المقاطع المستوية للسطوح

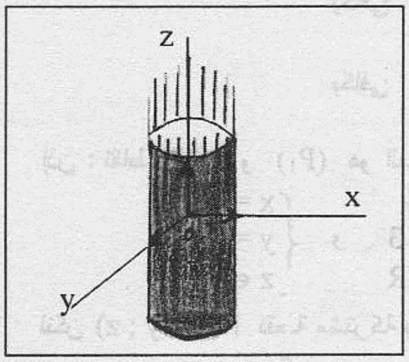
في كل الدرس نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

1 ـ السطح الأسطواني الدوراني

تعريف : (C) دائرة مركزها o و نصف قطرها R حيث $R > 0$ من المستوي $(x o y)$

نسمي سطح أسطواني دوراني محوره (oz) و نصف قطره R مجموعة المستقيمات الموازية للمحور (oz) و التي تشمل نقطة من الدائرة (C)

كل مستقيم من هذه المستقيمات يسمى مولدا لهذا السطح .



معادلة السطح الأسطواني الدوراني

السطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (oz) و نصف قطره R هو

مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث

$x^2 + y^2 = R^2$ و تسمى هذه العلاقة معادلة ديكارتية للسطح الأسطواني الدوراني .

ملاحظة : في المعادلة $x^2 + y^2 = R^2$ لا يظهر الراقم z فإذن $z \in IR$

منه السطح الدوراني الأسطواني غير محدود .

مقطع مستوى يوازي $(x o y)$ بسطح أسطواني دوراني محوره (oz)

ليكن (P) مستوي يوازي $(x o y)$ معادلته $z = a$ حيث $a \in IR$

مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (oz) و نصف قطره R

هو الدائرة (C) من المستوي (P) و التي مركزها $w(0 ; 0 ; a)$ و نصف قطرها R .

مقطع مستوي يوازي $(x o z)$ بسطح أسطواني دوراني محوره (oz)

ليكن (P) مستوي يوازي $(x o z)$ معادلته $y = a$ حيث $a \in IR$

ليكن Σ مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (oz) و نصف قطره R . نميز الحالات التالية :

1 ـ $|a| > R$: Σ مجموعة خالية (لا يوجد تقاطع)

2 ـ $|a| = R$: Σ هو المستقيم ذو المعادلة $y = a$ موازي لـ (oz)

3 ـ $|a| < R$: Σ هو اتحاد مستقيمين معرفين بالتمثيلين الوسيطيين :

$$\begin{cases} y = a \\ x = -\sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in IR \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = a \\ x = \sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in IR \end{cases}$$

مقطع مستوي يوازي $(y o z)$ بالسطح الأسطواني الدوراني ذو المحور (oz)

ليكن (P) مستوي يوازي $(y o z)$ معادلته $x = a$ حيث $a \in IR$

ليكن Σ مقطع المستوي (P) بالسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره (oz) و نصف قطره R . نميز الحالات التالية :

1 ـ $|a| > R$: Σ مجموعة خالية (لا يوجد تقاطع)

2 ـ $|a| = R$: Σ هو المستقيم ذو المعادلة $x = a$ موازي لـ (oz)

3 ـ $|a| < R$: Σ هو اتحاد مستقيمين معرفين بالتمثيلين الوسيطيين :

$$\begin{cases} x = a \\ y = -\sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in IR \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{R^2 - a^2} \\ z \in IR \end{cases}$$

نشاط :

ليكن (S) السطح الأسطواني الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$

1 ـ a) عين تقاطع السطح (S) مع المستويات التي معادلاتها $x = 4$ ؛ $x = -5$ ؛ $x = 7$

b) مثل بالإنشاء السطح (S) و المستويات السابقة .

2 ـ ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $x = k$ حيث $k \in IR$
ناقش حسب قيم k تقاطع السطح (S) و المستوي (P)

3 ـ ليكن $k \in [-5 ; 5]$. نعتبر المستقيمات (D_k) ذات التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25 - k^2} \end{cases}$ والمستقيمات (T_k) ذات التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25 - k^2} \end{cases}$

a) تحقق أن (D_k) و (T_k) محتويان في السطح (S)

b) بين أن السطح (S) هو اتحاد المستقيمات (D_k) و (T_k) لما k يمسح المجال $[-5 ; 5]$

الحـل :

1 ـ a) لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة مشتركة بين السطح (S) و المستوي (P_1) ذو المعادلة $x = 4$

إذن : $\begin{cases} x = 4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 4 \\ 16 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 4 \\ y \in \{-3 ; 3\} \end{cases}$

إذن : تقاطع (S) و (P_1) هو المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين :

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z \in IR \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z \in IR \end{cases}$

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و المستوي (P_2) ذو المعادلة $x = -5$

إذن : $\begin{cases} x = -5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = -5 \\ 25 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$

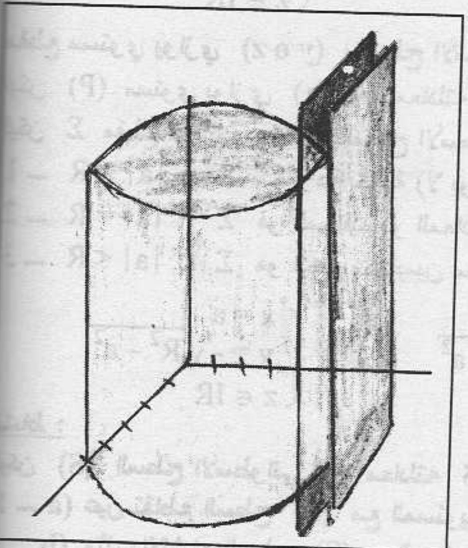
منه : تقاطع (S) و المستوي (P_2) ذو المعادلة $x = -5$ هو المستقيم ذو التمثيل الوسيطي

$\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \\ z \in IR \end{cases}$

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و المستوي (P_3) ذو المعادلة $x = 7$

إذن : $\begin{cases} x = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 7 \\ 49 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 7 \\ y^2 = -24 \end{cases}$ مستحيل

إذن : السطح (S) لا بقطع المستوي ذو المعادلة $x = 7$



2 ـ $\begin{cases} x = k \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = k \\ k^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = k \\ y^2 = 25 - k^2 \end{cases}$

المناقشة :

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - k^2$		−	0	+	0	−	

الحالة (1) $k \in \{-5 ; 5\}$ الجملة تكافئ $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$

إذن : (S) و (P) يتقاطعان في مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$

الحالة (2) $k \in]-\infty ; -5[\cup]5 ; +\infty[$ الجملة لا تقبل حلول

إذن : (S) و (P) لا يتقاطعان .

الحالة (3) $k \in]-5\,;\,5[$ الجملة تكافئ $\begin{cases} x = k \\ y = \pm\sqrt{25-k^2} \end{cases}$

إذن : المستوي (P) و (S) يتقاطعان في مستقيمين تمثيلاهما الوسيطيين

$\begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25-k^2} \end{cases}$ و $\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25-k^2} \end{cases}$

3 ــ a) لتكن $M(x\,;\,y\,;\,z)$ نقطة من (D_k) إذن : $\begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{25-k^2} \end{cases}$

منه : $x^2 + y^2 = 25 - k^2 + k^2$

أي : $x^2 + y^2 = 25$ منه $M \in (S)$ إذن : $(D_k) \subset (S)$

لتكن $N(x\,;\,y\,;\,z)$ نقطة من (T_k) إذن : $\begin{cases} x = k \\ y = -\sqrt{25-k^2} \end{cases}$

منه : $x^2 + y^2 = 25 - k^2 + k^2$

أي : $x^2 + y^2 = 25$ منه $N \in (S)$ إذن : $(T_k) \subset (S)$

نتيجة : كل من (D_k) و (T_k) محتويان في (S)

b) لتكن $M(x\,;\,y\,;\,z)$ نقطة من (P) إذن : $x^2 + y^2 = 25$

منه $\begin{cases} x = k \\ k^2 + y^2 = 25 \\ -5 \le k \le 5 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = k \\ y^2 = 25 - k^2 \\ -5 \le k \le 5 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = k \\ y = \pm\sqrt{25-k^2} \\ -5 \le k \le 5 \end{cases}$

أي $M \in (D_k) \cup (T_k)$

منه : $(S) \subset ((D_k) \cup (T_k))$

نتيجة : $(S) \subset ((D_k) \cup (T_k))$ و $((D_k) \cup (T_k)) \subset (S)$

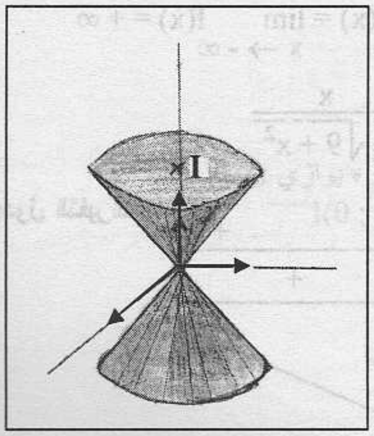
إذن : $(S) = (T_k) \cup (D_k)$ و هو المطلوب

2 ــ سطح مخروط دوراني

تعريف :

I نقطة من المحور (oz) . (C) دائرة من مستوي موازي للمستوي (x o y)
مركزها I مجموعة المستقيمات التي تمر من النقطة o و تشمل نقطة من الدائرة (C)
تسمى سطح المخروط الدوراني ذو القاعدة (C) و الرأس 0
كل مستقيم من هذه المستقيمات هو مولدا لهذا السطح المخروطي الدوراني

الانشاء :



معادلة سطح المخروط الدوراني

سطح المخروط الدوراني الذي محوره (oz) و قاعدته الدائرة (C) ذات المركز $I(0\,;\,0\,;\,a)$ و نصف القطر R و الذي رأسه o هو مجموعة النقط $M(x\,;\,y\,;\,z)$ من الفضاء حيث $x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{a}\right)^2 z^2$

ملاحظة : العكس صحيح حيث مجموعة النقط $M(x\,;\,y\,;\,z)$ من الفضاء التي تحقق $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ حيث $k \neq 0$ هي سطح مخروط دوراني رأسه o و قاعدته الدائرة (C) ذات المركز $I(0\,;\,0\,;\,1)$ و نصف القطر $|k|$ التي تقع على السطح $z = 1$ (بوضع $a = 1$ فإن $R = k$)

مقطع سطح مخروط دوراني بمستوي يوازي (x o y)

ليكن (P) مستوي يوازي (x o y) معادلته $z = t$ حيث $t \in IR$

مقطع المستوي (P) بسطح المخروط الدوراني الذي رأسه o و محوره (oz) هو :

a) النقطة $O(0 ; 0 ; 0)$ إذا كان $t = 0$

b) دائرة ذات المركز $I(0 ; 0 ; t)$ من المستوي (P) إذا كان $t \neq 0$

نشاط :

ليكن (C) السطح المخروطي الدوراني ذو المعادلة $x^2 + y^2 = 9z^2$

1 ـ بين أن تقاطع (C) مع المستوي (P) ذو المعادلة $z = 2$ هو دائرة يطلب معادلتها في المستوي (p) و مركزها .

