الموافقـــات في Z

Kimou.

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان .

نقول أن العددين a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان لهما نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n

و نكتب $a \equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n

أمثلة : $13 \equiv 3[5]$ لأن باقي قسمة كل من 13 و 3 على 5 هو 3

$27 \equiv 92[5]$ لأن باقي قسمة كل من 27 و 92 على 5 هو 2

$-20 \equiv 1[7]$ لأن باقي قسمة كل من 20 - و 1 على 7 هو 1

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x \equiv 0[1]$

مبرهنة : n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان

يكون $a \equiv b[n]$ إذا و فقط إذا كان $a - b$ مضاعف n أي يوجد عدد صحيح k حيث $a = nk + b$

أمثلة :

$7 - 100$ مضاعف 3 إذن : $100 \equiv 7[3]$

$-20 - 1$ مضاعف 3 إذن : $-20 \equiv 1[3]$

نشاط : ضع صحيح أو خطأ مع التعليل :

1 ـ $26 \equiv 11[5]$ 3 ـ $478 \equiv 32[5]$

2 ـ $-32 \equiv 18[10]$ 4 ـ $58 \equiv -5[7]$

الحـــل :

1 ـ $26 \equiv 11[5]$ صحيح لأن $26 - 11 = 15$ مضاعف 5

2 ـ $-32 \equiv 18[10]$ صحيح لأن $-32 - 18 = -50$ مضاعف 10

3 ـ $478 \equiv 32[5]$ خطأ لأن $478 - 32 = 446$ ليس مضاعف 5

4 ـ $58 \equiv -5[7]$ صحيح لأن $58 - (-5) = 63$ مضاعف 7

خاصية أساسية : n عدد طبيعي أكبر تماما من 1

كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n (القسمة الإقليدية)

أمثلة : $17 \equiv 2[5]$ ؛ $30 \equiv 6[8]$

خواص : n و p عددان طبيعيان غير معدومان .

a ؛ b ؛ c ؛ d أعداد صحيحة .

1 ـ $a \equiv a[n]$ خاصية الإنعكاس

2 ـ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$ خاصية التناظر

3 ـ إذا كان $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{array}\right.$ فإن $a \equiv c[n]$ خاصية التعدي

4 ـ إذا كان $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{array}\right.$ فإن $a + c \equiv b + d[n]$ خاصية الجمع

5 ـ إذا كان $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{array}\right.$ فإن $ac \equiv bd[n]$ خاصية الجداء

6 ـ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ac \equiv bc[n]$ خاصية الضرب في عدد صحيح

7 ـ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$ خاصية الأس

ملاحظة : من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين n و p و من أجل كل عددين صحيحين a و b فإن :

$a \equiv b[n]$ يكافئ $ap \equiv bp[np]$

نشاط : عين باقي قسمة (5817 -) على 251

الحـل : باجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 5817 & 251 \\ \underline{502} & 23 \\ 797 & \\ \underline{753} & \\ 44 & \end{array}$$

إذن : $5817 = 251(23) + 44$

منه : $-5817 = 251(-23) - 44$

أي : $-5817 = 251(-23) - 44 + 251 - 251$

أي : $-5817 = 251(-24) + 207$

منه : $-5817 \equiv 207[251]$

ملاحظة : يمكن إيجاد هذه النتيجة باستعمال الخواص كمايلي :

لدينا باقي قسمة 5817 على 251 هو 44 إذن : $5817 \equiv 44[251]$

منه : $-5817 \equiv -44[251]$ (خاصية الضرب في عدد صحيح)

من جهة أخرى : $\left\{\begin{array}{l} -44 \equiv -44[251] \\ 0 \equiv 251[251] \end{array}\right.$ إذن : $-44 \equiv 251 - 44[251]$ (خاصية الجمع)

أي $-44 \equiv 207[251]$

نتيجة : حسب علاقة التعدي $-5817 \equiv -44[251]$ و $-44 \equiv 207[251]$

إذن : $-5817 \equiv 207[251]$

نشاط : عين الأعداد الصحيحة x حيث $x + 4 \equiv 2[7]$

الحـل : $\left\{\begin{array}{l} x + 4 \equiv 2[7] \\ -4 \equiv -4[7] \end{array}\right.$ إذن : $x + 4 - 4 \equiv 2 - 4[7]$

أي : $x \equiv -2[7]$

منه : $x + 0 \equiv -2 + 7[7]$ لأن $0 \equiv 7[7]$

أي : $x \equiv 5[7]$

نتيجة : $x = 7k + 5$ حيث $k \in Z$

نشاط : عين قيم العدد الصحيح x حيث $5x \equiv 3[7]$

الحـل : لتعيين قيم x ندرس، بواقي قسمة $5x$ على 7 من أجل كل البواقي الممكنة لـ x على 7

و هي 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6

إذن : لما $x \equiv 0[7]$ فإن $5x \equiv 0[7]$

لما $x \equiv 1[7]$ فإن $5x \equiv 5[7]$

لما $x \equiv 2[7]$ فإن $5x \equiv 10[7]$ أي $5x \equiv 3[7]$

لما $x \equiv 3[7]$ فإن $5x \equiv 15[7]$ أي $5x \equiv 1[7]$

لما $x \equiv 4[7]$ فإن $5x \equiv 20[7]$ أي $5x \equiv 6[7]$

لما $x \equiv 5[7]$ فإن $5x \equiv 25[7]$ أي $5x \equiv 4[7]$

لما $x \equiv 6[7]$ فإن $5x \equiv 30[7]$ أي $5x \equiv 2[7]$

نتيجة : يكون $5x \equiv 3[7]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 2[7]$

أي $x = 7k + 2$ حيث $k \in Z$

ملاحظة : يمكن تلخيص هذه الإجابة في الجدول التالي :

$x \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5x \equiv ?[7]$	0	5	3	1	6	4	2

إذن : $5x \equiv 3[7]$ من أجل $x \equiv 2[7]$ أي $x = 7k + 2$

نشاط : ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 5

ثم إستنتج باقي قسمة العدد 3^{4039} على 5

الحـل : لنبحث عن بواقي قسمة 3^n على 5 من أجل قيم مختلفة لـ n كمايلي :

$n = 0 \longrightarrow 3^0 \equiv 1[5]$ ، $n = 4 \longrightarrow 3^4 \equiv 1[5]$ ، $n = 8 \longrightarrow 3^8 \equiv 1[5]$

$n = 1 \longrightarrow 3^1 \equiv 3[5]$ ، $n = 5 \longrightarrow 3^5 \equiv 3[5]$ ، $n = 9 \longrightarrow 3^9 \equiv 3[5]$

$n = 2 \longrightarrow 3^2 \equiv 4[5]$ ، $n = 6 \longrightarrow 3^6 \equiv 4[5]$ ، $n = 10 \longrightarrow 3^{10} \equiv 4[5]$

$n = 3 \longrightarrow 3^3 \equiv 2[5]$ ، $n = 7 \longrightarrow 3^7 \equiv 2[5]$ ، $n = 11 \longrightarrow 3^{11} \equiv 2[5]$

نتيجة :

لما $n = 4k$ فإن $3^n \equiv 1[5]$

لما $n = 4k + 1$ فإن $3^n \equiv 3[5]$

لما $n = 4k + 2$ فإن $3^n \equiv 4[5]$

لما $n = 4k + 3$ فإن $3^n \equiv 2[5]$

بما أن $4039 = 4(1009) + 3$ فإن $3^{4039} \equiv 3^{4(1009)+3} \equiv 3^{4k+3} \equiv 2[5]$

إذن : باقي قسمة 3^{4039} على 5 هو 2

التعداد

مبرهنة : x عدد طبيعي أكبر تماما من 1

كل عدد طبيعي a حيث $a \geq x$ يكتب بطريقة وحيدة من الشكل .

$a = q x^n + r_{n-1} x^{n-1} + r_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + r_2 x^2 + x_1 r_1 + r_0$ حيث q و r_i أعداد طبيعية

و $0 < q < x$ و $0 \leq r_i < x$

مثال : $x = 2$ ؛ $a = 29$

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1$$
$$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$

إذن : $q = 1$ ؛ $n = 4$ ؛ $r_0 = 1$ ؛ $r_1 = 0$ ؛ $r_2 = 1$ ؛ $r_3 = 1$

نتيجة : x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و a عدد طبيعي .

1 ـ إذا كان $a < x$ نسمي a رقما في النظام ذو الأساس x و نرمز له برمز وحيد

2 ـ إذا كان $a \geq x$ نمثل العدد a في النظام ذو الأساس x بـ $\overline{q\, r_{n-1}\, r_{n-2} \ldots\ldots r_1\, r_0}$

حيث $a = q x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots r_1 x + r_0$ و $0 < q < x$ و $0 \leq r_i < x$

حالة خاصة : إذا كان $x = 10$ نكتب $a = q\, r_{n-1} \ldots\ldots r_1\, r_0$ و يسمى النظلم العشري

مثال : في المثال السابق لدينا : $29 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$

إذن : العدد 29 يكتب $\overline{11101}$ في النظام ذو الأساس 2

ملاحظة : أرقام النظام ذو الأساس x هي $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots\ldots ; (x-1)\}$

مثلا : النظام ذو الأساس 2 له الأرقام $\{0 ; 1\}$

النظام ذو الأساس 5 له الأرقام $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

النظام العشري له الأرقام $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$

التعداد و قابلية القسمة في N

ليكن A عدد طبيعي يكتب في النظام العشري $A = a_n\, a_{n-1} \ldots\ldots\ldots a_2\, a_1\, a_0$

1 ـ يكون A قابلا للقسمة على 10 إذا و فقط إذا كان $a_0 = 0$

2 ـ يكون A قابلا للقسمة على 2 إذا و فقط إذا كان $a_0 \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$

3 ـ يكون A قابلا للقسمة على 5 إذا و فقط إذا كان $a_0 \in \{0 ; 5\}$

4 ـ يكون A قابلا للقسمة على 3 إذا و فقط إذا كان $(a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_1 + a_0) \equiv 0[3]$

5 ـ يكون A قابلا للقسمة على 9 إذا و فقط إذا كان $(a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_1 + a_0) \equiv 0[9]$

6 ـ يكون A قابلا للقسمة على 4 إذا و فقط إذا كان $(10\, a_1 + a_0) \equiv 0[4]$

7 ـ يكون A قابلا للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $((-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots\ldots - a_1 + a_0) \equiv 0[11]$

أمثلة :

العدد 567 لا يقبل القسمة على 10 لأن $7 \neq 0$

العدد 1728 يقبل القسمة على 4 لأن 28 مضاعف 4

العدد 115 يقبل القسمة على 5

العدد 17382 يقبل القسمة على 3 لأن $(2 + 8 + 3 + 7 + 1)$ مضاعف 3

العدد 7345591 يقبل القسمة على 11 لأن $(1 + 9 - 5 + 5 - 4 + 3 - 7)$ مضاعف 11

العدد 275841 يقبل القسمة على 9 لأن $(1+ 4 +8+ 5 + 7 + 2)$ مضاعف 9

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـــ 1

برر صحة العبارات التالية :

1 ـــ $45 \equiv 3[7]$ **3 ـــ** $-13 \equiv 2[3]$ **5 ـــ** $137 \equiv -3[5]$

2 ـــ $29 \equiv -1[6]$ **4 ـــ** $152 \equiv 2[3]$ **6 ـــ** $-17 \equiv -7[10]$

الحـل ـــ 1

1 ـــ $45 - 3 = 42$ و 42 مضاعف 7 إذن : $45 \equiv 3[7]$

2 ـــ $29 - (-1) = 30$ و 30 مضاعف 6 إذن : $29 \equiv -1[6]$

3 ـــ $-13 - 2 = -15$ و -15 مضاعف 3 إذن : $-13 \equiv 2[3]$

4 ـــ $152 - 2 = 150$ و 150 مضاعف 3 إذن : $152 \equiv 2[3]$

5 ـــ $137 - (-3) = 140$ و 140 مضاعف 5 إذن : $137 \equiv -3[5]$

6 ـــ $-17 - (-7) = -10$ و -10 مضاعف 10 إذن : $-17 \equiv -7[10]$

التمرين ـــ 2

عين خمسة أعداد صحيحة x تحقق $37 \equiv x[4]$

ما هو العدد الطبيعي x الذي يكون أصغر ما يمكن حيث $37 \equiv x[4]$

الحـل ـــ 2

$37 - 5 = 32$ و 32 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv 5[4]$

$37 - (-3) = 40$ و 40 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv -3[4]$

$37 - 13 = 24$ و 24 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv 13[4]$

$37 - 9 = 28$ و 28 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv 9[4]$

$37 - 17 = 20$ و 20 مضاعف 4 إذن : $37 \equiv 17[4]$

أصغر عدد طبيعي x يحقق $37 \equiv x[4]$ هو باقي القسمة الإقليدية لـــ 37 على 4 كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ \hline \underline{36} & 9 \\ 1 & \end{array}$$

إذن : $x = 1$

التمرين ـــ 3

عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث $n \equiv 4[7]$

الحـل ـــ 3

أصغر عدد طبيعي n يحقق $n \equiv 4[7]$ هو $n = 4$ لأن $4 - 4 = 0$ و 0 مضاعف 7

لكن لدينا $7 \equiv 0[7]$

نتيجة : $\left\{\begin{array}{l} 4 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array}\right.$ منه : $11 \equiv 4[7]$ (باستعمال خاصية الجمع)

بنفس الطريقة لدينا $\left\{\begin{array}{l} 11 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array}\right.$ إذن : $18 \equiv 4[7]$ (دائما خاصية الجمع)

$\left\{\begin{array}{l} 18 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array}\right.$ إذن : $25 \equiv 4[7]$

$\left\{\begin{array}{l} 25 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array}\right.$ إذن : $32 \equiv 4[7]$ نتوقف لأن $32 > 30$

خلاصة : الأعداد المطلوبة n هي $\{4 ; 11 ; 18 ; 25\}$

التمرين ـــ 4

n عدد صحيح يحقق $n \equiv 140[12]$

عين باقي قسمة العدد n على 12

الحـل ـــ 4

لنبحث عن باقي قسمة 140 على 12 كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 140 & 12 \\ \underline{12} & 11 \\ 20 & \\ \underline{12} & \\ 8 & \end{array}$$

إذن : $140 \equiv 8[12]$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} n \equiv 140[12] \\ 140 \equiv 8[12] \end{matrix}\right\}$ منه : حسب خاصية التعدي $n \equiv 8[12]$

بما أن $0 \leq 8 < 12$ فإن 8 هو باقي قسمة n على 12

التمرين ـــ 5

x عدد صحيح باقي قسمته على 7 هو 2

عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية :

$x + 5$ ؛ $x - 5$ ؛ $9x$ ؛ $-15x$ ؛ x^3

الحـل ـــ 5

باقي قسمة x على 7 هو 2 إذن : $x \equiv 2[7]$

منه النتائج التالية :

1 ـــ $\left.\begin{matrix} x \equiv 2[7] \\ 5 \equiv 5[7] \end{matrix}\right\}$ إذن : $x + 5 \equiv 2 + 5[7]$

أي $x + 5 \equiv 0[7]$ لأن $7 \equiv 0[7]$

منه : باقي قسمة $x + 5$ على 7 هو 0

2 ـــ $\left.\begin{matrix} x \equiv 2[7] \\ -5 \equiv -5[7] \end{matrix}\right\}$ إذن : $x - 5 \equiv 2 - 5[7]$

من جهة أخرى لدينا $0 \equiv 7[7]$

إذن : $\left.\begin{matrix} x - 5 \equiv -3[7] \\ 0 \equiv 7[7] \end{matrix}\right\}$ منه $x - 5 \equiv 7 - 3[7]$ أي $x - 5 \equiv 4[7]$

إذن : باقي قسمة $x - 5$ على 7 هو 4

3 ـــ $\left.\begin{matrix} x \equiv 2[7] \\ 9 \equiv 2[7] \end{matrix}\right\}$ إذن : $9x \equiv 2 \times 2[7]$

أي باقي قسمة $9x$ على 7 هو 4

4 ـــ $\left.\begin{matrix} x \equiv 2[7] \\ -15 \equiv -1[7] \end{matrix}\right\}$ إذن : $-15x \equiv -2[7]$

منه : $\left.\begin{matrix} -15x \equiv -2[7] \\ 0 \equiv 7[7] \end{matrix}\right\}$

إذن : $-15x \equiv 5[7]$

أي باقي قسمة $-15x$ على 7 هو 5

5 ـــ $x \equiv 2[7]$ إذن : $x^3 \equiv 2^3[7]$ (خاصية الأس)

أي : $x^3 \equiv 8[7]$

منه : $x^3 \equiv 1[7]$ لأن $8 \equiv 1[7]$

أي باقي قسمة x^3 على 7 هو 1

التمرين ـــ 6

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2

في كل حالة من الحالات التالية عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الموافقة :

1 ـــ $46 \equiv 0[n]$ 2 ـــ $10 \equiv 1[n]$ 3 ـــ $27 \equiv 5[n]$

الحـل ـــ 6

1 ـــ $46 \equiv 0[n]$ إذن : 46 مضاعف n

منه : n قاسم لـــ 46 $(n \geq 2)$

إذن : $n \in \{2 ; 23 ; 46\}$

2 ـــ $10 \equiv 1[n]$ إذن : 1 - 10 مضاعف n

أي n مضاعف 9

أي n قاسم لـ 9 $(n \geq 2)$

منه : $n \in \{3 ; 9\}$

3 ــ $27 \equiv 5[n]$ إذن : $27 - 5$ مضاعف n

أي 22 مضاعف n

منه n قاسم لـ 22 $(n \geq 2)$

إذن : $n \in \{2 ; 11 ; 22\}$

التمرين ــ 7

n و m عددان طبيعيان غير معدومان .

a و b عددان صحيحان .

أثبت أن : $a \equiv b[n]$ يكافئ $a\,m \equiv b\,m[n\,m]$

الحــل ــ 7

لاثبات صحة هذا التكافؤ يكفي أن نثبت الشرطين التاليين :

(1) إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a\,m \equiv b\,m[n\,m]$

(2) إذا كان $a\,m \equiv b\,m[n\,m]$ فإن $a \equiv b[n]$

إثبات الشرط (1)

ليكن $a \equiv b[n]$ إذن : $(a - b)$ مضاعف n

منه : $m(a - b)$ مضاعف $n\,m$

أي $a\,m - b\,m$ مضاعف $n\,m$

أي $a\,m \equiv b\,m[n\,m]$

أي الشرط (1) محقق .

إثبات الشرط (2)

ليكن $a\,m \equiv b\,m[n\,m]$ إذن : $(a\,m - b\,m)$ مضاعف $n\,m$

أي $m(a - b)$ مضاعف $n\,m$

أي $(a - b)$ مضاعف n لأن $m \neq 0$

أي $a \equiv b[n]$

إذن : الشرط (2) محقق .

خلاصة : $a \equiv b[n]$ يكافئ $a\,m \equiv b\,m[n\,m]$

التمرين ــ 8

$C , B , A . c , b , a$ أعداد حقيقية .

برهن أن إذا كانت الأعداد $(A - a)$ ؛ $(B - b)$ ؛ $(C - c)$ تقبل القسمة على عدد طبيعي غير معدوم n

فان العدد $(ABC - abc)$ يقبل القسمة على n

الحــل ــ 8

$(A - a)$ مضاعف n إذن : $A \equiv a[n]$ .... (1)

$(B - b)$ مضاعف n إذن : $B \equiv b[n]$ .... (2)

$(C - c)$ مضاعف n إذن : $C \equiv c[n]$ .... (3)

باستعمال خاصية الجداء بين (1) و (2) نحصل على $AB \equiv a\,b[n]$ ....(4)

باستعمال خاصية الجداء بين (3) و (4) نحصل على $ABC \equiv abc[n]$

أي $(ABC - abc)$ مضاعف n

أي $(ABC - abc)$ يقبل القسمة على n

التمرين ــ 9

n و m عددان طبيعيان غير معدومين . حيث $n \equiv 0[m]$

a و b عددان صحيحان .

أثبت أن : إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a \equiv b[m]$

الحــل ــ 9

$\left.\begin{array}{l} n \equiv 0[m] \\ a \equiv b[n] \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} n \text{ مضاعف } m \\ a - b \text{ مضاعف } n \end{array}\right\}$

أي $(a-b)$ مضاعف m (بالتعدي)

منه : $a \equiv b[m]$

التمرين ــ 10

c , b , a أعداد صحيحة حيث $a \equiv 30757[10]$ ؛ $b \equiv 15163[10]$ ؛ $c \equiv 12924[10]$

1 ــ بسط الموافقات المعطاة .

2 ــ عين العدد الطبيعي x حيث $0 \le x \le 9$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $a + b + c \equiv x[10]$ د) $a - b + c \equiv x[10]$

ب) $a + b - c \equiv x[10]$ هــ) $abc \equiv x[10]$

ج) $ab + ac + bc \equiv x[10]$ و) $a^2 + b^2 + c^2 \equiv x[10]$

الحــل ــ 10

1 ــ $a \equiv 30757[10]$ إذن : $a \equiv 7[10]$ لأن باقي قسمة 30757 على 10 هو 7

$b \equiv 15163[10]$ إذن : $b \equiv 3[10]$ لأن باقي قسمة 15163 على 10 هو 3

$c \equiv 12924[10]$ إذن : $c \equiv 4[10]$ لأن باقي قسمة 12924 على 10 هو 4

2 ــ أ) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $a + b + c \equiv 7 + 3 + 4[10]$

أي : $a + b + c \equiv 4[10]$

أي $x = 4$

ب) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $a + b - c \equiv 7 + 3 - 4[10]$

أي : $a + b - c \equiv 6[10]$

أي $x = 6$

ج) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} ab \equiv 7 \times 3[10] \\ ac \equiv 7 \times 4[10] \\ bc \equiv 3 \times 4[10] \end{array}\right.$

أي : $\left\{\begin{array}{l} ab \equiv 1[10] \text{ لأن } 21 \equiv 1[10] \\ ac \equiv 8[10] \text{ لأن } 28 \equiv 8[10] \\ bc \equiv 2[10] \text{ لأن } 12 \equiv 2[10] \end{array}\right.$

أي $ab + ac + bc \equiv 1 + 8 + 2[10]$

أي $ab + ac + bc \equiv 1[10]$

أي $x = 1$

د) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $a - b + c \equiv 7 - 3 + 4[10]$

أي : $a - b + c \equiv 8[10]$

أي $x = 8$

هــ) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $abc \equiv 7 \times 3 \times 4[10]$

أي : $abc \equiv 4[10]$

أي $x = 4$

و) $\left.\begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array}\right\}$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} a^2 \equiv 7^2[10] \\ b^2 \equiv 3^2[10] \\ c^2 \equiv 4^2[10] \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \equiv 9[10] \\ b^2 \equiv 9[10] \\ c^2 \equiv 6[10] \end{array}\right\} : \text{أي}$$

منه $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 9 + 9 + 6[10]$

أي $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 4[10]$

أي $x = 4$

التمرين – 11

ABCDE مضلع منتظم محيط بالدائرة (C) كما هو موضح على الشكل المقابل .

