تنتمي إلى (R) تعني $2a+5b+2c+d=0$ .... (3)

من (1) و (2) و (3) نجد $a=-\frac{5}{3}c$ و $b=\frac{2}{3}c$ و $d=2c$

ومنه معادلة (R) هي $-\frac{5}{3}cx+\frac{2}{3}cy+cz+2c=0$

وبما ان $\vec{n}\neq 0$ فإن $c\neq 0$ وبالتالي معادلة (R) تصبح $-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}y+z+2=0$ وبالضرب في 3
نجد $-5x+2y+3z+6=0$

تطبيق 14 تعامد مستقيم ومستو

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 ولتكن I مركز ثقل المثلث CFH

1-أ) بين أن المثلث CFH متقايس الأضلاع.

ب) بين أن النقط A ، G و I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[CH]$ وإلى المستوي المحوري للقطعة $[CF]$

جـ) استنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (CFH) ويمر من النقطة I

2) اجب على السؤال (1) باستعمال المعلم المتعامد والمتجانس $(F,\vec{FE},\vec{FG},\vec{FB})$

✓ الحل :

1) أ) بما أن $DCGH$ مربع فإن $[CH]$ قطره وحسب نظرية فيثاغورس نجد $CH=\sqrt{2}$
بنفس الكيفية نبين أن $CF=\sqrt{2}$ و $FH=\sqrt{2}$
إذن المثلث CFH متقايس الأضلاع.

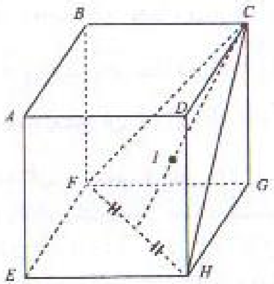
ب) ـ بما أن $AH=AC$ و $GH=GC$ و $IF=IC$ فإن النقط A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[CH]$

ـ بما أن $AF=AC$ و $GF=GC$ و $IF=IC$ فإن النقط A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[CF]$

جـ) ـ بما أن A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[CH]$ وتنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[CF]$ والمستويين المحوريين لـ $[CH]$ و $[CF]$ متقاطعين في مستقيم فإن النقط A ، G ، I تنتمي إلى هذا التقاطع وعليه فالنقط A ، G ، I تقع على استقامة واحدة.

ـ بما أن (FC) عمودي على المستوي المحوري لـ $[FC]$ والمستقيم (AG) محتوى في هذا المستوي فإن (FC) عمودي على (AG).
بنفس الكيفية نبين أن (AG) عمودي على (FH).
إذن (AG) عمودي على المستوي الذي يشمل (FH) و (FC) ، أي (AG) عمودي على (FCH)

2) $F(0,0,0)$ ، $E(1,0,0)$ ، $B(0,0,1)$ ، $G(0,1,0)$ ، $H(1,1,0)$ ، $D(1,1,1)$ ، $A(1,0,1)$ ، $C(0,1,1)$.
لتكن $I(x,y,z)$ ، بما أن I مركز ثقل المثلث CFH فإن :
$x_I=\frac{1+0+0}{3}=\frac{1}{3}$ ، $y_I=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$ ، $z_I=\frac{1}{3}$ إذن $I\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$



لدينا $\vec{CF}(0,-1,-1)$ ومنه $CF=\sqrt{2}$

لدينا $\vec{CH}(1,0,-1)$ ومنه $CH=\sqrt{2}$

لدينا $\vec{HF}(-1,-1,0)$ ومنه $HF=\sqrt{2}$
إذن المثلث CFH متقايس الأضلاع.

ب) لدينا $\vec{AH}(0,1,-1)$ ومنه $AH=\sqrt{2}$

لدينا $\vec{AC}(-1,1,0)$ ومنه $AC=\sqrt{2}$ إذن $AH=AC$
وبنفس الكيفية نبين أن $GH=GC$ و $IH=IC$
ومنه A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[CH]$
وكذلك بنفس الكيفية نبين أن A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[CF]$

جـ) لكي نبين أن (AG) عمودي على المستوي (CFH) يكفي أن نبين أن (AG) عمودي على (CH) و (CF)

بما أن $\vec{AG}.\vec{AH}=-1+0+1=0$ و $\vec{AG}.\vec{CF}=0-1+1=0$
فإن (AG) عمودي على المستوي (CFH)

ـ لكي نبين أن (AG) يشمل I يكفي أن نبين أن الشعاعين $\vec{AG}$ و $\vec{AI}$ مرتبطان خطيا.

$\vec{AI}\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ و $\vec{AG}(-1,1,-1)$ ومنه $\vec{AI}=\frac{2}{3}\vec{AG}$ وبالتالي I تنتمي إلى (AG)

تطبيق 15 تعيين معادلة مستو

لتكن النقط $A(2,2,2)$ ، $B(4,2,1)$ ، $C(2,3,3)$

1) تحقق أن النقط A ، B ، C تعين مستويا

2) عين العددين الحقيقيين x و y بحيث أن الشعاع $\vec{n}(x,y,2)$ يعامد الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

3) استنتج معادلة للمستوي (ABC)

✓ الحل :

1) لكي تعين النقط A ، B ، C مستويا يجب أن يكو ن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مستقلين خطيا

لدينا $\vec{AB}(2,0,-1)$ ، $\vec{AC}(0,1,1)$

واضح أن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مستقلان خطيا وبالتالي النقط A ، B ، C تعين مستوي.

2) $\vec{n}$ يعامد $\overrightarrow{AB}$ هذا معناه $2x-2=0$

$\vec{n}$ يعامد $\overrightarrow{AC}$ هذا معناه $y+2=0$

ومنه ينتج ان $x=1$ و $y=-2$ وبالتالي $\vec{n}(1 ، -2 ، 2)$

3) بما ان $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فإنه عمودي على (ABC)
وبالتالي فهو يمثل ناظما للمستوي (ABC)
إذن $(ABC): x-2y+2z+d=0$
A تنتمي إلى (ABC) هذا معناه $2-4+4+d=0$ ومنه $d=-2$
إذن $(ABC): x-2y+2z-2=0$

تطبيق 16 حساب حجم رباعي الوجوه

لتكن النقط $A(0,0,1)$ ، $B(2,4,-1)$ ، $C(4,-4,-3)$ ، $S(4,0,4)$ ، $H\left(\frac{1}{2} ، 0 ، \frac{1}{2}\right)$
1) بين أن المثلث ABC قائم في A
2-أ) بين أن الشعاع $\overrightarrow{SH}$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج معادلة المستوي (ABC).
ب) تحقق أن النقطة H تنتمي إلى المستوي (ABC).
3-أ) بين أن $[SH]$ هو ارتفاع في رباعي الوجوه $SABC$.
ب) احسب حجم هذا الرباعي.

✓ الحل :

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(2 ، 4 ، -2)$ و $\overrightarrow{AC}(4 ، -4 ، -4)$
بما أن $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}=8-16+8=0$ فإن المثلث ABC قائم في A

2) أ) $\overrightarrow{SH}(-\frac{7}{2} ، 0 ، -\frac{7}{2})$ ؛ $\overrightarrow{SO} . \overrightarrow{AB}=-7+7=0$ ، $\overrightarrow{SO} . \overrightarrow{AC}=-14+14=0$

ومنه $\overrightarrow{SH}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$

بما أن $\overrightarrow{SH}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$ فإن (SH) عمودي على (ABC)

وبالتالي يمكن اعتبار $\overrightarrow{SH}$ كشعاع ناظم للمستوي (ABC).

وعليه معادلة (ABC) هي $-\frac{7}{2}x-\frac{7}{2}z+d=0$.

بما أن A تنتمي إلى (ABC) فإن $-\frac{7}{2}\times 0-\frac{7}{2}\times 1+d=0$ ومنه $d=\frac{7}{2}$

إذن معادلة (ABC) هي $-x-z+1=0$

ب) بما أن $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$ فإن H تنتمي إلى المستوي (ABC)

3) أ) بما أن $\overrightarrow{SH}$ ناظم للمستوي (ABC) و H تنتمي إلى (ABC) فإن :
$[SH]$ هو الارتفاع في الرباعي $SABC$.

ب) حجم الرباعي الوجوه هو $V=\frac{1}{3}\times SH\times \beta$ حيث β مساحة المثلث ABC

إذن $V=\frac{1}{3}\times SH\times\frac{AB\times AC}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{6}\times 4\sqrt{3}}{2}=\frac{84}{3}=28$

تطبيق 17 التعامد وحساب المسافة

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم بحيث $AB=2$ ، $GC=BC=1$
و I منتصف القطعة $[AB]$.
1) أوجد معلما متعامدا ومتجانسا مبدؤه A بحيث يمكنك التعبير عن إحداثيات النقاط بسهولة.
2) عين معادلة المستوي (IFH)
3) احسب المسافة بين النقطة G والمستوي (IFH).
4) عين المسافة بين النقطة G والمستقيم (IH).
هل المسقط العمودي للنقطة G على المستوي (IFH) ينتمي إلى (IH)؟

✓ الحل :

1) المعلم المختار هو $(A ، \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AD} ، \overrightarrow{AE})$ وفي هذا المعلم لدينا :
$A(0 ، 0 ، 0)$ ، $B(2 ، 0 ، 0)$ ، $C(2 ، 2 ، 0)$ ، $D(0 ، 1 ، 0)$ ، $E(0 ، 0 ، 1)$ ، $F(2 ، 0 ، 1)$ ،
$G(2 ، 1 ، 1)$ ، $H(0 ، 1 ، 1)$ ، $I(1 ، 0 ، 0)$

2) معادلة (IFH) من الشكل $ax+by+cz+d=0$
I تنتمي إلى (IFH) معناه $a+d=0$ ... (1)
F تنتمي إلى (IFH) معناه $2a+c+d=0$ ... (2)
H تنتمي إلى (IFH) معناه $b+c+d=0$ ... (3)
من (1) و (2) و (3) نجد $c=d$ و $a=-d$ و $b=-2d$
وبما أن $(a ، b ، c)\neq(0 ، 0 ، 0)$ فإن $d\neq 0$
نعوض a ، b ، c في معادلة (IFH) نجد $-dx-2dy+dz+d=0$
بالقسمة على d نجد $-x-2y+z+1=0$

3) المسافة بين النقطة G والمستوي (IFH) هي $\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{|-x_G-2y_G+z_G+1|}{\sqrt{1+4+1}}$.

4) لتكن K المسقط العمودي للنقطة G على (IH) ولتكن $K(\alpha ، \beta ، \gamma)$

إذن $\overrightarrow{GK} \perp \overrightarrow{IH}$ و $\overrightarrow{IH}$ يوازي $\overrightarrow{HK}$

لدينا $\overrightarrow{GK}(\alpha-2 ، \beta-1 ، \gamma-1)$ و $\overrightarrow{IH}(-1،1،1)$

$\overrightarrow{GK} \perp \overrightarrow{IH}$ معناه أن $-\alpha+2+\beta-1+\gamma-1=0$ أي $-\alpha+\beta+\gamma=0$ .... (I)

$\overrightarrow{IH}$ يوازي $\overrightarrow{HK}$ هذا معناه $\overrightarrow{HK}=\lambda\,\overrightarrow{IH}$ ومنه ينتج $\begin{cases}\alpha=-\lambda\\ \beta=1+\lambda\\ \gamma=1+\lambda\end{cases}$

نعوض عبارة α ، β ، γ في (I) نجد $\lambda+1+\lambda+1+\lambda=0$ ومنه $\lambda=-\frac{2}{3}$

إذن $K(\frac{2}{3} ، \frac{1}{3} ، \frac{1}{3})$

وبالتالي المسافة بين G و (IH) هي GK

حيث $GK=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

- لو كان المسقط العمودي للنقطة G على (IFH) ينتمي إلى (IH) لكان $GK=\frac{2}{\sqrt{6}}$

وبما أن $GK=\sqrt{\frac{8}{3}}$ فإن المسقط العمودي للنقطة G على (IFH) لا ينتمي إلى (IH) .

تطبيق 18 كيفية إيجاد المساحة الكلية لهرم

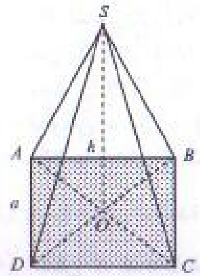
$SABCD$ هرم منتظم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل، طول ضلعها a و O مركز المربع، وبحيث طول الارتفاع $[SO]$ هو h .

1) باستعمال العلاقتين $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}$ بين أن :
$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=h^2-\frac{a^2}{2}$

2) كيف نختار h بحيث يكون الضلعان $[SA]$ و $[SC]$ متعامدين، ثم بين أن $SA=a$

3) احسب المساحة الكلية لهذا الهرم.

الحل :



1)

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC})$

$=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{SO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=h^2+0+0-\overrightarrow{OA}^2=h^2-\frac{1}{2}a^2$

2) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=0$ تكافئ $h^2-\frac{1}{2}a^2=0$ يكافئ $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

لدينا $SA=\sqrt{OA^2+SO^2}$ ومنه $SA=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}=a$

3) مساحة الهرم $SABCD$ هي β

حيث $\beta=4\times SA\times SD\times Sin(\frac{\pi}{3})+a^2$

$\beta=4\times a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+a^2=(2\sqrt{3}+1)\,a^2$

تطبيق 19 كيفية إيجاد المسافة بين نقطة ومستقيم

(p) و (q) مستويان معادلتاهما على الترتيب $x+y-2z-1=0$ ، $x+y+z=0$
و A نقطة إحداثياتها $(2,1,2)$

1) بين أن المستويين (p) و (q) متعامدان.

2) احسب المسافة بين A والمستويين (p) و (q)

3) استنتج المسافة بين A والمستقيم (d) الناتج من تقاطع (p) و (q)

الحل :

1) لدينا $\vec{n}_p(1،1،-2)$ ، $\vec{n}_q(1،1،1)$

(p) و (q) متعامدان يعني أن $\vec{n}_p\cdot\vec{n}_q=0$.

بما أن $\vec{n}_p\cdot\vec{n}_q=1+1-2=0$ فإن (p) و (q) متعامدان.

2) لتكن h_1 المسافة بين A و (p) و h_2 المسافة بين A و (q) .

$h_1=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ و $h_2=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$

3) H_1 ، H_2 المسقطان العموديان لـ A على (p) و (q) على التوالي.
ولتكن A' المسقط العمودي لـ A على (d)
بما أن (p) و (q) متعامدان فإن الرباعي H_1H_2AA' مستطيل
وبالتالي $[AA']$ يكون قطرا لهذا المستطيل.

إذن $AA'=\sqrt{h_1^2+h_2^2}=\sqrt{\frac{25}{3}+\frac{4}{6}}=3$

طريقة ثانية :

إحداثيات النقطة A' تحقق :

$\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{CD}$ حيث $\overrightarrow{CD}$ هو شعاع توجيه (d) و A' تنتمي إلى (p) و (q) .

إحداثيات C و D التي هي من الشكل (x,y,z) تحقق معادلتي (p) و (q)

أي $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

لإيجاد (x,y,z) نختار قيمة لـ z ونبحث عن y و x

فمثلا نختار $z=-\frac{1}{3}$ وفي هذه الحالة نجد $x+y=\frac{1}{3}$

- بأخذ $x=0$ نجد $y=\frac{1}{3}$ وبالتالي $C\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$
- بأخذ $y=0$ نجد $x=\frac{1}{3}$ ومنه $D\left(\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right)$ إذن $\overrightarrow{CD}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0\right)$

لتكن (α,β,γ) إحداثيات النقطة A'

$\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{CD}$ يعني أن $\alpha-\beta-1=0$ ... (1)

ولدينا أيضا $\alpha+\beta-2\gamma-1=0$ ... (2) ، $\alpha+\beta+\gamma=0$ ...(3)

بعد حل جملة المعادلات (1) و (2) و (3) نجد $A'(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

إذن $AA'=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{\frac{81}{9}}=3$

تطبيق 20 تعيين مجموعة النقط

D ، C ، B ، A أربع نقط ليست من نفس المستوي، I و J و G منتصفات القطع $[AB]$ ، $[CD]$ و $[IJ]$ على التوالي.

1-أ) هل يمكن أن تكون I منطبقة على J ؟

ب) هل توجد نقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ ؟

2) عين المجموعة (p_1) للنقط M من الفضاء بحيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.

3) نفرض أن $AB=CD$. نريد تعيين المجموعة (p_2) للنقط M من الفضاء بحيث $MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$

أ) بين أن $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

ب) حدد المجموعة (p_2) ثم قارن بين (p_1) و (p_2).

الحل :

1) أ) من غير الممكن أن تكون I منطبقة على J لأنه لو كان كذلك لكان (AB) يقطع (CD) في I وهذا يعني أن النقط A ، B ، C ، D تقع في نفس المستوي مما يناقض الفرضية.

ب) لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ و $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MJ}$

إذن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ يكافئ $2\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MJ}$ يكافئ $\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$

وهذا خطأ ومنه لا توجد نقط M تحقق المساواة المفروضة.

2) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$ يكافئ $MI=MJ$

ومنه M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$

إذن (p_1) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

3) أ) $MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=2MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$

$=2MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\vec{0}=2MI^2+\frac{1}{4}AB^2+\frac{1}{4}AB^2$

$=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

ب) وبنفس الطريقة السابقة نجد $MC^2+MD^2=2MJ^2+\frac{1}{2}CD^2$

المساواة $MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$ تصبح $2MI^2+\frac{1}{2}AB^2=2MJ^2+\frac{1}{2}CD^2$

وبما أن $AB=CD$ فإن هذه المساواة تصبح $MI^2=MJ^2$ أي $MI=MJ$

وهذا يعني أن M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$

إذن (p_2) هو المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$ و ينتج مما سبق أن (p_1) منطبق على (p_2) .

تطبيق 21 تعيين نقطة تقاطع مستقيم ومستو

المستقيم (d) هو تقاطع المستويين (p_1) و (p_2) معادلتاهما على التوالي:

$x-y+z-3=0$ و $2x+z=0$

(p) مستوي معادلته $x+y-z=0$

بين أن المستقيم (d) يقطع (p) معينا إحداثيات نقطة تقاطعهما.

الحل :

حتى يقطع (d) المستوي (p) يجب أن يكون شعاع توجيه (d) ليس عموديا على الشعاع الناظم لـ (p)

- الشعاع الناظم لـ (p) هو $\vec{n}(1,1,-1)$
- تعيين شعاع توجيه (d) :

$\begin{cases}x-y+z-3=0\\2x+z=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=x\\y=-x-3\\z=-2x\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=x\\y+3=-x\\z=-2x\end{cases}$

بوضع $A(0,-3,0)$ و $M(x,y,z)$ نجد $\overrightarrow{AM}=x(1,-1,-2)$

ومنه $\overrightarrow{AM} = x\vec{V}$ حيث $\vec{V}$ شعاع توجيه المستقيم (d) المار من A

بما أن $\vec{V}\cdot\vec{n} = 2$ فإن $\vec{n}$ ليس عموديا على $\vec{V}$

وعليه فإن المستقيم (d) يقطع (p) في النقطة H إحداثياها حل للجملة :

$$\begin{cases} 2x+z=0 & \dots (1) \\ x-y+z-3=0 & \dots (2) \\ x+y-z=0 & \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (2) و (3) نجد $2x=3$ ومنه $x=\frac{3}{2}$

بتعويض x في (1) و (2) نجد $z=-3$ و $y=\frac{-9}{2}$

إذن $H\left(\frac{3}{2} ، \frac{-9}{2} ، -3\right)$

تطبيق 22 تعيين معادلة سطح كرة ماس لستو

(p) مستوي معادلته $4x-3z+3=0$ و A نقطة من (p) فاصلتها 3 وترتيبها 2 .
عين معادلة سطح الكرة التي قطرها 10 ومماسة لـ (p) عند A .

✓ **الحل :**

إحداثيات النقطة A هي $(3 ، 2 ، z)$

بما أن A تنتمي إلى (p) فإن $12-3z+3=0$ أي $z=5$

إذن $A(3 ، 2 ، 5)$

ليكن $\omega(\alpha ، \beta ، \gamma)$ مركز سطح الكرة التي نصف قطرها 10 والمماسة لـ (p) عند A

إذن $\overrightarrow{A\omega}$ مرتبط خطيا مع $\vec{n_p}$. وبالتالي $\overrightarrow{A\omega} = \lambda\vec{n_p}$ حيث $\vec{n_p}$ ناظم لـ (p)

$$\begin{cases} \alpha-3=4\lambda \\ \beta-2=0 \\ \gamma-5=-3\lambda \end{cases} \quad \text{ومنه نجد} \quad \begin{cases} \alpha=4\lambda+3 \\ \beta=2 \\ \gamma=-3\lambda+5 \end{cases}$$

بما أن A نقطة من سطح الكرة فإن $\omega A^2 = 100$

ومنه $100=(\alpha-3)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-5)^2$ .... (I)

بتعويض α و β و γ في (I) نجد $(4\lambda)^2+(-3\lambda)^2=100$

بالتبسيط نجد $25\lambda^2=100$ ومنه نجد $(\lambda=2)$ أو $\lambda=-2$

- إذا كان $\lambda=2$ فإن $\omega(11 ، 2 ، -1)$
- إذا كان $\lambda=-2$ فإن $\omega(-5 ، 2 ، 11)$

إذن توجد كرتين نصف قطرهما 10 ومركزيهما $(11 ، 2 ، -1)$ و $(-5 ، 2 ، 11)$ مماسة لـ (p) عند A

تطبيق 23 تعيين المسافة بين نقطة ومستقيم

نعتبر النقط $A(0 ، 6 ، 0)$ ، $B(0 ، 0 ، 8)$ ، $C(4 ، 0 ، 8)$.

1- أ) علم هذه النقط في المعلم المتعامد و المتجانس $(o ، \vec{i} ، \vec{j} ، \vec{k})$.

ثم بين أن (BC) عمودي على المستوي (OAB)

ب) عين حجم رباعي الوجوه $(OABC)$

جـ) بين أن النقط $O ، A ، B ، C$ تنتمي إلى سطح كرة يطلب تعيينها.

2) لكل عدد حقيقي k من $]0 ، 8[$ نرفق النقطة $M(0 ، 0 ، k)$.

المستوي (π) الذي يشمل M والعمودي على (OB) يقطع المستقيمات $(OC) ، (AC) ، (AB)$ على التوالي في $N ، P ، Q$

أ) عين طبيعة الرباعي $(MNPQ)$

ب) هل المستقيم (PM) عمودي على (OB) ؟

جـ) من أجل أي قيمة لـ k يكون المستقيم (PM) عموديا على (AC)

د) عين MP^2 بدلالة k ومن أجل أي قيمة لـ k تكون المسافة PM تكون أصغرية.

✓ **الحل :**

1) أ) بما أن (CB) يوازي (OI) و (OI) يعامد المستوي (OAB)
فإن (CB) يعامد (OAB)

ب) $V=\frac{1}{3}OA \times$ (مساحة OCB)

$$V=\frac{1}{3}OA \times \frac{CB \times OB}{2} = \frac{1}{3}\times 6 \times \frac{4\times 8}{2} = 32$$

جـ) بما أن $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ فإن المثلث OAC قائم في O
وبالتالي فإن النقط $O ، A ، C$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AC]$

بما أن $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ فإن المثلث ABC قائم في B
وبالتالي النقط $A ، B ، C$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AC]$.
إذن النقط $A ، B ، C ، O$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AC]$.
نصف قطر هذه الكرة هو $r=\frac{AC}{2}=\sqrt{29}$ ومركزها $\omega(2 ، 3 ، 4)$

2) أ) بما أن (NM) يوازي (CB) و (PQ) يوازي (CB) والمستقيمان (PQ) و (NM) ينتميان إلى نفس المستوي فإن :
(NM) يوازي (PQ) وبالتالي الرباعي $MNPQ$ متوازي أضلاع.

ب) بما أن P و (BB') تنتميان إلى المستوي (π) و (π) عمودي على (OB) فإن (PM) عمودي على (OB)

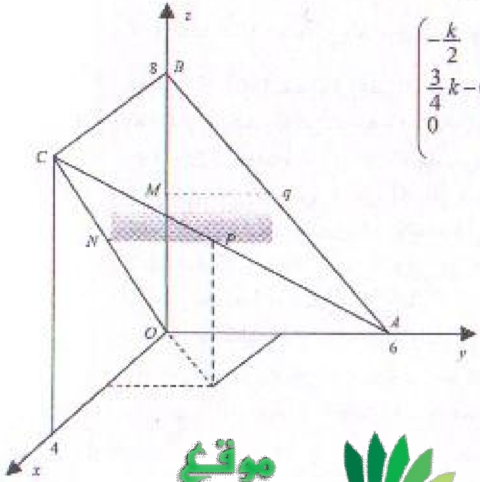
جـ) لتكن $(x ، y ، z)$ إحداثيات النقطة P

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\,\overrightarrow{AC}$$ يكافئ $$\begin{pmatrix}x\\y-6\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}$$ يكافئ $$\begin{cases}x=4\alpha\\y=-6\alpha+6\\z=k=8\alpha\end{cases}$$

ومنه $x=\frac{k}{2}$ و $y=-\frac{3}{4}k+6$ و $z=k$

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $\begin{pmatrix}-\frac{k}{2}\\\frac{3}{4}k-6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}=0$

يكافئ $k=\frac{72}{13}$



د) لدينا $MP^2=(\frac{k}{2})^2+(\frac{3}{4}k-6)^2$

$$=\frac{k^2}{4}+\frac{9}{16}k^2+36-9k$$

$$=\frac{13}{16}k^2-9k+36$$

إذن $MP=\sqrt{\frac{13}{16}k^2-9k+36}$

نضع $f(k)=\sqrt{\frac{13}{16}k^2-9k+36}$

ومنه $f(k)=\frac{1}{4}\sqrt{13k^2-144k+576}$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا

$$f'(k)=\frac{1}{8}\,\frac{26k-144}{\sqrt{13k^2-144k+576}}$$

$f'(k)=0$ يكافئ $k=\frac{144}{26}=\frac{77}{13}$

k	0		$\frac{77}{13}$		8
$f'(k)$		-	0	+	
تغيرات f	6	↘		↗	4

القيمة التي من أجلها تكون المسافة PM أصغرية هي $\frac{77}{13}$

تمارين و مسائل

1 - $ABCD$ مربع طول ضلعه 1، ولتكن I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$

برهن أن الشعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{AJ}$ متعامدان، ثم عين القيمة المقربة للزاوية $D\hat{B}J$.

2 - لتكن $A(1,1)$ وليكن (d) مستقيم معادلته $x-2y+3=0$

1- عين معادلة المستقيم العمودي على (d) و المار من النقطة A

2- عين إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على (d)

3- استنتج المسافة بين النقطة A و (d)

3 - لدينا النقطتان $A(1,2)$ ، $B(3,4)$ و I منتصف $[AB]$

في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة مجموعة النقط M التي تحقق الشرط المعطى، ثم حدد المعادلة الديكارتية لكل منها :

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}=0$ ، $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ، $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

4 - ليكن (d) مستقيم معادلته $2x+y-4=0$ ، و $A(1,3)$

1- تحقق أن A لا تنتمي إلى (d) .

2- عين معادلة الدائرة التي مركزها A و المماسة لـ (d)

5 - لتكن (C) دائرة مركزها O ولتكن A ، A' ، B ، B' أربع نقاط من هذه الدائرة بحيث المستقيمين (AA') و (BB') متعامدان، نسمي I نقطة تقاطعهما.

1- بين أن $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'}=OI^2-OA^2$.

2- بين أن المحور المرسوم من I في المثلث AIB هو ارتفاع في المثلث $IA'B'$

6 - A و B نقطتان من المستوي بحيث $AB=6$ و I منتصف $[AB]$ و k عدد حقيقي.

1) بين أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ تعني أن $MI^2-IA^2=k$

2- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

7 - ABC مثلث و M نقطة كيفية من المستوي.

1- بين أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

ثم استنتج أن ارتفاعات المثلث ABC متقاطعة في نقطة.

2- ليكن Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC. ولتكن H نقطة بحيث $\overrightarrow{\Omega H}=\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}$

بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

اكتب $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ بدلالة $\overrightarrow{MA}$ وشعاع آخر.

---

8 - لتكن النقط $A(4,3,-5)$ ، $B(5,-1,3)$ ، $C(6,-2,-3)$

احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ ثم استنتج قيمة تقريبية للزاوية $B\hat{A}C$.

---

9 - $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a ، I مركز المربع $EFGH$ و J مركز المربع $BCGF$

أ) بين أن المستقيمين (AE) و (EI) متعامدان. معينا الطول AI.

ب) عين الطول AJ ثم احسب $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BJ}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{BJ}$

- احسب $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ بطريقتين مختلفتين واستنتج قيمة مقربة للزاوية $I\hat{A}J$

- عين قيمة مقربة للزاويتين الأخرتين في المثلث AIJ.

---

10 - لتكن النقط $A(0,0,1+\sqrt{2})$ ، $B(0,1,1)$ ، $C(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1)$ ، $C(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1)$.

1- بين أن المستقيمين (DA) و (BC) متعامدان.

2- بين أن رباعي الوجوه $ABCD$ منتظم.

---

11 - $ABCD$ رباعي وجوه، I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي،

G مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$.

بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان إذا وفقط إذا كان $GA=GB$.

---

12 - A ، B ، C ، D أربع نقاط من الفضاء

1- بين أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان إذا وفقط إذا كان $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$

2- ليكن رباعي الوجوه $ABCD$ بحيث المستقيم (AB) يعامد (CD) والمستقيم (BC) يعامد (AD)

- بين أن المستقيم (BD) يعامد (AC).

13 - $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء، إحداثيات النقط A ، B ، C هي:

$A(2\sqrt{2},0,0)$ ، $B(0,3,0)$ ، $C(0,0,3)$ و I منتصف $[BC]$

أوجد أطوال و زوايا المثلث AOI

---

14 - (P) مستوي معادلته $x+2y-2z-1=0$ و (q) مستوي معادلته $2x-y+2z+1=0$

1- عين مجموعة النقط M متساوية المسافة عن (P) و (q) ثم بين أن هذه المجموعة هي تقاطع مستويين (π) و (π') يطلب تعيينهما.

2- تحقق أن (π) و (π') متعامدان.

---

15 - $A(2,0,2)$ ، $B(-1,1,0)$ نقطتان من الفضاء.

1- عين معادلة المستوي المار بالنقطة A وناظمه $\vec{n}(-2,4,6)$

2- عين معادلة المستوي العمودي على (AB) والمار من A.

3- عين معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

---

16 - نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ حيث I منتصف $[EF]$ و J مركز الوجه $ADHE$

ولنعتبر المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

هل هذه المعطيات صحيحة أم خاطئة ؟

1- مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $y=-x+1$ هي المستوي (DBH)

2- المستوي (AIG) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $2x-y-z=0$

3- المستقيم (BJ) عمودي على المستوي (AIG)

---

17 - لتكن النقط $A(2,-2,3)$ ، $B(1,1,1)$ ، $C(3,1,0)$

1- تحقق أن هذه النقط تنتمي إلى نفس المستوي.

2- عين معادلة المستوي (ABC).

---

18 - لتكن النقط $A(4,0,1)$ ، $B(1,-1,2)$ ، $C(2,-1,0)$ ، $D(2,1,-2)$

1- بين أن المثلث ABC قائم في C ثم عين مساحته.

2-1) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(2,-5,1)$ ناظم للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلته.

ب) عين المسافة بين D والمستوي (ABC).

3- باستعمال السؤالين (1) و (2) عين حجم رباعي الوجوه $ABCD$

4-1) عين معادلة المستوي (BCD)

ب) عين المسافة بين A والمستوي (BCD).

5- عبر عن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ بدلالة مساحة المثلث BCD. ثم استنتج مساحة BCD.

19 - نسمي ارتفاع رباعي وجوه كل مستقيم يشمل واحد من رؤوسه وعمودي على الوجه المقابل لهذا الراس.

نقول عن رباعي وجوه انه متلاقي الأعمدة (اعمدته تتقاطع في نقطة) إذا كانت اعمدته الأربعة متقاطعة. وبصيغة أخرى نقول عن رباعي وجوه $ABCD$ انه متلاقي الأعمدة إذا وفقط إذا كانت $(AC) \perp (AB)$ و $(AB) \perp (CD)$ و $(AD) \perp (BC)$.

1- لتكن النقط $I(1,0,0)$ ، $J(0,1,0)$ ، $K(0,0,1)$.

هل رباعي الوجوه $(OIJK)$ متلاقي الأعمدة ؟

2- نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ ولتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) .

اثبت أنه إذا كان الارتفاعان المرسومان من النقطتين A و B في الرباعي الوجوه $ABCD$ متقاطعين فإن المستقيم (BH) هو ارتفاع في المثلث BCD .

3- نعتبر النقط $A(2،2،-1)$ ، $B(-7،1،1)$ ، $C(3،-3،3)$ ، $D(-2،-5،-1)$

ا) تحقق ان المعادلة الديكارتية للمستوي (BCD) هي $-2x-3y+4z-15=0$

ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) .

جـ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$. هل رباعي الوجوه متلاقي الأعمدة ؟

(إذا كانت H مسقط A على المستوي (BCD) هي نقطة تلاقي اعمدة المثلث BCD فإن الرباعي $ABCD$ هو متلاقي أعمدة).

---

20 - A ، B ، C ، D نقط إحداثياتها على التوالي :

$A(3،4،3)$ ، $B(5،-2،3)$ ، $C(2،-1،1)$ ، $D(4،3،-3)$

1- تحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2- عين إحداثيات النقطة D' المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

---

21 - $ABCD$ رباعي وجوه بحيث المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان ولتكن I المسقط العمودي لـ A على (CD) .

بين أن I المسقط العمودي لـ B على (CD) .

---

22 - A ، B ، C ، D ، E نقط إحداثياتها $A(3،1،3)$ ، $B(2،0،-1)$ ، $C(5،0،0)$ ، $D(1،4،0)$ ، $E(2،-1،1)$ على الترتيب.

1- بين ن النقط C ، D ، E ليست على استقامة واحدة.

2- اثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)

---

23 - (P) مستوي معادلته $x-2y+2z-3=0$ ، ولتكن A نقطة من (P) فاصلتها 3 وترتيبها 1 .

1- عين ارتفاع النقطة A .

2- عين إحداثيات الشعاع الناظم لـ (P) واستنتج شعاعين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ ناظمين لـ (P)

وبحيث طويلتاهما 3 .

3- Ω_1 نقطة بحيث $\overrightarrow{A\Omega_1}=\vec{n_1}$ ، اشرح لماذا سطح الكرة (S_1) التي مركزها Ω_1 ونصف قطرها 3 مماس لـ (P) عند A .

4- عين معادلة كل سطح كرة نصف قطرها 3 و الماسة لـ (P) عند A .

---

24 - نعتبر النقطتين $A(4،5،5)$ ؛ $B(-2،2،2)$ من الفضاء.

1- عين معادلة سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ وهذا بعد حساب نصف قطرها وتعيين مركزها.

2- عين معادلة سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ وهذا باستعمال العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

---

25 - لتكن (γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ المعرفة بـ $x^2+y^2+z^2-2z-8=0$

1- تحقق أن $A(0,0,4)$ تنتمي الى (γ) .

ب- بين أن (γ) سطح كرة يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

2- عين معادلة المستوي المماس لـ (γ) في النقطة A .

---

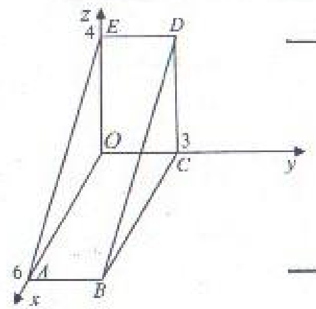
26 - 1- عين معادلة المستوي (P) الذي شعاعه الناظم $\vec{n}(2،-2،1)$ والمار بالنقطة $A(7،0،8)$

2- عين المتراجحة التي تعبر عن نقاط نصف الفضاء المفتوح $\sum$ المحدود بالمستوي (P) ويشمل النقطة $O(0,0,0)$.

3- عين معادلة سطح الكرة (C) الماسة لـ (P) عند النقطة $B(9،1،6)$ بحيث مركزها I ينتمي إلى $\sum$ ويبعد عن المستوي (P) بمسافة قدرها 6 .

---

27 - $ABCD$ رباعي وجوه منتظم و M نقطة تقع داخله. بين أن مجموع مسافات النقطة M عن كل وجه من وجوه الرباعي $ABCD$ تساوي ارتفاع هذا الرباعي.

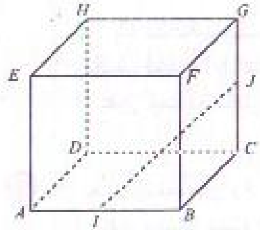


28 - حدد جملة متراجحات تعبر عن النقط الموجودة داخل الموشور $OABCDE$.

---

29 - $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 ولتكن I و J منتصفي الحرفين $[AB]$ و $[CG]$ على التوالي.إليك الشكل التالي.

اجب بصحيح أو خطأ مع التبرير لكل من المعلومات التالية:



1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=0,5$

2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=AB\cdot IC\cos\frac{\pi}{3}$

نزود الآن الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

5- معادلة المستوي (EIJ) هي $6x-7y+8z-3=0$

6- معادلة المستوي (EFI) هي $x=0$.

7- الشعاع الذي إحداثياته $(2;1;-4)$ ناظم للمستوي (FIJ) .

8- حجم الرباعي الوجوه $(EFIJ)$ يساوي $\frac{1}{6}$.

30 - $ABCDEFGH$ مكعب نرمز له بـ (Γ) طول حرفه a .

ليكن (T) رباعي الوجوه $AFCH$.

1-أ) بين أن وجوه الرباعي $AFCH$ مكونة من مثلثات متقايسة الأضلاع.

ب) بين أن الحجم V_1 لرباعي الوجوه $AEFH$ يساوي $\frac{a^3}{6}$.

ج) بين أن الحجم V_2 لرباعي الوجوه $AFCH$ يساوي $\frac{a^3}{3}$.

د) استنتج مسافة النقطة A عن المستوي (HFC) .

2- نعزل رباعي الوجوه $AFCH$ ولتكن J منتصف $[FC]$

أ) بين أن المستقيمين (AH) و (FC) متعامدان.

ب) احسب $\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{JH}$ بدلالة a ، ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للزاوية $\widehat{AJH}$.

الدرس 13

المستقيمات و المستوي

1. مرجح نقط

1-1 مرجح نقطتين

تعريف

A و B نقطتان و α ، β عددان حقيقيان بحيث $\alpha+\beta\neq 0$ عندئذ توجد نقطة وحيدة G من الفضاء بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.

نتيجة

- مرجح نقطتين A و B مرفقتين بنفس العامل غير المعدوم هو منتصف $[AB]$.
- المرجح G للنقطتين المختلفتين A و B ينتمي إلى المستقيم (AB)
- إذا كان α و β لهما نفس الإشارة فإن G تنتمي إلى $[AB]$
- إذا كان α و β مختلفان في الإشارة فإن G تقع خارج $[AB]$

خاصية

إذا كان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ مع $\alpha+\beta\neq 0$ فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

مثال -

A ، B ، C ثلاث نقط موضوعة كما في الشكل :

1) اوجد العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة A مرجح النقطتين B و C المرفقتين بالعاملين α و β على التوالي

2) انشئ G مرجح الجملة $\{(A,3),(B,-2)\}$.

الحل :

1) الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا و $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$

إذن $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ومنه نستنتج أن A هي مرجح الجملة $\{(B,2),(C,1)\}$

2) القول أن G هي مرجح الجملة $\{(A,3),(B,-2)\}$

يكافئ القول أن $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}$ ومنه فإن G منطبقة على C

1 - 2 مرجح ثلاث نقط أو أكثر

تعريف

لتكن A ، B ، C ثلاث نقط و α ، β ، γ أعداد حقيقية بحيث $\alpha+\beta+\gamma\neq0$ وعندئذ توجد نقطة وحيدة G من الفضاء بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

هذه النقطة هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

خاصية 1

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ مع $\alpha+\beta+\gamma\neq0$

فإنه من اجل كل نقطة M من الفضاء (M تنتمي إلى المستوي (ABC)) يكون :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

مبرهنة

لتكن ثلاث نقط A ، B ، C وثلاثة أعداد حقيقية α ، β ، γ بحيث $\alpha+\beta+\gamma\neq0$

إذا كان $\alpha+\beta\neq0$ فإن مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ هو نفسه مرجح الجملة $\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$ مع H مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

خاصية 2

1) المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا معاملات النقط في أو على عدد حقيقي غير معدوم.

2) إذا كانت A ، B ، C إحداثياتها (x_A,y_A,z_A) ، (x_B,y_B,z_B) و (x_C,y_C,z_C) على التوالي في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فإن إحداثيات G مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ مع $\alpha+\beta+\gamma\neq0$ هي :

$x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

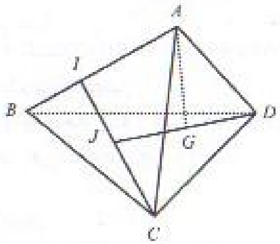
3) إذا لم تكن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة فإن مرجحها ينتمي إلى المستوي (ABC)

4) إذا لم تكن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة ومرفقة بمعاملات لها نفس الإشارة فإن مرجحها G يقع داخل المثلث ABC .

تمرين تدريبي 1

$ABCD$ رباعي وجوه، أنشئ G مرجح الجملة $\{(A,2),(B,3),(C,5),(D,10)\}$

الحل



نجمع A و B لأن مجموع معاملاتهما يختلف عن الصفر.

ولتكن I مرجح A و B المرفقتين بـ 2 و 3 على الترتيب

تحقق $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

ومنه نستنتج $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

نجمع I و C لأن مجموع معاملاتهما يختلف عن الصفر.

بما أن I و C لهما نفس المعامل 5 فإن مرجحهما J منتصف $[IC]$

بما أن J و D لهما نفس المعامل 10 فإن مرجح النقطتين J و D هو منتصف $[DJ]$

تمرين تدريبي 2

ABC مثلث ، ولتكن النقط I ، J ، K منتصفات القطع $[BC]$، $[CA]$ ، $[AB]$ على التوالي. بين أن متوسطات هذا المثلث متقاطعة.

الحل

بما أن I منتصف $[BC]$ هي مرجح الجملة $\{(B,1),(C,1)\}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ هي نفسها مرجح الجملة $\{(A,1),(I,2)\}$

إذن G هي نقطة من المستقيم (AI)

بما أن J منتصف $[CA]$ هي مرجح الجملة $\{(A,1),(C,1)\}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ هي نفسها مرجح الجملة $\{(B,1),(J,2)\}$

إذن G هي نقطة من المستقيم (BJ).

بنفس الكيفية نبين أن G تنتمي إلى المستقيم (CK)

إذن G تنتمي إلى تقاطع المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CK).

❷ التمييز المرجحي

1-2 التمييز المرجحي لمستقيم وقطعة

في الفضاء كما في الهندسة المستوية.

- المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$ مع t يمسح $\mathbb{R}$.
- القطعة $[AB]$ هي مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$ مع t يمسح المجال $[0,1]$

مبرهنة

1) المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M مراجح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ مع t عدد حقيقي كيفي.
2) القطعة $[AB]$ هي مجموعة النقط M مراجح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ مع t عدد حقيقي كيفي من $[0,1]$.

الإثبات

t عدد حقيقي كيفي.

القول أن M هي مرجح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ يكافئ القول أن :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{t}{(1-t)+t}\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{AB}$$

وعليه المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ لما t يمسح $\mathbb{R}$

$[AB]$ هي مجموعة مراجيح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ لما t يمسح $[0,1]$

ملاحظة

القطعة $[AB]$ تمثل كذلك مجموعة كل مراجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$
مع α و β عددان حقيقيان موجبان تماما.
لأن المرجح M للجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ هو مرجح الجملة :
$\left\{\left(A,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right),\left(B,\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$ اي $\{(A,1-t),(B,t)\}$ مع $t=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ و $t\in[0,1]$

تمرين تدريبي

$ABCD$ رباعي وجوه، I و K منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي.
J و L نقطتان بحيث $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ و G هي منتصف $[JL]$
بين أن النقط G ، I و K على استقامة واحدة.

✓ الحل

لإثبات أن ثلاث نقط على استقامة واحدة يكفي أن نثبت أن واحدة منها هي مرجح الأخرتين.

من العلاقة $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ نستنتج أن L هي مرجح الجملة $\{(A,3),(D,1)\}$

ومن العلاقة $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ نستنتج أن J هي مرجح الجملة $\{(C,1),(B,3)\}$

لتكن G' مرجح الجملة $\{(A,3),(D,1),(C,1),(B,3)\}$

باستعمال خاصية التجميع تكون G' هي مرجح الجملة $\{(L,4),(J,4)\}$

إذن G' منطبقة على G منتصف $[JL]$.

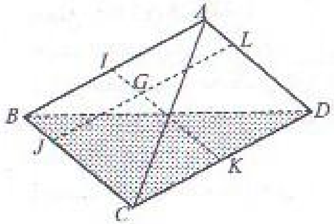
لكن I هي مرجح $\{(A,3),(B,3)\}$

و K مرجح $\{(C,1),(D,1)\}$

إذن وحسب خاصية التجميع تكون G' هي مرجح الجملة $\{(I,6),(K,2)\}$.

وعليه G هي مرجح الجملة $\{(I,3),(K,1)\}$

إذن النقط G ، I ، K تقع على استقامة واحدة .



2-2 التمييز المرجحي لمستوي ومثلث

مبرهنة

لتكن A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء.
1) كل نقطة من المستوي (ABC) هي مرجح النقط A ، B ، C
2) كل نقطة تقع داخل المثلث ABC هي مرجح النقط A ، B ، C المرافقة بمعاملات موجبة تماما.

الإثبات

1) لتكن M نقطة من المستوي (ABC)، الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ من نفس المستوي

وعليه يوجد عددان حقيقيان x و y بحيث $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AM}=x(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})+y(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$$
$$\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AM}+x\,\overrightarrow{MB}+y\,\overrightarrow{AM}+y\,\overrightarrow{MC}$$
$$-\overrightarrow{AM}+x\,\overrightarrow{AM}+y\,\overrightarrow{AM}+x\,\overrightarrow{MB}+y\,\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$(-1+x+y)\,\overrightarrow{AM}+x\,\overrightarrow{MB}+y\,\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

إذن $(1-x-y)\,\overrightarrow{MA}+x\,\overrightarrow{MB}+y\,\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

بما أن $(1-x-y)+x+y=1\neq 0$ فإن M هي مرجح الجملة $\{(A,1-x-y),(B,x),(C,y)\}$

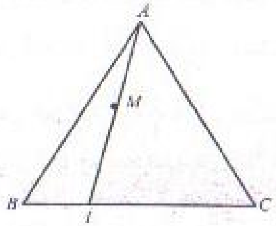
2) لتكن M مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ مع $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ و $\gamma > 0$

ولتكن I مرجح الجملة $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$ عندئذ I تنتمي إلى $]BC[$.

وحسب خاصية التجميع فإن M هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(I,\beta+\gamma)\}$

وبما أن $\alpha > 0$ و $\beta+\gamma > 0$ فإن M تنتمي إلى $]AI[$

إذن M تقع داخل المثلث ABC.



وبالعكس :

إذا كانت نقطة M تقع داخل المثلث ABC فإن المستقيم (AM) يقطع (BC) في النقطة I حيث I تنتمي إلى $]BC[$.

إذن يوجد عددان حقيقيان $\beta > 0$ و $\gamma > 0$ بحيث I هي مرجح $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

لكن M تقع على $]AI[$ إذن يوجد عدد حقيقي $\alpha > 0$ بحيث M هو مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(I,\beta+\gamma)\}$

وحسب خاصية التجميع فإن M هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

تمرين تدريبي

$ABCD$ رباعي وجوه. بين أن النقط M ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس المستوي معينا موضع النقطة M بحيث $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

✓ الحل

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0} \quad \text{..............(1)}$$

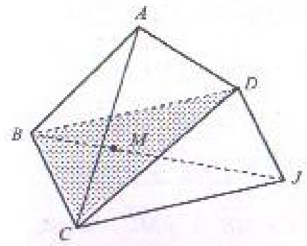
ـ نعتبر الجملة $\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$

بما أن مجموع معاملات النقط B ، C ، D لا يساوي الصفر فإن النقطة M هي مرجح الجملة $\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$

إذن النقطة M تنتمي إلى المستوي (BCD).

ومنه فإن النقط M ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس المستوي (BCD)

العلاقة (1) تصبح :



$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$ حيث $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$

❸ . التمثيل الوسيطي

3-1 التمثيل الوسيطي لمستقيم ـ قطعة مستقيمة ونصف مستقيم

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

مبرهنة

ليكن (d) مستقيم مار بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a,b,c)$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

النقطة M ذات الإحداثيات (x,y,z) تنتمي الى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t

بحيث $t\in\mathbb{R}$ ، $(S)\ \begin{cases}x=x_0+ta\\ y=y_0+tb\\ z=z_0+tc\end{cases}$

الإثبات

M تنتمي الى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ .... (1)

إذا كانت إحداثيات M هي (x,y,z) فإن إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ هي : $(x-x_0 ، y-y_0 ، z-z_0)$ والشعاع $t\vec{u}$ إحداثياته (ta,tb,tc)

اذن ومن المساواة (1) نستنتج $\begin{cases}x-x_0=ta\\ y-y_0=tb\\ z-z_0=tc\end{cases}$ اي $\begin{cases}x=x_0+ta\\ y=y_0+tb\\ z=z_0+tc\end{cases}$

ملاحظة

1) الجملة (S) تسمى بالتمثيل الوسيطي للمستقيم (d) في المعلم المتعامد والمتجانس.

2) المستقيم (d) ليس له تمثيل وسيطي وحيد لأنه متعلق باختيار $\vec{u}$ و A.

3) إذا كتب التمثيل الوسيطي لمستقيم (d) على الشكل (S) فيمكننا حينها القول ان الشعاع $\vec{u}(a,b,c)$ هو شعاع توجيه (d) وأن النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ تنتمي الى (d)

4) من اجل كل عدد حقيقي t نرفق النقطة الوحيدة : $M(x_0+ta\ ,\ y_0+bt\ ,\ z_0+tc)$ من (d) وبالعكس من اجل كل نقطة M من (d) وافق عدد حقيقي وحيد t بحيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

نتيجة

A و B نقطتان مختلفتان من الفضاء ، نضع $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

- انتماء نقطة M إلى القطعة $[AB]$ يعني أن إحداثياتها تحقق (S) مع $t\in[0,1]$
- انتماء النقطة M إلى نصف المستقيم $[AB)$ يعني أن إحداثياتها تحقق (S) و $t\in[0,+\infty[$.

تمرين تدريبي

(d) مستقيم تمثيله الوسيطي $(S)\ \begin{cases} x=6-2t \\ y=-1+6t \\ z=1+2t \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$.

1) هل النقطة $A(4,5,2)$ تنتمي إلى (d) ؟

2) لتكن النقطتان $B(2,6,0)$ و $C(4,0,-2)$

هل المستقيم (d) يوازي (BC) ؟

3) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .

✓ الحل

1) A تنتمي إلى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي وحيد t يحقق الجملة :

$$\begin{cases} x_A=6-2t & \dots (1) \\ y_A=-1+6t & \dots (2) \\ z_A=1+2t & \dots (3) \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots (\mathrm{I})$$

من (1) نجد $t=1$ ومن (3) نجد $t=\frac{1}{2}$ ومن (2) نجد $t=1$

إذن لا توجد قيمة لـ t تحقق الجملة (I) وعليه فالنقطة A لا تنتمي إلى (d)

2) لدينا $\overrightarrow{BC}(2,-6,-2)$ وشعاع توجيه (d) هو $\vec{u}(-2,6,2)$.

الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وعليه فالمستقيمان (BC) و (d) متوازيان.

3) المستقيم (BC) يشمل B وشعاع توجيهه $\vec{u}$ وعليه التمثيل الوسيطي لـ (BC) هو :

$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=6+6t \\ z=2t \end{cases} \quad \text{مع } t \in \mathbb{R}$$

3-2 التمثيل الوسيطي لمستو

A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}+s\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(\alpha,\beta,\gamma)$ و $\overrightarrow{AC}(\alpha',\beta',\gamma')$ هما شعاعي توجيه المستوي (ABC)

مبرهنة

المستوي (ABC) المار من النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاعي توجيهه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\begin{cases} x=x_0+t\alpha+s\alpha' \\ y=y_0+t\beta+s\beta' \\ z=z_0+t\gamma+s\gamma' \end{cases} \dots\dots (S)$ مع $(t,s)\in\mathbb{R}^2$

تسمى الجملة (S) بالتمثيل الوسيطي للمستوي (ABC)

تمرين تدريبي 1

لتكن $A(1,2,-1)$ ، $B(0,1,2)$ ، $C(1,3,0)$ نقط من الفضاء

1) بين أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2) عين التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) .

