المستقيمات و المستويات في الفضاء

المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .(D) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A ; y_A ; z_A)$

و $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له

$M(x ; y ; z)$ نقطة من (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث : $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

أي : $\begin{cases} x - x_A = t\,a \\ y - y_A = t\,b \\ z - z_A = t\,c \end{cases}$ لأن $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$

منه $\begin{cases} x = x_A + t\,a \\ y = y_A + t\,b \\ z = z_A + t\,c \end{cases}$ هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

تقاطع المستقيمات و المستويات :

(P) و (P') مستويان حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان ناظميان لهما على الترتيب

(D) و (D') مستقيمان شعاعا توجيههماعلى الترتيب $\vec{n}$ و $\vec{m}$

الأوضاع النسبية الممكنة للمستقيمين (D) و (D') هي :

الحالة الأولى : (D) و (D') من مستويين مختلفين

إذن : (D) و (D') لا يتقاطعان .

الحالة الثانية : (D) و (D') من نفس المستوي إذن :

إما (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة

أو (D) و (D') متوازيان تماما . (لا يتقاطعان)

أو (D) و (D') متطابقان إذن تقاطعهما هو المستقيم (D) نفسه .

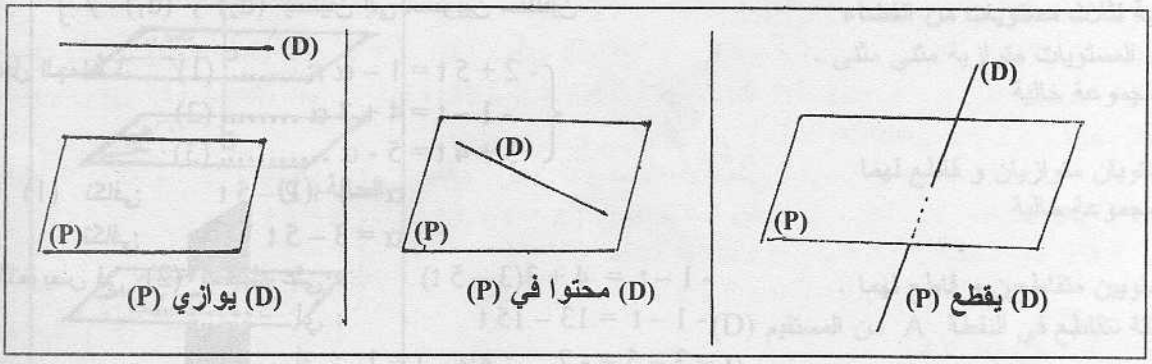
الأوضاع النسبية الممكنة لمستقيم (D) و مستوي (P) هي كما يلي :

الحالة الأولى : (D) محتوا في المستوي (P)

الحالة الثانية : (D) يقطع (P) في نقطة وحيدة

الحالة الثالثة : (D) يوازي (P) إذن لا يقطعه .

الانشاء :



نشـــاط :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

1 ــ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث $A(2 ; 2 ; -3)$ ؛ $B(1 ; -1 ; 0)$

2 ــ هل النقطة $C(1 ; 3 ; 2)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

الحـــل :

1 – $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AB)

منه : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) حيث $t \in IR$

2 – من أجل $(x ; y ; z) = (1 ; 3 ; 2)$ نحصل على :

$\begin{cases} t = 1 \\ t = -1/3 \\ t = 5/3 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 3 = 2 - 3t \\ 2 = -3 + 3t \end{cases}$ تناقض إذن $C(1 ; 3 ; 2)$ لا تنتمي إلى المستقيم (AB)

تطبيق :

(d_1) ، (d_2) ، (d_3) مستقيمات من الفضاء ممثلة وسيطيا بالجمل التالية على الترتيب :

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \text{ حيث } t \in IR \text{ (تمثيل } (d_1)\text{)}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 4 + 3\alpha \\ z = 5 - \alpha \end{cases} \text{ حيث } \alpha \in IR \text{ (تمثيل } (d_2)\text{)}$$

$$\begin{cases} x = -7 + 7\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \text{ حيث } \lambda \in IR \text{ (تمثيل } (d_3)\text{)}$$

المطلوب : أدرس الوضعية النسبية لـ (d_1) و (d_2) ثم (d_1) و (d_3)

الحـل :

لدينا أشعة توجيه المستقيمات (d_1) ، (d_2) و (d_3) هي على الترتيب

$\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ؛ $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ؛ $\vec{w}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

الوضعية النسبية لـ (d_1) و (d_2)

لدينا : $\frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{5}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيلين خطيا .

منه : { إما (d_1) و (d_2) يتقاطعان في نقطة وحيدة
أو (d_1) و (d_2) ينتميان إلى مستويين مختلفين

نحل الجملة :

$$\begin{cases} -2 + 5t = 1 - \alpha \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ -1 - t = 4 + 3\alpha \ \ldots\ldots\ldots (2) \\ 3 + 4t = 5 - \alpha \ \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

(1) تكافئ $\alpha = 1 + 2 - 5t$

تكافئ $\alpha = 3 - 5t$

بالتعويض في (2) نحصل على : $-1 - t = 4 + 3(3 - 5t)$

أي : $-1 - t = 13 - 15t$

أي : $t = 1$ منه : $\alpha = 3 - 5 = -2$

هل المعادلة (3) محققة ؟ بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :

$3 + 4(1) = 5 - (-2)$ أي $7 = 7$ منه المعادلة (3) محققة .

نتيجة : (d_1) و (d_2) يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(x ; y ; z)$ حيث

$$(d_1) \cap (d_2) = \{A(3 ; -2 ; 7)\} \text{ أي } \begin{cases} x = 1 - (-2) = 3 \\ y = 4 + 3(-2) = -2 \\ z = 5 - (-2) = 7 \end{cases}$$

الوضعية النسبية لـ (d_1) و (d_3) :

لدينا : $\frac{5}{7} \neq \frac{-1}{-3}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{w}$ مستقيلين خطيا .

منه : { إما (d_1) و (d_3) يتقاطعان في نقطة وحيدة
أو (d_1) و (d_3) ينتميان إلى مستويين مختلفين

نحل الجملة :
$$\begin{cases} -2+5t=-7+7\lambda \ \ldots\ldots (1) \\ -1-t=-3\lambda \ \ldots\ldots (2) \\ 3+4t=2\lambda \ \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

(2) تكافئ $t=-1+3\lambda$

بالتعويض في (1) نجد : $-2+5(-1+3\lambda)=-7+7\lambda$

أي $-7+15\lambda=-7+7\lambda$

أي $\lambda=0$ منه : $t=-1+3(0)=-1$

هل المعادلة (3) محققة ؟ بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :

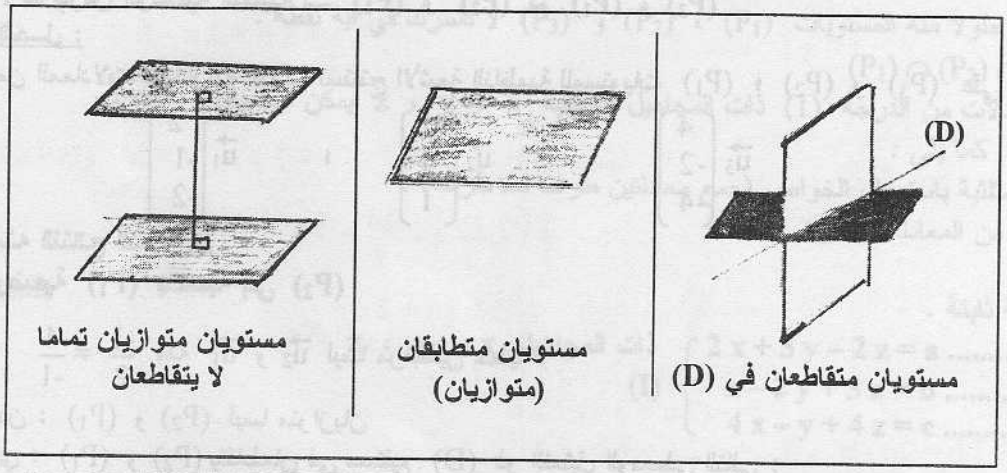
$3+4(-1)=2(0)$ أي $-1=0$

منه المعادلة (3) ليست محققة .