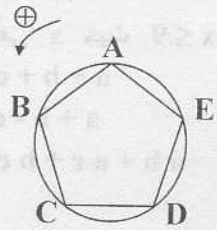
M نقطة متحركة على الدائرة (C) إنطلاقا من النقطة A

نفرض أن الإتجاه المباشر هو الاتجاه العكسي لعقارب الساعة

أوجد نقطة الوصول في كل من الحالات التالية :

أ) M تقطع 15123 قوسا متتابعة في الإتجاه المباشر

ب) M تقطع 15132 قوسا متتابعة في الإتجاه غير المباشر .



الحـل – 11

بملاحظة الشكل نستنتج ما يلي:

أ) في الإتجاه المباشر

عدد الأقواس المقطوعة	نقطة الوصول
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	A
6	B
7	C
8	D
9	E

نتيجة :

ليكن x عدد الأقواس المقطوعة في الإتجاه المباشر إذن :

إذا كان $x \equiv 0[5]$ فإن نقطة الوصول هي A

إذا كان $x \equiv 1[5]$ فإن نقطة الوصول هي B

إذا كان $x \equiv 2[5]$ فإن نقطة الوصول هي C

إذا كان $x \equiv 3[5]$ فإن نقطة الوصول هي D

إذا كان $x \equiv 4[5]$ فإن نقطة الوصول هي E

منه : بعد قطع 15123 قوس متتابعة في الإتجاه المباشر فإن نقطة الوصول هي D لأن $15123 \equiv 3[5]$

ب) في الإتجاه غير المباشر :

عدد الأقواس المقطوعة	نقطة الوصول
0	A
1	E
2	D
3	C
4	B
5	A
6	E
7	D
8	C
9	B

نتيجة :

ليكن y عدد الأقواس المقطوعة في الإتجاه غير المباشر :

إذا كان $y \equiv 0[5]$ فإن نقطة الوصول هي A

إذا كان $y \equiv 1[5]$ فإن نقطة الوصول هي E

إذا كان $y \equiv 2[5]$ فإن نقطة الوصول هي D

إذا كان $y \equiv 3[5]$ فإن نقطة الوصول هي C

إذا كان $y \equiv 4[5]$ فإن نقطة الوصول هي B

نتيجة : بعد قطع 15132 قوسا متتابعة في الإتجاه غير المباشر فإن نقطة الوصول هي D لأن $15132 \equiv 2[5]$

التمرين – 12

عين باقي قسمة العدد 12^{1527} على 5

الحـل – 12

لدينا : $12 \equiv 2[5]$ إذن : $12^{1527} \equiv 2^{1527}[5]$

إذن : يكفي تعيين باقي قسمة 2^{1527} على 5 كما يلي :

ندرس أولا بواقي قسمة 2^n على 5 من أجل قيم مختلفة لـ n من N

$2^0 \equiv 1[5]$ ، $2^1 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ منه

إذا كان $n = 4k$ فإن $2^n \equiv 1[5]$

إذا كان $n = 4k+1$ فإن $2^n \equiv 2[5]$

إذا كان $n = 4k+2$ فإن $2^n \equiv 4[5]$

إذا كان $n = 4k+3$ فإن $2^n \equiv 3[5]$

حيث k عدد طبيعي .

$2^4 \equiv 1[5]$

$2^5 \equiv 2[5]$

$2^6 \equiv 4[5]$

$2^7 \equiv 3[5]$

نتيجة : $1527 = 4(381) + 3$ إذن : $1527 = 4k + 3$

منه : $2^{1527} \equiv 3[5]$

إذن : باقي قسمة 12^{1527} على 5 هو 3

<u>التمرين ــ 13</u>

عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد التالية على 5 :

1 ــ $(371)^{238}$ **3 ــ $(1429)^{2009}$**

2 ــ $(579)^{2008}$ **4 ــ $(1954)^{1962}$**

<u>الحــل ــ 13</u>

1 ــ $371 \equiv 1[5]$ إذن : $(371)^{238} \equiv (1)^{238}[5]$

أي : $(371)^{238} \equiv 1[5]$

منه : باقي قسمة $(371)^{238}$ على 5 هو 1

2 ــ $579 \equiv 4[5]$

لكن $4 \equiv -1[5]$ لأن $4 - (-1)$ مضاعف 5

إذن : حسب علاقة التعدي فإن $579 \equiv -1[5]$

منه : $(579)^{2008} \equiv (-1)^{2008}[5]$

أي : $(579)^{2008} \equiv 1[5]$

إذن : باقي قسمة $(579)^{2008}$ على 5 هو 1

3 ــ $1429 \equiv 4[5]$ إذن : $1429 \equiv (-1)[5]$

منه $(1429)^{2009} \equiv (-1)^{2009}[5]$

أي $(1429)^{2009} \equiv -1[5]$

أي : $(1429)^{2009} \equiv 4[5]$ لأن $-1 \equiv 4[5]$

إذن : باقي قسمة $(1429)^{2009}$ على 5 هو 4

4 ــ $1954 \equiv 4[5]$ إذن : $1954 \equiv -1[5]$

منه : $(1954)^{1962} \equiv (-1)^{1962}[5]$

أي $(1954)^{1962} \equiv 1[5]$

منه باقي قسمة $(1954)^{1962}$ على 5 هو 1

<u>التمرين ــ 14</u>

عين بواقي قسمة الأعداد التالية على 9

1 ــ $(1754)^{12}$ **2 ــ $(34572)^{457}$** **3 ــ $(375)^{2009}$**

<u>الحــل ــ 14</u>

1 ــ

1754	9
85	194
44	
8	

إذن : $1754 \equiv 8[9]$

أي $1754 \equiv -1[9]$

منه $(1754)^{12} \equiv (-1)^{12}[9]$

أي $(1754)^{12} \equiv 1[9]$

منه باقي قسمة $(1754)^{12}$ على 9 هو 1

إذن : $34572 \equiv 3[9]$

2 –

34572	9
75	3841
37	
12	
3	

منه $(34572)^{457} \equiv (3)^{457}[9]$

أي : $(34572)^{457} \equiv 3^2 \times 3^{455}[9]$

أي $(34572)^{457} \equiv 9 \times 3^{455}[9]$

أي $(34572)^{457} \equiv 0[9]$ لأن 9×3^{455} مضاعف 9

منه : باقي قسمة $(34572)^{457}$ على 9 هو 0

---

3 –

375	9
15	41
6	

منه $375 \equiv 6[9]$

إذن $(375)^{2009} \equiv (6)^{2009}[9]$

أي $(375)^{2009} \equiv (2 \times 3)^{2009}[9]$

أي $(375)^{2009} \equiv 3^{2009} \times 2^{2009}[9]$

أي $(375)^{2009} \equiv 3^2 \times 3^{2007} \times 2^{2009}[9]$

أي $(375)^{2009} \equiv 9 \times 3^{2007} \times 2^{2009}$

أي $(375)^{2009} \equiv 0[9]$

منه : باقي قسمة $(375)^{2009}$ على 9 هو 0

التمرين – 15

برهن أن العدد $4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} + 1^{2009}$ يقبل القسمة على 5

الحـل – 15

$1 \equiv 1[5]$ إذن : $1^{2009} \equiv 1[5]$ ....(1)

$4 \equiv -1[5]$ إذن : $4^{2009} \equiv (-1)^{2009}[5]$ أي $4^{2009} \equiv -1[5]$ ....(2)

$3 \equiv -2[5]$ إذن : $3^{2009} \equiv (-2)^{2009}[5]$

أي $3^{2009} \equiv (-1)^{2009} \times 2^{2009}[5]$

أي : $3^{2009} \equiv -2^{2009}[5]$ ....(3)

$2 \equiv 2[5]$ إذن : $2^{2009} \equiv 2^{2009}[5]$ ....(4)

نتيجة : بجمع الموافقات (1) و (2) و (3) و (4) نحصل على :

$$1^{2009} + 4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} \equiv 1 - 1 - 2^{2009} + 2^{2009}[5]$$

أي : $1^{2009} + 4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} \equiv 0[5]$

منه : العدد $4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} + 1^{2009}$ يقبل القسمة على 5

التمرين – 16

برهن أن العدد $6^{2007} + 5^{2007} + 4^{2007} + 3^{2007} + 2^{2007} + 1^{2007}$ يقبل القسمة على 7

الحـل – 16

$1[7] \equiv$ 1^{2007} ....(1)

$6 \equiv -1[7]$ إذن : $6^{2007} \equiv (-1)^{2007}[7]$ أي $6^{2007} \equiv -1[7]$ .... (2)

$2^{2007} \equiv 2^{2007}[7]$ ....(3)

$5 \equiv -2[7]$ إذن : $5^{2007} \equiv (-2)^{2007}[7]$ أي $5^{2007} \equiv -2^{2007}[7]$ .... (4)

$3^{2007} \equiv 3^{2007}[7]$ ....(5)

$4 \equiv -3[7]$ إذن : $4^{2007} \equiv (-4)^{2007}[7]$ أي $4^{2007} \equiv -3^{2007}[7]$ .... (6)

بجمع الموافقات (1) ، (2) ، (3) ، (4) ، (5) ، (6) طرف لـطرف نحصل على :

$$1^{2007} + 6^{2007} + 2^{2007} + 5^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} \equiv 1 - 1 + 2^{2007} - 2^{2007} + 3^{2007} - 3^{2007}[7]$$

أي : $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007} \equiv 0[7]$

منه : باقي قسمة العدد $6^{2007} + 5^{2007} + 4^{2007} + 3^{2007} + 2^{2007} + 1^{2007}$ على 7 هو 0

التمرين – 17

برهن أن العدد $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2007} + 7^{2008} - 8^{2008}$ يقبل القسمة على 9

الحل – 17

$1^{2008} \equiv 1[9]$ ....(1)

$8 \equiv -1[9]$ إذن : $8^{2008} \equiv (-1)^{2008}[9]$ منه $8^{2008} \equiv 1[9]$ .... (2)

$2^{2008} \equiv 2^{2008}[9]$ ....(3)

$7 \equiv -2[9]$ إذن : $7^{2008} \equiv (-2)^{2008}[9]$ منه $7^{2008} \equiv 2^{2008}[9]$ .... (4)

$3^{2008} = 3^2 \times 3^{2006}$ أي $3^{2008} = 9 \times 3^{2006}$ منه $3^{2008} \equiv 0[9]$ .....(5)

$4^{2008} \equiv 4^{2008}[9]$ ....(6)

$5 \equiv -4[9]$ إذن : $5^{2008} \equiv (-4)^{2008}[9]$ أي $5^{2008} \equiv 4^{2008}[9]$ .....(7)

$6^{2008} = 3^{2008} \times 2^{2008}$ إذن : $6^{2008} \equiv 0[9]$ لأن $3^{2008} \equiv 0[9]$

$1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008} \equiv 1 - 2^{2008} + 0 - 4^{2008} + 4^{2008} - 0 + 2^{2008} - 1$

أي : $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008} \equiv 0[9]$

إذن : العدد $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008}$ مضاعف 9

التمرين – 18

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابلا للقسمة على 4

الحل – 18

من أجل $n > 0$:

$1^{2n+1} \equiv 1[4]$ ....(1)

$3 \equiv -1[4]$ إذن : $3^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1}[4]$ أي $3^{2n+1} \equiv -1[4]$ .... (2)

$2^{2n+1} = 2^2 \times 2^{2n-1}$ إذن : $2^{2n+1} = 4 \times 2^{2n-1}$ أي $2^{2n-1} \equiv 0[4]$ .... (3)

$4^{2n+1} \equiv 0[4]$ ....(4)

بجمع الموافقات (1) ، (2) ، (3) ، (4) نحصل على :

$1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv 1 + 0 - 1 + 0[4]$ أي $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv 0[4]$

إذن : العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابل للقسمة على 4

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابل للقسمة على 4

التمرين – 19

برر أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

1 – $7254^n \equiv 0[9]$ 3 – $1785^n \equiv 0[5]$

2 – $3532^n \equiv 0[2]$ 4 – $51502^n \equiv 0[11]$

الحل – 19

1 – $7254 \equiv 0[9]$ منه $7254^n \equiv 0^n[9]$ أي $7254^n \equiv 0[9]$

2 – $3532 \equiv 0[2]$ منه $3532^n \equiv 0^n[2]$ أي $3532^n \equiv 0[2]$

3 – $1785 \equiv 0[5]$ منه $1785^n \equiv 0^n[5]$ أي $1785^n \equiv 0[5]$

4 – $51502 \equiv 0[11]$ منه $51502^n \equiv 0^n[11]$ أي $51502^n \equiv 0[11]$

التمرين – 20

1 – عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(3286)^{374}$ على 10

2 – عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(76)^{784}$ على 12

الحل – 20

1 – $3286 \equiv 6[10]$ إذن $(3286)^{374} \equiv (6)^{374}[10]$

لندرس بواقي قسمة 6^n على 10 كمايلي :

$6^0 \equiv 1[10]$

$6^1 \equiv 6[10]$

$6^2 \equiv 6[10]$

$6^3 \equiv 6[10]$

⋮

منه $\begin{cases} \text{إذا كان } n = 0 \text{ فإن } 6^n \equiv 1[10] \\ \text{إذا كان } n \neq 0 \text{ فإن } 6^n \equiv 6[10] \end{cases}$

نتيجة : $6^{374} \equiv 6[10]$ إذن : باقي قسمة $(3286)^{374}$ على 10 هو 6

2 ــ $76 \equiv 4[12]$ إذن $(76)^{784} \equiv (4)^{784}[12]$

لندرس بواقي قسمة 4^n على 12 كمايلي :

$4^0 \equiv 1[12]$
$4^1 \equiv 4[12]$
$4^2 \equiv 4[12]$
$4^3 \equiv 4[12]$

منه $\begin{cases} \text{إذا كان } n = 0 \text{ فإن } 4^n \equiv 1[12] \\ \text{إذا كان } n \neq 0 \text{ فإن } 4^n \equiv 4[12] \end{cases}$

نتيجة : $4^{784} \equiv 4[12]$ إذن : باقي قسمة $(76)^{784}$ على 12 هو 4

التمرين ــ 21

1 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

2 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ليس مضاعف 3 فإن $2^{2n} + 2^n + 1$ مضاعف 7

الحــل ــ 21

1 ــ $3 \equiv -4[7]$ منه $3^{2n} \equiv (-4)^{2n}[7]$

أي $3^{2n} \equiv 4^{2n}[7]$

أي $3^{2n} \equiv 16^n[7]$

أي : $3^{2n} \equiv 2^n[7]$ لأن : $\begin{cases} 16 \equiv 2[7] \\ \text{إذن } 16^n \equiv 2^n[7] \end{cases}$

نتيجة : $3^{2n} \equiv 2^n[7]$ إذن : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

2 ــ ليكن n عدد طبيعي ليس مضاعف 3

إذن : $n = 3p + k$ حيث p عدد طبيعي و $k \in \{1 ; 2\}$

إذن : $2^{2n} + 2^n + 1 = 2^{2(3p+k)} + 2^{3p+k} + 1$

$= 2^{6p} \times 2^{2k} + 2^{3p} \times 2^k + 1$

$= 64^p \times 4^k + 8^p \times 2^k + 1$

منه : $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 64^p \times 4^k + 8^p \times 2^k + 1[7]$

أي : $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 4^k + 2^k + 1[7]$ لأن $\begin{cases} 64 \equiv 1[7] \\ 8 \equiv 1[7] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 64^p \equiv 1[7] \\ 8^p \equiv 1[7] \end{cases}$

من أجل $k = 1$: $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0[7]$

من أجل $k = 2$: $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 16 + 4 + 1 \equiv 0[7]$

نتيجة : من أجل كل n غير مضاعف 3 فإن العدد $2^{2n} + 2^n + 1$ مضاعف 7

التمرين ــ 22

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$

الحــل ــ 22

$2^{n+4} = 2^n \times 2^4$ منه $2^{n+4} = 16 \times 2^n$

$3^{3n+2} = 3^{3n} \times 3^2$ منه $3^{3n+2} = (27)^n \times 9$

لدينا : $16 \equiv 1[5]$ إذن : $16 \times 2^n \equiv 2^n[5]$ أي $2^{n+4} \equiv 2^n[5]$ ....(1)

و $27 \equiv 2[5]$ إذن : $(27)^n \equiv 2^n[5]$

من جهة أخرى : $9 \equiv 4[5]$ أي $9 \equiv -1[5]$

نتيجة : $\begin{cases} (27)^n \equiv 2^n[5] \\ 9 \equiv -1[5] \end{cases}$ إذن $9 \times (27)^n \equiv -2^n[5]$

أي $3^{3n+2} \equiv -2^n[5]$ ....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $2^{n+4} + 3^{3n+2} \equiv 2^n - 2^n[5]$

أي : $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$ و هو المطلوب

التمرين ــ 23

n عدد طبيعي . نضع $a = (9n - 1) 10^n + 1$

برهن أن a مضاعف للعدد 9

الحــل ــ 23

$9n \equiv 0[9]$ إذن : $9n - 1 \equiv -1[9]$ ....(1)

$10 \equiv 1[9]$ إذن : $10^n \equiv 1[9]$ ....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(9n-1)10^n \equiv -1[9]$ ....(3)
لكن $1 \equiv 1[9]$ ....(4)
إذن : بجمع (3) و (4) : $(9n-1)10^n + 1 \equiv -1+1[9]$
أي : $(9n-1)10^n + 1 \equiv 0[9]$
أي $(9n-1)10^n + 1$ مضاعف 9

التمرين – 24

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ مضاعف 17

الحـل – 24

$3^{4n+2} = 3^2 \times 3^{4n}$ إذن : $3^{4n+2} = 9 \times (81)^n$
$2^{6n+3} = 2^3 \times 2^{6n}$ إذن : $2^{6n+3} = 8 \times (64)^n$

لدينا $\begin{cases} 81 \equiv 13[17] \\ 64 \equiv 13[17] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 81^n \equiv 13^n[17] \\ 64^n \equiv 13^n[17] \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 9 \times 81^n \equiv 9 \times 13^n[17] \\ 8 \times 64^n \equiv 8 \times 13^n[17] \end{cases}$

إذن : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv 9 \times 13^n + 8 \times 13^n[17]$
أي : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv (9+8) \times 13^n[17]$
أي : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv 17 \times 13^n[17]$
أي : $3^{2+4n} + 2^{3+6n} \equiv 0[17]$
إذن : العدد $3^{2+4n} + 2^{3+6n}$ مضاعف 17

التمرين – 25

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ يقبل القسمة على 29

الحـل – 25

$2^{5n+1} = 2 \times 2^{5n}$ إذن : $2^{5n+1} = 2 \times (32)^n$
$3^{n+3} = 3^3 \times 3^n$ إذن : $3^{n+3} = 27 \times 3^n$
$32 \equiv 3[29]$ إذن : $32^n \equiv 3^n[29]$
منه : $2 \times 32^n \equiv 2 \times 3^n[29]$ ....(1)
من جهة أخرى : $27 \times 3^n \equiv 27 \times 3^n[29]$ .... (2)
بجمع (1) و (2) : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 2 \times 3^n + 27 \times 3^n[29]$
أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv (2+27) \times 3^n[29]$
أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 29 \times 3^n[29]$
أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 0[29]$
منه العدد $3^{n+3} + 2^{1+5n}$ يقبل القسمة على 29

التمرين – 26

n عدد طبيعي كيفي .
1 – عين تبعا لقيم n باقي قسمة n^2 على 4
2 – برهن أن إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن $n^2 \equiv 1[8]$

الحـل – 26

– 1

$n \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$n^2 \equiv ?[4]$	0	1	0	1

2 – ليكن n عدد طبيعي فردي إذن : $n = 2k+1$ حيث $k \in IN$
لندرس بواقي قسمة $(2k+1)^2$ على 8 حسب قيم k

$k \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$2k \equiv ?[8]$	0	2	4	6	0	2	4	6
$2k+1 \equiv ?[8]$	1	3	5	7	1	3	5	7
$(2k+1)^2 \equiv ?[8]$	1	1	1	1	1	1	1	1

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي k فإن $(2k+1)^2 \equiv 1[8]$

إذن : من أجل كل عدد فردي n فإن $n^2 \equiv 1[8]$

التمرين ــ 27

1 ــ برهن أن إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن $n^4 \equiv 1[16]$

2 ــ برهن أن إذا كان العدد الطبيعي n ليس مضاعفا لـ 5 فإن باقي قسمة n^4 على 5 هو 1

الحــل ــ 27

1 ــ بواقي قسمة n^4 على 16 حسب قيم n

$n \equiv ?[16]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n^4 \equiv ?[16]$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