2 ـ لتكن A نقطة ذات الاحداثيات $(3 ; 0 ; 0)$ و (Q) المستوي ذو المعادلة $x = 3$. أكتب في المعلم $(A ; J ; K)$ للمستوي (Q) معادلة تقاطع (C) مع (Q)

3 ـ مثل بيانيا هذا التقاطع في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

__الحـل :__

1 ـ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9z^2 \\ z = 2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ z = 2 \end{cases}$

و هي معادلة دائرة مركزها $I(0 ; 0 ; 2)$ في المستوي ذو المعادلة $z = 2$

و نصف قطرها $\sqrt{36} = 6$

2 ـ $\begin{cases} x = 3 \\ x^2 + y^2 = 9z^2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 3 \\ 9 + y^2 = 9z^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 3 \\ z^2 = \dfrac{9 + y^2}{9} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 3 \\ z = \pm \dfrac{\sqrt{9 + y^2}}{3} \end{cases}$

نتيجة : تقاطع المستوي (Q) و (C) هو اتحاد المنحنيين ذو المعادلتين

$z = \dfrac{\sqrt{9 + y^2}}{3}$ و $z = \dfrac{-\sqrt{9 + y^2}}{3}$ في المستوي (Q)

الانشاء : بدراسة تغيرات الدالة $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 + x^2}}{3}$ كمايلي :

$D_f = IR$

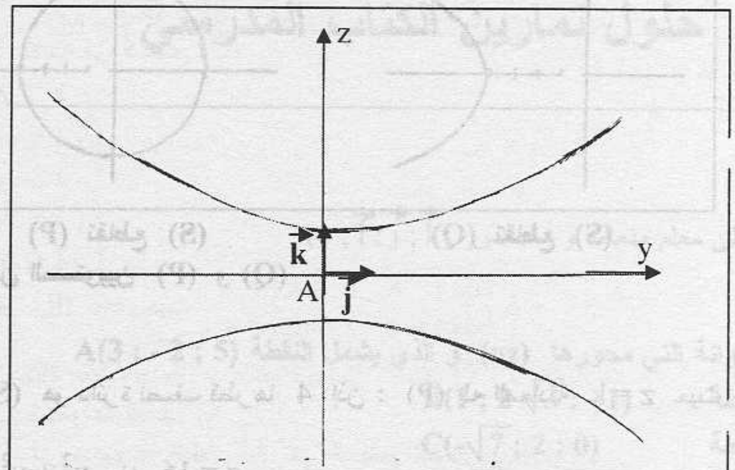
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = \dfrac{x}{3\sqrt{9 + x^2}}$ من اشارة x

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ملاحظة : برسم منحنى الدالة f يمكن استنتاج منحنى الدلة g حيث $g(x) = \dfrac{-\sqrt{x^2 + 9}}{3}$ بالتناظر بالنسبة إلى محور الفواصل (oy) كما يلي :



3 ـــ المجسم المكافئ

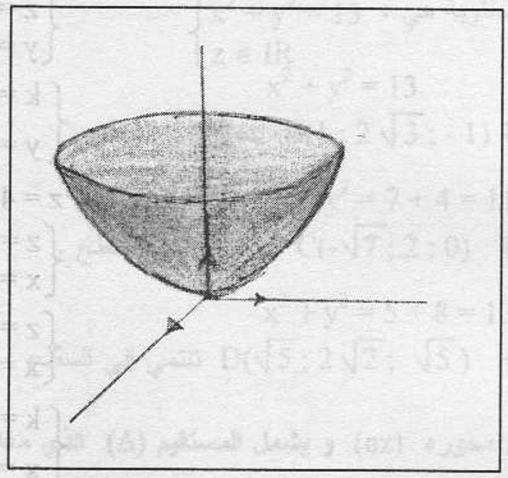
تعريف (1)

f دالة عددية لمتغيرين في معلم للفضاء . التمثيل البياني لمجموعة النقط M ذات الاحداثيات $(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث $z = f(x ; y)$ يسمى المساحة التي معادلتها $z = f(x ; y)$

تعريف (2)

في الفضاء المنسوب إلى معلم ، المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$ تسمى مجسم مكافئ محوره (oz)

الانشاء :



نتائج : لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$ (مجسم مكافئ)

(1) مقطع المساحة (S) بالمستوي ذو المعادلة $x = a$ أو $y = a$ هو قطع مكافئ محوره يوازي (oz)

(2) مقطع المساحة (S) بالمستوي ذو المعادلة $z = a$ هو دائرة مركزها النقطة $I(0 ; 0 ; a)$

4 ـــ المجسم الزائدي

تعريف :

في الفضاء المنسوب إلى معلم ، المساحة (S) التي معادلتها $z = x\,y$ تسمى مجسم زائدي

نتائج : ليكن (S) مجسم زائدي معادلته $z = x\,y$

(1) مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة $x = a$ أو $y = a$ هو مستقيم

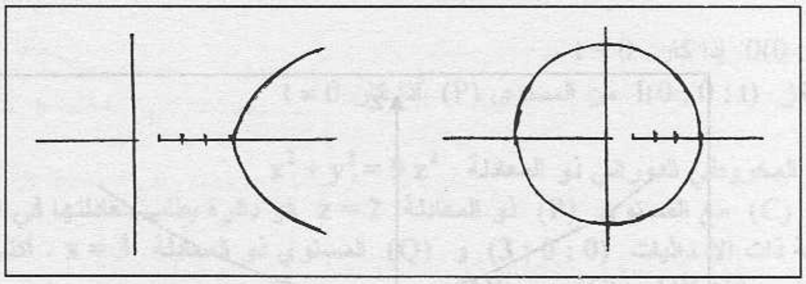
(2) مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة $z = a$ هو إما قطع زائد أو اتحاد المستقيمين (ox) و (oy)

نشاط :

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = x^2 + y^2$

(P) و (Q) مستويان كل منهما يوازي $(x\,o\,y)$ أو $(x\,o\,z)$ أو $(y\,o\,z)$

تقاطع (P) و (Q) مع (S) ممثل في الشكلين التاليين :



(S) تقاطع (Q) (S) تقاطع (P)

أكتب المعادلة الممكنة لكل من المستويين (P) و (Q)

<u>الحـــل</u> :

a) المستوي (P)

حسب الشكل فإن $(S) \cap (P)$ هو دائرة نصف قطرها 4 إذن : (P) له المعادلة $z = k$ حيث $x^2 + y^2 = (4)^2$

أي $x^2 + y^2 = 16$

لكن (S) له المعادلة $x^2 + y^2 = z$ منه $z = 16$

نتيجة : معادلة المستوي (P) هي $z = 16$ (يوازي $(x o y)$)

b) المستوي (Q)

حسب الشكل فإن $(S) \cap (Q)$ هو قطع مكافئ إذن معادلة المستوي (Q) هي إما $y = k$ أو $x = k$

من أجل $y = k$ نحصل على : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = k \end{cases}$

منه : $\begin{cases} z = x^2 + k^2 \\ y = k \end{cases}$

أي : $\begin{cases} k = \pm\sqrt{z - x^2} \\ y = k \end{cases}$

حسب الشكل فإن ذروة القطع المكافئ تحقق $z = 4$ منه $k = \pm 2$

من أجل $x = k$ نحصل على : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = k \end{cases}$

أي $\begin{cases} z = k^2 + y^2 \\ x = k \end{cases}$

أي $\begin{cases} k = \pm\sqrt{z - y^2} \\ x = k \end{cases}$

حسب الشكل فإن ذروة القطع المكافئ تحقق $z = 4$ منه $k = \pm 2$

نتيجة : المعادلات الممكنة للمستوي (Q) هي :

$x = 2$ ؛ $x = -2$ ؛ $y = 2$ ؛ $y = -2$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين ننسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

التمرين ـ 1

1 ـ أكتب معادلة لسطح الأسطوانة التي محورها (oz) و الذي يشمل النقطة $A(3 ; -2 ; 5)$

2 ـ هل هذا السطح يشمل النقطة $B(1 ; 2\sqrt{3} ; -1)$

3 ـ هل هذا السطح يشمل النقطة $C(-\sqrt{7} ; 2 ; 0)$

4 ـ هل هذا السطح يشمل النقطة $D(\sqrt{5} ; 2\sqrt{2} ; \sqrt{5})$

الحـل ـ 1

1 ـ السطح الأسطواني محوره (oz) إذن معادلته من الشكل $x^2 + y^2 = k^2$ حيث k هو نصف قطر قاعدته

بما أن النقطة $A(3 ; -2 ; 5)$ تنتمي إلى السطح فإن : $(3)^2 + (-2)^2 = k^2$

أي : $k^2 = 13$

نتيجة : معادلة السطح الأسطواني المطلوبة هي : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ z \in IR \end{cases}$

2 ـ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 13$

منه : النقطة $B(1 ; 2\sqrt{3} ; -1)$ تنتمي إلى السطح .

3 ـ $\begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = 2 \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 7 + 4 = 11$

إذن النقطة $C(-\sqrt{7} ; 2 ; 0)$ لا تنتمي إلى السطح .

4 ـ $\begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ إذن : $x^2 + y^2 = 5 + 8 = 13$

منه : النقطة $D(\sqrt{5} ; 2\sqrt{2} ; \sqrt{5})$ تنتمي إلى السطح .

التمرين ـ 2

أكتب معادلة السطح الأسطواني الذي محوره (oz) و يشمل المستقيم (Δ) الذي معادلته $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$

الحـل ـ 2

السطح الأسطواني محوره (oz) إذن : معادلته $\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ z \in IR \end{cases}$

بما أن السطح يشمل نقط المستقيم ذو المعادلة $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$ فإن كل النقط ذات الاحداثيات $(-4 ; 3 ; z)$ تحقق معادلة السطح الأسطواني .