3) هل النقطة $D(2,3,1)$ تنتمي إلى المستوي (ABC) ؟

✓ الحل

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-1,-1,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2) التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) المار من A وشعاعي توجيهه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي الجملة

$$(t,s)\in\mathbb{R}^2 \ ، \ \begin{cases} x=1-t \\ y=2-t+s \\ z=-1+3t+s \end{cases} \dots\dots (S)$$

3) النقطة D تنتمي إلى (ABC) إذا و فقط إذا وجد عددان حقيقيان وحيدان s و t يحققان الجملة (S)

D تنتمي إلى (ABC) يعني أن $\begin{cases} x_D=1-t \\ y_D=2-t+s \\ z_D=-1+3t+s \end{cases}$

بتعويض إحداثيات D نجد $\begin{cases} 2=1-t & \dots(1) \\ 3=2-t+s & \dots(2) \\ 1=-1+3t+s & \dots(3) \end{cases}$

من (1) نجد $t=-1$ نعوض t في (2) و (3) نجد $\begin{cases} s=0 \\ s=5 \end{cases}$

s ليس وحيدا وبالتالي النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

تمرين تدريبي 2

1) (P_1) مستوي تمثيله الوسيطي هو $(S)\ \begin{cases} x=1+2t-s \\ y=-t-2s \\ z=t \end{cases}$ مع $(t,s)\in\mathbb{R}^2$

أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي (P_1) .

2) ليكن (P_2) مستوي معادلته الديكارتية $2x+y-z+1=0$ أوجد التمثيل الوسيطي للمستوي (P_2) .

✓ الحل

1) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P_1) يعني إيجاد علاقة بين x ، y و z مستقلة عن الوسيطين t و s

$$\begin{cases} x=1+2t-s & \ldots (1) \\ y=-t-2s & \ldots (2) \\ z=t & \ldots (3) \end{cases}$$

نعوض t بما يساويها في (2) نجد $y=-z-2s$ ومنه نجد $s=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z$

نعوض t و s في المعادلة (1) نجد $x=1+2z+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$

بالتبسيط نجد $-2x+y+5z+2=0$

إذن المعادلة الديكارتية للمستوي (P_1) هي $-2x+y+5z+2=0$

2) لتكن $A(0,1,1)$ نقطة من المستوي (P_2)

$$\overrightarrow{AM}=x\vec{i}+y\vec{j}+(z-1)\vec{k}=x\vec{i}+y\vec{j}+(2x+y)\vec{k}$$
$$=x\vec{i}+y\vec{j}+2x\vec{k}+y\vec{k}=x(\vec{i}+2\vec{k})+y(\vec{j}+\vec{k})$$
$$=x\vec{u}+y\vec{v}$$

حيث $\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(0,1,1)$.

$\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(0,1,1)$ شعاعان مستقلان خطيا وبالتالي يمثلان شعاعي توجيهه (P_2)

وعليه التمثيل الوسيطي لـ (P_2) المار من A وشعاعي توجيهه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو :

$$(S)\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=2t+s+1 \end{cases} \text{ مع } (t,s)\in\mathbb{R}^2$$

4. تقاطع مستويين

• ترجمة هندسية

ليكن (P_1) و (P_2) مستويين مختلفين.

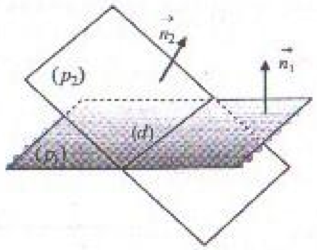
نعلم أن هذين المستويين إما أن يكونا متوازيين تماما أو متقاطعين.

إذا كان $\vec{n}_1$ ناظم (P_1) و $\vec{n}_2$ ناظم (P_2) فإن المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان إذا وفقط إذا كان $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ مرتبطين خطيا.

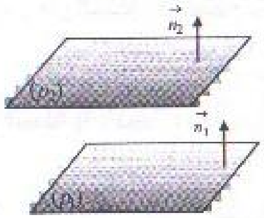
خاصية

ليكن (P_1) و (P_2) مستويين مختلفين وناظماهما على التوالي $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$

- إذا كان $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ مرتبطين خطيا فإن المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان، وبالتالي ليس لهما نقاط مشتركة.
- إذا كان $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ مستقلين خطيا فإن (P_1) و (P_2) متقاطعان في مستقيم (d)



(p_1) و (p_2) متقاطعان.



(p_1) و (p_2) متوازيان.

• ترجمة جبرية

(P_1) و (P_2) مستويان معادلتاهما على التوالي $ax+by+cz+d=0$ و $a'x+b'y+c'z+d'=0$

مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ و $(a',b',c')\neq(0,0,0)$ وناظماهما $\vec{n}_1(a,b,c)$ ، $\vec{n}_2(a',b',c')$.

$\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كانت الأعداد a,b,c متناسبة مع الأعداد a',b',c'.

a,b,c متناسبة مع a',b',c' يعني أن $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

خاصية

المستويان (P_1) و (P_2) ذوا المعادلتين $ax+by+cz+d=0$ و $a'x+b'y+c'z+d'=0$ على التوالي متقاطعان إذا وفقط إذا كانت الثلاثية (a,b,c) غير متناسبة مع الثلاثية (a',b',c').

- إذا كان $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ مستقلين خطيا فإن كل نقطة M من المستقيم (d) الناتج من تقاطع (P_1) و (P_2) لها إحداثيات (x,y,z) تحقق الجملة $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

وللحصول على التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) نأخذ كوسيط t أحد المتغيرات x، y أو z ثم نحل جملة ذات معادلتين بالمجهولين الباقيين واللذان نعبر عنهما بدلالة t.

تمرين تدريبي

(P_1) و (P_2) مستويان معادلتاهما على التوالي $2x+y+z-1=0$ و $x+3y+2z-3=0$.
بين أن هذين المستويين متقاطعان في مستقيم (d)، ثم عين تمثيلا وسيطيا له.

الحل

ناظم (P_1) هو $\vec{n}_1(2,1,1)$ وناظم (P_2) هو $\vec{n}_2(1,3,2)$

بما أن $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}$ فإن $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ مستقلان خطيا.

وبالتالي (P_1) و (P_2) متقاطعان في مستقيم (d).

إذا كانت $M(x,y,z)$ من (d) فإن (x,y,z) تحقق الجملة $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x+3y+2z-3=0 \end{cases} \ldots\ldots (I)$

بوضع $z=t$ فإن الجملة (I) تصبح كما يلي $\begin{cases}2x+y+t-1=0\\x+3y+2t-3=0\end{cases}$ .... (II)

بعد حل الجملة (II) نجد $\begin{cases}x=-\frac{1}{5}t\\y=-\frac{3}{5}t+1\\z=t\end{cases}$

5. جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم

رأينا سابقا أنه إذا كان ناظما (P_1) و (P_2) مستقلين خطيا فإن تقاطع (P_1) و (P_2) هو مستقيم (d) أي أنه إذا كانت الأعداد الحقيقية a, b, c غير متناسبة مع a', b', c'

فإن جملة المعادلتين $\begin{cases}a\,x+b\,y+c\,z+d=0\\a'\,x+b'\,y+c'\,z+d'=0\end{cases}$ تعبر عن انتماء النقطة $M(x, y, z)$ إلى المستقيم (d) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2).

عكسيا يمكن اعتبار كل مستقيم من الفضاء كتقاطع لمستويين ومنه فإن كل مستقيم نعبر عنه بجملة معادلتين ديكارتيتين من الشكل $\begin{cases}a\,x+b\,y+c\,z+d=0\\a'\,x+b'\,y+c'\,z+d'=0\end{cases}$

حيث a, b, c غير متناسبة مع a', b', c'

خاصية

مجموعة النقط من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق الجملة :

$\begin{cases}a\,x+b\,y+c\,z+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ و a, b, c غير متناسبة مع a', b', c' هي مستقيم.

تمرين تدريبي 1

1) $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

أ) بين أن جملة المعادلتين $\begin{cases}x+y-z-2=0\\2x+y+2z=0\end{cases}$ تمثل جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم (d).

ب) عين تمثيلا وسيطيا لـ (d).

الحل

أ) لكي تمثل $\begin{cases}x+y-z-2=0\\2x+y+2z=0\end{cases}$ جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (d)

يجب أن تكون الأعداد $-1, 1, 1$ غير متناسبة مع الأعداد $2, 1, 2$

وبالفعل فإن الثلاثية $(1, 1, -1)$ غير متناسبة مع الثلاثية $(2, 1, 2)$.

إذن الجملة $\begin{cases}x+y-z-2=0\\2x+y+2z=0\end{cases}$ هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (d)

ب) إذا كانت $M(x, y, z)$ نقطة من (d) فإن (x, y, z) تحقق الجملة :

$$(S) \ \ldots \begin{cases}x+y-z-2=0\\2x+y+2z=0\end{cases}$$

بوضع $z=t$ فإن الجملة (S) تصبح كما يلي $\begin{cases}x+y-z-2=0\\2x+y+2z=0\end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $x=-3t-2$ و $y=4t+4$

إذن الجملة $\begin{cases}x=-3t-2\\y=4t+4\\z=t\end{cases}$ تمثيلا وسيطيا لـ (d).

تمرين تدريبي 2

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء.لتكن الجملة $\begin{cases}x=2t+3\\y=t-2\\z=-t+3\end{cases}$ تمثيلا وسيطيا لمستقيم (d).

عبر عن (d) بجملة معادلتين ديكارتيتين.

الحل

$$\begin{cases}x=2t+3 \ \ldots.(1)\\y=t-2 \ \ldots.(2)\\z=-t+3 \ \ldots.(3)\end{cases}$$

من (3) نجد $t=-z+3$ نعوض عبارة t في (1) و (2)

نجد $\begin{cases}x=2(-z+3)+3\\y=(-z+3)-2\end{cases}$ بالتبسيط نجد $\begin{cases}x+2y-9=0\\y+z-1=0\end{cases}$ .... (I)

إذن الجملة (I) هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (d).

6. تقاطع مستقيم ومستوي

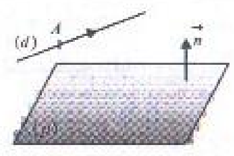
• **ترجمة هندسية**

ليكن مستقيم (d) و مستوي (p)

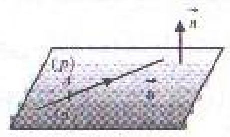
نعلم أن المستقيم (d) إما أن يكون محتوى في (p) أو أن يكون موازيا تماما له أو متقاطع معه.

ليكن $\vec{u}$ شعاع توجيهه (d) و $\vec{n}$ ناظم للمستوي (p)

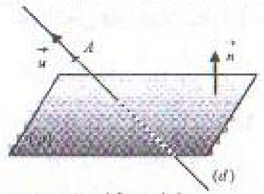
(d) و (p) متوازيان إذا وفقط إذا كان $\vec{n}$ عموديا على $\vec{u}$



(d) و (p) متوازيان



(d) محتوى في (p)



(p) و (d) متقاطعان

خاصية

ليكن (d) مستقيم مارا بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}$ ، و (p) مستوي شعاع ناظمه $\vec{n}$

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير متعامدين فإن (d) يقطع المستوي (p)
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدين فإن (d) محتوى في (p) لما A تنتمي إلى (p)

ولا توجد نقاط مشتركة بينهما إذا كانت A لا تنتمي إلى (p).

- **ترجمة جبرية**

نفرض أن معادلة (p) هي $ax+bx+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

والمستقيم (d) يمر بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$

مع $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$

التمثيل الوسيطي لـ (d) هو $\begin{cases} x=x_0+t\alpha \\ y=y_0+t\beta \\ z=z_0+t\gamma \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

المستقيم (d) يقطع المستوي (p) إذا وفقط إذا كان $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0$ أي $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$

خاصية

المستوي ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$ والمستقيم ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=x_0+t\alpha \\ y=y_0+t\beta \\ z=z_0+t\gamma \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

متقطعان إذا وفقط إذا كان $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$

- إذا كان (d) و (p) متقاطعين فإن تعيين نقطة تقاطعهما يؤول إلى حل جملة مكونة من معادلة (p) ومعادلات (d)

أي حل الجملة
$$\begin{cases} x=x_0+t\alpha & \dots\dots (1) \\ y=y_0+t\beta & \dots (2) \\ z=z_0+t\gamma & \dots. (3) \\ ax+by+cz+d=0 & \dots (4) \end{cases}$$
ذات المجاهيل x ، y و z

ولحل هذه الجملة نعوض x ، y ، z بما يساويها في المعادلة (4) مما يسمح لنا بتعيين قيمة t أولا ثم نعوض قيمة t في عبارة كل من x و y ، z نحصل على إحداثيات نقطة التقاطع.

ملاحظة

لما يكون (d) معرف كتقاطع مستويين (P_1) و (P_2) فإن البحث عن تقاطع (d) مع (P) يؤول إلى تعيين تقاطع المستويات (P) ، (P_1) و (P_2).

تمرين تدريبي

A و B نقطتان إحداثياتهما $(3,1,-2)$ ، $(0,2,1)$ على الترتيب.

و (p) مستوي معادلته الديكارتية $x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-1=0$

بين أن المستقيم (AB) يقطع (p) في نقطة I معينا إحداثياتها.

✓ الحل

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$ و $\vec{n}_{(p)}(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

بما أن $1(-3)+(-\frac{1}{2})(1)+\frac{1}{2}(3)=-2\neq 0$

فإن (AB) يقطع (p) في نقطة I إحداثياتها (x,y,z) تحقق الجملة:
$$\begin{cases} x=x_A+\alpha t \\ y=y_A+\beta t \\ z=z_A+\gamma t \\ x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-1=0 \end{cases}$$
بتعويض إحداثيات A في الجملة الأخيرة نجد:
$$\begin{cases} x=3-3t & \dots (1) \\ y=1+t & \dots\dots (2) \\ z=-2+3t & \dots (3) \\ x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-1=0 & \dots (4) \end{cases}$$

بتعويض x ، y ، z في المعادلة (4) نجد $t=\frac{1}{4}$

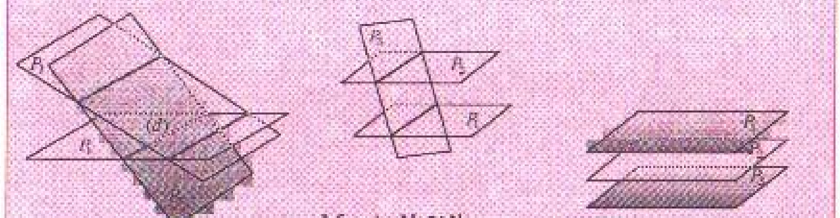
إذن $x=3-3(\frac{1}{4})=\frac{9}{4}$ و $y=1+t=\frac{5}{4}$ و $z=-2+3t=-\frac{5}{4}$

وبالتالي $I=(\frac{9}{4},\frac{5}{4},-\frac{5}{4})$

7. تقاطع ثلاثة مستويات

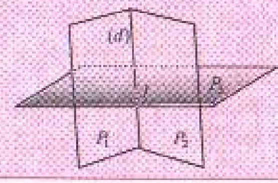
- **ترجمة هندسية**

- إذا كان مستويان من بين الثلاثة منطبقين فإن دراسة تقاطع المستويات الثلاث يؤول إلى دراسة تقاطع مستويين.
- إذا كانت المستويات الثلاثة مختلفة مثنى مثنى فمن أجل تعيين تقاطعها يجب علينا أن ندرس تقاطع (P_1) و (P_2) أولا ثم تقاطع $(P_1)\cap(P_2)$ مع (P_3) وكل الحالات الممكنة ملخصة في الجدول التالي:

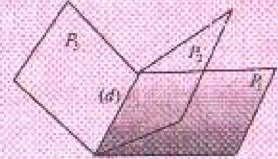


ولا نقطة مشتركة

نقطة مشتركة



مستقيم مشترك



- **ترجمة جبرية**

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) مستويات معادلاتها على الترتيب :

$ax+by+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

$a'x+b'y+c'z+d'=0$ مع $(a',b',c')\neq(0,0,0)$

$a''x+b''y+c''z+d''=0$ مع $(a'',b'',c'')\neq(0,0,0)$

تعيين تقاطع الثلاثة مستويات يؤول إلى حل جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل

$$(S)\ \ldots\ldots \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

الجملة (S) إما ليس لها حلول اولها حل وحيد أو لها ما لا نهاية من الحلول

والجدول التالي يلخص كل الحالات لمجموعة حلول الجملة (S) :

مجموعة حلول الجملة (S)	تقاطع (P_1) و (P_2) و (P_3)
خالية	لا توجد أي نقطة مشتركة
ثلاثية وحيدة	نقطة مشتركة وحيدة $I(x,y,z)$
كل الثلاثيات (x,y,z) حلول المعادلتين المعرفتين لـ (d)	مستقيم (d) ، ((d) معرف باثنتين من ثلاث معادلات).
كل الثلاثيات (x,y,z) حلول لواحدة من المعادلات	مستوي (حالة $P_1=P_2=P_3$)

تمرين تدريبي

المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) معرفة بمعادلاتها الديكارتية التالية :

$(P_1): x+y+2z+2=0$ ، $(P_2): 2x+y-z-1=0$ ، $(P_3): x-y+2=0$

ادرس تقاطع المستويات (P_1) ، (P_2) و (P_3).

✓ الحل

تقاطع (P_1) ، (P_2) و (P_3) يؤول إلى حل الجملة

$$(S)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} x+y+2z+2=0 & \ldots\ (1) \\ 2x+y-z-1=0 & \ldots\ (2) \\ x-y+2=0 & \ldots\ (3) \end{cases}$$

من المعادلة (3) نجد $y=x+2$ نعوض y في (1) و (2) نجد $\begin{cases} x+z+2=0 \\ 3x-z+1=0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots (S')$

الجملة (S') تكتب $\begin{cases} z=-2-x \\ z=3x+1 \end{cases}$

من المساوتين $z=-2-x$ و $z=3x+1$ نستنتج $x=-\frac{3}{4}$

إذن $z=-\frac{5}{4}$ و $y=\frac{5}{4}$ بالتالي (P_1) ، (P_2) و (P_3) متقاطعة في النقطة $I\left(-\frac{3}{4},\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\right)$ د

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 إثبات الإستقامية باستعمال المرجح

$ABCD$ رباعي وجوه و α عدد حقيقي، I و J منتصفا $[AB]$ و $[CD]$
على التوالي، E و F نقطتان بحيث $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$
و H منتصف $[EF]$
1) تحقق أن E مرجح الجملة $\{(A,1-\alpha),(D,\alpha)\}$ وأن F مرجح الجملة
$\{(B,1-\alpha),(C,\alpha)\}$
2-1) بين أن H مرجح الجملة $\{(D,\alpha),(C,\alpha),(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)\}$
ب) استنتج أن I ، J و H على استقامة واحدة.

✓ الحل

1) ـ المساواة $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ تصبح $\overrightarrow{AE}=\alpha(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})$ أي $(1-\alpha)\overrightarrow{AE}-\alpha\overrightarrow{ED}=\vec{0}$

وبضرب هذه الأخيرة في $(1-)$ نجد $(1-\alpha)\overrightarrow{AE}+\alpha\overrightarrow{ED}=\vec{0}$
وهذا يعني أن E مرجح الجملة $\{(A,1-\alpha),(D,\alpha)\}$

ـ المساواة $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$ تكتب على الشكل $\overrightarrow{BF}=\alpha(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC})$

أي $(1-\alpha)\overrightarrow{BF}-\alpha\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

وبضرب هذه الأخيرة في $(1-)$ نجد $(1-\alpha)\overrightarrow{BF}+\alpha\overrightarrow{FC}=\vec{0}$
وهذا يعني أن F مرجح الجملة $\{(B,1-\alpha),(C,\alpha)\}$

2) $(1-\alpha)\overrightarrow{HA}+(1-\alpha)\overrightarrow{HB}+\alpha\overrightarrow{HC}+\alpha\overrightarrow{HD}=[(1-\alpha)\overrightarrow{HA}+\alpha\overrightarrow{HD}]+[(1-\alpha)\overrightarrow{HB}+\alpha\overrightarrow{HC}]$

$=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HF}=\vec{0}$
إذن H هي مرجح الجملة $\{(A,1-\alpha),(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha)\}$

ب) I هي مرجح الجملة $\{(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)\}$ و J مرجح $\{(C,\alpha),(D,\alpha)\}$
حسب خاصية التجميع فإن H هي مرجح $\{(I,2-2\alpha),(J,2\alpha)\}$
إذن النقط H ، J ، I على استقامة واحدة.

تطبيق 2 تعيين مجموعة النقط

A و B نقطتان مختلفتان من الفضاء.
1) عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=AB$
2) عين مجموعة النقط من الفضاء بحيث $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

✓ الحل

1) لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,-2)\}$ تحقق $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{MG}$

المساواة $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=AB$ تكافئ $MG=AB$

ومنه مجموعة النقط المطلوبة هي سطح كرة مركزها G وطول نصف قطرها $r=AB$

2) لتكن I منتصف $[AB]$ و G_1 مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2)\}$

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG_1}$ و $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

المساواة $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $3MG_1=\frac{3}{2}\times 2\,MI$

أي $MG_1=MI$
إذن مجموعة النقط M هي المستوي المحوري للقطعة $[G_1I]$

تطبيق 3 إثبات أن أربع نقط من نفس المستوي

$ABCD$ رباعي وجوه، K نقطة من القطعة $[AB]$ بحيث $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

و L نقطة من القطعة $[CD]$ بحيث $\overrightarrow{CL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

I و J منتصفا $[AD]$ و $[BC]$ على الترتيب.
G مرجح الجملة $\{(A,3),(B,1),(C,1),(D,3)\}$
1) بين أن النقط G ، K ، L على استقامة واحدة.
ب) بين أن النقط G ، I ، J على استقامة واحدة.
ج) استنتج أن النقط I ، J ، K ، L من نفس المستوي.

✓ الحل

أ) المساواة $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ تكتب $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB})$ بالتبسيط نجد $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

وهذا يعني أن K مرجح الجملة $\{(A,3),(B,1)\}$

المساواة $\overrightarrow{CL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ تكتب $\overrightarrow{CL}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{LD})$ بالتبسيط نجد $\overrightarrow{LC}+3\overrightarrow{LD}=\vec{0}$

وهذا يعني أن L مرجّح الجملة $\{(C,1),(D,3)\}$

إذن G هي مرجح الجملة $\{(K,4),(L,4)\}$ أي G منتصف $[KL]$

وعليه النقط G ، L ، K على استقامة واحدة.

ب) I مرجح الجملة $\{(A,3),(D,3)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B,1),(C,1)\}$

وحسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(J,2),(I,6)\}$

وهذا يعني أن النقط I ، J ، G تقع على استقامة واحدة.

جـ) بما أن G ، I ، J على استقامة واحدة فإن G تنتمي إلى المستقيم (IJ)

بما أن G ، K ، L على استقامة واحدة فإن G تنتمي إلى المستقيم (KL)

إذن G تنتمي إلى تقاطع (IJ) و (KL) الغير متوازيين

وعليه فإن G تنتمي إلى المستوي المحدد بالمستقيمين (IJ) و (KL)

وبالتالي النقط I ، J ، K ، L من نفس المستوي.

تطبيق 4 حساب المسافة بين نقطة ومستوي

$ABCDEFGH$ مكعب حرفه 1.

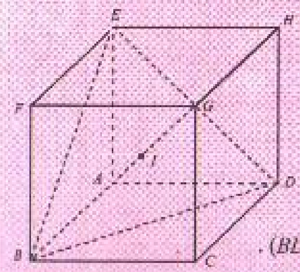
1) أ) بسط عبارة الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

ب) أثبت أن $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$

جـ) بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BDE).

2) I مركز ثقل المثلث BDE استنتج من السؤال 1-أ) أن النقطة I هي نقطة تقاطع المستقيم (AG) والمستوي (BDE) ثم عين موضعها على القطعة $[AG]$.

3) نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$



أ) اكتب معادلة للمستوي (BDE).

ب) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) المار من H و العمودي على المستوي (BDE)

جـ) أوجد إحداثيات J تقاطع (d) مع (BDE)

د) استنتج مسافة النقطة H عن المستوي (BDE).

✓ الحل

1) أ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AG}+\vec{0}=\overrightarrow{AG}$

• $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

ب) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}^2$

$=-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AE}^2+0+0+0+0=-1+1=0$

جـ) من المساواة $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ نستنتج أن (AG) عمودي على (BD)

ومن المساواة $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$ نستنتج أن (AG) عمودي على (BE)

وبما أن (BE) و (BD) متقاطعان فإن (AG) عمودي على المستوي الذي يشملهما أي (AG) عمودي على المستوي (BDE).

2) من السؤال 1) لدينا $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}$

$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AI}+(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE})$

$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AI}+\vec{0}=3\overrightarrow{AI}$

إذن النقط A ، I ، G على استقامة واحدة.

وبالتالي (AI) عمودي على (BDE)

وبما أن I تنتمي إلى (BDE) فإن تقاطع (AG) مع (BDE) هي I

وموضع النقطة I يعطى بـ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$

لدينا في المعلم السابق $A(0,0,0)$ ، $B(1,0,0)$ ، $G(1,1,1)$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي (BDE)

$\overrightarrow{AG}$ شعاع ناظم للمستوي (BDE)

المستوي (BDE) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AG}=0$ .... (1)

$\overrightarrow{AG}(1,1,1)$ ، $\overrightarrow{BM}(x-1,y,z)$

المساواة (1) تكافئ $x-1+y+z=0$

إذن معادلة المستوي (BDE) هي $x+y+z-1=0$

ب) $H(0,1,1)$

شعاع توجيه d هو $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$

التمثيل الوسيطي للمستقيم d هو $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$

جـ) إحداثيات النقطة J هي حل للجملة $(S)\ \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+t \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$

نعوض عبارة كل من x ، y ، z في معادلة المستوي نجد :

$t+(1+t)+(1+t)-1=0$ ومنه نجد $t=\frac{-1}{3}$ ثم نعوض قيمة t في عبارة x و y و z نجد:

$x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$ إذن $J(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

د) بما أن d يقطع المستوي (BDE) في J والنقطة H تنتمي إلى d فإن J هي مسقط H على (BDE) وبالتالي المسافة بين H و (BDE) هي JH

$$JH=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

تطبيق 5 تعيين صحة أو خطأ قضية معلومة

P, Q, R ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من المستوي.

I مرجح $\{(R,-3),(Q,2)\}$ و J مرجح $\{(R,-3),(P,1)\}$

و K مرجح $\{(Q,1),(P,m)\}$ مع m عدد حقيقي يختلف عن (-1)

هل المعطيات الآتية صحيحة أم خاطئة ؟

1) $\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{QP}-3\overrightarrow{RP}$

2) $\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{QJ}$

3) المستقيم (PI) يوازي المستقيم (QJ)

4) توجد قيمة وحيدة للعدد m بحيث أن المستقيم (PI) يوازي (RK)

5) من أجل $m=\frac{1}{2}$ فإن المستقيمين (PI) و (QJ) يوازيان (RK)

الحل

1) I مرجح $(R,-3)$،$(Q,2)$ يعني $-3\overrightarrow{IR}+2\overrightarrow{IQ}=\vec{0}$

$$-3(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PR})+2(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PQ})=\vec{0}$$

$$-3\overrightarrow{IP}-3\overrightarrow{PR}+2\overrightarrow{IP}+2\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{PI}=3\overrightarrow{PR}-2\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QP}-3\overrightarrow{RP}$ إذن المعلومة الأولى صحيحة

2) $\overrightarrow{PI}=2(\overrightarrow{QJ}+\overrightarrow{JP})-3(\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{JP})$

$$=2\overrightarrow{QJ}+2\overrightarrow{JP}-3\overrightarrow{RJ}-3\overrightarrow{JP}$$

$$=2\overrightarrow{QJ}+(-\overrightarrow{JP}-3\overrightarrow{RJ})$$

$$=2\overrightarrow{QJ}+(-\overrightarrow{JP}-3\overrightarrow{RJ})=2\overrightarrow{QJ}-(\overrightarrow{JP}-3\overrightarrow{JR})=2\overrightarrow{QJ}$$

ومنه المعلومة (2) صحيحة

3) بما أن $\overrightarrow{PI}$ و $\overrightarrow{QJ}$ مرتبطان خطيا فإن (PI) يوازي (QJ)

4) K مرجح (P,m) و $(Q,1)$ يعني $\overrightarrow{KQ}+m\overrightarrow{KP}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{QP}-3\overrightarrow{RP}$$

$$\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{QK}+2\overrightarrow{KP}-3\overrightarrow{RK}-3\overrightarrow{KP}$$

$$\overrightarrow{PI}=-3\overrightarrow{RK}+(-\overrightarrow{KP}+2\overrightarrow{QK})$$

حتى يكون (PI) يوازي (RK) يجب ان يكون ،

$-\overrightarrow{KP}+2\overrightarrow{QK}=\vec{0}$ اي $-\overrightarrow{KP}-2\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$

بالقسمة على -2 نجد $\overrightarrow{KQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KP}=\vec{0}$

ومنه توجد قيمة وحيدة للعدد m تجعل (PI) و (RK) متوازيان هي $\frac{1}{2}$

5) من أجل $m=\frac{1}{2}$ يكون (PI) يوازي (RK) وبما ان (PI) يوازي (QJ) فان (PI) و (QJ) يوازيان (RK).

تطبيق 6 تعيين التمثيل الوسيطي لمستقيم

$ABCD$ رباعي وجوه ، t عدد حقيقي يختلف عن -4

و m مرجح الجملة $\{(D,1),(C,1),(B,2),(A,t)\}$

I و J منتصفا $[CD]$ و $[BI]$ على التوالي.

1) نعتبر المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$

ا) عين إحداثيتي النقطتين m و J

ب) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AJ)

جـ) بين أن النقط A, M, J على استقامة واحدة ثم حدد معامل التناسب λ بين الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AJ}$.

2) عبر عن J كمرجح للنقط B, C, D ثم أوجد هذه النتيجة باستعمال خاصية التجميع .

الحل

1) أ) $t\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$$t\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}\,(t+2+2)+2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

$$(t+4)\,\overrightarrow{AM}=2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{t+4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{t+4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{t+4}\overrightarrow{AD}$$

ومنه إحداثيات M هي $\left(\frac{2}{t+4}\,,\,\frac{1}{t+4}\,,\,\frac{1}{t+4}\right)$

• I منتصف $[CD]$ يعني $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ ومنه $2\,\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

ومنه ينتج $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

إذن $I(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

بما أن J منتصف $[BI]$ فإن $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AI}=\vec{0}$$

$$2\,\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ إذن $J(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

ب) $\overrightarrow{AJ}\,(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ هو شعاع توجيه المستقيم (AJ) .

التمثيل الوسيطي للمستقيم (AJ) هو $\begin{cases} x=\frac{1}{2}s \\ y=\frac{1}{4}s \\ z=\frac{1}{4}s \end{cases}$ .... (S) مع $s\in\mathbb{R}$

جـ) لكي نثبت أن A ، M ، J على استقامة واحدة يجب أن نثبت أن M تنتمي إلى (AJ) .

M تنتمي إلى (AJ) هذا يعني وجود عدد حقيقي s وحيد حيث أن إحداثيات M تحقق الجملة (S) .

أي $\begin{cases} \frac{2}{t+4}=\frac{1}{2}s \;........(1) \\ \frac{1}{t+4}=\frac{1}{4}s \;........(2) \\ \frac{1}{t+4}=\frac{1}{4}s \;........(3) \end{cases}$ ومنه ينتج $\begin{cases} s=\frac{4}{t+4} \\ s=\frac{4}{t+4} \\ s=\frac{4}{t+4} \end{cases}$

إذن $s=\frac{4}{t+4}$ تحقق المعادلات (1) و (2) و (3) في آن واحد.

إذن النقطة M تنتمي إلى (AJ) وهذا يعني أن A ، M ، J تقع على استقامة واحدة.

• إيجاد العلاقة بين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AJ}$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{t+4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{t+4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{t+4}\overrightarrow{AD}=\frac{4}{t+4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{4}{t+4}\overrightarrow{AJ}$$

إذن $\lambda=\frac{4}{t+4}$

2) J منتصف $[BI]$ يعني $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}=\vec{0}$

$$t\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

$$t\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MJ}+2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$$

$$t\,\overrightarrow{MA}+4\,\overrightarrow{MJ}+(2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})=\vec{0}$$

$$t\,\overrightarrow{MA}+4\,\overrightarrow{MA}+4\,\overrightarrow{AJ}+(2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})=\vec{0}$$

$$-(t+4)\,\overrightarrow{AM}+4\,\overrightarrow{AJ}+(2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})=\vec{0}$$

$$-(t+4)\,\overrightarrow{AM}+(t+4)\,\overrightarrow{AM}+(2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})=\vec{0}$$

ومنه $2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

إذن J مرجح الجملة $\{(B,2),(C,1),(D,1)\}$

• بما أن I هي مرجح الجملة $\{(C,1),(D,1)\}$ و J مرجح $\{(B,2),(I,2)\}$

فإن J مرجح الجملة $\{(B,2),(C,1),(D,1)\}$ (حسب خاصية التجميع).

تطبيق 7 إثبات الاستقامية

A ، B ، C ، D أربع نقط من الفضاء.

I و J منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي. E نقطة بحيث $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و F

نقطة بحيث $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ، و K منتصف $[EF]$.
بين أن النقط I ، J ، K على استقامة واحدة.

✓ الحل

المساواة $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ تكتب $3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$ ومنه $2\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{ED}$

أي $2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ وبالتالي E مرجح النقطتين $(D,1)$ ، $(A,2)$

المساواة $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ تكتب $3\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}$ ومنه $2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FC}$

أي $2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ وبالتالي F مرجح النقطتين $(C,1)$ ، $(B,2)$
ـ مرجح النقط $(D,1)$ ، $(A,2)$ ، $(C,1)$ ، $(B,2)$ هو مرجح النقطتين $(E,3)$ ، $(F,3)$ أي منتصف $[EF]$.
إذن مرجح النقط $(A,2)$ ، $(D,1)$ ، $(C,1)$ ، $(B,2)$ هو K .
مرجح النقط $(A,2)$ ، $(D,1)$ ، $(C,1)$ ، $(B,2)$ هو مرجح $(I,4)$ ، $(J,2)$
إذن K ينتمي إلى (IJ) وعليه النقط I ، J ، K على استقامة واحدة.

تطبيق 8 إثبات تقاطع مستقيمين في الفضاء

$ABCDE$ هرم قاعدته $BCDE$ متوازية الأضلاع ومركزها النقطة O .
ولتكن G مركز ثقل المثلث ABC ، و G' مركز ثقل المثلث ADE .
بين أن (OA) و (GG') متقاطعان.

✓ الحل

G مرجح النقط $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$
G' مرجح النقط $(A,1)$ ، $(D,1)$ ، $(E,1)$
إذن مرجح النقط $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$ ، $(E,1)$ هو مرجح النقطتين $(G,3)$ ، $(G',3)$ أي هو منتصف $[GG']$ وليكن I .
إذن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (GG') .

لدينا $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IE}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$$

$$5\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$$

$$5\overrightarrow{IO}+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$$

$5\overrightarrow{IO}+\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$ ومنه نجد $\overrightarrow{OA}=5\overrightarrow{OI}$
هذا معناه أن النقطة I تنتمي إلى (OA) وبالتالي المستقيمين (OA) و (GG') متقاطعان.

تطبيق 9 إثبات انتماء أربع نقط إلى مستوي

نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ ، ولتكن النقط I ، J ، K ، L معرفة بالكيفية التالية:
I و K منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي ،
و $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
ولتكن G مرجح النقط $(A,3)$ ، $(B,3)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$
1) عين مرجح الجملة $\{(A,3),(D,1)\}$ ومرجح الجملة $\{(C,1),(B,3)\}$
2) بتجميع النقط A ، B ، C و D بطريقتين مختلفتين، بين أن G ينتمي إلى (IK) و (JL) ، ثم استنتج أن I ، J ، K ، L تقع في نفس المستوي.

✓ الحل

1) ـ النقطة M_1 مرجح الجملة $\{(A,3),(D,1)\}$ يعني $3\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{M_1D}=\vec{0}$

$$3\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{M_1D}=3\overrightarrow{M_1L}+3\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{M_1L}+\overrightarrow{LD}=4\overrightarrow{M_1L}+3\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AD}$$

$$=4\overrightarrow{M_1L}+4\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{M_1L}+4\overrightarrow{LA}+4\overrightarrow{AL}=4\overrightarrow{M_1L}$$

لكن $3\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{M_1D}=\vec{0}$ إذن $4\overrightarrow{M_1L}=\vec{0}$ ومنه M_1 منطبقة على L .
وبالتالي مرجح الجملة $\{(D,1),(A,3)\}$ هو L .

ـ النقطة M_2 مرجح الجملة $\{(C,1),(B,3)\}$ يعني $\overrightarrow{M_2C}+3\overrightarrow{M_2B}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{M_2C}+3\overrightarrow{M_2B}=\overrightarrow{M_2J}+\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{M_2J}+3\overrightarrow{JB}=4\overrightarrow{M_2J}+\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JB}$$

$$=4\overrightarrow{M_2J}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{JB}=4\overrightarrow{M_2J}+4\overrightarrow{JB}+4\overrightarrow{BJ}=4\overrightarrow{M_2J}$$

وبما أن $\overrightarrow{M_2C}+3\overrightarrow{M_2B}=\vec{0}$ فإن $4\overrightarrow{M_2J}=\vec{0}$ وهذا يعني أن M_2 منطبقة على J .
إذن مرجح الجملة $\{(C,1),(B,3)\}$ هو J .

2) ـ مرجح $(A,3),(D,1)$ هو L و مرجح $(B,3),(C,1)$ هو J .
إذن مرجح $(A,3),(D,1),(B,3),(C,1)$ هو مرجح النقطتين $(L,4),(J,4)$ أي منتصف $[LJ]$
ـ مرجح $(A,3),(B,3)$ هو $(I,2)$ ومرجح $(C,1),(D,1)$ هو $(K,2)$
ومنه مرجح $(A,3),(B,3)$ ، $(C,1),(D,1)$ هو منتصف $[IK]$.
إذن مرجح $(A,3),(B,3)$ ، $(C,1),(D,1)$ ينتمي إلى (LJ) وينتمي إلى (IK) فهو إذن

ينتمي إلى تقاطع (IK) و (LJ) وعليه فإن المستقيمين (IK) و (LJ) متقاطعان في G .
وبما أن المستقيمين (IK) و (LJ) متقاطعان فإن النقط I ، J ، K ، L تنتمي إلى نفس المستوي.

تطبيق 10 تعيين مجموعة النقط

A, B, C ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة، و k عدد حقيقي من $[-1,1]$
لتكن G_k مرجح الجملة $\{(A, k^2+1) ، (B, k) ، (C, -k)\}$.
1) مثل النقط A, B, C و I منتصف $[BC]$ ثم انشئ G_1 و G_{-1}

2-أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $k \in [-1,1]$ يكون $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$

ب) اعط جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-1,1]$ بـ $f(x) = \frac{-x}{1+x^2}$

جـ) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يمسح المجال $[-1,1]$
3) حدد (γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

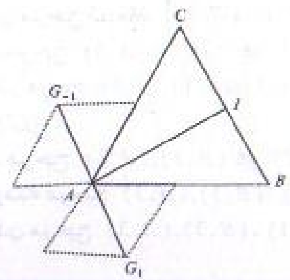
4) حدد (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

5) نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ولتكن إحداثيات النقط A ، B ، C في هذا المعلم هي $(0,0,2)$ ، $(-1,2,1)$ ، $(-1,2,5)$ على التوالي.
النقطة G_k والمجموعتان (γ) و (Γ) معرفتان كما في السابق .
أ) عين إحداثيات G_1 و G_{-1} ، ثم بين أن (γ) و (Γ) متقاطعتان.
ب) عين نصف قطر الدائرة (C) الناتجة من تقاطع المجموعتين (γ) و (Γ).

✓ الحل

1) ـ بما أن النقطة G_1 مرجح $(A, 2)$ ، $(B, 1)$ ، $(C, -1)$ فإن $2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$



$$2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ـ بما أن G_{-1} مرجح $(A, 2)$ ، $(B, -1)$ ، $(C, 1)$ فإن :

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}B} + \overrightarrow{G_{-1}C} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{G_{-1}A} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AG_{-1}} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

ومنه $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2) أ) G_k مرجح النقط (A, k^2+1) ، (B, k) ، $(C, -k)$

يعني $(k^2+1)\ \overrightarrow{G_kA} + k\ \overrightarrow{G_kB} - k\ \overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$

$$(k^2+1)\ \overrightarrow{G_kA} + k\ \overrightarrow{G_kA} + k\ \overrightarrow{AB} - k\ \overrightarrow{G_kA} - k\ \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} = -(k\ \overrightarrow{AB} - k\ \overrightarrow{AC}) = -k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

ومنه نجد $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

ب) $f'(x) = \frac{-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$

x	-1		1
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

من اجل كل x من $]-1,1[$ يكون $f'(x) < 0$
ومنه f متناقضة تماما على $[-1,1]$

جـ) لما k يمسح $[-1,1]$ فإن $f(k)$ يمسح المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

إذن $\overrightarrow{AG_k} = \lambda\ \overrightarrow{BC}$ مع λ يمسح المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

وعليه مجموعة النقط G_k لما k يمسح $[-1,1]$ هي القطعة $[G_{-1}G_1]$

3) من اجل كل نقطة M من الفضاء يكون:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_1} \quad و \quad 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_{-1}}$$

المساواة $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MG_{-1}}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG_1}\right\|$

أي $MG_1 = MG_{-1}$ ومنه مجموعة النقط (γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$

4) من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}$$

$$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AI}$$

المساواة $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{AI}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|$ أي

$$MG_1 = AI$$

إذن مجموعة النقط Γ هي سطح كرة مركزها G_1 و طول نصف قطرها AI

5) أ) لتكن (x_0, y_0, z_0) إحداثيات G_1 و (x_1, y_1, z_1) إحداثيات G_{-1}

$x_0=\frac{2x_A+x_B-x_C}{2}=\frac{0-1+1}{2}=0$

$y_0=\frac{2y_A+y_B-y_C}{2}=\frac{0+2-2}{2}=0$

$z_0=\frac{2z_A+z_B-z_C}{2}=\frac{4+1-5}{2}=0$ إذن $G_1(0,0,0)$

بنفس الطريقة نجد $G_{-1}(0,0,4)$

ـ المستوي المحوري للقطعة $[G_{-1}G_1]$ ناظمه هو الشعاع $\overrightarrow{G_{-1}G_1}$ ويمر بالنقطة A منتصف $[G_{-1}G_1]$

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من هذا المستوي فإنها تحقق :

$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{G_{-1}G_1}=0$ حيث E منتصف $[G_{-1}G_1]$

$\overrightarrow{G_{-1}G_1}(0,0,-4)$ ، $E(0,0,2)$ ، $\overrightarrow{EM}(x,y,z-2)$

المساواة $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{G_{-1}G_1}=0$ تكافئ $-4(z-2)=0$ أي $-4z+8=0$

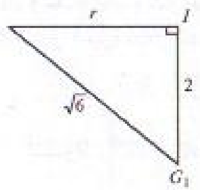
المسافة بين G_1 والمستوي المحوري لـ $[G_{-1}G_1]$ هي $\frac{|4\times0-8|}{\sqrt{42}}=\frac{8}{4}=2$

ونصف قطر سطح الكرة يساوي $AI=\sqrt{(-1)^2+(2-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$

بما أن المسافة بين G_1 المستوي المحوري لـ $[G_{-1}G_1]$ أصغر من نصف قطر سطح الكرة فإن هذا المستوي يقطعها في دائرة .

ب) معادلة سطح الكرة هي $x^2+y^2+z^2=6$

الدائرة الناتجة من التقاطع تحقق $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z=2 \end{cases}$



وبالتالي معادلتها هي $x^2+y^2=2$

إذن نصف قطر هذه الدائرة هو $r=\sqrt{2}$

طريقة ثانية لحساب نصف القطر :

حسب نظرية فيتاغورث لدينا $r^2+4=6$ ومنه $r^2=2$

إذن $r=\sqrt{2}$

تطبيق 11 إثبات تقاطع مستقيمين في الفضاء

لتكن النقط A ، B ، C ، D ليست من نفس المستوي. α ، β عددان حقيقيان.
لتكن I مرجح (A,α) ، $(B,1-\alpha)$ ، و J مرجح (C,α) و $(D,1-\alpha)$
و K مرجح (A,β) ، $(C,1-\beta)$ و L مرجح (B,β) و $(D,1-\beta)$
بين أن المستقيمين (IJ) و (KL) متقاطعان.

الحل

- بما أن I مرجح (A,α) ، $(B,1-\alpha)$ فهي إذن مرجح $(A,\alpha\beta)$ ، $(B,(1-\alpha)\beta)$
- بما أن J مرجح (C,α) و $(D,1-\alpha)$ فهي إذن مرجح $(C,\alpha(1-\beta))$ ، $(D,(1-\alpha)(1-\beta))$

إذن M مرجح $(A,\alpha\beta)$ ، $(B,(1-\alpha)\beta)$ ، $(C,\alpha(1-\beta))$ ، $(D,(1-\alpha)(1-\beta))$
هو مرجح النقطتين I و J.

- بما أن K مرجح (A,β) ، $(C,(1-\beta))$ فهو إذن مرجح $(A,\alpha\beta)$ ، $(C,\alpha(1-\beta))$
- بما أن L مرجح (B,β) ، $(D,(1-\beta))$ فهو مرجح $(B,(1-\alpha)\beta)$ ، $(D,(1-\alpha)(1-\beta))$

إذن M مرجح $(A,\alpha\beta)$ ، $(B,(1-\alpha)\beta)$ ، $(C,\alpha(1-\beta))$ ، $(D,(1-\alpha)(1-\beta))$.
هو أيضا مرجح النقطتين K و L

ومنه ينتج أن M تنتمي إلى المستقيمين (JI) و (KL)

إذن المستقيمان (JI) و (KL) متقاطعان في النقطة M .

تطبيق 12 الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

ليكن المستقيمان d_1 ، d_2 من مستوي (P) متقاطعين في نقطة O .
وليكن d مستقيما من الفضاء يقطع (P) في نقطة وحيدة A بحيث :
$A\notin d_1$ و $A\notin d_2$ ولتكن M نقطة أخرى من d مختلفة عن A
1) ليكن (P_1) المستوي المار من M ويشمل d_1 و (P_2) المستوي المار من M ويشمل d_2 . عين تقاطع (P_1) و (P_2) و لتكن (Γ) هذه المجموعة ؟
2) بين أنه لما M تسمح d فإن (Γ) محتواة في مستوي ثابت يطلب تعينه .

الحل

1) لدينا $(P)\cap(P_1)=d_1$ و $(P)\cap(P_2)=d_2$ ...... (1)

لدينا $d\cap(P_1)=M$ و $d\cap(P_2)=M$ .... (2)

من (1) نستنتج أن :

$(P_1)\cap(P_2)\cap(P)=[(P_1)\cap(P)]\cap[(P_2)\cap(P)]=d_1\cap d_2=\{O\}$ .... (I)

$(P_1)\cap(P_2)\cap d=[(P_1)\cap d]\cap[(P_2)\cap d]=\{M\}$ .... (II)

من (I) نستنتج أن O تنتمي إلى $(P_1)\cap(P_2)$ ومن (II) نستنتج أن M تنتمي إلى $(P_1)\cap(P_2)$

إذن (OM) محتوى في $(P_1)\cap(P_2)$

نعلم أن $(P_1)\cap(P_2)$ إما أن يكون خاليا أو مستقيما أو (P_1)

- بما أن O تنتمي إلى $(P_1)\cap(P_2)$ فإن هذا التقاطع غير خال .
- بما أن (P_1) لا يشمل d_2 فإن (P_1) و (P_2) غير منطبقين

وبالتالي $(P_1)\cap(P_2)=(OM)=(\Gamma)$

2) لما M تسمح d فإن المستقيم (OM) يقطع d ويقطع (OA) دائما .

وبالتالي المجموعة Γ محتواة في المستوي الذي يشمل المستقيمين المتقاطعين d و (OA) .

تطبيق 13 الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

ليكن d مستقيما مارا بالنقطة $A(1,2,-4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1,2,3)$

1) اعط تمثيلا وسيطيا لـ d؟

2) هل النقط $B(2,4,-1)$، $C(3,6,-2)$، $D(-2,-4,-13)$ تنتمي إلى d؟

3) هل توجد نقطة من d فاصلتها 4؟ نقطة ترتيبها 10؟ نقطة ارتفاعها 3؟

4) أوجد تقاطع d مع المستويات (XOY)، (XOZ) و (YOZ)؟

5) حدد تقاطع d مع المحاور الثلاثة للمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

الحل

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم d هو $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

2) B تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 2=1+t \\ 4=2+2t \\ -1=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $t=1$

بما أنه توجد قيمة وحيدة لـ t فإن النقطة B تنتمي إلى d

C تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 3=1+t \\ 6=2+2t \\ -2=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=2 \\ t=\frac{2}{3} \end{cases}$

قيمة t ليست وحيدة ومنه C لا تنتمي إلى d

D تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} -2=1+t \\ -4=2+2t \\ -13=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $t=-3$

ومنه توجد قيمة وحيدة لـ t.

إذن النقطة D تنتمي إلى المستقيم d.

3) لتكن M_1 نقطة فاصلتها 4.

M_1 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 4=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=3 \\ y=8 \\ z=5 \end{cases}$

إذن $M_1(4,8,5)$

ـ لتكن M_2 نقطة ترتيبها 4.

M_2 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} x=1+t \\ 10=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=5 \\ t=4 \\ z=8 \end{cases}$

إذن $M_2(5,10,8)$

ـ لتكن M_3 نقطة ارتفاعها 3.

M_3 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ 3=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=\frac{7}{3} \\ x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{20}{3} \end{cases}$

إذن $M_3(\frac{10}{3},3,\frac{20}{3})$

4) تقاطع (d) مع (XOY) هو حل للجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} z=0 \\ t=\frac{4}{3} \\ x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{14}{3} \end{cases}$

إذن نقطة تقاطع (d) مع (XOY) هي $M_4(\frac{7}{3},\frac{14}{3},0)$

بنفس الطريقة نجد تقاطع (d) مع (XOZ) وهي النقطة $M_5(0,0,-7)$

وتقاطع (d) مع (YOZ) هي النقطة $M_6(0,0,-7)$

5) تقاطع (d) مع (xx') هو حل الجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ y=0 \text{ و } z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-1 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$

إذن لا توجد قيمة وحيدة لـ t وبالتالي d لا يقطع (xx').

ـ تقاطع (d) مع (yy') هو حل الجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ x=0 \text{ و } z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-1 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$.

إذن لا توجد قيمة وحيدة لـ t وبالتالي d لا يقطع (yy').

-تقاطع d مع (zz') هوحل للجملة $\begin{cases} x=1+t=0 \\ y=2+2t=0 \\ z=-4+3t \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $t=-1$، $x=0$، $y=0$، $z=-7$

إذن d يقطع (zz') في $(0,0,-7)$.

تطبيق 14 دراسة الوضع النسبي لمستقيمين

إليك التمثيل الوسيطي للمستقيم d، $\begin{cases} x=4+3t \\ y=-2+t \\ z=1-5t \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

1) هل النقطتان $A(-2,-4,13)$ ، $B(7,-1,-4)$ تنتميان إلى d؟
2) هل المستقيم d يوازي (AC) حيث $C(-8,-6,23)$؟
3) هل المستقيم d عمودي على (BD) حيث $D(9,2,-2)$؟

✓ الحل

1) النقطة A تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} -2=4+3t \\ -4=-2+t \\ 13=1-5t \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-2 \\ t=-\frac{12}{5} \end{cases}$

t ليس وحيدا وبالتالي A لا ينتمي إلى d.

النقطة B تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 7=4+3t \\ -1=-2+t \\ -4=1-5t \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $t=1$

t وحيدا وبالتالي B تنتمي إلى d.

2) شعاع توجيه d هو $\vec{u}(3,1,-5)$ وشعاع توجيه (AC) هو $\overrightarrow{AC}(-6,-2,10)$

بما أن $\overrightarrow{AC}=-2\vec{u}$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا مما يعني أن d و (AC) متوازيان.

3) مركبات الشعاع $\overrightarrow{BD}$ هي $(2,3,2)$

$\overrightarrow{BD}.\vec{u}=2\times3+3(1)+2\times(-5)=-1$

بما أن $\overrightarrow{BD}.\vec{u}\neq0$ فإن d ليس عموديا على (BD)

تطبيق 15 الوضع النسبي لمستويين

ليكن d و d' مستقيمين علما أن تمثيليهما الوسيطين هما:

$d:\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ ، $d':\begin{cases} x=8-s \\ y=2s \\ z=1-s \end{cases}, s\in\mathbb{R}$

1) بين أن هذين المستقيمين غير متوازيين
2) عين تقاطع هذين المستقيمين.