نتيجة : إذا كان n فردي فإن $n^4 \equiv 1[16]$

2 ــ لندرس بواقي قسمة n^4 على 5 حسب قيم n

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$n^4 \equiv ?[5]$	0	1	1	1	1

نتيجة : إذا كان n لا يوافق 0 بترديد 5 فإن $n^4 \equiv 1[5]$

أي إذا كان n ليس مضاعفا لـ 5 فإن باقي قسمة n^4 على 5 هو 1

التمرين ــ 28

1 ــ x عدد صحيح . أكمل الجدول التالي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$					

2 ــ إستنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث $2x \equiv 3[5]$

الحــل ــ 28

1 ــ

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$	0	2	4	1	3

2 ــ يكون $2x \equiv 3[5]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 4[5]$ أي $x = 5k+4$ حيث $k \in Z$

مثلا : من أجل $k = -3$: $x = -11$ إذن : $2x = -22$ و $-22 \equiv 3[5]$

من أجل $k = 2$: $x = 14$ إذن : $2x = 28$ و $28 \equiv 3[5]$

التمرين ــ 29

عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $n^3 + n - 2$ قابلا للقسمة على 7

الحــل ــ 29

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$n^3 + n \equiv ?[7]$	0	2	3	2	5	4	5
$n^3 + n - 2 \equiv ?[7]$	5	0	1	0	3	2	3

نتيجة : يكون $n^3 + n - 2$ قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $n^3 + n - 2 \equiv 0[7]$

أي $n \equiv 1[7]$ أو $n \equiv 3[7]$

منه قيم n المطلوبة هي $n = 7k+1$ أو $n = 7k+3$ حيث $k \in N$

التمرين ــ 30

من أجل كل عدد طبيعي n نضع R_n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9

1 ــ أتمم الجدول التالي :

n	0	1	2	3	4	5	6
R_n							

2 ـ إستنتج R_n من أجل كل عدد طبيعي n

3 ـ عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 65^n على 9

4 ـ إستنتج باقي قسمة العدد 65^{2011} على 9

الحل ـ 30

ـ 1

n	0	1	2	3	4	5	6
R_n	1	2	4	8	7	5	1

2 ـ إذا كان $n = 6k$ فإن $R_n = 1$

إذا كان $n = 6k + 1$ فإن $R_n = 2$

إذا كان $n = 6k + 2$ فإن $R_n = 4$

إذا كان $n = 6k + 3$ فإن $R_n = 8$

إذا كان $n = 6k + 4$ فإن $R_n = 7$

إذا كان $n = 6k + 5$ فإن $R_n = 5$

3 ـ $65 \equiv 2[9]$ إذن : $65^n \equiv 2^n[9]$

إذن : بواقي قسمة 65^n على 9 هي نفسها بواقي قسمة 2^n على 9

حسب الجدول التالي :

n	6 k	6 k + 1	6 k + 2	6 k + 3	6 k + 4	6 k + 5
باقي قسمة 65^n على 9	1	2	4	8	7	5

4 ـ $2011 = 6(335) + 1$ إذن : $2011 = 6k + 1$

منه : باقي قسمة 65^{2011} على 9 هو 2

التمرين ـ 31

1 ـ أوجد باقي قسمة العدد 4^5 على 11

2 ـ إستنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد 37^k ؛ 37^{5k+1} ؛ 37^{5k+2} ؛ 37^{5k+3} و 37^{5k+4} حيث $k \in N$

الحل ـ 31

ـ 1

$4^0 \equiv 1[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$ ، $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^4 \equiv 3[11]$

$4^5 \equiv 1[11]$ و هو المطلوب

منه

$4^{5k} \equiv 1[11]$

$4^{5k+1} \equiv 4[11]$

$4^{5k+2} \equiv 5[11]$

$4^{5k+3} \equiv 9[11]$

$4^{5k+4} \equiv 3[11]$

2 ـ $37 \equiv 4[11]$ إذن : $37^n \equiv 4^n[11]$ حيث $n \in IN$

إذن : بواقي قسمة 37^n على 11 هي نفسها بواقي قسمة 4^n على 11

منه الجدول التالي :

n =	5 k	5 k + 1	5 k + 2	5 k + 3	5 k + 4
باقي قسمة 37^n على 11	1	4	5	9	3

التمرين ـ 32

عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $2x = 3y$

الحل ـ 32

إذا كان $(x ; y)$ حل للمعادلة $2x = 3y$ فإن $2x - 3y = 0$ أي $2x \equiv 0[3]$

لنبحث إذن عن قيم x كمايلي :

$x \equiv ?[3]$	0	1	2
$2x \equiv ?[3]$	0	2	1

إذن : يكون $2x \equiv 0[3]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 0[3]$ أي $x = 3k$ حيث $k \in Z$

نعوض x بـــ $3k$ في المعادلة نحصل على : $2(3k) = 3y$

منه : $y = 2k$

نتيجة : حلول المعادلة $2x = 3y$ في Z هي كل الثنائيات $(3k ; 2k)$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 33

حل في Z^2 المعادلة ذات المجهول $(x ; y)$ التالية : $2x - 5y = 1$ .... (1)

الحــل ــ 33

المعادلة (1) تكافئ $2x = 5y + 1$

إذن : إذا كان $(x ; y)$ حلا المعادلة (1) فإن $2x \equiv 1[5]$

لنبحث إذن عن قيم x كمايلي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$	0	2	4	1	3

نتيجة : يكون $2x \equiv 1[5]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 3[5]$ أي $x = 5k + 3$ حيث $k \in Z$

نعوض x بـــ $5k + 3$ في المعادلة (1) نحصل على :

$$2(5k + 3) - 5y = 1$$

أي : $10k + 6 - 1 = 5y$

أي : $10k + 5 = 5y$

أي : $y = 2k + 1$

خلاصة : حلول المعادلة (1) في Z^2 هي الثنائيات $(5k + 3 ; 2k + 1)$ حيث $k \in Z$

مثلا : من أجل $k = 1$: $(8 ; 3)$ حل للمعادلة (1) .

التمرين ــ 34

حل في Z الجمل التالية :

1 ــ $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$ **2 ــ** $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

الحــل ــ 34

1 ــ $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x = 6k + 1 \ (k \in Z) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6k + 1 \equiv 3[5] \\ x = 6k + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6k \equiv 2[5] \\ x = 6k + 1 \end{cases}$

لنبحث عن قيم k حتى يكون $6k \equiv 2[5]$ كمايلي :

$k \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$6k \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4

نتيجة : يكون $6k \equiv 2[5]$ إذا و فقط إذا كان $k \equiv 2[5]$ أي $k = 5n + 2$ حيث $n \in Z$

إذن : $x = 6(5n + 2) + 1$

أي : $x = 30n + 13$ و هي حلول الجملة المطلوبة حيث $n \in Z$

2 ــ $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[2] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 : k \in Z \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ 4(2k + 1) \equiv 1[3] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ 8k + 4 \equiv 1[3] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k+1 \\ 8k \equiv 0[3] \end{cases}$$

لنبحث عن قيم k حتى يكون $8k \equiv 0[3]$ كمايلي :

$k \equiv ?[3]$	0	1	2
$8k \equiv ?[3]$	0	2	1

إذن : يكون $8k \equiv 0[3]$ إذا و فقط إذا كان $k \equiv 0[3]$ أي $k = 3n$ حيث $n \in Z$

نتيجة : $x = 2(3n)+1$ أي $x = 6n+1$ هي حلول الجملة المطلوبة . حيث $n \in Z$

التمرين ـــ 35

أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس العشري

$a = 12734$ ؛ $b = 5723$ ؛ $c = 503019$

الحـل ـــ 35

1 ـــ $12734 = 4 + 3 \times 10 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 1 \times 10^4$

2 ـــ $5723 = 3 + 2 \times 10 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^3$

3 ـــ $503019 = 9 + 1 \times 10 + 0 \times 10^2 + 3 \times 10^3 + 0 \times 10^4 + 5 \times 10^5$

التمرين ـــ 36

أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6

$a = \overline{234}$ ؛ $b = \overline{1523}$ ؛ $c = \overline{503012}$

الحـل ـــ 36

1 ـــ $\overline{234} = 4 + 3 \times 6 + 2 \times 6^2$

2 ـــ $\overline{1523} = 3 + 2 \times 6 + 5 \times 6^2 + 1 \times 6^3$

3 ـــ $\overline{503012} = 2 + 1 \times 6 + 0 \times 6^2 + 3 \times 6^3 + 0 \times 6^4 + 5 \times 6^5$

التمرين ـــ 37

أكتب في النظام ذو الأساس 7 الأعداد التالية :

1 ـــ $a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5$

2 ـــ $b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7$

3 ـــ $c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1$

الحـل ـــ 37

1 ـــ $a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = \overline{1235}$

2 ـــ $b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7 = \overline{520}$

3 ـــ $c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1 = \overline{6021}$

التمرين ـــ 38

a عدد طبيعي حيث $a \geq 5$

نضع $N = 4a^5 + 2a^3 + a + 3$

أكتب العدد N في النظام ذو الأساس a

الحـل ـــ 38

$a \geq 5$ إذن : كل من الأعداد 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 هي أرقام في النظام ذو الأساس a

إذن :

$$N = 4a^5 + 2a^3 + a + 3$$
$$= 4a^5 + 0 \times a^4 + 2 \times a^3 + 0 \times a^2 + a + 3$$
$$= \overline{402013}$$ في النظام ذو الأساس a

التمرين ـــ 39

العددان $\overline{2306}$ و $\overline{1035}$ مكتوبان في النظام ذو الأساس x

1 ـــ ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد x

2 ـــ أنشر العددين وفق الأساس x

الحـل – 39

1 – أكبر رقم يحتوي عليه العددان هو الرقم 6 إذن : أصغر قيمة للأساس x هي $x = 7$

2 – من أجل $x \geq 7$ فإن : $\overline{2306} = 6 + 0 \times x + 3x^2 + 2x^3$

$$\overline{1035} = 5 + 3x + 0 \times x^2 + x^3$$

التمرين – 40

إليك الأعداد 2 ؛ 4 ؛ 7 ؛ 33 مكتوبة في النظام العشري .
أعد كتابتها في النظام الثنائي .

الحـل – 40

$2 = 0 + 2^1$ إذن : $2 = \overline{10}$

$4 = 0 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2$ إذن : $4 = \overline{100}$

$7 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2$ إذن : $7 = \overline{111}$

$33 = 1 + 0 \times 2 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5$ إذن : $33 = \overline{100001}$

التمرين – 41

n عدد طبيعي يكتب في النظام الثنائي $\overline{1101101}$
ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كمايلي $\overline{214}$

الحـل – 41

لنبحث عن n في النظام العشري :

$$\overline{1101101} = 1 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6$$
$$= 1 + 4 + 8 + 32 + 64$$
$$= 109$$

ليكن n مكتوب من الشكل $\overline{214}$ في النظام x حيث $x \geq 5$

إذن : $\overline{214} = 4 + x + 2x^2$

نتيجة : $4 + x + 2x^2 = 109$

أي : $2x^2 + x - 105 = 0$ هي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول الطبيعي x حيث $x \geq 5$

$$\Delta = 1 + 840 = (29)^2$$

إذن : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-29}{4} = \dfrac{-15}{2} & \text{مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{-1+29}{4} = 7 \end{cases}$

إذن : العدد n يكتب من الشكل $\overline{214}$ في النظام ذو الأساس 7

التمرين – 42

ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه : $\overline{2003} = \overline{21} \times \overline{43}$

الحـل – 42

ليكن x أساس التعداد المطلوب . حيث $x \in IN$ و $x \geq 5$

$$\begin{cases} \overline{2003} = 3 + 0x + 0x^2 + 2x^3 = 2x^3 + 3 \\ \overline{21} \times \overline{43} = (1 + 2x)(3 + 4x) = 8x^2 + 10x + 3 \end{cases}$$

أي : $2x^3 + 3 = 8x^2 + 10x + 3$

$$2x(x^2 - 4x - 5) = 0$$

منه : $x^2 - 4x - 5 = 0$ لأن $x \geq 5$ أي $x \neq 0$

$$\Delta = 16 + 20 = 36$$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4-6}{2} = -1 & \text{مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{4+6}{2} = 5 & \text{مقبول} \end{cases}$

إذن : يكون $\overline{2003} = \overline{21} \times \overline{43}$ في النظام ذو الأساس 5

التمرين ــ 43

في كل حالة من الحالات التالية أوجد أساس التعداد الذي تكون فيه المساواة محققة :

1 ــ $\overline{411} = \overline{15} \times \overline{23}$

2 ــ $\overline{21} \times \overline{14} = \overline{324}$

الحل ــ 43

1 ــ $\overline{411} = \overline{15} \times \overline{23}$ ليكن x أساس التعداد إذن $x \geq 6$

$$\overline{411} = 1 + x + 4x^2$$

$$\overline{15} \times \overline{23} = (5 + x)(3 + 2x) = 2x^2 + 13x + 15$$

منه : $4x^2 + x + 1 = 2x^2 + 13x + 15$

أي : $2x^2 - 12x - 14 = 0$

$$\Delta = 144 + 112 = 256 = (16)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{12 - 16}{4} = -1 & \text{مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{12 + 16}{4} = 7 \end{cases}$$

نتيجة : المساواة $\overline{411} = \overline{15} \times \overline{23}$ محققة في النظام ذي الأساس 7

2 ــ $\overline{21} \times \overline{14} = \overline{324}$ ليكن x أساس التعداد إذن : $x \geq 5$

$$\overline{21} \times \overline{14} = (2x + 1)(x + 4) = 2x^2 + 9x + 4$$

$$\overline{324} = 3x^2 + 2x + 4$$

منه : $3x^2 + 2x + 4 = 2x^2 + 9x + 4$

أي : $x^2 - 7x = 0$

أي : $x(x - 7) = 0$

أي : $\begin{cases} x = 0 & \text{مرفوض} \\ \text{أو} \\ x = 7 \end{cases}$

نتيجة : المساواة $\overline{21} \times \overline{14} = \overline{324}$ محققة في النظام ذو الأساس 7

التمرين ــ 44

في أي أساس تعداد x يكون $\overline{162} = \overline{77} + \overline{63}$ ؟ أحسب $\overline{63} \times \overline{77}$ في النظام العشري ثم في النظام ذو الأساس 8

الحل ــ 44

ليكن x أساس التعداد . إذن $x \geq 8$

$$\overline{162} = x^2 + 6x + 2$$

$$\overline{77} + \overline{63} = 7x + 7 + 6x + 3 = 13x + 10$$

إذن : $x^2 + 6x + 2 = 13x + 10$

أي : $x^2 - 7x - 8 = 0$

$$\Delta = 49 + 32 = 81$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - 9}{2} = -1 & \text{مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{7 + 9}{2} = 8 \end{cases}$$

نتيجة : أساس التعداد هو $x = 8$

منه : $\overline{77} = 7 \times 8 + 7 = 56 + 7 = 63$

$$\overline{63} = 6 \times 8 + 3 = 48 + 3 = 51$$

إذن : $\overline{77} \times \overline{63} = 63 \times 51 = 3213$

منه : العدد $\overline{63} \times \overline{77}$ يكتب 3213 في النظام العشري .

حساب العدد $\overline{63} \times \overline{77}$ في النظام ذو الأساس 8

الطريقة الأولى : إجراء عملية الضرب عموديا كمايلي :

الخطوات	العملية
$3 \times 7 = 21 = 2 \times 8 + 5 = \overline{25}$ نكتب 5 و نحتفظ بـ 2	$\begin{array}{r} 77 \\ \times\ 63 \\ \hline 5 \end{array}$ الاحتفاظ 2
$3 \times 7 = 21$ $21 +$ الاحتفاظ $= 21 + 2 = 23$ $23 = 2 \times 8 + 7 = \overline{27}$ نكتب 27 دون إحتفاظ	$\begin{array}{r} 77 \\ 63 \\ \hline 275 \end{array}$
نضع نقطة و نكمل العملية $6 \times 7 = 42 = 5 \times 8 + 2 = \overline{52}$ نكتب 2 و نحتفظ بـ 5	$\begin{array}{r} 77 \\ 63 \\ \hline 275 \\ 2\ . \end{array}$ الاحتفاظ 5
$6 \times 7 = 42$ $42 +$ الاحتفاظ $= 42 + 5 = 47$ $47 = 5 \times 8 + 7 = \overline{57}$ نكتب 57 دون إحتفاظ	$\begin{array}{r} 77 \\ 63 \\ \hline 275 \\ 572\ . \end{array}$
$5 + 0 = 5$ $7 + 2 = 9 = 1 \times 8 + 1 = \overline{11}$ نكتب 1 و نحتفظ بـ 1	$\begin{array}{r} 77 \\ 63 \\ \hline \oplus\ 275 \\ 572\ . \\ \hline 15 \end{array}$ الاحتفاظ 1
$2 + 7 = 9$ $9 +$ الاحتفاظ $= 9 + 1 = 10$ $10 = 1 \times 8 + 2 = \overline{12}$ نكتب 2 و نحتفظ بـ 1	$\begin{array}{r} 77 \\ 63 \\ \hline \oplus\ 275 \\ 572\ . \\ \hline 215 \end{array}$ الاحتفاظ 1
$0 + 5 = 5$ $5 +$ الاحتفاظ $= 5 + 1 = 6$ نكتب 6 (دون إحتفاظ)	$\begin{array}{r} 77 \\ 63 \\ \hline \oplus\ 275 \\ 572\ . \\ \hline 6215 \end{array}$

نتيجة : $\overline{77} \times \overline{63} = \overline{6215}$

تحقيق :

$$\overline{6215} = 6 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 1 \times 8 + 5$$
$$= 3072 + 128 + 8 + 5$$
$$= 3213$$

الطريقة الثانية : لدينا في النظام العشري $\overline{77} \times \overline{63} = 3213$

إذن : بإجراء عمليات القسمة على 8 نحصل على مايلي :

$$\begin{array}{r|l} 3213 & 8 \\ \cline{2-2} 013 & 401 \\ \boxed{5} & 01 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 401 & 8 \\ \cline{2-2} 01 & 50 \\ \boxed{1} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \cline{2-2} \boxed{2} & 6 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 8 \\ \cline{2-2} \boxed{6} & 0 \end{array}$$

نتيجة : $3213 = \overline{6215}$ في النظام ذو الأساس 8

إذن : $\overline{77} \times \overline{63} = \overline{6215}$

التمرين ــ 45

عين فيمايلي أساس النظام الذي تكون فيه المساواة محققة :

1 ــ $\overline{12} \times \overline{23} = \overline{276}$

2 ــ $\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32}$

الحـل ــ 45

1 ــ $\overline{12} \times \overline{23} = \overline{276}$ ليكن x أساس النظام حيث $x \geq 8$

$$\overline{12} \times \overline{23} = (x+2)(2x+3) = 2x^2 + 7x + 6$$
$$\overline{276} = 2x^2 + 7x + 6$$

إذن : $2x^2 + 7x + 6 = 2x^2 + 7x + 6$

بما أن المعادلة محققة دائما فإن قيم x الممكنة هي كل الأعداد الطبيعية الأكبر أو تساوي 8

2 ــ $\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32}$ ليكن x أساس النظام حيث $x \geq 6$

$$\overline{541} = 5x^2 + 4x + 1$$
$$\overline{22} \times \overline{32} = (2x+2)(3x+2) = 6x^2 + 10x + 4$$

إذن : $5x^2 + 4x + 1 = 6x^2 + 10x + 4$

أي : $x^2 + 6x + 3 = 0$

$$\Delta = 36 - 12 = 24$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{24}}{2} & \text{مرفوض} \\ x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{24}}{2} & \text{مرفوض} \end{cases}$$

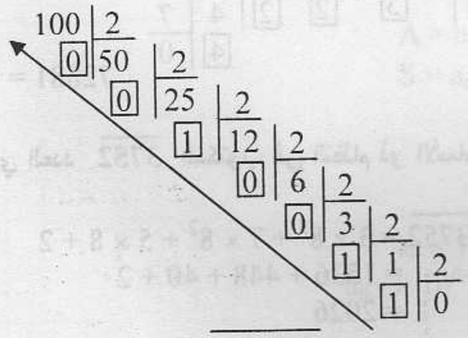
نتيجة : لا يوجد أي أساس نظام تكون فيه المساواة $\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32}$ محققة .

التمرين ــ 46

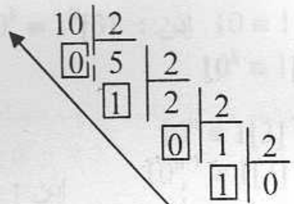
أكتب في النظام الثنائي العددين 10 و 100 المكتوبين في النظام العشري

الحـل ــ 46

بإجراء عمليات القسمة المتتالية كمايلي :



إذن : $100 = \overline{1100100}$



إذن : $10 = \overline{1010}$

التمرين ــ 47

1 ــ في أي أساس تعداد يكون $\overline{51} = \overline{13} + \overline{35}$ ....(1)

2 ــ أكتب المساواة (1) في النظام الثنائي .