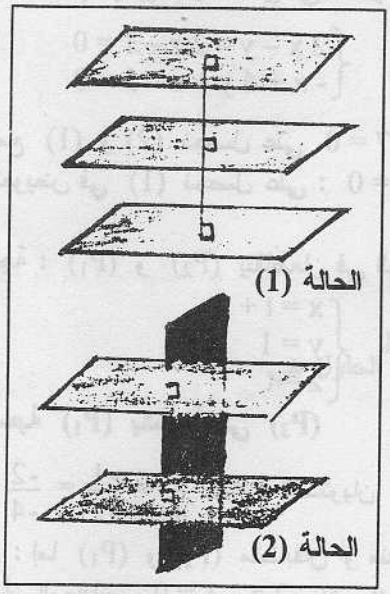
نتيجة : الجملة (I) لا تقبل حلولا

منه : (d_1) و (d_3) ينتميان إلى مستويين مختلفين فهما إذن : لا يتقاطعان .

الأوضاع النسبية لمستويين



خلاصة : المستقيم في الفضاء معرف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين .



الأوضاع النسبية لثلاث مستويات من الفضاء

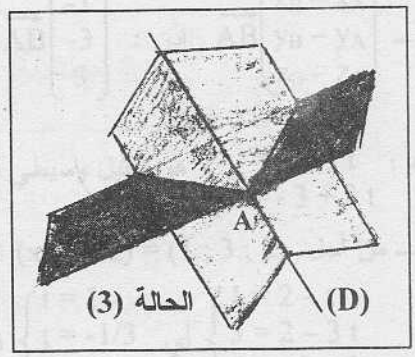
الحالة (1) كل المستويات متوازية مثنى مثنى .
إذن : التقاطع مجموعة خالية

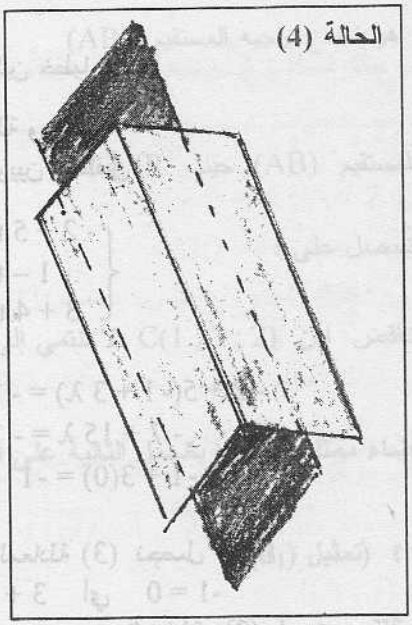
الحالة (2) مستويان متوازيان و قاطع لهما
إذن : التقاطع مجموعة خالية

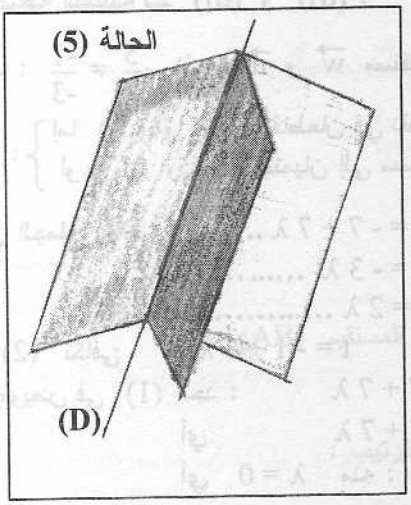
الحالة (3) مستويين متقاطعين و قاطع لهما .
المستويات الثلاثة تتقاطع في النقطة A من المستقيم (D)

الحالة (4) مستويان متقاطعان و مستوي يوازي قاطعهما .
التقاطع مجموعة خالية .

الحالة (5) المستويات تتقاطع في مستقيم .
المستويات تتقاطع في المستقيم (D)







تطبيق : في الفضاء المنسوب إلى معلم نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) التي معادلاتها الديكارتية على الترتيب :

$2x-y-2z-1=0$ ؛ $-x+4y+z-3=0$ ؛ $4x-2y-4z-5=0$

1 ــ أدرس الوضعية النسبية لـ (P_1) و (P_2) ثم (P_1) و (P_3)

الحـل :

من المعادلات الديكارتية الثلاث نستنتج الأشعة الناظمية للمستويات (P_1) ؛ (P_2) و (P_3) على الترتيب

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ؛ $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ ؛ $\vec{u_3}\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$

منه النتائج التالية :

وضعية (P_1) بالنسبة إلى (P_2)

$\frac{-1}{2} \neq \frac{4}{-1}$ منه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ ليسا مرتبطين خطيا .

إذن : (P_1) و (P_2) ليسا متوازيان

أي : (P_1) و (P_2) يتقاطعان في مستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي التالي :

$\begin{cases}2x-y-2z-1=0 \\ -x+4y+z-3=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}2x-y-2z-1=0 \ldots\ldots (1)\\ -2x+8y+2z-6=0 \ldots..(2)\end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على $7y-7=0$ أي $y=1$

بالتعويض في (1) نحصل على : $2x-1-2z-1=0$ أي : $x-z-1=0$

أي $x=z+1$

نتيجة : (P_1) و (P_2) يتقاطعان في المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي :

$\begin{cases}x=t+1\\ y=1\\ z=t\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=z+1\\ y=1\\ z\in IR\end{cases}$ حيث $t\in IR$

وضعية (P_1) بالنسبة إلى (P_3)

$\frac{-2}{-4}=\frac{-1}{-2}=\frac{2}{4}$ إذن : المستويان (P_1) و (P_3) متوازيان

إذن : إما (P_1) و (P_2) متطابقان أو منفصلان

بما أن المعادلتين $2x-y-2z-1=0$ و $4x-2y-4z-5=0$ ليست متكافئتان

$\left(\frac{-1}{-5}\neq\frac{1}{2}\right)$ فإن المستويان منفصلان

نتيجة : (P_1) و (P_3) متوازيان تماما لا يتقاطعان

نشاط :

في الفضاء المنسوب إلى معلم نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) و (P_3) التي معادلاتها الديكارتية على الترتيب :

$4x+y+z+10=0$ ؛ $2x+y+3=0$ و $2x-y+2z-1=0$

أدرس تقاطع المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3)

الحـل :

إذا وجدت نقطة $A(x\,;y\,;z)$ من الفضاء مشتركة بين المستويات (P1) ، (P_2) و (P_3) فإن احداثياتها تحقق الجملة

$$(I)\begin{cases}4x+y+z+10=0 \ldots\ldots (1)\\ 2x+y+3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)\\ 2x-y+2z-1=0 \ldots\ldots (3)\end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نحصل على : $6x+3z+9=0$

أي : $2x+z+3=0$

أي : $z=-2x-3$ ..... (4)

نعوض (4) في (1) نحصل على : $4x+y-2x-3+10=0$

أي : $2x+y+7=0$ ..... (5)

من جهة أخرى لدينا المعادلة (2) : $2x+y+3=0$

نتيجة : $\begin{cases}2x+y+7=0\\ 2x+y+3=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2x+y=-7\\ 2x+y=-3\end{cases}$

إذن : الجملة لا تقبل حلول .

خلاصة : الجملة (I) لا تقبل حلولا منه المستويات (P_1) ، (P_2) و (P_3) لا تشترك في أية نقطة .

أي $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

ملاحظة : لحل جملة 3 معادلات من الدرجة (1) ذات المجاهيل الحقيقية x ، y ، z يمكن استعمال طريقة GAUSS كما يلي :

(1) نحول الجملة إلى جملة مثلثية باستعمال الخواص (جمع معادلتين طرف لـ طرف) .

(2) نصعد في الحلول ابتداء من المعادلة الأخيرة .

مثال :

a ، b ، c أعداد حقيقية ثابتة .