✓ الحل

1) ليكن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعي توجيه d و d' على التوالي حيث $\vec{u}(-2,-2,1)$ ، $\vec{v}(-1,2,-1)$

بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فإن d و d' غير متوازين.

2) $M(x,y,z)$ تنتمي إلى $d\cap d'$ يعني أن $(s)\begin{cases} 1-2t=8-s \text{ .....(1)} \\ 2-2t=2s \text{ ....(2)} \\ t=1-s \text{ ....(3)} \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $-1=8-3s$ ومنه $s=3$

وبتعويض قيمة s في المعادلة (3) نجد $t=-2$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم d نجد $x=5$ ، $y=6$ ، $z=-2$

إذن نقطة التقاطع هي $(5,6,-2)$.

تطبيق 16 تعيين معادلة مستوي المعرف بمستقيمين

d و d' مستقيمان علما أن تمثيليهما الوسيطين هما:

$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \end{cases}$ و $d':\begin{cases} x=3+s \\ y=2-2s \\ z=m+2s \end{cases}$

حيث m وسيط حقيقي.

1) ادرس حسب قيم m تقاطع d و d'.
2) من أجل $m=-4$ اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) المعين بـ d و d'.

✓ الحل

$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x=3+s \\ y=2-2s \\ z=m+2s \end{cases}$

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه d و d' حيث $\vec{u}(1,-1,1)$ ، $\vec{v}(1,-2,2)$

بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فإن d و d' غير متوازيين

- إحداثيات نقطة التقاطع إن وجدت تحقق $\begin{cases} 1+t=3+s \text{ ....(1)} \\ 3-t=2-2s \text{ ....(2)} \\ -1+t=m+2s \text{ .....(3)} \end{cases}$

من (1) نجد $t=2+s$ نعوضها في (2) نجد $3-2-s=2-2s$

ومنه $s=1$ وبالتالي $t=3$

نعوض t و s في (3) نجد $-2=m+2$ ومنه $m=-4$

إذن إذا كان $m=-4$ فإن d يقطع d' في النقطة $A(4,0,-2)$

وإذا كان $m\neq-4$ فإن d لا يقطع d'.

2) من أجل $m=-4$ فإن d و d' متقاطعان في A

المستوي (P) الذي يشملهما يكون شعاعي توجيهه هما $\vec{u}$ و $\vec{v}$ معادلته تكون من الشكل :

$ax+by+cz+d=0$

ناظم المستوي (P) هو $\vec{n}(a,b,c)$ ويحقق $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{v}=\vec{0}$

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ تكافئ $a-b+c=0$ .... (1)

$\vec{n}\cdot\vec{v}=\vec{0}$ تكافئ $a-2b+2c=0$ .... (2)

$A(4,0,-2)$ تنتمي إلى (P) تكافئ $4a-2c+d=0$ ..... (3)

بطرح (2) من (1) نجد $b-c=0$ ومنه $b=c$

نعوض b في (1) نجد $a=0$ ونعوض a في (3) نجد $d=2c$

بما أن $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ فإن $c\neq 0$

إذن معادلة (P) هي $cy+cz+2c=0$ وبالقسمة على c نجد $y+z+2=0$

تطبيق 17 حساب المسافة بين نقطة و مستقيم بطريقتين

لتكن $A(0,1,3)$ و d مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=2+4t\\y=2-2t\\z=2+4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) لتكن δ المسافة الأصغرية بين النقطة A والنقطة M حيث M تنتمي إلى d

لتكن M نقطة من d ونعرف الدالة f من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ بحيث $f(t)=AM^2$

ا) عبر عن $f(t)$ بدلالة t.

ب) من أجل أي قيمة لـ t تكون الدالة f لها قيمة صغرى.

جـ) استنتج δ .

2) ليكن (P) المستوي المار من A والعمودي على d.

ا) عين شعاعا نظاميا لـ (P). ب) اعط معادلة للمستوي (P) .

جـ) تحقق أن النقطة $B(2,2,2)$ تنتمي إلى d ثم احسب المسافة δ_B بين B و (P)

د) عبر عن δ بدلالة δ_B و AB ، ثم استنتج δ.

✓ الحل

1) ا) لدينا $f(t)=AM^2=(2+4t-0)^2+(1-2t)^2+(2+4t-3)^2=36t^2+4t+6$

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(t)=72t+4$

$f'(t)=0$ يكافئ $t=-\frac{1}{18}$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{18}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	↘		↗

الدالة f لها قيمة صغرى هي $f(-\frac{1}{18})$

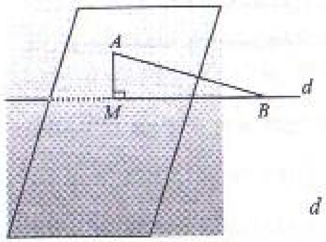
$f(-\frac{1}{18})=36(-\frac{1}{18})^2+4(-\frac{1}{18})+6=5{,}89$

جـ) المسافة δ بين A و M هي القيمة الأصغرية للدالة $\sqrt{f}$

إذن $\delta=\sqrt{5{,}89}=2{,}43$

2) ا) $\vec{u}$ شعاع توجيه d وهو أيضا شعاع ناظم لـ (P) إذن $\vec{n}(4,-2,4)$

ب) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من (P) تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ ولكن $\overrightarrow{AM}(x\ ,y-1,z-3)$



إذن $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ يكافئ $2x-y+2z-5=0$

إذن معادلة (P) هي $2x-y+2z-5=0$

جـ) النقطة $B(2,2,2)$ تنتمي إلى d

يعني $\begin{cases}2=2+4t\\2=2-2t\\2=2+4t\end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $t=0$

إذن توجد قيمة وحيدة لـ t وهذا يعني أن B تنتمي إلى d

- المسافة بين B و (P) هي $\delta_B=\frac{|2\times2-2+4-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{1}{3}$

حسب نظرية فيتاغورث لدينا :

$AM^2+BM^2=AB^2$ أي $\delta^2+\delta_B{}^2=AB^2$

ومنه $\delta^2=AB^2-\delta_B{}^2=6-\frac{1}{9}=\frac{53}{9}$

إذن $\delta=2{,}43$

تطبيق 18 تقاطع مستو ومستقيم

d و d' مستقيمان علما أن تمثيليهما الوسيطين هما :

$d:\begin{cases}x=3+k\\y=1-k\\z=-3+2k\end{cases}$ ، $k\in\mathbb{R}$ و $d':\begin{cases}x=4-t\\y=2+3t\\z=-t\end{cases}$ ، $t\in\mathbb{R}$

1) بين أن d و d' متقاطعان

2) عين معادلة المستوي (P) المحدد بـ d و d'.

3) عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم d'' المار بالنقطة $A(2,0,-5)$ وشعاع توجيهه $\vec{w}(1,2,4)$

✓ الحل

1) لدينا $\vec{u}(1,-1,2)$ و $\vec{v}(-1,3,-1)$ شعاعي توجيه d و d' على التوالي.

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي d و d' غير متوازيين

إذن فهما متخالفان (من مستويين مختلفين) وإما متقاطعان ولمعرفة ذلك ندرس إمكانيات

وجود الثنائية (t,k) بحيث $(s)\begin{cases}3+k=4-t \;......(1)\\ 1-k=2+3t \;......(2)\\ -3+2k=-t \;......(3)\end{cases}$

من (3) نجد $t=-2k+3$ نعوض عبارة t في (1) نجد $3+k=4+2k-3$

ومنه $k=2$ و $t=-1$

الثنائية $(t,k)=(-1,2)$ تحقق (2)

إذن توجد نقطة A_1 مشتركة بين d و d' إحداثياتها $A_1(5,-1,1)$

2) ليكن $(P): ax+by+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

ناظم (P) هو $\vec{n}(a,b,c)$ إذن $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ و $A_1\in(P)$

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ تكافئ $a-b+2c=0$ ...... (3)

$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ تكافئ $-a+3b-c=0$ ...... (4)

$A_1\in(P)$ تكافئ $5a-b+c+d=0$ ...... (5)

بجمع (3) و (4) طرفا إلى طرف نجد $2b+c=0$ ومنه $c=-2b$

نعوض c في (3) نجد $a=5b$

نعوض a و c في (5) نجد $d=-7b$

إذن معادلة (P) هي $5bx+by-2bz-7b=0$

بما أن $b\neq0$ فإن $(P): 5x+y-2z-7=0$

3) التمثيل الوسيطي لـ d'' هو $\begin{cases}x=2+t\\ y=0+2t\\ z=-5+4t\end{cases}$

بما أن $\vec{n}\cdot\vec{w}=-1$ فإن d'' يقطع (P) في نقطة B إحداثياتها حل للجملة:

$$s'\begin{cases}x=2+t\\ y=2t\\ z=-5+4t=0\\ 5x+y-2z-7=0\end{cases}$$

نعوض z,y,x في معادلة المستوي (P) نجد $5(2+t)+2t-2(-5+4t)-7=0$

بالتبسيط نجد $t=13$

إذن نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم d'' هي $B(15,26,47)$

تطبيق 19 تعيين تمثيل وسيطي لمستقيم

هل جملة المعادلتين الديكارتيتين التالية تعرف لنا مستقيما في الفضاء؛

$\begin{cases}x+y=0\\ 2x+y-z+1=0\end{cases}$ في حالة نعم عين تمثيلا وسيطيا له.

✓ الحل

بما أن $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-1}$ فإن المستويين ذوا المعادلتين $x+y=0$ و $2x+y-z+1=0$

غير متوازين وبالتالي فالجملة $(s)\begin{cases}x+y=0\\ 2x+y-z+1=0\end{cases}$ تعرف مستقيما d.

الجملة (s) تكتب $(s')\begin{cases}y=-x\\ z=x+1\end{cases}$ وبوضع $x=t$ الجملة (s') تكتب $\begin{cases}x=t\\ y=-t\\ z=t+1\end{cases}$

وهذه الأخيرة تمثل تمثيلا وسيطيا لـ d شعاع توجيهه $\vec{w}(1,-1,1)$ ويمر بالنقطة $A(0,0,1)$.

تطبيق 20 تقاطع مستو مع مستقيم

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. α، β، γ ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة.

نعتبر النقط $A(\alpha,0,0)$، $B(0,\beta,0)$، $C(0,0,\gamma)$

1) بين أن معادلة المستوي (ABC) هي من الشكل $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$

2) أوجد تمثيلا وسيطيا لمستقيم يمر من O ويعامد المستوي (ABC) ثم استنتج إحداثيات النقطة H مسقط النقطة O على المستوي (ABC) بدلالة α، β، γ

✓ الحل

1) لدينا $\vec{AB}(-\alpha,\beta,0)$، $\vec{AC}(-\alpha,0,\gamma)$ و $(ABC): ax+by+cz+d=0$

مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$ يكافئ $-a\alpha+b\beta=0$ ......(1)

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0$ يكافئ $-\alpha a+c\gamma=0$ ......(2)

$A\in(ABC)$ يكافئ $a\alpha+d=0$ .....(3)

بطرح (2) من (1) نجد $b\beta-c\gamma=0$ ومنه $b=\frac{c\gamma}{\beta}$

نعوض b في (1) نجد $a=\frac{\gamma}{\alpha}c$

نعوض a في (3) نجد $d=-\gamma c$

إذن معادلة (P) تصبح $\frac{\gamma}{\alpha}cx+\frac{c\gamma}{\beta}y+cz-\gamma c=0$

وبالقسمة على $c\gamma$ نجد $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-1=0$

2) شعاع توجيه المستقيم المطلوب هو ناظم (P)

إذن هذا المستقيم يمر من $O(0,0,0)$ وشعاع توجيهه $\vec{n}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)$

وبالتالي التمثيل الوسيطي لـ d هو $d:\begin{cases} x=\frac{1}{\alpha}t \\ y=\frac{1}{\beta}t \\ z=\frac{1}{\gamma}t \end{cases}$

H هي نقطة تقاطع d مع (P) وإحداثياتها تحقق $(s):\begin{cases} x=\frac{1}{\alpha}t \;......\;(1) \\ y=\frac{1}{\beta}t \;......\;(2) \\ z=\frac{1}{\gamma}t \;......\;(3) \\ \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-1=0 \;......\;(4) \end{cases}$

نعوض x ، y ، z في (4) نجد $\frac{t}{\alpha^2}+\frac{t}{\beta^2}+\frac{t}{\gamma^2}-1=0$

ومنه نستنتج $t=\frac{\alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2}{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}=0$

إذن إحداثيات النقطة H هي $H\left(\frac{1}{\alpha}t_0\,,\frac{1}{\beta}t_0\,,\frac{1}{\gamma}t_0\right)$

تطبيق 21 الوضع النسبي لمستقيم وسطح كرة

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء.

$A(-1,2,1)$ ، $B(1,-6,-1)$ ، $C(2,2,2)$ ، $I(0,1,-1)$ نقط منه.

1) اعط معادلة ديكارتية للمستوي (P) المار بالنقط A ، B ، C.

2) (q) مستوي ذو المعادلة $x+y-3z+2=0$ و (q') مستوي المعلم $(o,\vec{i},\vec{k})$

أ) لماذا (q) و (q') متقاطعان ؟

ب) عين نقطة E من Δ وشعاع توجيه له حيث Δ هو تقاطع (q) و (q')

3) عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة Σ مركزها I وطول نصف قطرها $\sqrt{26}$

4) نعتبر النقطتين $J(-2,0,0)$ و $k(1,0,1)$ عين تقاطع Σ والمستقيم (JK)

الحل

1) $(P): ax+by+cy+d=0$ وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(2,-8,-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(3,0,1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $2a-8b-2c=0$ ......(1)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ تكافئ $3a+c=0$ ......(2)

$A\in(ABC)$ تكافئ $-a+2b+c+d=0$ ......(3)

من (2) نجد $c=-3a$ ونعوض c في (1) نجد $b=a$

نعوض b و c في (3) نجد $d=2a$

إذن $(P): ax+ay-3az+2a=0$ بالقسمة على a نجد $x+y-3z+2=0$

2) لدينا $(q): x+y-3z+2=0$ و $(q'): y=0$

بما أن $\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-3}$ فإن (q) و (q') متقاطعان.

الجملة $(s)\begin{cases} y=0 \\ x+y-3z+2=0 \end{cases}$ هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم Δ

الجملة (s) تكتب $\begin{cases} x=3z-2 \\ y=0z+0 \\ z=1\times z+0 \end{cases}$ وبوضع $z=t$ تصبح $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0+0t \\ z=0+1t \end{cases}$ ومنه $E(-2,0,0)$

وشعاع توجيه Δ مركباته هي $(3,0,1)$

3) معادلة سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{26}$ هي :

$(\Sigma): x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=26$

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (JK) هو $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0+0t \\ z=0+t \end{cases}$

بتعويض x ، y ، z في معادلة Σ نجد $t^2-2t-1=0$

وحلا هذه الأخيرة هما $t_1=1+\sqrt{2}$ و $t_2=1-\sqrt{2}$

إذن (JK) يقطع Σ في نقطتين $M_1(1+3\sqrt{2}\,،\,0\,،\,1+\sqrt{2})$ و $M_2(1-3\sqrt{2}\,،\,0\,،\,1-\sqrt{2})$

تطبيق 22 المستقيمات والمستوي في الفضاء

نعتبر النقط $A(4,0,0)$ ، $B(2,4,0)$ ، $C(0,6,0)$ ، $S(0,0,4)$ ،

$E(6,0,0)$ ، $F(0,8,0)$

1) بين أن E هي تقاطع المستقيمين (BC) و (OA) ، و F هي تقاطع (AB) و (OC)

2-أ) أوجد معادلة (SEF).

ب) أوجد إحداثيات النقطة A' مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(S,3)$

جـ) نعتبر المستوي (P) الموازي للمستوي (SEF) والمار من A' تحقق أن معادلة (P) هي $4x+3y+6z-22=0$.

3- المستوي (P) يقطع الأحرف $[SO]$ ، $[SA]$ ، $[SB]$ ، $[SC]$ من الهرم $SOABC$ في O' ، A' ، B' ، C' على الترتيب.

أ) احسب إحداثيات النقطة O' .
ب) تحقق أن إحداثيات C' هي $(0,2,\frac{8}{3})$
جـ) أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (SB) ثم استنتج إحداثيات النقطة B'
4) تحقق أن $O'A'B'C'$ متوازي أضلاع .

✓ الحل

1) لدينا $\overrightarrow{OA}(4,0,0)$ ، $\overrightarrow{OE}(6,0,0)$ ومنه $\overrightarrow{OE}=\frac{6}{4}\overrightarrow{OA}$

إذن النقط O ، E ، A على استقامة واحدة أي E تنتمي إلى (OA)

لدينا $\overrightarrow{BE}(4,-4,0)$ ، $\overrightarrow{BC}(-2,2,0)$ ومنه $\overrightarrow{BE}=-2\overrightarrow{BC}$

وبالتالي النقط B ، C ، E تقع على استقامة واحدة أي E تنتمي الى (BC)

إذن $(BC)\cap(OA)=\{E\}$

بنفس الطريقة نجد $(OC)\cap(AB)=\{F\}$

2) أ) $(SEF):\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}=1$

ب) لتكن (x,y,z) إحداثيات A' تحقق $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=3\end{cases}$

إذن $A'(1,0,3)$

جـ) ليكن $\vec{n}$ ناظم لـ (P) وبما أن (P) يوازي (SEF) فإن $\vec{n}(\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{4})$

إذن معادلة (P) هي $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}+d=0$

A' تنتمي إلى (P) يعني $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+d=0$ ومنه $d=-\frac{11}{12}$

إذن $(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}-\frac{11}{12}=0$ بالتبسيط نجد $(P):4x+3y+6z-22=0$

3) أ) التمثيل الوسيطي لـ (OS) هو $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=4t\end{cases}$

إحداثيات O' تحقق $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=4t\\4x+3y+6z-22=0\end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $t=\frac{11}{12}$

ومنه $O'(0,0,\frac{11}{3})$

ب) لدينا $\overrightarrow{C'C}(0,4,-\frac{8}{3})$ ، $\overrightarrow{CS}(0,-6,4)$ لاحظ أن $\overrightarrow{CS}=-\frac{6}{4}\overrightarrow{C'C}$

$\overrightarrow{C'C}=\frac{4}{6}\overrightarrow{CS}$ وهذا يعني أن $C'\in[SC]$

بما أن $4\times0+3\times2+6\times\frac{8}{3}-22=0$ فإن $C'\in(P)$

وبالتالي $C'\in[SC]\cap(p)$

جـ) لدينا $\overrightarrow{SB}(2,4,-4)$ وبالتالي التمثيل الوسيطي لـ (SB) هو $\begin{cases}x=2t\\y=4t\\z=4-4t\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

إحداثيات B' تحقق $\begin{cases}x=2t\\y=4t\\z=4-4t\\4x+3y+6z-22=0\end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $B'(1,2,2)$

4) $\overrightarrow{A'B'}(0,2,-1)$ ، $\overrightarrow{O'C'}(0,2,-1)$ ومنه $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{O'C'}$

وبالتالي الرباعي $O'A'B'C'$ متوازي أضلاع.

تطبيق 23 تقاطع ثلاثة مستويات

نعتبر المستويات (P) و (D) و (R) معادلاتها على الترتيب :
$x-y+z-2=0$ ، $x-z=0$ ، $-x+y+2z-1=0$
بين أن تقاطع هذه المستويات هي نقطة وحيدة A يطلب تعيين إحداثياتها .

✓ الحل

ندرس أولا تقاطع (P) و (D) ثم ندرس تقاطع ناتجهما مع المستوي (R)

$$(S):\begin{cases}x-y+z-2=0.....(1)\\x-z=0..........(2)\end{cases}$$

بما أن $\frac{1}{1}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{-1}{1}$ فإن (P) و (D) متقاطعان في مستقيم d

نضع $x=t$ ومنه $z=t$ و $y=2t-2$ إذن $d:\begin{cases}x=t\\y=2t-2\\z=t\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

ندرس تقاطع d مع (R) $S'\begin{cases}x=t\\y=2t-2\\z=t\\-x+y+2z-1=0\end{cases}$

نعوض عبارة كل من x ، y ، z في معادلة (R) نجد $t=1$

إذن $x=1$ ، $y=0$ ، $z=1$

وبالتالي $(P)\cap(D)\cap(R)=\{A(1,0,1)\}$

تطبيق 24 المرجح والتحويلات النقطية

ABC مثلث ، I مرجح الجملة $(B,2)$ ، $(C,1)$ و J مرجح $(A,-1)$ ، $(B,2)$

و G مرجح $(A,-1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,1)$

1) بين أن G هي تقاطع المستقيمين (AI) و (CJ)

2) نفرض أن A و C ثابتتان وأن B تمسح المستقيم Δ بحيث :

(AC) و Δ لا ينتميان إلى نفس المستوي.

أ) بين أن G صورة B بانسحاب يطلب تعيين شعاعه.

ب) استنتج المحل الهندسي لـ G لما B تمسح Δ .

الحل

1) لدينا من المعطيات :
$$\begin{cases} \overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \\ -\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0} \\ -\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \end{cases}$$

$$-\overrightarrow{GA}+2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

$$-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GI}+(2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})=\vec{0}$$

$\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GI}$ وهذا يعني أن G تنتمي إلى (AI)

$$-(\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JA})+2(\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB})+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{GJ}=-\overrightarrow{GC}$ ومنه (G) تنتمي إلى (CJ)

إذن $(CJ)\cap(AI)=\{G\}$

2) أ) $-\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

إذن (G) هي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ب) بما أن G هي صورة B و B تمسح مستقيما، وصورة مستقيم بالانسحاب هو مستقيم فإن G تمسح مستقيما .

تمارين و مسائل

1

- $ABCDEFGH$ مكعب حرفه 1

I هي مركز ثقل المثلث CFH و J مركز ثقل المثلث BDE . و k مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$ ، $(E,1)$ ، $(F,1)$ ، $(G,1)$ ، $(H,1)$.

نعتبر المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1- احسب إحداثيات النقط I,J,K

2- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AG)

2- بين أن النقط I,J,K تنتمي إلى المستقيم (AG) ثم حدد الأعداد u,t,s بحيث :

$\overrightarrow{AI}=s\,\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AJ}=t\,\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AK}=u\,\overrightarrow{AG}$

2

- لتكن (C) دائرة مركزها O ونصف قطرها r

E نقطة من القرص الذي مركزه O و نصف قطره r

(d) و (d') مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في E بحيث :

(d) يقطع الدائرة (C) في النقطتين A و C و (d') يقطعها في النقطتين B و D

لتكن I و J منتصفي $[AC]$ و $[BC]$ على التوالي.

1- بين أن الرباعي $OIEJ$ مستطيل.

2- استنتج أن النقطة G مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$ هي نقطة ثابتة من المستوي لما يتغير المستقيمان (d) و (d') مع بقائهما متعامدان في النقطة E .

3

- $ABCD$ رباعي وجوه ولتكن P ، Q و R ثلاث نقط حيث أن الرباعيات $ABPC$ ، $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات أضلاع.

1-أ) بين أن P هي مرجح الجملة $(A,-1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$

ب) عبر عن Q كمرجح للنقط A ، B ، D .

جـ) عبر عن R كمرجح للنقط A ، C ، D .

2- باستعمال الخاصية التجميعية وباختيار مناسب للمرجح I للنقط A ، B ، C ، D المزودة بمعاملات يطلب تعيينها.

بين أن المستقيمات (DP) ، (CQ) و (BR) متقاطعة في النقطة I ثم حدد موضعها على كل مستقيم.

4 - $ABCD$ رباعي وجوه ، ولتكن النقطتين I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي

1- أ) لتكن G_1 مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,-1)$ ، $(D,1)$

عبر عن $\overrightarrow{IG_1}$ بدلالة $\overrightarrow{CD}$ ، ثم علم النقط I ، J و G_1

ب) لتكن G_2 مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(D,2)$

بين أن G_2 منتصف $[ID]$ ثم علمها .

جـ) بين أن IG_1DJ متوازي أضلاع ثم استنتج وضعية G_2 بالنسبة إلى G_1 و J

2- m عدد حقيقي، ولتكن G_m مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,m-2)$ ، (D,m)

أ) عين المجموعة E مجموعة قيم العدد m التي من اجلها يكون المرجح G_m موجودا .

ب) نفرض فيما يلي أن $m \in E$ بين أن الشعاع $m\,\overrightarrow{JG_m}$ ثابت.

جـ) استنتج المجموعة F مجموعة النقط G_m لما m تمسح E

5 - في المستوي نعتبر المثلث ABC المتقايس الساقين الذي راسه A وارتفاعه $[AH]$ بحيث $AH = BC = 4$

1- G هي مرجح الجملة $(A,2)$ ، $(B,1)$ ، $(D,1)$ برر إنشائك لـ G ثم علمها.

2- لتكن M نقطة كيفية من المستوي :

أ) بين أن الشعاع $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ شعاع طويلته 8

ب) عين وارسم (ξ) مجموعة النقط M بحيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\vec{V}\right\|$

3- نعتبر الجملة $(A,2)$ ، (B,n) ، (C,n)، بحيث n عدد طبيعي ثابت :

أ) بين أن G_n مرجح هذه الجملة موجود ، ثم علم النقط G_0 ، G_1 ، G_2

ب) بين أن النقطة G_n تنتمي إلى القطعة $[AH]$

جـ) احسب المسافة AG_n بدلالة n ثم عين نهاية AG_n لما n تؤول إلى $+\infty$

ثم حدد موضع G_n في هذه الحالة.

د) لتكن (ξ_n) مجموعة النقط M بحيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\| = n\left\|\vec{V}\right\|$

بين أن (ξ_n) دائرة تمر بالنقطة A محددا مركزها ونصف قطرها R_n ثم أنشئ (ξ_n) .

6 - $ABCD$ رباعي وجوه ، ولتكن النقط I ، J و K منتصفات القطع $[AD]$ و $[BC]$ و $[IJ]$ على التوالي. و G هي مركز ثقل المثلث ABC .

بين أن النقط G ، K و D على استقامة واحدة.

7 - ليكن متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ ولتكن النقطتان I و J منتصفي القطعتين $[AC]$ و $[FH]$ على التوالي.

أ) ادرس تقاطع المستقيم (BJ) و المستوي (ACH)

2) بين أن المستقيم (DJ) و المستوي (ACH) متقاطعان معينا نقط تقاطعهما .

8 - بين أنه يوجد مستقيم وحيد (d) يمر بالنقطة $A(-3,1,2)$ ويوازي كلا من المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب :

$x - y - 2z + 3 = 0$ و $2x + y - 7 = 0$ اعط تمثيلا وسطيا لـ (d)

9 - نعتبر النقط $A(2,-1,0)$ ، $B(1,1,-3)$ ، $C(3,-1,1)$ والشعاعين :

$\vec{U}(1,1,-1)$ و $\vec{V}(-1,0,1)$

عين تقاطع المستقيم (AB) و المستوي (P) المزود بالمعلم $(C,\vec{U},\vec{V})$

10 - نعتبر النقط $A(a,0,0)$ ، $B(0,b,0)$ ، $C(0,0,c)$ من الفضاء بحيث الأعداد الحقيقية a ، b ، c غير معدومة.

1- عين معادلة المستوي (ABC)

2- عين معادلة المستوي (P) المار بالنقطة $O(0,0,0)$ والموازي للمستوي (ABC)

3- عين معادلة المستوي (P') المار بالنقطة O ومنتصف القطعتين $[CA]$ و $[CB]$

4- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (P')

5 عين الوضعية النسبية للمستقيمين (d) و (AB)

11 - $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

G مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$

1- عين إحداثيات النقطة G ثم بين أن المستقيم (OG) عمودي على المستوي (ABC)

2- النقط $A'(2,0,0)$ ، $B'(0,2,0)$ ، $C'(0,0,3)$ تحدد مستويا $(A'B'C')$

أ) بين أن المعادلة $3x+3y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(A'B'C')$

ب) بين أن $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث $x=1-t$ ؛ $y=0$ ؛ $z=t$

جـ) عين إحداثيات النقطة K تقاطع المستقيم (AC) و المستوي $(A'B'C')$

3- أ) عين إحداثيات النقطة L تقاطع المستقيم (BC) و المستوي $(A'B'C')$

ب) بين أن المستقيمات (AB) ، $(A'B')$ و (KL) متوازية

جـ) حدد تقاطع المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ باستعمال النتائج السابقة.

12 - لتكن S نقطة ثابتة من كرة ثابتة (Σ) مركزها النقطة Ω.

نعتبر الرباعيات الوجوه $SABC$ المرسومة داخل الكرة (Σ) وبحيث أحرفها المرسومة من S متعامدة مثنى مثنى

بين أن المستويات (ABC) تمر بنقطة ثابتة.

(استعمل النقطة S' بحيث $\overrightarrow{SS'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})$ و G مركز ثقل المثلث ABC ثم برهن أن $S'=\Omega$).

13 $ABCD$ رباعي وجوه و G مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$

G_1 مركز ثقل المثلث ABC

1- بين أن G تنتمي إلى المستقيم (DG_1)

2- نفرض أن الوجه ABC ثابت وان النقطة D متغيرة على مستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC)

ما هو المحل الهندسي للنقطة G لما تتحرك النقطة D في المستوي (P) ؟

14 أوجد ثلاثة أعداد حقيقية مجموعها هو 30 والفرق بين أكبر عددين من الثلاثة هو 6 والفرق بين أصغر عددين هو 3

15 - احسب انصاف اقطار ثلاث دوائر متماسة مثنى مثنى. إذا علمت ان المسافات بين مراكزها O,P,Q هي $OP=21cm$ ، $PQ=23cm$ و $OQ=22cm$

16 حدد عدد طبيعي مشكل من رقمين علما انه :

- يساوي 3 مرات مجموع رقميه.

-إذا ضربناه في العدد 3 النتيجة المحصل عليها هي مربع مجموع رقميه.

17 من أجل حل مشكلة رياضية يتقدم ثلاثة أشخاص A ، B ، C بحيث :

-الشخصان A و B يحلانها في 10 دقائق.

- الشخصان B و C يحلانها في 20 دقيقة.

- الشخصان A و C يحلانها في 12 دقيقة.

ما هو الوقت اللازم لكل شخص على حدة لحل هذه المشكلة ؟

الدرس 14

التّشابهات المستوية

1 عموميات حول التحويلات المستوية

1-1 تعاريف ومصطلحات

في مستو إذا ارفقنا كل نقطة M بنقطة وحيدة N نقول عندئذ أننا عرفنا تطبيق من المستوي في نفسه.

- القول عن تطبيق f انه تقابل يعني أن كل نقطة N هي صورة لنقطة وحيدة M بـ f

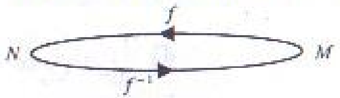
- التطبيق التقابلي من المستوي في نفسه يسمى تحويلا

- نسمي التطبيق المطابق الذي نرمز له بـ Id التحويل الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M نفسها أي $Id(M)=M$ من أجل كل M.

- القول أن $f=g$ يعني أنه من اجل كل نقطة M يكون $f(M)=g(M)$

- اذا كان f تحويلا وكل نقطة N نرفقها بنقطة M بحيث $f(M)=N$ نكون عندئذ قد عرفنا تحويلا عكسيا لـ f نرمز له بـ f^{-1} ونكتب :

$N=f(M)$ تكافئ $M=f^{-1}(N)$



مثال - ♦

- التحويل العكسي للدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ هو دوران مركزه Ω وزاويته $-\theta$

- التحويل العكسي للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هو تحاكي مركزه Ω ونسبته $\frac{1}{k}$.

- التحويل العكسي للتناظر المحوري الذي محور (Δ) هو نفسه.
- التحويل العكسي للإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو إنسحاب شعاعه $-\vec{u}$.

1 - 2 تركيب التحويلات

f و g تحويلان، نعرف التحويل $g\,o\,f$ كما يلي
من أجل كل نقطة M يكون $g\,o\,f\,(M) = g\left(f\,(M)\right)$

ملاحظة

يمكن تمديد هذا التعريف بحيث يشمل مركب ثلاثة تحويلات أو أكثر، ومنه
يكون $f\,o\,g\,o\,h$ هو التحويل $(fog)\,oh$ أو $fo\,(goh)$

مبرهنة 1

- إذا حول f و g المستقيمات إلى مستقيمات والدوائر إلى دوائر فإن $g\,o\,f$ يقوم بنفس الدور كذلك.
- إذا حافظ f و g على المسافات والزوايا (الموجهة والهندسية) ، التوازي ، التعامد ، المرجح أو المساحات فإن $g\,o\,f$ يقوم بنفس الدور كذلك.

مبرهنة 2

إذا ضاعف التحويل f المسافات بعدد حقيقي $k \rangle 0$ ، وإذا ضاعف التحويل g المسافات بعدد حقيقي $k' \rangle 0$ فإن التحويل $g\,o\,f$ يضاعف المسافات بالعدد الحقيقي $k\,k'$.

الإثبات

لتكن A_1 و B_1 صورتي A و B بالتحويل f بحيث $A_1 B_1 = k\,A B$
وإذا حول g النقطتين A_1 و B_1 إلى A_2 و B_2 بحيث $A_2 B_2 = k'\,A_1 B_1$
فإن التحويل $g\,o\,f$ يحول A و B إلى A_2 و B_2 .

$$A_2 B_2 = k'\,A_1 B_1 = k'\,(k\,A B) = k'\,k\,A B$$

إذن التحويل gof يضاعف المسافة بالعدد الحقيقي $k\,k'$.

خاصية

f و g تحويلان نقطيان و f^{-1} و g^{-1} تحويليهما العكسيين على التوالي :

- إذا كان $h = f\,o\,g$ فإن $f = h\,o\,g^{-1}$ و $g = f^{-1}\,o\,h$
- إذا كان $f\,o\,g = Id$ فإن $f = g^{-1}$ و $g = f^{-1}$
- إذا كان $f\,o\,f = Id$ فإن $f = f^{-1}$

تمرين تدريبي 1

في معلم متعامد ومتجانس مباشر $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، الكتابتين المركبتين للتحويلين T_1 و T_2 هما على التوالي $Z' = i\,Z + 2$ و $Z' = 3\,Z + 2i$.
ما هي الكتابة المركبة للتحويل $T_1\,o\,T_2$ ؟

✓ الحل

إذا كانت الكتابة المركبة للتحويل النقطي T_1 هي $Z' = f_1(Z)$
والكتابة المركبة للتحويل النقطي T_2 هي $Z' = f_2(Z)$
فإن الكتابة المركبة للتحويل النقطي $T_1\,o\,T_2$ هي $Z' = f_1\,o\,f_2(Z)$

$$\underbrace{Z \xrightarrow{f_2} Z_2 \xrightarrow{f_1} Z_1}_{f_1\,o\,f_2}$$

$$Z_2 = 3\,Z + 2\,i$$

$$Z_1 = i\,Z_2 + 2 = i\,(3\,Z + 2\,i) + 2 = 3\,i\,Z$$

ومنه تكون الكتابة المركبة للتحويل $T_1\,o\,T_2$ هي $Z' = 3\,i\,Z$.

تمرين تدريبي 2

في معلم متعامد ومتجانس مباشر ، الكتابة المركبة للتحويلين T_1 و T_2 هما على التوالي $Z' = 2\,i\,Z + i$ ، $Z' = i\,\overline{Z} + i$
- ما هي الكتابة المركبة للتحويلين T_1^{-1} و T_2^{-1} ؟

✓ الحل

- إذا كان لتحويل T كتابة مركبة $Z' = f\,(Z)$ فإن $Z = f^{-1}\,(Z')$
لإيجاد الكتابة المركبة لـ T^{-1} نعبر عن Z بدلالة Z'

$Z' = 2\,i\,Z + i$ يكافئ $Z = -\frac{i}{2}Z' - \frac{1}{2}$

وعليه فإن التحويل T_1^{-1} يحول النقطة M' ذات اللاحقة Z' إلى النقطة M ذات اللاحقة Z
بحيث: $Z = -\frac{i}{2}Z' - \frac{1}{2}$ إذن الكتابة المركبة لـ T_1^{-1} هي $Z' = -\frac{i}{2}Z - \frac{1}{2}$
من المساواة $Z' = i\,\overline{Z} + i$ ينتج $Z = i\,\overline{Z'} - 1$
وعليه فإن التحويل T_2^{-1} يحول النقطة M' ذات اللاحقة Z' إلى النقطة M ذات اللاحقة Z
بحيث: $Z = i\,\overline{Z'} - 1$ إذن الكتابة المركبة لـ T_2^{-1} هي $Z' = i\,\overline{Z} - 1$

2 التشابه

تعريف

التشابه هو تحويل يحافظ على نسب المسافات .
من أجل كل النقط M ، N ، P ، Q مع $M \neq N$ و $P \neq Q$ التي صورها على التوالي :
M' ، N' ، P' ، Q' لدينا $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$
وبصفة أخرى التشابه هو التحويل الذي يضاعف المسافات أي يوجد عدد حقيقي $k \rangle 0$ الذي

يسمى نسبة التشابه بحيث من أجل كل نقطتين M و N صورهما على الترتيب M' و N' لدينا $M'N' = k\,MN$

خواص

1) مركب تشابهين نسبتهما على التوالي k و k' هو تشابه نسبته kk'.

2) التحويل العكسي للتشابه الذي نسبته k بحيث $k>0$ هو تشابه نسبته $\frac{1}{k}$.

3) إذا كان S تشابه نسبته k و ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين فإن المثلث $A'B'C'$ قائم في A' ومتساوي الساقين حيث:
$A' = S(A)$ و $B' = S(B)$ و $C' = S(C)$

4) إذا كان ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين و S و S' تشابهين بحيث:
$S(A) = S'(A)$ و $S(B) = S'(B)$ و $S(C) = S'(C)$ فإن $S = S'$

الإثبات

2) ليكن S تشابه نسبته k.
نضع $S^{-1}(M) = M_1$ و $S^{-1}(N) = N_1$ عندئذ $M_1 = S(M)$ و $N_1 = S(N)$
وبما أن S تشابه نسبته k فإن $MN = k\,M_1N_1$ ومنه نستنتج $M_1N_1 = \frac{1}{k}MN$.
إذن S^{-1} هو تشابه نسبته $\frac{1}{k}$.

3) ـ من المساواة $AB = AC$ نستنتج $k\,AB = k\,AC$ أي $A'B' = A'C'$
وهذا يعني أن المثلث $A'B'C'$ متقايس الساقين.
ـ من المساواة $AB^2 + AC^2 = BC^2$ نستنتج أن $k^2AB^2 + k^2AC^2 = k^2BC^2$
أي $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$ وهذا يعني أن المثلث $A'B'C'$ قائم في A'.
إذن المثلث $A'B'C'$ قائم في A' ومتساوي الساقين.

4) نسمي A'، B'، C' صور A، B، C على التوالي بالتشابه S وكذلك بالتشابه S'،
k و k' نسبتي S و S' على التوالي.
- نريد إثبات أن $k = k'$
من الفرضية نستنتج أن $A'B' = k\,AB$ و $A'B' = k'\,AB$
لكن $AB \neq 0$ إذن $k = k'$.
- لإثبات أن $S = S'$ نثبت أنه من أجل كل نقطة M يكون $S(M) = S'(M)$
نفرض أن $M_1 = S(M)$ و $S'(M) = M_2$ ونبين أن $M_1 = M_2$.
لدينا $A'M_1 = k\,AM$ و $A'M_2 = k\,AM$ وعليه $A'M_1 = A'M_2$
إذا كان $M_1 \neq M_2$ فإن A' تنتمي إلى محور القطعة $[M_1M_2]$
نفس الشيء بالنسبة إلى النقطتين B'، C' أي أنهما تقعان على محور $[M_1M_1]$
وهذا يخالف الفرض كون A'، B'، C' ليست على استقامة واحدة.
إذن $M_1 = M_2$ وعليه $S = S'$

تمرين تدريبي

في المستوي المركب، ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z' = (1+i)Z + 1$
بين أن T تشابه ثم حدد نسبته.

✓ الحل

لإثبات أن T تشابه نبحث عن إمكانية وجود عدد حقيقي k $(k>0)$ بحيث من أجل كل نقطتين M و N صورتيهما على الترتيب M' و N' لدينا:
$M'N' = k\,MN$
$T(M) = M'$ تكافئ $Z_{M'} = (1+i)Z_M + 1$ ....(1)
$T(N) = N'$ تكافئ $Z_{N'} = (1+i)Z_N + 1$ ....(2)
بطرح (1) من (2) نجد $Z_{N'} - Z_{M'} = (1+i)(Z_N - Z_M)$
ومنه نستنتج أن $|Z_{N'} - Z_{M'}| = |1+i|\,|Z_N - Z_M|$
بما أن $|1+i| = \sqrt{2}$ و $MN = |Z_N - Z_M|$ و $|Z_{N'} - Z_{M'}| = M'N'$ فإن $M'N' = \sqrt{2}\,MN$
وهذا يعني أن T تشابه نسبته $k = \sqrt{2}$.

3. التعبير عن التشابه بالأعداد المركبة

مبرهنة

القول أن التحويل S هو تشابه يكافئ القول أنه في كل معلم متعامد ومتجانس مباشر S له كتابة مركبة من الشكل $Z' = aZ + b$ أو $Z' = a\overline{Z} + b$ حيث:
a و b عددين مركبين ثابتين و $a \neq 0$

نتيجة

إذا كان للتشابه S نقطتين صامدتين A و B فإنه إما أن يكون تحويلا مطابقا Id وإما أن يكون تناظرا محوريا محوره (AB).

الإثبات

نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا مركزه النقطة A بحيث يكون محور فواصله منطبقا على المستقيم (AB) عندئذ $Z_A = 0$ و $Z_B \neq 0$.
إذا كانت لـ S كتابة مركبة من الشكل $Z' = aZ + b$
فإن المساواة $S(A) = A$ تستلزم $Z_A = aZ_A + b$ أي $b = 0$
والمساواة $S(B) = B$ تستلزم $Z_B = aZ_B$ أي $a = 1$

وتكون الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=Z$ وهذا يعني أن S تحويل مطابق.

- إذا كانت لـ S كتابة مركبة من الشكل $Z'=a\overline{Z}+b$ نتحصل على $Z'=\overline{Z}$

إذن S هو تناظر محوري محوره (AB).

ملاحظة

إذا كان للتشابه S ثلاث نقط صامدة ليست على استقامة واحدة فإن S هو Id.

تمرين تدريبي

S تحويل كتابته المركبة هي $Z'=3i\overline{Z}-2(1+i)$

1) بين أن S هو تشابه نسبته 3.

2) بين أن النقطة I ذات اللاحقة $1+i$ صامدة بـ S.

3- أ) ما هي لاحقة النقطة A' صورة A ذات اللاحقة 2 بالتحويل S؟

ب) بين أن النقط A، A' و I على استقامة واحدة.

الحل

1) لتكن M و N نقطتان صورتيهما على التوالي M' و N' بالتحويل S.

إذن $Z_{M'}=3i\overline{Z}_M-2(1+i)$ و $Z_{N'}=3i\overline{Z}_N-2(1+i)$.

بالطرح نجد $Z_{N'}-Z_{M'}=3i(\overline{Z_N}-\overline{Z_M})$ ومنه نستنتج $|Z_{N'}-Z_{M'}|=|3i|\,|\overline{Z_N}-\overline{Z_M}|$

لكن $|3i|=3$ و $|Z_{N'}-Z_{M'}|=M'N'$ و $|\overline{Z}_N-\overline{Z}_M|=MN$

إذن $M'N'=3MN$

وهذا يعني أن S تشابه نسبته 3 (أي نسبة التشابه هي $|a|$).

2) I صامدة بالتحويل S يعني أن $S(I)=I$ أي $Z_I=3i\overline{Z}_I-2(1+i)$.

$3i\overline{Z}_I-2(1+i)=3i(1-i)-2(1+i)=3i+3-2-2i=1+i=Z_I$

ومنه I صامدة بالتحويل S.

3) أ) $S(A)=A'$ تكافئ $Z_{A'}=3i\overline{Z}_A-2(1+i)$

لدينا $Z_{A'}=6i-2-2i=-2+4i$ إذن A' لاحقتها $-2+4i$

لكي تكون النقط A، A'، I على استقامة واحدة يجب أن يكون $\frac{Z_A-Z_{A'}}{Z_A-Z_I}=\alpha$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\frac{Z_A-Z_{A'}}{Z_A-Z_I}=\frac{2+2-4i}{2-1-i}=\frac{4(1-i)}{1-i}=4$$

إذن النقط A، A'، I على استقامة واحدة

4- التشابهات المستوية المباشرة

4-1 التشابه المباشر

القول عن تشابه أنه مباشر يعني أنه يحافظ على الزوايا الموجهة.

مثال -

كل من الإنسحاب، الدوران، التحاكي وتركيباتها تحافظ على الزوايا الموجهة أي أنها تشابهات مباشرة.

مبرهنة

القول أن التحويل S تشابه مباشر يكافئ القول أن كتابته المركبة في كل معلم متعامد ومتجانس مباشر هي من الشكل $Z'=aZ+b$ مع a، b عددين مركبين ثابتين و $a\neq 0$

الإثبات

للتشابه كتابتين مركبتين ممكنتين هما $Z'=aZ+b$ و $Z'=a\overline{Z}+b$

لتكن M'، N'، P' صور النقط المختلفة مثنى مثنى M، N، P بالتحويل S.

- إذا كان $Z'=aZ+b$

فإن:

$$\frac{Z_{P'}-Z_{M'}}{Z_{N'}-Z_{M'}}=\frac{(aZ_P+b)-(aZ_M+b)}{(aZ_N+b)-(aZ_M+b)}=\frac{Z_P-Z_M}{Z_N-Z_M}$$

ومنه نستنتج $(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M'P'})=(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})$

إذن هناك حفظ للزوايا الموجهة وبالتالي S تشابه مباشر.

- إذا كان $Z'=a\overline{Z}+b$ وبطريقة مماثلة نبين أن:

$(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M'P'})=-(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})$

وهذا يعني أن S لا يحفظ الزوايا الموجهة إذن هذه الكتابة لا تعبر عن التشابه المباشر.

ملاحظة

كل من التشابه المباشر وغير المباشر يحفظ الزوايا الهندسية و $|a|$ هي نسبة التشابه.

تمرين تدريبي 1

في المستوي الموجه المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$،

T تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$

بحيث $x'=-2y+3$ و $y'=2x$

بين أن T تشابه مباشر.

✓ **الحل**

لتكن Z لاحقة M و Z' لاحقة M'.

$$Z' = x' + iy' = -2y+3+2ix = 2i^2y+3+2ix-2i(x+iy)+3 = 2iZ+3$$

إذن T تشابه مباشر نسبته $k=|a|=2$

2-4 تعيين التشابه المباشر الذي يحول (A,B) إلى (A',B')

مبرهنة

A ، B ، A' ، B' أربع نقط بحيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$

يوجد تشابه مباشر S وحيد بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$

الإثبات

لتكن Z_A ، Z_B ، $Z_{A'}$ ، $Z_{B'}$ لواحق النقط A ، B ، A' ، B' على الترتيب في المستوي المركب.

إثبات وجود ووحدانية تشابه مباشر S ذو الكتابة المركبة $Z'=aZ+b$ بحيث:

$S(A)=A'$ و $S(B)=B'$ يؤول إلى إثبات وجود ووحدانية عددين مركبين a و b مع $a \neq 0$

بحيث $\begin{cases} Z_{A'} = aZ_A+b \;.....(1) \\ Z_{B'} = aZ_B+b \;.....(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $Z_{A'}-Z_{B'} = a(Z_A-Z_B)$

بما أن $A' \neq B'$ و $A \neq B$ فإن $Z_A-Z_B \neq 0$ و $Z_{A'}-Z_{B'} \neq 0$

وعليه $a = \dfrac{Z_{A'}-Z_{B'}}{Z_A-Z_B}$ و $a \neq 0$

إذن توجد قيمة وحيدة لـ a وبعد تعويضها في (1) نجد قيمة وحيدة لـ b.

إذن يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و B إلى B'

نتيجة

الشرط اللازم لوجود تشابه مباشر وحيد يحول المثلث ABC إلى المثلث $A'B'C'$

مع $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$ و $S(C)=C'$ هو:

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'})$

وهذا الشرط كاف أن تحقق.

ملاحظة

إذا كانت الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=aZ+b$ فإن $a = \dfrac{Z_{A'}-Z_{B'}}{Z_A-Z_B}$

إذن $|a| = \dfrac{A'B'}{AB}$ و $\arg(a) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

وعليه فإن نسبة S هي $\dfrac{A'B'}{AB}$ وزاويته $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

تمرين تدريبي

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j})$

النقط A ، B ، A' ، B' لواحقها على الترتيب $1+i$ ، $2-i$ ، -2 ، $2+2i$

عين التشابه المباشر الوحيد S بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$

✓ **الحل**

بما أن $A' \neq B'$ و $A \neq B$ فإنه وحسب المبرهنة السابقة يوجد تشابه مباشر وحيد

بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$ كتابته المركبة من الشكل $Z'=aZ+b$

a ، b يحققان الجملة $\begin{cases} -2 = a(1+i)+b \;.....(1) \\ 2+2i = a(2-i)+b \;.....(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $-4-2i = a(-1+2i)$

ومنه $a = \dfrac{-4-2i}{-1+2i}$

$$a = \frac{(-4-2i)(-1-2i)}{5}$$

$$= \frac{4+8i+2i-4}{5} = 2i$$

نعوض قيمة a في (1) نجد $b=-2i$ وبالتالي $Z'=2iZ-2i$

إذن يوجد تشابه مباشر وحيد نسبته $|a|=|2i|=2$

5 - الكتابة المختصرة للتشابه المباشر

مبرهنة

كل تشابه مباشر هو إما إنسحاب أو تركيب دوران وتحاكي لهما نفس المركز.

الإثبات

لتكن $Z'=aZ+b$ مع $a \neq 0$ الكتابة المركبة للتشابه المباشر S.

-إذا كان $a=1$ فإن $Z'=Z+b$ وبالتالي S إنسحاب

- إذا كان $a \neq 1$ ، لنثبت أولا أنه توجد نقطة وحيدة I بحيث $S(I)=I$

وهذا يؤول إلى إثبات أن المعادلة $Z'=Z$ لها حل وحيد

$Z'=Z$ تكافئ $(1-a)Z=b$ تكافئ $Z=\dfrac{b}{1-a}$

لتكن ω بحيث $\omega=\dfrac{b}{1-a}$ لاحقة I ونضع $a=ke^{i\theta}$ حيث $k=|a|$

إذن $Z'-\omega = aZ+b-\omega$

$$= aZ+(1-a)\omega-\omega = a(Z-\omega)$$

نسمي h التحاكي الذي مركزه I ونسبته k و r الدوران الذي مركزه I وزاويته θ

لنبين أن $S=hor=roh$

الكتابتان المركبتان لـ h و r على التوالي هما :

$Z'=e^{i\theta}(Z-\omega)+\omega$ و $Z'=k(Z-\omega)+\omega$

إذن الكتابة المركبة لـ hor هي:

$Z'-\omega=a(Z-\omega)$ أي $Z'=ke^{i\theta}(Z-\omega)+\omega$

إذن $S=hor$ وبنفس الطريقة نبين أن $S=roh$

نتيجة 1

كل تشابه مباشر يختلف عن الإنسحاب له نقطة صامدة وحيدة نرمز لها بـ I ، هذا التشابه يكتب على الشكل المختصر :

$S=h(I,k)or(I,\theta)$
$=r(I,\theta)oh(I,k)$

نقول عندئذ أن التشابه المباشر S له مركز I ونسبة k وزاوية θ

ونرمز له بـ $S(I,k,\theta)$

نتيجة 2

القول أن التحويل S تشابه مباشر نسبته k $(k\neq 1)$ وزاويته θ يكافئ القول أن كتابته المركبة هي من الشكل $Z'=ke^{i\theta}Z+b$

إذا كانت M' صورة M $(M\neq I)$ بالتشابه المباشر الذي مركزه I ونسبته k وزاويته θ

فإن $k\in\mathbb{Z}$ ، $\begin{cases} \overrightarrow{IM'}=k\,\overrightarrow{IM} \\ (\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})=\theta+2k\pi \end{cases}$

- إذا كانت I ، M ، M' ثلاث نقط مختلفة فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد مركزه I بحيث $S(M)=M'$ مع $k=\frac{IM'}{IM}$ و $\theta=(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})$

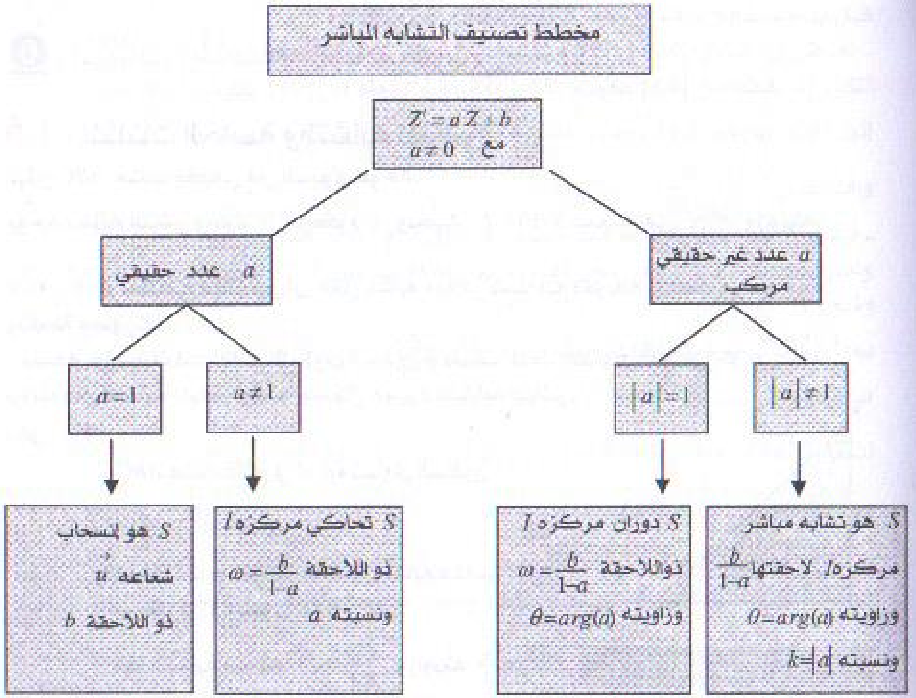
- كل تشابه مباشر يحول المستقيمات إلى مستقيمات ، الدوائر إلى دوائر ويحفظ التعامد والتوازي والمرجح.