الحـل ــ 47

1 ــ $\overline{51} = \overline{13} + \overline{35}$ ليكن x أساس التعداد حيث $x \geq 6$

$$\overline{51} = 5x + 1$$
$$\overline{13} + \overline{35} = x + 3 + 3x + 5 = 4x + 8$$

إذن : $5x + 1 = 4x + 8$

أي : $x = 7$

نتيجة : نظام التعداد هو 7

2 ــ

$$\overline{51} = 5 \times 7 + 1 = 36$$
$$\overline{13} = 1 \times 7 + 3 = 10$$
$$\overline{35} = 3 \times 7 + 5 = 26$$

لنحول الأعداد 36 ، 10 ، 26 إلى النظام الثنائي كمايلي :

$\begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 13 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 6 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$

$26 = \overline{11010}$

$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 5 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$

$10 = \overline{1010}$

$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 18 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 9 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$

$36 = \overline{100100}$

إذن : المساواة (1) تكتب في النظام الثنائي : $\overline{100100} = \overline{1010} + \overline{11010}$

التمرين ــ 48

ليكن n عدد طبيعي يكتب في النظام العشري 72881

أكتب n في النظام ذو الأساس 12 ثم في النظام ذو الأساس 7

الحـل ــ 48

1 ــ الكتابة في النظام ذو الأساس 12 :

$\begin{array}{r|l} 72881 & 12 \\ \hline 088 & 6073 \\ 84 & \\ 41 & \\ 36 & \\ \boxed{5} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 6073 & 12 \\ \hline 073 & 506 \\ 72 & \\ \boxed{1} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 506 & 12 \\ \hline 48 & 42 \\ 26 & \\ \boxed{2} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 42 & 12 \\ \hline 36 & 3 \\ \boxed{6} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 3 & 12 \\ \hline \boxed{3} & 0 \end{array}$

إذن : $72881 = \overline{36215}$

2 ــ الكتابة في النظام ذو الأساس 7

$\begin{array}{r|l} 72881 & 7 \\ \hline 028 & 10411 \\ 08 & \\ 11 & \\ \boxed{4} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 10411 & 7 \\ \hline 34 & 1487 \\ 61 & \\ 51 & \\ \boxed{2} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1487 & 7 \\ \hline 08 & 212 \\ 17 & \\ \boxed{3} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 212 & 7 \\ \hline 02 & 30 \\ \boxed{2} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \hline \boxed{2} & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 4 & 7 \\ \hline \boxed{4} & 0 \end{array}$

إذن : $72881 = \overline{422324}$

التمرين ــ 49

أكتب في النظام العشري العدد $\overline{3752}$ المكتوب في النظام ذو الأساس 8

الحـل ــ 49

$$\begin{aligned} \overline{3752} &= 3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8 + 2 \\ &= 1536 + 448 + 40 + 2 \\ &= 2026 \end{aligned}$$

التمرين ــ 50

أكتب في النظام ذو الأساس 12 العدد $\overline{6175}$ المكتوب في النظام ذو الأساس 9

الحـل ــ 50

نبحث أولا عن العدد مكتوبا في النظام العشري كمايلي :

$$\begin{aligned} \overline{6175} &= 6 \times 9^3 + 1 \times 9^2 + 7 \times 9 + 5 \\ &= 4374 + 81 + 63 + 5 \\ &= 4523 \end{aligned}$$

لنبحث الآن عن كتابة العدد 4523 في النظام ذو الأساس 12

$\begin{array}{r|l} 4523 & 12 \\ \hline 92 & 376 \\ 83 & \\ \boxed{11} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 376 & 12 \\ \hline 16 & 31 \\ \boxed{4} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 31 & 12 \\ \hline \boxed{7} & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline \boxed{2} & 0 \end{array}$

لاحظ أن 11 هو رقم في النظام ذو الأساس 12

إذن نرمز له بالرمز β

منه : $4523 = \overline{274\beta}$

التمرين ــ 51

أكتب في النظام ذو الأساس 7 العددين $\overline{234}$ و $\overline{1040}$ المكتوبين في النظام ذو الأساس 5

الحـل ـ 51

أولا نبحث عن كتابة الأعداد في النظام العشري كمايلي :

$$\overline{234} = 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 50 + 15 + 4 = 69$$

$$\overline{1040} = 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5 + 0 = 125 + 20 = 145$$

ثانيا نجري عمليات القسمة المتتالية على 7 كمايلي :

$$\begin{array}{l} 145 \,|\, 7 \\ 05 \,|\, 20 \,|\, 7 \\ \boxed{5} \quad \boxed{6} \,|\, 2 \,|\, 7 \\ \qquad\quad \boxed{2} \,|\, 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 69 \,|\, 7 \\ \boxed{6} \,|\, 9 \,|\, 7 \\ \quad \boxed{2} \,|\, 1 \,|\, 7 \\ \qquad \boxed{1} \,|\, 0 \end{array}$$

إذن : $145 = \overline{265}$ و $69 = \overline{126}$

التمرين ـ 52

a عدد طبيعي حيث $a > 1$

أكتب a ؛ a^2 ؛ a^3 في النظام ذو الأساس a

الحـل ـ 52

من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 1$ لدينا :

$a = 1 \times a + 0$ إذن : $a = \overline{10}$

$a^2 = 1 \times a^2 + 0 \times a + 0$ إذن : $a^2 = \overline{100}$

$a^3 = 1 \times a^3 + 0 \times a^2 + 0 \times a + 0$ إذن : $a^3 = \overline{1000}$

التمرين ـ 53

في النظام العشري A عدد طبيعي أكبر تماما من 2 و S مجموع أرقامه .

أثبت أن A يقبل القسمة على 3 إذا و فقط إذا كان S يقبل القسمة على 3

الحـل ـ 53

ليكن $A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots\ldots a_1 a_0}$ كتابة العدد A في النظام العشري .

إذن : $\begin{cases} A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_1 \times 10 + a_0 \\ S = a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 + a_0 \end{cases}$

لدينا $10 \equiv 1[3]$ إذن : $10^k \equiv 1^k[3]$ حيث $k \in IN$

أي $10^k \equiv 1[3]$

منه : $\begin{cases} 10^n \equiv 1[3] \\ 10^{n-1} \equiv 1[3] \\ \vdots \\ 10 \equiv 1[3] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} a_n \times 10^n \equiv a_n[3] \\ a_{n-1} \times 10^{n-1} \equiv a_{n-1}[3] \\ \vdots \\ a_1 \times 10 \equiv a_1[3] \end{cases}$

منه : $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \times 10 \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_1[3]$

إذن : $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_1 + a_0[3]$

أي : $A \equiv S[3]$

نتيجة : يكون $A \equiv 0[3]$ إذا و فقط إذا كان $S \equiv 0[3]$

أي يكون a قابلا للقسمة على 3 إذا و فقط إذا كان S قابلا للقسمة على 3

التمرين ـ 54

x و y عددان طبيعيان يكتبان في النظام العشري بنفس الأرقام لكن في ترتيبين متعاكسين .

برهن أن الفرق x - y مضاعف للعدد 9

الحـل ـ 54

ليكن $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_1 a_0}$

إذن : $y = \overline{a_0 a_1 \ldots\ldots a_{n-1} a_n}$

منه : $\begin{cases} x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_1 \times 10 + a_0 \\ y = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_{n-1} \times 10 + a_n \end{cases}$

إذن : $x - y = (a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + \ldots\ldots + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 + (a_0 - a_n)$

لكن $10 \equiv 1[9]$ إذن : $10^k \equiv 1[9]$ من أجل كل عدد طبيعي k

منه : $\begin{cases} 10^n \equiv 1[9] \\ 10^{n-1} \equiv 1[9] \\ \vdots \\ 10 \equiv 1[9] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (a_n - a_0) \times 10^n \equiv a_n - a_0[9] \\ (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} \equiv a_{n-1} - a_1[9] \\ \vdots \\ (a_1 - a_{n-1}) \times 10 \equiv a_1 - a_{n-1}[9] \end{cases}$

منه :

$(1) \ldots. (a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + \ldots + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 \equiv (a_n - a_0) + (a_{n-1} - a_1) + \ldots + (a_1 - a_{n-1})[9]$

من جهة أخرى $a_0 - a_n \equiv a_0 - a_n[9]$

إذن بالجمع مع العبارة (1) نحصل على :

$(a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + \ldots + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 + (a_0 - a_n) \equiv (a_n - a_0) + (a_{n-1} - a_1) + .. + (a_1 - a_{n-1}) + (a_0 - a_n)$

أي : $x - y \equiv a_n - a_0 + a_{n-1} - a_1 + \ldots\ldots + a_1 - a_{n-1} + a_0 - a_n[9]$

أي : $x - y \equiv (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n)[9]$

أي : $x - y \equiv 0[9]$

أي : $x - y$ يقبل القسمة على 9

التمرين ــ 55

إملأ الجدول التالي الذي يمثل جدول الجمع في النظام ذو الأساس 4 ثم أنجز العملية التالية : $\overline{3223} + \overline{132}$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$				
$\overline{1}$				
$\overline{2}$				
$\overline{3}$				

مثلا : $3 + 3 = \overline{12}$

لأن : $3 + 3 = 6 = 1 \times 4 + 2$

الحــل ــ 55

1 ــ

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

2 ــ لننجز العملية $3223 + 132$ عموديا :

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ +\ 3\,2\,2\,3 \\ \underline{1\,3\,2} \\ 1\,0\,0\,2\,1 \end{array}$$

نتيجة : $\overline{3223} + 132 = \overline{10021}$

التمرين ــ 56

أنجز جدول الضرب في النظام ذو الأساس 4 ثم أنجز العملية التالية : $\overline{3223} \times \overline{123}$

الحــل ــ 56

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$

منه العملية التالية :

$$\begin{array}{rl}
1\,1\,1 & \longrightarrow \text{الإحتفاظ الثاني} \\
2\,2\,2 & \longrightarrow \text{الإحتفاظ الأول} \\
\hline
\overline{3\,2\,2\,3} & \\
\otimes \quad \overline{1\,2\,3} & \\
\hline
2\,3\,0\,0\,1 & \\
\oplus \quad 1\,3\,1\,1\,2\,. & \\
\oplus \quad 3\,2\,2\,3\,.\,. & \\
\hline
1\,2\,0\,3\,0\,2\,1 &
\end{array}$$

$$8 = 2 \times 4 + 0 = \overline{20}$$
$$11 = 2 \times 4 + 3 = \overline{23}$$
$$7 = 1 \times 4 + 3 = \overline{13}$$
$$6 = 1 \times 4 + 2 = \overline{12}$$

نتيجة : $\overline{3223} \times \overline{123} = \overline{1203021}$

التمرين ــ 57

أنجز العمليات التالية في النظام ذو الأساس 5 :

$$\begin{array}{r} 3\,4\,2\,1 \\ +\quad 2\,3\,0 \\ \hline = \quad\quad \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,3\,1 \\ -\,1\,3\,2 \\ \hline = \quad\quad \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,1\,3 \\ \times\quad 1\,4 \\ \hline = \quad\quad \end{array}$$

الحــل ــ 57

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1}\quad\quad \\ 3\,4\,2\,1 \\ +\quad 2\,3\,0 \\ \hline =4\,2\,0\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,3\,1 \\ -\,1\,3\,2 \\ \hline =2\,4\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1\,2}\quad \\ 2\,1\,3 \\ \times\quad 1\,4 \\ \hline 1\,4\,1\,2 \\ 2\,1\,3\,. \\ \hline =4\,0\,4\,2 \end{array}$$

التمرين ــ 58

أنجز في النظام ذو الأساس 12 العمليات التالية حيث α هو رمز 10 و β هو رمز 11

$$\begin{array}{r} 3\,9\,\beta\,7 \\ +\quad 2\,1\,3 \\ \hline = \quad\quad \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,0\,0\,\alpha \\ -\,3\,9\,\beta\,7 \\ \hline = \quad\quad \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,7 \\ \times\,4\,1 \\ \hline = \quad \end{array}$$

الحــل ــ 58

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1}\quad\quad \\ 3\,9\,\beta\,7 \\ +\quad 2\,1\,3 \\ \hline =4\,0\,0\,\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,0\,0\,\alpha \\ -\,3\,9\,\beta\,7 \\ \hline =0\,2\,1\,3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{2}\quad \\ 2\,7 \\ \times\,4\,1 \\ \hline 2\,7 \\ \alpha\,4\,. \\ \hline =\alpha\,6\,7 \end{array}$$

التمرين ــ 59

1 ــ عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10

2 ــ إستنتج حسب قيم n رقم آحاد العدد 2^n

3 ــ عين رقم آحاد العدد $(3548)^9 \times (2534)^{31}$

الحـل ـ 59

1 ـ

$$2^0 \equiv 1[10]$$
$$2^1 \equiv 2[10]$$
$$2^2 \equiv 4[10]$$
$$2^3 \equiv 8[10]$$
$$2^4 \equiv 6[10]$$
$$2^5 \equiv 2[10]$$
$$2^6 \equiv 4[10]$$
$$2^7 \equiv 8[10]$$
$$2^8 \equiv 6[10]$$

منه

إذا كان $n = 0$ فإن $2^0 \equiv 1[10]$

إذا كان $n = 4k+1$ فإن $2^n \equiv 2[10]$ $(k \in IN)$

إذا كان $n = 4k+2$ فإن $2^n \equiv 4[10]$ $(k \in IN)$

إذا كان $n = 4k+3$ فإن $2^n \equiv 8[10]$ $(k \in IN)$

إذا كان $n = 4k$ فإن $2^n \equiv 6[10]$ $(k \in IN^*)$

2 ـ حسب السؤال الأول فإن :

إذا كان $n = 0$ فإن رقم آحاد 2^n هو 1

إذا كان $n = 4k+1$ حيث $k \in IN$ فإن رقم آحاد 2^n هو 2

إذا كان $n = 4k+2$ حيث $k \in IN$ فإن رقم آحاد 2^n هو 4

إذا كان $n = 4k+3$ حيث $k \in IN$ فإن رقم آحاد 2^n هو 8

إذا كان $n = 4k$ حيث $k \in IN^*$ فإن رقم آحاد 2^n هو 6

3 ـ $\begin{cases} 2534 \equiv 4[10] \\ 3548 \equiv 8[10] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2534 \equiv 2^2[10] \\ 3548 \equiv 2^3[10] \end{cases}$

منه $\begin{cases} (2534)^{31} \equiv 2^{2\times31}[10] \\ (3548)^9 \equiv 2^{3\times9}[10] \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2534^{31} \equiv 2^{62}[10] \\ 3548^9 \equiv 2^{27}[10] \end{cases}$

لكن $\begin{cases} 62 = 4\times15+2 \\ 27 = 4\times6+3 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 2^{62} \equiv 4[10] \\ 2^{27} \equiv 8[10] \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 2534^{31} \equiv 4[10] \\ 3548^9 \equiv 8[10] \end{cases}$ إذن : $2534^{31} \times 3548^9 \equiv 8\times4[10]$

أي $2534^{31} \times 3548^9 \equiv 2[10]$

نتيجة : رقم آحاد العدد $2534^{31} \times 3548^9$ هو 2

التمرين ـ 60

ماهما الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008}

الحـل ـ 60

لإيجاد الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} يكفي إيجاد باقي قسمته على 100

إذن لندرس بواقي قسمة 51^n على 100 كمايلي :

$$51^0 \equiv 1[100]$$
$$51^1 \equiv 51[100]$$
$$51^2 \equiv 1[100]$$
$$51^3 \equiv 51[100]$$

منه : $\begin{cases} \text{إذا كان } n = 2k \text{ فإن } 51^n \equiv 1[100] \\ \text{إذا كان } n = 2k+1 \text{ فإن } 51^n \equiv 51[100] \end{cases}$

نتيجة : $2008 = 2(1004)$ إذن : $51^{2008} \equiv 1[100]$

منه : الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} هما 01 (الآحاد هو 1 و العشرات هو 0)

التمرين ـ 61

x ، y عددان صحيحان .

برهن أن العدد $x\,y(x^2-y^2)$ مضاعف العدد 3

الحـل ـ 61

نضع $A = x\,y(x^2-y^2)$ إذن : $A = x\,y(x+y)(x-y)$

إذا كان x مضاعف 3 أو y مضاعف 3 فإن A مضاعف 3

إذن يكفي أن نبرهن أن A مضاعف 3 من أجل x و y ليسا من مضاعفات 3 كمايلي :

$x = 3k + 1$ $k \in Z$	$y = 3n + 1$ $n \in Z$	$x - y = 3k - 3n = 3(k - n)$ إذن : x - y مضاعف 3 منه A مضاعف 3
	$y = 3n + 2$ $n \in Z$	$x + y = 3k + 1 + 3n + 2 = 3(k + n + 1)$ إذن : x + y مضاعف 3 منه A مضاعف 3
$x = 3k + 2$ $k \in Z$	$y = 3n + 1$ $n \in Z$	$x + y = 3k + 2 + 3n + 1 = 3(k + n + 1)$ إذن : x + y مضاعف 3 منه A مضاعف 3
	$y = 3n + 2$ $n \in Z$	$x - y = 3k - 3n = 3(k - n)$ إذن : x - y مضاعف 3 منه A مضاعف 3

نتيجة : من أجل كل عددين صحيحين x ، y فإن $x\,y(x^2 - y^2)$ مضاعف 3

التمرين ــ 62

أوجد كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $n^3 + 3n^2 + 3n - 7$ قابلا للقسمة على 8

الحـل ــ 62

$n^3 + 3n^2 + 3n - 7$ قابل القسمة على 8 يكافئ $n^3 + 3n^2 + 3n - 7 \equiv 0[8]$

يكافئ $n^3 + 3n^2 + 3n \equiv 7[8]$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1
$n^3 \equiv ?[8]$	0	1	0	3	0	5	0	7
$3n^2 \equiv ?[8]$	0	3	4	3	0	3	4	3
$3n \equiv ?[8]$	0	3	6	1	4	7	2	5
$n^3 + 3n^2 + 3n \equiv ?[8]$	0	7	2	7	4	7	6	7

نتيجة : $n^3 + 3n^2 + 3n \equiv 7[8]$ يكافئ $n \equiv 1[8]$ أو $n \equiv 3[8]$ أو $n \equiv 5[8]$ أو $n \equiv 7[8]$

إذن قيم n المطلوبة هي كل الأعداد الطبيعية n التي تكتب على أحد الأشكال التالية

$n = 8k + 1$ ، $n = 8k + 3$ ، $n = 8k + 5$ ، $n = 8k + 7$ حيث k عدد طبيعي

مثلا : من أجل $k = 1$: $8(1) + 1 = 9$ إذن : $9^3 + 3(9)^2 + 3(9) - 7 = 729 + 243 + 27 - 7$

$$= 992$$
$$= 8(124)$$

التمرين ــ 63

1 ــ كيف يمكن إختيار العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $A = 2^n - 1$ قابلا للقسمة على 9

2 ــ نفرض أن n يحقق الشرط المعين في السؤال (1) . برهن أن A يقبل القسمة على 7 ثم إستنتج باقي قسمة A على 21

الحـل ــ 63

1 ــ A قابل للقسمة على 9 يكافئ $A \equiv 0[9]$

يكافئ $2^n - 1 \equiv 0[9]$

يكافئ $2^n \equiv 1[9]$

نبحث عن بواقي قسمة 2^n على 9 كمايلي :

$2^0 \equiv 1[9]$
$2^1 \equiv 2[9]$
$2^2 \equiv 4[9]$
$2^3 \equiv 8[9]$
$2^4 \equiv 7[9]$
$2^5 \equiv 5[9]$
$2^6 \equiv 1[9]$

نتيجة : إذا كان $n = 6k$ حيث $k \in IN$ فإن $2^n \equiv 1[9]$

منه : يكون $2^n - 1$ قابلا للقسمة على 9 إذا و فقط إذا كان $n = 6k$ حيث $k \in IN$

2 ــ ليكن $n = 6k$ حيث $k \in IN$

إذن : $A = 2^{6k} - 1 = 64^k - 1$

لدينا $64 \equiv 1[7]$ إذن : $64^k \equiv 1^k[7]$

أي $64^k \equiv 1[7]$

منه $64^k - 1 \equiv 0[7]$

أي $A \equiv 0[7]$

أي A يقبل القسمة على 7 و هو المطلوب

نتيجة : $\begin{cases} A \text{ يقبل القسمة على } 9 \text{ إذن } A \text{ يقبل القسمة على } 3 \\ A \text{ يقبل القسمة على } 7 \end{cases}$

إذن : A يقبل القسمة على 21 لأن $21 = 7 \times 3$

منه : باقي قسمة A على 21 هو 0

التمرين ــ 64

برهن أن إذا كان العدد الطبيعي n لا يقبل القسمة على 5 فإن العدد $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ يكون مضاعفا للعدد 5

الحــل ــ 64

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv ?[5]$	0	1	4	4	1
$n^2 - 1 \equiv ?[5]$	4	0	3	3	0
$n^2 - 4 \equiv ?[5]$	1	2	0	0	2
$(n^2 - 1)(n^2 - 4) \equiv ?[5]$	4	0	0	0	0

نتيجة : إذا كان n ليس مضاعفا لــ 5 فإن $(n^2 - 1)(n^2 - 4) \equiv 0[5]$

أي إذا كان n ليس مضاعفا لــ 5 فإن $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ مضاعف لــ 5

التمرين ــ 65

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $n(2n + 1)(7n + 1)$ يقبل القسمة على 6

الحــل ــ 65

ــ 1

$n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2n \equiv ?[6]$	0	2	4	0	2	4
$7n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2n + 1 \equiv ?[6]$	1	3	5	1	3	5
$7n + 1 \equiv ?[6]$	1	2	3	4	5	0
$n(2n + 1)(7n + 1) \equiv ?[6]$	0	0	0	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(2n + 1)(7n + 1)$ مضاعف 6

التمرين ــ 66

n عدد طبيعي . نضع $A = n^2 - n + 1$

1 ــ عين تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7

2 ــ إستنتج قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A قابلا للقسمة على 7

3 ــ عين باقي قسمة العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ على 7

الحـل ــ 66

1 ــ

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$n^2 - n \equiv ?[7]$	0	0	2	6	5	6	2
$n^2 - n + 1 \equiv ?[7]$	1	1	3	0	6	0	3

نتيجة : إذا كان $n = 7k$ أو $n = 7k + 1$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 1

إذا كان $n = 7k + 2$ أو $n = 7k + 6$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 3

إذا كان $n = 7k + 4$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 6

إذا كان $n = 7k + 3$ أو $n = 7k + 5$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 0

2 ــ حسب السؤال (1) يكون A قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $n = 7k + 3$ أو $n = 7k + 5$ حيث $k \in IN$

3 ــ لاحظ أن العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ هو نفسه العدد A من أجل $n = 2753$

إذن : بما أن $2753 = 7(393) + 2$ فإن $A \equiv 3[7]$

أي باقي قسمة العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ على 7 هو 3

التمرين ــ 67

عين جميع الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $2n^3 - n^2 + 2$ يقبل القسمة على 7