حل في R^3 الجملة ذات المجاهيل x ، y ، z

$$(I)\begin{cases}2x+3y-2z=a \ldots\ldots (1)\\ x-2y+3z=b \ldots\ldots (2)\\ 4x-y+4z=c \ldots\ldots (3)\end{cases}$$

الحـل :

نضرب طرفي المعادلة (1) في 2 : $4x+6y-4z=2a$ ..... (4)

نضرب طرفي المعادلة (2) في 3 : $3x-6y+9z=3b$ ..... (5)

نجمع (4) و (5) نحصل على : $7x+5z=2a+3b$ ..... (6)

نضرب طرفي المعادلة (3) في 2- : $-8x+2y-8z=-2c$ ..... (7)

نجمع (7) و (2) نحصل على : $-7x-5z=b-2c$ ..... (8)

من (6) و (8) لدينا $\begin{cases}7x+5z=2a+3b\\ -7x-5z=b-2c\end{cases}$ إذن : $2a+3b=2c-b$

نتيجة : إذا كانت الأعداد الحقيقية a ، b ، c تحقق العلاقة :

$2a+3b=2c-b$ فإن الجملة $\begin{cases}7x+5z=2a+3b\\ -7x-5z=b-2c\end{cases}$ تقبل مالا نهاية من الحلول هي

$$\left\{z\in IR\,;\,x=\frac{2a+3b-5z}{7}\right\}$$

منه : حسب المعادلة (3) فإن : $y=4x+4z-c$

أي : $y=\frac{4}{7}(2a+3b-5z)+4z-c$

أي : $y=\frac{8}{7}a+\frac{12}{7}b-c+\frac{8}{7}z$

إذا كانت الأعداد الحقيقية a ، b ، c لا تحقق المساواة :
$2a+3b=2c-b$ فإن الجملة (I) لا تقبل حلولا .

خلاصة :

إذا كان $2a+3b\neq 2c-b$ فإن الجملة (I) لا تقبل حلولا

إذا كان $2a+3b=2c-b$ فإن الجملة (I) تقبل مجموعة غير منتهية من الحلول $(x\,;y\,;z)$ حيث :

$$t\in IR \text{ حيث } \begin{cases} x=\frac{2}{7}a+\frac{3}{7}b-\frac{5}{7}t \\ y=\frac{8}{7}a+\frac{12}{7}b-c+\frac{8}{7}t \\ z=t \end{cases}$$

تحقيق : إذا كان $2a+3b=2c-b$ فإن :

$$2x+3y-2z=\frac{4}{7}a+\frac{6}{7}b-\frac{10}{7}t+\frac{24}{7}a+\frac{36}{7}b-3c+\frac{24}{7}t-2t$$
$$=\frac{28}{7}a+\frac{42}{7}b+\frac{14}{7}t-3c-2t$$
$$=4a+6b+2t-3c-2t$$
$$=4a+6b-3c$$
$$=2(2a+3b)-3c$$
لأن $2a+3b=2c-b$ $$=2(2c-b)-3c$$
$$=c-2b$$

لكن $2a+3b=2c-b$

منه : $2a=2c-4b$

أي : $a=c-2b$

نتيجة (1) $2x+3y-2z=a$ أي المعادلة (1) محققة .

$$x-2y+3z=\frac{2}{7}a+\frac{3}{7}b-\frac{5}{7}t-\frac{16}{7}a-\frac{24}{7}b+2c-\frac{16}{7}t+3t$$
$$=-\frac{14}{7}a-\frac{21}{7}b-\frac{21}{7}t+3t+2c$$
$$=-2a-3b-3t+3t+2c$$
$$=-(2a+3b)+2c$$
لأن $2a+3b=2c-b$ $$=-(2c-b)+2c$$
$$=b$$

نتيجة (2) $x-2y+3z=b$ إذن : المعادلة (2) محققة .

$$4x-y+4z=\frac{8}{7}a+\frac{12}{7}b-\frac{20}{7}t-\frac{8}{7}a-\frac{12}{7}b+c-\frac{8}{7}t+4t$$
$$=\frac{-28}{7}t+4t+c$$
$$=c$$

نتيجة (3) $4x-y+4z=c$ إذن : المعادلة (3) محققة .

خلاصة : الجملة محققة من أجل $\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases}$

$$t\in IR \text{ حيث } \begin{cases} x=\frac{2}{7}a+\frac{3}{7}b-\frac{5}{7}t \\ y=\frac{8}{7}a+\frac{12}{7}b-c+\frac{8}{7}t \\ z=t \end{cases}$$

تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

التمرين ــ 1

1 ــ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الي يشمل $A(0 ; 0 ; 1)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

2 ــ أعط تمثيل وسيطي للمستقيم (D') الذي يشمل $B(-1 ; 0 ; 1)$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

الحـل ــ 1

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء إذن $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+1\\y\\z-1\end{pmatrix}$

1 ــ $M \in (D)$ يكافئ $\overrightarrow{AM} // \vec{u}$

يكافئ $\begin{cases}x = t\\y = t\\z-1 = t\end{cases}$ حيث $t \in IR$

يكافئ $\begin{cases}x = t\\y = t\\z = t+1\end{cases}$ حيث $t \in IR$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

$M \in (D')$ يكافئ $\overrightarrow{BM} // \vec{v}$

يكافئ $\begin{cases}x+1 = -t\\y = 0\\z-1 = 2t\end{cases}$ حيث $t \in IR$

يكافئ $\begin{cases}x = -t-1\\y = 0\\z = 2t+1\end{cases}$ حيث $t \in IR$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D')

التمرين ــ 2

A ، B ، C ؛ D نقط احداثياتها على الترتيب $(1 ; -2 ; 7)$ ؛ $(2 ; 3 ; 5)$ ؛ $(4 ; 13 ; 1)$ ؛ $(1 ; -12 ; 11)$

1 ــ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

2 ــ هل النقط C و D تنتمي إلى المستقيم (AB)

الحـل ــ 2

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+2\\5-7\\2-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$

يكافئ $\begin{cases}x+2 = 5t\\y-7 = -2t\\z-1 = t\end{cases}$ حيث $t \in IR$

يكافئ $\begin{cases}x = 5t-2\\y = -2t+7\\z = t+1\end{cases}$ حيث $t \in IR$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

2 ــ هل $C(13\ ;\ 1\ ;\ 4)$ تنتمي إلى (AB) ؟

من أجل $\begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ فإن $\begin{cases} 13 = 5t - 2 \\ 1 = -2t + 7 \\ 4 = t + 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 5t = 15 \\ 2t = 6 \\ t = 3 \end{cases}$

أي $\begin{cases} t = 3 \\ t = 3 \\ t = 3 \end{cases}$

إذن : $C \in (AB)$ أي $t = 3$

هل $D(-12\ ;\ 11\ ;\ 1)$ تنتمي إلى (AB) ؟

من أجل $\begin{cases} x = -12 \\ y = 11 \\ z = 1 \end{cases}$ فإن $\begin{cases} -12 = 5t - 2 \\ 11 = -2t + 7 \\ 1 = t + 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 5t = -10 \\ 2t = -4 \\ t = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = 0 \end{cases}$ تناقض إذن : $D \notin (AB)$

التمرين ــ 3

ليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ **مع** $t \in IR$

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة $A(-1\ ;\ 2\ ;\ -4)$ و يوازي المستقيم (D)

الحـــل ــ 3

$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x + 2 = 3t \\ y = -t \\ z + 3 = -2t \end{cases}$ منه $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D)

نتيجة : المستقيم (T) يشمل $A(-1\ ;\ 2\ ;\ -4)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له

منه تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x + 1 = 3t \\ y - 2 = -t \\ z + 4 = -2t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

أي $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -2t - 4 \end{cases}$ مع $t \in IR$

التمرين ــ 4

ما هي طبيعة المجموعة التي تمثيلها الوسيطي $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$ **مع** $t \in IR$

الحـــل ــ 4

$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} t = \frac{1}{3}x \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{3}x \\ y = 2 + \frac{1}{3}x \\ z = 0 \end{cases}$$ يكافئ

$$\begin{cases} 3y = 6 + x \\ z = 0 \end{cases}$$ يكافئ

$$\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ يكافئ

إذن : هذه المجموعة هي المستقيم الذي معادلته الديكارتية $x - 3y + 6 = 0$ و الذي ينتمي إلى المستوي ذو المعادلة $z = 0$

التمرين ــ 5

هل جملة المعادلتين $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$ **و التمثيل الوسيطي** $\begin{cases} x = -1 - 9t \\ y = -2 - 4t \\ z = t \end{cases}$

حيث $(t \in IR)$ **يعرفان نفس المستقيم ؟**

الحـل ــ 5

لدينا الجملة $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \quad \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x - 3y + 2z = 4 \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$

نضرب طرفي المعادلة (1) في -2 : $-2x + 4y + 2z = -6 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$

نجمع المعادلتين (2) و (3) : $y + 4z = -2$ أي : $y = -2 - 4z \quad \ldots\ldots\ldots (4)$

نعوض (4) في (1) : $x - 2(-2 - 4z) - z = 3$

أي : $x + 4 + 8z - z = 3$

أي : $x = -1 - 7z \quad \ldots\ldots\ldots (5)$

نتيجة : الجملة $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x = -1 - 7z \\ y = -2 - 4z \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = -2 - 4t \\ z = t \end{cases}$ مع $t \in IR$

نتيجة : الجملة و التمثيل الوسيطي لا يعرفان نفس المستقيم .