إذن : $(-4)^2 + (3)^2 = k^2$

أي : $k^2 = 25$

نتيجة : معادلة السطح الأسطراني هي $x^2 + y^2 = 25$

التمرين ـ 3

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء حيث $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

1 ـ بين أن النقط M تقع على سطح أسطواني (C) محوره (oz) و نصف قطر قاعدته 1

2 ـ هل مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ لما يمسح t مجموعة الأعداد الحقيقية IR هي السطح الأسطواني (C) ؟

الحـل ـ 3

1 ـ معادلة السطح الأسطواني (C) الذي محوره (oz) و نصف قطر قاعدته 1 تكتب من الشكل : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z \in IR \end{cases}$

من أجل $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ فإن : $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

إذن : $M \in (C)$

2 ـ لتكن $N(x ; y ; z)$ نقطة من السطح (C)

إذن : $x^2 + y^2 = 1$

منه : $\begin{cases} -1 \le x^2 \le 1 \\ -1 \le y^2 \le 1 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$

إذن : يوجد على الأقل $t \in IR$ حيث $\begin{cases} \cos t = x \text{ أو } \sin t = x \\ \cos t = y \text{ أو } \sin t = y \end{cases}$

منه لما t يتغير في IR فإن x و y يتغيران على المجال $[-1 ; 1]$

إذن : (C) جزء من مجموعة النقط M

نتيجة : لما t يمسح IR فإن مجموعة النقط M هي السطح الأسطواني (C)

التمرين ــ 4

(C) هو السطح الأسطواني الذي محوره (oz) و يشمل النقطة $A(1 ; 2 ; 3)$

1 ــ عين معادلة السطح (C)

2 ــ ميز مقاطع السطح (C) بالمستويات التي معادلاتها :

a) $x = 2$ b) $y = -3$ c) $z = -4$

الحـل ــ 4

1 ــ السطح الأسطواني (C) محوره (oz) إذن معادلته $x^2 + y^2 = k^2$

إذن $A \in (C)$: $(1)^2 + (2)^2 = k^2$

منه : $k^2 = 5$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي : $x^2 + y^2 = 5$

2 ــ a) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $x = 2$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 4 + y^2 = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

نتيجة : تقاطع (C) و المستوي (P) ذو المعادلة $x = 2$ هو اتحاد المستقيمين ذو التمثيلين الوسيطيين :

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

b) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $y = -3$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 9 + y^2 = 5 \\ y = -3 \end{cases}$ مستحيل

نتيجة : السطح (C) لا يقطع المستوي (Q) ذو المعادلة $y = -3$

c) ليكن (R) المستوي ذو المعادلة $z = -4$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = -4 \end{cases}$ إذن : تقاطع السطح (C) و المستوي (R) هي الدائرة التي مركزها $(0 ; 0 ; -4)$

و نصف قطرها $\sqrt{5}$ من المستوي (R) ذو المعادلة $z = -4$

التمرين ــ 5

(C) هو السطح المخروطي الدوراني الذي رأسه o و محوره (oz) و الذي يشمل النقطة $A(1 ; 2 ; 3)$

1 ــ عين معادلة للسطح (C)

2 ــ ميز مقاطع السطح (C) بالمستويات التي معادلاتها :

a) $z = 1$ b) $z = -2$ c) $x = y$

الحــل ــ 5

1 ــ (C) سطح مخروط دوراني محوره (oz) و رأسه o إذن له المعادلة $x^2 + y^2 = k^2 z^2$

$A \in (C)$ إذن : $(1)^2 + (2)^2 = k^2 (3)^2$.

أي $9 k^2 = 5$ منه $k^2 = 5/9$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي : $x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2$

2 ــ a) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $z = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} \\ z = 1 \end{cases}$$

إذن : $(C) \cap (P)$ هي الدائرة التي مركزها $(0 ; 0 ; 1)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{3}$ من المستوي (P)

b) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $z = -2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ z = -2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} (4) \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{20}{9} \\ z = -2 \end{cases}$$

إذن : $(C) \cap (Q)$ هي الدائرة التي مركزها $(0 ; 0 ; -2)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{20}}{3}$ من المستوي (Q)

c) ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $x = y$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + x^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} 2x^2 = \frac{5}{9} z^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} x^2 = \frac{5}{18} z^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} x = \pm z\sqrt{\frac{5}{18}} \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} x = z\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = z\sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -z\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = -z\sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases}$$

نتيجة : $(C) \cap (\pi)$ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين كمايلي :

$$\begin{cases} x = t\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = t\sqrt{\frac{5}{18}} \\ z = t \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = -t\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = -t\sqrt{\frac{5}{18}} \\ z = t \end{cases} \text{ حيث } t \in IR$$

التمرين ــ 6

(D) هو المستقيم الذي يمر بالمبدأ o و شعاع توجيهه $\vec{u}$ حيث : $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$

ليكن (C) سطح المخروط الدوراني الذي محوره (oz) و يحوي المستقيم (D)

1 ــ عين معادلة السطح (C).

2 ــ عين العدد الحقيقي الموجب a حتى يكون مقطع (C) بالمستوي الذي معادلته $z = a$ هو دائرة (Γ) نصف

قطرها 2 حيث يطلب احداثيات مركزها .

الحـل – 6

1 – $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{k}$ إذن $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو : $\begin{cases}x=2t\\y=0\\z=-t\end{cases}$ حيث $t\in IR$

(C) سطح مخروطي دوراني محوره (oz) إذن له المعادلة : $x^2+y^2=k^2z^2$

بما أن (D) محتوى في (C) فإن : $(2t)^2+(0)^2=k^2(-t)^2$

أي : $4t^2=k^2t^2$

إذن : $k^2=4$

نتيجة : معادلة السطح (C) هي $x^2+y^2=4z^2$

2 – ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $z=a$ حيث $a>0$

$\begin{cases}x^2+y^2=4z^2\\z=a\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x^2+y^2=4a^2\\z=a\end{cases}$

إذن : $(C)\cap(\pi)$ هو الدائرة التي مركزها $(0;0;a)$ و نصف قطرها $2|a|$ من المستوي (π)

نتيجة : يكون $(C)\cap(\pi)$ دائرة نصف قطرها 2 إذا و فقط إذا كان $2|a|=2$ أي $2a=2$ لأن $a>0$

منه : $a=1$

إذن : (Γ) مركزها $I(0;0;1)$ من أجل $a=1$

التمرين – 7

(P) و (Q) مستويان معادلاتهما على الترتيب $x+y\sqrt{3}-2z=0$ و $2x-z=0$

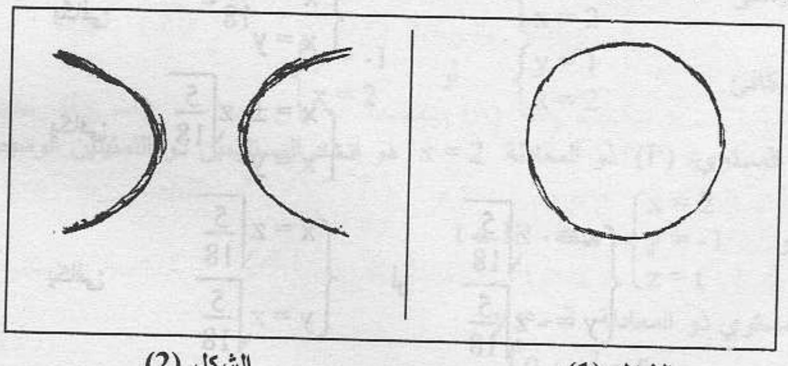
1 – أثبت أن (P) و (Q) ليسا متوازيان .

2 – أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (P) و (Q)

3 – ليكن (H) سطح المخروط الدوراني الذي محوره (ox) و يشمل المستقيم (D) كمولد

بين أن معادلة (H) هي : $y^2+z^2=7x^2$

4 – إليك الشكلين التاليين الممثلين لتقاطع (H) مع مستويات موازية لمحاور الاحداثيات .



الشكل (2)   **الشكل (1)**

عين في كل حالة من الحالتين معادلة للمستويات الممكنة :

5 – بين أن المعادلة $x^2\equiv 3[7]$ ذات المجهول الصحيح x لا تقبل حلولا في Z

6 – بين صحة الخاصية التالية : لكل عددين صحيحين a و b فإن إذا كان 7 يقسم a^2+b^2

فإن 7 يقسم a و 7 يقسم b

7 – a ، b ، c أعداد صحيحة غير معدومة .

بين أنه إذا كانت $A(a;b;c)$ نقطة من (H) فإن الأعداد a ، b ، c مضاعفات العدد 7

الحـل – 7

1 – $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (Q)

$\frac{2}{1} \neq \frac{0}{\sqrt{3}}$ إذن : $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ ليسا متوازيان .
منه المستويان (P) و (Q) ليسا متوازيان

2 ـ $\begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2(2x) = 0 \\ z = 2x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y\sqrt{3} = 3x \\ z = 2x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y = x\sqrt{3} \\ z = 2x \end{cases}$

نتيجة : المستقيم (D) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = t \\ y = t\sqrt{3} \\ z = 2t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

3 ـ (H) سطح المخروط الدوراني ذو المحور (ox) إذن (H) له المعادلة $y^2 + z^2 = k^2 x^2$ حيث $k \in IR$
(D) مولد للسطح (H) إذن : كل نقطة من (D) تحقق معادلة (H)
منه : $(x\sqrt{3})^2 + (2x)^2 = k^2 x^2$
أي : $7x^2 = k^2 x^2$
أي : $k^2 = 7$
نتيجة : معادلة (H) هي : $y^2 + z^2 = 7x^2$

4 ـ الشكل (1) : تقاطع (H) مع المستوي هو دائرة إذن : المستوي موازي لـ (y o z) و معادلته من الشكل $x = k$ حيث $k \neq 0$
الشكل (2) : تقاطع (H) مع المستوي هو قطع زائد إذن المستوي موازي لأحد المستويين (x o y) أو (x o z) و معادلته إما $y = k$ أو $z = k$ حيث $k \neq 0$

5 ـ

$x \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^2 \not\equiv 3[7]$
إذن : المعادلة $x^2 \equiv 3[7]$ لا تقبل حلولا في Z

6 ـ ليكن a و b عددين صحيحين .
حسب السؤال 5 فإن :
$a^2 \equiv 0[7]$ أو $a^2 \equiv 1[7]$ أو $a^2 \equiv 2[7]$ أو $a^2 \equiv 4[7]$
و $b^2 \equiv 0[7]$ أو $b^2 \equiv 1[7]$ أو $b^2 \equiv 2[7]$ أو $b^2 \equiv 4[7]$
منه الحالات الممكنة التالية :

$\oplus$

$a^2 \equiv ?[7]$ \ $b^2 \equiv ?[7]$	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