الحـل ــ 67

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$n^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$2n^3 \equiv ?[7]$	0	2	2	5	2	5	5
$2n^3 - n^2 \equiv ?[7]$	0	1	5	3	0	1	4
$2n^3 - n^2 + 2 \equiv ?[7]$	2	3	0	5	2	3	6

نتيجة : يكون العدد $2n^3 - n^2 + 2$ قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $n \equiv 2[7]$

أي $n = 7k + 2$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 68

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7

2 ــ إستنتج حسب قيم n الطبيعي باقي قسمة العدد $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ على 7

الحـل ــ 68

1 ــ $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$ منه : $\left\{\begin{array}{l} 4^{3k} \equiv 1[7] \\ 4^{3k+1} \equiv 4[7] \\ 4^{3k+2} \equiv 2[7] \end{array}\right.$

نتيجة :

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 4^n على 7	1	4	2

2 ــ $851 \equiv 4[7]$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} 851^{3n} \equiv 4^{3n}[7] \\ 851^{2n} \equiv 4^{2n}[7] \\ 851^n \equiv 4^n[7] \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{ll} 851^{3n} \equiv 1[7] & \text{حسب السؤال (1)} \\ 851^{2n} \equiv (4^n)^2[7] & \\ 851^n \equiv 4^n[7] & \end{array}\right.$

منه : $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2 \equiv 1 + (4^n)^2 + 4^n + 2[7]$

أي $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2 \equiv 3 + 4^n + (4^n)^2[7]$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$4^n \equiv ?[7]$	1	4	2
$(4^n)^2 \equiv ?[7]$	1	2	4
$4^n + (4^n)^2 + 3 \equiv ?[7]$	5	2	2

نتيجة :

إذا كان $n = 3k$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2$ على 7 هو 5

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2$ على 7 هو 2

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2$ على 7 هو 2

التمرين ـــ 69

1 ـــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 9

2 ـــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^n + 3n - 1$ قابلا للقسمة على 9

الحـل ـــ 69

1 ـــ $7^0 \equiv 1[9]$ ، $7^1 \equiv 7[9]$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^3 \equiv 1[9]$

منه : $\left\{\begin{array}{l} 7^{3k} \equiv 1[9] \\ 7^{3k+1} \equiv 7[9] \\ 7^{3k+2} \equiv 4[9] \end{array}\right.$

2 ـــ ليكن $n \in IN$ إذن : إما $n = 3k$ أو $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$7^n \equiv ?[9]$	1	7	4
$3n \equiv ?[9]$	0	3	6
$7^n + 3n \equiv ?[9]$	1	1	1
$7^n + 3n - 1 \equiv ?[9]$	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n

فإن $7^n + 3n - 1 \equiv 0[9]$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد

$7^n + 3n - 1$ قابل للقسمة على 9

التمرين ـــ 70

حل في مجموعة الأعداد الطبيعية IN المعادلة $3x \equiv 7[8]$

الحـل ـــ 70

$x \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$3x \equiv ?[8]$	0	3	6	1	4	7	2	5

نتيجة : $3x \equiv 7[8]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 5[8]$

منه حلول المعادلة $3x \equiv 7[8]$ هي الأعداد الطبيعية x التي تكتب من الشكل $x = 8k + 5$ حيث $k \in IN$

التمرين ـــ 71

برهن أن لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 16[3]$

الحـل ـــ 71

$8x^2 \equiv 16[3]$ تكافئ $8x^2 \equiv 1[3]$ لأن $16 \equiv 1[3]$

لنبحث عن بواقي قسمة $8x^2$ على 3

$x \equiv ?[3]$	0	1	2
$x^2 \equiv ?[3]$	0	1	1
$8x^2 \equiv ?[3]$	0	2	2

نتيجة : لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 1[3]$ (البواقي الممكنة حسب الجدول هي 0 و 2 فقط) إذن لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 16[3]$

التمرين — 72

1 — أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 2^n و 3^n على 7

2 — حل في مجموعة الأعداد الطبيعية N المعادلة $2^x + 3^x \equiv 0[7]$ ذات المجهول x

الحـل — 72

1 —

$$\begin{array}{l} 2^0 \equiv 1[7] \\ 2^1 \equiv 2[7] \\ 2^2 \equiv 4[7] \\ \hline 2^3 \equiv 1[7] \end{array} \quad \text{منه :} \quad \left.\begin{array}{l} 2^{3k} \equiv 1[7] \\ 2^{3k+1} \equiv 2[7] \\ 2^{3k+2} \equiv 4[7] \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} 3^0 \equiv 1[7] \\ 3^1 \equiv 3[7] \\ 3^2 \equiv 2[7] \\ 3^3 \equiv 6[7] \\ 3^4 \equiv 4[7] \\ 3^5 \equiv 5[7] \\ \hline 3^6 \equiv 1[7] \end{array} \quad \text{منه :} \quad \begin{array}{l} 3^{6k} \equiv 1[7] \\ 3^{6k+1} \equiv 3[7] \\ 3^{6k+2} \equiv 2[7] \\ 3^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 3^{6k+4} \equiv 4[7] \\ 3^{6k+5} \equiv 5[7] \end{array}$$

2 — حسب السؤال الأول لدينا الجدول التالي :

$x \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2^x \equiv ?[7]$	1	2	4	1	2	4
$3^x \equiv ?[7]$	1	3	2	6	4	5
$2^x + 3^x \equiv ?[7]$	2	5	6	0	6	2

نتيجة : $2^x + 3^x \equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 3[6]$

أي الحلول هي الأعداد الطبيعية x من الشكل $x = 6k + 3$ حيث $k \in IN$

التمرين — 73

عين قيم العدد الطبيعي x التي يكون من أجلها $5^x - 3^x + 6 \equiv 0[11]$

الحـل — 73

$5^x - 3^x + 6 \equiv 0[11]$ تكافئ $5^x - 3^x \equiv -6[11]$

تكافئ $5^x - 3^x \equiv 5[11]$

لندرس بواقي قسمة 5^x و 3^x على 11 حسب قيم العدد الطبيعي x كمايلي :

$$\begin{array}{l} 5^0 \equiv 1[11] \\ 5^1 \equiv 5[11] \\ 5^2 \equiv 3[11] \\ 5^3 \equiv 4[11] \\ 5^4 \equiv 9[11] \\ \hline 5^5 \equiv 1[11] \end{array} \quad \text{منه :} \quad \left.\begin{array}{l} 5^{5k} \equiv 1[11] \\ 5^{5k+1} \equiv 5[11] \\ 5^{5k+2} \equiv 3[11] \\ 5^{5k+3} \equiv 4[11] \\ 5^{5k+4} \equiv 9[11] \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} 3^0 \equiv 1[11] \\ 3^1 \equiv 3[11] \\ 3^2 \equiv 9[11] \\ 3^3 \equiv 5[11] \\ 3^4 \equiv 4[11] \\ \hline 3^5 \equiv 1[11] \end{array} \quad \text{منه :} \quad \left.\begin{array}{l} 3^{5k} \equiv 1[11] \\ 3^{5k+1} \equiv 3[11] \\ 3^{5k+2} \equiv 9[11] \\ 3^{5k+3} \equiv 5[11] \\ 3^{5k+4} \equiv 4[11] \end{array}\right\}$$

منه الجدول التالي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$5^x \equiv ?[11]$	1	5	3	4	9
$3^x \equiv ?[11]$	1	3	9	5	4
$5^x - 3^x \equiv ?[11]$	0	2	5	10	5

نتيجة : يكون $5^x - 3^x \equiv 5[11]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 4[5]$ أو $x \equiv 2[5]$

منه قيم x المطلوبة هي : $x = 5k + 4$ أو $x = 5k + 2$ حيث $k \in IN$

التمرين ــ 74

1 ــ عين حسب قيم x بواقي قسمة x^2 على 5

2 ــ إستنتج أن المعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$ ذات المجهولين الطبيعيين x و y لا تقبل حلولا .

الحــل ــ 74

1 ــ

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv ?[5]$	0	1	4	4	1

2 ــ لنفرض أن الثنائية $(x ; y)$ من $IN \times IN$ هي حل للمعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$

إذن : $x^2 = 5y^2 + 3$

منه : $x^2 \equiv 3[5]$ و هذا مستحيل حسب السؤال (1) لأن البواقي الممكنة لقسمة x^2 على 5 هي $\{0 ; 1 ; 4\}$

إذن : المعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$ لا تقبل حلولا في $IN \times IN$

التمرين ــ 75

x و y عددان طبيعيان . نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $7x^2 + 2y^3 = 3$ .... (1)

1 ــ أتمم الجدول التالي :

$y \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$y^3 \equiv ?[7]$							
$2y^3 \equiv ?[7]$							

2 ــ إستنتج أن المعادلة (1) لا تقبل حلولا في IN^2

الحــل ــ 75

1 ــ

$y \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$y^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$2y^3 \equiv ?[7]$	0	2	2	5	2	5	5

2 ــ لتكن الثنائية $(x ; y)$ من $IN \times IN$ حلا للمعادلة (1)

إذن : $7x^2 + 2y^3 = 3$

أي : $2y^3 = -7x^2 + 3$

أي : $2y^3 \equiv 3[7]$ مستحيل حسب السؤال (1) لأن البواقي الممكنة لقسمة $2y^3$ على 7 هي $\{0 ; 2 ; 5\}$

إذن : المعادلة (1) لا تقبل حلولا في IN^2

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية IN المعادلة ذات المجهولين x و y التالية : $3^x = 8 + y^2$ .... (1)

1 ــ ناقش حسب قيم x بواقي قسمة 3^x ثم y^2 على 8

2 ــ برهن أن إذا كان x فردي فإن المعادلة (1) لا تقبل حلولا

3 ــ نفرض أن $x = 2n$. حلل العبارة $3^{2n} - y^2$ ثم بين أن $3^n \leq 8$

4 ــ إستنتج الثنائية $(x ; y)$ التي تحقق المعادلة (1)

الحـل ــ 1

1 ــ $3^0 \equiv 1[8]$ ، $3^1 \equiv 3[8]$ ، $3^2 \equiv 1[8]$ منه : $\left.\begin{matrix} 3^{2k} \equiv 1[8] \\ 3^{2k+1} \equiv 3[8] \end{matrix}\right\}$

$y \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y^2 \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

2 ــ ليكن x فردي إذن : $3^x \equiv 3[8]$

إذن : إذا وجدت ثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $3^x = 8 + y^2$

أي : $y^2 = 3^x - 8$

أي : $y^2 \equiv 3^x[8]$

أي : $y^2 \equiv 3[8]$ مستحيل حسب السؤال الأول لأن بواقي قسمة y^2 على 8 هي $\{0 ; 1 ; 4\}$

منه : المعادلة (1) لا تقبل حلولا من أجل x فردي

3 ــ ليكن $x = 2n$ حيث $n \in IN$

$3^{2n} - y^2 = (3^n - y)(3^n + y)$

إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $3^x = 8 + y^2$

إذن : $3^x - y^2 = 8$

أي من أجل $x = 2n$ فإن : $(3^n - y)(3^n + y) = 8$

منه : $3^n + y$ يقسم 8

إذن : $3^n + y \leq 8$

أي $3^n \leq 8$ لأن $y \geq 0$

4 ــ حسب السؤال (3) : $3^n \leq 3$ إذن : $n \in \{0 ; 1\}$

إذن : $x = 2n$ إذن : $x \in \{0 ; 2\}$

من أجل $x = 0$ نحصل على : $1 = 8 + y^2$ مستحيل .

من أجل $x = 2$ نحصل على : $9 = 8 + y^2$ منه $y^2 = 1$ أي $y = 1$ لأن $y \in IN$

نتيجة : الحل الوحيد للمعادلة (1) في مجموعة الأعداد الطبيعية هو $x = 2$ ؛ $y = 1$

التمرين ــ 2

ليكن p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 7 . نضع $n = p^4 - 1$

1 ــ برهن أن p يوافق 1 - أو 1 بترديد 3 ثم إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3

2 ــ أثبت أنه يوجد عدد طبيعي k حيث يكون $p^2 - 1 = 4k(k+1)$ ثم إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16

3 ــ باستعمال البواقي الممكنة لقسمة p على 5 أثبت أن 5 هو قاسم للعدد n

الحـل ــ 2

1 ــ p أولي و $p \geq 7$ إذن : $\left\{\begin{matrix} \text{إما } p \equiv 0[3] \text{ مستحيل لأن } p \text{ لا يقبل قاسم أصغر منه} \\ \text{أو } p \equiv 1[3] \\ \text{أو } p \equiv 2[3] \end{matrix}\right.$

أي $p \equiv 1[3]$ أو $p \equiv -1[3]$ لأن $2 \equiv -1[3]$

لدينا : $p \equiv 1[3]$ أو $p \equiv -1[3]$ إذن : $p^4 \equiv 1[3]$ أو $p^4 \equiv 1[3]$ لأن $(-1)^4 \equiv 1[3]$

أي $p^4 \equiv 1[3]$

منه $p^4 - 1 \equiv 0[3]$

أي $n \equiv 0[3]$

أي n يقبل القسمة على 3

2 ــ p أولي و $p \geq 7$ إذن p فردي منه يوجد عدد طبيعي k حيث $p = 2k + 1$ (لأن $p \geq 7$ لأن $k \geq 3$)

إذن : $p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1$

$= 4k^2 + 4k + 1 - 1$

$= 4k(k+1)$ و هو المطلوب .

نتيجة : $n = p^4 - 1$

$= (p^2 - 1)(p^2 + 1)$

$= 4k(k+1)[(2k+1)^2 + 1]$ لأن $p = 2k + 1$

$= 4k(k+1)(4k^2 + 4k + 2)$

$= 8k(k+1)(2k^2 + 2k + 1)$

نميز حالتين :

الأولى : k زوجي إذن : $k = 2q$ منه $n = 16q(k+1)(2k^2 + 2k + 1)$

إذن : n يقبل القسمة على 16

الثانية : k فردي إذن $(k+1)$ زوجي

أي $k + 1 = 2q$ منه $n = 16kq(2k^2 + 2k + 1)$

إذن : n يقبل القسمة على 16

خلاصة : من أجل كل قيمة لــ p فإن n يقبل القسمة على 16

3 ــ ليكن p أولي إذن بواقي قسمة p على 5 هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

$p \equiv ?[5]$	1	2	3	4
$p^2 \equiv ?[5]$	1	4	4	1
$p^4 \equiv ?[5]$	1	1	1	1
$p^4 - 1 \equiv ?[5]$	0	0	0	0

نتيجة : من أجل أي قيمة للعدد p فإن $p^4 - 1 \equiv 0[5]$ أي 5 قاسم لــ n

<u>التمرين ــ 3</u>

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $1000\,n \equiv n[111]$

2 ــ إستنتج أن الأعداد التالية تقبل القسمة على 111 : $\{111111 ، 100010001 ، 100010000001\}$

<u>الحـــل ــ 3</u>

1 ــ $1000 = 9(111) + 1$ إذن : $1000 \equiv 1[111]$

منه : $1000\,n \equiv n[111]$

2 ــ لدينا $111111 = 111 \times 1000 + 111$

لكن $1000 \times 111 \equiv 111[111]$ و $111 \equiv 0[111]$

إذن : $111 \times 1000 + 111 \equiv 111[111]$

أي : $111111 \equiv 0[111]$

لدينا : $100 \times 1000 \equiv 100[111]$ و $10 \equiv 10[111]$ إذن : $100010 \equiv 110[111]$

منه : $100010000 \equiv 110[111]$ لأن $1000 \equiv 1[111]$

إذن : $100010001 \equiv 111[111]$ (إضافة 1 + إلى الطرفين)

أي $100010001 \equiv 0[111]$

إذن : $100010000 \equiv 110[111]$: $100010000000 \equiv 110[111]$ لأن $1000 \equiv 1[111]$

منه $100010000001 \equiv 111[111]$ (إضافة 1 + إلى الطرفين)

أي $100010000001 \equiv 0[111]$

التمرين – 4

a عدد طبيعي . باقي قسمته على 8 هو 2 و باقي قسمته على 104 هو r

1 – برهن أن $r \equiv 2[8]$.

2 – ماهي القيم الممكنة لـ r ؟

b عدد طبيعي باقي قسمته على 13 هو 3 و باقي قسمته على 104 هو r

3 – برهن أن $r \equiv 3[13]$

4 – ماهي القيم الممكنة لـ r ؟

ليكن x عدد طبيعي باقي قسمته على 8 هو 2 ، و على 13 هو 3 و على 104 هو r

5 – إستنتج من (1) و (2) قيمة r

الحل – 4

1 – $a \equiv 2[8]$ إذن : $a = 8n + 2$ حيث $n \in IN$

$a \equiv r[104]$ إذن : $a = 104k + r$ حيث $k \in IN$ و $0 \le r < 104$

نتيجة : $a = 104k + r$ إذن : $a = 8 \times 13k + r$

أي $a = 8k' + r$ حيث $k' = 13k$

منه : $8k' + r \equiv 8n + 2[8]$ لأن $a \equiv a[8]$

أي : $r \equiv 2[8]$

2 – لدينا $\begin{cases} 0 \le r < 104 \\ r \equiv 2[8] \end{cases}$ إذن : $r \in \{2 ; 10 ; 18 ; 26 ; 34 ; 42 ; 50 ; 58 ; 66 ; 74 ; 82 ; 90 ; 98\}$

3 – $b \equiv 3[13]$ إذن : $b = 13n + 3$ حيث $n \in IN$

$b \equiv r[104]$ إذن : $b = 104k + r$ حيث $k \in IN$

منه $b = 13 \times 8k + r$

أي $b = 13k' + r$ حيث $k' = 8k$

منه $13k' + r \equiv 13n + 3[13]$ لأن $b \equiv b[13]$

أي $r \equiv 3[13]$

4 – $\begin{cases} 0 \le r < 104 \\ r \equiv 3[13] \end{cases}$ إذن : $r \in \{3 ; 16 ; 29 ; 42 ; 55 ; 68 ; 81 ; 94\}$

5 – (α) $\begin{cases} x \equiv 2[8] \\ x \equiv 3[13] \\ x \equiv r[104] \end{cases}$

نضع $A = \{2 ; 10 ; 18 ; 26 ; 34 ; 42 ; 50 ; 58 ; 66 ; 74 ; 82 ; 90 ; 98\}$

$B = \{3 ; 16 ; 29 ; 42 ; 55 ; 68 ; 81 ; 94\}$

إذن : تكون الجملة (α) محققة إذا و فقط إذا كان $r \in A \cap B$ أي $r = 42$

التمرين – 5

1 – عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل القيم 1 , 2 , 3 , 4 , 5 للعدد الطبيعي n

2 – إستنتج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل كل عدد طبيعي n

3 – بين أن العدد $(5^{2008} - 5^{1428})$ يقبل القسمة على 11

الحل – 5

1 – $5^1 \equiv 5[11]$

$5^2 \equiv 3[11]$

$5^3 \equiv 4[11]$

$5^4 \equiv 9[11]$

$5^5 \equiv 1[11]$

2 ـ حسب السؤال (1) نستنتج أن :

إذا كان $n = 5k$ فإن $5^n \equiv 1[11]$

إذا كان $n = 5k+1$ فإن $5^n \equiv 5[11]$

إذا كان $n = 5k+2$ فإن $5^n \equiv 3[11]$

إذا كان $n = 5k+3$ فإن $5^n \equiv 4[11]$

إذا كان $n = 5k+4$ فإن $5^n \equiv 9[11]$

3 ـ $\left.\begin{array}{l} 2008 = 5(401)+3 \\ 1428 = 5(285)+3 \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} 5^{2008} \equiv 4[11] \\ 5^{1428} \equiv 4[11] \end{array}\right\}$

منه $5^{2008} - 5^{1428} \equiv 0[11]$

أي العدد $(5^{2008} - 5^{1428})$ يقبل القسمة على 11

التمرين ـ 6

1 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل القيم 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 للعدد الطبيعي n

2 ـ إستنتج بواقي قسمة العدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n

3 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2})$ على 7

الحـل ـ 6

1 ـ $3^1 \equiv 3[7]$

$3^2 \equiv 2[7]$

$3^3 \equiv 6[7]$

$3^4 \equiv 4[7]$

$3^5 \equiv 5[7]$

$3^6 \equiv 1[7]$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن : إذا كان $n = 6k$ فإن $3^n \equiv 1[7]$

إذا كان $n = 6k+1$ فإن $3^n \equiv 3[7]$

إذا كان $n = 6k+2$ فإن $3^n \equiv 2[7]$

إذا كان $n = 6k+3$ فإن $3^n \equiv 6[7]$

إذا كان $n = 6k+4$ فإن $3^n \equiv 4[7]$

إذا كان $n = 6k+5$ فإن $3^n \equiv 5[7]$

3 ـ $10 \equiv 3[7]$ إذن : $10^{1408} \equiv 3^{1408}[7]$

بما أن $1408 = 6(234)+4$ فإن $3^{1408} \equiv 4[7]$

إذن : $10^{1408} \equiv 4[7]$ ....(1)

بما أن $1988 = 6(331)+2$ فإن $3^{1988} \equiv 2[7]$ ....(2)

لدينا : $9^{3n+2} = 3^{2(3n+2)} = 3^{6n+4}$

إذن : $9^{3n+2} \equiv 4[7]$

خلاصة : $\left.\begin{array}{l} 3^{1988} \equiv 2[7] \\ 10^{1408} \equiv 4[7] \\ 9^{3n+2} \equiv 4[7] \end{array}\right\}$

إذن : $3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2} \equiv 2+4+4[7]$

أي $3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2} \equiv 3[7]$ (باقي القسمة هو 3)

التمرين ـ 7

1 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل القيم 1 , 2 , 3 , 4 للعدد الطبيعي n ثم إستنتج بواقي القسمة على 5 للعدد 2^n ثم 3^n على 5 من أجل كل عدد طبيعي n

2 ـ أوجد باقي القسمة على 5 لكل من الأعداد 2^{14} و 3^{10}

3 ـ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(2\times 3^{4n+1} - 2^{4n})$ يقبل القسمة على 5

الحـل ـ 7

1 ـ $2^1 \equiv 2[5]$
$2^2 \equiv 4[5]$
$2^3 \equiv 3[5]$
$2^4 \equiv 1[5]$

منه النتائج التالية : إذا كان $n = 4k$ فإن $2^n \equiv 1[5]$
إذا كان $n = 4k+1$ فإن $2^n \equiv 2[5]$
إذا كان $n = 4k+2$ فإن $2^n \equiv 4[5]$
إذا كان $n = 4k+3$ فإن $2^n \equiv 3[5]$

من جهة أخرى : $3 \equiv -2[5]$ إذن $3^n \equiv (-2)^n[5]$

إذن : $\begin{cases} 3^n \equiv 2^n[5] & \text{إذا كان } n \text{ زوجي} \\ 3^n \equiv -2^n[5] & \text{إذا كان } n \text{ فردي} \end{cases}$

منه النتائج التالية :

إذا كان $n = 4k$ فإن $3^n \equiv 1[5]$
إذا كان $n = 4k+1$ فإن $3^n \equiv -2[5]$ أي $3^n \equiv 3[5]$
إذا كان $n = 4k+2$ فإن $3^n \equiv 4[5]$
إذا كان $n = 4k+3$ فإن $3^n \equiv -3[5]$ أي $3^n \equiv 2[5]$

2 ـ $14 = 4(3) + 2$ إذن : $2^{14} \equiv 4[5]$
$10 = 4(2) + 2$ إذن : $3^{10} \equiv 4[5]$

3 ـ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\begin{cases} 3^{4n+1} \equiv 3[5] \\ 2^{4n} \equiv 1[5] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} 2 \times 3^{4n+1} \equiv 2 \times 3[5] \\ 2^{4n} \equiv 1[5] \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2 \times 3^{4n+1} \equiv 1[5] \\ 2^{4n} \equiv 1[5] \end{cases}$

منه $2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n} \equiv 0[5]$ إذن $2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n}$ يقبل القسمة على 5

التمرين ـ 8

n عدد طبيعي .