التمرين ــ 6

نفس السؤال التمرين 5 بالنسبة للجملة $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$

و التمثيل $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ **مع** $t \in IR$

الحـل ــ 6

الجملة $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y + 5z - 9 = 0 \\ 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x = -y - z + 2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x = -9 + 5z - z + 2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = -7 + 4z \\ y = 9 - 5z \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = -3 - 4 + 4z \\ y = 4 + 5 - 5z \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3 + 4(z-1) \\ y = 4 - 5(z-1) \end{cases}$ تكافئ

$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ t = z - 1 \end{cases}$ تكافئ

$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ تكافئ

نتيجة : الجملة و التمثيل الوسيطي يعرفان نفس المستقيم .

التمرين ــ 7

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة الديكارتية $x - y + 2z = 2$ و $A(4 ; -2 ; 1)$ نقطة من الفضاء .

1 ــ عين $\vec{u}$ شعاع ناظمي لـ (P)

2 ــ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

3 ــ استنتج احداثيات النقطة H حيث H هي المسقط العمودي لـ A على (P)

الحـل ــ 7

1 ــ $x - y + 2z = 2$ هي معادلة (P) إذن : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي لـ (P)

2 ــ (D) يشمل A(4 ; -2 ; 1) و $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له إذن : (D) له التمثيل الوسيطي التالي :

$$t \in IR \text{ مع } \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x - 4 = t \\ y + 2 = -t \\ z - 1 = 2t \end{cases}$$

3 ــ الشعاع الناظمي للمستوي (P) هو نفسه شعاع توجيه المستقيم (D) إذن : المستقيم (D) عمودي على المستوي (P) بما أن A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن مسقطها العمودي على المستوي (P) هي نقطة تقاطع (D) و (P) إذن :

احداثيات النقطة H هي حلول الجملة $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ مع $t \in IR$

أي $\begin{cases} 4 + t - (-2 - t) + 2(1 + 2t) = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

أي $\begin{cases} 8 + 6t = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

منه $\begin{cases} t = -1 \\ x = 4 - 1 = 3 \\ y = -2 + 1 = -1 \\ z = 1 - 2 = -1 \end{cases}$

نتيجة : النقطة H لها الاحداثيات H(3 ; -1 ; -1)

تحقيق : $AH = \sqrt{(4-3)^2 + (-2+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

مسافة النقطة A عن المستوي (P) هي : $\ell = \dfrac{|4 + 2 + 2 - 2|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

إذن : $AH = \ell = \sqrt{6}$

التمرين ــ 8

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A(-3 ; 5 ; -1) و العمودي على المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية $x - 2y + 3z = 0$

الحـــل ــ 8

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

(D) عمودي على (P) إذن $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D)

منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) : $\begin{cases}x+3=t\\y-5=-2t\\z+1=3t\end{cases}$

أي $\begin{cases}x=t-3\\y=-2t+5\\z=3t-1\end{cases}$ مع $t\in IR$

التمرين ــ 9

(D) مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=-4-t\\y=2-t\\z=1+2t\end{cases}$

عين تقاطع (D) مع المستويات $(o;\vec{i};\vec{j})$ ؛ $(o;\vec{j};\vec{k})$ ؛ $(o;\vec{i};\vec{k})$

الحـــل ــ 9

إذا وجدت نقطة $A(x;y;z)$ مشتركة بين (D) و المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ فإن :

$\begin{cases}x=-4-t\\y=2-t\\z=1+2t\\z=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=-4-t\\y=2-t\\0=1+2t\\z=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x=-4-t\\y=2-t\\t=-1/2\\z=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x=-4+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}\\y=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\\z=0\end{cases}$

نتيجة : (D) يقطع المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ في النقطة $A(-7/2\ ;\ 5/2\ ;\ 0)$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة مشتركة بين (D) و المستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$

$M\in(o;\vec{j};\vec{k})$ إذن : $x=0$

منه : $-4-t=0$

أي : $t=-4$

منه : $\begin{cases}y=2-t=2+4=6\\z=1+2t=1-8=-7\end{cases}$

نتيجة : (D) يقطع المستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ في النقطة $M(0\ ;\ 6\ ;\ -7)$

لتكن $B(x;y;z)$ نقطة مشتركة بين (D) و المستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$

$B\in(o;\vec{i};\vec{k})$ إذن : $y=0$

أي $2-t=0$

منه $t=2$

إذن : $\begin{cases}x=-4-t=-4-2=-6\\z=1+2t=1+4=5\end{cases}$

نتيجة : (D) يقطع المستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ في النقطة $B(-6\ ;\ 0\ ;\ 5)$

التمرين ــ 10

ما هي طبيعة مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق :

$$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 - 3t^2 \\ z = 2 + 2t^2 \end{cases} \quad \text{مع} \quad t \in IR$$

الحـل ــ 10

نضع $t^2 = \alpha$ حيث $\alpha \geq 0$

منه مجموعة النقط تحقق الجملة : $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 3\alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$ حيث $\alpha \in R^+$

إذن : المجموعة هي جزء من المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ مع $t \in IR$

التمرين ــ 11

(d) و (d') مستقيمين تمثيلهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = 1 - t' \\ z = 2 + t' \end{cases} \quad \text{مع} \quad t \in IR \text{ و } t' \in IR$$

بين أن (d) و (d') من نفس المستوي ثم عين تقاطعهما .

الحـل ــ 11

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (d_1)

$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (d_2)

بما أن $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيلين خطيا .

إذن : (d_1) و (d_2) ليسا متوازيين .

لنحل الجملة $\begin{cases} t = t' + 1 \\ t = 1 - t' \end{cases}$

بالجمع : $2t = 2$ منه $t = 1$

بالتعويض في احدى المعادلات : $t' = t - 1$ منه $t' = 1 - 1 = 0$

نتيجة : من أجل $t = 1$ فإن $t' = 0$ فالمستويين إما يتقاطعان في نقطة وحيدة احداثياتها $A(x ; y ; z)$

أو ليسا من نفس المستوي كما يلي :

$$\begin{cases} x = t = 1 \\ y = t = 1 \\ z = t + 1 = 1 + 1 = 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = t' + 1 = 1 \\ y = 1 - t' = 1 \\ z = 2 + t' = 2 \end{cases}$$

نتيجة : (d_1) و (d_2) من نفس المستوي و يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(1 ; 1 ; 2)$

التمرين ــ 12

هل المستقيمان $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$ **و** $\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$ **متوازيان ؟ متقاطعان ؟ ليسا من نفس المستوي**

الحـل ــ 12

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم الأول .

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم الثاني .

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$ إذن : المستقيمان ليسا متوازيان .

نتيجة (1) إما المستقيمان متقاطعان في نقطة وحيدة أو لا ينتميان إلى نفس المستوي .

لنحل الجملة $\begin{cases}3+2t=3+t'\\3+t=1+2t'\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2t=t'\\3+t=1+2(2t)\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}2t=t'\\3-1=4t-t\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}t'=2t\\t=2/3\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}t'=4/3\\t=2/3\end{cases}$

من أجل $t=2/3$ نحصل على : $\begin{cases}x=3+2\left(\frac{2}{3}\right)=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}\\y=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$

من أجل $t'=4/3$ نحصل على : $\begin{cases}x=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}\\y=1+2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{11}{3}\\z=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}\end{cases}$

نتيجة : المستقيمان لا يتقاطعان في أي نقطة .
إذن : فهما من مستويين مختلفين .

التمرين ــ 13

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة A(0 ; -1 ; 2)
و يوازي المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases}x=1-2k\\y=2k\\z=5\end{cases}$ حيث $k \in IR$

الحـــل ــ 13

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D) إذن : $\vec{u}$ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (d) .

إذن : (d) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases}x-0=-2t\\y+1=2t\\z-2=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-2t\\y=2t-1\\z=2\end{cases}$ حيث $t \in IR$

التمرين ــ 14

ليكن (D) و (D') مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$\begin{cases}x=1-t\\y=2+3t\\z=t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=2k\\y=5-6k\\z=1-2k\end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

أثبت أن (D) و (D') متطابقان .