وبصفة خاصة S يحول المثلث ABC الى مثلث $A'B'C'$ يشابهه في الاتجاه المباشر.

ملاحظة

- إذا كان h تحاكيا نسبته $k<0$ ومركزه النقطة O فإن h تشابه مباشر مركزه النقطة O و نسبته $-k$ وزاويته π .

- إذا كان T مركب دوران وتحاكي نسبته سالبة فإن T هو تشابه مباشر



تمرين تدريبي

1) اعط العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي كتابته المركبة هي :

$Z'=(1-i)Z+1+i$

2) اوجد الكتابة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه I لاحقتها $1-i$ ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

✓ الحل :

1) لدينا $a=(1-i)$ و $b=1+i$

نسبة التشابه المباشر هي $|a|=\sqrt{2}$ وزاويته هي $arg(a)=\frac{-\pi}{4}$

ومركزه النقطة I لاحقتها $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1+i}{i}=-i+1$ أي $I(1,-1)$

2) بما أن $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ فإن $a=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})$

بالحساب نجد $a=1+\sqrt{3}i$ و $b=(1-a)\omega=-\sqrt{3}i(1-i)=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

إذن الكتابة المركبة لهذا التشابه المباشر هي $Z'=(1+\sqrt{3}i)Z-\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

6. المثلثات الخاصة والتشابه المباشر

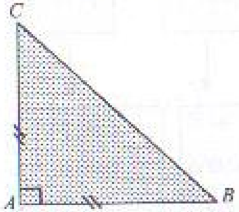
6-1 المثلثات الخاصة والتشابه المباشر

ليكن ABC مثلث كيفي من المستوي الموجه.

يوجد تشابه مباشر وحيد S مركزه A وبحيث $S(B)=C$ نسبته هي $\frac{AC}{AB}$ وزاويته $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ نستنتج مما سبق أن كل تشابه مباشر نستطيع تعريفه بإعطاء مركزه ونقطة وصورتها.

- بصفة خاصة المثلث القائم المتساوي الساقين أو نصف المثلث المتقايس الأضلاع توحي لنا باستعمال التشابه المباشر وهذه الأشكال مميزة للتشابه المباشر.

مثال -

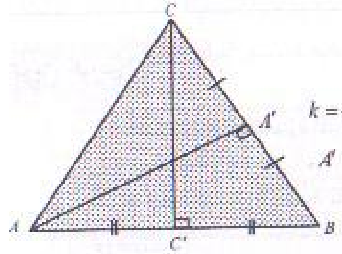


ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$.

هذا المثلث يوحي لنا استعمال تشابه مباشر مركزه C ويحول A إلى B.

هذا التشابه نسبته $\frac{CB}{CA}=\sqrt{2}$ وزاويته $\theta=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{4}$



- إذا كان ABC مثلث متقايس الأضلاع

فإنه يوجد تشابه مباشر مركزه النقطة A

يحول C' إلى C زاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته $k=\frac{AC}{AC'}=2$

- يوجد تشابه مباشر مركزه A يحول B إلى A'

وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ونسبته $k=\frac{AA'}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6-2 المثلثات المتشابهة

التعريف المعطى في السنة الأولى ثانوي المتعلق بمثلثين متشابهين هو كالتالي:

"مثلثين متشابهين هما مثلثين تكون زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر"

• ABC مثلث و S تشابه مباشر بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$ و $S(C)=C'$

ومنه $A'B'C'$ هو صورة ABC بالتشابه المباشر S و ABC هو صورة $A'B'C'$ بـ S^{-1}

وبما أن التشابه المباشر يحفظ الزوايا الموجهة فإنه يحفظ الزوايا الهندسية كذلك.

ونقول أن:

المثلثين ABC و $A'B'C'$ المتشابهين في الاتجاه المباشر متشابهان بالمعنى المعطى في السنة الأولى.

• والآن نبين أنه إذا كان لدينا مثلثين ABC و $A'B'C'$ بحيث:

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=(\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'A'})$

فهل يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول ABC إلى $A'B'C'$ ؟

- نفرض أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان بمعنى تعريف السنة الأولى.

لتكن D نقطة من $[AB]$ بحيث $AD=A'B'$ و E نقطة من $[AC]$ بحيث $AE=A'C'$

إذن (DE) يوازي (BC) وحسب نظرية طاليس فإن $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

وهذا يعني $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$ .... (1)

- ليكن S التشابه المباشر الوحيد بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$

ولنبين أن $S(C)=C'$ ومن أجل ذلك نفرض أنه توجد صورة C'' للنقطة C بالتشابه S

ونبين أن $C''=C'$

بما أن C'' صورة C بالتشابه S فإن $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C''}{AC}$ .... (2)

من (1) و(2) نجد أن $A'C''=A'C'$ .... (3)

لدينا $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C''})$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$

ومنه نستنتج $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C''})$ .... (4)

من(3) و (4) نستنتج أن $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'C''}$ وهذا يعني أن C'' منطبقة على C'

إذن $S(C)=C'$ وعليه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول ABC إلى $A'B'C'$

نتيجة

إذا كانت زوايا أحد مثلثين تساوي زوايا الآخر فإنه يوجد دائما تشابه مباشر يحول أحدهما إلى الآخر.

7 التقايسات المستوية

7-1 التقايس

تعريف 1

نسمي تقايس كل تحويل يحفظ المسافات أي كل تشابه نسبته 1 .

الكتابة المركبة للتقايس هي إذن $Z'=aZ+b$ أو $Z'=a\overline{Z}+b$ مع $|a|=1$ أي $a=e^{i\theta}$

مثال -

كل من الإنسحاب ، الدوران ، التناظر المحوري هي تقايسات.

تعريف 2

التقايس الذي يحفظ الزوايا الموجهة هو إزاحة (تقايس موجب).

التقايس الذي يحول زاوية موجهة إلى زاوية موجهة معاكسة لها هو ضد إزاحة (تقايس سالب)

مثال - ♦

- الإنسحاب والدوران هما الإزاحتين الوحيدتين في المستوي.
- التناظر المحوري هو ضد إزاحة.

7 - 2 تركيب إزاحتين

مركب دورانين

مبرهنة

r_1 دوران زاويته θ_1 و r_2 دوران زاويته θ_2

- إذا كان $\theta_1+\theta_2 \neq 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإن $r_2 o r_1$ هو دوران زاويته $\theta_1+\theta_2$
- إذا كان $\theta_1+\theta_2 = 2k\pi$ فإن $r_2 o r_1$ إنسحاب.

الإثبات

في المستوي الموجه تكون الكتابة المركبة لـ r_1 و r_2 هما $Z'=e^{i\theta_1}Z+b_1$ و $Z'=e^{i\theta_2}Z+b_2$

ومنه فإن الكتابة المركبة لـ $r_2 o r_1$ هي $Z'=e^{i(\theta_2+\theta_1)}Z+e^{i\theta_2}b_1+b_2$

إذن $r_2 o r_1$ له كتابة مركبة من الشكل $Z'=aZ+b$ مع $|a|=1$

إذن هو إما دوران أو إنسحاب .

- إذا كان $\theta_1+\theta_2=2k\pi$ فإن $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=1$ وبالتالي $Z'=Z+e^{i\theta_2}b_1+b_2$

إذن $r_2 o r_1$ إنسحاب

- إذا كان $\theta_1+\theta_2 \neq 2k\pi$ فإن $r_2 o r_1$ دوران زاويته $\theta_1+\theta_2$

مركب دوران و إنسحاب

مبرهنة

إذا كان t إنسحابا و r دوران زاويته θ حيث $\theta \neq 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإن tor و rot هما دورانين زاوية كل منهما θ .

الإثبات

في المستوي الموجهه تكون الكتابة المركبة لـ r و t هي على التوالي $Z'=e^{i\theta}Z+b_1$ و $Z'=Z+b_2$

ومنه الكتابة المركبة لـ rot هي $Z'=e^{i\theta}Z+b_1+e^{i\theta}b_2$

بما أن $e^{i\theta}Z \neq 1$ فإن rot دوران زاويته θ

بنفس الكيفية نبين أن tor هو دوران زاويته θ .

مركز الدوران الذي يحول (A,B) إلى (A',B')

إذا كان r دوران مركزه النقطة I يحول A إلى A' و B إلى B' فإن :

$IA=IA'$ ..... (1) و $IB=IB'$ ..... (2)

من (1) نستنتج أن I تنتمي إلى محور $[AA']$ ومن (2) نستنتج أن I تنتمي إلى محور $[BB']$

إذن I تنتمي إلى تقاطع محوري $[AA']$ و $[BB']$

نتيجة

- إذا كان $r_2 o r_1$ دوران فإن لتعيين مركزه نبحث عن صورتين لنقطتين مختارتين بالدوران $r_2 o r_1$ ونتبع نفس الخطوات السابقة.
- إذا كان $r_2 o r_1$ إنسحابا فإنه لتعيين شعاعه نبحث عن A' صورة نقطة مختارة A وعندئذ $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع مركزه النقطة O بحيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$ ، عين طبيعة التحويلات التالية :

أ) $f=r(B,-\frac{\pi}{2})\, o\, r(A,\frac{\pi}{2})$ ، ب) $g=t_{\overrightarrow{AB}}\, o\, r(A,\frac{\pi}{2})$

جـ) $h=S_O\, o\, r(A,\frac{\pi}{2})$ حيث S_O تناظر مركزي مركزه النقطة O

✓ الحل

أ) بما أن $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0$ فإن f إنسحاب .

صورة A بالدوران $r(A,\frac{\pi}{2})$ هي النقطة A وصورة A بالدوران $r(B,-\frac{\pi}{2})$ هي C

إذن شعاع الإنسحاب هو $\overrightarrow{AC}$ وعليه $f=t_{\overrightarrow{AC}}$

ب) g هو دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة I .

$g(A)=t_{\overrightarrow{AB}}\, o\, r(A,\frac{\pi}{2})(A)=B$

$g(B)=t_{\overrightarrow{AB}}\, o\, r(A,\frac{\pi}{2})(B)=C$

إذن I تنتمي إلى تقاطع محوري $[AB]$ و $[BC]$ أي I منطبقة على O

وعليه $g=r(O,\frac{\pi}{2})$

جـ) S_O تناظر مركزي مركزه النقطة O فهو إذن دوران مركزه O وزاويته π

إذن $h=r(O,\pi)\, o\, r(A,\frac{\pi}{2})$

بما أن $\pi+\frac{\pi}{2} \neq 2k\pi$ فإن h دوران زاويته $3\frac{\pi}{2}$.

صورة B بالدوران $r(A,\frac{\pi}{2})$ هي D وصورة D بالتناظر S_O هي B

إذن B صامدة وبالتالي مركز الدوران h هي B وعليه $h=r(B,3\frac{\pi}{2})$

8 . مركب تحاكيات و إنسحابات

1-8 مركب تحاكيين مختلفي المركز

مبرهنة

h_1 تحاكي مركزه A ونسبته k_1 و h_2 تحاكي مركزه B ونسبته k_2 و $k_2 \neq 1$ إذن :

إذا كان $k_1 k_2 = 1$ فإن $h_2 o h_1$ إنسحاب شعاع توجيهه هو شعاع توجيه (AB)

إذا كان $k_1 k_2 \neq 1$ فإن $h_2 o h_1$ تحاكي نسبته $k_1 k_2$ ومركزه ينتمي إلى (AB)

الإثبات

نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا $(A, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث محور الفواصل هو (AB) .

لتكن b لاحقة B (b عدد حقيقي غير معدوم)

الكتابة المركبة لـ h_1 هي إذن $Z' = k_1 Z = f_1(Z)$

والكتابة المركبة لـ h_2 هي $Z' = k_2(Z-b) + b = f_2(Z)$

ومنه الكتابة المركبة لـ $k_2 o k_1$ هي :

$$Z' = f_2\left(f_1(Z)\right) = k_2(k_1 Z - b) + b = k_2 k_1 Z + b(1-k_2)$$

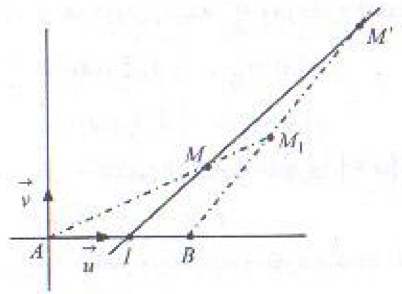
- إذا كان $k_1 k_2 = 1$ فإن $h_2 o h_1$ إنسحاب شعاعه $\vec{w}$ لاحقته $b(1-k_2)$

وبما أن b و k_2 أعدادحقيقية غير معدومة فإن $\vec{w}$ مرتبط خطيا مع $\vec{u}$

وبالتالي فهو شعاع توجيه لـ (AB)

- إذا كان $k_2 k_1 \neq 1$ فإن $h_2 o h_1$ تحاكي نسبته $k_2 k_1$ ومركزه النقطة الصامدة I ذات اللاحقة $\omega = \frac{b(1-k_2)}{1-k_1 k_2}$

بما أن ω عدد حقيقي فإنها تقع على (AB)



- **تعيين مركز التحاكي $h_2 o h_1$**

إذا كان $h_2 o h_1$ تحاكيا فإن لإيجاد مركزه I نختار نقطة M لا تنتمي إلى (AB) ونعلم النقطة M_1 بحيث $M_1 = h_1(M)$ ثم النقطة M' بحيث $M' = h_2(M_1)$

عندئذ النقطة I هي تقاطع (AB) و (MM') .

هناك طريقة ثانية لتعيين المركز I بحيث نختار نقطة A أو B ونبحث عن صورتها بالتحاكي $h_2 o h_1$.

$h_2 o h_1(A) = h_2(A) = A'$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{IA'} = k_2 k_1 \overrightarrow{IA}$

ومنه نستنتج أن I هي مرجح الجملة $(A, k_2, k_1), (A', -1)$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع ، h_1 هو تحاكي مركزه D ونسبته $\frac{1}{2}$ ، h_2 تحاكي مركزه C ونسبته 3 . بين أن $h_2 o h_1$ تحاكي منشئا مركزه I

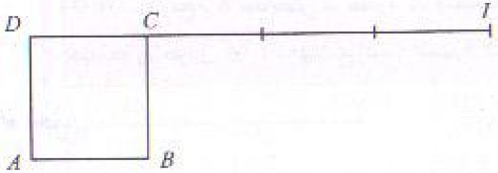
الحل

بما أن $k_2 k_1 = \frac{3}{2} \neq 1$ فإن $h_2 o h_1$ تحاكي نسبته $\frac{3}{2}$ ومركزه النقطة I

لدينا $h_2 o h_1(D) = h_2(D) = D'$

$h_2(D) = D'$ تكافئ $\overrightarrow{CD'} = 3\overrightarrow{CD}$

ولدينا أيضا $\overrightarrow{ID'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ID}$



$$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$$

$\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{CD}$ ومنه $\overrightarrow{CI} = -3\overrightarrow{CD}$

2-8 مركب تحاكي وإنسحاب

مبرهنة

h تحاكي مركزه A ونسبته k بحيث $k \neq 1$ و t إنسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث $\vec{u} \neq 0$

إذن hot و toh هما تحاكيان نسبتهما k ومركزيهما متواجدان على المستقيم $(A, \vec{u})$

الإثبات

لنختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا مركزه A بحيث يكون محور الفواصل محمولا على المستقيم $(A, \vec{u})$

لاحقة الشعاع $\vec{u}$ هي عدد حقيقي a

الكتابة المركبة لـ h هي $Z' = f_1(Z) = kZ$ و الكتابة المركبة لـ t هي $Z' = f_2(Z) = Z + a$

إذن الكتابة المركبة لـ toh هي $Z = f_2\left(f_1(Z)\right) = kZ + a$

بما أن $k \neq 1$ فإن toh هو تحاكي نسبته k ومركزه النقطة I لاحقتها $\omega = \frac{a}{1-k}$

لكن ω عدد حقيقي غير معدوم إذن I موجودة على المستقيم $(A, \vec{u})$

وبنفس الكيفية نبين أن $h o t$ هو تحاكي نسبته k ومركزه I موجودة على $(A,\vec{u})$

- تعيين مركز $h o t$:

لإيجاد المركز I نختار نقطة M غير موجودة على $(A,\vec{u})$ ونعلم النقطة M_1 بحيث: $M_1 = h(M)$ ونعلم النقطة M' بحيث $M' = t(M_1)$

النقطة I هي تقاطع $(A,\vec{u})$ مع (MM').

هناك طريقة ثانية لتعيين I:

نختار نقطة A ونبحث عن صورتها A' بالتركيب $t o h$

I هي مرجح الجملة $(A,-k)$، $(A',1)$ حيث $\vec{AA'} = \vec{u}$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع، h تحاكي مركزه A ونسبته $\frac{3}{2}$ و t إنسحاب شعاعه $\vec{AB}$ ما هي طبيعة التحويل $t o h$ معينا عناصره المميزة ثم أنشئ صورة $ABCD$ بهذا التحويل.

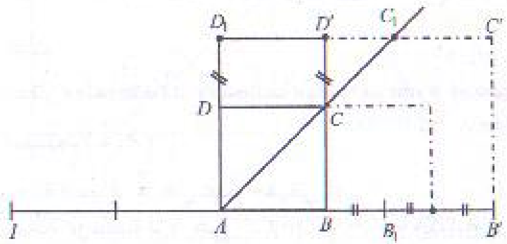
الحل

بما أن $k \neq 1$ و $A \neq B$ فإن $t o h$ تحاكي نسبته $k = \frac{3}{2}$ ومركزه النقطة I تنتمي إلى $(A,\vec{u})$ أي تنتمي إلى (AB)

نختار النقطة A ونبحث عن صورتها A' بالتحاكي $t o h$

$t o h(A) = t(A) = B$ ومنه نستنتج $\vec{IB} = \frac{3}{2}\vec{IA}$

$\vec{IB} = \frac{3}{2}\vec{IA}$ يكافئ $\vec{IA} + \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{IA}$ يكافئ $\vec{IA} = 2\vec{AB}$



$t o h(A) = B$

$t o h(B) = t(h(B)) = B'$

$h(B) = B_1$ يكافئ $\vec{AB_1} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

ولدينا $\vec{B_1B'} = \vec{AB}$

إذن $\begin{cases}\vec{AB_1} = \frac{3}{2}\vec{AB}\\ \vec{B_1B'} = \vec{AB}\end{cases}$

لدينا $h(C) = C_1$ و $t o h(C) = t(h(C)) = C'$

ومنه ينتج $\vec{AC_1} = \frac{3}{2}\vec{AC}$ و $\vec{C_1C'} = \vec{AB}$

لدينا $h(D) = D_1$ و $t o h(D) = t(h(D)) = D'$

ومنه ينتج $\vec{AD_1} = \frac{3}{2}\vec{AD}$ و $\vec{D_1D'} = \vec{AB}$

9. مركب تناظرين محوريين

مبرهنة

σ_1 تناظر محوري محوره (Δ_1)، σ_2 تناظر محوري محوره (Δ_2) يختلف عن (Δ_1)

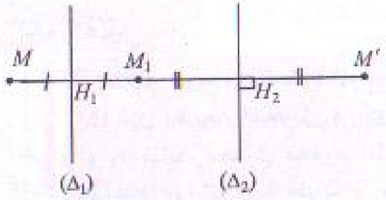
- إذا كان (Δ_1) يوازي (Δ_2) فإن $\sigma_2 o \sigma_1$ إنسحاب.
- إذا كان (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعين فإن $\sigma_2 o \sigma_1$ دوران.

الإثبات

• حالة (Δ_1) يوازي (Δ_2):

لتكن M نقطة كيفية صورتها M_1 بـ σ_1:

$\sigma_1(M) = M'$ يعني $\begin{cases}(MM_1) \perp (\Delta_1)\\ (MM_1) \cap (\Delta_1) = \{H_1\}\\ \vec{H_1M_1} = -\vec{H_1M}\end{cases}$



ولتكن M' صورة M_1 بالتناظر σ_2:

$\sigma_2(M_1) = M'$ تعني $\begin{cases}(M_1M') \perp (\Delta_2)\\ (M_1M') \cap (\Delta_2) = \{H_2\}\\ \vec{H_2M'} = -\vec{H_2M_1}\end{cases}$

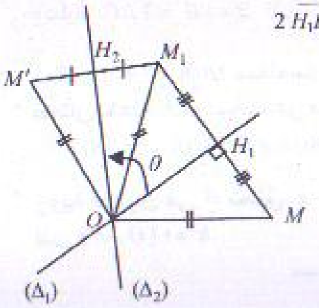
$$\vec{MM'} = \vec{MH_1} + \vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2} + \vec{H_2M'} = \vec{H_1M_1} + \vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2} + \vec{M_1H_2}$$

$$= 2(\vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2}) = 2\vec{H_1H_2}$$

بما أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) متوازيان فإن البعد بينهما ثابت ويساوي H_1H_2

ومنه الشعاع $2\vec{H_1H_2}$ ثابت إذن $\sigma_2 o \sigma_1$ إنسحاب شعاعه $2\vec{H_1H_2}$

• حالة (Δ_1) يقطع (Δ_2):



نضع $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{O\}$

$\sigma_2 o \sigma_1(O) = \sigma_2(O) = O$

إذن O نقطة صامدة بالتحويل $\sigma_2 o \sigma_1$

$\sigma_2 o \sigma_1(M) = \sigma_2(M_1) = M'$

$\sigma_1(M) = M_1$ تعني أن (Δ_1) محور $[MM_1]$

$\sigma_2(M_1) = M'$ تعني أن (Δ_2) محور $[M_1M']$

بما أن (Δ_1) محور القطعة المستقيمة $[MM_1]$ و O تنتمي إلى (Δ_1)

فإن $OM = OM_1$ .... (1)

بما أن (Δ_2) محور $[M_1M']$ و O تنتمي إلى (Δ_2)

فإن $OM' = OM_1$ .... (2)

من (1) و (2) نجد $OM' = OM$

لدينا $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}) + 2k\pi$

$$= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OH_1}) + (\overrightarrow{OH_1}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OH_2}) + (\overrightarrow{OH_2}, \overrightarrow{OM'})$$

$$= 2(\overrightarrow{OH_1}, \overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OH_2}) + 2k\pi$$

$$= 2(\overrightarrow{OH_1}, \overrightarrow{OH_2}) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

بوضع $(\Delta_1, \Delta_2) = \theta_2$ يكون لدينا $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 2\theta + 2k\pi$

إذن التحويل $\sigma_2 o \sigma_1$ هو دوران مركزه النقطة O و زاويته 2θ

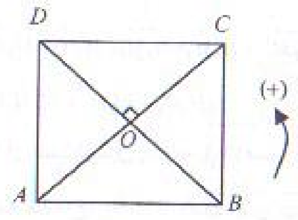
تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع من المستوي الموجه مركزه النقطة O

1) عين طبيعة التحويل $h_1 = g_1 o f_1$ حيث f_1 تناظر محوري محوره (AB) و g_1 تناظر محوري محوره (CD)

2) عين $h_2 = g_2 o f_2$ حيث f_2 تناظر محوري محوره (AC) و g_2 تناظر محوري محوره (BD)

الحل



1) بما أن (AB) يوازي (CD) فإن h_1 هو إنسحاب

نختار النقطة B ونبحث عن صورتها بالتحويل h_1

$h_1(B) = g_1 o f_1(B) = g_1(B) = B'$

حيث B' نظيرة B بالنسبة إلى C

وعليه $\vec{u} = \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BC}$ إذن $h_1 = t_{2\overrightarrow{BC}}$

2) بما أن (AC) و (BD) متقاطعان في O فإن h_2 دوران مركزه النقطة O

نختار نقطة A و نبحث عن صورتها بالتحويل h_2

$h_2(A) = g_2(f_2(A)) = g_2(A) = C$

زاوية الدوران هي θ تحقق $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -\pi$

إذن $h = r(O, -\pi)$

10 - تفكيك دوران و إنسحاب إلى جداء تناظرين محوريين

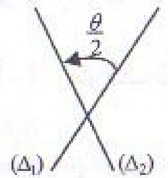
1-10 تفكيك دوران

ليكن $r(O,\theta)$ دوران مركزه النقطة O وزاويته θ .

- إذا كان $\theta = 2k\pi$ فإن $r(O,0) = Id = \sigma_\Delta o \sigma_\Delta$ حيث Δ مستقيم كيفي

- إذا كانت $\theta \neq 2k\pi$ ، ليكن (Δ_1) مستقيم كيفي من المستوي يشمل النقطة O ،

وليكن (Δ_2) صورة (Δ_1) بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\theta}{2}$



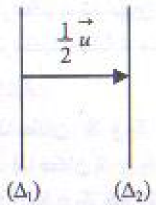
وباستعمال مبرهنة الفقرة (9) نجد $\sigma_{\Delta_2} o \sigma_{\Delta_1} = r(O,\theta)$

وبما أن (Δ_1) كيفي فإن التفكيك ليس وحيدا.

2-10 تفكيك إنسحاب

ليكن $t_{\vec{u}}$ إنسحاب شعاعه $\vec{u} \neq \vec{0}$ وليكن (Δ_1) مستقيما عموديا على $\vec{u}$

وليكن (Δ_2) صورة (Δ_1) بالإنسحاب الذي شعاعه $\frac{1}{2}\vec{u}$



حسب المبرهنة الموجودة في الفقرة (9) فإن $\sigma_{\Delta_2} O \sigma_{\Delta_1} = t_{\vec{u}}$

تمرين تدريبي

في المستوي الموجه $ABCD$ مربع قطراه $[AC]$ ، $[BD]$ حيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

ليكن $r(A, \frac{\pi}{2})$ دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و $\sigma_{(AC)}$ تناظر محوري محوره (AC)

1) نضع $h = \sigma_{(AC)} o r(A, \frac{\pi}{2})$:

أ) عين صورتي النقطتين A و B بالتحويل h .

ب) عين طبيعة التحويل h

2) عين صورة المربع $ABCD$ بالتحويل h

الحل

1) أ) $h(A) = \sigma_{AC}(A) = A$ لأن $r(A, \frac{\pi}{2})(A) = A$ و A تنتمي إلى (AC)

$h(B) = \sigma_{AC}(D) = B$

ب) تعيين طبيعة التحويل h

$r(A, \frac{\pi}{2}) = \sigma_{(AC)} o \sigma_{(AB)}$

وعليه $h=\sigma_{(AC)}\;o\;(\sigma_{(AC)}\;o\;\sigma_{(AB)})=(\sigma_{(AC)}\;o\;\sigma_{(AC)})\;o\;\sigma_{(AB)}$

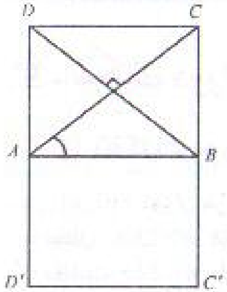
$=Id\;o\;\sigma_{(AB)}=\sigma_{(AB)}$

ومنه h هو تناظر محوري محوره (AB)

2) $h(A)=A$ و $h(B)=B$ و $h(C)=C'$ حيث B منتصف $[CC']$

$h(D)=D'$ حيث A منتصف $[DD']$

إذن صورة المربع $ABCD$ هو المربع $ABC'D'$



11 - تركيب تشابهين كيفين

11-1 مركب تشابهين كيفيين

مبرهنة

تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر.

تركيب تشابهين غير مباشرين هو تشابه مباشر.

تركيب تشابه مباشر و آخر غير مباشر هو تشابه غير مباشر.

الإثبات

إذا كان S_1 و S_2 تشابهان نسبتيهما k_1 و k_2 فإن $S_2\,o\,S_1$ هو تشابه نسبته k_2k_1

- إذا كان S_1 و S_2 تشابهان مباشرين يحفظان الزوايا الموجهة فإن $S_2\,o\,S_1$ يحفظ الزوايا الموجهة

إذن $S_2\,o\,S_1$ هو تشابه مباشر.

إذا كان S_1 و S_2 تشابهان غير مباشرين فإن المركب $S_2\,o\,S_1$ يحفظ الزوايا الموجهة

إذن هو تشابه مباشر.

بنفس الطريقة نبين أن القسم الثالث من المبرهنة.

11-2 مركب تشابهين مباشرين لهما مركز

- المركب $S_2\,o\,S_1$ تشابه مباشر S_1 نسبته k_1 وزاويته θ_1 وكتابته المركبة $Z'=k_1e^{i\theta_1}Z+b_1$

والتشابه المباشر S_2 نسبته k_2 وزاويته θ_2 وكتابته المركبة $Z'=k_2e^{i\theta_2}Z+b_2$

هو تشابه مباشر نسبته k_1k_2 وزاويته $(\theta_1+\theta_2)$ وكتابته المركبة

$Z'=k_1k_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}Z+b_1k_2e^{i\theta_2}+b_2$

- التحويل العكسي لتشابه مباشر S نسبته k و زاويته θ ومركزه I هو التشابه المباشر S^{-1}

نسبته $\frac{1}{k}$ وزاويته $-\theta$ ومركزه I.

ملاحظة

كل تشابه غير مباشر S يكتب على الشكل $S=S_1\,o\,\sigma$ حيث S_1 تشابه مباشر و σ تناظر محوري.

تمرين تدريبي

ABC مثلث من المستوي الموجه، S_A تشابه مباشر مركزه A بحيث $S_A(B)=C$

S_B تشابه مباشر مركزه B بحيث $S_B(C)=A$

S_C تشابه مباشر مركزه C بحيث $S_C(A)=B$

نضع $\sigma=S_C\,o\,S_B\,o\,S_A$ ،

1) حدد $\sigma(B)$

2) استنتج أن σ هو تناظر مركزي مركزه B.

✓ الحل

1) $\sigma(B)=S_C\,o\,S_B\,o\,S_A(B)=S_C\,o\,S_B(C)=S_C(A)=B$

إذن B صامدة بالتحويل σ

2) S_A تشابه مباشر نسبته $\frac{AC}{AB}$ وزاويته $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$

S_B تشابه مباشر نسبته $\frac{BA}{BC}$ زاويته $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

S_C تشابه مباشر نسبته $\frac{CB}{CA}$ وزاويته $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

$\sigma=S_C\,o\,S_B\,o\,S_A=\;S_C\,o\,(S_B\,o\,S_A)$

$S_B\,o\,S_A$ هو تشابه نسبته $\frac{AC}{AB}\times\frac{BA}{BC}$ اي $\frac{AC}{BC}$ وزاويته $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

σ هو تشابه نسبته $\frac{AC}{BC}\times\frac{CB}{CA}$ اي 1 وزاويته

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\pi$

إذن σ تقايس وبما أن هذا التقايس له نقطة صامدة B

فإن σ هو دوران مركزه B وزاويته π (تناظر مركزي مركزه B).

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 • تعيين الكتابة المركبة لتحويل عكسي

T تحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$
بحيث $x'=x-2y+1$ و $y'=2x+y-1$
1) بين أن الكتابة المركبة لـ T هي $Z'=(1+2i)Z+1-i$
2) بين أن النقطة $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل T.
3) بين أن الكتابة المركبة لـ T^{-1} هي $Z'=\frac{1}{5}(1-2i)Z+\frac{1}{5}(1+3i)$

✓ الحل

1) $Z'=x'+iy'=(x-2y+1)+i(2x+y-1)=(x+iy)+2i^2y+2ix+1-i$
$=Z+2i(x+iy)+1-i=Z+2iZ+1-i=(2i+1)Z+1-i$

2) I صامدة بـ T يعني $T(I)=I$

$T(I)=I$ تعني $Z=(2i+1)Z+1-i$ ومنه نجد $Z=\frac{1-i}{1-(2i+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

إذن $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل T.

3) $T(M)=M'$ تكافئ $T^{-1}(M')=M$

$T(M)=M'$ تكافئ $Z'=(1+2i)Z+1-i$ تكافئ $Z=\frac{1}{5}(1-2i)Z'+\frac{1}{5}(1+3i)$

إذن الكتابة المركبة لـ T^{-1} هي $Z'=\frac{1}{5}(1-2i)Z+\frac{1}{5}(1+3i)$

تطبيق 2 دراسة طبيعة مركب دورانين

ليكن r_1 و r_2 دورانين مركزهما O وزاويتيهما $\frac{\pi}{2}$ و θ على الترتيب.
θ عدد حقيقي. عين العدد الحقيقي θ بحيث :
أ) $r_2 o r_1$ تطبيق حيادي Id .
ب) $r_2 o r_1$ تناظر مركزي مركزه النقطة O .

✓ الحل

أ) لكي يكون $r_2 o r_1$ تطبيق حيادي يجب أن يكون $\theta+\frac{\pi}{3}=2k\pi$ لأن $r_2 o r_1(O)=0$

ومنه $\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

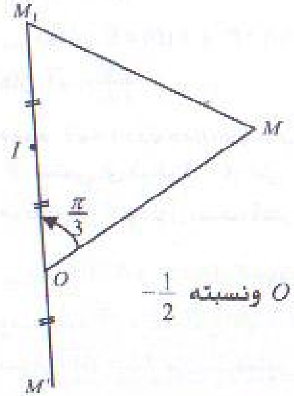
ب) حتى يكون $r_2 o r_1$ تناظرا مركزيا يجب أن يكون $\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+2k\pi$

ومنه $\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

تطبيق 3 التعرف على طبيعة تحويل

O نقطة معطاة من المستوي، نرفق بكل نقطة M مختلفة عن O النقطة M_1
بحيث المثلث OMM_1 متقايس الأضلاع مباشر
لتكن M' نظيرة I منتصف القطعة $[OM_1]$ بالنسبة إلى O.
1-أ) عين التحويل الذي يحول M إلى M_1
ب) عين التحويل الذي يحول M_1 إلى M'
2) بين أن التحويل f الذي يرفق النقطة M بالنقطة M' هو تشابه مباشر.

✓ الحل



1) أ) بما أن $OM=OM_1$ و $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

فإن التحويل الذي يحول M إلى M_1 هو :

دوران r مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب) بما أن M' نظيرة I بالنسبة إلى O

فإن $\overrightarrow{OM'}=-\overrightarrow{OI}$ إذن $\overrightarrow{OM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OM_1}$

ومنه M' صورة M_1 بالتحاكي h الذي مركزه النقطة O ونسبته $-\frac{1}{2}$

2) $M \xrightarrow{r(O,\frac{\pi}{3})} M_1 \xrightarrow{h(O,-\frac{1}{2})} M'$ ، $M \xrightarrow{S} M'$

$S=h(O,-\frac{1}{2})\ o\ r(O,\frac{\pi}{3})=S_1(O,\frac{1}{2},\pi)\ o\ S_2(O,1,\frac{\pi}{3})$

إذن S تشابه مباشر مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}\times 1$ أي $\frac{1}{2}$ وزاويته $\pi+\frac{\pi}{3}$ أي $\frac{4\pi}{3}$

تطبيق 4 صورة دائرة بتشابه مباشر

المستوي الموجه مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، لتكن النقط ،
$A(1,-1)$ ، $B(2,-3)$ ، $C(2,-1)$ وليكن S تشابها مباشرا بحيث :
$S(O)=C$ و $S(A)=B$
1) ا) ما هي نسبة التشابه المباشر S ؟
ب) لتكن D نقطة معرفة بإحداثيتيها $(0,1)$ ونضع $S(D)=E$ ،
- بين أن $CE=\sqrt{2}$
- ثم استنتج أن E تنتمي إلى الدائرة (C_1) يطلب تعيينها ثم ارسمها.
جـ) - بين أن $BE=\sqrt{10}$
- ثم استنتج أن E تنتمي إلى دائرة (C_2) يطلب تحديدها ورسمها.
2) استنتج من الأسئلة السابقة أن إحداثيتي E هي $(1,0)$ أو $(3,0)$.

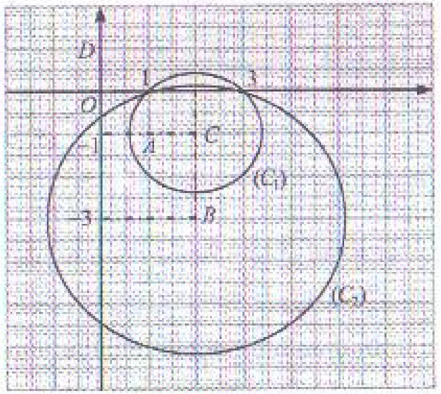
✓ الحل

1) ا) بما أن $S(O)=C$ و $S(A)=B$

فإن نسبة التشابه هي $k=\frac{BC}{OA}$

لكن $BC=2$ و $OA=\sqrt{2}$

إذن $k=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



ب) بما أن $S(D)=E$ و $S(O)=C$

فإن $\frac{CE}{OD}=\sqrt{2}$

ومنه $CE=\sqrt{2}\,OD=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$

E تنتمي إلى الدائرة (C_1) التي

مركزها C وطول نصف قطرها $\sqrt{2}$

جـ) $S(A)=B$ و $S(D)=E$ ومنه ينتج $\frac{BE}{AD}=\sqrt{2}$

ومنه $BE=\sqrt{2}\,AD$ لكن $AD=\sqrt{5}$ إذن $BE=\sqrt{10}$

بما أن $BE=\sqrt{10}$ فإن E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$.

2) من السؤال 1) E تنتمي إلى $(C_1)\cap(C_2)$

إذا كانت إحداثيتا E هي $(1,0)$ فإن $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{CB})\neq(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{CE})$ (مختلفين في الاتجاه).
ومنه إحداثيتا E هي $(3,0)$.

تطبيق 5 تفكيك تحويل نقطي إلى مركب تحويلين

المستوي الموجه مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، و T تحويل نقطي كتابته المركبة $Z'=i\overline{Z}$
1) بين أن $T=r\,o\,f$ حيث f تناظر محوري محوره محور الفواصل و r دوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$
2) هل نستطيع التأكيد أن $r\,o\,f=f\,o\,r$ ؟
3) A نقطة لاحقتها $1+i$ ،
ا) ما هي لاحقة $T(A)$ ؟ ب) استنتج أن T هو تناظر يطلب تعيين محوره.

✓ الحل

1) الكتابة المركبة لـ f هي $Z'=\overline{Z}$ والكتابة المركبة لـ r هي $Z'=e^{i\frac{\pi}{2}}Z=i\,Z$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "(C_1)"'] & M_1 \arrow[r, "r"] & M' \end{tikzcd}$$

$Z_1=\overline{Z}$ و $Z'=i\,Z_1$ حيث Z_1 لاحقة M_1 و Z' لاحقة M' عندئذ :

$Z'=i\,Z_1=i(\overline{Z})$ إذن $T=r\,o\,f$

2)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "f\,o\,r"'] & M_2 \arrow[r, "f"] & M'' \end{tikzcd}$$

$Z_2=i\,Z$ و $Z''=\overline{Z_2}$ ومنه $Z''=\overline{i\,Z}=-i\,\overline{Z}$ إذن $f\,o\,r\neq r\,o\,f$

3) ا) لاحقة $T(A)$ هي $i\,\overline{Z_A}$

$i\,\overline{Z_A}=i\,\overline{(1+i)}=i(1-i)=1+i$ ومنه A صامدة بالتحويل T

ب) بما أن T ليس حياديا وله نقطتان صامدتان A و O

فإن T تناظر محوري محوره المستقيم (OA).

تطبيق 6 تعيين العناصر المميزة لتشابه مباشر

S تشابه مباشر كتابته المركبة $Z'=(1+i)Z+2$، الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z'.
1) ما هي نسبة S ؟ B نقطة لاحقتها $2i$ ما هي لاحقة $S(B)$ ؟
2) ليكن Z_1 لاحقة $\overrightarrow{BM}$ و Z_2 لاحقة $\overrightarrow{MM'}$ بين أن $Z_2=i\,Z_1$، ثم استنتج أن المثلث BMM' قائم ومتساوي الساقين.

✓ **الحل**

1) $a=1+i$ و $b=2$ إذن نسبة التشابه المباشر S هي $|a|=\sqrt{2}$

لاحقة النقطة $S(B)$ هي $Z'_B=(1+i)(2i)+2=2i$

إذن B صامدة بالتحويل S.

2) لدينا $Z_1=Z-Z_B=Z-2i$ و $Z_2=Z'-Z=i(Z-2i)$ ومنه ينتج $Z_2=iZ_1$

بما أن $Z_2=iZ_1$ فإن $MM'=MB$ و $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{MM'})=\frac{\pi}{2}$

وبالتالي المثلث BMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

تطبيق 7 التشابه المباشر والمثلثات المتشابهة

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر. لتكن النقط: A ، B ، C ، A' ، B' لواحقها على الترتيب i ، -1 ، $-2i$ ، $5+i$ ، $1+i$

وليكن S التشابه المباشر بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$

1) عين الكتابة المركبة لـ S.

2) عين لاحقة C' بحيث يكون المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهين في الاتجاه المباشر.

✓ **الحل**

1) الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=aZ+b$

$S(A)=A'$ تكافئ $5+i=a(i)+b$ ...... (1)

$S(B)=B'$ تكافئ $1+i=a(-1)+b$ ...... (2)

بطرح (2) من (1) نجد $a=2(1-i)$ ثم نعوض a في (2) نجد $b=3-i$

إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=2(1-i)Z+3-i$

2) حتى يكون ABC و $A'B'C'$ متشابهين في الاتجاه المباشر يجب أن يكون $S(C)=C'$

$S(C)=C'$ تكافئ $Z_{C'}=2(1-i)(-2i)+3-i$ تكافئ $Z_{C'}=-1-5i$

تطبيق 8 تعيين العناصر المميزة لتشابهات مباشرة

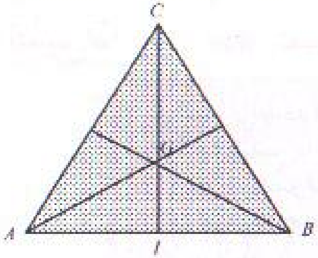
ABC مثلث متقايس الأضلاع مباشر من المستوي الموجه ومركز ثقله النقطة G ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$

عين نسبة وزاوية كل تشابه من التشابهات المباشرة التالية:

أ) S_1 مركزه النقطة B و $S_1(I)=C$.

ب) S_2 مركزه النقطة I و $S_2(A)=C$.

✓ **الحل**



أ) S_1 نسبته 2 لأن $\frac{BC}{BI}=2$ ، $BC=2BI$

وزاويته θ_1 حيث $\theta_1=(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{3}$

إذن $S_1(B,2,-\frac{\pi}{3})$

ب) S_2 نسبته $\frac{IC}{I}=\frac{\sqrt{3}\,IA}{IA}=\sqrt{3}$ وزاويته θ_2

حيث $\theta_2=(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC})=-\frac{\pi}{2}$ إذن $S_2(I,\sqrt{3},-\frac{\pi}{2})$

تطبيق 9 تعيين صور نقط بتشابه مباشر

في المستوي الموجه نعتبر المعين $ABCD$ الذي مركزه النقطة O بحيث:

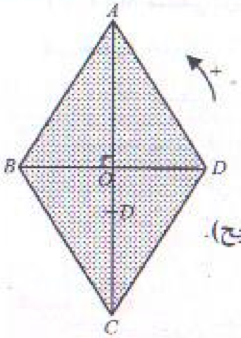
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}$ وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وبحيث $S(A)=B$

1) حدد نسبة وزاوية التشابه S.

2) بين أن صورة النقطة O هي منتصف $[BC]$

3) بين أن صورة النقطة D هي مركز ثقل المثلث BCD.

✓ **الحل**



1) نسبة التشابه S هي $k=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{\sqrt{3}\,BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

وزاويته θ تحقق $\theta=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{6}$

2) بما أن صورة $[AC]$ هي $[BC]$ و O منتصف $[AC]$ فإن صورة النقطة O هي منتصف $[BC]$ (لأن التشابه المباشر يحفظ المرجح).

3) لتكن D' صورة D بالتشابه S إذن $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD'})=\frac{\pi}{6}$

ومنه ينتج أن D' تنتمي إلى المستقيم (AC)

$S(C)=C$ و $S(D)=D'$ ومنه ينتج $CD'=\frac{CD}{\sqrt{3}}$

لدينا $\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{CD'}{CD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه ينتج $\frac{CD'}{CD}\times\frac{BC}{AC}=\frac{1}{3}$ أي $CD'=\frac{1}{3}AC$

لكن $CO=\frac{1}{2}AC$ ومنه $CD'=\frac{2}{3}CO$ إذن D' هي مركز ثقل المثلث BCD.

تطبيق 10 تعيين صورة مستقيم ودائرة بتشابه مباشر

في المستوي الموجه المزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$، الكتابة المركبة للتشابه المباشر S هي $Z'=(1-i)Z+2-i$

1) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

2) اوجد معادلة صورة كل من المستقيم D ذو المعادلة $x+y-2=0$

والدائرة (C) ذات المعادلة $(x+\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=9$ بالتشابه المباشر S

✓ الحل

1) لدينا $a=1-i$ و $b=2-i$

بما ان $|a|=\sqrt{2}$ و $arg(a)=-\frac{\pi}{4}$ فإن S نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ ومركزه I النقطة الصامدة بالتحويل S.

$S(I)=I$ تكافئ $Z=(1-i)Z+2-i$ تكافئ $Z=-1-2i$ ومنه $I(-1,-2)$

2) نبحث عن التحويل العكسي لـ S ؛

$S(M)=M'$ تكافئ $S^{-1}(M')=M$

$S(M)=M'$ يكافئ $Z'=(1-i)Z+2-i$ يكافئ $\begin{cases} x=\frac{x'-y'-3}{2} \\ y=\frac{x'+y'-1}{2} \end{cases}$

$M(x,y)$ تنتمي إلى (D) تكافئ $\frac{x'-y'-3}{2}+\frac{x'+y'-1}{2}-2=0$ تكافئ $x'=4$

اذن صورة (D) هي (D') معادلته $x=4$

$M(x,y)$ تنتمي إلى (C) يكافئ $x^2+y^2-9=0$ يكافئ $(\frac{x'-y'}{2})^2+(\frac{x'+y'}{2})^2=9$

وبالتبسيط نجد $x'^2+y'^2=18$

ومنه صورة (C) هي (C') مركزها $O(0,0)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{18}$

تطبيق 11 صورة متوازي اضلاع بتشابه مباشر

في المستوي الموجه نعتبر متوازي الأضلاع $ABCD$ بحيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}$

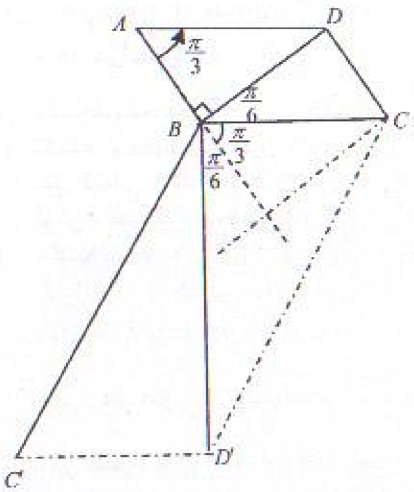
والمثلث ABD قائم في B.

وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B بحيث $S(A)=C$

1) عين العناصر المميزة لهذا التشابه

2) انشئ صورة $ABCD$ بالتشابه S.

✓ الحل



1) $\begin{cases} S(B)=B \\ S(A)=C \end{cases}$ ومنه ينتج $k=\frac{BC}{BA}$

لكن $BC=AD$ و $AD=\frac{AB}{\cos\frac{\pi}{3}}=2AB$

إذن $k=\frac{AD}{AB}=\frac{2AB}{AB}=2$

وزاويته θ تحقق $\theta=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

$\theta=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})$

$=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{2}{3}\pi$

2) لدينا $S(A)=C$ و $S(B)=B$

$S(D)=D'$ يكافئ $\begin{cases} BD'=2BD \\ (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD'})=-\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$S(C)=C'$ يكافئ $\begin{cases} BC'=2BC \\ (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC'})=-\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

تطبيق 12 تحديد التشابه

في المستوي المزود بمعلم متعامد متجانس مباشر $(o,\vec{i},\vec{j})$، A نقطة لاحقتها a، نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M_1 ذات اللاحقة $Z_1=iZ$

والنقطة M_2 ذات اللاحقة Z_2 حيث $Z_2=Z+a$

1) A و M معطاة انشئ M_1 و M_2 مبررا إنشائك.

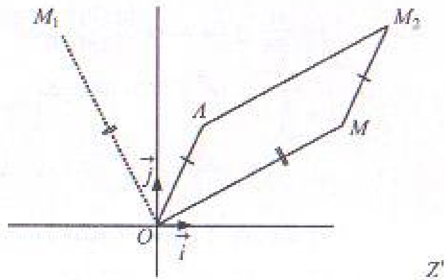
2) ليكن T_1 التحويل الذي يرفق النقطة M بالنقطة M_1 و T_2 يرفق النقطة M بالنقطة M_2. بين أن النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل $T_1 o T_2$ هي صورة A بتشابه يطلب تعيينه.

3) ليكن S تحويلا يرفق بكل نقطة M النقطة M' بحيث $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

ا) بين ان S هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

ب) بين ان المركز ω للتشابه المباشر S هو صورة A بدوران يطلب تعيينه

✓ الحل



1) M_1 هي صورة M بدوران $r(O,\frac{\pi}{2})$
و M_2 هي صورة M
بانسحاب شعاعه $\vec{u}=\vec{OA}$ لاحقته a

2) الكتابة المركبة للتحويلين T_1 و T_2 هي :
على التوالي $Z'=iZ$ و $Z'=Z+a$
لتكن I صامدة بالتحويل $T_1 o T_2$.
الكتابة المركبة لـ $T_1 o T_2$ هي $Z'=iZ+ia$
$T_1 o T_2(I)=I$ يكافئ $Z=iZ+ia$
ومنه $Z=(\frac{-1+i}{2})a$
إذن I هي صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) أ) من المساواة $\vec{OM'}=\vec{OM_1}+\vec{OM_2}$ نجد $Z'=Z_1+Z_2$ أي $Z'=(i+1)Z+a$
إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=(i+1)Z+a$
ومنه S هو تشابه مباشر نسبته $k=|i+1|=\sqrt{2}$ وزاويته $arg(i+1)=\frac{\pi}{4}$
ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $Z_\omega=ia$
ب) ω هي صورة A بدوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

تطبيق 13 — البرهان بواسطة التشابه

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$
لتكن النقط A، B، C، A'، B'، C' لواحقها على التوالي :
$-i$، 1، $1+i$، $2+i$، $3i$، $-2+3i$
بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان في الاتجاه المباشر.

✓ الحل

ليكن S تشابها مباشرا يحول A إلى A' و B إلى B' و C إلى C'
الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=aZ+b$
$S(A)=A'$ تكافئ $2+i=a(i)+b$ ..... (1)
$S(B)=B'$ تكافئ $3i=a+b$ ..... (2)
بطرح (2) من (1) نجد $2-2i=a(-1-i)$ ومنه نجد $a=2i$

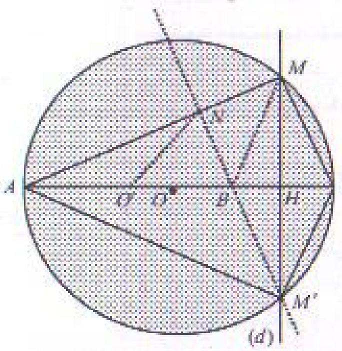
نعوض a في (2) نجد $b=i$
إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=2iZ+i$
السؤال المطروح هل $S(C)=C'$ ؟
لاحقة $S(C)$ هي $2i(1+i)+i$ أي $-2+3i$
إذن $S(C)=C'$ ومنه فإن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان في الاتجاه المباشر.