1 ـ أدرس تبعا لقيم n بواقي قسمة 5^n على 7

2 ـ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7

3 ـ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلا للقسمة على 7

الحـل ـ 8

1 ـ

$5^0 \equiv 1[7]$
$5^1 \equiv 5[7]$
$5^2 \equiv 4[7]$
$5^3 \equiv 6[7]$
$5^4 \equiv 2[7]$
$5^5 \equiv 3[7]$
$5^6 \equiv 1[7]$

منه :

قيم n	باقي قسمة 5^n على 7
$6k$	1
$6k+1$	5
$6k+2$	4
$6k+3$	6
$6k+4$	2
$6k+5$	3

2 ـ $6 \equiv -1[7]$ إذن : $6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7]$ أي $6^{2n} \equiv 1[7]$

منه باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7 هو 1

3 ـ يكون $5^n + 6^{2n} + 3$ قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7]$

أي : $5^n + 1 + 3 \equiv 0[7]$ لأن $6^{2n} \equiv 1[7]$
أي : $5^n \equiv -4[7]$
أي : $5^n \equiv 3[7]$

منه : حسب بواقي قسمة 5^n على 7 فإن $n = 6k + 5$ حيث $k \in IN$

التمرين – 9

1 – أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

2 – أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7

3 – عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها باقي قسمة 2^n على كل من 5 و 7 هو 4

الحـل – 9

– 1

$$2^0 \equiv 1[5]$$
$$2^1 \equiv 2[5]$$
$$2^2 \equiv 4[5]$$
$$2^3 \equiv 3[5]$$
$$2^4 \equiv 1[5]$$

منه :

قيم n	باقي قسمة 2^n على 5
4 k	1
4 k + 1	2
4 k + 2	4
4 k + 3	3

– 2

$$2^0 \equiv 1[7]$$
$$2^1 \equiv 2[7]$$
$$2^2 \equiv 4[7]$$
$$2^3 \equiv 1[7]$$

منه :

قيم n	باقي قسمة 2^n على 7
3 p	1
3 p + 1	2
3 p + 2	4

3 – يكون باقي قسمة 2^n على 7 و على 5 هو 4 إذا و فقط إذا تحقق الشرطين

التاليين : $\left.\begin{matrix} n = 4k + 2 \\ n = 3p + 2 \end{matrix}\right\}$ منه $4k + 2 = 3p + 2$

أي : $4k = 3p$

إذن يكفي أن يكون $k = 3q$ و $p = 4q$ حيث $q \in IN$

منه : $n = 12q + 2$ حيث $q \in IN$

أي $n \equiv 2[12]$ هي قيم n المطلوبة .

التمرين – 10

عين قيم العدد الطبيعي n الذي يكون من أجلها $(n - 1)$ مضاعف 3

و العدد $[1 + (n - 1)\, 2^n]$ قابلا للقسمة على 7 .

الحـل – 10

$(n - 1)$ مضاعف 3 أي $n - 1 \equiv 0[3]$ منه $n \equiv 1[3]$ أي $n = 3p + 1$ حيث $p \in IN$

إذن : $n = 3p + 1$

منه : $2^n = 2^{3p+1} = 2 \times 2^{3p} = 2 \times 8^p$

لدينا $8 \equiv 1[7]$ إذن $8^p \equiv 1^p[7]$

أي $8^p \equiv 1[7]$

منه : $2 \times 8^p \equiv 2[7]$

أي : $2^n \equiv 2[7]$ (من أجل $n = 3p + 1$)

منه : $(n - 1)2^n \equiv 2(3p + 1 - 1)[7]$

أي $(n - 1)2^n \equiv 6p[7]$

منه : $1 + (n - 1)2^n \equiv 1 + 6p[7]$

نتيجة : يكون $1 + (n - 1)\, 2^n$ قابلا للقسمة على 7 و $(n - 3)$ مضاعف 3 إذا و فقط إذا كان $\left\{\begin{matrix} 1 + (n - 1)2^n \equiv 0[7] \\ n = 3p + 1 \end{matrix}\right.$

أي $\left\{\begin{matrix} n = 3p + 1 \\ 1 + 6p \equiv 0[7] \end{matrix}\right.$

لندرس إذن بواقي قسمة $1 + 6p$ على 7 كمايلي :

$p \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$6p \equiv ?[7]$	0	6	5	4	3	2	1
$6p + 1 \equiv ?[7]$	1	0	6	5	4	3	2

نتيجة : $1+6p\equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $p\equiv 1[7]$ أي $p=7k+1$

خلاصة : $\left.\begin{matrix} p=7k+1 \\ n=3p+1 \end{matrix}\right\}$ منه : $n=3(7k+1)+1$

أي : $n=21k+4$ حيث $k\in\mathbb{N}$

أي : $n\equiv 4[21]$ هي قيم n المطلوبة .

التمرين ــ 11

1 ــ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^k على 5 من أجل القيم من 1 إلى 8 للعدد الطبيعي k

2 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن باقي القسمة الإقليدية لــ 2^{4n} على 5 هو 1

3 ــ إستنتج باقي قسمة 17^{4n} على 5

4 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2^{4n+3}+17^{4n+2}+3$ يقبل القسمة على 5

الحـل ــ 11

1 ــ $2^0\equiv 1[5]$ ؛ $2^4\equiv 1[5]$ ؛ $2^8\equiv 1[5]$

$2^1\equiv 2[5]$ ؛ $2^5\equiv 2[5]$

$2^2\equiv 4[5]$ ؛ $2^6\equiv 4[5]$

$2^3\equiv 3[5]$ ؛ $2^7\equiv 3[5]$

2 ــ لدينا $2^{4n}=16^n$

بما أن $16\equiv 1[5]$ فإن $16^n\equiv 1^n[5]$

أي $16^n\equiv 1[5]$

منه : $2^{4n}\equiv 1[5]$ و هو المطلوب

3 ــ $17\equiv 2[5]$ إذن : $17^{4n}\equiv 2^{4n}[5]$

أي $17^{4n}\equiv 1[5]$ حسب السؤال (2)

4 ــ حسب السؤال (1) فإن $2^{4n+3}\equiv 3[5]$ ....(1)

من جهة أخرى : $17^{4n+2}=17^{4n}\times 17^2$

لدينا $\left\{\begin{matrix} 17^{4n}\equiv 1[5] \\ 17^2\equiv 4[5] \end{matrix}\right.$ حسب السؤال (3)

إذن : $17^{4n}\times 17^2\equiv 4\times 1[5]$ أي $17^{4n+2}\equiv 4[5]$ .... (2)

بجمع (1) و (2) نحصل على : $2^{4n+3}+17^{4n+2}\equiv 3+4[5]$

منه $2^{4n+3}+17^{4n+2}+3\equiv 3+4+3[5]$

أي : $2^{4n+3}+17^{4n+2}+3\equiv 0[5]$ و هو المطلوب

التمرين ــ 12

1 ــ عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لــ 4^n على 11

2 ــ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث $(7+26^{10n+2}+6\times 1995^n)$ يقبل القسمة على 11

الحـل ــ 12

1 ــ

$4^0\equiv 1[11]$

$4^1\equiv 4[11]$

$4^2\equiv 5[11]$

$4^3\equiv 9[11]$

$4^4\equiv 3[11]$

$4^5\equiv 1[11]$

منه

قيم n	باقي قسمة 4^n على 11
5 k	1
5 k + 1	4
5 k + 2	5
5 k + 3	9
5 k + 4	3

2 ــ $26\equiv 4[11]$ إذن : $26^{10n+2}\equiv 4^{10n+2}[11]$

أي $26^{10n+2}\equiv 4^2\times 4^{10n}[11]$

أي $26^{10n+2}\equiv 16\times 4^{5(2n)}[11]$

أي $26^{10n+2}\equiv 5\times 1[11]$ لأن $4^{5k}\equiv 1[11]$

منه $26^{10n+2} + 7 \equiv 5 + 7[11]$

أي $(1) .... 26^{10n+2} + 7 \equiv 1[11]$

إذن $1995 \equiv 4[11]$ $1995^n \equiv 4^n[11]$

منه $(2) .... 6 \times 1995^n \equiv 6 \times 4^n[11]$

بجمع (1) و (2) : $6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 \equiv 1 + 6 \times 4^n[11]$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$4^n \equiv ?[11]$	1	4	5	9	3
$6 \times 4^n \equiv ?[11]$	6	2	8	10	7
$1 + 6 \times 4^n \equiv ?[11]$	7	3	9	0	8

نتيجة : يكون $1 + 6 \times 4^n$ مضاعف 11 أي $(6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7)$ قابل للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $n \equiv 3[5]$ أي قيم n المطلوبة هي $n = 5k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين ــ 13

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

2 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3)$ يقبل القسمة على 7

3 ــ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ يقبل القسمة على 7

الحل ــ 13

ــ 1

$5^0 \equiv 1[7]$
$5^1 \equiv 5[7]$
$5^2 \equiv 4[7]$
$5^3 \equiv 6[7]$
$5^4 \equiv 2[7]$
$5^5 \equiv 3[7]$

منه $5^6 \equiv 1[7]$

قيم n	باقي قسمة 5^n على 7
6 k	1
6 k + 1	5
6 k + 2	4
6 k + 3	6
6 k + 4	2
6 k + 5	3

2 ــ $26 \equiv 5[7]$ إذن : $26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7]$

منه : $26^{6n+5} \equiv 3[7]$ لأن $5^{6n+5} \equiv 3[7]$

$47 \equiv 5[7]$ إذن : $47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7]$

أي $47^{12n+2} \equiv (5^{6n+1})^2[7]$

أي $47^{12n+2} \equiv 5^2[7]$ لأن $5^{6n+1} \equiv 5[7]$

أي $47^{12n+2} \equiv 4[7]$

منه $2 \times 47^{12n+2} \equiv 2 \times 4[7]$

أي $2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]$

خلاصة : $\begin{cases} 26^{6n+5} \equiv 3[7] \\ 2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7] \\ 3 \equiv 3[7] \end{cases}$

إذن بالجمع : $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$

3 ــ حسب السؤال السابق : $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$

إذن : $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} \equiv 4[7]$

إذن : $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 5n + 4[7]$

نتيجة : يكون العدد $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n$ قابلا للقسمة على 7

إذا و فقط إذا كان العدد $5n + 4$ قابلا للقسمة على 7 أي $5n + 4 \equiv 0[7]$

أي $5n \equiv 3[7]$

لندرس إذن بواقي قسمة $5n$ على 7 كمايلي :

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5n \equiv ?[7]$	0	5	3	1	6	4	2

منه : $5n \equiv 3[7]$ يكافئ $n \equiv 2[7]$

إذن : قيم n المطلوبة هي $n = 7k + 2$ حيث $k \in IN$

التمرين – 14

1 – أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 13

2 – عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $4(3^{n+1} - 1)$ مضاعف للعدد 13

الحل – 14

1 –

$$3^0 \equiv 1[13]$$
$$3^1 \equiv 3[13]$$
$$3^2 \equiv 9[13]$$
$$3^3 \equiv 1[13]$$

منه :

قيم n	باقي قسمة 3^n على 13
$3k$	1
$3k+1$	3
$3k+2$	9

2 – لدينا : $4(3^{n+1} - 1) = 4(3 \times 3^n - 1)$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$3^n \equiv ?[13]$	1	3	9
$3 \times 3^n \equiv ?[13]$	3	9	1
$3 \times 3^n - 1 \equiv ?[13]$	2	8	0
$4(3 \times 3^n - 1) \equiv ?[13]$	8	6	0

نتيجة : يكون العدد $4(3^{n+1} - 1)$ مضاعفا لـ 13 إذا و فقط إذا كان $n \equiv 2[3]$

أي $n = 3k + 2$ حيث $k \in IN$

التمرين – 15

عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد $15(16^{n+1} - 1)$ على 7

الحل – 15

$16 \equiv 2[7]$ إذن : $16^{n+1} \equiv 2^{n+1}[7]$

أي : $16^{n+1} \equiv 2 \times 2^n[7]$

منه : $16^{n+1} - 1 \equiv 2 \times 2^n - 1[7]$

من جهة أخرى : $15 \equiv 1[7]$

إذن : $15(16^{n+1} - 1) \equiv 2 \times 2^n - 1[7]$

لندرس إذن بواقي قسمة 2^n على 7 كمايلي :

$$2^0 \equiv 1[7]$$
$$2^1 \equiv 2[7]$$
$$2^2 \equiv 4[7]$$
$$2^3 \equiv 1[7]$$

منه :

$$2^{3k} \equiv 1[7]$$
$$2^{3k+1} \equiv 2[7]$$
$$2^{3k+2} \equiv 4[7]$$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$2^n \equiv ?[7]$	1	2	4
$2 \times 2^n \equiv ?[7]$	2	4	1
$2 \times 2^n - 1 \equiv ?[7]$	1	3	0

خلاصة : بواقي قسمة $15(16^{n+1} - 1)$ على 7 هي كمايلي :

إذا كان $n = 3k$ فإن الباقي هو 1

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن الباقي هو 3

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن الباقي هو 0

التمرين ــ 16

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لــ 3^n على 10

2 ــ إستنتج باقي القسمة الإقليدية على 10 للعدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$

3 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)\,3^{2n+1}[10]$

4 ــ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$

الحــل ــ 16

ــ 1

$3^0 \equiv 1[10]$
$3^1 \equiv 3[10]$
$3^2 \equiv 9[10]$
$3^3 \equiv 7[10]$
$3^4 \equiv 1[10]$

منه :

قيم n	باقي قسمة 3^n على 10
$4k$	1
$4k+1$	3
$4k+2$	9
$4k+3$	7

ــ 2 $9^{2001} = 3^{2(2001)} = 3^{4002}$

بما أن $4002 = 4(1000) + 2$ فإن $3^{4002} \equiv 9[10]$ أي $9^{2001} \equiv 9[10]$ .... (1)

من جهة أخرى $63 \equiv 3[10]$

إذن : $63 \times 9^{2001} \equiv 3 \times 9[10]$

أي $63 \times 9^{2001} \equiv 7[10]$

أيضا : $7 \equiv -3[10]$ إذن : $7^{1422} \equiv (-3)^{1422}[10]$

أي $7^{1422} \equiv 3^{1422}[10]$ لأن الأس زوجي

بما أن : $1422 = 4(355) + 2$ فإن $3^{1422} \equiv 9[10]$

إذن : $7^{1422} \equiv 9[10]$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} 63 \times 9^{2001} \equiv 7[10] \\ 7^{1422} \equiv 9[10] \end{array}\right\}$

إذن : $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 7 - 9[10]$

أي $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8[10]$

إذن : باقي قسمة $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 هو 8

ــ 3 $3n \times 9^n = 3n \times 3^{2n} = n \times 3^{2n+1}$ منه $3n \times 9^n \equiv n \times 3^{2n+1}[10]$

من جهة أخرى : $7 \equiv -3[10]$ إذن : $7^{2n+1} \equiv (-3)^{2n+1}[10]$

أي $7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$ لأن $(-3)^{2n+1} = -3^{2n+1}$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} 3n \times 9^n \equiv n \times 3^{2n+1}[10] \\ 7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10] \end{array}\right\}$

إذن : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv n \times 3^{2n+1} - 3^{2n+1}[10]$

أي : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$ و هو المطلوب

ــ 4 يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ إذا و فقط إذا كان $(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$

إذن يكفي أن ندرس بواقي قسمة العدد $(n-1) \times 3^{2n+1}$ على 10 كمايلي :

لدينا $3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n$

بما أن $9 \equiv -1[10]$ فإن $9^n \equiv (-1)^n[10]$

أي : $\left\{\begin{array}{l} 9^n \equiv 1[10] \text{ إذا كان n زوجي} \\ 9^n \equiv -1[10] \text{ إذا كان n فردي} \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l} 9^n \equiv 1[10] \text{ إذا كان n زوجي} \\ 9^n \equiv 9[10] \text{ إذا كان n فردي} \end{array}\right.$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n-1 \equiv ?[10]$	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$9^n \equiv ?[10]$	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9
$3 \times 9^n \equiv ?[10]$	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7
$(n-1) \times 3 \times 9^n \equiv ?[10]$	7	0	3	4	9	8	5	2	1	6

نتيجة : يكون $3\,n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 1[10]$

أي : $n = 10\,k + 1$ حيث $k \in IN$

مثلا : من أجل $n = 1$: $3 \times 9 + 7^3 = 27 + 343 = 370$ و $370 \equiv 0[10]$

التمرين ــ 17

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 4^n على 7

2 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$

3 ــ أحسب بدلالة n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

4 ــ ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S قابلا للقسمة على 7

الحـل ــ 17

ــ1

$3^0 \equiv 1[7]$
$3^1 \equiv 3[7]$
$3^2 \equiv 2[7]$
$3^3 \equiv 6[7]$
$3^4 \equiv 4[7]$
$3^5 \equiv 5[7]$
$3^6 \equiv 1[7]$ منه

قيم n	باقي قسمة 3^n على 7
$6\,k$	1
$6\,k+1$	3
$6\,k+2$	2
$6\,k+3$	6
$6\,k+4$	4
$6\,k+5$	5

$4^0 \equiv 1[7]$
$4^1 \equiv 4[7]$
$4^2 \equiv 2[7]$
$4^3 \equiv 1[7]$ منه

قيم n	باقي قسمة 4^n على 7
$3\,p$	1
$3\,p+1$	4
$3\,p+2$	2

ــ2 $1424 \equiv 3[7]$ إذن : $1424^{6n+1} \equiv 3^{6n+1}[7]$

أي : $1424^{6n+1} \equiv 3[7]$ حسب السؤال (1)

$2006 \equiv 4[7]$ إذن : $2006^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7]$

أي $2006^{3n+2} \equiv 2[7]$ حسب السؤال (1)

منه : $2 \times 2006^{3n+2} \equiv 2 \times 2[7]$

أي $2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7]$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} 1424^{6n+1} \equiv 3[7] \\ 2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7] \end{array}\right\}$

إذن : $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 3 + 4[7]$

أي : $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 0[7]$ و هو المطلوب

ــ3

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n$$
$$= (2 \times 3^0 + 3 \times 4^0) + (2 \times 3^1 + 3 \times 4^1) + ... + (2 \times 3^n + 3 \times 4^n)$$
$$= 2(3^0 + 3^1 + ... + 3^n) + 3(4^0 + 4^1 + ... + 4^n)$$
$$= 2\left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}\right) + 3\left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right)$$
$$= 3^{n+1} - 1 + 4^{n+1} - 1$$

$= 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$

4 ــ يكون S قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $S \equiv 0[7]$

أي $3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7]$

أي $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$

أي $3 \times 3^n + 4 \times 4^n \equiv 2[7]$

لندرس إذن بواقي قسمة $3 \times 3^n + 4 \times 4^n$ على 7 كمايلي :

$n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$3^n \equiv ?[7]$	1	3	2	6	4	5
$3 \times 3^n \equiv ?[7]$	3	2	6	4	5	1
$4^n \equiv ?[7]$	1	4	2	1	4	2
$4 \times 4^n \equiv ?[7]$	4	2	1	4	2	1
$3 \times 3^n + 4 \times 4^n \equiv ?[7]$	0	4	0	1	0	2

نتيجة : $3 \times 3^n + 4 \times 4^n \equiv 2[7]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 5[6]$

إذن : قيم n المطلوبة هي $n = 6k + 5$ حيث $k \in IN$

التمرين ــ 18

1 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي k فإن العدد $(7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3})$ يقبل القسمة على 10

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \ldots\ldots + 7^n$

3 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $S_{n+4} \equiv S_n[10]$

4 ــ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10

الحـل ــ 18

1 ــ

$7^0 \equiv 1[10]$

$7^1 \equiv 7[10]$

$7^2 \equiv 9[10]$

$7^3 \equiv 3[10]$

$7^4 \equiv 1[10]$

منه :

قيم n	باقي قسمة 7^n على 10
$4k$	1
$4k+1$	7
$4k+2$	9
$4k+3$	3

2 ــ حسب السؤال (1) فإن من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

$$\begin{cases} 7^{4k} \equiv 1[10] \\ 7^{4k+1} \equiv 7[10] \\ 7^{4k+2} \equiv 9[10] \\ 7^{4k+3} \equiv 3[10] \end{cases}$$

منه $7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10]$

أي $7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]$

3 ــ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $S_{n+4} = S_n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4}$

إذن : $S_{n+4} \equiv S_n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4}[10]$

لكن $7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4} \equiv 0[10]$ حسب السؤال (2)

لأن الأعداد $n+1$ ؛ $n+2$ ؛ $n+3$ ؛ $n+4$ متتابعة .