الحـــل ــ 14

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه (D')

لدينا : $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{-2}{1} = -2$

إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان

أي : المستقيمان (D) و (D') متوازيان .

منه : إذا وجدت نقطة مشتركة بين (D) و (D') فإن (D) و (D') متطابقان

لنحل الجملة : $\begin{cases} 2k = 1 - t \\ 5 - 6k = 2 + 3t \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2k + t - 1 = 0 \\ 6k + 3t - 3 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 6k + 3t - 3 = 0 \\ 6k + 3t - 3 = 0 \end{cases}$

تكافئ $6k + 3t - 3 = 0$

تكافئ $3t = 3 - 6k$

تكافئ $t = 1 - 2k$

منه : المعادلة $t = 1 - 2k$ محققة .

أي الجملتين $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 2k \\ y = 5 - 6k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$ متكافئتان إذن : المستقيمان (D) و (D') متطابقان .

ملاحظة : يكفي إعطاء قيمة لـ t ثم استنتاج وجود نقطة مشتركة بين (D) و (D') كما يلي :

من أجل $t = 1$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$

من أجل $k = 0$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$ إذن : النقطة $M(0 ; 5 ; 1)$ مشتركة بين (D) و (D') و بما أنهما متوازيان فهما متطابقان .

التمرين – 15

(D) و (D') مستقيمان تمثيلهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + 2k \\ z = 1 + k \end{cases}$ حيث $k \in IR$ و $t \in IR$

أثبت أن (D) و (D') من نفس المستوي .

الحـــل – 15

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هوشعاع توجيه المستقيم (D')

$\frac{-1}{1} \neq \frac{2}{2}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا مرتبطين خطيا (غير متوازيان)

منه : المستقيمان (D) و (D') ليسا متوازيان .

نتيجة : { إما (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة
أو (D) و (D') ليسا من نفس المستوي

إذن : يكفي أن نثبت أن (D) و (D') يتقاطعان كما يلي :

الجملة $\begin{cases} -4 + t = 1 - k \\ 4 + 2t = 2 + 2k \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} t = 5 - k \\ 2t = -2 + 2k \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2t = 10 - 2k \\ 2t = -2 + 2k \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2t = 10 - 2k \\ 4t = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} t = 5 - k \\ t = 2 \end{cases}$ تكافئ

$\begin{cases} k = 5 - t \\ t = 2 \end{cases}$ تكافئ

$\begin{cases} k = 3 \\ t = 2 \end{cases}$ تكافئ

من أجل $t = 2$ نحصل على : $\begin{cases} x = -4 + 2 = -2 \\ y = 4 + 4 = 8 \\ z = 2 + 2 = 4 \end{cases}$

من أجل $k = 3$ نحصل على : $\begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 + 6 = 8 \\ z = 1 + 3 = 4 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(-2 ; 8 ; 4)$

إذن : (D) و (D') ينتميان إلى نفس المستوي .

التمرين ــ 16

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 3 + 2m \\ y = m \\ z = -1 - 4m \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $m \in IR$

1 ــ بين أن (D) و (T) ليسا من نفس المستوي

2 ــ عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم (P) يوازي (T) و يقطع (D)

الحـل ــ 16

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوزيان .

منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .

أي إما (D) و (T) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

$\begin{cases} 1 + t = 3 + 2m \\ 1 - 2t = m \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 1 + t = 3 + 2(1 - 2t) \\ m = 1 - 2t \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t + 4t = 3 + 2 - 1 \\ m = 1 - 2t \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t = 4/5 \\ m = 1 - \frac{8}{5} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t = 4/5 \\ m = -3/5 \end{cases}$

من أجل $t = 4/5$ نحصل على : $\begin{cases} x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} \\ y = 1 - \frac{8}{5} = \frac{-3}{5} \\ z = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{5} \end{cases}$

من أجل $m = -3/5$ نحصل على : $\begin{cases} x = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5} \\ y = \frac{-3}{5} \\ z = -1 + \frac{12}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$

نتيجة : المستقيمان (D) و (T) لا يتقاطعان في أية نقطة . إذن : (D) و (T) ليسا من نفس المستوي .

2 ــ (P) يوازي (T) إذن الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (P)

منه تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = \alpha + 2k \\ y = \beta + k \\ z = \lambda - 4k \end{cases}$ حيث $k \in IR$ و α ، β ، λ أعداد حقيقية ثابتة نعينها كما يلي :

(P) يقطع (D) إذن يكفي أن نعين α ، β ، λ حتى يكون المستقيمان (P) و (D) يشتركان في نقطة .

من أجل $t = 0$ نحصل على : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

نضع $k = 0$ إذن : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \lambda \end{cases}$ منه $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

نتيجة : يكفي أخذ المستقيم (P) ذو التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - 4k \end{cases}$

التمرين ــ 17

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = -5 - k \\ z = -8 - 4k \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (T) و (D) مستقيمان منطبقان .

الحـل ــ 17

نضع $t = 2 + k$ إذن : $k = t - 2$

منه : $\begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = -5 - k \\ z = -8 - 4k \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 9 + 5(t-2) \\ y = -5 - (t-2) \\ z = -8 - 4(t-2) \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 9 + 5t - 10 \\ y = -5 - t + 2 \\ z = -8 - 4t + 8 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases}$

نتيجة : التمثيليين الوسيطيين للمستقيمين (D) و (T) متكافئين

إذن : المستقيمان (D) و (T) منطبقان

ملاحظة : فكرة وضع $t = 2 + k$ جاءت من المساواة $-8 - 4k = -4t$

أي $-4(2 + k) = -4t$ أي $2 + k = t$

إذا لم تلاحظ ذلك يمكن ان نثبت أن (D) و (T) ليسا متوازيان و ليسا متقاطعان (الطريقة الكلاسيكية) .

التمرين ــ 18

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + 4k \\ z = k \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR \text{ و } k \in IR$$

بين أن (D) و (T) متوازيان .

الحـــل ــ 18

$\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (D)

$\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (T)

$\frac{-2}{-2} = \frac{4}{4} = \frac{1}{1} = 1$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان .

منه المستقيمان (D) و (T) متوازيان .

التمرين ــ 19

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 5 + 3k \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR \text{ و } k \in IR$$

بين أن (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

الحـــل ــ 19

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

$\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوزيان .

منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .

إذن يكفي أن نثبت أن (D) و (T) لا يتقاطعان في أية نقطة .

$$\begin{cases} -3 + t = -1 + k \\ t = 2 - 2k \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} -3 + 2 - 2k = -1 + k \\ t = 2 - 2k \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} -1 + 1 = 3k \\ t = 2 - k \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} k = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

من أجل $k = 0$ نحصل على : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$

من أجل $t = 2$ نحصل على : $\begin{cases} x = -3 + 2 = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3(2) = 7 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (T) لا يتقاطعان منه (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

التمرين ــ 20

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = -1 + 4k \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR \text{ و } k \in IR$$

بين أن (D) و (T) متقاطعان .

الحـل ــ 20

$$\begin{cases} -3+2t=k \\ 2-t=1-k \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} k=-3+2t \\ 2-t=1-(-3+2t) \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} k=-3+2t \\ 2-t=1+3-2t \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} k=-3+2t \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} k=-3+2(2) \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} k=1 \\ t=2 \end{cases}$$

من أجل $k=1$ نحصل على : $\begin{cases} x=1 \\ y=1-1=0 \\ z=-1+4=3 \end{cases}$

من أجل $t=2$ نحصل على : $\begin{cases} x=-3+2(2)=1 \\ y=2-2=0 \\ z=1+2=3 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة $A(1\,;0\,;3)$

التمرين ــ 21

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلاتهما الديكارتيتين :

1 ــ $(P) : x+y+z=4$ **و** $(Q) : 3x+3y+3z-12=0$

2 ــ $(P) : x+y+z=4$ **و** $(Q) : 3x+3y+3z+12=0$

3 ــ $(P) : 2x-y+z+2=0$ **و** $(Q) : x+y+z=0$

4 ــ $(P) : -3x+2y+z-1=0$ **و** $(Q) : x-y+2z=5$

الحـل ــ 21

1 ــ

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+3y+3z-12=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 3x+3y+3z=12 \\ 3x+3y+3z=12 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } 3x+3y+3z=12$$

$$\text{يكافئ } x+y+z-4=0$$

نتيجة : المستويان (P) و (Q) متطابقان إذن : تقاطعهما هو المستوي نفسه ذو المعادلة $x+y+z-4=0$

2 ــ

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+3y+3z+12=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 3x+3y+3z=12 \\ 3x+3y+3z=-12 \end{cases}$$ مستحيل

نتيجة : الجملة لا تقبل حلولا منه المستويان (P) و (Q) لا يتقاطعان .