تطبيق 14 — البرهان باستعمال التشابه

A، B، C ثلاث نقاط على استقامة واحدة بهذا الترتيب بحيث $AB=6$ و $BC=4$
(C) هي الدائرة التي قطرها $[AC]$ و (d) هو محور القطعة $[BC]$ يقطع (C)
في M و M' بحيث $(\vec{MA},\vec{MC})=\frac{\pi}{2}$، المستقيم $(M'B)$ يقطع (MA) في N.
وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه N وبحيث $S(M)=B$
1) بين أن زاوية S هي $-\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{3}{4}$.
2- أ) ما هي صورة (d) بـ S ؟ ما هي صورة $(M'N)$ بـ S
ب) استنتج أن $S(M')=A$
3) ما هي صورة H تقاطع (MM') مع (BC) بالتحويل S ؟ ثم استنتج أن المستقيم (NH) مماس للدائرة التي قطرها $[AB]$

✓ الحل

1) $C\hat{M'}M=M\hat{A}C$.......(1) (محيطيتان تحصران نفس القوس)
$C\hat{M'}M=M\hat{M'}B$ ....(2)
من (1) و (2) نجد $M\hat{A}C=M\hat{M'}B$......(3)



وبما أن $C\hat{B}M'=N\hat{B}A$ و $M\hat{M'}B+C\hat{B}M'=\frac{\pi}{2}$
فإن $M\hat{A}C+N\hat{B}A=\frac{\pi}{2}$
وعليه يكون $B\hat{N}A=\frac{\pi}{2}$
زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه N
هي $(\vec{MN},\vec{BN})=-\frac{\pi}{2}$
ونسبته $k=\frac{BN}{MN}$.
لدينا $OM^2=OH^2+HM^2$ حيث O مركز الدائرة المعطاة
ومنه $HM=4$

لدينا $\sin\alpha = \frac{BN}{AB} = \frac{BN}{6}$ ......(1).

$\sin\alpha = \frac{MN}{MM'} = \frac{MN}{2MH} = \frac{MN}{8}$ ......(2)

من (1) و (2) نجد $k = \frac{BN}{MN} = \frac{3}{4}$.

2) أ) ـ بما أن صورة المستقيم (d) هو مستقيم يعامده (زاوية التشابه هي $-\frac{\pi}{2}$) ويشمل النقطة B فإن صورة (d) هي (AC) .

ـ بما أن صورة $(M'N)$ هو مستقيم يعامده و يشمل N فإن صورة $(M'N)$ هو المستقيم (AN) .

ب) $S((MM'))=(AB)$ و $S((M'N))=(AM)$ و $(MM')\cap(M'N)=\{M'\}$ و $(AM)\cap(AB)=\{A\}$

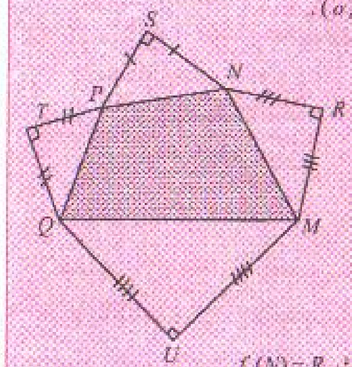
إذن صورة M' هي A .

3) بما أن $S([MM'])=[AB]$ و H منتصف $[MM']$ فإن صورتها هي منتصف $[AB]$ (لأن التشابه يحفظ المرجح).

بما أن $S(H)=O'$ حيث O' منتصف $[AB]$ فإن $(\overrightarrow{NH}, \overrightarrow{NO'}) = -\frac{\pi}{2}$

وبما أن N تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن (NH) مماس لها .

تطبيق 15 إثبات التعامد بواسطة التشابه



نزود المستوي بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

$MNPQ$ رباعي في الاتجاه المباشر ،

المثلثات MRN ، NSP ، PTQ ، QUM قائمة ومتساوية الساقين خارجية بالنسبة إلى الرباعي $MNPQ$ وذات اتجاه مباشر كما في الشكل.

نريد إثبات أن $SU = TR$ وأن المستقيمين (SU) و (TR) متعامدان

لتكن m ، n ، p ، q لواحق النقط M ، N ، P ، Q على الترتيب .

1) f هو تشابه مباشر مركزه M بحيث $f(N)=R$

أ) عين نسبة وزاوية f .

ب) لتكن r لاحقة النقطة R بين أن $r=(\frac{1+i}{2})m+(\frac{1-i}{2})n$

نقبل انه لدينا كذلك $s=(\frac{1+i}{2})n+(\frac{1-i}{2})p$ حيث s لاحقة S

$t=(\frac{1+i}{2})p+(\frac{1-i}{2})q$ حيث t لاحقة T

$u=(\frac{1+i}{2})q+(\frac{1-i}{2})m$ حيث u لاحقة U .

2) بين أن $u-s=i(t-r)$ ، ثم استنتج أن $SU=TR$ و $(TR)\perp(SU)$

✓ الحل

1) أ) لدينا $f(N)=R$ و $f(M)=M$ ومنه نسبة التشابه المباشر f هي $k=\frac{RM}{NM}$

المثلث NRM قائم في R وحسب نظرية فيتاغورث لدينا $NM^2 = NR^2 + MR^2 = 2MR^2$

وبالتالي $NM=\sqrt{2}MR$

إذن $k=\frac{RM}{\sqrt{2}MR}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية التشابه f هي $\theta=(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MR}) = -\frac{\pi}{4}$

ب) الكتابة المركبة لـ f هي $Z'=\frac{1}{2}(1-i)Z+b$

$f(M)=M$ تعني أن $m=\frac{1}{2}(1-i)m+b$ ......(1).

$f(N)=R$ تعني أن $r=\frac{1}{2}(1-i)n+b$ ......(2)

بطرح (2) من (1) نجد $m-r=\frac{1}{2}(1-i)m-\frac{1}{2}(1-i)n$ ومنه $r=(\frac{1+i}{2})m+(\frac{1-i}{2})n$

2) $u-s=(\frac{1+i}{2})(q-n)+(\frac{1-i}{2})(m-p)$ ......(3)

$t-r=(\frac{1+i}{2})(p-m)+(\frac{1-i}{2})(q-n)$

$i(t-r)=(\frac{1-i}{2})(m-p)+(\frac{1+i}{2})(q-n)$ ......(4).

من (3) و (4) نجد $u-s=i(t-r)$

بما أن $|u-s|=US$ و $|t-r|=RT$ ولكن $|u-s|=|t-r||i|$ إذن $RT=US$

وبما أن $\frac{u-s}{t-r}=i$ و $arg(i)=\frac{\pi}{2}$ فإن $(\overrightarrow{RT}, \overrightarrow{SU})=\frac{\pi}{2}$ وعليه $(TR)\perp(SU)$

تطبيق 16 تعيين المحل الهندسي

في المستوي الموجه نعتبر دائرتين (C) و (C') مركزيهما على التوالي O و O' ونصف قطريهما R متماستين خارجيا عند A .

نرفق بكل نقطة M من (C) النقطة M' من (C') بحيث $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'})=\frac{\pi}{2}$

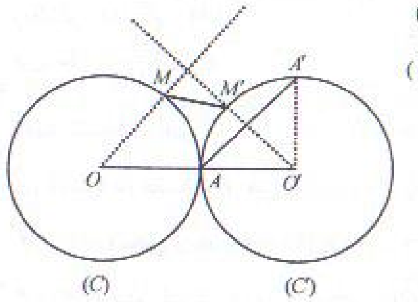
1) بين انه يوجد دوران يحول (C) إلى (C') زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه ω يطلب تعيينه هندسيا معينا صورة M بهذا الدوران.

2- أ) بين أن I منتصف $[MM']$ هي صورة M بالتشابه المباشر f مركزه ω معينا عناصره المميزة.

ب) استنتج المحل الهندسي لـ I لما M تمسح (C)

3) اعط صورة O بالتشابه f وقيسا للزاوية $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AI})$.

✓ الحل



1) بما أن $A \in (C)$ فإن صورتها A' تنتمي إلى (C')

بما أن $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \frac{\pi}{2}$ فإن $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}) = \frac{\pi}{2}$

حيث A' صورة A بدوران زاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن ω مركز هذا الدوران

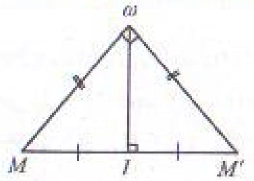
هي تقاطع محوري $[OO']$ و $[AA']$

وبما أن $\begin{cases} OM = O'M' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ فإن:

M' صورة M بالدوران الذي مركزه ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$

حيث O' صورة O بهذا الدوران.

2) أ) بما أن المثلث $\omega MM'$ قائم في ω ومتساوي الساقين فإن (ωI) هو المنصف الزاوية $M\omega M'$



وعليه $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega I}) = \frac{\pi}{4}$

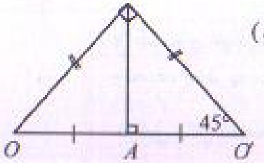
نسبة التشابه $k = \frac{\omega I}{\omega M}$

لدينا $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\omega I}{\omega M} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن يوجد تشابه مباشر مركزه النقطة ω ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ يحول M إلى I

ب) لما M تمسح دائرة (C) فإن I تمسح دائرة (C'') صورة (C) بالتشابه f.

حيث (C'') طول نصف قطرها $R\frac{\sqrt{2}}{2}$



3) لدينا $\frac{\omega A}{\omega O} = \frac{\omega A}{\sqrt{2}\,\omega A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ......(1) و $(\overrightarrow{\omega O}, \overrightarrow{\omega A}) = \frac{\pi}{4}$ ......(2)

من (1) و (2) نستنتج أن A هي صورة O بالتشابه المباشر f.

بما أن $f(O) = A$ و $f(M) = I$ فإن $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{4}$.

تطبيق 17 تعيين المحل الهندسي

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه.

M نقطة تمسح دائرة (C) معادلتها $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

تنشئ المثلث MOM' القائم في O والمتساوي الساقين بحيث $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}$

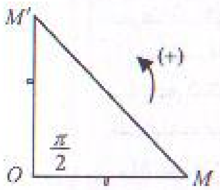
ولتكن I منتصف $[MM']$

1) عين معادلة المجموعة (C') مجموعة النقط M' لما M تمسح (C)

ومجموعة النقط Γ مجموعة النقط I لما M يمسح (C)

2) بين أن نقط تقاطع (C) و (C') هي نقط من المجموعة Γ.

✓ الحل

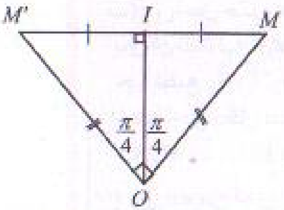


1) - بما أن MOM' مثلث قائم وتساوي الساقين فإن:

M' صورة M بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

وبما أن M تمسح الدائرة (C) ذات المركز A فإن:

M' تمسح (C') صورة (C) بالدوران $r(O, \frac{\pi}{2})$ حيث أن



مركزها هو A' صورة A بالدوران $r(O, \frac{\pi}{2})$.

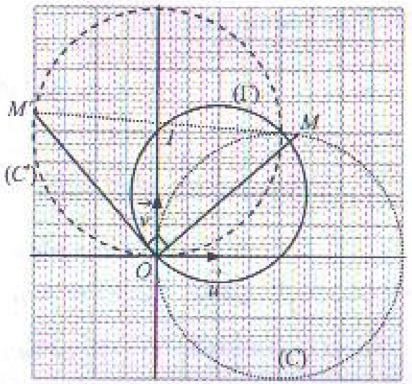
ونصف قطرها 2 .

لدينا $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$

لتكن $Z_{A'}$ لاحقة A' صورة A ذات اللاحقة Z_A

لدينا $Z_{A'} = i\,Z_A = 2i$ ومنه $A'(0, 2)$

إذن $(C') : x^2 + (y-2)^2 = 4$



- النقطة I صورة M بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته:

$k = \frac{OI}{OM} = \frac{OI}{\sqrt{2}OI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

بما أن M تمسح (C) فإن I تمسح الدائرة Γ صورة (C) بالتشابه المباشر $S(O, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$

وبحيث نصف قطرها $2\frac{\sqrt{2}}{2}$

اي $\sqrt{2}$ ومركزها A'' صورة A بـ S.

$$Z_{A'} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z_A = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$$

إذن $(\Gamma) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

2) نقط تقاطع (C) و (C') إحداثياتها $(2,2)$ B ، $O(0,0)$ وهذه النقط تنتمي إلى Γ .

تطبيق 18 المتتاليات و التشابه

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

S تشابه مباشر كتابته المركبة $Z' = \frac{1}{2} i Z + \frac{1-3i}{2}$

1) عين العناصر المميزة لـ S (المركز ω والزاوية θ والنسبة k)

2) لتكن M_0 نقطة لاحقتها $1+4\sqrt{3}+3i$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نعرف متتالية النقط M_{n+1} بالكيفية التالية : $M_{n+1} = S(M_n)$

أ) احسب ωM_n بدلالة n

ب) علم النقطة M_0 ثم النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4

جـ) ابتداء من أي رتبة n_0 يكون لدينا من أجل كل $n \geq n_0$ ، M_n تنتمي إلى قرص مركزه ω ونصف قطره $r = 0{,}05$

3- أ) احسب M_0M_1 .

ب) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $d_n = M_n M_{n+1}$

بين أن المتتالية (d_n) هندسية ثم عين حدها الأول وأساسها.

جـ) نضع $L_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n$ ، احسب L_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (L_n).

4) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نسمي G_n مرجح الجملة $(M_0, 1)$ ، .... ، $(M_n, 1)$

أ) بين أنه من أجل $n > 0$ يكون $\omega G_n < \frac{16}{n+1}$

ب) استنتج الوضعية النهائية للنقطة G_n لما n يؤول إلى $(+\infty)$.

✓ الحل

1) S تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $Z_\omega = \dfrac{\frac{1-3i}{2}}{1-\frac{1}{2}i}$

ومنه $Z_\omega = 1 - i$

2) أ) $M_{n+1} = S(M_n)$ يكافئ $Z_{n+1} = \frac{1}{2} i Z_n + \frac{1-3i}{2}$

يكافئ $Z_{n+1} - (1-i) = \frac{1}{2} i (Z_n - (1-i))$

ومنه ينتج $\omega M_{n+1} = \frac{1}{2} \omega M_n$

ومنه (ωM_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\omega M_0 = 8$

إذن $\omega M_n = 8 \times (\frac{1}{2})^n$

جـ) M_n تنتمي إلى قرص مركزه ω ونصف قطره $0{,}05$ معناه $\omega M_n \leq 0{,}05$

$\omega M_n \leq 0{,}05$ يكافئ $8(\frac{1}{2})^n \leq \frac{5}{100}$ يكافئ $n \geq 7{,}34$

ومنه قيمة n_0 المطلوبة هي 8 .

3) أ) لدينا $M_1 M_0^2 = \omega M_0^2 + \omega M_1^2 = \omega M_0^2 + \frac{1}{4} \omega M_0^2$ ومنه $M_0 M_1^2 = \frac{5}{4} \omega M_0^2$

إذن $M_1 M_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega M_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 8 = 4\sqrt{5}$

ب) $d_n = M_n M_{n+1}$

$$M_{n+1}M_n^2 = \omega M_n^2 + \omega M^2_{n+1} = \omega M_n^2 + \frac{1}{4} \omega M_n^2 = \frac{5}{4} \omega M_n^2$$

ومنه $M_{n+1} M_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega M_n$

إذن $M_{n+1} M_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 8 \times (\frac{1}{2})^n = 4\sqrt{5} (\frac{1}{2})^n$

وبالتالي d_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $4\sqrt{5}$

جـ) $L_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n = d_0 \times \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 8\sqrt{5}(1-(\frac{1}{2})^n)$

$$\lim_{n \to +\infty} d_n = \lim_{n \to +\infty} 8\sqrt{5}(1-(\frac{1}{2})^n) = 8\sqrt{5}$$

4) أ) $\overrightarrow{G_nM_0} + \overrightarrow{G_nM_1} + \dots + \overrightarrow{G_nM_n} = \vec{0}$

$$(\overrightarrow{G_n\omega} + \overrightarrow{\omega M_0}) + (\overrightarrow{G_n\omega} + \overrightarrow{\omega M_1}) + \dots + (\overrightarrow{G_n\omega} + \overrightarrow{\omega M_n}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\omega G_n} = \frac{1}{n+1}\left[\overrightarrow{\omega M_0} + \dots + \overrightarrow{\omega M_n}\right]$$

$$\left\|\overrightarrow{\omega G_n}\right\| \leq \frac{1}{n+1}\left[\left\|\overrightarrow{\omega M_0}\right\| + \dots + \left\|\overrightarrow{\omega M_n}\right\|\right]$$

$$\leq \frac{8}{n+1}\left[(\frac{1}{2})^0 + \dots + (\frac{1}{2})^n\right]$$

$$\leq \frac{16}{n+1}\left[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}\right]$$

إذن $0 \leq \left\|\overrightarrow{\omega G_n}\right\| \leq \frac{16}{n+1} \leq \frac{16}{n+1}$

ب) بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{16}{n+1} = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} \left\| \overrightarrow{\omega G_n} \right\| = 0$

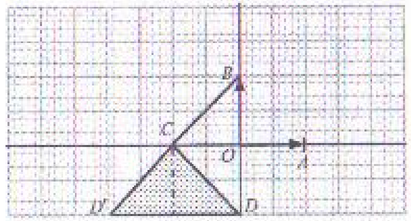
ومنه الوضعية النهائية لـ G_n هي النقطة ω

تطبيق 19 التقايسات

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر.
نعتبر النقط A ، B ، C ، D لواحقها على التوالي 1 ، i ، -1 ، $-i$.
r_1 ، r_2 و r_3 دورانات مراكزها D ، B و C وزواياها $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{\pi}{2}$ على التوالي.
نضع $T = r_1 o\, r_2 o\, r_3$.
1) عين طبيعة T ثم استنتج عناصره المميزة.
2) عين طبيعة والعناصر المميزة للتحويل $r_3 o\, T$

✓ الحل

1) بما أن $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$ فإن T إنسحاب
ولتعيين شعاعه نختار نقطة
ونبحث عن صورتها :
$T(D) = r_1 o\, r_2 o\, r_3 (D)$
$= r_1 o\, r_2 o\, (B) = r_1 (B) = D'$



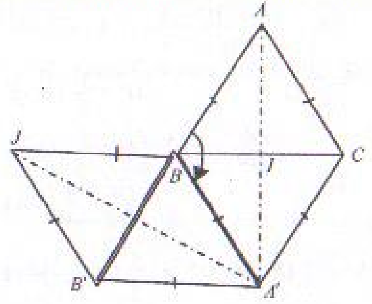
شعاع الأنسحاب هو $\vec{w} = \overrightarrow{DD'}$ أي $\vec{w} = -2\vec{u}$

2) $r_3 o\, T$ دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$
$r_3 o\, T(D) = r_3 (D') = D$ إذن $r_3 o\, T$ مركزه النقطة D .

تطبيق 20 تعيين العناصر المميزة لمركب دورانين

في المستوي الموجه. ABC مثلث متقايس الأضلاع بحيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.
ولتكن I منتصف $[BC]$ و J نقطة بحيث B منتصف $[JC]$.
r_1 الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ، و r_2 دوران مركزه B وزاويته $\frac{2\pi}{3}$
نضع $f = r_2 o\, r_1$ ولتكن A' و B' صورتي A و B بالتحويل f .
1) بين أن I منتصف $[AA']$ و B منتصف $[AB']$.
2) بين أن f دوران ثم عين مركزه وزاويته.

✓ الحل



1) لدينا :
$f(A) = r_2 o\, r_1 (A) = r_2 (A) = A'$
$f(B) = r_2 o\, r_1 (B) = r_2 (C) = B'$
بما أن $BA = BA'$ فإن :
(BI) محور القطعة $[AA']$
و $[BC]$ محور $[AA']$
وبالتالي تقاطعهما هو I
إذن I تنتمي إلى $[AA']$ وبنفس الكيفية نبين أن B منتصف $[AB']$

2) $\theta_1 + \theta_2 = -\frac{\pi}{3}$ ومنه f دوران زاويته $-\frac{\pi}{3}$ ومركزه هو تقاطع محور $[AA']$ و $[BB']$
بما أن $A'BB'J$ معين فإن محور $[BB']$ هو $[A'J]$ ومحور $[AA']$ هو $[JC]$
إذن J هي مركز الدوران $r_2 o\, r_1$.

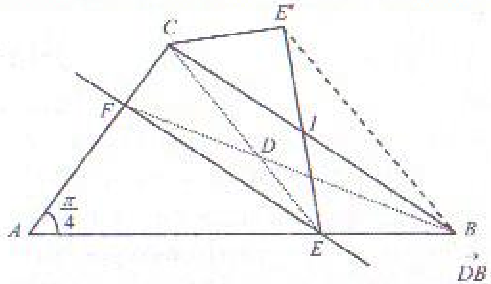
تطبيق 21 التحاكي و الإنسحاب

في المستوي الموجه نعتبر النقطتين A و B ولتكن E نقطة بحيث :
$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ $(AB = 16\,cm)$

C نقطة مختلفة عن A بحيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$
المستقيم الموازي لـ (BC) و المار بالنقطة E يقطع (AC) في F .
لتكن I و J منتصفي $[BC]$ و $[EF]$ على الترتيب
و D نقطة تقاطع (EC) و (BF)
نسمي h_A التحاكي الذي مركزه A بحيث $h_A(B) = E$
و h_D تحاكي الذي مركزه D بحيث $h_D(E) = C$
1-أ) عين $h_A(C)$ و $h_D(F)$
ب) استنتج العناصر المميزة لـ $h_D o\, h_A$ و $h_A o\, h_D$
2) لتكن E' صورة E بـ h_A و E'' صورة E' بـ h_D .
أنشئ E' و E'' مبررا إنشائك.
3) بين أن الرباعي $BECE''$ متوازي أضلاع .

✓ الحل

1) أ) من المعطيات نستنتج أن التحاكي h_A نسبته $\frac{3}{4}$



$h_A(C)=F$ لأن $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{3}{4}$

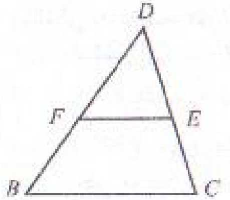
أي $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

- لدينا $\frac{DF}{DB}=\frac{DE}{DC}=\frac{EF}{CB}=\frac{3}{4}$

ومنه $\frac{DF}{DB}=\frac{3}{4}$

وبالتالي $\overrightarrow{DF}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$ أي $\overrightarrow{DB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{DF}$

إذن صورة F بالتحاكي h_D الذي نسبته $-\frac{4}{3}$ هي النقطة B.



ب) بما أن جداء النسبتين $\frac{3}{4}\times(-\frac{4}{3})=-1$ فإن :

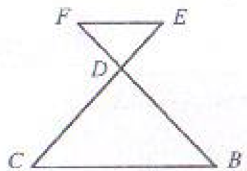
$h_D o h_A$ هو تناظر مركزي.

$h_D o h_A(B)=h_D(E)=C$

وبالتالي مركز $h_D o h_A$ هو منتصف $[BC]$ أي النقطة I.

$h_A o h_D$ تناظر مركزي

$h_A o h_D(F)=h_A(B)=E$



ومنه مركز $h_A o h_D$ هو منتصف $[FE]$ أي النقطة J.

2) لدينا $h_A(E)=E'$ و $E''=h_D(E)$

و $\overrightarrow{AE'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ و $E''=h_D o h_A(E)$

إذن E'' نظيرة E بالنسبة إلى I

3) بما أن قطري الرباعي $BECE''$ متناصفان ومتقاطعان في I فإن $BECE''$ متوازي أضلاع.

تطبيق 22 التشابه المباشر وتفكيك الدوران

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب a ، b ، c و d

بحيث $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1-أ) اعط الشكل الأسي لـ c والشكل الجبري لـ d

ب) مثل النقط A ، B ، C و D ، ثم برهن أن الرباعي $OACB$ معين.

2) برهن أن النقط D ، A و C على استقامة واحدة

3) عين الزاوية θ والنسبة k للتشابه المباشر S ذو المركز O الذي يحول A إلى C

4) نرمز بـ F و G إلى صورتي D و C بالتشابه المباشر S على التوالي.

بين أن النقط F ، C و G على استقامة واحدة.

5) عين اللاحقة f للنقطة F

6) نعتبر التحويل النقطي φ الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z

النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z'=e^{-i2\frac{\pi}{3}}\overline{Z}+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

من أجل كل مستقيم (Δ) من المستوي نرمز بـ $\sigma_{(\Delta)}$ إلى التناظر المحوري ذو المحور (Δ)

أ) ليكن r التحويل الذي يرفق بكل نقطة M_1 ذات اللاحقة Z_1 النقطة M_1'

ذات اللاحقة Z_1' بحيث $Z_1'=e^{-\frac{2\pi}{3}i}Z_1+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

عين طبيعة r ثم حدد عناصره المميزة.

ب) باستعمال الأعداد المركبة اعط قيسا للزاوية $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$

ثم عين المستقيم (Δ) بحيث $r=\sigma_{(\Delta)}o\,\sigma_{(AO)}$

جـ) بين أن $\varphi=r\,o\,\sigma_{(AO)}$ ثم عين طبيعة φ.

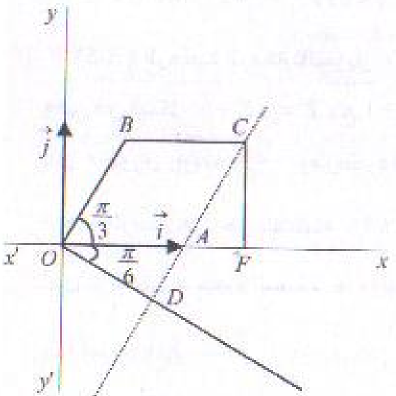
✔ الحل

1) أ) تعيين الشكل الأسي لـ C :

لدينا $C=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $|C|=\sqrt{3}$

$$C=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه $C=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$



تعيين الشكل الجبري لـ d :

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(-\frac{\pi}{6}))+i\sin(-\frac{\pi}{6})$$

ومنه $d=\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$

ب) لدينا $OA=|a|=1$ و $OB=|b|=1$

$$AC=|c-a|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$$

$$BC=|c-b|=\left|\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$$

ومنه نستنتج أن $OA=OB=AC=BC$ إذن الرباعي $OACB$ عبارة عن معين.

2) إثبات أن النقط D ، A و C على استقامة واحدة :

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AD}$ هي $d-a=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i-1=\frac{-1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هي $c-a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

و منه نستنتج $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AD}$

الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطان خطيا وعليه D ، A و C على استقامة واحدة

3) لدينا $S(O)=O$ و $S(A)=C$ ومنه نستنتج أن $k=\frac{OC}{OA}$ و $\theta=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$

لقد أثبتنا أن $OACB$ معين إذن قطريه منصفان لزواياه .

$$k=\frac{OC}{OA}=\frac{c}{a}=\sqrt{3} \text{ و } (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{6}$$

إذن التشابه المباشر S مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ونسبته $\sqrt{3}$.

4) إثبات أن F ، C و G على استقامة واحدة :

لدينا $S(O)=O$ ، $S(D)=F$ و $S(A)=C$ و $S(C)=G$

ولدينا من السؤال 2) النقط D ، A و C على استقامة واحدة وبما أن التشابه المباشر يحفظ الاستقامية فإن F ، C و G على استقامة واحدة .

5) الكتابة المركبة المرفقة للتشابه S هي $Z'=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}Z$

ومنه $Z_F=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}Z_D$

$$f=Z_F=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{3}{2}e^{0}=\frac{3}{2}$$

6) أ) الكتابة المركبة المرفقة للتحويل r هي $Z_1'=e^{-\frac{2\pi}{3}i}Z_1+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

وهي من الشكل $Z'=aZ+b$ مع $|a|=1$

إذن r دوران زاويته $-\frac{2\pi}{3}$ ومركزه النقطة الوحيدة الصامدة بالتحويل r .

لاحقة المركز هي حل للمعادلة $Z=e^{-\frac{2\pi}{3}i}Z+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبعد حلها نجد $Z=1$

إذن r دوران مركزه النقطة A وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$

ب) لدينا $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AO},\vec{i})+(\vec{i},\overrightarrow{AB})+2k\pi$

$$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=arg\left(\frac{b-a}{-a}\right)+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=arg\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi$$

$$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

- تعيين المستقيم (Δ) :

$\sigma_{(AB)} \circ \sigma_{(AO)}$ هو دوران مركزه النقطة A وزاويته $2(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$ وهي $-\frac{2\pi}{3}$

إذن $r=\sigma_{(AB)} \circ \sigma_{(AO)}$ ومنه $(\Delta)=(AB)$

جـ) التناظر المحوري الذي محوره (AO) كتابته المركبة المرفقة له هي $Z'=\overline{Z}$

ومنه الكتابة $r\circ\sigma_{(AO)}$ هي $Z'=e^{-\frac{2\pi}{3}i}\overline{Z}+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه التحويل $r\circ\sigma_{(AO)}$ هو التحويل φ .

من السؤال السابق لدينا $r=\sigma_{(AB)}\circ\sigma_{(AO)}$

إذن $\varphi=(\sigma_{(AB)}\circ\sigma_{(AO)})\circ\sigma_{(AO)}=\sigma_{(AB)}\circ(\sigma_{(AO)}\circ\sigma_{(AO)})=\sigma_{(AB)}\circ Id=\sigma_{(AB)}$

ومنه نستنتج أن φ هو التناظر المحوري الذي محوره (AB) .

تطبيق 23 التشابه المباشر والمتتاليات

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، m عدد مركب.
نعتبر التحويل النقطي T_m من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=(m+i)Z+m-1-i$

I - 1) هل توجد قيمة لـ m بحيث يكون T_m انسحابا ؟

2) عين قيمة m بحيث T_m دوران، ثم عين عناصره المميزة.

II) في ما يلي نضع $m=1$

1-أ) احسب لاحقة النقطة Ω الصامدة بالتحويل T_1

ب) من أجل كل عدد مركب $Z\neq 1$ احسب $\frac{Z'-1}{Z-1}$ ، ثم فسر هندسيا طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{Z'-1}{Z-1}$ ، وبرهن أن T_1 هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة .

جـ) برهن أنه من أجل كل عدد مركب Z لدينا $Z'-Z=i(Z-1)$ ثم استنتج أنه إذا كانت M مختلفة عن Ω فإن المثلث $\Omega MM'$ قائم عند M ومتساوي الساقين

2) نعرف في المستوي متتالية النقط (M_n) كما يلي :

$M_0=0$ و $M_1=T_1(M_0)$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $M_n=T_1(M_{n-1})$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $d_n=\Omega M_n$:

برهن أن المتتالية (d_n) هندسية . هل هي متقاربة ؟

✓ الحل

I - 1) نعلم أن الكتابة المركبة للإنسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ هي $Z'=Z+b$

T_m انسحاب إذا وفقط إذا كان $m+i=i$ ومنه $m=1-i$

2) T_m دوران إذا وفقط إذا كان $|m+i|=1$

$|m+i|=1$ يكافئ $\sqrt{m+1}=1$ يكافئ $m=0$

لدينا إذن $Z'=iZ-1-i$

مركز هذا الدوران هو النقطة Ω'

ذات اللاحقة Z حل للمعادلة $Z=iZ-1-i$ ......(1)

بعد حل المعادلة (1) نجد $Z=-i$

ومنه $\Omega'(0,-1)$

إذن T_0 دوران مركزه النقطة Ω' وزاويته $\frac{\pi}{2}$

II-1-أ) Ω صامدة بالتحويل T_1 إذا وفقط إذا كانت $Z_\Omega=(1+i)Z_\Omega-i$

ومنه ينتج $Z_\Omega=1$

إذن لاحقة النقطة Ω هي 1

ب) من أجل $Z\neq 1$ لدينا $\frac{Z'-1}{Z-1}=\frac{(1+i)Z-i-1}{Z-1}=1+i$

لدينا $\left|\frac{Z'-1}{Z-1}\right|=|1+i|=\sqrt{2}$

$arg(\frac{Z'-1}{Z-1})=arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \ ,\ k\in\mathbb{Z}$

لكن $\left|\frac{Z'-1}{Z-1}\right|=\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ ومنه $\Omega M'=\sqrt{2}\,\Omega M$.

$arg(\frac{Z'-1}{Z-1})=(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})+2k\pi$

ومنه $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن التحويل T_1 يحول كل نقطة M مختلفة عن Ω إلى النقطة M' بحيث :

$(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ و $\Omega M'=\sqrt{2}\,\Omega M$

ومنه نستنتج أن T_1 تشابه مباشر مركزه النقطة Ω و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

جـ) لدينا $Z'-Z=(1+i)Z-i-Z=iZ-i=i(Z-1)$

إذا كانت M مختلفة عن Ω فإن $Z-1\neq 0$ و $Z'-Z\neq 0$

إذن $arg(Z'-Z)=arg(i)+arg(Z-1)+2k\pi \ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$arg(Z'-Z)-arg(Z-1)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$(\vec{u},\overrightarrow{MM'})-(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{MM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ ,\ k\in\mathbb{Z}$

ومنه نستنتج ان المثلث $\Omega MM'$ قائم في M

وبما ان $Z'-Z=i(Z-1)$ فإن $|Z'-Z|=|Z-1|$ أي $MM'=\Omega M$

مما يدل على أن المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين.

2) من السؤال 1-ب) لدينا $\Omega M'=\sqrt{2}\,\Omega M$ ومنه نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n :

$\Omega M_{n+1}=\sqrt{2}\,\Omega M_n$ وعليه يكون $d_{n+1}=\sqrt{2}\,d_n$

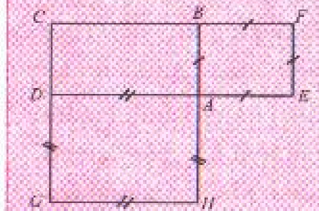
ومنه نستنتج أن المتتالية (d_n) هندسية أساسها $\sqrt{2}$

لدينا $d_0=\Omega M_0=\Omega O=1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $d_n=d_0(\sqrt{2})^n=(\sqrt{2})^n$

$\lim_{n\to+\infty}d_n=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2})^n=+\infty$ ومنه نستنتج أن المتتالية (d_n) متباعدة.

تطبيق 24 دراسة تركيب التحاكيات والتشابه المباشر



في الشكل المجاور $ABCD$ مستطيل في الاتجاه المباشر.

$AEFB$ و $ADGH$ مربعان في الاتجاه المباشر.

1) نرمز بـ I إلى نقطة تقاطع المستقيمين (EG) و (FH).

ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه I يحول G إلى E

و h_2 تحاكي مركزه I يحول F إلى H

أ) عين صورة المستقيم (CG) بالتحاكي h_1 ثم بالمركب $h_2 o h_1$

ب) عين صورة المستقيم (CF) بالمركب $h_1 o h_2$

جـ) تحقق أن $h_2 o h_1 = h_1 o h_2$ ، ثم استنتج ان المستقيم (AC) يمر أيضا من النقطة I.

2) نريد إثبات أن المتوسط المرسوم من A في المثلث AEH هو ارتفاع في المثلث ABD

نرمز إلى منتصف $[EH]$ بالنقطة O.

أ) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AO}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AH}$

ب) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{BD}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$

جـ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}$ ، ماذا تستنتج ؟

3) في هذا السؤال ندرس التشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول D إلى A

نضع $AB=1$ و $AD=k$ مع $k>0$

أ) عين زاوية و نسبة التشابه S.

ب) عين صورة المستقيم (BD) بالتشابه S ثم صورة المستقيم (AO) بالتشابه S.

جـ) استنتج ان النقطة Ω نقطة القاطع (BD) و (AO) هي مركز التشابه S.

✓ الحل

1) أ) ـ تعيين صورة (CG) بالتحاكي h_1 :

نعلم أن صورة مستقيم بتحاكي هو مستقيم يوازيه.

إذن صورة المستقيم (CG) هو مستقيم يوازيه و يمر من النقطة E لأن $h_1(G)=E$

إذن صورة المستقيم (CG) هو (EF)

ـ تعين صورة (CG) بالتحويل $h_2 o h_1$:

لدينا $(h_2 o h_1)(CG)=h_2((EF))$

صورة المستقيم (EF) بالتحاكي h_2 هو الموازي لـ (EF) والمار بالنقطة H لأن $h_2(F)=H$

إذن $(h_2 o h_1)((CG))=h_2((EF))=(AH)$

ب) تعيين صورة (CF) بالتحويل $h_1 o h_2$:

صورة (CF) بالتحاكي h_2 هو الموازي لـ (CF) والمار من H لأن $h_2(F)=H$

إذن $h_2((CF))=(GH)$.

صورة (GH) بالتحاكي h_1 هو الموازي لـ (GH) و المار بالنقطة E لأن $h_1(G)=E$

إذن $h_1((GH))=(AE)$ و منه نستنتج $h_1 o h_2((CF))=(AE)$

جـ) h_1 تحاكي نسبته k_1 و مركزه I و h_2 تحاكي مركزه I نسبته k_2

بما أن $(h_2 o h_1)(I)=(h_1 o h_2)(I)=I$ فإن $h_1 o h_2$ و $h_2 o h_1$ تحاكيين لهما نفس المركز I

ونفس النسبة k_1k_2 ومنه نستنتج أن $h_1 o h_2=h_2 o h_1$

ـ المستقيمان (CF) و (CG) يتقاطعان في النقطة C

وصورتيهما بالتحويل $(h_1 o h_2)$ او $(h_2 o h_1)$ يتقاطعان في $(h_1 o h_2)(C)$

لكن من السؤال السابق عرفنا أن صورتاهما هما (AE) و (AH) اللذان يتقاطعان في A

ومنه نستنتج أن $h_1 o h_2(C)=A$

وبما أن مركز التحاكي $(h_1 o h_2)$ هو I فإن النقط I ، A ، C تقع على استقامة واحدة

وعليه نستنتج أن المستقيم (AC) يمر أيضا من I

2) **أ)** بما أن $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AO}$ فإن $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH})$

ب) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

جـ) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB})$$

ولكون $ADGH$ و $AEFB$ مربعان ينتج $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ و $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

لكن $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=-AE\cdot AD$ و $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=-AH\cdot AB$

و $AE=AB$ و $AH=AD$

ومنه ينتج $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

إذن المستقيمين (AO) و (BD) متعامدان

وبما أن (AO) هو المتوسط المار من A في المثلث AEH نستطيع القول أن المتوسط المار من A في المثلث AEH هو ارتفاع في المثلث ABD

3) **أ)** نعلم أن $S(A)=A$ و $S(D)=A$ ومنه نستنتج أن نسبة التشابه المباشر S هي $\frac{1}{k}=\frac{AB}{AD}$

وزاويته هي $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA})$

لكن $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

إذن S تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{k}$

ب) تعيين صورة المستقيمين (BD) و (AO) بالتشابه S :

نعلم أن $S(D)=A$ وزاويته التشابه هي $\frac{\pi}{2}$ وصورة (BD) هو مستقيم عمودي على (BD) و يمر من A إذن $S((BD))=(AO)$

ـ وبنفس الطريقة لدينا صورة المستقيم (AO) بالتشابه S هو المستقيم العمودي على (AO) والمار من B لأن $S(A)=(B)$ إذن $S((AO))=(BD)$

جـ) تعيين مركز التشابه S :

S يحول (BD) إلى (AO) و يحول (AO) إلى (BD)

إذن S يحول النقطة Ω نقطة تقاطع (BD) و (AO) إلى نقطة تقاطع (BD) و (AO)

وهذا يعني أن Ω صامدة بالتحويل S ومنه نستنتج أن Ω مركز التشابه المباشر S

تطبيق 25 إثبات الإستقامية والتعامد باستعمال التشابه

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط ، A ، B ، C لواحقها على الترتيب $Z_A=3-i\sqrt{3}$ ، $Z_B=3+i\sqrt{3}$ ، $Z_C=2+\sqrt{3}+3i$

1) أ) علم النقط A ، B ، C ثم بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع مباشر.

ب) لتكن G مركز ثقل المثلث OAB عين اللاحقة Z_G للنقطة G

2) ليكن a و b عددين مركبين و R التحويل النقطي من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=aZ+b$ ؛

أ) عين a و b بحيث $R(O)=G$ و $R(A)=C$

ب) بين أن R دوران يطلب تعيين مركزه و زاويته

جـ) بين أن المستقيمين (OA) و (GC) متعامدان

ماذا يمكن القول حول النقط G ، B و C؟

د) انشئ صورة المثلث OAB بالدوران R مبررا إنشائك

3) ليكن a' ، b' عددين مركبين و f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z'=a'\overline{Z}+b'$

أ) عين a' و b' بحيث $f(O)=G$ و $f(A)=C$

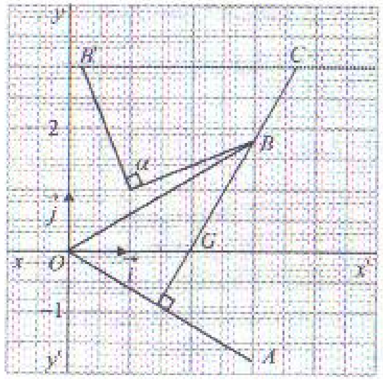
ب) لتكن I منتصف $[OG]$.عين النقطة $f(I)$ هل f تناظر ؟

✓ الحل

1) لدينا $Z_B = \overline{Z}_A$ ومنه $|Z_B| = |\overline{Z}_A|$ إذن $OA = OB$

لدينا $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = arg(Z_B) - arg(Z_A) + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = arg(\frac{Z_B}{Z_A}) + 2k\pi$



$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = arg(\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}) + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

ومنه نستنتج أن المثلث OAB متقايس الأضلاع مباشر

ب) $Z_G = \frac{1}{3}(Z_O + Z_A + Z_B) = 2$

2) أ) حساب a ، b

لدينا $\begin{cases} Z_G = aZ_O + b \\ Z_C = aZ_A + b \end{cases}$ ومنه ينتج $\begin{cases} b = 2 \\ a = i \end{cases}$

إذن $Z' = iZ + 2$

ب) بما أن $|i| = 1$ و $arg(i) = \frac{\pi}{2}$

فإن R دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه لاحقتها Z حل للمعادلة $Z = iZ + 2$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $Z = 1 + i$

إذن R دوران مركزه النقطة $\Omega(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

جـ) بما أن $R(O) = G$ و $R(A) = C$ فإن صورة (OA) بالدوران R هو المستقيم (GC)

لكن R دوران مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن (OA) و (GC) متعامدان

ـ المثلث OAB متقايس الأضلاع ومنه المتوسط (BG) منطبق على الارتفاع المرسوم من B

إذن (BG) عمودي على (OA)

نستنتج أن (BG) و (GC) منطبقان.

وعليه النقط G ، B ،و C على استقامة واحدة

د) صورة المثلث OAB بالدوران R هوالمثلث GCB' حيث $R(O) = G$ و $R(A) = C$

و $R(B) = B'$

وبما أن الدوران تقايس فإن المثلث GCB' هو أيضا متقايس الأضلاع

3) أ) $\begin{cases} Z_G = a'\overline{Z_O} + b' \\ Z_C = a'\overline{Z_A} + b' \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} b' = 2 \\ a' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$

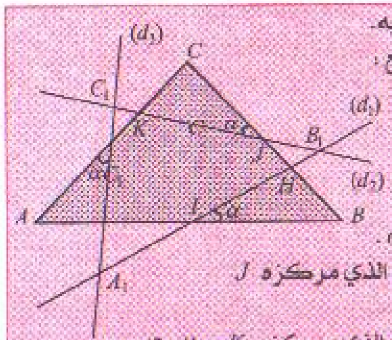
ب) النقطة I ذات اللاحقة 1 :

$f(I)$ لاحقتها $Z' = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) + 2$

النقطتان I و $f(I)$ غير منطبقتين

بما أن $f(O) = G$ و منتصف $[OG]$ غير صامد بالتحويل f فإن التحويل f ليست تناظر .

تطبيق 26 البرهان باستعمال التشابه



ABC مثلث مباشر من مستوي موجه.

نرمز بـ I ، J ، K منتصفات القطع : $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CA]$ على الترتيب.

ليكن α عدد حقيقي.

(d_1) صورة المستقيم $[AB]$ بالدوران الذي مركزه I وزاويته α .

(d_2) صورة المستقيم $[BC]$ بالدوران الذي مركزه J وزاويته α .

(d_3) صورة المستقيم $[CA]$ بالدوران الذي مركزه K و زاويته α

A_1 هي نقطة تقاطع (d_1) و (d_3) و B_1 هي نقطة تقاطع (d_1) و (d_2) و C_1 نقطة تقاطع (d_2) و (d_3) .

1) نسمي H نقطة التقاطع (BC) مع (d_1) .

بين أن المثلثين HIB و HB_1J متشابهان.

2) استنتج أن المثلثين ABC و $A_1B_1C_1$ متشابهان.

✓ الحل

1) بما أن الزاويتين المتقابلتين بالراس لهما نفس القيس

فإن $I\hat{H}B = J\hat{H}B_1$ و $H\hat{J}B_1 = H\hat{I}B = CJC_1$

المثلثان HIB و HB_1J فيهما زاويتين لهما نفس القيس

إذن فهما متشابهان

2) لكون المثلثين HIB و HB_1J متشابهان

ينتج $H\hat{B}I = J\hat{B}_1H$ أي $C_1\hat{B}_1A_1 = CBA$.

لتكن M نقطة تقاطع (d_3) مع $[AB]$ ، بنفس الطريقة المستعملة في 1) نبرهن أن المثلثين AKM و MA_1I متشابهان.

نستنتج أن $M\hat{A}_1I = K\hat{A}M$ أي $C_1\hat{A}_1B_1 = C\hat{A}B$

المثلثان ABC و $A_1B_1C_1$ فيهما زاويتين لهما نفس القيس إذن فهما متشابهان .

تطبيق 27 — تحديد عناصر التشابه

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

I) نعتبر النقط $A(-4-6i)$ ، $B(14)$ ، $C(-4+6i)$ ، $A_1(3-7i)$ ، $B_1(9+5i)$ ، $C_1(-3-i)$

1) احسب لواحق المنتصفات I ، J ، K للقطع $[AB]$ و $[BC]$ و $[CA]$ على الترتيب وعلّم هذه النقط.

2) بين أن النقط A_1 ، I ، B_1 على استقامة واحدة وتقبل أن B_1 ، J ، C_1 من جهة و C_1 ، K ، A_1 من جهة أخرى على استقامة واحدة.

3) عين قيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1})$ وتقبل أن $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}) = \frac{\pi}{4}$ و $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}) = \frac{\pi}{4}$

4) ما هي صورة المستقيم (AB) بالدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{4}$؟

II) تقبل أنه يوجد تشابه مباشر S يحول النقط A ، B ، C إلى A_1 ، B_1 ، C_1 على الترتيب.

1) برهن أن الكتابة المركبة المرفقة لـ S هي $Z' = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)Z+2-2i$ حيث Z و Z' لاحقتي على الترتيب لنقطة وصورتها بالتشابه S.

2-أ) عين نسبته وزاوية التشابه S.

ب) عين لاحقة المركز Ω للتشابه S.

3) ماذا تمثل النقطة Ω بالنسبة إلى المثلث ABC؟

الحل

I-1) $Z_I = \frac{1}{2}(Z_A+Z_B) = 5-3i$ و $Z_J = \frac{1}{2}(Z_B+Z_C) = 5+3i$ و $Z_K = \frac{1}{2}(Z_C+Z_A) = -4$

2) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{A_1B_1}$ هي $Z_{B_1}-Z_{A_1} = 6+12i$ ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{A_1I}$ هي $Z_I - Z_A = 2+4i$ ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{A_1B_1} = 3\overrightarrow{A_1I}$

وهذا يعني أن النقط A_1 ، B_1 و I على استقامة واحدة.

3) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = (\vec{u}, \overrightarrow{IB_1}) - (\vec{u}, \overrightarrow{IB}) + 2k\pi$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = arg(\frac{Z_{B_1}-Z_I}{Z_B-Z_I}) + 2k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = arg(\frac{2}{3}(1+i))+2k\pi$ ومنه $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = \frac{\pi}{4}+2k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$

4) ليكن r الدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{4}$ لدينا $r(I)=I$

بما أن I تنتمي إلى (AB) فإن صورة (AB) بالدوران r يمر بالنقطة $r(I)$ إذن يمر من I

صورة (AB) هو مستقيم يمر من I وشعاع توجيهه $\vec{u}$ يحقق $(\overrightarrow{IB}, \vec{u}) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

من السؤال السابق لدينا $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن (AB) هو المستقيم (IB_1) أو (A_1B_1)

II-1) لدينا $S(A)=A_1$ و $S(B)=B_1$ و $S(C)=C_1$

بما أن S تشابه مباشر فإن كتابته المركبة هي $Z' = aZ+b$ مع $a\in\mathbb{C}^*$ و $b\in\mathbb{C}$

بما أن $S(A)=A_1$ فإن $Z_{A_1} = aZ_A+b$ ...... (1)

ومن $S(B)=B_1$ نستنتج أن $Z_{B_1} = aZ_B+b$ .... (2)

ومن $S(C)=C_1$ نستنتج أن $Z_{C_1} = aZ_C+b$ ...... (3)

من (1) و (2) و (3) نجد $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ و $b=2-2i$

إذن الكتابة المركبة للتشابه S هي $Z' = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)Z+2-2i$

2) أ) نسبة التشابه S هي $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|$ وتساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

وزاوية التشابه S هي $arg(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$ وتساوي $\frac{\pi}{4}$

ب) اللاحقة ω للمركز Ω تحقق $\omega=\frac{1}{2}(1+i)\omega+2-2i$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $\omega=\frac{4-4i}{1-i}=4$

إذن لاحقة Ω هي العدد المركب 4.

3) نلاحظ أن $\Omega A=|Z_A-Z_\Omega|=10$ و $\Omega B=|Z_B-Z_\Omega|=10$ و $\Omega C=|Z_C-Z_\Omega|=10$

إذن $\Omega A=\Omega B=\Omega C$ ومنه نستنتج أن Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

تطبيق 28 — التشابهات غير المباشرة

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعطي النقط A ، C ، D و Ω لواحقها على الترتيب $1+i$ ، 1 ، 3 ، و $2+\frac{1}{2}i$

1) لتكن (γ) الدائرة ذات المركز Ω والمارة من A.

أ) بين أن (γ) تمر من C و D.

ب) بين أن القطعة $[AD]$ قطر للدائرة (γ).

جـ) علم النقط A ، C ، D و Ω و (γ) . نسمي B نقطة التقاطع الثانية لـ (γ) مع (OA)

د) بين أن النقطة O تقع خارج القطعة $[AB]$.
2) برهن هندسيا أن المثلثين OAD و OCB متشابهان وغير متقايسين.
3) ليكن S التشابه الذي يحول المثلث OCB إلى المثلث OAD .
بين أن S تشابه غير مباشر مختلف عن التناظر المحوري، ثم استنتج مركزه
4-أ) استنتج من السؤال 2) أن $OA \times OB = OC \times OD$
ب) استنتج لاحقة Z_B للنقطة B .
جـ) عين الكتابة المركبة لـ S .
د) عين الطبيعة والعناصر المميزة لـ SOS .

✓ الحل

1) أ) $\Omega A = |Z_A - Z_\Omega| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $\Omega C = |Z_C - Z_\Omega| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $\Omega D = |Z_D - Z_\Omega| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

بما أن $\Omega A = \Omega C = \Omega D$ فإن الدائرة (γ) ذات المركز Ω تمر أيضا من C و D .

ب) النقطتان A و C لهما نفس الفاصلة وبالتالي تنتميان إلى المستقيم ذو المعادلة $x=1$.
المستقيم (CD) هو محور الفواصل إذن المثلث ACD قائم في C .
وبما أن الدائرة (γ) محيطة بالمثلث ABC فإنها تقبل الوتر $[AD]$ كقطر لها .

جـ) لدينا $O\Omega = |Z_\Omega| = \frac{\sqrt{17}}{2}$ ومنه $O\Omega > \frac{\sqrt{5}}{2}$

إذن النقطة O موجودة خارج الدائرة (γ) ذات المركز Ω ونصف القطر $\frac{\sqrt{3}}{2}$
وبما أن (OA) يقطع (γ) في A و B فإن القطعة $[AB]$ هي وتر في الدائرة (γ) .
إذن القطعة $[AB]$ محتواة في القرص الذي حافته (γ)
ولكون O تقع خارج (γ) فإن O تقع خارج القطعة $[AB]$.