إذن : $S_{n+4} \equiv S_n[10]$

4 ــ

$S_0 = 1$ إذن : $S_0 \equiv 1[10]$

$S_1 = 1 + 7$ إذن : $S_1 \equiv 8[10]$

$S_2 = 1 + 7 + 49$ إذن : $S_2 \equiv 7[10]$

$S_3 = 1 + 7 + 49 + 343$ إذن : $S_3 \equiv 0[10]$

خلاصة : إذا كان $n = 4k$ فإن $S_n \equiv 1[10]$

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $S_n \equiv 8[10]$

إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $S_n \equiv 7[10]$

إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $S_n \equiv 0[10]$

التمرين ـ 19

x و y عددان طبيعيان غير معدومان

أوجد الأعداد التي تكتب $\overline{y\,x}$ في النظام العشري و $\overline{x\,y}$ في النظام ذو الأساس 7

الحـل ـ 19

x و y هما رقمان في النظام ذو الأساس 7 إذن : $x \le 6$ و $y \le 6$

و حسب المعطيات $x \ne 0$ و $y \ne 0$

إذن : $x \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ ؛ $y \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

في النظام العشري $\overline{y\,x}$ ينشر إلى $x + 10\,y$

في النظام ذو الأساس 7 $\overline{x\,y}$ ينشر إلى $7\,x + y$

منه : $x + 10\,y = 7\,x + y$ أي $9\,y = 6\,x$ أي $3\,y = 2\,x$

إذن : $x = \dfrac{3\,y}{2}$ منه y زوجي لأن $x \in IN$

أي $y \in \{2 ; 4 ; 6\}$

من أجل $y = 2$: $x = 6/2 = 3$

من أجل $y = 4$: $x = 12/2 = 6$

من أجل $y = 6$: $x = 18/2 = 9$ مرفوض لأن $x \le 6$

نتيجة : $(x ; y) \in \{(3 ; 2) ; (6 ; 4)\}$

إذن الأعداد المطلوبة هي $\overline{46}$ و $\overline{23}$ (مكتوبة في النظام العشري)

أو $\overline{64}$ و $\overline{32}$ مكتوبة في النظام ذو الأساس 7

التمرين ـ 20

عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $n = \overline{x\,y\,z}$ في النظام ذو الأساس 7 و يكتب $n = \overline{z\,y\,x}$ في النظام ذو الأساس 11

الحـل ـ 20

x ، y ، z أرقام في النظام ذو الأساس 7 إذن كل من x و y و z ينتمي إلى المجموعة $A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

في النظام ذو الأساس 7 : $n = \overline{x\,y\,z}$ إذن : $n = 49\,x + 7\,y + z$

في النظام ذو الأساس 11 : $n = \overline{z\,y\,x}$ إذن : $n = 121\,z + 11\,y + x$

إذن : $49\,x + 7\,y + z = 121\,z + 11\,y + x$

أي : $48\,x = 120\,z + 4y$

أي : $12\,x = 30\,z + y$

أي : $y = 12\,x - 30\,z$

أي : $y = 6(2\,x - 5\,z)$

منه : $\begin{cases} \text{إما } y = 6 \text{ و } 2\,x - 5\,z = 1 \\ \text{أو } y = 0 \text{ و } 2\,x - 5\,z = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} \text{إما } y = 6 \text{ و } 2\,x = 5\,z + 1 \\ \text{أو } y = 0 \text{ و } 2\,x = 5\,z \end{cases}$

أي $\begin{cases} \text{إما } y = 6 \text{ و } (x ; z) = (3 , 1) \\ \text{أو } y = 0 \text{ و } (x ; z) \in \{(0 ; 0) ; (5 ; 2)\} \end{cases}$

نتيجة : $(x ; y ; z) \in \{(0 ; 0 ; 0) ; (5 ; 0 ; 2) ; (3 ; 6 ; 1)\}$

أي : $n \in \{\overline{000} ; \overline{502} ; \overline{361}\}$ في النظام ذو الأساس 7

إذن : $n \in \{0 ; 247 ; 190\}$ في النظام ذو الأساس 10

تحقيق :

$$\begin{array}{l|l|l|l} 247 & 11 & & \\ 27 & 22 & 11 & \\ \boxed{5} & \boxed{0} & 2 & 11 \\ & & \boxed{2} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l|l|l} 190 & 11 & & \\ 80 & 17 & 11 & \\ \boxed{3} & \boxed{6} & 1 & 11 \\ & & \boxed{1} & 0 \end{array}$$

إذن : في النظام ذو الأساس 11 : $190 = \overline{163}$ و $247 = \overline{205}$

التمرين ـــ 21

1 ـــ بين أن إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة $45x - 28y = 130$
فإن x زوجي و y مضاعف 5

2 ـــ عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في النظام ذو الأساس 9 و يكتب $\overline{5\beta\beta6}$ في النظام ذو الأساس 7

الحـل ـــ 21

1 ـــ لتكن $(x ; y)$ ثنائية من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

إذا كانت $(x ; y)$ حلا للمعادلة $45x - 28y = 130$ فإن $\begin{cases} 45x = 28y + 130 \\ 28y = 45x - 130 \end{cases}$ و

أي $\begin{cases} 45x = 2(14y + 65) \\ 28y = 5(9x - 26) \end{cases}$ و

أي $\begin{cases} 2 \text{ يقسم } 45x \\ 5 \text{ يقسم } 28y \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2 \text{ يقسم } x \\ 5 \text{ يقسم } y \end{cases}$ و أي $\begin{cases} x \text{ زوجي} \\ y \text{ مضاعف } 5 \end{cases}$

2 ـــ في النظام ذو الأساس 9 : $n = \overline{2\alpha\alpha3}$ حيث $0 \le \alpha \le 8$

إذن : $n = 2 \times 729 + 81\alpha + 9\alpha + 3 = 1461 + 90\alpha$

في النظام ذو الأساس 7 : $n = \overline{5\beta\beta6}$ حيث $0 \le \beta \le 6$

إذن : $n = 5 \times 343 + 49\beta + 7\beta + 6 = 1721 + 56\beta$

منه : $1461 + 90\alpha = 1721 + 56\beta$

أي : $90\alpha - 56\beta = 260$

منه : $45\alpha - 28\beta = 130$

منه حسب السؤال (1) فإن β مضاعف 5 و α زوجي .

لكن $\begin{cases} 0 \le \beta \le 6 \\ 0 \le \alpha \le 8 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \beta = 0 \text{ أو } \beta = 5 \\ \alpha \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\} \end{cases}$

منه الحالات التالية :

أولا : $\beta = 0$ إذن : $45\alpha = 130$

منه : $\alpha = \dfrac{130}{45} = \dfrac{26}{9}$ مرفوض

ثانيا : $\beta = 5$ إذن : $45\alpha = 28(5) + 130$

أي : $\alpha = \dfrac{270}{45} = 6$

نتيجة : $\alpha = 6$ و $\beta = 5$

إذن : $\begin{cases} n = 1461 + 60(6) = 2001 \\ n = 1721 + 56(5) = 2001 \end{cases}$ أو

التمرين ـــ 22

N عدد طبيعي يكتب $\overline{x\,y\,z\,x}$ في النظام ذو الأساس 11 و يكتب $\overline{y\,y\,x\,z}$ في النظام ذو الأساس 7
أكتب العدد N في النظام العشري .

الحـل ـــ 22

لتكن A المجموعة المعرفة بـــ $A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

الأعداد x ، y ، z هي أرقام في النظام ذو الأساس 7 إذن $x \in A$ ؛ $y \in A$ ، $z \in A$.

في النظام ذو الأساس 11 : $N = 11^3 x + 11^2 y + 11z + x = 1332x + 121y + 11z$

في النظام ذو الساس 7 : $N = 7^3 y + 7^2 y + 7x + z = 392y + 7x + z$

منه : $1332x + 121y + 11z = 392y + 7x + z$

أي : $1325x + 10z = 271y$

أي : $5(265x + 2z) = 271y$ .... (1)

إذن : 5 يقسم $271y$ منه 5 يقسم y أي $y \in \{0 ; 5\}$ (لأن $y \in A$)

إذن نميز حالتين :

الأولى : $y = 5$ إذن : المساواة (1) تصبح : $5(265x + 2z) = 271 \times 5$

أي $265x + 2z = 271$

منه : $x = 1$ و $z = 3$

الثانية : $y = 0$ إذن : المساواة (1) تصبح : $265x + 2z = 0$

منه : $z = 0$ و $x = 0$

خلاصة : $(x ; y ; z) \in \{(0 ; 0 ; 0) ; (1 ; 5 ; 3)\}$

من أجل $(x ; y ; z) = (0 ; 0 ; 0)$ فإن $N = 0$

من أجل $(x ; y ; z) = (1 ; 5 ; 3)$ فإن : $N = 1332 + 5(121) + 11(3)$

$= 1332 + 605 + 33 = 1970$

نتيجة : قيم N المطلوبة هي $\{0 ; 1970\}$

<u>التمرين ـــ 23</u>

n عدد طبيعي يكتب في النظام ذو الأساس 9 : $n = \overline{127x}$

1 ـــ عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8

2 ـــ عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11

<u>الحـل ـــ 23</u>

x رقم في النظام ذو الأساس 9 إذن : $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

$n = \overline{127x}$ إذن : $n = 1 \times 9^3 + 2 \times 9^2 + 7 \times 9 + x$

أي : $n = 954 + x$

1 ـــ لدينا $954 \equiv 2[8]$ إذن : $954 + x \equiv 2 + x[8]$ أي $n \equiv 2 + x[8]$

منه : يكون n قابلا للقسمة على 8 إذا و فقط إذا كان $x + 2 \equiv 0[8]$

أي $x \equiv -2[8]$

أي $x \equiv 6[8]$

أي $x = 6$ لأن $0 \le x \le 8$

2 ـــ لدينا $954 \equiv 8[11]$ منه $954 + x \equiv 8 + x[11]$ أي $n \equiv x + 8[11]$

إذن : يكون n قابلا للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $x + 8 \equiv 0[11]$

أي $x \equiv -8[11]$

أي $x \equiv 3[11]$

منه : $x = 3$ لأن $0 \le x \le 8$

<u>التمرين ـــ 24</u>

عين العددين الطبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n = \overline{27x85y}$ المكتوب في النظام العشري قابلا للقسمة على 3 و على 11

<u>الحـل ـــ 24</u>

كل من الأعداد الطبيعية x و y هي أرقام في النظام العشري .

إذن : $0 \le x \le 9$ و $0 \le y \le 9$

$n \equiv 0[3]$ يكافئ $2 + 7 + x + 8 + 5 + y \equiv 0[3]$

يكافئ $x + y + 22 \equiv 0[3]$

يكافئ $x + y + 1 \equiv 0[3]$ لأن $22 \equiv 1[3]$

يكافئ $x + y \equiv 2[3]$ ....(1)

$n \equiv 0[11]$ يكافئ $y - 5 + 8 - x + 7 - 2 \equiv 0[11]$

يكافئ $y - x + 8 \equiv 0[11]$

يكافئ $y - x \equiv 3[11]$ لأن $-8 \equiv 3[11]$

منه : $y - x = 3$ أو $y - x = -8$ لأن $-9 \le y - x \le 9$

أي $y = x + 3$ أو $y = x - 8$

منه $\begin{cases} \text{إما} & y = x + 3 \text{ و } x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\} \\ \text{أو} & y = x - 8 \text{ و } x \in \{8 ; 9\} \end{cases}$

منه : $(x ; y) \in \{(0 ; 3) ; (1 ; 4) ; (2 ; 5) ; (3 ; 6) ; (4 ; 7) ; (5 ; 8) ; (6 ; 9) ; (8 ; 0) ; (9 ; 1)\}$

لكن $x + y \equiv 2[3]$

إذن : $(x ; y) \in \{(4 ; 7) ; (1 ; 4) ; (8 ; 0)\}$

نتيجة : $n \in \{274857 ; 271854 ; 278850\}$

التمرين ــ 25

x عدد طبيعي

1 ــ برهن أن : $x \equiv 0[7]$ تكافئ $3x \equiv 0[7]$

ليكن N و M عددين طبيعيين مكتوبين في النظام العشري كمايلي :

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \quad \text{و} \quad M = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$$

2 ــ برهن أن N يقبل القسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $M - 2a_0$ يقبل القسمة على 7

3 ــ إستعمل هذه الطريقة لتبرير ما إذا كان العددان 105154 و 263572 قابلان للقسمة على 7

الحــل ــ 25

1 ــ ليكن x عدد طبيعي . لندرس بواقي قسمة $3x$ على 7 كمايلي :

$x \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$3x \equiv ?[7]$	0	3	6	2	5	1	4

نتيجة : $3x \equiv 0[7]$ يكافئ $x \equiv 0[7]$

2 ــ لدينا : $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$

إذن : $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$

$= 10(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0$

$= 10M + a_0$ لأن $M = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1$

منه : $N \equiv 10M + a_0[7]$

أي : $N \equiv 3M + a_0[7]$ لأن $10 \equiv 3[7]$

نتيجة : $N \equiv 0[7]$ يكافئ $3M + a_0 \equiv 0[7]$

يكافئ $3M + 15a_0 \equiv 0[7]$ لأن $15a_0 \equiv a_0[7]$

يكافئ $3(M + 5a_0) \equiv 0[7]$

يكافئ $M + 5a_0 \equiv 0[7]$ حسب السؤال (1)

يكافئ $M - 2a_0 \equiv 0[7]$ لأن $5 \equiv -2[7]$

خلاصة : يكون N قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $M - 2a_0$ قابلا للقسمة على 7

3 ــ لنستعمل طريقة هذا التمرين لإثبات ما إذا كان العدد 105154 قابلا للقسمة على 7 كمايلي :

الخطوة الأولى : $N = 105154$ ؛ $M = 10515$

إذن : $M - 2a_0 = 10515 - 2(4) = 10507$ هل 10507 قابل للقسمة على 7 ؟

الخطوة الثانية : $N = 10507$ ؛ $M = 1050$

$M - 2a_0 = 1050 - 2(7) = 1036$ هل 1036 قابل للقسمة على 7 ؟

الخطوة الثالثة : $N = 1036$ ؛ $M = 103$

$M - 2a_0 = 103 - 2(6) = 91$ هل 91 قابل للقسمة على 7 ؟

الخطوة الرابعة : $N = 91$ ؛ $M = 9$

$M - 2a_0 = 9 - 2(1) = 7$

نتوقف : $M - 2a_0 \equiv 0[7]$ إذن : 91 مضاعف 7

منه : 1036 مضاعف 7

منه : 10507 مضاعف 7

منه : 105154 مضاعف 7 . (يقبل القسمة على 7)

لنعد نفس الطريقة بالنسبة للعدد 263572

$M - 2a_0 = 26357 - 4 = 26353$: إذن $M = 26357$ ؛ $N = 263572$

$M - 2a_0 = 2635 - 6 = 2629$: إذن $M = 2635$ ؛ $N = 26353$

$M - 2a_0 = 262 - 18 = 244$: إذن $M = 262$ ؛ $N = 2629$

$M - 2a_0 = 24 - 8 = 16$: إذن $M = 24$ ؛ $N = 244$

يمكن أن نتوقف هنا لأن 16 ليس مضاعف 7 إذن : 244 ليس مضاعف 7

منه 2629 ليس مضاعف 7 و منه 26353 ليس مضاعف 7 إذن 263572 ليس مضاعف 7

تحقيق :

$$\begin{array}{r|l} 263572 & 7 \\ \hline 53 & 37653 \\ 45 & \\ 37 & \\ 22 & \\ \boxed{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105154 & 7 \\ \hline 35 & 15022 \\ 01 & \\ 15 & \\ 14 & \\ \boxed{0} & \end{array}$$

التمرين ــ 26

N و M عددان طبيعيان يكتبان في النظام العشري كمايلي :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \quad \text{و} \quad M = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$$

1 ــ برهن أن N يقبل القسمة على 13 إذا و فقط إذا كان $M + 4a_0$ يقبل القسمة على 13

2 ــ إستعمل هذه الطريقة لتبرير ما إذا كان العدد 1631216 قابلا للقسمة على 13

الحــل ــ 26

1 ــ

$$\begin{aligned} N &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 \\ &= 10(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0 \\ &= 10M + a_0 \end{aligned}$$

نتيجة : $N \equiv 10M + a_0[13]$

لكن : $a_0 \equiv 40a_0[13]$ لأن $40 \equiv 1[13]$

إذن : $N \equiv 10M + 40a_0[13]$

أي $N \equiv 10(M + 4a_0)[13]$

منه : يكون $N \equiv 0[13]$ إذا و فقط إذا كان $10(M + 4a_0) \equiv 0[13]$

أي $M + 4a_0 \equiv 0[13]$ لأن لا يوجد قواسم مشتركة بين 13 و 10

2 ــ هل 1631216 قابل للقسمة على 13 ؟

$N = 1631216$ ؛ $M = 163121$ ؛ $M + 4a_0 = 163121 + 24 = 163145$

$N = 163145$ ؛ $M = 16314$ ؛ $M + 4a_0 = 16314 + 20 = 16334$

$N = 16334$ ؛ $M = 1633$ ؛ $M + 4a_0 = 1633 + 16 = 1649$

$N = 1649$ ؛ $M = 164$ ؛ $M + 4a_0 = 164 + 36 = 200$

$N = 200$ ؛ $M = 20$ ؛ $M + 4a_0 = 20 + 0 = 20$

$N = 20$ لا يقبل القسمة على 13 إذن : نتوقف .

نتيجة : العدد 1631216 لا يقبل القسمة على 13

تحقيق :

$$\begin{array}{r|l} 1631216 & 13 \\ \hline 33 & 125478 \\ 71 & \\ 62 & \\ 101 & \\ 106 & \\ 2 & \end{array}$$

التمرين ــ 27

N عدد طبيعي يكتب في النظام العشري من الشكل $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$

1 ــ بين أن العدد N يكون قابلا للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$ مضاعفا لــ 11

2 ــ هل الأعداد التالية قابلة للقسمة على 11 : 72792973 ؛ 43141408431

الحـل ــ 27

1 ــ $10 \equiv -1[11]$ إذن :
$$\left.\begin{array}{l} 10^n \equiv (-1)^n[11] \\ 10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1}[11] \\ \vdots \\ 10^2 \equiv (-1)^2[11] \\ 10 \equiv -1[11] \end{array}\right\} \text{منه} \left\{\begin{array}{l} a_n \times 10^n \equiv (-1)^n a_n[11] \\ a_{n-1} \times 10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} a_{n-1}[11] \\ \vdots \\ a_2 \times 10^2 \equiv a_2[11] \\ a_1 \times 10 \equiv -a_1[11] \end{array}\right.$$

منه $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 \equiv a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + ...- a_1[11]$

منه $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + ... - a_1 + a_0[11]$

أي : $N \equiv a_0 - a_1 + ... + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_n(-1)^n[11]$

منه : يكون $N \equiv 0[11]$ إذا و فقط إذا كان $a_0 - a_1 + ... + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_n(-1)^n \equiv 0[11]$

2 ــ هل العدد 72792973 مضاعف 11 ؟

$3 - 7 + 9 - 2 + 9 - 7 + 2 - 7 = 0$ مضاعف 11

إذن : العدد 72792973 مضاعف 11

هل العدد 43141408431 مضاعف 11 ؟

$1 - 3 + 4 - 8 + 0 - 4 + 1 - 4 + 1 - 3 + 4 = -11$ مضاعف 11

إذن : العدد 43141408431 مضاعف 11

التمرين ــ 28

a عدد طبيعي أكبر تماما من 1

1 ــ انشر الجداء : $A = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

2 ــ إستنتج أنه في كل نظام تعداد يكون العدد 10101 يقبل القسمة على 111 ثم عين حاصل هذه القسمة .