3 ــ

$$\begin{cases} 2x-y+z+2=0 \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ x+y+z=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $3x+2z+2=0$

منه : $x=\frac{-2}{3}z-\frac{2}{3} \ \ldots\ldots\ldots (3)$

بتعويض (3) في (2) نحصل على : $-\frac{2}{3}z-\frac{2}{3}+y+z=0$

منه : $y+\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}=0$

أي : $y=\frac{-1}{3}z+\frac{2}{3} \ \ldots\ldots (4)$

نتيجة : الجملة $\begin{cases} 2x-y+z+2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=\frac{-2}{3}z-\frac{2}{3} \\ y=\frac{-1}{3}z+\frac{2}{3} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x=\frac{-2}{3}t-\frac{2}{3} \\ y=\frac{-1}{3}t+\frac{2}{3} \\ z=t \end{cases}$ $t \in R$

منه : المستويان (P) و (Q) يتقاطعان في المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=\frac{-2}{3}t-\frac{2}{3} \\ y=\frac{-1}{3}t+\frac{2}{3} \\ z=t \end{cases}$

4 ــ $\begin{cases} -3x+2y+z-1=0 \\ x-y+2z-5=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} -3x+2y+z-1=0 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$

لنبحث عن x و y بدلالة z (حل الجملة ذات المجهولين x و y)

$$\det=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3-2=1$$

$$\begin{cases} x=\begin{vmatrix} 2 & z-1 \\ -1 & 2z-5 \end{vmatrix}=4z-10+z-1=5z-11 \\ y=\begin{vmatrix} z-1 & -3 \\ 2z-5 & 1 \end{vmatrix}=z-1+6z-15=7z-16 \end{cases}$$

نتيجة : الجملة $\begin{cases} -3x+2y+z-1=0 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=5z-11 \\ y=7z-16 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x=5t-11 \\ y=7t-16 \\ z=t \end{cases}$

منه : المستويان (P) و (Q) يتقاطعان في المستوي ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=5t-11 \\ y=7t-16 \\ z=t \end{cases}$ $t \in R$

التمرين ــ 22

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=4-5k \\ y=3-2k \\ z=-1+2k \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR \text{ و } k \in IR$$

1 ــ تحقق أن المستقيمان (D) و (T) متقاطعان .

2 ــ أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T)

الحـل ــ 22

1 ــ إذا كانت A(x ; y ; z) نقطة مشتركة بين (D) و (T) فإن $x=-1$

منه : $4-5k=-1$ أي $k=1$

إذن : $\begin{cases} x=-1 \\ y=3-2(1)=1 \\ z=-1+2(1)=1 \end{cases}$

من جهة أخرى : من أجل $t=0$: $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة A(-1 ; 1 ; 1)

2 ــ من أجل $t = 1$ فإن $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

منه $B(-1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ تنتمي إلى (D)

من أجل $k = 0$ فإن $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

منه $C(4\ ;\ 3\ ;\ -1)$ تنتمي إلى (T)

نتيجة : المستوي الذي يشمل المستقيمين (D) و (T) هو المستوي (P) الذي يشمل النقط A ، B ، C

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1+1 \\ 0-1 \\ -1-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4+1 \\ 3-1 \\ -1-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) إذن : $\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$\begin{cases} a(0) + b(-1) + c(-2) = 0 \\ a(5) + b(2) + c(-2) = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} -b - 2c = 0 \\ 5a + 2b - 2c = 0 \end{cases}$

من أجل $b = -2$ نحصل على $\begin{cases} 2 - 2c = 0 \\ 5a + 2b - 2c = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} c = 1 \\ 5a + 2b - 2c = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} c = 1\ ;\ b = -2 \\ 5a + 2(-2) - 2(1) = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} c = 1\ ;\ b = -2 \\ a = 6/5 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix} 6/5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

إذن : $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع ناظمي لـ (P)

منه : معادلة (P) تكتب من الشكل : $6x - 10y + 5z + \alpha = 0$ حيث $\alpha \in IR$

بما أن $A \in (P)$ فإن : $6(-1) - 10(1) + 5(1) + \alpha = 0$

أي : $\alpha = 11$

نتيجة : معادلة المستوي (P) هي : $6x - 10y + 5z + 11 = 0$

التمرين ــ 23

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 3 - 2k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$

1 ــ تحقق أن المستقيمان (D) و (T) متوازيان .

2 ــ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T)

الحـــل ــ 23

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D)

$\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

$\frac{-4}{4} = \frac{2}{-2} = \frac{-2}{2} = -1$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوزيان .

منه : (D) و (T) متوازيان .

2 ــ من أجل $t = 0$: $\begin{cases}x = -2\\y = 3\\z = 1\end{cases}$ منه A(- 2 ; 3 ; 1) نقطة من (D)

من أجل $t = 1$: $\begin{cases}x = -2-4 = -6\\y = 3+2 = 5\\z = 1-2 = -1\end{cases}$ منه B(- 6 ; 5 ; -1) نقطة من (D)

من أجل $k = 0$: $\begin{cases}x = 1\\y = 3\\z = -1\end{cases}$ منه C(1 ; 3 ; -1) نقطة من (T)

نتيجة : المستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T) هو المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C كما يلي :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6+2\\5-3\\-1-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$ هو نفسه شعاع توجيه المستقيم (D)

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+2\\3-3\\-1-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

إذن : $\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}-4a+2b-2c=0\\3a-2c=0\end{cases}$

من أجل $a = 2$ نحصل على : $\begin{cases}-8+2b-2c=0\\6-2c=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}-4+b-c=0\\c=3\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}b=c+4\\c=3\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}b=7\\c=3\end{cases}$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

منه (P) له المعادلة : $2x+7y+3z+\alpha=0$ حيث $\alpha \in IR$

بما أن $A \in (P)$ فإن : $2(-2)+7(3)+3(1)+\alpha=0$

أي : $\alpha = -20$

خلاصة : (p) له المعادلة $2x+7y+3z-20=0$

تحقيق :

$$2x+7y+3z-20=2(-2-4t)+7(3+2t)+3(1-2t)-20 \quad \text{منه} \quad \begin{cases} x=-2-4t \\ y=3+2t \\ z=1-2t \end{cases}$$
$$=-4-8t+21+14t+3-6t-20$$
$$=0$$

$$2x+7y+3z-20=2(1+4k)+7(3-2k)+3(-1+2k)-20 \quad \text{منه} \quad \begin{cases} x=1+4k \\ y=3-2k \\ z=-1+2k \end{cases}$$
$$=2+8k+21-14k-3+6k-20$$
$$=0$$

التمرين ــ 24

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستوي (P) و المستقيم (D)

1 ــ $(P): -2x+y-z+3=0$ و $(D): \begin{cases} x=t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}$

2 ــ $(P): x+3y-z+1=0$ و $(D): \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=2 \end{cases}$

3 ــ $(P): x+y-2z+2=0$ و $(D): \begin{cases} x=5+t \\ y=1+t \\ z=4+t \end{cases}$

الحـــل ــ 24

في كل مرة نعوض x ، y ، z في معادلة المستوي (P) لنحصل على قيمة الوسيط t ثم نبحث عن احداثيات نقطة التقاطع إذا وجدت . أما إذا كانت المعادلة محققة من أجل كل عدد حقيقي t فإن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P) و عليه فإن $(D) \cap (P) = (D)$

1 ــ $\begin{cases} -2x+y-z+3=0 \\ x=t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}$

منه $-2(t)+(-1+3t)-(2+t)+3=0$

أي : $-2t-1+3t-2-t+3=0$

أي $0=0$ دائما محققة

نتيجة : (D) ينتمي إلى المستوي (p) منه $(D) \cap (P) = (D)$

2 ــ $\begin{cases} x+3y-z+1=0 \\ x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=2 \end{cases}$

منه $1+3t+3(-2-2t)-2+1=0$

أي $1+3t-6-6t-1=0$

أي $-3t=6$

أي $t=-2$

بالتعويض في معادلات (D) : $\begin{cases} x=1+3(-2)=-5 \\ y=-2-2(-2)=2 \\ z=2 \end{cases}$

نتيجة : $(D) \cap (P) = \{A(-5\,;2\,;2)\}$

3 ــ $\begin{cases} x+y-2z+2=0 \\ x=5+t \\ y=1+t \\ z=4+t \end{cases}$

منه $5+t+1+t-2(4+t)+2=0$

أي : $6+2t-8-2t+8=0$

أي : $6=0$ مستحيل

نتيجة : $(D) \cap (P) = \varnothing$

التمرين ــ 25

لتكن النقط $w(1\,;1\,;1)$ ؛ $A(3\,;3\,;0)$

1 ــ أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها w و تشمل النقطة A .