نتيجة : يكون $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $a^2 \equiv 0[7]$ و $b^2 \equiv 0[7]$
و حسب السؤال (5) فإن $a^2 \equiv 0[7]$ يكافئ $a \equiv 0[7]$ و $b^2 \equiv 0[7]$ يكافئ $b \equiv 0[7]$

إذن : $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$ يكافئ $\begin{cases} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{cases}$

7 ــ A نقطة من (H) إذن، احداثياتها تحقق المعادلة $y^2 + z^2 = 7x^2$

أي : $b^2 + c^2 = 7a^2$

منه : $b^2 + c^2 \equiv 0[7]$

إذن : $\begin{cases} b \equiv 0[7] \\ c \equiv 0[7] \end{cases}$ حسب السؤال (6)

أي $\begin{cases} b = 7n \\ c = 7m \end{cases}$ حيث n و m أعداد صحيحة

بالتعويض في معادلة (H) نحصل على : $(7n)^2 + (7m)^2 = 7a^2$

أي : $7n^2 + 7m^2 = a^2$

أي : $7(n^2 + m^2) = a^2$

إذن : 7 يقسم a^2

منه : $a \equiv 0[7]$ حسب السؤال 5

أي $a = 7q$

نتيجة : إذا كانت $A(a ; b ; c)$ نقطة من (H) فإن : $a \equiv 0[7]$ و $b \equiv 0[7]$ و $c \equiv 0[7]$

التمرين ــ 8

لتكن النقط $A(0 ; 5 ; 5)$ و $B(0 ; 0 ; 10)$

نسمي (π) المستوي الذي معادلته $x = 0$ و لتكن (C) دائرة من (π) مركزها B و تشمل A

1 ــ بين أن المستقيم (OA) مماس للدائرة (C)

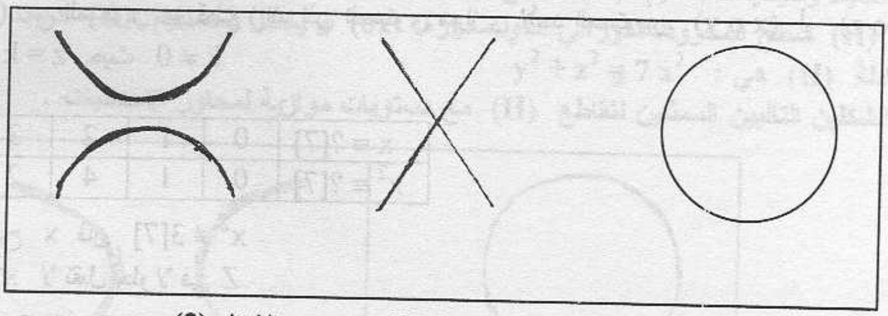
نسمي (S) الكرة الناتجة عن دوران (C) حول المحور (oz)

نسمي (T) سطح المخروط الدوراني الناتج عن دوران (OA) حول المحور (oz)

2 ــ بين أن معادلة (T) هي $x^2 + y^2 = z^2$

3 ــ عين تقاطع (T) و (S) يطلب الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة

4 ــ أحد الأشكال التالية يمثل تقاطع (T) مع مستوي معادلته $x = 1$ أي هذه الأشكال مناسب ؟



الشكل (1)   الشكل (2)   الشكل (3)

الحــل ــ 8

1 ــ $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

لدينا : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 - 5(5) + 5(5) = 0$ إذن : $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$

لدينا (OA) و (AB) متعامدان إذن : المستقيم (OA) هو مماس للدائرة (C)

2 ــ (T) مخروط دوراني محوره (oz) إذن : معادلة (T) هي $x^2 + y^2 = k^2 z^2$ حيث $k \in IR$

$A \in (T)$ إذن : $(0)^2 + (5)^2 = k^2 (5)^2$

أي : $25 = 25k^2$

منه : $k^2 = 1$

نتيجة : معادلة (T) هي : $x^2 + y^2 = z^2$

3 ــ لنعين معادلة سطح الكرة (S) :

نصف القطر : $AB = \sqrt{0 + 25 + 25} = \sqrt{50}$

منه معادلة (S) : $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 10)^2 = (\sqrt{50})^2$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 100 = 50$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 50 = 0$

التقاطع : لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة مشتركة بين (S) و (T) إذن :

$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z^2 + z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 2z^2 - 20z + 50 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + z^2 = z^2 \\ z^2 - 10z + 25 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (z-5)^2 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 5 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 5 \end{cases}$ معادلة دائرة مركزها $(0 ; 0)$ و نصف قطرها 5 في المستوي ذو المعادلة $z = 5$

نتيجة : (T) و (S) يتقاطعان في دائرة مركزها $(0 ; 0 ; 5)$ و نصف قطرها 5 من المستوي ذو المعادلة $z = 5$

4 ـــ لنبحث تحليليا عن تقاطع (T) و المستوي ذو المعادلة $x = 1$:

$\begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 1 \\ 1 + y^2 = z^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 1 \\ z = \pm\sqrt{1 + y^2} \end{cases}$ و هي معادلة قطع زائد في المستوي ذو المعادلة $x = 1$

نتيجة : الشكل المناسب هو الشكل (3)

<u>التمرين ـــ 9</u>

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x ; y)$

من أجل كل عدد حقيقي k تقاطع (S) مع المستوي ذو المعادلة $z = k$ هو المستقيم الذي يشمل $A(0 ; 1-k ; k)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

عين معادلة ديكارتية لـــ (S)

<u>الحـــل ـــ 9</u>

لنبحث عن التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يشمل $A(0 ; 1-k ; k)$ و $\vec{u}$ شعاع توجيه له كـ ايلي :

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 + k \\ z - k \end{pmatrix}$

منه : $\begin{cases} x = t \\ y - 1 + k = 3t \\ z - k = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 - k \\ z = k \end{cases}$ حيث $t \in IR$

لنبحث الأن عن عبارة $f(x ; y)$:

$\begin{cases} z = f(x ; y) \\ z = k \end{cases}$ إذن : $f(x ; y) = k$

نتيجة : يكفي أن نبحث عن عبارة k بدلالة x و y

لدينا $\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 - k \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 3x = 3t \\ y = 3t + 1 - k \end{cases}$

منه : $3x - y = 3t - 3t - 1 + k$

أي : $3x - y = -1 + k$

أي : $k = 3x - y + 1$

نتيجة : $f(x\,;y) = 3x - y + 1$

منه معادلة (S) هي : $z = 3x - y + 1$

ملاحظة : (S) عبارة عن مستوي معادلته $3x - y - z + 1 = 0$

التمرين ــ 10

لتكن (S) مساحة معادلتها $z = x^2$

1 ــ عين مقطع (S) بالمستويات الموازية لــ $(x\,o\,y)$

2 ــ عين مقطع (S) بالمستويات الموازية لــ $(x\,o\,z)$

الحــل ــ 10

1 ــ ليكن (π) مستوي موازي لــ $(x\,o\,y)$ إذن معادلته $z = k$ حيث $k \in IR$

$\begin{cases} z = x^2 \\ z = k \end{cases}$ تكافئ $(I)\begin{cases} x^2 = k \\ z = k \end{cases}$

نميز الحالات التالية :

الأولى : $k < 0$ الجملة (I) لا تقبل حلولا إذن : $(S) \cap (\pi) = \varnothing$

الثانية : $k = 0$ الجملة (I) تكافئ $\begin{cases} x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

إذن : $(S) \cap (\pi)$ هو المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

الثالثة : $k > 0$ الجملة (I) تكافئ $\begin{cases} x^2 = (\sqrt{k})^2 \\ z = k \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = \sqrt{k} \\ z = k \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = -\sqrt{k} \\ z = k \end{cases}$

إذن : $(S) \cap (\pi)$ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين هما

$\begin{cases} x = \sqrt{k} \\ y = t \\ z = k \end{cases}$ و $\begin{cases} x = -\sqrt{k} \\ y = t \\ z = k \end{cases}$ حيث $t \in IR$

2 ــ ليكن (Q) المستوي الموازي لــ $(x\,o\,z)$ إذن معادلته $y = k$

$\begin{cases} z = x^2 \\ y = k \end{cases}$ إذن : $(S) \cap (Q)$ هو القطع المكافئ الذي معادلته $z = x^2$ من المستوي ذو المعادلة $y = k$ ،

التمرين ــ 11

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = x^2 + xy$

1 ــ بين أن مقطع (S) بالمستوي ذو المعادلة $z = 0$ هو اتحاد مستقيمين يطلب تعيينهما .

2 ــ أدرس مقاطع (S) بالمستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k \in IR^*$

الحــل ــ 11

1 ــ $\begin{cases} z = x^2 + xy \\ z = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x(x + y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

نتيجة : تقاطع (S) و المستوي ذو المعادلة $z = 0$ هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين

$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

2 ــ ليكن (π) المستوي ذو المعادلة $z = k$ حيث $k \in IR^*$

$\begin{cases} z = x^2 + xy \\ z = k \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + xy = k \\ z = k \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} xy = k - x^2 \\ z = k \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ k = 0 \\ z = k \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = \dfrac{k - x^2}{x} \\ z = k \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = \dfrac{k - x^2}{x} \\ z = k \end{cases}$ لأن $k \neq 0$

نتيجة : $(S) \cap (\pi)$ هو المنحنى ذو المعادلة $y = \dfrac{k - x^2}{x}$ في المستوي ذو المعادلة $z = k$

التمرين ــ 12

نعتبر المساحة (S) التي معادلتها $z = \sqrt{|x - y|}$

أكتب معادلة مستوي التناظر لــ (S)

الحـل ــ 12

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من (S) إذن $z = \sqrt{|x - y|}$

لكن $\sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|}$

إذن : النقطة $M'\left(y\,;x\,;\sqrt{|y - x|}\right)$ تنتمي إلى (S)

لنثبت أن النقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة إلى المستوي (π) الذي معادلته $x - y = 0$

لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي لــ (π)

من جهة أخرى : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y - x \\ x - y \\ \sqrt{|y - x|} - \sqrt{|x - y|} \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y - x \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$

منه $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} (y - x) \times (1) \\ (y - x) \times (-1) \\ (y - x) \times (0) \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

نتيجة : $\overrightarrow{MM'}$ شعاع ناظمي لــ (π) أي $\overrightarrow{MM'}$ عمودي على (π)

لتكن w منتصف القطعة $[MM']$ إذن :

$w\left(\dfrac{x + y}{2}\,;\ \dfrac{x + y}{2}\,;\ \dfrac{\sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - x|}}{2}\right)$ أي $w\left(\dfrac{x + y}{2}\,;\ \dfrac{x + y}{2};\ \sqrt{|x - y|}\right)$

إذن : $w \in (\pi)$ لأن $\dfrac{x + y}{2} - \dfrac{x + y}{2} = 0$ (تحقق معادلة المستوي (π))

خلاصة : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MM'} \text{ شعاع ناظمي لـ } (\pi) \\ \text{منتصف } [MM'] \text{ تنتمي إلى } (\pi)\end{array}\right.$

إذن : M' هي نظيرة M بالنسبة إلى (π)

منه : المستوي (π) ذو المعادلة $x - y = 0$ هو مستوي تناظر لـ (S)

التمرين ــ 13

لتكن f دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين x و y معرفة كما يلي :

$f(x\,;y) = x\,e^{-x^2-y^2} + 3$ حيث e هو أساس اللوغاريتم النيبيري

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x\,;y)$

1 ــ بين أن (S) تقبل المستوي ذو المعادلة $y = 0$ كمستوي تناظر .