ملاحظة : العدد $(a - 1)$ نرمز له بــ β في نظام التعداد ذو الأساس a حيث $a > 2$

الحـل ــ 28

1 ــ
$$A = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$
$$= a^4 - a^3 + a^2 + a^3 - a^2 + a + a^2 - a + 1$$

إذن : $A = a^4 + a^2 + 1$

2 ــ ليكن N عدد طبيعي يكتب في النظام ذو الأساس a (حيث $a > 1$) : $N = \overline{10101}$

إذن : $N = a^4 + 0a^3 + a^2 + 0a + 1$ أي $N = a^4 + a^2 + 1$

منه : حسب السؤال (1) فإن : $N = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$ ...... (1)

لدينا : $a^2 + a + 1 = \overline{111}$ في نظام التعداد ذو الأساس a

و $a^2 - a + 1 = (a - 1)a + 1$ منه في النظام ذو الأساس a فإن $a^2 - a + 1 = \overline{\beta 1}$

حيث β هو رمز الرقم $(a - 1)$ في نظام التعداد ذو الأساس a

نتيجة : المساواة (1) تصبح : $\overline{10101} = \overline{111} \times \overline{\beta 1}$

أي : العدد 10101 يقبل القسمة على $\overline{111}$ و حاصل هذه القسمة يساوي $\overline{\beta 1}$

التمرين ــ 29

a عدد طبيعي أكبر تماما من 1

1 ــ في نظام التعداد ذو الأساس a بين أن العدد $\overline{1001}$ يقبل القسمة على $\overline{11}$

2 ــ نمثل العدد $(a - 1)$ بالرقم β . عين حاصل قسمة العدد $\overline{1001}$ على $\overline{11}$

3 ــ تحقق من هذه النتائج في النظام ذو الأساس 10 ثم في النظام ذو الأساس 12

الحـل ــ 29

1 ــ في نظام التعداد ذو الأساس a لدينا : $\overline{1001} = a^3 + 1$
$$= (a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} a^3 + 1 & a + 1 \\ \underline{a^3 + a^2} & \overline{a^2 - a + 1} \\ -a^2 + 1 & \\ \underline{-a^2 - a} & \\ a + 1 & \\ \underline{a + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

لدينا : $a + 1 = \overline{11}$

إذن : العدد $\overline{1001}$ قابل للقسمة على $\overline{11}$

2 ــ حسب السؤال (1) لدينا : $\overline{1001} = (a + 1)(a^2 - a + 1)$
$$= (a + 1)[(a - 1)a + 1]$$
$$= \overline{11} \times \overline{\beta 1}$$

لأن $\left\{\begin{array}{l} \overline{\beta} = a - 1 \\ (a - 1)a + 1 = \overline{\beta 1} \end{array}\right.$

نتيجة : حاصل قسمة العدد $\overline{1001}$ على $\overline{11}$ هو $\overline{\beta 1}$

3 ــ **تحقيق :** في النظام العشري لدينا :

$$\begin{array}{r|l} 1001 & 11 \\ 11 & 91 \\ \boxed{0} & \end{array}$$

في النظام ذو الأساس 12 : $\overline{1001} = (12)^3 + 1 = 1729$

$\overline{11} = 12 + 1 = 13$

باجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 1729 & 13 \\ 42 & 133 \\ 39 & \\ \boxed{0} & \end{array}$$

لنبحث عن كتابة العدد 133 في النظام ذو الأساس 12 كمايلي :

$$\begin{array}{r|l|l} 133 & 12 & \\ 13 & 11 & 12 \\ \boxed{1} & \boxed{\beta} & 0 \end{array}$$

إذن : $133 = \overline{\beta 1}$

التمرين ــ 30

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 3$ يكون العدد $\overline{1331}$ المكتوب في النظام ذو الأساس a هو مكعب لعدد طبيعي .

2 ــ عين أساس النظام الذي يكون فيه العدد $\overline{14641}$ قوة رابعة لعدد طبيعي .

الحـل ــ 30

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 3$ لدينا في النظام ذو الأساس a :

$$\overline{1331} = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$$

إذن : العدد $\overline{1331}$ في النظام ذو الأساس a هو مكعب للعدد $(a+1)$

2 ــ ليكن a أساس النظام الذي يكتب فيه العدد $\overline{14641}$ حيث $a > 6$

إذن : $\overline{14641} = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

$= (a+1)^4$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 6$ فإن العدد $\overline{14641}$ المكتوب في النظام ذو الأساس a هو قوة رابعة للعدد $(a+1)$

التمرين ــ 31

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . نضع $a = n^2 + 1$

1 ــ أكتب في النظام ذو الأساس a الأعداد التالية : $n^2 + 2$ ؛ $n^2 + 2n$ ؛ $(n^2+2)^2$ ؛ n^4

2 ــ تحقق من نتائج السؤال (1) من أجل $a = 5$ ثم $a = 10$

3 ــ أكتب في النظام ذو الأساس a الأعداد التالية : $u = n(n^2+2)$ ، $v = n^2(n^2+2)$

الحـل ــ 31

1 ــ لدينا $n > 1$ منه $n^2 > 1$

إذن : $n^2 + 1 > 2$ أي $a > 2$

أي : كل من 0 ، 1 ، 2 هي أرقام في النظام ذو الأساس a

من جهة أخرى $a = n^2 + 1$ إذن : $n^2 = a - 1$ أي $n^2 < a$

و خاصة $n < a$ إذن : كل من n و n^2 هي أرقام في النظام ذو الأساس a

لنبحث إذن عن كتابات الأعداد المطلوبة في النظام ذو الأساس a :

$$n^2 + 2 = (n^2+1) + 1 = a + 1 = \overline{11}$$

$$n^2 + 2n = n^2 + 1 + 2n - 1 = a + (2n - 1)$$

لنثبت أن $2n - 1 < a$

لدينا : $a - (2n - 1) = n^2 + 1 - (2n - 1)$

$= n^2 - 2n + 2$ كثير حدود من الدرجة (2)

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ إذن : من أجل كل n من N فإن $n^2 - 2n + 2 > 0$

أي : $a - (2n - 1) > 0$ منه $a > 2n - 1$

ليكن α رمز العدد $2n - 1$ في النظام ذو الأساس a

إذن : $n^2 + 2n = a + \alpha$

منه : $n^2 + 2n = \overline{1\alpha}$

$(n^2+2)^2 = [(n^2+1)+1]^2 = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = \overline{121}$

لدينا $a = n^2 + 1$ إذن $n^2 = a - 1$ منه $n^4 = (a-1)^2$

أي : $n^4 = a^2 - 2a + 1$

لاحظ أن : $(a^2 + 2a + 1) + (a^2 - 2a + 1) = 2a^2 + 2 = \overline{202}$ و لاحظ أيضا أن $a^2 + 2a + 1 = \overline{121}$

منه : $\overline{121} + (a^2 - 2a + 1) = \overline{202}$

أي $a^2 - 2a + 1 = \overline{202} - \overline{121} = \overline{\beta 1}$

حيث β هو رمز الرقم $(a-2)$

نتيجة : $n^4 = \overline{\beta 1}$

2 ــ من أجل $a = 5$ فإن $n^2 = 4$ إذن : $n = 2$

إذن : $n^2 + 2 = 6$ ؛ $n^2 + 2n = 8$ ؛ $(n^2+2)^2 = 36$ ؛ $n^4 = 16$

لدينا : $6 = \overline{11}$

$\alpha = 2n - 1 = 3$ منه $8 = \overline{13}$

$36 = \overline{121}$

$\beta = 5 - 2 = 3$ إذن : $16 = \overline{31}$

التحقيق :

$$\begin{cases} \overline{11} = 5 + 1 = 6 \\ \overline{13} = 5 + 3 = 8 \\ \overline{121} = 25 + 10 + 1 = 36 \\ \overline{31} = 15 + 1 = 16 \end{cases}$$ في نظام التعداد ذو الأساس 5

من أجل $a = 10$ فإن $n^2 = 9$ منه $n = 3$

إذن : $n^2 + 2 = 11$ ؛ $n^2 + 2n = 15$ ؛ $(n^2+2)^2 = 121$ ؛ $n^4 = 81$

لدينا : $11 = \overline{11}$ في نظام التعداد ذو الأساس 10

$\alpha = 2n - 1 = 5$ منه $15 = \overline{15}$ في نظام التعداد ذو الأساس 10

$121 = \overline{121}$ في نظام التعداد ذو الأساس 10

$\beta = 10 - 2 = 8$ منه $81 = \overline{81}$ في نظام التعداد ذو الأساس 10

3 ــ

$$\begin{aligned} u &= n(n^2+2) \\ &= n[(n^2+1)+1] \\ &= n(a+1) \\ &= na + n \\ &= \overline{\lambda\lambda} \end{aligned}$$

حيث λ هو رمز الرقم n

$$\begin{aligned} v &= n^2(n^2+2) \\ &= n^2[(n^2+1)+1] \\ &= n^2(a+1) \\ &= n^2 a + n^2 \\ &= \overline{\gamma\gamma} \end{aligned}$$

حيث γ هو رمز الرقم n^2

<u>التمرين ــ 32</u>

ليكن N عدد طبيعي فردي و ليس أولي حيث يكتب من الشكل $N = a^2 - b^2$

a و b عددان طبيعيان يحققان $a > b$

1 ــ برهن أن a و b ليسا من شفعية واحدة (أحدهما زوجي و الآخر فردي)

نقبل أن العدد 250507 ليس أولي .

لتكن المعادلة $a^2 - 250507 = b^2$ .... (E) ذات المجهولين الطبيعيين a و b

2 ــ عين البواقي الممكنة للعدد x^2 على 9 من أجل كل قيم العدد الطبيعي x

3 ــ إستنتج البواقي الممكنة للعدد $a^2 - 250507$ بترديد 9 ثم عين بواقي a^2 بترديد 9 في كل حالة .

4 ــ برهن أن البواقي الممكنة للعدد a بترديد 9 هما 1 و 8

5 ــ برهن أن إذا كانت الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E) فإن $a \geq 501$

6 ــ برهن أنه لا يوجد أي ثنائية من الشكل $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)

لتكن الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E)

7 ـ برهن أن $a \equiv 503[9]$ أو $a \equiv 505[9]$

8 ـ عين أصغر عدد طبيعي k حيث تكون الثنائية $(505 + 9k ; b)$ تحقق المعادلة (E) ثم أعط قيمة b

9 ـ إستنتج مما سبق تحليلا إلى جداء عاملين للعدد 250507

10 ـ هل العاملين أوليين فيما بينهما ؟

الحـل ـ 32

1 ـ $N = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

لدينا الحالات الممكنة التالية :

شفعية a	شفعية b	شفعية a + b أو a - b	شفعية N
فردي	فردي	زوجي	زوجي
فردي	زوجي	فردي	فردي
زوجي	زوجي	زوجي	زوجي
زوجي	فردي	فردي	فردي

نتيجة : يكون N فردي إذا و فقط إذا كان a و b ليسا من نفس الشفعية

2 ـ بواقي قسمة x^2 على 9

$x \equiv ?[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 \equiv ?[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1

3 ـ لدينا : $250507 \equiv 1[9]$ منه $-250507 \equiv -1[9]$

أي $-250507 \equiv 8[9]$ لأن $-1 \equiv 8[9]$

إذن : $a^2 - 250507 \equiv a^2 + 8[9]$

إذا وضعنا $x = b$ فإن : $x^2 = b^2$ أي $x^2 = a^2 - 250507$

منه : $x^2 \equiv a^2 + 8[9]$

أي : $x^2 - 8 \equiv a^2[9]$

أو : $a^2 \equiv x^2 - 8[9]$

منه الجدول التالي :

$x \equiv ?[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 \equiv ?[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$x^2 - 8 \equiv ?[9]$	1	2	5	1	8	8	1	5	2

4 ـ حسب السؤال (1) فإن البواقي الممكنة للعدد x^2 على 9 هي : $\{0 ; 1 ; 4 ; 7\}$

إذن : البواقي المقبولة للعدد $x^2 - 8$ هي 1 فقط لأن $a^2 \equiv x^2 - 8[9]$

و بواقي a^2 بترديد 9 لا يمكن أن تكون من المجموعة $\{2 ; 5 ; 8\}$

منه : $a^2 \equiv 1[9]$ أي $a \equiv 1[9]$ أو $a \equiv 8[9]$

5 ـ لتكن الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E)

إذن : $b^2 = a^2 - 250507$

منه : $a^2 = 250507 + b^2$

إذن : $a^2 \geq 250507$ لأن $b^2 \geq 0$

أي : $a \geq \sqrt{250507}$

أي : $a \geq 501$

6 ـ من أجل $a = 501$ المعادلة (E) تكافئ $(501)^2 - 250507 = b^2$

تكافئ $251001 - 250507 = b^2$

تكافئ $494 = b^2$

تكافئ $b = \sqrt{494}$ إذن $b \notin IN$

نتيجة : لا توجد أي ثنائية $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)

7 ـ حسب السؤال (5) فإن $a \neq 501$ لأن لا توجد ثنائية $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)

إذن : $a \geq 502$

منه : a يكتب من الشكل $a = 502 + n$ حيث $n \in IN$

لدينا حسب السؤال (4) : $\left\{\begin{array}{l} a \equiv 1[9] \\ \text{أو} \\ a \equiv 8[9] \end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l} 502 + n \equiv 1[9] \\ \text{أو} \\ 502 + n \equiv 8[9] \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l} n \equiv -501[9] \\ \text{أو} \\ n \equiv -494[9] \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l} n \equiv 3[9] \quad (\text{لأن } -501 \equiv 3[9]) \\ \text{أو} \\ n \equiv 1[9] \quad (\text{لأن } -494 \equiv 1[9]) \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l} n = 9k + 3 \\ \text{أو} \\ n = 9k + 1 \quad (k \in IN) \end{array}\right.$

نتيجة : من أجل $n = 9k + 3$ فإن : $a = 502 + 9k + 3$ أي $a = 505 + 9k$

من أجل $n = 9k + 1$ فإن : $a = 502 + 9k + 1$ أي $a = 503 + 9k$

إذن : إما $a \equiv 503[9]$ أو $a \equiv 505[9]$

8 ـ تكون الثنائية $(505 + 9k ; b)$ حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كان العدد $(505 + 9k)^2 - 250507$ مربعا تاما كمايلي :

$$(505 + 9k)^2 - 250507 = (505)^2 + 18(505)k + (9k)^2 - 250507$$
$$= 4518 + 81k^2 + 9090k$$
$$= 9(502 + 9k^2 + 1010k)$$

إذن يكفي أن يكون العدد $A = 502 + 9k^2 + 1010k$ مربعا تاما .

لنجرب قيم k كمايلي :

من أجل $k = 0$: $A = 502$ ليس مربع تاما .

من أجل $k = 1$: $A = 502 + 9 + 1010 = 1521$ إذن : $A = (39)^2$ مربع تام .

نتيجة : أصغر عدد طبيعي k حيث الثنائية $(505 + 9k ; b)$ حل للمعادلة (E) هي $k = 1$

إذن : $(505 + 9k)^2 - 250507 = 9 \times (39)^2$

أي : $b^2 = (3 \times 39)^2$

منه : $b = 3 \times 39 = 117$

أي : الثنائية $(514 ; 117)$ هي حل للمعادلة (E) $(k = 1$ إذن : $a = 505 + 9 = 514)$

9 ـ لدينا الثنائية $(514 ; 117)$ حل للمعادلة (E) إذن :

$$(514)^2 - 250507 = (117)^2$$

أي : $(514)^2 - (117)^2 = 250507$

أي : $(514 - 117)(514 + 117) = 250507$

أي : $250507 = 397 \times 631$ و هو التحليل المطلوب

10 ـ لنبحث عن $PGCD(631 ; 397)$ باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 631 & 397 \\ \hline 234 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 397 & 234 \\ \hline 163 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 234 & 163 \\ \hline 71 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 163 & 71 \\ 142 & 2 \\ \hline 21 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 71 & 21 \\ 63 & 3 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 8 \\ \hline 5 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

نتيجة : $PGCD(631 ; 397) = 1$ إذن : العاملين 631 و 397 أوليان فيما بينهما

التمرين ـ 33

نريد دراسة وجود ثلاث أعداد طبيعية x ، y ، z تحقق :

$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$........ (E) من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$

الجزء I : ليكن $n = 2$

1 ـ تحقق أن الثلاثية $(x ; y ; z) = (1 ; 3 ; 5)$ تحقق الشرط (E)

2 ـ ليكن $n = 3$. m عدد طبيعي باقي قسمته على 8 هو r و باقي قسمة m^2 على 8 هو R

أكمل الجدول المقابل :

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

3 ــ هل يمكن إيجاد ثلاث أعداد طبيعية x ، y ، z حيث $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$

الجزء II : ليكن $n > 3$

نفرض أنه توجد أعداد طبيعية x ، y ، z تحقق الشرط (E)

1 ــ برر أن الأعداد x ، y ، z كلها فردية أو من بينها عددين زوجيين فقط .

نفرض أن x و y زوجيان و z فردي

2 ــ برهن أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4]$

3 ــ إستنتج أن هناك تناقض

نفرض أن x ، y ، z كلها فردية .

4 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي k : $k^2 + k \equiv 0[2]$

5 ــ إستنتج أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8]$. ماذا تستنتج ؟

الحـل ــ 33

الجزء I

1 ــ $(x ; y ; z) = (1 ; 3 ; 5)$ إذن : $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 9 + 25 = 35$

بما أن $35 \equiv 3[4]$ أي $35 \equiv 3[2^2]$ و $3 = 2^2 - 1$

فإن الثلاثية $(1 ; 3 ; 5)$ تحقق الشرط (E) من أجل $n = 2$

2 ــ

$m \equiv ?[8]$	r	0	1	2	3	4	5	6	7
$m^2 \equiv ?[8]$	R	0	1	4	1	0	1	4	1

3 ــ حسب الجدول فإن البواقي الممكنة لقسمة مربع عدد طبيعي على 8 هي $\{0 ; 1 ; 4\}$

إذن البواقي الممكنة لقسمة x^2 أو y^2 أو z^2 على 8 هي أيضا $\{0 ; 1 ;4\}$

لنبحث إذن على البواقي الممكنة لقسمة $x^2 + y^2$ على 8 كمايلي :

x^2 \ y^2	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

إذن : البواقي الممكنة لــ قسمة $x^2 + y^2$ على 8 هي $\{0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5\}$

منه : البواقي الممكنة لــ قسمة $x^2 + y^2 + z^2$ على 8 هي كمايلي :

z^2 \ $x^2 + y^2$	0	1	2	4	5
0	0	1	2	4	5
1	1	2	3	5	6
4	4	5	6	0	1

نتيجة : البواقي الممكنة لقسمة $x^2 + y^2 + z^2$ على 8 هي $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

إذن : لا يمكن إيجاد ثلاث أعداد طبيعية x ، y ، z تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$

الجزء II

1 ــ لتكن الثلاثية $(x ; y ; z)$ تحقق الشرط (E) إذن : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$

إذن : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \equiv 2^n [2^n]$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \equiv 0[2^n]$

إذن : العدد $(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$ زوجي أي العدد $(x^2 + y^2 + z^2)$ فردي

x	y	z	x^2	y^2	z^2	$x^2+y^2+z^2$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

نميز الحالات التالية :

نرمز إلى العدد الزوجي بـــ 0

نرمز إلى العدد الفردي بـــ 1

نتيجة : حسب الجدول يكون $x^2+y^2+z^2$ فرديا

في حالتين فقط :

إما x ، y ، z فردية كلها

أو أحدها فردي و الآخرين زوجيين

2 ــ x و y زوجيان و z فردي .

نضع $x = 2k$ ؛ $y = 2p$ ؛ $z = 2q+1$

$$x^2+y^2+z^2 = 4k^2+4p^2+4q^2+4q+1 = 4(k^2+p^2+q^2+q)+1$$

إذن : $x^2+y^2+z^2 \equiv 1[4]$

3 ــ لدينا : $x^2+y^2+z^2 \equiv 1[4]$ إذن : $x^2+y^2+z^2 = 4k+1$ حيث $k \in IN$

إذا كان $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$ فإن : $x^2+y^2+z^2 = m \times 2^n + 2^n - 1$ حيث $m \in IN$

إذن : $4k+1 = m \times 2^n + 2^n - 1$

أي : $4k+2 = 2^n(m+1)$

أي : $2(2k+1) = 2^n(m+1)$ .... (α)

بما أن $n > 3$ فإن : $2^n = 2 \times 2 \times 2^{n-2}$

منه المساواة (α) تصبح : $2(2k+1) = 2 \times 2 \times 2^{n-2}(m+1)$

أي : $(2k+1) = 2 \times 2^{n-2}(m+1)$ و هذا تناقض

لأن $(2k+1)$ فردي و $2 \times 2^{n-2}(m+1)$ زوجي

إذن : لا يمكن أن يكون x و y زوجيان و z فردي

4 ــ لندرس بواقي قسمة العدد k^2+k على 2 كمايلي :

$k \equiv ?[2]$	0	1
$k^2 \equiv ?[2]$	0	1
$k^2+k \equiv ?[2]$	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي k فإن $k^2+k \equiv 0[2]$

5 ــ x ، y ، z أعداد فردية إذن : نضع $x = 2k+1$ ؛ $y = 2p+1$ ؛ $z = 2q+1$

منه : $x^2+y^2+z^2 = 4k^2+4k+1+4p^2+4p+1+4q^2+4q+1$

$$= 4(k^2+k)+4(p^2+p)+4(q^2+q)+3$$

لكن حسب السؤال السابق فإن كل من الأعداد k^2+k و p^2+p و q^2+q هي أعداد زوجية

إذن : $k^2+k = 2k'$ ؛ $p^2+p = 2p'$ ؛ $q^2+q = 2q'$ حيث k' ؛ p' ؛ q' اعداد طبيعية

منه : $x^2+y^2+z^2 = 4(2k')+4(2p')+4(2q')+3$

$$= 8k'+8p'+8q'+3$$

$$= 8(k'+p'+q')+3$$

إذن : $x^2+y^2+z^2 \equiv 3[8]$

نتيجة : لدينا : $x^2+y^2+z^2 \equiv 3[8]$ إذن : $x^2+y^2+z^2 = 8k+3$ حيث $k \in IN$

إذا كان $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$ فإن $x^2+y^2+z^2 = p \times 2^n + 2^n - 1$

إذن : $8k+3 = p \times 2^n + 2^n - 1$

أي : $8k+4 = 2^n(p+1)$

أي : $4(2k+1) = 2^n(p+1)$ .... (β)

لكن $n > 3$ إذن : $2^n = 2 \times 2 \times 2 \times 2^{n-3}$

منه المساواة (β) تصبح : $4(2k+1) = 2 \times 2 \times 2 \times 2^{n-3}(p+1)$

أي : $2k+1 = 2 \times 2^{n-3}(p+1)$ تناقض لأن $(2k+1)$ عدد فردي

و $2 \times 2^{n-3}(p+1)$ عدد زوجي .

خلاصة : من أجل $n > 3$ لا توجد أي ثلاثية $(x ; y ; z)$ من الأعداد الطبيعية تحقق الشرط (E)

الفهرس

سلسلة هبــاج

TEL : 0773 26 52 81