2 ــ أكتب معادلة لـــ (P) المستوي المماس لـــ (S) في النقطة A

3 ــ لتكن النقط $A(1;2;-1)$ ؛ $B(-1;2;-1)$ ؛ $C(0;0;-3)$ ؛ $D(1;2;-3)$

a) تحقق أن النقط B ، C ، D ليست على استقامة واحدة .

b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BCD) .

4 ــ بين أن (BCD) و (P) متعامدان .

5 ــ أكتب تمثيلا وسيطيا لتقاطع (P) و (BCD)

الحـل ــ 25

1 ــ نصف قطر الكرة هو : $WA = \sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

منه معادلة (S) : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 9$

أي : $x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1=9$

أي : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

2 ــ المستوي (P) مماس لـ (S) عند A إذن : $\left\{\begin{array}{l}(P) \text{ يشمل } A \\ \overrightarrow{WA} \text{ شعاع ناظمي لـ } (P)\end{array}\right.$

لدينا $\overrightarrow{WA}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

منه : (P) له المعادلة $2x+2y-z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .

بما أن $A \in (P)$ فإن : $2(3)+2(3)-0+\alpha=0$

أي : $\alpha = -12$

نتيجة : معادلة (P) هي : $2x+2y-z-12=0$

3 ــ a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0+1\\0-2\\-3+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1+1\\2-2\\-3+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

بما أن $\frac{2}{1} \neq \frac{0}{-2}$ فإن $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ليسا متوازيان

منه النقط B ، C ، D ليست على استقامة واحدة .

b) ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (BCD)

$\left\{\begin{array}{l}\vec{u}\perp\overrightarrow{BC}\\ \vec{u}\perp\overrightarrow{BD}\end{array}\right.$ يكافئ $\left\{\begin{array}{l}a-2b-2c=0\\2a-2c=0\end{array}\right.$

من أجل $a=1$ نحصل على : $\left\{\begin{array}{l}1-2b-2c=0\\2=2c\end{array}\right.$ يكافئ $\left\{\begin{array}{l}1-2c=2b\\c=1\end{array}\right.$

يكافئ $\left\{\begin{array}{l}-1=2b\\c=1\end{array}\right.$

يكافئ $\left\{\begin{array}{l}b=-1/2\\c=1\end{array}\right.$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\1\end{pmatrix}$ منه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (BCD)

إذن : معادلة (BCD) هي : $2x-y+2z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .

$B \in (BCD)$ إذن : $2(-1)-2+2(-1)+\alpha=0$

أي : $\alpha = 6$

نتيجة : معادلة المستوي (BCD) هي : $2x-y+2z+6=0$

4 ــ $\overrightarrow{WA}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (BCD)

$\overrightarrow{WA}\cdot\vec{u} = 2(2) + 2(-1) - 1(2) = 4 - 4 = 0$

إذن : $\overrightarrow{WA} \perp \vec{u}$

منه : المستويان (BCD) و (P) متعامدان .

5 ـ $\begin{cases} 2x + 2y - z - 12 = 0 \\ 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$ نبحث عن x و y بدلالة z كما يلي :

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -z-12 \\ -1 & 2z+6 \end{vmatrix}}{-6} = \dfrac{4z + 12 - z - 12}{-6} = \dfrac{3z}{-6} = \dfrac{-1}{2}z \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -z-12 & 2 \\ 2z+6 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \dfrac{-2z - 24 - 4z - 12}{-6} = z + 6 \end{cases}$$

نتيجة : تقاطع المستويين (BCD) و (P) هو المستقيم ذو التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{2}t \\ y = t + 6 \\ z = t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR$$

التمرين ـ 26

عين في كل حالة من الحالات التالية تقاطع المستويات (P) ، (Q) ، (R) المعرفة بمعادلاتها الديكارتية :

1 ـ $(P) : x + y + z = 4$ ؛ $(Q) : y + \dfrac{1}{2}z = 3$ ؛ $(R) : 3x + 2y = 6$

2 ـ $(P) : x + y + z = 4$ ؛ $(Q) : -x + y - z = 2$ ؛ $(R) : 3x + 4y + 3z = 15$

الحـل ـ 26

1 ـ $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + \dfrac{1}{2}z = 3 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x + y + z = 4 \ldots\ldots (1) \\ -2y - z = -6 \ldots\ldots (2) \\ 3x + 2y = 6 \ldots\ldots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على $x - y = -2 \ldots\ldots (4)$

نحل جملة المعادلتين (3) و (4) كما يلي :

$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$

بالجمع نحصل على $5x = 2$ منه $x = 2/5$

نعوض في المعادلة (4) : $\dfrac{2}{5} - y = -2$

منه : $y = \dfrac{2}{5} + 2$ أي $y = 12/5$

نعوض x و y في المعادلة (1) : $\dfrac{2}{5} + \dfrac{12}{5} + z = 4$

منه : $z = 4 - \dfrac{14}{5}$ أي $z = 6/5$

نتيجة : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة $A(2/5 ; 12/5 ; 6/5)$

2 ـ $\begin{cases} x+y+z=4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -x+y-z=2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 3x+4y+3z=15 \ \ldots\ldots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $2y=6$ منه $y=3$

نعوض y في المعادلة (1) نحصل على : $x+3+z=4$ منه $z=1-x$

نعوض y و z في المعادلة (3) نحصل على : $3x+4(3)+3(1-x)=15$

أي : $3x+12+3-3x=15$

أي : $15=15$ و هذا محقق دائما .

نتيجة : $\begin{cases} y=3 \\ z=1-x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x=1-z \\ y=3 \end{cases}$

منه : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=1-t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

التمرين ـ 27

حل في IR^3 جمل المعادلات التالية :

1 ـ $\begin{cases} 2x-y-7z+26=0 \\ x+y-2z+7=0 \\ -x-2y+z-3=0 \end{cases}$

2 ـ $\begin{cases} 4x+2y-z+2=0 \\ x+y-2z=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$

الحـل ـ 27

1 ـ $\begin{cases} 2x-y-7z+26=0 \ \ldots\ldots (1) \\ x+y-2z+7=0 \ \ldots\ldots\ldots (2) \\ -x-2y+z-3=0 \ \ldots\ldots (3) \end{cases}$

نحل جملة المعادلتين (1) و (2) ذات المجهولين x و y بدلالة z :

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1=3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -7z+26 \\ 1 & -2z+7 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2z-7+7z-26}{3} = 3z-11$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -7z+26 & 2 \\ -2z+7 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-7z+26+4z-14}{3} = -z+4$$

نعوض x و y في المعادلة (3) نحصل على : $-(3z-11)-2(-z+4)+z-3=0$

أي : $-3z+11+2z-8+z-3=0$

أي : $0=0$ دائما محقق .

نتيجة : الجملة تكافئ $\begin{cases} x=3z-11 \\ y=-z+4 \\ z \in IR \end{cases}$

إذن : حلولها هي مجموعة غير منتهية .