2 ــ لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = f(x\,;0)$

أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج القيمة الحدية العظمى لـ (S)

الحـل ــ 13

1 ــ ليكن (π) المستوي الذي معادلته $y = 0$

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من المساحة (S) إذن : $z = x\,e^{-x^2-y^2} + 3$

لدينا نظيرة M بالنسبة إلى المستوي (π) هي $M'(x\,;-y\,;z)$

أي $M'(x\,;-y\,;x\,e^{-x^2-y^2} + 3)$

منه $M' \in (S)$ إذن : (π) هو مستوي تناظر لـ (S)

2 ــ تغيرات الدالة g :

$g(x) = f(x\,;0)$ يكافئ $g(x) = x\,e^{-x^2+0} + 3$

يكافئ $g(x) = x\,e^{-x^2} + 3$

g معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x\,e^{-x^2} + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\,e^{-x^2} + 3 = 3$$

$$g'(x) = e^{-x^2} - 2x^2\,e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$1 - 2x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	$\searrow$	$3 - \frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$3 + \frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	3

$$g\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} + 3 = \frac{-1}{\sqrt{2\,e}} + 3$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-1/2} + 3 = \frac{1}{\sqrt{2\,e}} + 3$$

نتيجة : الدالة g تقبل قيمة حدية عظمى على المجال IR من أجل $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و قيمتها $3 + \frac{1}{\sqrt{2\,e}}$

منه : المساحة (S) تبلغ قيمة حدية عظمى من أجل $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

أي $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}-y^2} + 3$

أي $z = \frac{1}{\sqrt{2e}} e^{-y^2} + 3$

منه يكون z أكبر ما يسكن من أجل $y = 0$ (بدراسة الدالة $(p(y) = e^{-y^2}$)

أي $z = \frac{1}{\sqrt{2e}} + 3$

خلاصة : (S) تبلغ قيمة حدية عظمى عند النقطة $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2e}} + 3\right)$

<u>التمرين ــ 14</u>

لتكن A نقطة احداثياتها $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$

نعتبر (S) المساحة التي معادلتها $z = (x-1)^2 + (y-3)^2$

1 ــ أكتب معادلة (S) في لمعلم $(A\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$

2 ــ استنتج طبيعة (S) و عناصرها المميزة .

<u>الحــل ــ 14</u>

1 ــ نضع $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-3 \\ Z = z \end{cases}$

إذن : معادلة (s) في المعلم $(A\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$ هي : $Z = X^2 + Y^2$

2 ــ (S) لها المعادلة $Z = X^2 + Y^2$ إذن : (S) هي مجسم مكافئ محوره المستقيم الموازي للمحور (oz) و الذي يشمل النقطة $A(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$

<u>التمرين ــ 15</u>

نعتبر الدالة f حيث $f(x\ ;\ y) = \ln|y - x^2|$

1 ــ عين الثنائيات $(x\ ;\ y)$ من IR^2 حتى تكون من أجلها f غير معرفة

2 ــ لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = f(x\ ;\ y)$

أدرس مقاطع المساحة (S) مع المستوي ذو المعادلة $z = k$ حيث $k \in IR^*$

<u>الحــل ــ 15</u>

1 ــ f غير معرفة يكافئ $y - x^2 = 0$

يكافئ $y = x^2$

نتيجة : f غير معرفة من أجل كل الثنائيات من الشكل $(x\ ;\ x^2)$ حيث $x \in IR$

2 ــ ليكن (π) المستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k \in IR^*$

$\begin{cases} z = \ln|y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} k = \ln|y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} e^k = |y - x^2| \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} e^k = y - x^2 \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} e^k = x^2 - y \\ z = k \\ y \neq x^2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} y = e^k + x^2 \\ z = k \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = x^2 - e^k \\ z = k \end{cases}$

نتيجة : $(S) \cap (\pi)$ هو اتحاد المنحنيين اللذين معادلاتاهما $y = x^2 + e^k$ و $y = x^2 - e^k$ من المستوي $z = k$

<u>التمرين ــ16</u>

لتكن (T) المساحة التي معادلتها $z = y\,x^2$ حيث $-1 \le x \le 1$ و $-1 \le y \le 1$

1 ــ a) تحقق أن إذا كانت $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ نقطة من (T) فإن $N(-x\ ;\ y\ ;\ z)$ نقطة من (T)

ثم استنتج مستوي تناظر لــ (T)

b) بين أن النقطة $O(0\,;0\,;0)$ مركز تناظر لـ (T)

2 ــ a) ما هي طبيعة منحنيات تقاطع (T) مع المستويات الموازية لـ $(x\,o\,z)$

b) ما هي طبيعة منحنيت تقاطع (T) مع المستويات الموازية لـ $(y\,o\,z)$

3 ــ a) عين تقاطع (T) مع المستوي ذو المعادلة $z=0$

b) من أجل $k>0$ نضع K النقطة التي احداثياتها $(0\,;0\,;k)$

عين في المعلم $(k\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ معادلة منحنى التقاطع بين (T) و المستوي الذي معادلته $z=k$ حيث $k>0$

الحـل ــ 16

1 ــ a) $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من (T) إذن : $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\\ z=y\,x^2\end{cases}$

لتكن $N(-x\,;y\,;z)$ لدينا $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}-1\le -x\le 1\\ -1\le y\le 1\end{cases}$

من جهة أخرى $y(-x)^2=y\,x^2=z$

إذن : $N(-x\,;y\,;z)$ تنتمي إلى (T)

نتيجة : المستوي ذو المعادلة $x=0$ هو مستوي تناظر للمساحة (S)

b) لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من (T) إذن : $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\\ z=y\,x^2\end{cases}$

لدينا $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}-1\le -x\le 1\\ -1\le -y\le 1\end{cases}$

من جهة أخرى : $-y(-x)^2=-y\,x^2=-z$

نتيجة : النقطة $N(-x\,;-y\,;-z)$ تنتمي إلى (T)

منه النقطة $O(0\,;0\,;0)$ هي مركز تناظر لـ (T)

2 ــ a) ليكن (π) المستوي الموازي لـ $(x\,o\,z)$ معادلته $y=k$ حيث $k\in IR$

$\begin{cases}z=y\,x^2\\ -1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\\ y=k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z=k\,x^2\\ y=k\\ -1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\end{cases}$

مناقشة :

إذا كان $k\in\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ فإن $(\pi)\cap(T)=\varnothing$

إذا كان $k\in[-1\,;1]$ فإن $(\pi)\cap(T)$ هو المنحنى الذي معادلته $\begin{cases}z=k\,x^2\\ -1\le x\le 1\end{cases}$ من المستوي ذو المعادلة $y=k$

b) ليكن (Q) المستوي الموازي لـ $(y\,o\,z)$ معادلته $x=k$

$\begin{cases}z=y\,x^2\\ -1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\\ x=k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z=k^2\,y\\ -1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\\ x=k\end{cases}$

مناقشة :

إذا كان $k\in\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ فإن $(T)\cap(Q)=\varnothing$

إذا كان $k\in[-1\,;1]$ فإن $(T)\cap(Q)$ هو القطعة المستقيمة ذات التمثيل الوسيطي : $\begin{cases}x=k\\ z=k^2\,t\\ y=t\end{cases}$ حيث $t\in[-1\,;1]$

3 ــ ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $z=0$

$\begin{cases}z=y\,x^2\\ -1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\\ z=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}y\,x^2=0\\ -1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\\ z=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x=0\\ z=0\\ -1\le y\le 1\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=0\\ z=0\\ -1\le x\le 1\end{cases}$

نتيجة : $(P) \cap (T)$ هو اتحاد القطعتين المستقيمتين المعرفتين بالتمثيلين الوسيطيين

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{حيث} \quad t \in [-1 ; 1]$$

b) ليكن (R) المستوي الذي معادلته $z = k$ حيث $k > 0$

$$\begin{cases} z = y\,x^2 \\ -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \\ z = k \; ; \; k > 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} k = y\,x^2 \\ -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \\ z = k \; ; \; k > 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} k = y\,x^2 \\ -1 \le x \le 1 \\ 0 < y \le 1 \\ z = k \; ; \; k > 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{k}\,x^2 \\ -1 \le x \le 1 \; ; \; x \ne 0 \\ 0 < y \le 1 \\ z = k \; ; \; k > 0 \end{cases}$$

نتيجة : معادلة تقاطع (T) و المستوي (R) هي :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{k}\,x^2 \\ -1 \le x \le 1 \; ; \; x \ne 0 \\ 0 < y \le 1 \end{cases}$$

لندرس تغيرات الدالة $f(x) = \dfrac{1}{k}\,x^2$ على المجال $[-1 ; 1]$ حيث $k > 0$

$$f'(x) = \frac{2\,x}{k}$$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1/k$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/k$

لدينا : $\dfrac{1}{k} \le 1$ يكافئ $k \ge 1$ لأن $k > 0$

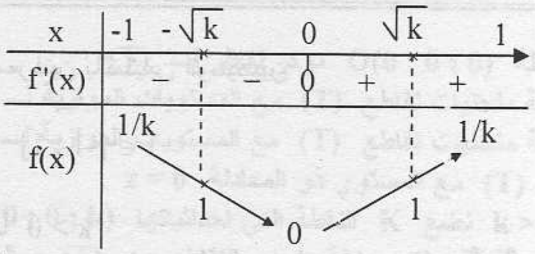
منه النتائج التالية :

1 ــ إذا كان $k \ge 1$ فإن $(T) \cap (R)$ هو قوس من المستوي (R)