2) كون النقط O ، A ، B على استقامة واحدة و O ، C ، D على استقامة واحدة
نستنتج $A\hat{O}D = B\hat{O}C$
الزاويتان $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$ داخل الدائرة (γ) وهما تحصران نفس القوس AC
إذن $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ أي $A\hat{B}C = A\hat{D}O$.
المثلثان OAD و OCB فيهما على التوالي زاويتين لهما نفس القيس إذن فهما متشابهان
بما أن $OC = 1$ و $OA = \sqrt{2}$ فإن $OA \neq OC$
ومنه نستنتج أن المثلثين OAD و OCB غير متقايسين.

3) ليكن S التشابه الذي يحول OCB إلى OAD
لدينا إذن $S(O) = O$ و $S(B) = D$ و $S(C) = A$

ـ التشابه S يحول $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ إلى زاوية معاكسة لها $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$
إذن S تشابه غير مباشر
وبما أن S ليس تقايسا إذن لا يمكنه أن يكون تناظرا.
ـ بما أن $S(O) = O$ إذن O نقطة صامدة بالتشابه S

نفرض أن S يقبل نقطة صامدة F تختلف عن O .
نعلم من الدرس أن التشابه الذي له نقطتين صامدتين مختلفتين هو إما التطبيق المطابق أو التناظر لكن لدينا $S(C) = A$ إذن هو ليس التطبيق المطابق للمستوي.
ولقد بينا أن S ليس تناظرا إذن O هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل S .

4) أ) المثلثان OCB و OAD متشابهان و $S(O) = O$ و $S(B) = D$ و $S(C) = A$
وعليه $\frac{BC}{DA} = \frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD}$ ومنه نستنتج أن $OB \times OA = CO \times OD$

ب) $OB = |Z_B| = \frac{OC \times OD}{OA}$ ومنه $|Z_B| = \frac{1 \times 3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\arg Z_B = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$
بما أن النقط O ، A ، B على استقامة واحدة بهذا الترتيب فإن :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \arg Z_A + 2k\pi$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

جـ) الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = a\overline{Z} + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$
بما أن $S(O) = O$ فإن $b = 0$
بما أن $S(C) = A$ فإن $a = 1 + i$
ومنه الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = (1+i)\overline{Z}$

د) الكتابة المركبة لـ SoS هي $Z' = 2Z$
إذن SoS هو تحاكي مركزه النقطة O ونسبته 2 .

تمارين و مسائل

1 - λ عدد حقيقي ثابت. في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب

$Z_A=-1+2i$ ، $Z_B=3-i$ ، $Z_C=7+\lambda i$

1) تحقق أنه من أجل كل λ فإنه يوجد تشابه مباشر S وحيد بحيث $S(A)=B$ و $S(B)=C$

2) نفرض أن الكتابة المركبة لـ S من الشكل $Z'=aZ+b$ مع $a\neq 0$

أ) احسب a بدلالة λ .

ب) هل توجد قيمة لـ λ بحيث S :

انسحاب ؟ دوران ؟ تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{2}$ ؟

2 - ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي الموجه بحيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$

J منتصف $[AC]$ و O مركز ثقل المثلث ABC

أنشئ صورة المثلث ABC في كل حالة من الحالات التالية :

أ) بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته 2 و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

ب) بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة J ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

3 - في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ للمستوي الموجه، التشابه المباشر S كتابته المركبة هي $Z'=2iZ-2$

1) أوجد صورة الدائرة (γ_1) التي مركزها I ذات اللاحقة $1+2i$ ونصف قطرها 2 بالتشابه S

2) أوجد صورة الدائرة (γ_2) التي مركزها J ذات اللاحقة i و نصف قطرها 1 بالتشابه S

3) أوجد صورة المستقيم d المار من نقط تقاطع (γ_1) و (γ_2) .

4 - المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ وحدة الرسم $5cm$

A ، B ، C نقط لواحقها i ، $\sqrt{2}$ ، و $\sqrt{2}+i$ على الترتيب، I منتصف القطعة $[OB]$ ،

نرمز بـ S إلى التشابه المباشر الذي يحول A إلى I و O إلى B .

1-أ) أوجد الكتابة المركبة لـ S.

ب) عين العناصر المميزة لـ S (المركز Ω، الزاوية والنسبة)

جـ) برهن أن Ω هي مركز ثقل المثلث ABC

2) نعرف متتالية النقط A_n بالكيفية التالية :

$A_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع $A_{n+1}=S(A_n)$

أ) علم النقط A_1 ، A_2 ، A_3 على الشكل.

ب) نرمز بـ U_n إلى طول القطعة $[A_n A_{n+1}]$

- عبر عن U_{n+1} بدلالة U_n
- احسب U_0 ثم اكتب U_n بدلالة n
- احسب $S_n=U_0+U_1+.....U_n$ بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

5 - في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر التشابه المباشر S الذي كتابته المركبة $Z'=\frac{1}{2}(1+i)Z+\frac{5}{2}(1+i)$ و Ω مركزه .

M_0 نقطة ذات اللاحقة $2+4i$ و $M_1=S(M_0)$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $M_{n+1}=S(M_n)$. ابتداء من أي رتبة N_0 تكون النقط M_n تنتمي إلى قرص مركزه النقطة Ω ونصف قطره 10^{-2} .

6 - من أجل كل سؤال يمكن أن توجد عدة قضايا صحيحة، عين الصحيحة منها والخاطئة مبررا إجابتك في كل مرة.

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، I لواحقها على الترتيب 1 ، $1+2i$ ، 0 نرمز بـ S إلى التشابه المباشر الذي مركزه I وبحيث $S(A)=B$

أ) S له كتابة مركبة $Z'=\sqrt{5}(1+i)Z+i$

ب) النقطة C ذات اللاحقة $1-3i$ صورتها بالتشابه S هي النقطة C' ذات اللاحقة 5

جـ) إذا كانت D ذات اللاحقة $2-i$ فإن المثلثين AOC و BDC' متشابهان في الاتجاه المباشر

7 - اجب بنعم أو خطأ مبررا إجابتك على ما يلي :

1) كل تحاكي نسبته $-a^2$ هو تشابه مباشر نسبته a^2

2) التشابه المباشر S المركب من تحاكي مركزه O ونسبته $-\sqrt{2}$ ودوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ زاويته هي $\frac{5\pi}{4}$

3) r الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته θ حيث $\theta\neq\pi$ و M' صورة M بالدوران r و I منتصف $[MM']$.

I هي صورة M بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\theta}{2}$ ونسبته $\cos\frac{\theta}{2}$ ؟

8 - A و B نقطتان مختلفتان و r_A و r_B دورانين مركزيهما على التوالي A و B وزاويتهما $\frac{\pi}{2}$. من أجل كل نقطة M من المستوي النقطتين M_1 و M_2 صورتي M

بـ r_A و r_B على التوالي. نضع $t = r_B o r_A^{-1}$

ا) انشئ النقطة C حيث $C = t(A)$

ب) عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل t.

ج) ما هي طبيعة الرباعي M_1M_2CA ؟

2) نفرض أن النقطة M تمسح الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$

ا) عين ثم انشئ المحل الهندسي للنقطة M_2 لما M تمسح (Γ)

ب) ليكن ω_1 و ω_2 منتصفي $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب، قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ج) عين ثم ارسم المحل الهندسي للنقطة I منتصف $[M_1M_2]$ لما M تمسح (Γ).

9 - في المستوي الموجه، نعتبر مثلث متقايس الساقين ABC

بحيث $AB = AC$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

I نقطة بحيث أن المثلث CAI متقايس الساقين وقائم مع $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$، نضع

$AB = 5cm$

1) نسمي r_A الدوران الذي مركزه النقطة A ويحول النقطة B إلى C و r_C دوران

مركزه النقطة C وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. نضع $f = r_C o r_A$

ا) عين صورة كل من A و B بالتحويل f.

ب) بين أن f دوران يطلب تعيين زاويته ومركزه O.

ج) بين أن الرباعي $ABOC$ معين.

2) S تشابه مباشر مركزه النقطة O ويحول النقطة A إلى B ولتكن C' صورة C

بالتحويل S، H منتصف القطعة $[BC]$ و H' صورتها بالتشابه S.

ا) عين زاوية S ثم بين أن C' تنتمي إلى المستقيم (OA)

ب) عين صورة القطعة $[OA]$ بالتحويل S ثم بين أن H' منتصف $[OB]$

ج) بين أن $(C'H')$ عمودي على (OB) ثم استنتج أن C' مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OBC.

10 - $(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه، النقط A، B، C

لواحقها على الترتيب $\sqrt{2}$، i، و $\sqrt{2}+i$.

النقط I، J، K منتصفات القطع $[OB]$، $[AC]$، $[BC]$ على الترتيب، نسمي S

التشابه المباشر بحيث $S(A) = I$ و $S(O) = B$

1-ا) ما هي الكتابة المركبة لـ S ؟

ب) ما هي اللاحقة ω للنقطة Ω مركز S.

ج) ما هي صورة المستطيل $OBCA$ بالتشابه S؟

2) نعتبر التحويل $S^2 = SoS$

ا) برهن أن S^2 تحاكي يطلب تعين مركزه ونسبته

ب) ما هي صور النقط O، B، A بالتحويل S^2.

3) استنتج من الأسئلة السابقة أن المستقيمات (OC) و (BI) و (AK) متقاطعة.

11 - O و A نقطتان من المستوي الموجه بحيث $OA = 4cm$ و (γ) الدائرة ذات المركز

O والتي تمر من A. و S التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{2}$.

1) عين (γ') صورة (γ) بـ S ثم عين مركز ونصف قطر (γ').

2) B النقطة الثانية المشتركة بين (γ) و (γ')، نضع $S(I) = B$ و $S(B) = J$

برهن أن النقطتين I و J متقابلتان قطريا بالنسبة إلى B على (γ) و (γ')

3) برهن أن J صورة I بتحاكي مركزه A يطلب تعيين نسبته.

12 - $(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي الموجه، نعتبر النقط A و A'، B، B'

لواحقها على التوالي $Z_A = 1-2i$، $Z_{A'} = -2+4i$، $Z_B = 3-i$، $Z_{B'} = 5i$

1-ا) علم النقط A، A'، B، B' ثم بين أن الرباعي $ABB'A'$ مستطيل.

ب) نسمي σ التناظر المحوري الذي محوره (Δ) بحيث $\sigma(A) = A'$ و $\sigma(B) = B'$

اوجد معادلة (Δ) ثم ارسم (Δ).

ج) بين أن σ له كتابة مركبة $Z' = \frac{1}{5}(3+4i)\overline{Z} + 2i - 1$ ..... (I)

2) g التشابه الذي كتابته المركبة هي $Z' = -\frac{2}{5}(3+4i)\overline{Z} + 5 - i$

ا) نضع $C = g(A)$ و $D = g(B)$ أوجد لاحقتي C و D ثم علمهما في الشكل السابق.

ب) h التحاكي الذي نسبته -2 والمركز Ω ذات اللاحقة $1+i$

اوجد الكتابة المركبة لـ h ثم تحقق أن $h(A') = C$ و $h(B') = D$

ج) نضع $f = h^{-1} o g$

اوجد الكتابة المركبة لـ f ثم استنتج أن $g = h o \sigma$

13 - $(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه. f تحويل نقطي كتابته

المركبة $Z' = -\frac{1}{2}i(\overline{Z} + 2 - 4i)$. و $\sigma_{(\Delta)}$ تناظر محوري محوره المستقيم $(\Delta): y = 0$

1) أثبت أن $f o \sigma_{(\Delta)}$ تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره الأساسية.

2) أثبت أن $f o f$ تشابه مباشر، ثم أثبت أن f مركب تبديلي من تناظر محوري بالنسبة

إلى مستقيم (d) يمر من $\omega(-2,0)$ وتحاكي مركزه ω ونسبته k حيث $k > 0$

14 - $(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه و S التشابه المباشر

كتابته المركبة هي $Z' = (1-i\sqrt{3})Z + 5\sqrt{3}$

1) عين العناصر الأساسية للتشابه S.

2) نعتبر التحويل S^n حيث $S^n = \underbrace{SoSoSo....oS}_{n \text{ مرة}}$ حيث $n \geq 2$

أ) ما هي طبيعة التحويل S^n ؟ ثم عين عناصره المميزة

ب) ما هي قيم n التي من أجلها يكون S^n تحاكيا ؟

3) لتكن $M_0(-1,0)$ نقطة من المستوي ولنعرف متتالية النقط كما يلي :

$M_{n+1}=S(M_n)$ مع $n\in \mathbb{N}$

ولنعرف متتالية الأعداد الحقيقية (U_n) المعرفة بـ $U_n=\left\|\overrightarrow{\omega M_n}\right\|$ حيث ω مركز التشابه S

أ) برهن أن (U_n) متتالية هندسية ثم عين حدها الأول وأساسها.

ب) احسب بدلالة n المجموع $d_n=U_0+U_1+....+U_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$

جـ) عين المجموعة التي تنتمي إليها M_n بحيث $U_n\le 2$

15 - $(o;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه ، ولتكن ω و ω' نقطتان منه لواحقهما على الترتيب Z_0 ، Z_1 وليكن r دوران مركزه ω' وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ، و h تحاكي مركزه ω ونسبته $\sqrt{2}$. ولتكن $M'(x',y')$ صورة $M(x,y)$ بالتحويل hor لواحقهما Z' و Z على الترتيب.

1) عبر عن Z' بدلالة Z_0 ، Z_1 ، ثم عين طبيعة التحويل hor .

2) ما هي العلاقة بين Z_0 و Z_1 حتى يكون hor تشابه مباشر مركزه النقطة O وزاويته $(-\frac{\pi}{4})$ ونسبته $\sqrt{2}$.

16 - في المستوي المركب f تحويل نقطي كتابته المركبة $Z'=-2iZ+1+i$

1) بين أن f له نقطة صامدة وحيدة ω .

2-أ) ليكن h تحاكيا مركزه ω ونسبته 2 ، عين الكتابة الركبة لـ h ثم لـ h^{-1} .

ب) نضع $\sigma=f\circ h^{-1}$ ، عين الكتابة المركبة للتحويل σ

3) بين أن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل σ هي مستقيم (d) يطلب تعيين معادلته، ثم استنتج طبيعة التحويل σ

4) بين أن f مركب من تحاكي وتناظر محوري ؟

17 - في معلم متعامد ومتجانس مباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، النقط A ، C ، D لواحقها $2i$ ، 1 ، 8 و (γ) دائرة محيطة بالمثلث ACD تقطع محور التراتيب في B .

1) برهن باستعمال استدلال هندسي أن المثلثين OAD و OCB متشابهان وغير متقايسين

2) ليكن S تشابها يحول المثلث OAD إلى المثلث OCB

أ) عين نسبة S ، ب) لماذا S تشابه غير مباشر مختلف عن التناظر؟

جـ) لماذا S له نقطة صامدة وحيدة هي مبدأ المعلم ؟

د) ما هي الكتابة المركبة لـ S ؟

3-أ) ليكن h تحاكيا مركزه O ونسبته $\frac{1}{2}$ ، عين الكتابة الركبة لـ h^{-1}

ب) نضع $\sigma=s\circ h^{-1}$ ما هي الكتابة المركبة لـ σ ؟

ثم بين أن σ يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كمجموعة نقط صامدة.

جـ) استنتج طبيعة σ ثم بين أن S هو مركب من تحاكي وتناظر محوري.

18 - I) في المستوي الموجه، $OIBJ$ مربع طول ضلعه 1 وبحيث $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}$

A نقطة من نصف المستقيم $[JI)$ مختلفة عن I و J . نرمز بـ S إلى التشابه الذي مركزه النقطة O وبحيث $S(I)=A$

1) أنشئ صورة المربع $OIBJ$ بالتحويل S ، نضع $S(B)=B'$ و $S(J)=J'$

2) في هذا السؤال نريد إثبات أن B' هي نقطة من (BJ) من أجل ذلك نرمز بـ: σ إلى التشابه المباشر ذو المركز O والزاوية $\frac{\pi}{4}$ والنسبة $\sqrt{2}$.

أ) حدد $\sigma(A)$ و $\sigma(I)$ و $\sigma(J)$

ب) استنتج أن B' نقطة من المستقيم (JB)

3) في هذا السؤال نريد إنشاء النقطة $A'=S(A)$

أ) لماذا A' نقطة من $(J'A)$؟

ب) أنشئ صورة المستقيم (OA) بـ S ثم استنتج إنشاء A' .

II) نزود الآن المستوي بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ ولتكن m فاصلة A مع m عدد حقيقي من المجال $]0,+\infty[$ ويختلف عن 1 .

1-أ) برهن أن اللاحقة a لـ A هي $a=m+i(1-m)$

ب) برهن أن التشابه S له كتابة مركبة $Z'=[m+i(1-m)]Z$

جـ) استنتج أن A' لاحقتها a^2 و B' لاحقتها $(2m-1)+i$.

الدرس **15**

قابليّة القِسمة و الموافقات

1. قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1.1 مضاعف عدد صحيح

القول أن العدد الصحيح m مضاعف للعدد الصحيح b يعني أنه يوجد عدد صحيح c بحيث $m = b\,c$

مثال -

مضاعفات العدد 5 هي من الشكل $5\times c$ مع c عدد صحيح.

العددان 25 و 135- مضاعفان للعدد 5 لأن $25 = 5\times 5$ و $-135 = 5\times(-27)$

2.1 علاقة قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

القول أن العدد الصحيح b يقسم العدد الصحيح a يعني أنه يوجد عدد صحيح c بحيث $a = b\times c$

وفي هذه الحالة نقول أن b قاسم لـ a و a قابل للقسمة على b.

ملاحظة

1) كل عدد صحيح يقسم الصفر، لكن الصفر لا يقسم أي عدد صحيح غير معدوم
2) العددان 1- و 1 يقسمان كل الأعداد الصحيحة.
3) إذا كان لدينا $a = m\,q$ فإن m و q قاسمان للعدد a.

مثال -

- العدد 4 يقسم 24 لأن $6\times 4 = 24$
العددان 4 و 6 قاسمان للعدد 24
- العدد 5 يقسم 35 لأن $(-5)\times(-7) = 35$
العددان 5- و 7- قاسمان للعدد 35

3.1 خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

أ) إذا كان b يقسم a فإن $-b$ يقسم a لأن:
من المساواة $a = b\,c$
نستنتج أن: $a = (-b)(-c)$

ب) إذا كان b يقسم a مع $a \neq 0$ فإن $|b| \leq |a|$ لأن:
المساواة $a = b\times c$ تستلزم $|a| = |b|\,|c|$ وبما أن $a \neq 0$ فإن $|c| \neq 0$
وعليه $|b| \leq |a|$

ج) إذا كان a يقسم b و b يقسم a فإن $a = b$ أو $a = -b$ مع $a \neq 0$ و $b \neq 0$
لأن في هذه الحالات $|a| \geq |b|$ و $|a| \leq |b|$ إذن $|a| = |b|$
أي $a = b$ أو $a = -b$

د) إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c لأن:
فرضا نستطيع كتابة $b = a\times p$ و $c = b\times q$ مع p و q عددين صحيحين
إذن $c = (a\,p)\,q = a\,(p\,q)$ وهذا يعني أن a يقسم c.

هـ) - إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح k، (a يقسم kb) و (ka يقسم kb) لأن:
a يقسم b هذا معناه أن $b = a\times p$ ومنه $kb = kap$ أي $kb = a(kp)$
وهذا يعني أن a يقسم kb.
بنفس الطريقة نبين الشطر الثاني من الخاصية.

و) إذا كان a يقسم b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين x و y
لدينا a يقسم $b\,x + c\,y$ لأن:
من الفرضية نستطيع كتابة $b = a\,p$ و $c = a\,q$ مع p و q عددين صحيحين
$$b\,x + c\,y = a\,p\,x + a\,q\,y = a\,(p\,x + q\,y)$$
مع $p\,x + q\,y$ عدد صحيح إذن a يقسم $b\,x + c\,y$

مثال -

الأعداد a ، $-a$ ، 1 ، -1 هي قواسم للعدد غير المعدوم a.

تمرين تدريبي 1

1) أوجد كل الثنائيات الطبيعية (x, y) بحيث $x^2 + 2xy = 12$ .... (I)

2) عين الأعداد الصحيحة n بحيث $n-3$ يقسم $n+5$

الحل

1) من المساواة $x^2+2xy=12$ نستنتج أن $12 > x^2 > 0$

أي $3,4 > x > 0$ وبالتالي فإن قيم x المكنة هي 1 ، 2 ، 3

المساواة (I) تكتب على الشكل $x(x+2y) = 12$

وهذا يعني أن x و $x+2y$ قاسمان للعدد 12

x	1	2	3
$x+2y$	$1+2y=12$	$2+2y=6$	$3+2y=4$
y	لا يوجد	2	لا توجد

من أجل كل قيمة لـ x من $\{1,2,3\}$ نبحث عن الأعداد الطبيعية y بحيث $x+2y$ يقسم 12 . من الجدول السابق نستنتج أنه توجد ثنائية وحيدة $(2,2)$ تحقق المساواة (I)

2) بما أن $n-3$ يقسم $n-3$ و $n-3$ يقسم $n+5$ فإن $n-3$ يقسم $n+5-(n-3)$

أي $n-3$ يقسم 8

إذن $n-3$ ينتمي إلى قواسم العدد 8 والتي هي 1 ، -1 ، 2 ، -2 ، 4 ، -4 ، 8 ، -8

$n-3$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
n	4	5	7	11	2	1	-1	-5

وبالتالي n ينتمي إلى $\{4,5,7,11,2,1,-1,-5\}$

تمرين تدريبي 2

k ، a ، b أعداد طبيعية بحيث $a=6k+5$ و $b=8k+3$

بين أن القاسمين الموجبين الوحيدين المكنين والمشتركين للعددين a و b هما 1 و 11

الحل

ليكن d قاسم مشترك للعددين a ، b .

بما أن d يقسم a و d يقسم b فإن d يقسم $4a-3b$ أي d يقسم 11

وبما أن قواسم 11 في $\mathbb{N}$ هي 1 و 11 فإن d له قيمتين ممكنتين هما 1 و 11

2 . القسمة الإقليدية

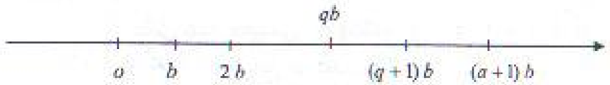
1.2 القسمة الإقليدية في $\mathbb{N}$

مبرهنة

a و b عددان طبيعيان مع $b \neq 0$

توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد الطبيعية بحيث $a=bq+r$ و $b > r \geq 0$

الإثبات



بما أن b موجب تماما فإن المضاعفات الموجبة للعدد d تشكل متتالية متزايدة تماما ، لنكتب مضاعفات d من الصفر حتى $(a+1)b$

لدينا $b \geq 1$ وعليه $(a+1)b \geq a+1 > a$

إذن بالضرورة يكون a هو أحد مضاعفات b أو يكون محصورا بين مضاعفين متتاليين للعدد b

أي $a \in [qb, (q+1)b[$

وبالتالي نستطيع كتابة a على الشكل $a=bq+r$ حيث r هي المسافة بين a و bq ،

لكن هذه المسافة r هي أصغر تماما من الطول b إذن $b > r \geq 0$

وحدانية الثنائية (q,r) :

نفرض أنه توجد ثنائيتين (q_1,r_1) و (q_2,r_2)

بحيث $a = q_1 b + r_1$ و $a = q_2 b + r_2$ مع $b > r_1 \geq 0$ و $b > r_2 \geq 0$

ومنه ينتج $(q_1 - q_2)\, b = r_2 - r_1$ ....(*)

من (*) نستنتج أن b يقسم $r_2 - r_1$ وبما أن $r_2 - r_1 < b$ فإن $r_2 - r_1 = 0$ أي $r_2 = r_1$

وبالتعويض في (*) نجد $q_1 - q_2 = 0$ أي $q_1 = q_2$

إذن الثنائية (q,r) وحيدة.

تعريف

إجراء القسمة الإقليدية في المجموعة $\mathbb{N}$ للعدد الطبيعي a على العدد الطبيعي b مع $b \neq 0$ هي إيجاد الثنائية الطبيعية (q,r) بحيث $a=bq+r$ مع $b > r \geq 0$.

يسمى q حاصل هذه القسمة و r باقيها و b القاسم و a المقسوم.

مثال -

القسمة الإقليدية لـ 12 على 5 هي $12=5\times2+2$ حيث $5 > 2 \geq 0$

القسمة الإقليدية لـ 23 على 5 هي $23 = 5 \times 4 + 3$ حيث $5 > 3 \geq 0$

القسمة الإقليدية لـ 31 على 50 هي $31 = 50 \times 0 + 31$

نتيجة

- إذا كان b عددا طبيعيا معطى فإن كل عدد طبيعي n يمكن كتابته على الشكل $n = bq + r$ مع $r \in \{0,1,...,b-1\}$ ومنه فإن بواقي القسمة الممكنة في القسمة الإقليدية لـ n على b هي $0, 1, ..., b-1$
- القول أن b يقسم a يكافئ القول أنه في القسمة الإقليدية لـ a على b يكون الباقي معدوما.

مثال -

كل عدد طبيعي n يكتب $5p$ أو $5p+1$ أو $5p+2$ أو $5p+3$ أو $5p+4$ مع p عدد طبيعي

كل عدد طبيعي n يكتب أيضا $4p$ أو $4p+1$ أو $4p+2$ أو $4p+3$ مع p عدد طبيعي.

2 . 2 القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

a و b عددان صحيحان مع $b \neq 0$ عندئذ يوجد عدد صحيح وحيد q وعدد طبيعي وحيد r بحيث $a = bq + r$ و $0 \le r < |b|$

الإثبات

نثبت هذه المبرهنة في حالة b موجب و a صحيح سالب.

نضع $a = -a'$ مع a' عدد طبيعي موجب

بما أن a' و b موجبان فإن القسمة الإقليدية لـ a' على b تعطي لنا $a'=q'b+r'$

وبالضرب في (-1) نجد $-a'=-q'b-r'$ أي $a=-q'b-r'$

نضيف $b-b$ إلى الطرف الثاني نجد $a=-q'b-r'+b-b$

أي $a=-(q'+1)b+b-r'$

وبوضع $b-r'=r$ و $-(q'+1)=q$ فإن المساواة الأخيرة تصبح $a=bq+r$

بما أن $0 \le r' < b$ فإن $b > b-r' \ge 0$

مثال -

1) $a=35$ و $b=-9$

القسمة الإقليدية لـ 35 على 9 تعطي $35 = 9 \times 3+8$ أي $35=(-9)(-3)+8$

وبالتالي $q=-3$ و $r=8$

2) $a=-35$ و $b=-9$

$-35=-9\times3-8=-9\times3-8+9-9=-9\times4+1=9(-4)+1$

إذن $q=-4$ و $r=1$

تمرين تدريبي 1

أوجد كل الأعداد الطبيعية n بحيث إذا قسمت على 4 يكون الباقي يساويا للحاصل.

الحل

لدينا $n=4r+r$ مع $0 \le r < 4$ إذن $n=5r$ مع $0 \le r < 4$

إذن قيم r هي $3,2,1,0$

وبالتالي قيم n هي $15, 10, 5, 0$

تمرين تدريبي 2

n عدد طبيعي. بين أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن العدد $3n^4+5n+1$ يكون فرديا وأنه لا يقبل القسمة على $n(n+1)$.

الحل

كل عدد طبيعي n يمكن كتابته على الشكل: $2p$ أو $2p+1$ حيث p عدد طبيعي

- إذا كان $n=2p$ فإن $3n^4$ زوجي و $5n$ زوجي

وبالتالي $3n^4+5n$ زوجي وعليه يكون $3n^4+5n+1$ فرديا

- إذا كان $n=2p+1$ فإن n^4 يكون فرديا وبالتالي $3n^4$ فردي

إذن العدد $3n^4+5n+1$ فردي (مجموعة ثلاثة أعداد فردية يساوي عدد فردي)

إذن مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $3n^4+5n+1$ يكون عددا فرديا.

- القسمة الإقليدية للعدد $3n^4+5n+1$ على العدد $n(n+1)$ تعطي لنا:

$3n^4+5n+1=(n^2+n)(3n^2-3n+3)+2n+1$.

- نفرض أن $n(n+1)$ يقسم $3n^4+5n+1$ وبما أن $n(n+1)$ يقسم $(n^2+n)(3n^2-3n+3)$ فإن $n(n+1)$ يقسم $2n+1$ وهذا تناقض كون $n(n+1)$ زوجي و $2n+1$ فردي

إذن $n(n+1)$ لايقسم $3n^4+5n+1$.

تمرين تدريبي 3

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(n^2-1)$ مضاعف لـ 2 ومضاعف لـ 3

الحل

نضع $d=n(n^2-1)$ وبما أن $n^2-1=(n-1)(n+1)$ فإن $d=n(n-1)(n+1)$

- نثبت أن d مضاعف لـ 2:

بما أن $n(n-1)$ زوجي فإن d عدد زوجي لأن جداء عدد زوجي مع أي عدد آخر يكون زوجيا.

- نثبت أن d مضاعف لـ 3 :

كل عدد طبيعي n يمكن كتابته على الشكل $3p$ أو $3p+1$ أو $3p+2$ مع p عدد طبيعي.

إذا كان $n=3p$ فإن $d=3p(9p^2-1)$ فهو إذن مضاعف لـ 3

إذا كان $n=3p+1$ فإن $d=3\left[p(3p+1)(3p+2)\right]$ ومنه نستنتج أن d مضاعف لـ 3.

إذا كان $n=3p+2$ فإن $d=3\left[(p+1)(3p+1)(3p+2)\right]$ ومنه نستنتج أن d مضاعف لـ 3

إذن مهما يكن n فإن d مضاعف لـ 3.

3. الموافقة بترديد m

تعريف

m عدد طبيعي أكبر تماما من الصفر.

القول أن العددين الصحيحين a و a' متوافقان بترديد m يعني أن لهما نفس القسمة الإقليدية على m

مبرهنة

a و a' عددان صحيحان متوافقان بترديد m يكافئ: $a'-a$ يقبل القسمة على m.

الإثبات

- نفرض أن لـ a و a' نفس باقي القسمة على m بحيث $a=mq+r$ و $a'=mq'+r$

بالطرح نجد $a'-a=m(q'-q)$ وهذا يعني أن $a'-a$ يقبل القسمة على m

- نفرض أن $a'-a$ يقبل القسمة على m إذن يوجد عدد صحيح k' بحيث $a'-a=k'm$

نقسم a على m فنجد $a=mk+r$ مع $m > r \geq 0$

لكن $a'=a+k'm$ إذن $a'=mk+r+k'm$

أي $a'=(k+k')m+r$ مع $m > r \geq 0$ إذن باقي قسمة a' على m هو r.

ترميز

إذا كان a و a' متوافقان بترديد m نكتب $a'\equiv a\,[m]$

و يقرأ " a' يوافق a بترديد m"

مثال -

$1\equiv 21\,[2]$ لأن $(1-21)$ يقبل القسمة على 2

$1\equiv -15\,[4]$ لأن $(1-(-15))$ يقبل القسمة على 4

$1\equiv -1\,[2]$ لأن $(1-(-1))$ يقبل القسمة على 2

ملاحظة

1) إذا كان r باقي قسمة a على m فإن $a\equiv r\,[m]$

2) a يقبل القسمة على m يعني أن $a\equiv 0\,[m]$

خواص الموافقة

1) مهما كان الترديد فإن $a\equiv a$

2) إذا كان $a\equiv b\,[m]$ وإذا كان $b\equiv c\,[m]$ فإن $a\equiv c\,[m]$

3) إذا كان $a\equiv b\,[m]$ و $a'\equiv b'\,[m]$ فإن :

$a+a'\equiv b+b'\,[m]$ و $a-a'\equiv b-b'\,[m]$ و $aa'\equiv bb'\,[m]$

4) إذا كان $a\equiv b\,[m]$ فإن $a^p\equiv b^p\,[m]$ حيث p عدد صحيح موجب.

5) إذا كان a و b و m يقبل القسمة على نفس العدد الطبيعي الموجب C فإن :

$a\equiv b\,[m]$ يستلزم $\frac{a}{c}\equiv\frac{b}{c}\left[\frac{m}{c}\right]$.

الإثبات

$a\equiv b\,[m]$ تكافئ $a-b=km$ ......(1)

$a'\equiv b'\,[m]$ تكافئ $a'-b'=k'm$ ......(2)

بجمع (1) و (2) نجد $(a+a')-(b+b')=(k+k')m$

وهذا يعني أن $(a+a')-(b+b')$ يقبل القسمة على m أي $a+a'\equiv b+b'\,[m]$

- لدينا :

$aa'-bb'=aa'-bb'-ab'+ab'=a(a'-b')+b'(a-b)$

$=a\times k'm+b'km=m(ak'+b'k)=mk''$

ومنه $aa'-bb'$ يقبل القسمة m أي $aa'\equiv bb'\,[M]$

نتيجة

- إذا كان $a\equiv b$ فإنه من أجل كل عدد صحيح x لدينا :

$a+x\equiv b+x$ و $a-x\equiv b-x$ و $ax\equiv bx$

- إذا كان $yx\equiv 0\,[m]$ فإن $x\equiv 0\,[m]$ أو $y\equiv 0\,[m]$

ملاحظة

لدينا $2\times 5\equiv 4\,[6]$ وبالقسمة على 2 نتحصل على $5\equiv 2\,[6]$

أي $(5-2)$ يقبل القسمة على 6 وهذا خطأ.

إذن بشكل عام لا تبسط الموافقة بقسمتها على العامل المشترك لكن إذا كان $ab\equiv ac\,[m]$ و a و m أوليين فيما بينهما فإنه ينتج $b\equiv c\,[m]$

تمرين تدريبي 1

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^7+6n\equiv 0\,[7]$

✓ الحل

بواقي قسمة العدد الطبيعي n على 7 هي 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6
الجدول التالي يبين لنا بواقي قسمة كل من n^7 و $6n$ و n^7+6n على 7

باقي قسمة n على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة n^7 على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $6n$ على 7	0	6	5	4	3	2	1
باقي قسمة n^7+6n على 7	0	0	0	0	0	0	0

مثال لكيفية ملء هذا الجدول
إذا كان $n \equiv 2[7]$ فإن :
$6n \equiv 12[7]$ أي $6n \equiv 5[7]$
$n^7 \equiv 2^7[7]$ أي $n^7 \equiv (2^3)^2 \times 2[7]$ لكن $(2^3)^2 \equiv 1[7]$ إذن $n^7 \equiv 2[7]$
نستنتج من الجدول أنه مهما كان n فإن باقي قسمة n^7+6n مضاعف للعدد 7
أي $n^7+6n \equiv 0[7]$

تمرين تدريبي 2

أوجد باقي القسمة الإقليدية على العدد 7 لكل من العددين :
أ) $1416+713$ ب) 219^{20}

✓ الحل

أ)
$$\begin{array}{r|l} 713 & \\ 013 & 7 \\ 7 & \overline{101} \\ 6 & \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r|l} 1416 & 7 \\ 016 & \overline{202} \\ 2 & \end{array}$$

إذن $713 \equiv 6[7]$ و $1416 \equiv 2[7]$ ومنه نستنتج $1416+713 \equiv 8[7]$
بما أن $8 \equiv 1[7]$ فإن $1416+713 \equiv 1[7]$

ب) لإيجاد باقي قسمة a^n على m نبدأ في البحث عن باقي قسمة a على m .

$$\begin{array}{r|l} 219 & 7 \\ 09 & \overline{31} \\ 2 & \end{array}$$

ومنه $219 \equiv 2[7]$ وبما أن $219 \equiv 2[7]$ فإن $219^{20} \equiv 2^{20}[7]$

إذن العملية آلت إلى البحث عن باقي قسمة 2^{20} على 7
لكن $2 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ و $2^3 \equiv 1[7]$

إذن متتالية البواقي دورية ودورها 3 .
لأن $2^4 \equiv 2^1[7]$ ، $2^5 \equiv 2^2[7]$ ، $2^6 \equiv (2^3) \equiv 1$ إذن :
- إذا كان $n=3p$ فإن $2^n \equiv 1$
- إذا كان $n=3p+1$ فإن $2^n \equiv 2$
- إذا كان $n=3p+2$ فإن $2^n \equiv 4$

بما أن $20=3\times 6+2$ أي $20=3p+2$ مع $p=6$ فإن $2^{20}\equiv 4[7]$ إذن $219^{20}\equiv 4[7]$

تمرين تدريبي 3

n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 5
1) ما هي بواقي قسمة n على 5 ؟ ثم اكتب الموافقات المقابلة للبواقي .
2) عين في كل حالة من الحالات السابقة الموافقات بترديد 5 للعدد n^4-1 ،
ثم ماذا تستنتج حول قابلية القسمة للعدد n^4-1 على 5 ؟

✓ الحل

1) بواقي قسمة أي عدد طبيعي على 5 هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4
وبما أن n ليست مضاعف لـ 5 فإن القيمة 0 مرفوضة . وبالتالي البواقي الممكنة هي 1، 2، 3، 4 .
الموافقات المقابلة لهذه البواقي هي $n\equiv 1[5]$ ، $n\equiv 2[5]$ ، $n\equiv 3[5]$ ، $n\equiv 4[5]$

2) إذا كان $n\equiv 1[5]$ فإن $n^4\equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4-1\equiv 0[5]$
إذا كان $n\equiv 2[5]$ فإن $n^4\equiv 2^4[5]$ أي $n^4\equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4-1\equiv 0[5]$
إذا كان $n\equiv 3[5]$ فإن $n^4\equiv 3^4[5]$ أي $n^4\equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4-1\equiv 0[5]$
إذا كان $n\equiv 4[5]$ فإن $n^4\equiv 4^4[5]$ أي $n^4\equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4-1\equiv 0[5]$
نستنتج مما سبق أنه إذا كان n ليس مضاعفا لـ 5 فإن العدد n^4-1 مضاعف لـ 5

4 - أنظمة التعداد

إقتراح نظام تعداد هو إعطاء طريقة تسمح لنا بكتابة الأعداد بواسطة عدد منته من الرموز ،
ونظام التعداد المشهور هو النظام العشري الذي يسمح بكتابة كل الأعداد باستعمال الأرقام العشرة 0، 1، 2، ....، 9.

1.4 نشر عدد طبيعي N

مبرهنة
من أجل كل عدد طبيعي N موجب تماما ومن أجل كل عدد طبيعي $x > 1$ يوجد

نشر وحيد للعدد N بحيث $N = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} .... + a_1 x^1 + a_0$
و a_0 ، a_1 ، a_2 ...... a_n أعداد طبيعية أصغر من x و $a_n \neq 0$

الإثبات

القسمة الإقليدية للعدد N على x تعطي لنا $N = R_1 x + a_0$
حيث a_0 باقي القسمة و R_1 حاصل القسمة.
وبما أن الثنائية (R_1 , a_0) وحيدة فإن هذا النشر وحيد .
بقسمة R_1 على x نجد $R_1 = R_2 x + a_1$
إذن $N = (R_1 x + a_1) x + a_0 = a_0 + a_1 x + R_1 x^2$
بقسمة R_2 على x نجد $R_2 = R_3 x + a_2$
ومنه يكون $N = a_0 + a_1 x + (R_3 x + a_2) x^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + R_3 x^3$
وهكذا دواليك حتى نصل إلى حاصل قسمة R_{n+1} على x معدوم
وفي هذه الحالة يكون $N = a_0 + a_1 x + a_2 x + ... + a_n x^n$

مثال -

لدينا النشر التالي : $N = 32$ و $x = 3$
$N = 2 \times x_0^0 + 1 \times x^1 + 0 \times x^2 + 1 \times x^3$

ترميز

إذا كان $N = a_0 + a_1 x + a_2 x + ... + a_n x^n$ حيث a_0 ، a_1 ، ...... ، a_n أعداد طبيعية و $a_n \neq 0$
ومن أجل كل $i \in [0 , n]$ يكون $a_i < x$ فإنه يمكننا أن نرمز للعدد N كالتالي :
$N = \overline{a_n a_{n-1} .... a_1 a_0}$ أو $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$
وفي هذه الحالة نقول أننا كتبنا N في نظام تعداد أساسه x .

مثال -

1) النظام الثنائي هو نظام أساسه 2 و أرقامه 0 و 1
فمثلا العدد 10 يكتب في هذا النظام ب $\overline{1010}$ والعدد 2 يكتب في هذا النظام ب 10
2) النظام الرباعي هو نظام أساسه 4 و أرقامه 0 ، 1 ، 2 ، 3
العدد 4 في هذا النظام يكتب 10
3) النظام الحادي عشر هو نظام أساسه 11 و أرقامه 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 8 ، 9 ، α حيث α تمثل العدد 10
4) النظام الثاني عشر هو نظام أساسه 12 وأرقامه 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 8 ، 9 ، α ، β حيث β تمثل الرقم 11

2.4 الإنتقال من الأساس x إلى الأساس y

ليكن N عدد طبيعي غير معدوم مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس x حيث $x > 1$.

إذا أردنا كتابة العدد N في النظام التعداد ذي الأساس y حيث $y > 1$ فإننا نكتب N في النظام ذي الأساس 10 ثم نكتبه في النظام ذي الأساس y .

مثال -

لدينا $N = \overline{1231}^4$ نريد كتابته في النظام ذي الأساس 5 .
$N = 1 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + 1 \times 4^3$
$= 1 + 12 + 32 + 64 = 109$
إذن $N = \overline{109}^{10}$
$109 = 4 \times 5^0 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^2$
إذن $\overline{109}^{10} = \overline{414}^5$

$$\begin{array}{llll} 100 & \lfloor 5 & & \\ \boxed{4} & 21 & \lfloor 5 & \\ & \boxed{1} & 4 & \lfloor 5 \\ & & \boxed{4} & 0 \end{array}$$

ملاحظة

- إذا كان $y = x^k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ ، فإنه يمكن الإنتقال من التعداد ذي الأساس x إلى نظام التعداد ذي الأساس y دون المرور إلى النظام العشري .

مثال -

ليكن $N = \overline{101101}^2$ و $x = 2$ و $y = 2^3$
$N = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5$
$= (1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2) \times 8^0 + (1 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2) \times 8^1$
$= 5 \times 8^0 + 5 \times 8^1 = \overline{55}^8$

3.4 قابلية القسمة

كل عدد طبيعي $N > 1$ يكتب على الشكل $N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ مع $a_n \neq 0$

- قابلية القسمة على 2 :

N يقبل القسمة على 2 يكافئ a_0 يقبل القسمة على 2
اي $a_0 \equiv 0 [2]$ يكافئ $N = 0 [2]$

- قابلية القسمة على 5 :

$N \equiv 0 [5]$ يكافئ $a_0 \equiv 0 [5]$

- قابلية القسمة على 3 :

$N \equiv 0 [3]$ يكافئ $a_0 + a_1 + ... + a_n \equiv 0 [3]$

- قابلية القسمة على 9 :

$N \equiv 0 [9]$ يكافئ $a_0 + a_1 + ... + a_n = 0 [9]$

- قابلية القسمة على 11 :

$N = 0 [11]$ يكافئ $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n = 0 [11]$

- قابلية القسمة على 25 :

$N \equiv 0[25]$ يكافئ $a_0 + 10\,a_1 \equiv 0[25]$

- قابلية القسمة على 4 :

$N \equiv 0[4]$ يكافئ $a_0 + 2\,a_1 \equiv 0[4]$

مثال -

العدد 1236 يقبل القسمة على 3 لأن $1+2+3+6 \equiv 0[3]$

العدد 1331 يقبل القسمة على 11 لأن $1-3+3-1 \equiv 0[11]$

العدد 1024 يقبل القسمة على 4 لأن $4+2\times 2 \equiv 0[4]$

تمرين تدريبي

A عدد يكتب في النظام السباعي بـ 16524 اكتب هذا العدد في النظام ذي الأساس 12

الحل

يكتب A في النظام العشري

$$A = 4\times 7^0 + 2\times 7^1 + 5\times 7^2 + 6\times 7^3 + 1\times 7^4$$

$$= 4 + 14 + 245 + 2058 + 2401 = 4722$$

إذن $A = \overline{2896}^{12}$

$$\begin{array}{l} 4722 \,|\, 12 \\ \boxed{6}\; 393 \,|\, 12 \\ \quad \boxed{9}\; 32 \,|\, 12 \\ \quad\quad \boxed{8}\; 2 \,|\, 12 \\ \quad\quad\quad \boxed{2}\; 0 \end{array}$$

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1) اوجد كل قواسم 15 في $\mathbb{N}$

2) اوجد كل الثنائيات الطبيعية (x, y) بحيث $x^2 - y^2 = 15$ .... (I)

الحل

1) لدينا $15 = 3 \times 5$ ومنه قواسم 15 هي 1 ، 3 ، 5 ، 15

2) المعادلة (I) تكتب على الشكل $(x-y)(x+y) = 15$

ومنه نستنتج أن $x-y$ و $x+y$ قاسمان لـ 15 .

وبما أن $x+y > x-y$ فان $(x+y)=15$ و $(x-y)=1$ أو $x+y=5$ و $x-y=3$

إذا كان $\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=1 \end{cases}$ فان $\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$

إذا كان $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ فان $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

إذن مجموعة الثنائيات (x, y) التي تحقق المعادلة (I) هي $(8,7)$ و $(4,1)$

تطبيق 2 القسمة الاقليدية

a عدد طبيعي غير معدوم.

علما أن حاصل قسمة 990 على a يساوي 39

1) اكتب العلاقة التي تترجم هذه القسمة.

2-أ) بين أن $39a \le 990 < 40a$

ب) استنتج a وباقي القسمة r.

الحل

1) العلاقة التي تترجم هذه القسمة هي $990 = 39a + r$ مع $0 \le r < a$

2) أ) بما أن $r \ge 0$ فان $39a \le 990$ ..... (I)

بما أن $r < a$ فإن $39a+r < 40a$ أي $990 < 40a$ ...... (2)

من (1) و (2) نجد $40a > 990 \geq 39a$

ب) من (1) نجد $a \leq \frac{990}{39}$ أي $a \leq 25,38$

من (2) نجد $a > \frac{990}{40}$ أي $a > 24,75$

إذن $25,38 > a \geq 24,75$ وبما أن a عدد طبيعي فإن $a = 25$

ومنه $r = 990 - 39\times 25 = 15$

تطبيق 3 القسمة الإقليدية

مجموع عددين a و b هو 16 وحاصل وباقي القسمة الإقليدية لـ a على b هما على التوالي 2، 1. عين a و b.

الحل

لدينا $a + b = 16$ و $a = 2b+1$

بعد تعويض a في المساواة $a + b = 16$ نجد $3b = 15$ ومنه $b = 5$

إذن $a = 2\times 5+1=11$

تطبيق 4 القسمة الإقليدية

a و b عددان طبيعيان في القسمة الإقليدية لـ a على b يكون باقي القسمة r أكبر أو يساوي من حاصل القسمة q.

1) بين أنه إذا قسمنا a على $b+1$ فإننا نحصل على نفس حاصل القسمة

2) إذا علمت أن باقي قسمة a على 21 هو 14 وباقي قسمته على 22 هو 13 فأوجد a.

الحل

1) لدينا $a = qb + r$ مع $r \geq q$

المساواة $a = qb + r$ تكتب أيضا على الشكل $a= qb+r+q-q$

أي $a = q(b + 1) + (r - q)$

بما أن $r \geq q$ فإن $r - q \geq 0$

بما أن $q \geq r$ و $r < b$ فإن $r-q < b-r < b < b+1$

إذن حاصل قسمة a على $b + 1$ هو q

2) لدينا $a = 21q+14$ و $a = 22q'+13$

بما أن $22 = 21+1$ و $q < 14$ فإن $q = q'$

إذن $a = 21q+14$ و $a = 22q+13$

ومنه ينتج $a = 22q+13 = 21q+14$ وبعد حل هذه المعادلة نجد $q = 1$

وبالتالي $a = 21\times 1 + 14 = 35$

تطبيق 5 القسمة الإقليدية

a و b عددان طبيعيان. حاصل وباقي القسمة a على b هما على التوالي q و r

نضيف للعدد a عددا صحيحا h.

1) مثل على محور الأعداد الحقيقية الأعداد a ، bq ، $b(q+1)$

2) من أجل أي قيم لـ h يكون حاصل قسمة $a + h$ على b هو q

3) أوجد قيم h في حالة $a = 67$ و $b = 17$

الحل

1) لدينا $a=qb+r$ مع $b > r \geq 0$

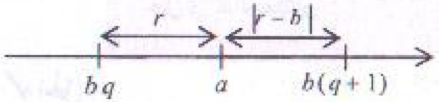
بإضافة b إلى طرف المساواة $a=qb+r$

نجد $a+ b = b(q + 1) + r$

ومنه ينتج $a-b(q + 1) = r- b$

وبما أن $r-b < 0$ فإن $a-b(q+1) < 0$

أي $a < b(q+1)$



2) لدينا $a = qb + r$ وبإضافة h إلى طرفي المساواة السابقة

نجد $a + h = bq+r+h$ .....(1)

ولدينا فرضا $a + h = bq+r'$ .....(2) مع $b > r' \geq 0$

من (1) و (2) نجد $r + h = r'$

بما أن $b > r' \geq 0$ فإن $b > r+h \geq 0$ ومنه ينتج $b-r > h \geq -r$

ومنه قيم h من المجال $[-r , b - r[$

3) لدينا $67= 3 \times 17+ 16$ ومنه $r = 16$ وبالتالي $h \in [-16 , 1[$

تطبيق 6 تعيين باقي القسمة باستعمال الموافقة

1) بين أن $5^2 \equiv -1[13]$ و $5^4 \equiv 1[13]$

2) k عدد طبيعي بين أن $5^{4k} \equiv 1[13]$ ثم استنتج باقي قسمة العدد 148^{2007} على 13

الحل

1) لدينا $5^2 \equiv 12\,[13]$ ولدينا ايضا $12 = 1\times 13 - 1$

ومنه $12 \equiv -1\,[13]$ إذن $5^2 \equiv -1\,[13]$

بما ان $5^2 \equiv -1\,[13]$ فان $(5^2)^2 \equiv (-1)^2\,[13]$ أي $5^4 \equiv 1\,[13]$

2) بما ان $5^4 \equiv 1\,[13]$ فان $(5^4)^k \equiv (1)^k\,[13]$ أي $5^{4k} \equiv 1\,[13]$ مع k عدد طبيعي .

بما ان $148 \equiv 5\,[13]$ فان $148^{2007} \equiv 5^{2007}\,[13]$

لكن $2007 = 4 \times 501 + 3$ إذن $148^{2007} \equiv 5^{4\times 501} \times 5^3\,[13]$

لدينا $5^{4\times 501} \equiv 1\,[13]$ و $5^3 \equiv 8\,[13]$

ومنه ينتج $5^{4\times 501+3} \equiv 8\,[13]$

إذن باقي قسمة 148^{2007} على 13 هو 8 .