معادلته $\begin{cases} y = \dfrac{1}{k}\,x^2 \\ -1 \le x \le 1 \; ; \; x \ne 0 \\ 0 < y \le 1 \end{cases}$ رأساه $A(-1 ; 1/k ; k)$ ؛ $B(1 ; 1/k ; k)$ باستثناء النقطة $K(0 ; 0 ; k)$

2 ــ إذا كان $0 < k < 1$ فإن $\dfrac{1}{k} > 1$

إذن : جدول تغيرات الدالة f يصبح :



في هذه الحالة $(R) \cap (T)$ هو قوس من المستوي (R) معادلته

$$\begin{cases} y = \frac{1}{k}x^2 \\ -\sqrt{k} \le x \le \sqrt{k} \ ; \ x \neq 0 \\ 0 < y \le 1 \end{cases}$$ ماعدا النقطة $K(0\,;0\,;k)$

التمرين 17

(C) هو سطح المخروط الدوراني الذي معادلته $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ حيث $\lambda \in IR^*$

a عدد حقيقي . نسمي Σ_a مقطع (C) بالمستوي (P_a) الذي معادلته $x = a$

و نسمي A النقطة التي احداثياتها $(a\,;0\,;0)$

1 ــ بين أن Σ_0 هو اتحاد مستقيمين (D_1) و (D_2) شعاعا توجيههما $\vec{u_1} = \lambda\,\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{u_2} = \lambda\,\vec{j} - \vec{k}$

2 ــ M نقطة من المستوي (P_a) احداثياها $(y\,;z)$ في المعلم $(A\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ و $(Y\,;Z)$ في المعلم $(A\,;\vec{u_1}\,;\vec{u_2})$

بين أن $y = \lambda Y + \lambda Z$ و $z = Y - Z$

3 ــ استنتج أن من أجل $a \neq 0$ فإن Σ_a في المعلم $(A\,;\vec{u_1}\,;\vec{u_2})$ له المعادلة :

$Y = \frac{c}{Z}$ حيث c ثابت حقيقي غير معدوم

الحــل ــ 17

1 ــ من أجل $a = 0$ فإن نقط المقطع Σ_0 هي حلول الجملة :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} y = \lambda z \\ x = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} y = -\lambda z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda t \\ z = t \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda t \\ z = t \end{cases} \text{ حيث } t \in IR$$

نتيجة : Σ_0 هو اتحاد المستقيمين اللذين تمثيلاهما الوسيطيين هما

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda t \\ z = t \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda t \\ z = t \end{cases}$$ إذن شعاعي توجيههما على الترتيب $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ ؛ $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$

أي $$\begin{cases} \vec{n_1} = o\,\vec{i} + \lambda\,\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{n_2} = o\,\vec{i} - \lambda\,\vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$ منه $$\begin{cases} \vec{n_1} = \lambda\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{n_2} = -\lambda\,j + \vec{k} \end{cases}$$

بما أن $-\vec{u_2}$ هو أيضا شعاع توجيه لأن $\vec{n_2} // -\vec{n_2}$ فإن (D_1) و (D_2) لهما أشعة التوجيه التالية

$\vec{u_1} = \lambda.\,\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{u_2} = \lambda\,\vec{j} - \vec{k}$

2 ــ (α) ...... $\overrightarrow{AM} = y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ في المعلم $(A\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

$\overrightarrow{AM} = Y\,\vec{u_1} + Z\,\vec{u_2}$ في المعلم $(A\,;\vec{u_1}\,;\vec{u_2})$

نعوض $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ بدلالة $\vec{j}$ و $\vec{k}$ فنحصل على مايلي :

$$\overrightarrow{AM} = Y(\lambda\,\vec{j} + \vec{k}) + Z(\lambda\,\vec{j} - \vec{k})$$

$$= Y\,\lambda\,\vec{j} + Y\,\vec{k} + Z\,\lambda\,\vec{j} - Z\,\vec{k}$$

$$= (Y\,\lambda + Z\,\lambda)\,\vec{j} + (Y - Z)\,\vec{k}$$

لكن، $\overrightarrow{AM} = y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

بالمطابقة نحصل على : $\begin{cases} y = Y\lambda + Z\lambda \\ z = Y - Z \end{cases}$ و هو المطلوب

3 ــ لنبحث عن Σ_a من أجل $a \neq 0$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = a \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = a \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} a^2 + (\lambda Y + \lambda Z)^2 = \lambda^2 (Y - Z)^2 \\ x = a \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} a^2 + \lambda^2 Y^2 + 2\lambda^2 YZ + \lambda^2 Z^2 = \lambda^2 Y^2 - 2\lambda^2 YZ + \lambda^2 Z^2 \\ x = a \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} a^2 = -4\lambda^2 YZ \\ x = a \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} Y = \dfrac{a^2}{-4\lambda^2 Z} \\ x = a \end{cases}$

نضع $c = \dfrac{a^2}{-4\lambda^2}$ حيث $c \neq 0$ إذن : $\begin{cases} Y = \dfrac{c}{Z} \\ x = a \end{cases}$

نتيجة : في المعلم $(A\,;\vec{u_1}\,;\vec{u_2})$ Σ_a له المعادلة $Y = \dfrac{c}{Z}$ حيث c و a أعداد حقيقية غير معدومة .

التمرين ــ18

(D) و (T) مستقيمان متعامدان و ليسا من نفس المستوي حيث (D) يشمل النقطة $A(0\,;0\,;1)$
و $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ هو شعاع توجيه له .
و (T) يشمل النقطة $B(0\,;0\,;-1)$ و $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ شعاع توجيه له .
1 ــ تحقق أن (D) و (T) متعامدان و أنهما ليس من نفس المستوي فعلا
2 ــ لتكن Σ مجموعة نقط الفضاء المتساوية البعد عن (D) و (T)
تحقق أن O تنتمي إلى Σ
3 ــ لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء
a) أحسب بعد النقطة M عند (D) و (T)
b) استنتج أن M تنتمي إلى Σ إذا و فقط إذا كان $xy + 2z = 0$
c) استنتج تقاطع Σ مع المستويات العمودية على (AB)
d) أدرس تقاطع Σ مع المستويات العمودية على المحور $(o\,;\vec{i})$ ثم المحور $(o\,;\vec{j})$

الحل ــ 18

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لــ (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لــ (T)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 - 1 + 0 = 0$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

منه : (D) عمودي على (T)

لنعين التمثيل الوسيطي لكل من (D) و (T)

$\begin{cases} x - 0 = t \\ y - 0 = t \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ منه $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ حيث $t \in IR$ هو تمثيل وسيطي لــ (D)

$\begin{cases} x - 0 = k \\ y - 0 = -k \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ منه $\begin{cases} x = k \\ y = -k \\ z = -1 \end{cases}$ حيث $k \in IR$ هو تمثيل وسيطي لــ (T)

نتيجة : لا توجد أي نقطة مشتركة بين (D) و (T) لأن نقط المستقيم (D) لها راقم $z = 1$
و نقط المستقيم (T) لها راقم $z = -1$

خلاصة : $\left.\begin{array}{l}(D) \text{ و } (T) \text{ متعامدان} \\ (D)\cap(T)=\varnothing\end{array}\right\}$ إذن : (D) و (T) ليسا من نفس المستوي

2 ـ لتكن H مسقط النقطة O على المستقيم (D) حيث $H(t\,;\,t\,;\,1)$

و K مسقط النقطة O على المستقيم (T) حيث $K(k\,;\,-k\,;\,-1)$

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{OH}\\ \vec{v}\perp\overrightarrow{OK}\end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases}\vec{u}\,.\,\overrightarrow{OH}=0\\ \vec{v}\,.\,\overrightarrow{OK}=0\end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases}1(t)+1(t)+0(1)=0\\ 1(k)-1(-k)+0(-1)=0\end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases}2t=0\\ 2k=0\end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases}t=0\\ k=0\end{cases}$$

نتيجة : $H(0\,;\,0\,;\,1)$ و $K(0\,;\,0\,;\,-1)$

منه : $OH=\sqrt{0+0+1}=1$ و $OK=\sqrt{0+0+1}=1$

إذن : بعد النقطة O عن كل من المستقيمين (D) و (T) هو 1

إذن : O تنتمي إلى Σ (نفس البعد عن (D) و عن (T))

3 ـ لتكن $M(x\,;\,y\,;\,z)$

نضع $\left\{\begin{array}{l}N(t\,;\,t\,;\,1) \text{ المسقط العمودي لـ M على (D) حيث t عدد حقيقي} \\ P(k\,;\,-k\,;\,-1) \text{ المسقط العمودي لـ M على (T) حيث k عدد حقيقي}\end{array}\right.$

$$\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}x-t\\ y-t\\ z-1\end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-k\\ y+k\\ z+1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{NM}\\ \vec{v}\perp\overrightarrow{PM}\end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases}\vec{u}\,.\,\overrightarrow{NM}=0\\ \vec{v}\,.\,\overrightarrow{PM}=0\end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases}1(x-t)+1(y-t)+0(z-1)=0\\ 1(x-k)-1(y+k)+0(z+1)=0\end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases}x-t+y-t=0\\ x-k-y-k=0\end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases}x+y=2t\\ x-y=2k\end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases}t=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\\ k=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\end{cases}$$

نتيجة : $N\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\,;\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\,;\,1\right)$ و $P\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\,;\,\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}y\,;\,-1\right)$

منه : $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\\ z-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\\ z+1\end{pmatrix}$

إذن : $NM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\right)^2+(z-1)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2)+\frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2)+z^2-2z+1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)+z^2-2z+1}$$

و هي عبارة بعد النقطة M عن (D)

$$PM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2+(z+1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2)+\frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2)+z^2+2z+1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)+z^2+2z+1}$$

و هي عبارة بعد النقطة M عن (T)

b) M تنتمي إلى Σ يكافئ $NM = PM$

يكافئ $NM^2 = PM^2$ (لأن $NM > 0$ و $PM > 0$)

يكافئ $\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)+z^2-2z+1 = \frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)+z^2+2z+1$

يكافئ $-xy-2z = xy+2z$

يكافئ $0 = xy+2z+xy+2z$

يكافئ $2xy+4z=0$

يكافئ $xy+2z=0$ و هو المطلوب

c) المستويات العمودية على (AB) لها $\overrightarrow{AB}$ كشعاع ناظمي

أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-1-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$

منه : كل مستوي عمودي على (AB) له الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ناظمي له لأن $\vec{n} \,//\, \overrightarrow{AB}$

إذن : المستويات العمودية على (AB) لها المعادلة الديكارتية التالية : $0x+0y+z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .

أي بصفة عامة فإن كل مستوي عمودي على (AB) له المعادلة $z=m$ حيث $m \in IR$ (بوضع $m=-\alpha$)

لنبحث إذن عن تقاطع Σ و المستويات ذات المعادلة $z=m$ كمايلي :

$\begin{cases}xy+2z=0\\z=m\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}xy+2m=0\\z=m\end{cases}$

يكافئ $(I)\begin{cases}xy=-2m\\z=m\end{cases}$

نميز الحالات التالية :

الحالة (1) $m = 0$

الجملة (I) تكافئ $\begin{cases}xy=0\\z=0\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x=0\\y\in IR\\z=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=0\\x\in IR\\z=0\end{cases}$

إذن : التقاطع هو اتحاد مستقيمين تمثيلاهما الوسيطيين كمايلي :

$\begin{cases}x=0\\y\in IR\\z=0\end{cases}$ و $\begin{cases}y=0\\x\in IR\\z=0\end{cases}$ (هما محوري الفواصل و التراتيب)

الحالة (2) $m \neq 0$

الجملة (I) تكافئ $\begin{cases} y = \dfrac{-2\,m}{x} \\ z = m \end{cases}$

إذن : التقاطع هو المنحنى ذو المعادلة $y = \dfrac{-2\,m}{x}$ في المستوي الذي معادلته $z = m$ (قطع زائد)

c) ليكن (π) مستوي عمودي على المحور $(o\,;\vec{i})$ إذن : (π) له المعادلة $x = m$

$\begin{cases} x\,y + 2\,z = 0 \\ x = m \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} m\,y + 2\,z = 0 \\ x = m \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = \dfrac{-m}{2}\,y \\ x = m \end{cases}$

إذن : $\Sigma \cap (\pi)$ هو المنحنى ذو المعادلة $z = \dfrac{-m}{2}\,y$ في المستوي (π) (هو مستقيم من المستوي (π))

ليكن (Q) مستوي عمودي على المحور $(o\,;\vec{j})$ إذن : (Q) له المعادلة $y = m$

$\begin{cases} x\,y + 2\,z = 0 \\ y = m \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} m\,x + 2\,z = 0 \\ y = m \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = \dfrac{-m}{2}\,x \\ y = m \end{cases}$

إذن : $\Sigma \cap (Q)$ هو المنحنى ذو المعادلة $z = \dfrac{-m}{2}\,x$ في المستوي (Q) (مستقيم من المستوي (Q))

التمرين – 19

OABC رباعي وجوه حيث $OA = OB = OC = a$ مع a عدد حقيقي موجب تماما و الوجوه الثلاثة OAB ؛ OAC ؛ OBC هي مثلثات قائمة في النقطة O

لتكن M نقطة من $[OA]$ حيث $AM = x$

نسمي (π) المستوي الذي يشمل M و يوازي المستقيمين (AB) و (OC) و يقطع المستقيمات (AC) ، (CB) ، (OB) على الترتيب في النقط N ؛ P ؛ Q

1 – برهن أن الرباعي MNPQ مستطيل .

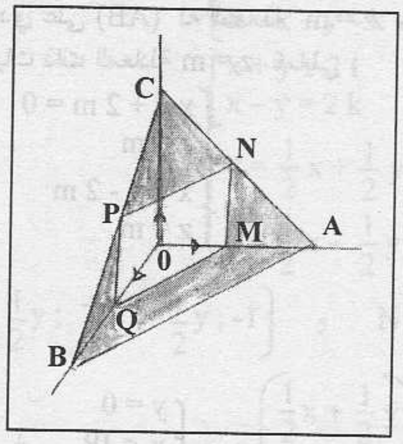
2 – أحسب بدلالة x المساحة $A(x)$ للمستطيل MNPQ

3 – أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x) = A(x)$ و مثل منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ للمستوي .

4 – من أجل أي قيمة لـ x تكون المساحة $A(x)$ أكبر ما يمكن ؟

الحـل – 19

الانشاء :



ننسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ محاوره (OA) ، (OB) و (OC) حيث $\|\vec{i}\| = 1$

بما أن $AM = x$ و $OA = a$ فإن احداثيات النقط M و Q هي $M(a - x\,;0\,;0)$ ؛ $Q(0\,;a - x\,;0)$

و احداثيات النقط A ، B ، C هي $A(a\,;0\,;0)$ ؛ $B(0\,;a\,;0)$ ؛ $C(0\,;0\,;a)$

1 – لنبحث عن احداثيات كل من N و P كمايلي :

N هي تقاطع (AC) و (MN)

P هي نقطة تقاطع (BC) و (PQ)

إذن : يكفي ايجاد معادلة كل من (AC) ، (BC) ، (MN) ، (PQ)

معادلة (MN)

$\overrightarrow{OC}$ شعاع توجيه لـــ (MN) إذن $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{k}$ هو شعاع توجيه لـــ (MN)

و $M(a-x\,;0\,;0)$ نقطة من (MN) إذن التمثيل الوسيطي لـــ المستقيم (MN) هو : $\begin{cases}X-(a-x)=0\\Y-0=0\\Z-0=t\end{cases}$

أي $\begin{cases}X=a-x\\Y=0\\Z=t\end{cases}$ حيث $t\in IR$

معادلة (PQ)

$\overrightarrow{OC}$ شعاع توجيه لـــ (PQ) إذن $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{k}$ هو شعاع توجيه لـــ (PQ)

و $Q(0\,;a-x\,;0)$ نقطة من (PQ) :

إذن : $\begin{cases}X-0=0\\Y-(a-x)=0\\Z-0=k\end{cases}$ منه $\begin{cases}X=0\\Y=a-x\\Z=k\end{cases}$ حيث $k\in IR$

معادلة (AC)

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-a\\0-0\\a-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AC)

(AC) يشمل النقطة $A(a\,;0\,;0)$ إذن :

$\begin{cases}X-a=-a\,m\\Y-0=0\\Z-0=a\,m\end{cases}$ منه $\begin{cases}X=a-a\,m\\Y=0\\Z=a\,m\end{cases}$ حيث $m\in IR$

معادلة (BC)

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-0\\0-a\\a-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-a\\a\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (BC)

(BC) يشمل $B(0\,;a\,;0)$

إذن : $\begin{cases}X-0=0\\Y-a=-a\,q\\Z-0=a\,q\end{cases}$ منه $\begin{cases}X=0\\Y=a-a\,q\\Z=a\,q\end{cases}$ حيث $q\in IR$

البحث عن N حيث N هي $(AC)\cap(MN)$:

$\begin{cases}a-x=a-a\,m\\Y=0\\t=a\,m\end{cases}$ منه $\begin{cases}-x=-a\,m\\Y=0\\t=a\,m\end{cases}$

أي $\begin{cases}m=x/a\\Y=0\\t=a(x/a)=x\end{cases}$

نتيجة : بتعويض t بـــ x في التمثيل الوسيطي لـــ (MN)

نحصل على $\begin{cases}X=a-x\\Y=0\\Z=x\end{cases}$

منه : $N(a-x\,;0\,;x)$

البحث عن احداثيات P حيث P هي $(BC)\cap(PQ)$:

$\begin{cases}X=0\\a-a\,q=a-x\\a\,q=k\end{cases}$ منه $\begin{cases}X=0\\a\,q=x\\a\,q=k\end{cases}$

أي $\begin{cases} X = 0 \\ q = x/a \\ k = a(x/a) = x \end{cases}$

بتعويض k بـ x في التمثيل الوسيطي لـ (PQ) نحصل على :

$\begin{cases} X = 0 \\ Y = a - x \\ Z = x \end{cases}$ منه $P(0\,;a - x\,;x)$

نتيجة : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} a-x-(a-x) \\ 0-0 \\ x-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix} 0-0 \\ a-x-(a-x) \\ x-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} a-x-0 \\ 0-(a-x) \\ 0-0 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QM}\begin{pmatrix} a-x-0 \\ 0-(a-x) \\ 0-0 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{QM}\begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$

لدينا $\overrightarrow{PN}\,.\,\overrightarrow{MN} = 0(a-x) + 0(x-a) + x(0) = 0$

إذن : $\overrightarrow{PM}$ و $\overrightarrow{MN}$ متعامدان .

خلاصة : $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$ و $\overrightarrow{PN}$ عمودي على $\overrightarrow{MN}$ إذن الرباعي MNPQ مستطيل .

2 – $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} a-x \\ x-a \\ 0 \end{pmatrix}$ إذن : $PN = \sqrt{(a-x)^2 + (x-a)^2 + 0}$

$= \sqrt{2(a-x)^2}$

$= |a-x|\sqrt{2}$

$= (a-x)\sqrt{2}$ لأن $a > x$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ إذن : $MN = \sqrt{0 + 0 + x^2} = |x| = x$

نتيجة : $A(x) = PN \times MN = x(a-x)\sqrt{2}$ مقدر بوحدة القياس .

3 – $f(x) = A(x)$ يكافئ $f(x) = x(a-x)\sqrt{2}$

يكافئ $f(x) = a\,x\sqrt{2} - x^2\sqrt{2}$

بما أن M نقطة من القطعة المستقيمة [OA] فإن $0 \le x \le a$.

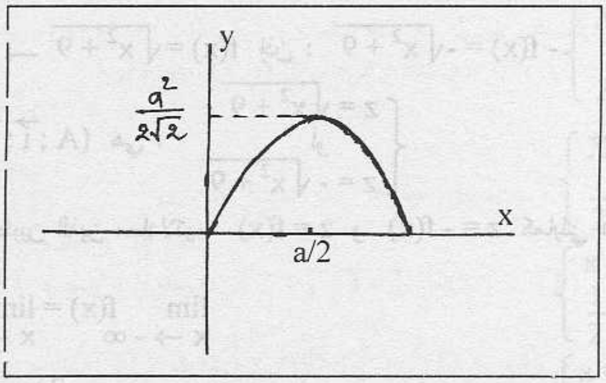
إذن : ندرس تغيرات الدالة f على المجال [0 ; a] كمايلي :

$f(0) = 0$ ؛ $f(a) = 0$

$f\,'(x) = a\sqrt{2} - 2\,x\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(a - 2\,x)$

x	0		$a/2$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{a^2}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}$



4 ــ تكون المساحة $A(x)$ أكبر ما يمكن من أجل $x = a/2$ و قيمتها عندئذ هي $A(x) = \dfrac{a^2}{2\sqrt{2}}$ مقدرة بوحدة القياس .