تطبيق 7 حل معادلات باستعمال الموافقة

حل في $\mathbb{Z}$ الجملتين $\begin{cases} 2x+1 \equiv -3\,[7] \\ 25 \geq x \geq 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2x+1 \equiv -2\,[7] \\ 25 \geq x \geq 0 \end{cases}$

الحل

1) $2x+1 \equiv -3\,[7]$ تكافئ $2x \equiv -4\,[7]$

وبما ان $-4 \equiv 3\,[7]$ فان $2x \equiv 3\,[7]$

لحل المعادلة $2x \equiv 3\,[7]$ لابد من جعل معامل x يساوي 1 ومن اجل ذلك نضرب الطرفين في 4 نحصل على $8x \equiv 12\,[7]$ اي $x \equiv 5\,[7]$

إذن $x = 7k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وبما ان $25 \geq x \geq 0$ فان $20 \geq 7k \geq -5$

وبالقسمة على 7 نجد $2,8 \geq k \geq \frac{-5}{7}$

إذن $k \in \{0,1,2\}$ وعليه $x \in \{5,12,19\}$

2) $2x+1 \equiv -2\,[7]$ تكافئ $2x \equiv -3\,[7]$

بما ان $-3 \equiv 4\,[7]$ فان $2x \equiv 4\,[7]$

بما ان $2x \equiv 4\,[7]$ و 2 و 7 اوليان فيما بينهما فاننا نستطيع القسمة على 2

فنجد $x \equiv 2\,[7]$ وهذا يعني $x = 7k+2$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$25 \geq x \geq 0$ يكافئ $23 \geq 7k \geq -2$ يكافئ $\frac{23}{7} \geq k \geq \frac{-2}{7}$

ومنه $k \in \{0,1,2,3\}$ إذن $x \in \{2,9,16,23\}$

تطبيق 8 تعيين باقي القسمة باستعمال الموافقة

1) تحقق ان 999 يقبل القسمة على 27

2) بين ان $10^{3n} \equiv 1\,[27]$

3) ما هو باقي قسمة العدد $10^{100} + 100^{10}$ على 27 ؟

الحل

1) $999 = 37 \times 27 + 0$ ومنه العدد 999 يقبل القسمة على 27

2) لدينا $10^{3n} = (10^3)^n$ و $10^3 = 999 + 1$

إذن $10^3 \equiv 1\,[27]$ وبالتالي $(10^3)^n \equiv 1\,[27]$ وعليه $10^{3n} \equiv 1\,[27]$

3) $10^{100} = 10^{3\times 33+1}$ و $100^{10} = 10^{20} = 10^{3\times 6+2}$

لكن $10^{3n} \equiv 1\,[27]$ إذن $10^{3\times 33} \equiv 1\,[27]$ و $10^{3\times 6} \equiv 1\,[27]$

$10^{100} + 100^{10} \equiv 10^{3\times 33+1} + 10^{3\times 6+2}\,[27]$

$10^{100} + 100^{10} \equiv 10^1 + 10^2\,[27]$

$10^{100} + 100^{10} \equiv 110\,[27]$

$10^{100} + 100^{10} \equiv 2\,[27]$

إذن باقي قسمة $10^{100} + 100^{10}$ على 27 هو 2

تطبيق 9 إثبات باستعمال الموافقة قابلية قسمة عدد

1) تحقق ان $3^3 \equiv 1\,[13]$ ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $3^{3n} \equiv 1\,[13]$

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 \equiv 0\,[13]$

الحل

1) لدينا $3^3 = 27 = 2 \times 13 + 1$ ومنه $3^3 \equiv 1\,[13]$

لدينا $3^{3n} = (3^3)^n$ ولكن $3^3 \equiv 1\,[13]$ إذن $(3^3)^n \equiv 1^n\,[13]$ اي $3^{3n} \equiv 1\,[13]$

2) إثبات ان $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 \equiv 0\,[13]$

لدينا $3^{6n} = (3^{3n})^2$ لكن $3^{3n} \equiv 1\,[13]$ إذن $(3^{3n})^2 \equiv 1^2\,[13]$

اي $3^{6n} \equiv 1\,[13]$

$\begin{cases} 3^{6n} \equiv 1\,[13] \\ 3^2 \equiv 9\,[13] \end{cases}$ ومنه ينتج $3^{6n+2} \equiv 9\,[13]$

$\begin{cases}3^{3n}\equiv 1\,[13]\\ 3^{1}\equiv 3\,[13]\end{cases}$ ومنه ينتج $3^{3n+1}\equiv 3\,[13]$

إذن $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1\equiv 9+3+1\,[13]$

$3^{6n+2}+3^{3n+1}+1\equiv 13\,[13]$

$3^{6n+2}+3^{3n+1}+1\equiv 0\,[13]$

تطبيق 10 تعيين باقي قسمة القوى الطبيعية لعدد

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2^{3n}-1$ قابلا للقسمة على 7

2) استنتج أن العددين $2^{3n+1}-2$ و $2^{3n+2}-4$ يقبلان القسمة على 7

3) عين باقي قسمة قوى العدد 2 على 7.

الحل

1) نسمي p_n الخاصية "$2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7"

P_0 صحيحة لان $2^{3\times 0}-1=0$ و 0 يقبل القسمة على 7

نفرض ان p_n صحيحة أي $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7

ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة أي $2^{3(n+1)}-1$ يقبل القسمة على 7

$2^{3(n+1)}-1=2^{3n+3}-1=2^{3n}\times 8-1$

$=2^{3n}(1+7)-1$

$=2^{3n}-1+7\times 2^{3n}$

بما أن $2^{3n}-1$ و 7×2^{3n} يقبلان القسمة على 7 فإن مجموعهما يقبل القسمة على 7

أي $3^{3(n+1)}-1$ يقبل القسمة على 7 إذن p_{n+1} صحيحة

وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

2) لدينا $2^{3n}-1\equiv 0\,[7]$ ومنه $2^{3n}\equiv 1\,[7]$

$\begin{cases}2^{3n}\equiv 1\,[7]\\ 2^{1}\equiv 2\,[7]\end{cases}$ ومنه ينتج $2^{3n+1}\equiv 2\,[7]$

$\begin{cases}2^{3n+1}\equiv 2\,[7]\\ -2\equiv -2\,[7]\end{cases}$ ينتج $2^{3n+1}-2\equiv 0\,[7]$

من الجملة $\begin{cases}2^{3n}\equiv 1\,[7]\\ 2^{2}\equiv 4\,[7]\end{cases}$ ينتج $2^{3n+2}\equiv 4\,[7]$

من الجملة $\begin{cases}2^{3n+2}\equiv 4\,[7]\\ -4\equiv -4\,[7]\end{cases}$ ينتج $2^{3n+2}-4\equiv 0\,[7]$

3) من اجل كل عدد طبيعي p لدينا $p=3n$ أو $p=3n+1$ أو $p=3n+2$

إذا كان $p=3n$ فان $2^{p}\equiv 1\,[7]$

إذا كان $p=3n+1$ فان $2^{p}\equiv 2\,[7]$

إذا كان $p=3n+2$ فان $2^{p}\equiv 4\,[7]$

تطبيق 11 قابلية القسمة

n عدد طبيعي.

1) بين أن العددين $A=n^2+5n+4$ و $B=n^2+3n+2$ يقبلان القسمة على $n+1$

2) عين مجموعة قيم n التي من أجلها يكون العدد $C=3n^2+15n+19$ قابلا القسمة على $n+1$

3) استنتج انه مهما يكن n فإن العدد $3n^2+15n+19$ غير قابل للقسمة على n^2+3n+2 .

الحل

1) لدينا $n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$ و $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

ومنه $n+1$ يقسم كل من n^2+5n+4 و n^2+3n+2

2) لدينا $3n^2+15n+19=(n+1)(3n+12)+7$ حتى يقبل العدد $3n^2+15n+19$

يجب أن يقبل العدد 7 القسمة على $n+1$

اي $n+1$ ينتمي إلى $\{1,7\}$

إذن القيم المكنة لـ n هي 0 ، 6

3) من اجل كل عدد طبيعي $n\neq 0$ و $n\neq 6$ لدينا:

$3n^2+15n+19$ لا يقبل القسمة على $n+1$

وبالتالي لا يقبل القسمة على n^2+3n+2

من اجل $n=0$ يكون $A=2$ و $C=19$ و 2 لا يقسم 19

من اجل $n=6$ يكون $A=56$ و $C=217$ و 56 لا يقسم 217

إذن مهما يكن العدد الطبيعي n فان A لا يقسم C

تطبيق 12 استعمال الموافقة لإثبات قابلية قسمة عدد على عدد ثابت

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n = 5n^3 + n$

1-1) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n

$U_{n+1} - U_n = 3\left[5n(n+1) + 2\right]$

ب) بين بالتراجع انه من اجل كل n فإن U_n يقبل القسمة على 6

2) باستعمال الموافقة بين انه من اجل كل n فإن U_n يقبل القسمة على 6

✓ الحل

1) أ) $U_{n+1} - U_n = \left[5(n+1)^3 + (n+1)\right] - \left[5n^3 + n\right]$

$= 5\left[(n+1)^3 - n^3\right] + 1$

$= 5\left[(n+1)^2 + (n+1)n + n^2\right] + 1$

$= 5\left[3n^2 + 3n + 1\right] + 1$

$= 3\left[5n(n+1) + 2\right]$

ب) نسمي p_n الخاصية "U_n يقبل القسمة على 6"

p_0 صحيحة لان $U_0 = 0$ و 0 يقبل القسمة على 6

ـ نفرض ان p_n صحيحة اي U_n يقبل القسمة على 6

ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي U_{n+1} يقبل القسمة على 6

لدينا $n(n+1)$ زوجي وبالتالي العدد $5n(n+1) + 2$ يقبل القسمة على 2

إذن العدد $3\left[5n(n+1)+2\right]$ يقبل القسمة على 6

لدينا من السؤال أ) $U_{n+1} = U_n + 3\left[5(n+1) + 2\right]$

وبما ان مجموع عددين يقبلان القسمة على 6 هو عدد يقبل القسمة على 6 فان p_{n+1} يقبل القسمة على 6.

إذن p_{n+1} صحيحة وبالتالي P_n صحيحة من اجل كل n

2) كل عدد طبيعي n يكتب على الشكل $n = 6p + r$ مع $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$

الجدول التالي يبين بواقي قسمة U_n على 6 من اجل كل قيم n السابقة:

باقي قسمة n على 6	0	1	2	3	4	5
باقي قسمة $5n^3$	0	5	4	3	2	1
باقي قسمة U_n على 6	0	0	0	0	0	0

من الجدول نستنتج أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فان $5n^3 + n$ يقبل القسمة على 6

تطبيق 13 حل المعادلات باستعمال الموافقة

1) عين (γ_1) مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث العدد $n = x^2 + x - 2$ يقبل القسمة على 7 .

2) عين (γ_2) مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث العدد $n = x^2 + x - 2$ يقبل القسمة على 3 .

3) k عدد صحيح. تحقق أنه إذا كان $x = 1 + 21k$ أو $x = -2 + 21k$ فان n يقبل القسمة على 42 .

✓ الحل

1) $x^2 + x - 2 \equiv 0[7]$ تكافئ $x^2 - 6x + 5 \equiv 0[7]$

تكافئ $(x-1)(x-5) \equiv 0[7]$

تكافئ $(x-1) \equiv 0[7]$ أو $(x-5) \equiv 0[7]$

تكافئ $x \equiv 1[7]$ أو $x \equiv 5[7]$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي من الشكل $7p + 1$ أو $7p + 5$ مع $p \in \mathbb{Z}$

2) $x^2 + x - 2 \equiv 0[3]$ تكافئ $x^2 - 2x + 1 \equiv 0[3]$

تكافئ $(x-1)^2 \equiv 0[3]$

تكافئ $x - 1 \equiv 0[3]$

تكافئ $x \equiv 1[3]$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي من الشكل $1 + 3p'$ مع p' ينتمي الى $\mathbb{Z}$

3) - إذا كان $x = 1 + 21k$ فان $x \equiv 1[7]$ و $x \equiv 1[3]$

وفي هذه الحالة $n \equiv 0[7]$ و $n \equiv 0[3]$ وبما أن 3 و 7 اوليان فان $n \equiv 0[21]$

وبما ان $n = x(1+x) - 2$ و $x(x+1)$ زوجي فان n زوجي

وبالتالي n يقبل القسمة على 21×2 اي يقبل القسمة على 42

بنفس الطريقة نثبت ان $n \equiv 0[42]$ في حالة $x = -2 + 21k$

تطبيق 14 الموافقات وقابلية القسمة

عين الأعداد الطبيعية n بحيث $n \times 7^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$ .... (I)

✓ الحل

مهما يكن العدد الطبيعي n فان $7^n \equiv (-1)^n[8]$

ـ إذا كان n زوجيا اي $n = 2p$ فان $7^n \equiv 1[8]$

وبالتالي الموافقة (I) تكتب $5n+1 \equiv 0[8]$ اي $2p+1 \equiv 0[8]$

ومنه نجد $2p \equiv 7[8]$ وهذا خطا كون $2p$ زوجي و 7 فردي

- إذا كان n فرديا اي $n = 2p+1$ فان $7^n \equiv -1[8]$

وبالتالي المتوافقة (I) تكتب $3n+1 \equiv 0[8]$

ومنه نجد $6p \equiv 4[8]$ وبالقسمة على 2 نجد $3p \equiv 2[4]$

$3p \equiv 2[4]$ تكافئ $9p \equiv 6[4]$

تكافئ $p \equiv 2[4]$

تكافئ $p = 4k+2$ مع $k \in \mathbb{N}$

إذن $n = 2(4k+2)+1 = 8k+5$

تطبيق 15 الموافقات وقابلية القسمة

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نضع $U_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1}$

1-أ) بين انه إذا كان $U_n \equiv 0[7]$ فان $3^n - 1 \equiv 0[7]$

ب) بين انه إذا كان $3^n - 1 \equiv 0[7]$ فان $2U_n \equiv 0[7]$

ثم وباستعمال جدول الموافقات استنتج ان $U_n \equiv 0[7]$

2) استنتج قيم n التي من اجلها $U_n \equiv 0[7]$

الحل

1) أ) U_n مجموعة n حد الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 3

وبالتالي $U_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$

إذا كان $U_n \equiv 0[7]$ فان $2U_n \equiv 0[7]$ وبما ان $2U_n = 3^n - 1$ فان $3^n - 1 \equiv 0[7]$

ب) بما ان $2U_n = 3^n - 1$ و $3^n - 1 \equiv 0[7]$ فان $2U_n \equiv 0[7]$

باقي قسمة U_n على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $2U_n$ على 7	0	2	4	6	1	3	5

من الجدول نستنتج انه إذا كان $2U_n \equiv 0[7]$ فان $U_n \equiv 0[7]$

2) $U_n \equiv 0[7]$ تكافئ $3^n - 1 \equiv 0[7]$ تكافئ $3^n \equiv 1[7]$

إذن لمعرفة قيم n ندرس بواقي قسمة 3^n على 7

$3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ،

$3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^6 \equiv 1[7]$

إذن البواقي تشكل متتالية دورية دورها 6

وبالتالي $3^n \equiv 1[7]$ يكافئ $n = 6k$ مع $k \in \mathbb{N}$

وعليه مجموعة قيم n التي من اجلها يكون $U_n \equiv 0[7]$ هي من الشكل $6k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

تطبيق 16 تعيين رقم آحاد عدد طبيعي

1) ادرس حسب قيم n باقي قسمة 7^n على 10

2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع $A = 1+7+....+7^n$

ما هو رقم آحاد A ؟

الحل

1) $7^0 \equiv 1[10]$ ، $7^1 \equiv 7[10]$ ، $7^2 \equiv 9[10]$ ، $7^3 \equiv 3[10]$ ، $7^4 \equiv 1[10]$

إذن بواقي قسمة 7^n على 10 تشكل متتالية دورية دورها 4

من اجل كل عدد طبيعي n فان $n = 4p+r$ حيث $r \in \{0,1,2,3\}$

من اجل كل p من $\mathbb{N}$ لدينا :

$7^4 \equiv 1[10]$ تستلزم $7^{4p} \equiv 1[10]$

- من اجل $n = 4p$ يكون $7^n \equiv 1[10]$

- من اجل $n = 4p+1$ ،

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1[10] \\ 7^1 \equiv 7[10] \end{cases}$ ومنه ينتج $7^{4p+1} \equiv 7[10]$ اي $7^n \equiv 7[10]$

- من اجل $n = 4p+2$

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1[10] \\ 7^2 \equiv 9[10] \end{cases}$ ومنه ينتج $7^n \equiv 9[10]$

- من اجل $n = 4p+3$

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1[10] \\ 7^3 \equiv 3[10] \end{cases}$ ومنه ينتج $7^{4p+3} \equiv 3[10]$ اي $7^n \equiv 3[10]$

2) - إذا كان $n = 4p$ فان $A = 1 + 7 + ... + 7^{4p}$

$A = 1 + 7 + ... + 7^{4p}$

$A = (1 + 7^1 + 7^2 + 7^3) + ... + (7^{4p-4} + 7^{4p-3} + 7^{4p-2} + 7^{4p-1}) + 7^{4p}$

$$A = \underbrace{20 + 20 + ... + 20}_{\text{مرة}} + 1\,[10]$$

$$A \equiv 1\,[10]$$

إذن رقم آحاد A هو 1

ـ إذا كان $n = 4p + 1$ فان :

$$A = (\underbrace{1 + 7^1 + 7^2 + 7^3) + ... + (7^{4p-4} + 7^{4p-3} + 7^{4p-2} + 7^{4p-1}}_{p}) + 7^{4p} + 7^{4p+1}$$

$$A = \underbrace{20 + 20 + ... + 20}_{} + 1 + 7\,[10]$$

ومنه $A \equiv 8\,[10]$

وبالتالي رقم آحاد A هو 8

بنفس الطريقة إذا كان $n = 4p + 2$ نجد رقم آحاد A هو 7

وإذا كان $n = 4p + 3$ فان رقم آحاد A هو 0

تطبيق 17 تعيين أساس نظام التعداد

n عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{4x3}^5$ ويكتب $\overline{x30}^9$

1) عين الرقم x ثم أحسب n في النظام العشري.

2) عين أساس نظام التعداد الذي يكون فيه $\overline{132}^y = \overline{53}^y + \overline{46}^y$ وأحسب في هذا النظام $\overline{16}^y \times \overline{32}^y$.

✔ الحل

1) لدينا $n = 3 + 5x + 4 \times 5^2$

ومن جهة أخرى لدينا $n = 0 + 3 \times 9 + x \times 9^2$

إذن $3 + 5 + 100 = 27 + 81x$ وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = 1$

إذن $n = \overline{130}^9 = \overline{413}^5$

ـ كتابة n في النظام العشري :

$$n = \overline{130}^9 = 0 + 3 \times 9 + 1 \times 9^2 = 27 + 81 = 108$$

2) $\begin{cases} \overline{132}^y = \overline{53}^y + \overline{46}^y \\ y \rangle 6 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y^2 + 3y + 2 = 6 + 4y + 3 + 5y \\ y \rangle 6 \end{cases}$ تكافئ $y = 7$

حساب $\overline{32}^7 \times \overline{46}^7$:

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 32 \\ \hline 125 \\ 204\cdot \\ \hline 2165 \end{array}$$

تطبيق 18 كتابة عدد في نظام التعداد ذو الأساس a

ليكن a عدد طبيعي اكبر تماما من 2 ولدينا العددان التاليان :

$x = 2(a-1)$ و $y = (a-1)^2$

1) اكتب x و y في نظام التعداد ذو الأساس a

2) تحقق من أن x و y يتألفان من نفس الأرقام وبترتيب معاكس.

✔ الحل

1) لدينا فرضا $a \rangle 2$ إذن يمكننا وضع $a = 2 + \alpha$ حيث $\alpha \rangle 0$

$a = 2 + \alpha$ يكافئ $-a + \alpha = -2$

$$x = 2a - 2 = 2a - a + \alpha = a + \alpha$$

$$= \alpha \times a^0 + 1 \times a^1 = \overline{1\alpha}^a$$

$$y = a^2 - 2a + 1 = a^2 + (-a + \alpha)a + 1$$

$$y = \alpha a + 1 = \overline{\alpha 1}^a$$

2) من السؤال 1) نستنتج ان x و y يتألفان من الرقمين 1 و α بترتيب معاكس.

تطبيق 19 كتابة عدد في نظام التعداد ذو الأساس a

لتكن x ، y ، z ثلاثة أعداد طبيعية حيث $y = \overline{131}^x$ و $z = \overline{101}^x$

1) بين أنه يمكن كتابة الجداء xyz في الأساس x وذلك بدون معرفة x.

2) عين الأعداد الطبيعية x ، y ، z علما ان $x + y + z = 50$

✔ الحل

1) لدينا $y = 1 + 3x + x^2$ و $z = 1 + x^2$

$$xyz = x(1 + 3x + x^2)(1 + x^2)$$

$$= x^3 + 3x^4 + x^5 + x + 3x^2 + x^3$$

$$= x + 3x^2 + 2x^3 + 3x^4 + x^5$$

$$= \overline{132310}^x$$

2) بتعويض y و z في المساواة $x + y + z = 50$ نجد :

$x + 1 + 3x + x^2 + 1 + x^2 = 50$ أي $2x^2 + 4x - 48 = 0$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = 4$ إذن $y = 29$ و $z = 17$

تطبيق 20 حل معادلة ذات ثلاثة مجاهيل صحيحة

x و y عددان صحيحان:

1) أوجد بواقي قسمة x^2-3y^2 على 4.

2) هل توجد ثلاثة أعداد صحيحة x ، y ، z بحيث $x^2-3y^2+4z=3$ ؟

الحل

1) نضع $a=x^2-3y^2$

بما أن x و y صحيحان إما أن يكونا زوجيين أو فرديين أو أحدهما فرديا والآخر زوجيا

ـ الحالة الأولى x و y زوجيان:

$x=2k_1$ و $y=2k_2$ ومنه $a=4k_1^2+4k_2^2$ إذن $a\equiv 0[4]$

ـ الحالة الثانية x و y فرديان:

$x=2k_1+1$ و $y=2k_2+1$ ومنه $a=4k_1^2+4k_1-12k_2^2-12k_2-2$ إذن $a\equiv 2[4]$

ـ الحالة الثالثة x فردي و y زوجي:

$x=2k_1+1$ و $y=2k_2$ ومنه $a=4k_1^2+4k_1+1-12k_2^2$ إذن $a\equiv 1[4]$

ـ الحالة الرابعة x زوجي و y فردي:

$x=2k_1$ و $y=2k_2+1$ ومنه $a=4k_1^2-12k_2^2-12k_2-3$ إذن $a\equiv 1[4]$

إذن مهما يكن العددان الصحيحان x و y فإن بواقي قسمة x^2-3y^2 على 4 هي $2,1,0$

2) $x^2-3y^2+4z-3\equiv 0[4]$ يكافئ $x^2-3y^2\equiv 3[4]$ وهذا تناقض.

إذن لا توجد ثلاثية (x,y,z) بحيث $x^2-3y^2+4z=3$

تطبيق 21 توظيف الموافقات لمعرفة عدد عناصر مجموعة

x عدد تلاميذ قسم شعبة العلوم التجريبية حيث أنه إذا وضعناهم في مجموعات ذات عنصرين بقي لنا تلميذ واحد،
وإذا وضعناهم في مجموعات ذات ثلاثة عناصر أو خمسة بقي لنا تلميذان

- أوجد x مع العلم أن $18 < x < 48$.

الحل

من المعطيات يمكن أن نضع:

$$\begin{cases} x\equiv 1[2] & \ldots\ldots (1) \\ x\equiv 2[3] & \ldots\ldots (2) \\ x\equiv 2[5] & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$x\equiv 1[2]$ يكافئ $15x\equiv 15[30]$ لأن $PGCD(15,2)=1$

$x\equiv 2[3]$ يكافئ $10x\equiv 20[30]$ لأن $PGCD(10,3)=1$

$x\equiv 2[5]$ يكافئ $6x\equiv 12[30]$ لأن $PGCD(5,6)=1$

بجمع الموافقات طرفا لطرف نجد $31x\equiv 47[30]$ أي $x\equiv 17[30]$

إذن $x=17+30k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

بما أن $18 < x < 48$ فإن $1 < 30k < 31$ ومنه $\frac{1}{30} < k < \frac{31}{30}$

ومنه $k=1$

إذن عدد التلاميذ هو $x=17+30k=47$

تمارين و مسائل

1

- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 11 ثم إستنتج باقي قسمة 1993^{2008} على 11؟

2) بين أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن العدد $(4^{10n+1} - 2^{10n+8} - 1)$ يقبل القسمة على 11

2

- 1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 8

2) ما هي مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $7^n \times n + 4n + 1 \equiv 0 [8]$

3

- حل في $Z \times Z$ المعادلة $3x - 7y = 5$ ......(1)

2) لتكن الثنائية (x, y) حل للمعادلة (1) . ما هي القيم الممكنة لـ y بحيث $y \equiv 0 [5]$

3) ليكن (d) مستقيم معادلته $3x - 7y - 5 = 0$

أ) عين المجموعة (γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من (d) بحيث x و y صحيحان.

ب) عين المجموعة (γ_1) الجزئية من (γ) وبحيث $OM^2 \equiv 3 [5]$ حيث $M(x, y)$

4

- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ يقبل القسمة على 7

5

- n عدد طبيعي يكتب $x43y$ في النظام ذو الأساس 7

عين الأرقام y, x بحيث $n \equiv 0 [6]$

6

- 1) برهن أن العدد $a = 10^{6n+1} + 10^{3n+1} + 1 \equiv 0 [111]$

2) برهن أن العدد a يقبل القسمة على 7 وعلى 13 وهذا إذا كان n فرديا.

3) برهن أن العدد الطبيعي $B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1$ يقبل القسمة على 7 و 11 و 13 وهذا إذا كان n فرديا .

يمكنك كتابة $10^3 - 1 = 9 \times 111$ و $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$

7

- a عدد طبيعي يكتب $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0$ في النظام العشري

1) اكتب a على الشكل $a = \alpha_0 + 10k$ مع $k \in IN^*$

2) بين أن $5a = 5\alpha_0 - k [17]$

3) بين أن $a \equiv 0 [17]$ يكافئ $5\alpha_0 - k \equiv 0 [17]$

8

- ليكن n عددا طبيعيا .

ما هو باقي قسمة $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ على 4 ؟

9

- بين انه إذا كان n ليس مضاعفا لـ 3 فإن العدد $1 + 5^n + 5^{2n}$ يقبل القسمة على 31

10

- 1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 5^n على 7

2) ليكن $a_n = 16C_n^2 + 64C_n^3 + ... + 4^n C_n^n$ مع $n \geq 2$

ا) بين $a_n = 5^n - 4 - 4n$

ب) احسب المجموع S حيث $S = a_2 + a_3 + ... + a_n$

هل توجد قيم لـ n بحيث $a_n \equiv 0 [7]$ ؟

11

- 1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 5

2) عين باقي قسمة $(1997)^{1524}$ على 5 .

3) احسب بدلالة n المجموع $S = \frac{1}{Ln\,2}\left[Ln\,4 + Ln\,4^2 + ... + Ln\,4^n\right]$

4) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث $S + 4n^2 + 7^{4n} = 0 [5]$

12

- 1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة الاقليدية للعدد 5^n على **11**

2) إستنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد $(25^{1424} - 6^{2009} + 1)$ على **11**

3) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $2 \times 27^{n+1} + 15 \times 16^n + 3456$ قابلا للقسمة على **11**

13

- 1) تحقق أن العدد 7 يقسم الاعداد $2^6 - 1$ ، $3^6 - 1$ ، $4^6 - 1$ ، و $5^6 - 1$

2) n عدد طبيعي و $S_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

برهن ان $S_{n+1} - S_n$ يقبل القسمة على 7

3) n عدد طبيعي و 5 باقي قسمته على 6 .

برهن ان $S_n \equiv S_r [7]$

4) أوجد قيم n بحيث S_n يقبل القسمة على 7

5) نضع $T_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$

برهن أن $S_n \equiv T_n [7]$ ثم استنتج قيم n بحيث T_n يقبل القسمة على 7

14 هل توجد أعداد صحيحة x ، y ، z بحيث $x^2-3y^2-4z=4$ ؟

15 - a رقم غير معدوم نضع $A=\overline{aaa}$ حيث A مكتوب في نظام التعداد ذو الأساس 10 برهن أن A يقبل القسمة على 37

16 - (γ) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

حيث $f(x)=\sqrt{x^2-17}$

- أوجد جميع النقط $M(x,y)$ من (γ) بحيث x و y طبيعيان.

17 - من أجل كل قضية عين الصحيحة والخاطئة لكل منها مع تبرير الاجابة

1) إذا كان $a \equiv 3[49]$ فإن $a \equiv 3[7]$

2) إذا كان a و b عددان طبيعيان غير معدومين وإذا كان d قاسم المشترك لـ $3a+5b$ و $2a+3b$ فإن d يقسم $4b$

3) إذا كان r باقي قسمة a على q فإن r^2 هو باقي قسمة a^2 على q

الدرس 16

القواسم والمضاعفات والأعداد الأولية

1. القاسم المشترك الأكبر

1.1 القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

- من اجل كل عدد طبيعي a نرمز بـ $\mathscr{D}(a)$ إلى مجموعة قواسم a

- من اجل كل عددين طبيعيين a و b نرمز بـ $\mathscr{D}(a,b)$ إلى مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b وعليه $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(a)\cap\mathscr{D}(b)$

واضح ان $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b,a)$

مثال -

$$\mathscr{D}(36)=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$$
$$\mathscr{D}(40)=\{1,2,3,4,5,8,10,20,40\}$$
$$\mathscr{D}(36,40)=\mathscr{D}(36)\cap\mathscr{D}(40)=\{1,2,4\}$$

2.1 القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و $\mathscr{D}(a,b)$ مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b.

المجموعة $\mathscr{D}(a,b)$ غير خالية لأنها تشمل دائما العدد 1

المجموعة $\mathscr{D}(a,b)$ منتهية ومحدودة من الأعلى لأن $\mathscr{D}(a)$ و $\mathscr{D}(b)$ منتهيتان ومحدودتان من الأعلى وعناصرها كلها أصغر او يساوي من a و b.

إذن المجموعة $\mathscr{D}(a,b)$ لها عنصر اكبر والذي نسميه بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
نرمز بـ $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر .

ملاحظة

1) لمعرفة مجموعة القواسم السالبة للعدد a يكفي أخذ كل نظائر عناصر $\mathscr{D}(a)$
2) القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين يعرف بنفس الطريقة وعندئذ فإن قيمته هي القاسم المشترك الأكبر للعددين $|a|$ و $|b|$.

مثال -

$\mathscr{D}(36,40)=\{1,2,4\}$ ومنه $PGCD(36,40)=4$

$\mathscr{D}(3,5)=\{1\}$ ومنه $PGCD(3,5)=1$

نتيجة

1) مهما يكن العدد الطبيعي C فإن $\mathscr{D}(c,0)=\mathscr{D}(c)$
2) إذا كان a يقبل القسمة على b فإن b هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b
3) إذا كان $a=b$ فإن $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(a)$

تمرين تدريبي 1

n عدد طبيعي، a و b عددان طبيعيان بحيث $a=n+4$ و $b=2n+3$
1) بين انه إذا قسم عدد طبيعي d العددين a و b فإنه يقسم 5، مستنتجا القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$
2) أوجد حسب قيم n قيمة $PGCD(a,b)$

✓ الحل

1) بما أن d يقسم a و b يقسم b فإن d يقسم $2a$ ويقسم b
وبالتالي d يقسم $2a-b$ أي يقسم 5
وعليه القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$ هي 1 و 5
2) الطريقة الأولى
نبحث عن قيم n بحيث $PGCD(a,b)=5$
بما أن $d=5$ فإن $a=5k$ مع k عدد طبيعي غير معدوم
$a=5k$ يكافئ $n+4=5k$ ومنه $n=5k-4$
نعوض عبارة n في b نجد $b=10k-5$
نلاحظ أن b موجب و قابل للقسمة على 5
إذن إذا كان $n=5k-4$ مع k غير معدوم فإن $PGCD(a,b)=5$
وإذا كان $n\neq 5k-4$ فإن $PGCD(a,b)=1$

الطريقة الثانية
5 يقسم a هذا يعني أن $n+4\equiv 0[5]$ أي $n\equiv 1[5]$
ومنه ينتج $n=5k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$
من أجل قيم n السابقة نجد $b\equiv 0[5]$
إذن إذا كان $n\equiv 1[5]$ فإن $PGCD(a,b)=5$
وإذا كان غير ذلك فإن $PGCD(a,b)=1$

تمرين تدريبي 2

a و b عددان طبيعيان حيث $a\geq 2b$
أ) بين أن $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b,a-2b)$
ب) باستعمال نتيجة السؤال أ) لعدة مرات استنتج خوارزمية تسمح بإيجاد $\mathscr{D}(66,30)$

✓ الحل

أ) - إذا كان d ينتمي إلى $\mathscr{D}(a,b)$ فإن d يقسم a و b
إذن d يقسم $a-2b$ و d يقسم b
وبالتالي d ينتمي إلى $\mathscr{D}(b,a-2b)$ .... (1)
- إذا كان d ينتمي إلى $\mathscr{D}(b,a-2b)$ فإن
d يقسم b و d يقسم $a-2b$ وبالتالي d يقسم $2b$ ويقسم $a-2b$
إذن d يقسم $a-2b+2b$ ويقسم b وبالتالي يقسم a و b
إذن d ينتمي إلى $\mathscr{D}(a,b)$ .... (2)
من (1) و(2) نجد $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b,a-2b)$
ب) نضع $a=66$ و $b=30$

$\mathscr{D}(66,30)=\mathscr{D}(30,6)=\mathscr{D}(6,18)=\mathscr{D}(18,6)$
$=\mathscr{D}(6,6)=\{1,6\}$

3.1 تعيين القاسم المشترك الأكبر باستعمال خوارزمية إقليدس

مبرهنة

القسمة الإقليدية لـ a على b تعطي $a=bq+r$ مع $b>r\geq 0$ عندئذ تكون القواسم المشتركة لـ a و b هي القواسم المشتركة لـ b و r
أي $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b,r)$ و كحالة خاصة إذا كان $r=0$ فإن :
$\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b,0)=\mathscr{D}(b)$

الإثبات

لإثبات أن $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b,r)$ نبين أن كل عنصر من إحدى المجموعتين هو عنصر من الأخرى.
أ) لنبين أن كل قاسم c لـ a و b يقسم أيضا b و r .
بما أن c يقسم b فإنه يكفي أن نبين أن c يقسم r لكن $r=a-bq$

بما أن c يقسم a و b فإن c يقسم $a-bq$ وبالتالي يقسم r.

ب) لنبين أن كل قاسم d لـ b و r يقسم أيضا a و b لذلك يكفي أن نبين أنه يقسم a

لكن $a = bq + r$

بما أن d يقسم b و r فإن d يقسم أيضا a .

من أ) و ب) نستنتج أن $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r)$

خوارزمية إقليدس

a و b عددان طبيعيان.

إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a,b)=b$

إذا كان b لا يقسم a فإن البحث عن $\mathscr{D}(a,b)$ يؤدي بنا للبحث عن $\mathscr{D}(b,r)$.

بما أن $0 \le r < b$ فإن القسمة الإقليدية لـ b على r تعطي $b = q_1 r + r_1$

وبالتالي $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r) = \mathscr{D}(r,r_1)$.

حيث $0 \le r_1 < r$

القسمة الإقليدية لـ r على r_1 تعطي لنا $r = q_2 r_1 + r_2$

وبالتالي $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r) = \mathscr{D}(r,r_1) = \mathscr{D}(r_1,r_2)$

وهكذا دواليك طالما لا نتحصل على باقي قسمة معدوم

في مرحلة معينة سنتحصل بالتأكيد على باقي قسمة معدوم لأن البواقي المتتالية :

r ، r_1 ، r_2 ، r_3.... هي أعداد موجبة متناقصة وعليه نتحصل على المساواة :

$\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r) = \mathscr{D}(r,r_1) = ... = \mathscr{D}(r_n,0)$

لكن $\mathscr{D}(r_n,0) = \mathscr{D}(r_n)$

إذن $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(r_n)$

بما أن r_n هو العنصر الأكبر في $\mathscr{D}(r_n)$ فإن r_n هو العنصر الأكبر في $\mathscr{D}(a,b)$

إذن $PGCD(a,b) = r_n$

نتيجة

1) إذا كان b لا يقسم a فإن القاسم المشترك الأكبر لـ a و b هو آخر باقي غير معدوم نتحصل عليه في خوارزمية إقليدس

2) مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين موجبين a و b هي مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لهما ونكتب :

$\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(PGCD(a,b))$

مثال -

1) $a = 108$ ، $b = 24$

ومنه $PGCD(108,24) = 12$

الناتج	4	2
108	24	12
الباقي	12	0

2) $a = 187$ ، $b = 165$

ومنه $PGCD(187,165) = 11$

الناتج	1	7	2
187	165	22	11
البواقي	22	11	0

تمرين تدريبي 1

a و b عددان طبيعيان بحيث $a=600$ و $PGCD(a,b) = 12$ و $260 < b < 300$. أوجد قيمة b

الحل

12 يقسم b و $b = 12q$ مع q عدد طبيعي غير معدوم

$260 < b < 300$ يكافئ $260 < 12q < 300$

ومنه ينتج $21,66 < q < 25$

بما أن q عدد طبيعي فإن $q \in \{22,23,24\}$

- إذا كان $q = 22$ فإن $b = 264$ وفي هذه الحالة $PGCD(a,b) = 3$

إذن $q = 22$ مرفوضة

- إذا كان $q = 23$ فإن $b = 276$ وفي هذه الحالة $PGCD(a,b) = 12$

إذن $q = 23$ مقبولة.

- ذا كان $q = 24$ فإن $b = 288$ وفي هذه الحالة $PGCD(a,b) = 24$

إذن $q = 24$ مرفوضة.

إذن توجد قيمة وحيدة لـ b هي 276.

تمرين تدريبي 2

إذا قسمنا 4294 و 3521 على نفس العدد الطبيعي الموجب b نتحصل على الباقيين 10 و 11 على الترتيب. عين قيمة b .

الحل

معطيات التمرين تترجم بـ $\begin{cases}4294 = bq + 10\\3521 = bq' + 11\end{cases}$ ...... (I)

الجملة (I) تصبح $\begin{cases}4284 = bq\\3510 = bq'\end{cases}$

إذن b يقسم 4284 ويقسم 3510 وبالتالي يقسم $PGCD(4284,3510)$

لكن $PGCD(4284,3510) = 18$ وعليه b ينتمي إلى $\{1,2,3,6,9,18\}$

وبما أن $b > 11$ فإن قيمة $b = 18$

2. مبرهنة بيزو

تعريف

نقول عن عددين طبيعيين انهما اوليان فيما بينهما عندما يكون القاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1

ملاحظة

نستطيع تمديد هذا التعريف الى مجموعة الأعداد الصحيحة.

مثال .

5 و 3 أوليان فيما بينهما لأن $PGCD(3,5) = 1$

مثال .

11و 7 أوليان فيما بينهما لأن $PGCD(11,7) = 1$

مبرهنة

a و b عددان طبيعيان غير معدومان

القول أن a و b أوليان فيما بينهما يكافئ القول انه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $au + bv = 1$

الإثبات

ـ نفرض انه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $au + bv = 1$

ونبرهن ان a و b أوليان فيما بينهما .

القاسم المشترك الأكبر d للعددين a و b يقسم $au + bv$

وبما أن $au + bv = 1$ فإن d يقسم 1 وبالتالي $d = 1$

إذن العددان a و b أوليان فيما بينهما .

ـ نفرض أن العددين a و b أوليان فيما بينهما ونبين أن $au + bv = 1$

لنعتبر E مجموعة كل الأعداد $au + bv$ مع u و v عددان صحيحان.

المجموعة E تشمل a لأن $a = 1 \times a + 0b$

إذن E تشمل أعداد صحيحة موجبة تماما.

ومن بين هذه الأعداد يوجد عدد أصغر من جميع الأعداد الأخرى نرمز له بـ $au_1 + bv_1$

ونضع $m = au_1 + bv_1$.

نبرهن أن m يقسم a و b ونستنتج أن $m = 1$.

قسمة a على m مع $m = au_1 + bv_1$ تعطي $a = (au_1 + bv_1)q + r$

ومنه $r = a(1 - qu_1) + b(-qv_1) = au + bv$

حيث u و v من $\mathbb{Z}$

إذن r عنصر من E و $m > r \geq 0$.

لكن m هو أصغر عنصر في E موجب تماما إذن $0 < r < m$ وهذا تناقض.

إذن $r = 0$ و m يقسم a

بنفس الطريقة نبين أن m يقسم b

وبالتالي m يقسم a و b وعليه m يقسم $PGCD(a,b)$

اي أن m يقسم 1 إذن $m = 1$

ملاحظة

لا يمكن استنتاج من المساواة $au + bv = c$ مع $c \neq 1$ أن a و b ليسا أوليان فيما بينهما.

مثلا $a = 5$ و $b = 2$

لدينا $5 \times 3 + 2(-4) = 7$ لكن 5 و 2 أوليان فيما بينهما.

مثال .

اثبت باستعمال نظرية بيزو أن 35 و 16 أوليان فيما بينهما.

✓ الحل

نضع $a = 35$ و $b = 16$

لكي نثبت أن $PGCD(35,16) = 1$ لابد من إيجاد عددين صحيحين u و v

بحيث $35u + 16v = 1$ ومن اجل ذلك نستعمل القسمة الإقليدية لـ 35 و 16

ونكتب في كل مرة الباقي على الشكل $au + bv$

الناتج	2	5	3
35	16	3	1
الباقي	3	1	0

$3 = a - 2b$ و $1 = b - 5(a - 2b)$ اي $1 = 11b - 5a$

إذن يوجد $(u,v) = (-5,11)$ بحيث $au + bv = 1$

وعليه فإن a و b أوليان فيما بينهما.

تمرين تدريبي 1

1) n عدد طبيعي. بين ان العددين $a = 3n + 1$ و $b = 2n + 1$ أوليان فيما بينهما

2) بين انه اذا كان a و b أوليان فيما بينهما $a + b$ أولي مع a و b

✓ الحل

لكي نبرهن أن عددين أوليين فيما بينهما نستعمل نظرية بيزو أو نفرض أن d قاسم مشترك لـ a و b ثم نبين أن $d = 1$

1) نبحث عن u و v من Z بحيث $au + bv = 1$

الفكرة للتخلص من n هي اختيار $u = -2$ و $v = 3$

وبالتالي نجد $-2a + 3b = 1$

إذن a و b أوليان فيما بينهما .

2) - الطريقة الأولى :

بما ان a و b أوليان فيما بينهما فإننا نستطيع كتابة $au+bv=1$ مع u و v عددين صحيحين .

المساواة $au+bv=1$ تكافئ $au+bu-bu+bv=1$ وهذه الأخيرة تكافئ

$(a+b)u+b(v-u)=1$

وهذا ما يبين أن $a+b$ و b أوليان فيما بينهما.

نبين بنفس الطريقة أن $a+b$ و a أوليان فيما بينهما

- الطريقة الثانية :

نفرض ان d يقسم $a+b$ و b وبالتالي d يقسم $(a+b)-b$ اي يقسم a

إذن d يقسم a و b و بالتالي يقسم $PGCD(a,b)$ اي d يقسم 1

وعليه فالعددان $a+b$ و b أوليان فيما بينهما

بنفس الطريقة نبين أن $a+b$ و a أوليان فيما بينهما.

تمرين تدريبي ❷

1) بين انه إذا كان عدد طبيعي a اولي مع عددين طبيعيين b و c فإنه اولي مع جداءهما.

2) استنتج انه إذا كان a و b اوليين فيما بينهما فإن a^n و b^p أوليان فيما بينهما من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي $p \geq 1$.

✓ الحل

1) بما ان a اولي مع كلا العددين الطبيعيين b و c

فإن وحسب نظرية بيزو توجد أعداد صحيحة u و v ، u' و v'

بحيث $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$.

بضرب طرفي هاتين المساوتين نتحصل على :

$a(auu'+cuv'+bvu')+(bc)(vv')=1$

التي هي من الشكل $ax+(bc)y=1$ مع x و y صحيحان.

إذن حسب نظرية بيزو a و bc أوليان فيما بينهما .

2) وحسب السؤال 1) من اجل $c=b$ نتحصل على a اولي مع b^2

إذن a أولي مع b و b^2 اي اولي مع b^3

وهكذا نبرهن بالتراجع على أن a اولي مع b^p مع $p \geq 1$

- بما ان b^p اولي مع a فهو اولي مع a^2

إذن b^p اولي مع a و a^2 وبالتالي فهو اولي مع a^3

نبرهن بالتراجع على n ان b^p أولي مع a^n .

❸ - خواص القاسم المشترك الأكبر

مبرهنة

a ، b ، g ثلاث أعداد طبيعية موجبة تماما.

القضايا الثلاث التالية متكافئة .

1) g هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b

2) g هو قاسم لـ a و b و الحاصلين a' و b' بحيث $a=ga'$ و $b=gb'$ اوليان فيما بينهما.

3) g هو قاسم لـ a و b ويوجد عددان صحيحان u و v بحيث $au+bv=g$

الإثبات

1) لنبين أن القضية (1) تستلزم القضية (2) :

نفرض أن g هو $PGCD$ لـ a و b ونبين ان الحاصلين a' و b' أوليان فيما بينهما.

إذا كان d قاسما مشتركا لـ a' و b' فإن $a'=dp$ و $b'=dq$ مع p و q طبيعيين

وعليه $a=dgp$ و $b=dgq$

إذن dg قاسم مشترك لـ a و b

لكن g هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b

وبالتالي يكون $d=1$ وعليه a' و b' أوليان فيما بينهما.

2) لنبين ان القضية (2) تستلزم القضية (3) :

نفرض أن g هو القاسم لـ a و b وان الحاصلين $a'=\frac{a}{g}$ و $b'=\frac{b}{g}$ اوليان فيما بينهما.

إذن حسب نظرية بيزو يوجد عددان صحيحان u و v بحيث :

$\frac{a}{g}u+\frac{b}{g}v=1$

وبالضرب الطرفين في g نجد $au+bv=g$

3) لنبين ان القضية (3) تستلزم القضية (1) :

نفرض أن g قاسم لـ a و b ويوجد عددان صحيحان u و v

بحيث $au+bv=g$

ليكن g' القاسم المشترك الأكبر لـ a و b

بما ان g يقسم a و b فإنه يقسم g' لكن g' يقسم a و b

إذن g' يقسم $au+bv$ وبالتالي يقسم g وعليه $g'=g$

نتيجة

إذا كان g هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b فإنه مهما يكن العدد الطبيعي $c \rangle 0$ يكون لدينا gc هو القاسم المشترك الأكبر لـ ac و bc و نكتب $PGCD(ac,bc)=c\,PGCD(a,b)=cg$

الإثبات

بما أن g يقسم a و b إذن gc يقسم ac و bc

للبرهان على أن gc هو القاسم المشترك الأكبر لـ ac و bc يكفي أن نبرهن أن gc يمكن كتابته على الشكل $gc = acu + bcv$

لدينا $g = au + bv$ وبالضرب في c نجد $gc = acu + bcv$

إذن gc هو القاسم المشترك الأكبر لـ ac و bc .

ـ وبنفس الطريقة نبرهن أنه إذا كان c يقسم a و b وبالتالي g فإن $\frac{g}{c}$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$.

تمرين تدريبي 1

- أوجد عددين طبيعيين a و b بحيث $a+b=114$ و $PGCD(a,b) = 8$

✓ الحل

بما أن $PGCD(a,b) = 8$ فإن $a = 8a'$ و $b = 8b'$ و $PGCD(a',b') = 1$

نعوض a و b في المساواة $a + b = 114$ نجد $a' + b' = 18$

إذن $a' + b' = 18$ و $PGCD(a',b') = 1$.

الثنائيات (a',b') كما هي مبينة في الجدول التالي:

a'	1	5	7	13	17	11
b'	17	13	11	5	1	7

إذن $(a,b) \in \left\{ \begin{matrix} (8,136),(40,104),(56,88),(136,8) \\ (104,40),(88,56) \end{matrix} \right\}$

تمرين تدريبي 2

n عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر العددين a و b بحيث:

$a = 2n^2$ و $b = n(2n+1)$

بين أن $2n$ و $2n+1$ أوليان فيما بينهما، واستنتج أن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

✓ الحل

بما أن يوجد عددان صحيحان $(u,v) = (-1,1)$ بحيث: $(-1)(2n)+(1)(2n+1) = 1$ فإن حسب نظرية بيزو $2n+1$ و $2n$ أوليان فيما بينهما.

ـ بما أن $a=2n\ (n)$ و $b = (2n+1)n$ و $PGCD(2n+1, 2n)=1$

فإن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

تمرين تدريبي 3

g هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و c عدد طبيعي أولي مع b بين أن g هو القاسم الأكبر للعددين ac و b.

✓ الحل

g يقسم a و b إذن يقسم ac و b

بما أن g هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث:

$au + bv = g$ ....(1)

وبما أن b و c أوليان فيما بينهما فإنه يوجد u' و v' بحيث:

$bu' + cv' = 1$ .... (2)

بضرب طرفي المساوتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$(ac)(uv')+b(auu'+bvu'+cvv')=g$

وهذا يعني أن g هو القاسم المشترك الأكبر لـ ac و b.

4. تطبيقات القواسم

1.4 مبرهنة غوص

إذا كانت a ، b ، c أعداد طبيعية موجبة تماما بحيث a يقسم bc و a أولي مع b فإن a يقسم c .

الإثبات

ـ بما أن a و b أوليان فيما بينهما فإنه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث:

$au + bv = 1$

وبالضرب طرفي المساواة الأخيرة فنجد $acu + bcv = c$

ـ بما أن a يقسم acu و bc فرضا فإنه يقسم bcv

إذن a يقسم المجموع $acu + bcv$ أي يقسم c.

نتيجة

إذا كان عدد طبيعي n يقبل القسمة على عددين أوليين فيما بينهما a و b فإنه يقبل القسمة على جداء هما.

الإثبات

من الفرضية نستطيع كتابة $n=ap$ و $n=bq$ مع p و q طبيعيان .

إذن ينتج $ap = bq$

وبما ان b يقسم ap و b أولي مع a فإنه يقسم p إذن $p=bp'$ مع p' عدد طبيعي

وعليه $n=abp'$ وهذا يعني ان n يقبل القسمة على ab

- بصفة عامة إذا كان n يقبل القسمة على الأعداد الأولية فيما بينها مثنى مثنى a_1 ، a_2 ، ..... ، a_n فإنه يقبل القسمة على الجداء $a_1\times a_2\times.....\times a_n$

مثال-

كل عدد يقبل القسمة على 2 و 5 فإنه يقبل القسمة على 10

لأن 2 و 5 أوليان فيما بينهما.

تمرين تدريبي

a ، b ، c ، d أربع أعداد بحيث a صحيح سالب والأخرى طبيعية موجبة تماما .
ومشكلة بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها أولي مع b .
أوجد هذه الأعداد علما أن $d-a = 15b^2$

الحل

بما ان a ، b ، c ، d بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية أساسها r أولي مع b

فإن $b = a + r$ و $c = a + 2r$ و $d = a + 3r$

عندئذ فالمساواة $15b^2 = d - a$ تصبح $15b^2 = a + 3r - a = 3r$

بالقسمة على 3 نجد $5b^2 = r$ .... (I)

بما ان r أولي مع b فهو أولي مع b^2 .

بما ان r يقسم $5b^2$ و r أولي مع b^2 فإن r يقسم 5 (حسب غوص).

إذن r ينتمي الى المجموعة $\{1,5\}$

لكن $r \geq 5$ إذن $r = 1$ مرفوض وبالتالي الأساس هو 5 .

نعوض قيمة r في (I) نجد $b^2 = 1$ ومنه $b = 1$

إذن $a = b - r = -4$ و $c = b + r = 6$ و $d = c + r = 11$

2.4 الكسور غير القابلة للاختزال

نسمي كسرا كل عدد $\frac{a}{b}$ مع a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$

(لا نأخذ بعين الاعتبار إلا الكسور الموجبة)

تعريف

إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فنقول عن الكسر $\frac{a}{b}$ انه غير قابل للاختزال.

مبرهنة

كل كسر يساوي كسرا غير قابل للاختزال.

الإثبات

نعتبر كسرا $\frac{c}{d}$ ، وليكن g القاسم المشترك الأكبر لـ c و d

عندئذ $c = gc'$ و $d = gd'$ مع c' و d' أوليان فيما بينهما.

إذن وبالقسمة على g نتحصل على $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ و $\frac{c'}{d'}$ كسر غير قابل للاختزال

لأن c' و d' أوليان فيما بينهما.

ملاحظة

إذا كان $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ مع $\frac{a}{b}$ كسر غير قابل للاختزال فإنه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث $c = ka$ و $d = kb$ و بحيث k القاسم المشترك الأكبر للعددين c و d

تمرين تدريبي

n و a عددان طبيعيان حيث $a = n(n+1)(n+5)$.
بين أن a يقبل القسمة على 6

الحل

لكي نبين أن a يقبل القسمة على 6 يكفي أن نبين انه يقبل القسمة على 2 وعلى 3

لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما.

- نثبت أولا أن 3 يقسم a ؛

في الجدول المقابل نبين باقي قسمة a على 3.

من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد a يقبل القسمة على 3

باقي قسمة على n على 3	0	1	2
باقي قسمة $n+1$ على 3	1	2	0
باقي قسمة $n+5$ على 3	2	0	1
باقي قسمة a على 3	0	0	0

- بما أن $n(n+1)$ زوجي فإن $n(n+1)(n+5)$ زوجي

ومنه نستنتج أن a يقبل القسمة على 2

- يمكننا استعمال بواقي قسمة n على 6 للبرهان على أن a يقبل القسمة على 6 .

5 . المعادلة $ax+by=c$

a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة.

المعادلة $ax_0+by_0=c$ حيث x و y مجهولان من $\mathbb{Z}$ تسمى معادلة ديوفنسيان .

نرمز بـ g إلى القاسم المشترك لـ a و b

مبرهنة

الشرط اللازم والكافي لكي يكون للمعادلة $ax+by=c$ .... (E) حلا هو أن يكون القاسم المشترك للعددين a و b يقسم c .

الإثبات

- لنفرض وجود حل لـ (E) ونبين عندئذ أن g يقسم c ؛

إذا كانت (x_0,y_0) حل لـ (E) فإن $ax_0+by_0=c$ لكن g يقسم a و b

إذن يقسم ax_0+by_0 أي يقسم c .

- نفرض أن g يقسم c ونبين أنه توجد حلول للمعادلة $ax_0+by_0=c$

g يقسم a و b و c إذن نستطيع كتابة $a=ga'$ ، $b=gb'$ و $c=gc'$

مع a' ، b' ، c' أعداد طبيعية.

بتعويض a ، b ، c في المعادلة $ax+by=c$

نجد $ga'x+gb'y=gc'$ و بالقسمة على g نجد :

$a'x+b'y=c'$......(I)

لكن a' و b' أوليان فيما بينهما

إذن يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $au'+bv'=1$ (نظرية بيزو)

وبضرب طرفي هذه الأخيرة في c' نجد $a'uc'+b'vc'=c'$

مما يثبت أن الثنائية (x_0,y_0) بحيث $x_0=uc'$ و $y_0=vc'$ حل للمعادلة $a'x+b'y=c'$

نتيجة

إذا كانت (x_0,y_0) حل للمعادلة $ax+by=c$ فإن مجموعة الحلول هي مجموعة لثنائيات (x,y) بحيث $x=x_0+k\frac{b}{g}$ و $y=y_0-k\frac{a}{g}$

مع k عدد صحيح و $a'=\frac{a}{g}$ و $b'=\frac{b}{g}$

الإثبات

- نفرض أن (x,y) حل فيكون لدينا $ax+by=c$ .... (1)

بما أن (x_0,y_0) هي حل للمعادلة فإن $ax_0+by_0=c$ .... (2)

بطرح (2) من (1) نجد $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

ومنه ينتج $a(x-x_0)=b(y_0-y)$ .... (3)

بقسمة طرفي المساواة (3) على g نتحصل على $a'(x-x_0)=b'(y_0-y)$ .... (4)

مع a' و b' أوليان فيما بينهما.

وحسب نظرية غوص فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $y_0-y=ka'$

ومنه $y=y_0-ka'$

أي $y=y_0-k\frac{a}{g}$

وبتعويض y في المعادلة (4) نجد $x-x_0=kb'$

أي $x=x_0+kb'=x_0+k\frac{b}{g}$

وبالعكس إذا عوضنا قيمتي x و y في المعادلة $ax+by=c$ سنجدها محققة من أجل كل عدد صحيح k .

التفسير الهندسي لحلول المعادلة

في معلم متعامد ومتجانس للمستوي المعادلة $ax+by=c$ هي معادلة مستقيم d .

حل المعادلة $ax+by=c$ يؤول إلى البحث عن النقط من (d) بحيث تكون إحداثياتها صحيحة .

تمرين تدريبي

نعتبر المعادلة (E) .... $13x+19y=4$ حيث x و y عددان صحيحان

1) عين ثنائية من الأعداد الصحيحة (u,v) بحيث $13u+19v=1$ مستنتجا حلا خاصا (x_0,y_0) للمعادلة (E)

2) عين كل الثنائيات من الأعداد الصحيحة التي هي حلول المعادلة (E)

الحل

1) بما أن 19 و 13 أوليان فيما بينهما فإن حسب نظرية بيزو توجد ثنائية (u,v) من الأعداد الصحيحة بحيث $13u+19v=1$

لتعيين u و v ننجز القسمة الإقليدية المتتابعة لـ 19 على 13 ثم نعبر في كل مرة عن الباقي بدلالة $13u+19v$

$6=19-1\times13$

$1=1\times13-2\times6$

$1=1\times13-2\times(19-1\times13)$

الناتج	1	2
19	13	6
الباقي	6	1

$1 = 1 \times 13 - 2 \times 19 + 2 \times 13$

$1 = 3 \times 13 - 2 \times 19$

ومنه نستنتج أن $(u,v) = (3,-2)$

لدينا $3\times13-2\times19 = 1$ وبضرب طرفي هذه المساواة في 4 نجد :

$12 \times 13 - 8 \times 19 = 4$

ومنه تكون $(x_0 , y_0) = (12,-8)$ حلا خاصا للمعادلة (E)

2) (x , y) حلا للمعادلة (E) هذا معناه :

$13\,x + 19\,y = 4$ .... (1)

(x_0 , y_0) حلا خاصا للمعادلة (E) هذا معناه:

$13\,x_0 + 19\,y_0 = 4$ .... (2)

بطرح (2) من (1) نجد $13(x-x_0) + 19(y-y_0) = 0$

ومنه $13(x-x_0) = 19(y_0-y)$ .... (3)

13 يقسم $19(y_0-y)$ و $PGCD(13,19)=1$ حسب نظرية غوص فإن 13 يقسم y_0-y

13 يقسم y_0-y هذا معناه أن $y_0-y = 13k$ مع k عدد صحيح

إذن $y = y_0 - 13k$

نعوض y في (3) نجد $(x-x_0) = 19k$ أي $x = x_0 + 19k$

بالتالي الثنائيات $(12+19k , -8-13k)$ هي حلول للمعادلة (E) .

6 . المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

a و b عددان صحيحان موجبان تماما لهما على الأقل مضاعف مشترك موجب تماما والذي هو الجداء ab .

إذن مجموعة المضاعفات المشتركة لـ a و b غير خالية. ويوجد من بينها عنصرا موجبا تماما وأصغر من كل العناصر الأخرى والذي نسميه بالمضاعف المشترك الأصغر ونرمز له بـ $PPCM$

مبرهنة

إذا كان a و b عددان صحيحان موجبين تماما و g قاسمهما المشترك الأكبر و m مضاعفهما المشترك الأصغر فإن $mg = ab$.

وكل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف لـ m .

الإثبات

ليكن g القاسم المشترك الأكبر لـ a و b إذن $a = ga'$ و $b = gb'$

مع a' و b' أوليان فيما بينهما.

ليكن M مضاعف مشترك لـ a و b وعليه $M = ap$ و $M = bq$

مع p و q عددان طبيعيان.

إذن $M = ga'p = gb'q$ وبقسمة طرفي هذه المساواة على g نجد $a'p = b'q$

بما أن a' يقسم $b'q$ و a' و b' أوليان فيما بينهما فإنه وحسب نظرية غوص :

a' يقسم q أي $q = ka'$.

إذن $M = ba'k$ وبالتالي $M = \frac{ab}{g}k = a'b'gk$

ـ وبالعكس نبرهن أن كل عدد يكتب على $M = a'b'gk$ مضاعف مشترك لـ a و b

$M = k(ga')b' = kb'a$ وبنفس الطريقة نكتب $M = k(gb')a' = kba'$

ومنه نستنتج أن M مضاعف لـ a و b

وبالتالي فهو مضاعف مشترك لـ a و b

وعليه كل المضاعفات المشتركة لـ a و b هي مضاعفات للعدد $ga'b'$

واصغرهم إذن هو $ga'b'$

إذن $m = ga'b'$ وعليه $mg = ab$

خاصية

a ، b ، m ثلاثة أعداد طبيعية

ـ القول أن m هو المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b يكافئ القول أن m هو مضاعف لـ a و b بحيث أن حاصلي قسمة m على a ، b أوليان فيما بينهما.

الإثبات

ليكن m المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b لدينا عندئذ $m = ga'b' = ab' = a'b$

حاصلي القسمة على الترتيب لـ m على a و b هما a' و b' أوليان فيما بينهما.

ـ وبالعكس ليكن M مضاعف مشترك لـ a و b بحيث أن العددين الطبيعيين $\frac{M}{a}$ و $\frac{M}{b}$ أوليان فيما بينهما.

حسب المبرهنة السابقة يكون M مضاعفا لـ m إذن يوجد عدد طبيعي k بحيث $M = km = kga'b'$

إذن حاصلي قسمة M على a و b هي على التوالي ka' و kb'

لكن هذان الحاصلان فرضا أوليان فيما بينهما.

إذن $k = 1$ وعليه $M = ga'b'$ والذي يمثل المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

ملاحظة

إذا كان m المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين الموجبين تماما a و b فإنه من أجل كل عدد طبيعي c غير معدوم يكون mc هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين ac و bc

تمرين تدريبي 1

أوجد كل الأعداد الطبيعية a و b بحيث يكون الفرق بين مضاعفهما المشترك الأصغر وقاسمهما المشترك الأكبر هو 6 .

✓ الحل

نسمي a و b هذين العددين حيث m المضاعف المشترك الأصغر لهما و g القاسم المشترك الأكبر لهما عندئذ $m - g = 6$ و $a = ga'$ و $b = gb'$

مع a' و b' أوليان فيما بينهما و $m = ga'b'$

بتعويض عبارة m في المساواة $m - g = 6$ نجد $ga'b' - g = 6$

ومنه $g(a'b' - 1)g = 6$

ومنه نستنتج أن g يقسم 6

إذن g ينتمي إلى $\{1,2,3,6\}$

g	1	2	3	6
$a'b'-1$	6	3	2	1
$a'b'$	7	4	3	2
a'	1 7	1 4	1 3	1 2
b'	7 1	4 1	3 1	2 1
a	1 7	2 8	3 9	6 12
b	7 1	8 2	9 3	12 6

ومنه فإن مجموعة الثنائيات (a,b) تنتمي إلى المجموعة

$\{(1,7), (7,1), (8,2), (2,8), (9,3), (3,9), (12,6), (6,12)\}$

تمرين تدريبي 2

أوجد الأعداد الطبيعية a و b وحيث $a < b$ و $PGCD(a,b) = 15$ و $PPCM(a,b) = 105$

✓ الحل

بما أن $PGCD(a,b) = 15$ فإن $a = 15a'$ و $b = 15b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما

وبما أن $PPCM(a,b) = 105$ فإن $105 = 15a'b'$ أي $a'b' = 7$

وعليه نستنتج أن $a' = 1$ و $b' = 7$ لأن $a < b$

إذن $(a,b) = (15,105)$

7. مجموعة الأعداد الأولية

تعريف

العدد الأولي هو عدد طبيعي أكبر تماما من الواحد و يقبل قاسمين الواحد ونفسه.

ملاحظة

1) $\mathcal{D}(p) = \{1, p\}$ حيث p عدد أولي.

2) العدد 1 ليس أوليا.

3) كل عدد طبيعي غير أولي له على الأقل قاسما يختلف عن 1 ونفسه.

مبرهنة

1- كل عدد طبيعي $a \geq 2$ يقبل عددا أوليا كقاسم له.

2- توجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية.

تمرين تدريبي 1

برهن أن كل عدد أولي p بحيث $p > 2$ هو من الشكل $4n + 1$ أو $4n + 3$

✓ الحل

ليكن r باقي قسمة p على 4

إذن $p = 4n + r$ مع $0 \leq r < 4$

بما أن p أولي فإن $r \neq 2$ و $r \neq 0$ لأن :

لو كان $r = 0$ أو $r = 2$ فإن p يقبل القسمة على 4 أو على 2

إذن $p = 4n + 1$ أو $p = 4n + 3$

تمرين تدريبي 2

a و b ، x ، y أعداد طبيعية موجبة تماما بحيث $xa + yb$ عدد أولي

بين أن a و b أوليان فيما بينهما.

✓ الحل

نضع $xa + yb = p$ لنبرهن بالخلف

إذا كان a و b ليسا أوليين فيما بينهما فإن لهما على الأقل قاسم أولي مشترك d .

لكن d يقسم a و b

إذن فهو يقسم $xa+yb$ أي يقسم p

لكن p أولي إذن $d = p$ ومنه نستنتج أن $d \rangle a$ وهذا خطأ

إذن a و b أوليين فيما بينهما.

8. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

مبرهنة 1

كل عدد طبيعي $n \geq 2$ أولي أو يساوي جداء أعداد أولية .

تعريف

تحليل عدد طبيعي n إلى جداء عوامل أولية هو كتابته على الشكل النموذجي

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$

مع $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ أعداد طبيعية وهذا التحليل وحيد

عدد قواسم n هي $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$.

مبرهنة 2

n عدد طبيعي غير أولي، تحليله إلى جداء عوامل أولية هو $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$

وعندئذ فإن قواسمه هي كل الأعداد التي تكتب على الشكل $p_1^{\alpha'_1} p_2^{\alpha'_2} \times \dots \times p_r^{\alpha'_r}$

مع $0 \leq \alpha'_i \leq \alpha_i$

تمرين تدريبي

عين $PPCM$ و $PGCD$ للعددين $a = 270$ و $b = 84$

✓ الحل

لدينا $a = 2 \times 3^3 \times 5$ و $b = 2^2 \times 3 \times 7$

$PPCM(a,b)$ هو جداء كل العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليل العددين وبحيث يأخذ كل عامل بأس أكبر .

ومنه $PPCM(a,b) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7560$

$PGCD(a,b)$ هو جداء كل العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين وبأس أصغر

ومنه $PGCD(a,b) = 2 \times 3 = 6$

9. الأعداد الأولية وقابلية القسمة في $\mathbb{N}$

1.9 قابلية القسمة على عدد أولي

مبرهنة 1

p عدد أولي و a عدد طبيعي غير قابل للقسمة على p فيكون عندئذ p و a أوليين فيما بينهما.

مبرهنة 2

1) p عدد أولي يقسم الجداء ab عندئذ p يقسم a أو يقسم b

2) p عدد أولي يقسم الجداء ab حيث أن a و b أوليان عندئذ $p = a$ أو $p = b$

2.9 نظرية فيرما "fermat"

p عدد أولي و a عدد طبيعي غير قابل للقسمة على p عندئذ $(a^{p-1}-1)$ قابل للقسمة على p

وبصيغة أخرى $a^{p-1} \equiv 1[p]$ وبصفة عامة $a^p \equiv a[p]$

تمرين تدريبي

p عدد أولي يختلف عن 3 ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون ، $a_n = 3^{n+p} - 3^{n+1}$ قابلا للقسمة على p .

✓ الحل

$a_n = 3^n(3^p - 3)$

بما أن p أولي و 3 لا يقبل القسمة على p

إذن نستطيع تطبيق مبرهنة فيرما.

$3^p \equiv 3[p]$ ومنه $3^p - 3 \equiv 0[p]$

إذن $3^n(3^p - 3) \equiv 0[p]$ أي $a_n \equiv 0[p]$

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 تعيين $PGCD$ حسب قيم n

من اجل كل عدد طبيعي n موجب تماما نعتبر العددين :
$a=5n+1$ و $b=2n+1$ وليكن g قاسمهما المشترك الأكبر.
1- بين ان القيم المكنة لـ g هي 1 و 3.
2-أ) باستعمال جدول عين حسب بواقي قسمة n على 7 البواقي المكنة لقسمة $2n+1$ على 3.
ب) استنتج انه من اجل اي قيمة لـ n فإن العدد b يقبل القسمة على 3.
جـ) تحقق من اجل قيم n الموجودة في السؤال ب) ان a يقبل القسمة على 3. ما هي قيمة g عندئذ ؟

✓ الحل

1) لدينا من الفرض $g = PGCD(a,b)$
بما أن g يقسم a و b فإن g يقسم $(5b-2a)$ أي g يقسم 3
إذن القيم المكنة لـ g هي 1 و 3

2) أ) بواقي قسمة $2n+1$ على 3 كما في الجدول الموالي :

بواقي قسمة n على 3	0	1	2
بواقي قسمة $2n+1$ على 3	1	0	2

إذن البواقي المكنة في $2n+1$ على 3 هي 2،1،0
ب) من الجدول السابق نستنتج انه إذا كان $n = 3k+1$ مع $k \in IN$
فإن b يقبل القسمة على 3.
جـ) في حالة $n=3k+1$ نجد $a = 15k+6$ أي $a=3(5k+2)$
بوضع $3k+2 = k'$ يكون $a = 3k'$
إذن a يقبل القسمة على 3.
بما أن a يقبل القسمة على 3 و b يقبل القسمة على 3 فإن :
$PGCD(a,b) \neq 1$ وبالتالي $g = 3$

تطبيق 2 استعمال نظرية بيزو لإثبات ان عددين أوليين فيما بينهما

a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث $(a^2+ab-b^2)^2=1$
بين باستعمال نظرية بيزو أن a و b أوليان فيما بينهما.

✓ الحل

الطريقة الأولى :
من المساواة $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$ ينتج $a^2+ab-b^2 = 1$ أو $a^2+ab-b^2 = -1$
- إذا كان $a^2+ab-b^2 = 1$ فإننا نستطيع أن نكتب هذه المساواة على الشكل :
$a\times a+b(a-b) = 1$
ومنه يوجد عددان صحيحان u و v
بحيث $au+bv = 1$ مع $(u,v)=(a,a-b)$
وهذا يعني أن $PGCD(a,b)=1$.
- إذا كان $a^2+ab-b^2 = -1$ فإننا نستطيع أن نكتب هذه المساواة على الشكل :
$(-a)\times a+b(a-b) = 1$
ومنه يوجد عددان صحيحان* u و v
بحيث $au+bv = 1$ مع $(u,v)=(-a,b-a)$
و هذا يعني أن $PGCD(a,b)=1$.

الطريقة الثانية :
نضع $g = PGCD(a,b)$
إذا كان g يقسم a و b فإن g يقسم a^2 و b^2 و ab
وبالتالي g يقسم $ab+a^2-b^2$
بما أن g يقسم a^2+ab-b^2 فإنه يقسم $(a^2+ab-b^2)^2$
اي g يقسم 1 وعليه $g = 1$
إذن a و b أوليان فيما بينهما.

تطبيق 3 استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين حل خاص لمعادلة

باستعمال القسمة الإقليدية عين ثنائية (x,y) الصحيحة بحيث :
$83x+13y=1$

✓ الحل

ننجز القسمة الإقليدية المتتابعة و في كل مرة نكتب الباقي على الشكل $au+bv$

الناتج	6	2	1	1
83	13	5	3	2
الباقي	5	3	2	1

$1 = 3 - 2$

$1 = 3 - (5 - 3\times 1) = 2\times 3 - 1\times 5$

$1 = 2\times(13 - 5\times 2) - 1\times 5 = (-5)(5) + 2\times 13$

$1 = (-5)(83 - 6\times 13) + 2\times 13 = (-5)(83) + 32(13)$

ومنه نستنتج أن $(u_0, v_0) = (-5, 32)$ حلا خاص للمعادلة المعطاة.

تطبيق 4 قابلية القسمة وتعيين $PGCD$

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ نعتبر العددين الطبيعين a و b بحيث :
$b = 2n^2 - 7n - 4$ و $a = n^3 - n^2 - 12n$

1) بين ان a و b يقبلأن القسمة على $(n-4)$

2) نضع $\alpha = 2n+1$ و $\beta = n+3$ وليكن d القاسم المشترك الاكبر لـ α و β

ا) اوجد علاقة بين α و β مستقلة عن n

ب) بين ان d قاسم لـ 5

جـ) بين ان العددين α و β مضاعفان للعدد 5 إذا وفقط إذا كان $(n-2)$ مضاعفا لـ 5.

3) بين ان $(2n+1)$ و n أوليان فيما بينهما.

4-ا) عين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b.

ب) تحقق من النتائج المحصل عليها في حالة $n = 11$ و $n = 12$

الحل

1) من أجل $n = 4$ نجد $a = 0$ و $b = 0$

ومنه كل من a و b يقبلأن القسمة على $(n-4)$

وعليه نكتب :

$a = n(n-4)(n+3)$ و $b = (n-4)(2n+1)$

2) لدينا $\alpha = 2n+1$ و $\beta = n+3$ و $d = PGCD(\alpha, \beta)$

ا) لايجاد علاقة مستقلة عن n تربط α و β لابد من التخلص من n

وبالتالي العلاقة التي تربط α و β هي $2\beta - \alpha = 5$

ب) بما ان d يقسم α و β فإنه يقسم $2\beta - \alpha$ اي d يقسم 5

جـ) إذا كان α و β مضاعفين للعدد 5 فإن $\alpha - \beta$ مضاعف للعدد 5

اي $(n-2)$ مضاعف للعدد 5

وبالعكس إذا كان $(n-2)$ مضاعفا للعدد 5

فإن $n = 5k+2$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

وبالتالي $\alpha = 10k+5$ و $\beta = 5k+5$

إذن يكون α و β مضاعفين للعدد 5.

3) بما أن $1(2n+1) + (-2)n = 1$

فإنه وحسب نظرية بيزو $2n+1$ و n أوليان فيما بينهما.

4) ا) $PGCD(a,b) = (n-4)PGCD(n(n+3), 2n+1)$

ـ إذا كان $(n-2)$ ليس مضاعفا للعدد 5

فإن $(2n+1)$ أولي مع $n+3$ وأولي مع n

وبالتالي فهو أولي مع $n(n+3)$

وعليه $PGCD(n(n+3), 2n+1) = 1$

إذن $PGCD(a,b) = (n-4)\times 1 = n-4$

ـ حالة $n-2$ مضاعف للعدد 5:

نثبت ان $PGCD(n(n+3), 2n+1) = d$

بما أن d يقسم $2n+1$ و يقسم $n+3$ فإنه يقسم $2n+1$ و $n(n+3)$

وبالتالي d يقسم $PGCD(n(n+3), 2n+1)$......(1)

إذا كان δ القاسم المشترك الاكبر للعددين $2n+1$ و $n(n+3)$

فإن δ يقسم (n أو $n+3$) و (δ يقسم $(2n+1)$)

وبما أن n و $2n+1$ أوليان فيما بينهما فإن δ لا يقسم n

وبالتالي يقسم $n+3$

إذن δ يقسم $2n+1$ ويقسم $n+3$

وبالتالي δ يقسم $PGCD((n+3), 2n+1)$ اي δ يقسم d .....(2)

من (1) و (2) نجد $\delta = d$

إذن $PGCD(a,b) = (n-4)\times d = 5(n-4)$

ب) في حالة $n = 11$ يكون $n-2$ ليس مضاعفا للعدد 5

وبالتالي $PGCD(a,b) = 11-4 = 7$

في حالة $n = 12$ يكون $n-2$ مضاعفا للعدد 5 وبالتالي

$PGCD(a,b) = 5(12-4)$
$= 40$

تطبيق 5 $PGCD$ ونظرية بيزو

a ، b ، A ، B أعداد طبيعية بحيث $A = 9a + 2b$ و $B = 7a + 5b$

1) بين انه إذا كان احد العددين A و B يقبل القسمة على 31 فإن الآخر يكون كذلك.

2) بين أنه إذا كان a ، b أوليين فيما بينهما فإن القواسم المشتركة للعددين A و B هي 1 و 31.

الحل

1) لدينا :

$5A-2B = 45a+10b-14a-10b = 31a$ .... (1)

و $9B-7A = 63a+45b-63a-14b = 31b$ .... (2)

- إذا كان A يقبل القسمة على 31 أي $A=31q$

فإن $2B=5\times31q-31a$

وبالتبسيط نجد $2B=31(5q-a)$

بما أن 31 يقسم $2B$ و $PGCD(2,31)=1$ فإنه وحسب غوص 31 يقسم B .

- إذا كان B يقبل القسمة على 31 وباستعمال المساواة (2)

نستنتج أن A يقبل القسمة على 31

2) ليكن δ قاسم مشترك للعددين A و B

إذن δ يقسم $31a$ و يقسم $31b$

وبالتالي يقسم $PGCD(31a,31b)$

أي يقسم $31PGCD(a,b)$

لكن $PGCD(a,b)=1$

إذن δ يقسم 31.

ومنه فإن القواسم المشتركة للعددين A و B هي قواسم 31 وهي 1 ، 31

تطبيق 6 تطبيقات نظرية غوص

n و p عددان طبيعيان غير معدومين.

1) بين أن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 30.

2) بين أن الكتابة العشرية لـ n^p و n^{p+4} تنتهي بنفس الرقم.

الحل

1) لكي يقبل العدد $n(n^4-1)$ القسمة على 30 يجب أن يقبل القسمة على 6 و 5 لأن 6 و 5 أوليان فيما بينهما.

بما أن $n(n^4-1)=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ و $(n-1)(n)(n+1)$ يقبل القسمة على 6

فإن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 6.

بواقي قسمة أي عدد طبيعي n على 5 هي 4،3،2،1،0

والجدول التالي يلخص البواقي الممكنة للعدد $n(n^4-1)$ على 5

بواقي قسمة n على 5	0	1	2	3	4
بواقي قسمة n^4-1 على 5	4	0	0	0	0
بواقي قسمة $n(n^4-1)$ على 5	0	0	0	0	0

ومن الجدول نستنتج أن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5

إذن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 30

2) لكي ينتهي العددان n^p و n^{p+4} بنفس الرقم يجب أن يكون $n^{p+4}-n^p=0[10]$

لدينا $n^{p+4}-n^p=n^{p-1}(n^4-1)n$

بما أن $n(n^4-1)=0[30]$ فإن $n(n^4-1)=0[10]$

وبالتالي $n^{p-1}(n^4-1)n=0[10]$

تطبيق 7 حل المعادلات من الشكل $ax+by=c$ في $\mathbb{N}^2$

1) باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد حلا خاصا في $\mathbb{N}^2$ للمعادلة $-43x+18y=1$

2) استنتج من السؤال (1) حلا خاصا في $\mathbb{N}^2$ للمعادلة $-43x+18y=3$

3) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة $-43x+18y=3$

الحل

1) ننجز القسمة الإقليدية لـ 43 على 18 وفي كل مرة نكتب البواقي على الشكل $au+bv$

الناتج	2	2	1	1
43	18	7	4	3
البواقي	7	4	3	1

$1=4-3\times1$

$1=4-(7-1\times4)=2\times4-1\times7$

$1=2(18-2\times7)-1\times7=(-5)\times7+2\times18$

$1=(-5)(43-2\times18)+2\times18=(-5)43+12\times18$

ومنه نستنتج أن $(x,y)=(5,12)$ حل خاص للمعادلة $-43x+18y=1$

2) لدينا $(-43)(5)+12\times18=1$ بضرب طرفي هذه المساواة في 3 نجد $15(-43)+36\times18=3$

ومنه $(x_0,y_0)=(15,36)$ حل خاص للمعادلة $-43x+18y=3$

3) $-43x+18y=3$ ..... (1)

$(-43)15+18\times36=3$ ...... (2)

بطرح (2) من (1) طرفا لطرف نجد $(-43)(x-15)+18(y-36)=0$

أي $43(x-15)=18(y-36)$ .... (3)

بما أن 43 يقسم $18(y-36)$ و $PGCD(18,43)=1$

فإنه وحسب نظرية غوص 43 يقسم $y-36$

43 يقسم $y-36$ يعني يوجد عدد طبيعي k بحيث $y-36=43k$

أي $y=43k+36$ مع $k\in\mathbb{N}$

نعوض قيمة y في (3) نجد $x-15=18k$ ومنه $x=18k+15$

إذن الحلول العامة للمعادلة المعطاة هي الثنائيات (x,y) بحيث :

$(x,y)=(18k+15,43k+36)$ مع $k\in\mathbb{N}$

تطبيق 8 توظيف المعادلات لإيجاد زمن التطابق بين جسمين فضائيين

فلكي لاحظ جسمين A و B في الفضاء الخارجي يظهران بشكل دوري ،
حيث يظهر الجسم A كل 105 أيام بينما يظهر الجسم B كل 81 يوما.
في اليوم J_0 ظهر للفلكي الجسم A ثم ظهر له الجسم B بعد ستة أيام .
يريد الفلكي حساب (توقع) اليوم J_1 الذي يظهر فيه الجسمان معا.

1) ليكن u و v عدد الدورات التامة في الفترة $]J_0,J_1]$ للجسمين A و B على الترتيب.
بين أن الثنائية (u,v) حل للمعادلة (E_1) حيث $35x-27y=2$ ....(E_1)

2 - 1) عين ثنائية (x_0,y_0) من الأعداد الصحيحة النسبية بحيث تكون حلا للمعادلة $35x-27y=1$

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E_1)

جـ) عين كل الحلول (u,v) للمعادلة (E_1)

3-1) ما هو عدد أيام الفترة $]J_0,J_1]$ ؟

ب) إذا كان اليوم J_0 هو يوم الثلاثاء 7 ديسمبر 1999 فما هو بالضبط تاريخ اليوم J_1 علما أن السنة 2000 هي سنة كبيسة ؟

جـ) إذا تعذر على الفلكي الملاحظة في هذا الموعد فما هو عدد الأيام التي سينتظرها حتى يحدث الاقتران الموالي للجسمين A و B .

الحل

1) كل دورة للجسم تمثل 105 يوما

إذن عدد أيام الفترة $]J_0,J]$ هي $105u$

وكل دورة للجسم B تمثل 81 يوما

إذن عدد أيام الفترة $]J_0+6\ ,\ J_1]$ هي $81v$

إذن عدد أيام الفترة $]J_0,J_1]$ هي $105u$ ومن جهة أخرى $81v+6$

وعليه نستنتج أن $105u=81v+6$ أي $105u=81v+6$

وبالقسمة على 3 نجد $35u-27v=2$

2) أ) باستعمال خوارزمية إقليدس نجد $(x_0,y_0)=(-10,-13)$

ب) بما أن (x_0,y_0) حل خاص للمعادلة $35x-27y=1$

فإن $(2x_0,2y_0)$ حل خاص للمعادلة (E_1)

إذن $(u_0,v_0)=(-20,-26)$

جـ) تعيين الحل العام للمعادلة (E_1) :

$35x-27y=2$ .... (E_1)

$35(-20)-27(-26)=2$ .... (E_1')

بطرح (E_1') من (E_1) طرفا لطرف نجد $35(x+20)-27(y+26)=0$ .... (E_1)

أي $35(x+20)=27(y+26)$ .... (E_1')

35 يقسم $27(y+26)$ و 35 أولي مع 27

ومنه حسب غوص 35 يقسم $y+26$

وعليه $y+26=35k$ مع $k\in\mathbb{Z}$

أي $y=35k-26$

بتعويض y في (E_1') نجد $x=27k-26$

إذن الحلول (u,v) تكون من الشكل $u=27k-26$ و $v=35k-26$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

3) أ) من أجل $k=1$ أي أول اقتران نجد $u=7$

ومنه طول الفترة $]J_0,J_1]$ هي $1+7\times105$ وهذا يساوي 736 يوما

ب) لدينا $J_1-J_0=735$ و $735=0[7]$ إذن اليوم J_1 هو يوم الثلاثاء.

وبما أن $735=366+365+4$ فإن تاريخ J_1 هو سنتين وأربعة أيام بعد J_0

أي J_1 هو الثلاثاء 11 ديسمبر 2001 .

جـ) حتى نجد عدد أيام الانتظار للاقتران الثاني نحل المعادلة $105u=21v+0$

لأنه في هذه الحالة لا يوجد فرق في الأيام وبالتالي نحل المعادلة $35u=27v$

وبعد حل هذه المعادلة نجد :

$$\begin{cases}u=27k\\v=35k\end{cases}$$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

من أجل $k=1$ نجد $u=27$ و $v=35$

وبالتالي عدد أيام الانتظار هي $81v=81\times35=105u=105\times27=2835$

تطبيق 9 تعيين نقاط من الفضاء إحداثياتها أعداد طبيعية

1) نعتبر المعادلة $(E)\ 6x+7y=57$ حيث x و y عددان صحيحان

أ) عين الثنائية من الأعداد الصحيحة (u,v) بحيث $6u+7v=1$
ثم استنتج حلا خاصا (x_0,y_0) المعادلة (E)

ب) عين الثنائيات من الأعداد الصحيحة حلولا للمعادلة (E)

2) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء
نعتبر المستوي (p) ذو المعادلة $6x+7y+8z=57$ ولنعتبر النقط من المستوي (p) التي تنتمي إلى المستوي $(o,\vec{i},\vec{j})$
بين أنه توجد نقطة واحدة من هذه النقط لها إحداثيات طبيعية عينها.
3) نعتبر نقطة M من المستوي (p) إحداثياتها (x,y,z)
حيث x, y, z أعداد طبيعية.
أ) بين أن y فردي.
ب) نضع $y=2p+1$ حيث p عدد طبيعي.
بين أن باقي القسمة الإقليدية للعدد $p+z$ على 3 يساوي 1.
جـ) نضع $p+z=3q+1$ حيث q عدد طبيعي
بين أن الأعداد الطبيعية x, p, q تحقق العلاقة $x+p+4q=7$
ثم استنتج أن q يأخذ القيمتين 0 أو 1
د) استنتج إحداثيات كل النقط من (p) التي إحداثياتها أعداد طبيعية.

الحل

1) أ) بما أن $6\times(-1)+7(1)=1$ فإن الثنائية $(-1,1)$ حل خاص للمعادلة $6x+7y=1$
بضرب المساواة $6\times(-1)+7(1)=1$ في 57 نجد $6(-57)+7(57)=57$
ومنه نستنتج أن $(-57,57)$ حل خاص للمعادلة (E).
ب) المعادلة $6x+7y=57$ تكتب $6x+7y=6(-57)+7(57)$
ومنه ينتج $6(x+57)=7(57-y)$
بما أن 6 يقسم $7(57-y)$ و 6 و 7 أوليان فيما بينهما
فإن حسب نظرية غوص 6 يقسم $57-y$.
إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $57-y=6k$ أي $y=-6k+57$.
بتعويض عبارة y في (E) نجد $x=7k-57$
وبالعكس كل الثنائيات $(7k-57,57-6k)$ تحقق المعادلة (E)
إذن فهي حلول لـ (E)
إذن الثنائيات الصحيحة حلول للمعادلة (E) هي من الشكل $(7k-57,57-6k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) لتكن M نقطة من (p) وتنتمي أيضا إلى المستوي $(o,\vec{i},\vec{j})$ إحداثياتها (x,y,z)
تحقق المعادلتين $6x+7y+8z=57$ و $z=0$
إذن المسألة تؤول إلى إيجاد الحلول في $\mathbb{N}^2$ للمعادلة $6x+7y=57$.
وهذا يعني إيجاد العدد الصحيح k بحيث $\begin{cases}7k-57\ge0\\57-6k\ge0\end{cases}$ .....(I)
بعد حل الجملة (I) نجد $k=9$
إذن توجد نقطة وحيدة تحقق الشرطين إحداثياتها $(6,3,0)$

3) أ) M تنتمي إلى (p) تعني أن $6x+7y+8z=57$
وتعني أيضا $7y=57-6x-8z$
بما أن $6x-8z$ زوجي
فإن $57-6x-8z$ فردي
وبالتالي $7y$ فردي وعليه y فردي.
ب) نضع $y=2p+1$ مع p عدد طبيعي.
العلاقة $6x+7y+8z=57$ تكتب عندئذ $6x+14p+8z=50$
لكن $6x=0[3]$ و $14p=2p[3]$ و $8z=2z[3]$ و $50=2[3]$
إذن ينتج $2p+2z\equiv2[3]$
وبالقسمة على 2 نجد $p+z=1[3]$
جـ) نضع $p+z=3q+1$ مع $q\in\mathbb{N}$
من السؤال السابق $p+z$ يكتب على الشكل $3q+1$
إذن المساواة $6x+14p+8z=50$ تكتب $6x+14p+8(3q+1-p)=50$
وبالتبسيط نجد $x+p+4q=7$
وبما أن x و p و q أعداد طبيعية
فإن $x\ge0$ و $p\ge0$ و $q\ge0$
إذن $4q\le7$ ومنه نستنتج $q=0$ أو $q=1$
د) من السؤال السابق لدينا $q=0$ أو $q=1$
ولدينا أيضا $x+p+4q=7$ ، $p+z=3q+1$ ، $y=2p+1$
- إذا كان $q=0$ فإن $x+p=7$ و $p+z=1$
وبالتالي $p=0$ أو $p=1$
لدينا إذن:
$(q=0$ و $p=0$ و $x=7$ و $z=1$ و $y=1)$
أو $(q=0$ و $p=1$ و $x=6$ و $Z=0$ و $y=3)$
وعليه توجد نقطتان هما $(7,1,1)$ و $(6,0,3)$
- إذا كان $q=1$ فإن $x+p=3$ و $p+z=4$ و $y=2p+1$
والجدول التالي يلخص جميع الحالات الممكنة لـ x ، y ، z ، p:

x	3	2	1	0
p	0	1	2	3
z	4	3	2	1
y	1	3	5	7
(x,y,z)	$(1,5,2)$	$(2,3,3)$	$(1,5,2)$	$(0,7,1)$

إذن توجد 6 نقاط إحداثياتها أعداد طبيعية هي:
$(7,1,1)$ ، $(6,0,3)$ ، $(1,5,2)$ ،
$(2,3,3)$ ، $(1,5,2)$ ، $(0,7,1)$.

تطبيق 10 تعيين حلول معادلة $x^2+y^2=p^2$ حيث p عدد طبيعي

p عدد طبيعي معطى، نريد دراسة وجوه ثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما تحقق المعادلة $x^2+y^2=p^2$ ...... (E)

1- نضع $p=2$. بين أن المعادلة (E) ليس لها حلول.

نفرض أن $p \neq 2$ وأن (x,y) حل للمعادلة (E)

2- أ) بين أن x و y أحدهما زوجي و الآخر فردي

ب) بين أن x و y لا يقبلان القسمة على p

جـ) استنتج أن x و y أوليان فيما بينهما

3) نفرض الآن أن p هو مجموع مربعين غير معدومين أي $p=u^2+v^2$ حيث u و v عددين طبيعيين موجبين تماما

أ) تحقق أن الثنائية $\left(\left|u^2-v^2\right|, 2uv\right)$ حل للمعادلة (E)

ب) أعط حلا للمعادلة (E) في حالة $p=5$ ثم لما $p=13$

4- أ) بين أن المعادلة (E) ليس لها حلول في حالة $p=3$ و $p=7$

ب) بين أن المعادلتين $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2=49$ لا تقبلان حلولا من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما .

✓ الحل

1) في حالة $p=2$ المعادلة (E) تكتب $x^2+y^2=4$

لكن $x>0$ و $y>0$

إذن $x^2<4$ و $y^2<4$ ومنه ينتج $x<2$ و $y<2$

وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق $0<x<2$ و $0<y<2$ هي $(1,1)$

ولكن $(1,1)$ لا تحقق المعادلة (E)

إذن (E) ليس لها حلولا في حالة $p=2$

2) أ) نفرض أن (x,y) حل للمعادلة (E) في حالة $p \neq 2$

إذن $x^2+y^2=p^2$ و $x>0$ و $y>0$

بما أن p أولي ويختلف عن 2 فإن p فردي وبالتالي p^2 فردي.

لدينا عندئذ x^2+y^2 فردي.

لكن مجموع عددين لهما نفس الشفعية هو عدد زوجي

إذن x^2 و y^2 أحدهما زوجي و الآخر فردي.

وبما أن العدد ومربعه لهما نفس الشفعية فإن x و y أحدهما زوجي والآخر فردي .

ب) لدينا $\begin{cases} x^2+y^2=p^2 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ إذن ينتج $\begin{cases} 0<x^2<p^2 \\ 0<y^2<p^2 \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} 0<x<p \\ 0<y<p \end{cases}$

إذن نستنتج أن x و y لا يقبلان القسمة على p .

جـ) لتكن $d=PGCD(x,y)$ إذن d يقسم x و y

وبالتالي d^2 يقسم x^2 و y^2 وعليه d^2 يقسم p^2

ـ إذا كان $d^2=p^2$ فإن $d=p$ وهذا خطأ كون x و y لا يقبلان القسمة على p

ـ إذا كان $d^2=p$ فإن p له قاسم آخر يختلف عن 1 وهذا خطأ لكون p أوليا.

ومنه نستنتج أن $d^2=1$ إذن $PGCD(x,y)=1$

3) أ) التحقق أن $\left(\left|u^2-v^2\right|, 2uv\right)$ حل لـ (E)

ـ إذا كان $p=u^2+v^2$ المعادلة (E) تكتب $x^2+y^2=(u^2+v^2)^2$

لكن $\left(\left|u^2-v^2\right|\right)^2+(2uv)^2=u^4-2u^2v^2+v^4+4u^2v^2$

أي $\left(\left|u^2-v^2\right|\right)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2$

ب) ـ إذا كان $p=5$ فإن $p=2^2+1^2$

إذن p من الشكل u^2+v^2 مع $u>0$ و $v>0$

الثنائية $\left(\left|2^2-1^2\right|, 2\times 2\times 1\right)$ حل لـ (E) من السؤال 3-أ)

إذن الثنائية $(3,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .

ـ إذا كان $p=13$ فإن $p=3^2+2^2$ بنفس الطريقة السابقة نبين أن الثنائية $(5,12)$ حل للمعادلة (E)

4) أ) : $p=3$ و $p=7$ مجموع مربعين

نبحث هل توجد ثنائيات (u,v) من الأعداد الطبيعية

بحيث $u^2+v^2=3$ مع $u>0$ و $v>0$.

لدينا عندئذ $0<u^2<3$ و $0<v^2<3$

وبالتالي توجد ثنائية وحيدة $(1,1)$ التي تحقق $0<u^2<3$ و $0<v^2<3$.

لكن $(1,1)$ لا تحقق المعادلة $u^2+v^2=3$

إذن المعادلة (E) ليس لها حلولا (أي 3 ليس مجموع مربعين).

ـ نبحث هل توجد ثنائيات (r,s) من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما بحيث $r^2+s^2=7$

لدينا عندئذ $0<s^2<7$ و $0<r^2<7$

بما أن 7 فردي و s و r لهما شفعية مختلفة فإن الثنائيات الوحيدة هي $(1,2)$ و $(2,1)$

لكن $1^2+2^2 \neq 7$

إذن المعادلة (E) ليس لها حلولا (أي 7 ليس مجموع مربعين).

ب) ـ نبحث عن الأعداد x و y بحيث $x^2+y^2=9$ و $x>0$ و $y>0$

لدينا إذن $0 < x^2 < 9$ و $0 < y^2 < 9$ ومنه ينتج $0 < x < 3$ و $0 < y < 3$

من السؤال 2) x و y لهما شفعية مختلفة

إذن الثنائيات الوحيدة هي $(1,2)$ و $(2,1)$ لكن $1^2+2^2 \neq 9$

إذن المعادلة $x^2+y^2=9$ لا تقبل حلولا من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما

ـ نبحث عن الأعداد x و y بحيث $x^2+y^2=49$ و $x > 0$ و $y > 0$

لدينا إذن $0 < x^2 < 49$ و $0 < y^2 < 49$

ومنه ينتج $0 < x < 7$ و $0 < y < 7$

من السؤال 2) إذا كانت (x,y) حلولا لـ (E) فإن x و y لهما شفعية مختلفة وأوليان فيما بينهما وعليه الثنائيات التي تحقق هذه الشروط هي

$(2,5)$، $(3,1)$، $(3,4)$، $(4,1)$، $(4,3)$، $(4,5)$، $(5,2)$، $(5,4)$، $(5,6)$

$(1,2)$، $(1,4)$، $(1,6)$، $(2,1)$، $(2,3)$

نستطيع التحقق أنه ولا ثنائية من هذه الثنائيات تحقق المعادلة $x^2+y^2=49$

إذن المعادلة $x^2+y^2=49$ لا تقبل حلولا من الأعداد الطبيعية الموجبة تماما .

تمارين و مسائل

1

بين أنه يوجد على الأقل عددان صحيحان k و n بحيث $13k-23n=1$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $-156x+276y=24$

2

عين الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث $2m+7d=11$

حيث $m=PPCM(x,y)$ و $d=PGCD(x,y)$

3

1) عين $PGCD$ للعددين 2688 و 3024

2) في هذا السؤال x و y عددان صحيحان

أ) بين أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان

(1) ...... $2688x+3024y=-3360$

(2) .... $8x+9y=-10$

ب) تحقق أن الثنائية $(1,-2)$ حل خاص للمعادلة (2)

جـ) استنتج حلول المعادلة (2)

3) $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء، نعتبر المستويين (p) و (q) ذوي المعادلتين $x+2y-z=-2$ و $3x-y+5z=0$ على الترتيب

أ) بين أن (p) و (q) متقاطعان في مستقيم (d) .

ب) بين أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2).

جـ) استنتج المجموعة (γ) للنقط من (d) بحيث تكون إحداثياتها أعداد صحيحة .

4

1- نعتبر المعادلة (E) : $8x+5y=1$ حيث (x,y) ثنائية من الأعداد الصحيحة

أ) عين حلا خاصا للمعادلة (E)

ب) حل المعادلة (E)

2) N عدد طبيعي بحيث توجد ثنائية (a,b) من الأعداد الطبيعية تحقق :

$N = 8a+1$ و $N = 5b+2$

أ) بين أن الثنائية $(a,-b)$ حل للمعادلة (E)

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية لـ N على 40 ؟

3- أ) حل المعادلة $8x+5y=100$ حيث (x,y) ثنائية من الأعداد الصحيحة

ب) أرادت مجموعة من التلاميذ (بنات و ذكور) أن تشتري هدية لأستاذهم فدفعوا 100 قطعة نقدية ذات قيمة 100 دج.

الذكور دفعوا 8 قطع لكل واحد منهم والبنات 5 قطع لكل واحدة منهن.

ما هو عدد عناصر هذه المجموعة ؟

5

1) نعتبر المعادلة (E): $6x+7y=57$ حيث (x,y) ثنائية صحيحة.

عين ثنائية من الأعداد الصحيحة (u,v) بحيث $6u+7v=1$

واستنتج حلا خاصا (x_0,y_0) للمعادلة (E).

2) عين الثنائيات (x,y) من الأعداد الصحيحة حلول للمعادلة (E)

3) لدينا $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر المستوي (p) ذو المعادلة $6x+7y+8z=57$ ولنعتبر النقط من المستوي (p) التي تنتمي أيضا إلى المستوي $(o,\vec{i},\vec{j})$

بين أنه توجد نقطة وحيدة إحداثياتها أعداد طبيعية. ثم عين إحداثياتها.

6

1) عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية بحيث:

$8m=105d+30$ مع $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

2) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة $PPCM(x,y)-9PGCD(x,y)=13$

3) حل في $\mathbb{N}^2$ الجملتين التاليتين:

$\begin{cases} xy=1690 \\ PPCM(x,y)=130 \end{cases}$ و $\begin{cases} xy=1350 \\ PPCM(x,y)=90 \end{cases}$

7

n عدد صحيح كيفي و $a=n^3-2n+5$ و $b=n+1$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n لدينا $a=(n^2-n-1)b+6$

2) برهن أن $PPCM(a,b)=PGCD(b,6)$

3) من أجل أي قيمة n بحيث يكون $PGCD(a,b)=3$

4) عين n بحيث يكون العدد $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا.

8

أوجد جميع الثنائيات (x,y) الصحيحة

بحيث $x+y=40$ و $PGCD(x,y)=2$

2) بين أنه لا توجد أي نقطة ذات إحداثيات صحيحة على القطع الزائد ذو المعادلة: $3x^2-y^2=1$

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=Z$

9

P عدد أولي أكبر أو يساوي 7

الهدف من هذا التمرين هو إثبات أن $n=p^4-1$ يقبل القسمة على 240 ثم تطبيق هذه النتيجة.

1) باستعمال الموافقة بترديد 3 برهن أن n يقبل القسمة على 3.

2) بملاحظة أن P فردي برهن أنه يوجد عدد طبيعي k بحيث: $p^2-1=4k(k+1)$ ثم بين أن n يقبل القسمة على 16.

3) باستعمال الموافقة بترديد 5 برهن أن 5 يقسم n

4- أ) برهن أنه إذا كان a يقسم c و إذا كان b يقسم c مع a و b أوليان فيما بينهما فإن ab يقسم c.

ب) استنتج من الأسئلة السابقة أن 240 يقسم n.

5) هل يوجد 15 عددا أوليا $p_1, p_2, \dots\dots, p_{15}$ أكبر من أو يساوي 7 بحيث العدد $A=P_1^4+\dots\dots+P_{15}^4$ يكون أوليا.

10

نعتبر المتتاليتين (x_n)، (y_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ:

$x_0=1$ و $y_0=8$ و $\begin{cases} x_{n+1}=\frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1 \\ y_{n+1}=\frac{20}{3}x_n+\frac{8}{3}y_n+5 \end{cases}$

برهن بالتراجع أن النقط M_n ذات الإحداثيات (x_n,y_n) تقع على مستقيم (Δ) يطلب إعطاء معادلة له. ثم استنتج أن $x_{n+1}=4x_n+2$

2) برهن بالتراجع أن كل الأعداد x_n طبيعية، ثم استنتج أن كل الأعداد y_n طبيعية أيضا

3) برهن أن:

أ) x_n يقبل القسمة على 3 إذا وفقط إذا كان y_n يقبل القسمة على 3

ب) إذا كان x_n و y_n لا يقبلان القسمة على 3 فإنهما أوليان فيما بينهما.

4-1) برهن بالتراجع أن $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$

ب) استنتج أن $4^n \times 5 - 2$ مضاعف للعدد 3 من اجل كل عدد طبيعي n .

11

نعتبر المعادلة $138\,x - 55\,y = 5$ حيث $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1) برهن أنه إذا كانت الثنائية (x_0, y_0) حلا للمعادلة (E) فإن x_0 مضاعف للعدد 5

2) حل المعادلة (E)

3) ليكن (x_0, y_0) حلا للمعادلة (E) و نضع $d = PGCD(x_0, y_0)$

ما هي القيم الممكنة لـ d ؟

4) عين الحلول (x_0, y_0) للمعادلة (E) بحيث x_0 و y_0 أوليان فيما بينهما .

5) ليكن (Δ) مستقيم معادلته $138\,x - 55\,y = 5$

عين مجموعة النقط M من (Δ) ذات الإحداثيات (x, y) بحيث x و y أعداد صحيحة و OM^2 يقبل القسمة على 5 .

12

1) احسب بدلالة n مجموع n حد الأولى للأعداد الطبيعية غير المعدومة

2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أن :

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = [1 + 2 + ... + n]^2$

3) نضع $S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ عبر عن S_n بدلالة n

4) نضع $D_n = PGCD(S_{n+1}, S_n)$ احسب D_n

أ) في حالة n زوجي $(n = 2k)$

ب) في حالة n فردي $(n = 2k+1)$

5) استنتج من أجل كل $n \geq 1$ أن D_n يختلف عن 1 وأن ثلاثة حدود متتابعة S_n ، S_{n+1} ، S_{n+2} للمتتالية (S_n) ليس لهم أي قاسم مشترك عدا 1 .

13

1) أوجد العدد الأولي p بحيث $17\,p + 1$ مربع تام

2) a و n عددان طبيعيان أكبر تماما من 1 و $a^n - 1$ أولي

برهن أن $a = 2$ و n أوليان.

14

لتكن الفرضية التالية "إذا كان p و $8\,p - 1$ أوليين فيما بينهما فإن $8\,p + 1$ ليس أولي"

1) تحقق أن هذه الفرضية صحيحة من أجل $p = 3$

2) برهن باستعمال الموافقة بترديد 3 أن الفرضية السابقة دوما صحيحة

15

1) برهن أن المعادلة $109\,x - 226\,y = 1$.........(E) حيث (x, y) أعداد صحيحة.

لها كحلول الثنائيات الصحيحة من الشكل $(141 + 226\,k, 68 + 109\,k)$

حيث k عدد صحيح

ب) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد d أصغر أو يساوي 226 وعدد طبيعي وحيد غير معدوم e بحيث $109\,d = 1 + 226\,e$ ، ثم حدد قيم d و e

2) برهن أن 227 عدد أولي.

3) نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a بحيث $a \leq 226$

نعتبر الدالتين f و g من A في A المعرفتين كما يلي :

من أجل كل عدد a فإن الدالة f ترفق باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{109} على 227

من أجل كل عدد طبيعي a من A الدالة g ترفق باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{141} على 227

أ) تحقق أن $g(f(0)) = 0$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a من A يكون $a^{226} = 1[227]$

باستعمال 1- ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a من A يكون $g(f(a)) = a$

ماذا يمكن القول عن $g(f(a)) = a$ ؟

تم هذا الكتاب بعون الله تعالى

فهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

كلمة الناشر

كنا طلبة ... و كانت الكتب العلمية تأتينا من الخارج .... كنا نتسابق لشرائها من المكتبات بلهفة و شوق ... و أشد لهفتنا كانت على الكتب الفيزياء و الرياضيات التي تحمل أصعب التمارين والمسائل ... و كنا نبحث عن الجديد ... فأحببنا الكتاب و أحببنا الجديد.

لهذا كانت سلسلة الجديد في " ... " هي الأولى في مجموعات الكتب التي نأمل أن نصدرها للتعليم المتوسط و الثانوي والجامعي و قد أصدرنا البعض منها في الفيزياء و الكيمياء والعلوم و الرياضيات و الأدب ، و إنها ستكون " إنشاء الله " من أبرز الكتب في الساحة العلمية حتى على مستوى الوطن العربي .

ومع أن هذا الكلام حق ، فإنني أحمد الله سبحانه و تعالى أن يصادف خروج هذه السلسلة انبثاق فجر الآمال في أن تسترد الجزائر حياتها الغالية — حياة الشهداء — و أن تهتدي بهدي نبينا الأعظم صلى الله عليه و سلم و تستعيد سيرة أبي بكر وعمر ... آمين .

كربطوس بوجمعة

رقم الإيداع القانوني: 2007-1194 ردمك: 978-9961-894-51-4

الثمن: 450 دج