التمرين ــ20

ليكن (C) سطح المخروط الدوراني الذي معادلته $x^2 + y^2 = z^2$

1 ــ بين أن المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}\, t \\ z = 2\, t \end{cases}$ هو مستقيم مولد لــ (C)

2 ــ ليكن (π) المستوي الدي معادلته $y = 3$

نسمي (H) تقاطع (C) مع المستوي (π)

لتكن A النقطة ذات الاحداثيات $(0 ; 3 ; 0)$

a) أكتب في المعلم $(A ; \vec{j} ; \vec{k})$ معادلة (H)

b) بين أن توجد دالة f بحيث يكون (H) هو اتحاد المنحنيين اللذين معادلاتهما $z = f(x)$ و $z = -f(x)$ ثم مثل (H) في المستوي (π)

c) ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{k} \end{cases}$

بين أن إذا كانت $M(x ; z)$ في المعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{k})$ فإن : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{x - z}{2}\vec{u} + \dfrac{x + z}{2}\vec{v}$

d) لتكن $M(X ; Z)$ في المعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$

أثبت أن $M \in (H)$ معناه $X Z = -9/4$

الحــل ــ 20

1 ــ لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من (D) إذن $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}\, t \\ z = 2\, t \end{cases}$

منه : $x^2 + y^2 = t^2 + (\sqrt{3}\, t)^2$

أي $x^2 + y^2 = t^2 + 3\, t^2$

أي $x^2 + y^2 = 4\, t^2$

أي $x^2 + y^2 = (2\, t)^2$

أي $x^2 + y^2 = z^2$

أي M تنتمي إلى (C)

نتيجة : المستقيم (D) محتواة في (C) إذن : (D) هو مولد لــ (C)

2 ــ a) لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من H

إذن : $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y = 3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x^2 + 9 = z^2 \\ y = 3 \end{cases}$

إذن : معادلة (H) في المستوي (π) ذو المعادلة $y = 3$ هي $z^2 = x^2 + 9$ في المعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{k})$

b) لتكن المعادلة $z^2 = x^2 + 9$ في المعلم $(A ; \vec{i} ; \vec{k})$

$z^2 = x^2 + 9$ يكافئ $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + 9} \\ \text{أو} \\ z = -\sqrt{x^2 + 9} \end{cases}$

نعرف الدالة f على IR بـــ $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ إذن : $-f(x)=-\sqrt{x^2+9}$

معادلة (H) في المعلم $(A;\vec{i};\vec{k})$ هي : $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+9} \\ \text{أو} \\ z=-\sqrt{x^2+9} \end{cases}$

إذن : (H) هو اتحاد المنحنيين الذين معادلاتهما $z=f(x)$ و $z=-f(x)$ كمايلي :

تغيرات الدالة f على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

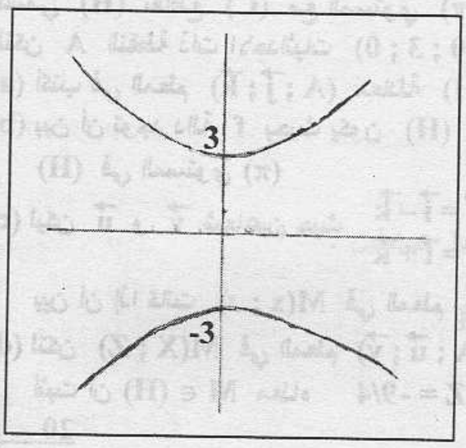
$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0)=\sqrt{0+9}=3$$

منه المنحنى (H) كمايلي :



c) $\begin{cases} \vec{u}=\vec{i}-\vec{k} \\ \vec{v}=\vec{i}+\vec{k} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \vec{u}+\vec{v}=2\vec{i} \\ \vec{k}=\vec{v}-\vec{i} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{k}=\vec{v}-\vec{i} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{k}=\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{k}=\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u} \end{cases}$

$M(x;z)$ في المعلم $(A;\vec{i};\vec{k})$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=x\vec{i}+z\vec{k}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}=x\left(\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)+z\left(\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}\right)$

يكافئ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}x\vec{u}+\frac{1}{2}x\vec{v}+\frac{1}{2}z\vec{v}-\frac{1}{2}z\vec{u}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(x-z)\vec{u}+\frac{1}{2}(x+z)\vec{v}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}=\frac{x-z}{2}\vec{u}+\frac{x+z}{2}\vec{v}$ ..... (α)

d) $M(X;Z)$ في المعلم $(A;\vec{u};\vec{v})$ أي $\overrightarrow{AM}=X\vec{u}+Z\vec{v}$

بالمطابقة مع العبارة (α) نحصل على : $\begin{cases} X=\frac{x-z}{2} \\ Z=\frac{x+z}{2} \end{cases}$

أي :
$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \\ Z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} X + Z = x \\ \frac{1}{2}z = Z - \frac{1}{2}x \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} x = X + Z \\ \frac{1}{2}z = Z - \frac{1}{2}(X + Z) \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} x = X + Z \\ z = 2Z - X - Z \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} x = X + Z \\ z = Z - X \end{cases}$$

نتيجة :

$M(X ; Y)$ تنتمي إلى (H) يكافئ $z^2 = x^2 + 9$

يكافئ $(Z - X)^2 = (X + Z)^2 + 9$

يكافئ $Z^2 - 2ZX + X^2 = X^2 + 2ZX + Z^2 + 9$

يكافئ $-2ZX = 2ZX + 9$

يكافئ $-4ZX = 9$

يكافئ $XZ = -9/4$ و هو المطلوب

التمرين ـــ 21

f دالة معرفة بـــ $f(x ; y) = \dfrac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2}$

(S) هي المساحة التي معادلتها $z = f(x ; y)$

أدرس تقاطع (S) مع المستويات التي معادلاتها $z = 0$ **ثم** $z = 1$

الحـل ـــ 21

ليكن (π) المستوي الذي معدلته $z = 0$

$$\begin{cases} z = \dfrac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} \\ z = 0 \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} \dfrac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

يكافئ
$$\begin{cases} 4x + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

يكافئ
$$\begin{cases} x = -1/2 \\ z = 0 \end{cases}$$

إذن : $(S) \cap (\pi)$ هو المستقيم ذو التمثيل الوسيطي
$$\begin{cases} x = -1/2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$ حيث $t \in IR$

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $z = 1$

$$\begin{cases} z = \dfrac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} \\ z = 1 \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} \dfrac{4x + 2}{x^2 + y^2 + 2} = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

يكافئ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 = 4x + 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

يكافئ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

يكافئ
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

إذن : $(S) \cap (P)$ هو الدائرة التي مركزها $(2 ; 0 ; 1)$ و نصف قطرها 2 من المستوي (P) ذو المعادلة $z = 1$

التمرين – 22

(T) مساحة معادلتها $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} z^2$

اختر الاقتراح الصحيح من بين مايلي :

a) $C(1 ; 1 ; -2)$ تنتمي إلى (T)

b) (T) هو سطح مخروط دوراني محوره $(o ; \vec{j})$

c) المستقيم (D) الذي يشمل O و شعاع توجيهه $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ مولد لـ (T)

الحـل –22

a) نعوض احداثيات النقطة C في معادلة (T) كمايلي : $(1)^2 + (1)^2 = \frac{1}{2}(-2)^2$ أي $2 = 2$

منه معادلة (T) محققة إذن C فعلا تنتمي إلى (T)

b) $(o ; \vec{j})$ ليس محور لـ (T)

c) هل (d) مولد لـ (T) ؟

$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ إذن $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(D) يشمل O و $\vec{u}$ شعاع توجيه له إذن : (D) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

منه إذا كانت $M(x ; y ; z)$ نقطة من (D) فإن :

$$x^2 + y^2 = t^2 + t^2 = 2t^2$$

من جهة أخرى $\frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2}(2t)^2 = \frac{4t^2}{2} = 2t^2$

إذن : $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} z^2$

منه : M تنتمي إلى (T)

إذن : (D) محتواة في (T)

أي (D) مولد لـ (T) إذن الاقتراح c) صحيح

التمرين – 23

(R) مساحة معادلتها $z = 2x + 0,5y^2 + 4$

هل تقاطع (R) مع المستوي ذو المعادلة $y = 0$ هو :

a) قطع مكافئ **c) قطع زائد**

b) مستقيم **d) جواب آخر**

الحـل – 23

$\begin{cases} z = 2x + 0,5y^2 + 4 \\ y = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z = 2x + 4 \\ y = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 2x = z - 4 \\ y = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} z - 2 \\ y = 0 \end{cases}$

إذن : تقاطع (R) مع المستوي ذو المعادلة $y = 0$ هو المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = \frac{1}{2} t - 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in R$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) مستقيم .

التمرين –24

(π) هي مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث $x - 3y = 5$

هل صحيح أن (π) ليست مساحة ؟

الحـل – 24

$x - 3y = 5$ يكافئ $x - 3y - 5 = 0$ و هي معادلة مستوي يشمل النقطة $(0 ; -5/3 ; 1)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له

إذن : (π) هو سطح مستو .

التمرين – 25

هل تقاطع مجسم مكافئ معادلته $z = x^2 + y^2$ مع سطح كرة مركزها O هو دائرة ؟

الحـل – 25

ليكن (R) المجسم المكافئ ذو المعادلة $z = x^2 + y^2$

نسمي (S) سطح الكرة التي مركزها O و نصف قطرها α حيث $\alpha > 0$

إذن : معادلة (S) $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$

لنبحث عن تقاطع (S) و (P)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z + z^2 = \alpha^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\text{ يكافئ } \begin{cases} z^2 + z - \alpha^2 = 0 \ldots\ldots (1) \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

نحل المعادلة (1) ذات المجهول z حيث $z \geq 0$ لأن $x^2 + y^2 \geq 0$

$$\Delta = 1 + 4\,\alpha^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2} \end{cases}$$

z_1 سالب إذن مرفوض .

نتيجة : (S) و (R) يتقاطعان في مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ حيث :

$$\begin{cases} z = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2} \end{cases}$$

و هي معادلة دائرة مركزها $\left(0 ; 0 ; \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2}\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{\dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2}}$

في المستوي ذو المعادلة $z = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha^2}}{2}$

نتيجة : الجواب صحيح .

التمرين – 26

لتكن (S) المساحة التي معادلتها $z = 2\,x(y + 1)$ حيث $0 \leq x \leq 10$ ؛ $0 \leq y \leq 12$

هل النقطة $A(5 ; 11 ; 120)$ تنتمي إلى (S) ؟

الحـل –26

$0 \leq 5 \leq 10$ و $0 \leq 11 \leq 12$ إذن : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$ محققة

من جهة أخرى :

$$2(5)(11 + 1) = 10(12) = 120$$

إذن : الشرط $2\,x(y + 1) = z$ محقق .

منه : A فعلا تنتمي إلى (S)