هندسيا : إذا اعتبرنا المستويات (P) ، (Q) ، (R) التي معادلاتها على الترتيب (1) ، (2) ، (3) فإن تقاطعها هي المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=3t-11 \\ y=-t+4 \\ z=t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

2 ـ $\begin{cases} 4x+2y-z+2=0 \ \ldots\ldots (1) \\ x+y-2z=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -x-2y+z+1=0 \ \ldots\ldots (3) \end{cases}$

نحل جملة المعادلتين (1) و (2) ذات المجهولين x و y بدلالة z :

$$\det = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -z+2 \\ 1 & -2z \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-4z+z-2}{2} = \dfrac{-3}{2}z - 1 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -z+2 & 4 \\ -2z & 1 \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-z+2+8z}{2} = \dfrac{7}{2}z + 1 \end{cases}$$

نعوض x و y في المعادلة (3) نحصل على : $-\left(\frac{-3}{2}z-1\right)-2\left(\frac{7}{2}z+1\right)+z+1=0$

أي : $\frac{3}{2}z+1-7z-2+z+1=0$

أي : $\frac{-9}{2}z=0$

أي : $z=0$

بالتعويض في x و y نحصل على $x=-1$ ؛ $y=1$

نتيجة : الجملة تقبل حلا وحيدا هو الثلاثية $\{(-1\,;\,1\,;\,0)\}$

التمرين ــ 28

لتكن النقط $A(2\,;\,1\,;\,1)$ ؛ $B(3\,;\,0\,;\,1)$ ؛ $C(0\,;\,1\,;\,5)$ ؛ $D(-1\,;\,0\,;\,1)$ ؛ $E(6\,;\,2\,;\,3)$

1 ــ تحقق أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا (ABC) . يطلب معادلته الديكارتية

2 ــ عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)

3 ــ عين احداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم (DE) و المستوي (ABC)

الحـــل ــ 28

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-1 \\ 5-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

بما أن $\frac{0}{-1} \neq \frac{-2}{1}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان

منه النقط A ، B ، C تعين مستويا .

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{AC} \perp \vec{u} \end{cases}$ منه $\begin{cases} a-b=0 \\ -2a+4c=0 \end{cases}$

منه $\begin{cases} a=b \\ c=\dfrac{2a}{4} \end{cases}$

من أجل $a=2$ نحصل على : $b=2$ و $c=1$

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

نتيجة : معادلة المستوي (ABC) هي : $2x+2y+z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي

إذن : $A \in (ABC)$ $2(2)+2(1)+1+\alpha=0$

منه : $\alpha=-7$

منه : معادلة المستوي (ABC) هي : $2x+2y+z-7=0$

2 ــ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6+1\\2-0\\3-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$

إذن : (DE) يشمل النقطة D و شعاع توجيهه $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$

منه تمثيله الوسيطي : $\begin{cases}x+1=7t\\y-0=2t\\z-1=2t\end{cases}$

أي : $\begin{cases}x=7t-1\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}$ حيث $t\in IR$

3 ــ $\begin{cases}2x+2y+z-7=0\\x=7t-1\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}$ منه $\begin{cases}2(7t-1)+2(2t)+(2t+1)-7=0\\x=7t-1\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}$

أي $\begin{cases}14t-2+4t+2t-6=0\\x=7t-1\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}$

أي $\begin{cases}t=8/20=2/5\\x=7(2/5)-1\\y=2(2/5)\\z=2(2/5)+1\end{cases}$

أي $\begin{cases}x=9/5\\y=4/5\\z=9/5\end{cases}$

نتيجة : (DE) و (ABC) يتقاطعان في النقطة I(9/5 ; 4/5 ; 9/5)

التمرين ــ 29

لتكن النقط A(1 ; 0 ; 2) ؛ B(3 ; 2 ; 4) ؛ C(1 ; 4 ; 2) ؛ D(5 ; 2 ; 4)

نعرف النقط I ، J ، K كمايلي : I منتصف [AB] ، J منتصف [CD] ، $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

1 ــ عين احداثيات النقط I ، J ، K ثم تحقق أنها ليست على استقامة واحدة .

2 ــ تحقق أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية له .

3 ــ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AD) ثم تحقق أن (IJK) و (AD) يتقاطعان في نقطة L حيث $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

الحـل ــ 29

1 ــ $I\left(\frac{3+1}{2};\frac{2+0}{2};\frac{4+2}{2}\right)$ أي I(2 ; 1 ; 3)

$J\left(\frac{5+1}{2};\frac{2+4}{2};\frac{4+2}{2}\right)$ أي J(3 ; 3 ; 3)

لتكن K(x ; y ; z)

$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ يكافئ $\begin{cases}x-3=\frac{1}{4}(1-3)\\y-2=\frac{1}{4}(4-2)\\z-4=\frac{1}{4}(2-4)\end{cases}$

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ z = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$ يكافئ

نتيجة : $k(5/2 ; 5/2 ; 7/2)$

خلاصة : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 3-3 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 3-\frac{5}{2} \\ 3-\frac{5}{2} \\ 3-\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\frac{1/2}{1} \neq \frac{1/2}{2}$ إذن : $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{KJ}$ ليسا متوازيان

منه : النقط I ، J ، K ليست على استقامة واحدة .

2 ـ $\vec{u} . \overrightarrow{IJ} = -2(1) + 1(2) - 1(0) = -2 + 2 = 0$

$\vec{u} . \overrightarrow{JK} = -2(1/2) + 1(1/2) - 1(-1/2) = -1 + 1 = 0$

نتيجة : $\begin{cases} \vec{u} . \overrightarrow{IJ} = 0 \\ \vec{u} . \overrightarrow{JK} = 0 \end{cases}$ إذن : $\vec{u}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{JK}$

منه : $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (IJK)

إذن : (IJK) له المعادلة $-2x + y - z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي

$I \in (IJK)$ إذن : $-2(2) + 1 - 3 + \alpha = 0$

منه $\alpha = 6$

خلاصة : معادلة المستوي (IJK) : $-2x + y - z + 6 = 0$

3 ـ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-0 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (AD) : $\begin{cases} x - 1 = 4t \\ y - 0 = 2t \\ z - 2 = 2t \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 2t \\ z = 2t + 2 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

تقاطع (AD) و المستوي (IJK)

منه $\begin{cases} -2x + y - z + 6 = 0 \\ x = 4t + 1 \\ y = 2t \\ z = 2t + 2 \end{cases}$ $-2(4t + 1) + 2t - (2t + 2) + 6 = 0$

أي $-8t - 2 + 2t - 2t - 2 + 6 = 0$

أي $t = \frac{-2}{-8}$

أي $t = 1/4$

منه : $\begin{cases} x = 4(1/4) + 1 = 2 \\ y = 2(1/4) = 1/2 \\ z = 2(1/4) + 2 = 5/2 \end{cases}$

نتيجة : $L(2 ; 1/2 ; 5/2)$

إذن : $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}2-1\\\frac{1}{2}-0\\\frac{5}{2}-2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

منه : $4\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ أي $4\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AD}$

منه : $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

لتكن A(-1 ; 2 ; 0) نقطة من الفضاء .

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له .

الحـل ــ 1

(P) له المعادلة $x+y-z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي

$A\in(P)$ إذن : $-1+2-0+\alpha=0$

أي : $\alpha=-1$

منه : معادلة المستوي (P) هي $x+y-z-1=0$

ملاحظة : يمكن تعيين معادلة المستوي (P) بطريقة أخرى كما يلي :

لتكن M(x ; y ; z) نقطة من الفضاء إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z\end{pmatrix}$

$M\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

يكافئ $1(x+1)+1(y-2)-1(z)=0$

يكافئ $x+y-z-1=0$ و هي معادلة المستوي (P)

التمرين ــ 2

لتكن A(1 ; 2 ; 3) نقطة من الفضاء و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع .

1 ــ عين معادلة للمجموعة (E) من النقط M التي تحقق $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=2$

2 ــ ما هي طبيعة المجموعة (E) ؟

الحـل ــ 2

1 ــ لتكن M(x ; y ; z) إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=2$ يكافئ $1(x-1)+2(y-2)-1(z-3)=0$

يكافئ $x+2y-z-1-4+3=0$

يكافئ $x+2y-z-2=0$ و هي معادلة (E)

2 ــ (E) لها معادلة من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

إذن : (E) هي المستوي ذو المعادلة $x + 2y - z - 2 = 0$

التمرين ــ 3

(P) مستوي معادلته $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - z = 0$

عين معلما ديكارتيا للمستوي (P)

الحـــل ــ 3

يكفي تعيين ثلاث نقط من المستوي (P) ليست على استقامة واحدة .

ليكن $x = 0$ و $y = 0$ إذن : $z = 0$ منه $A(0 ; 0 ; 0)$ نقطة من (P)

ليكن $x = 1$ و $y = 2$ إذن : $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} - z = 0$ أي $z = 1$

منه $B(1 ; 2 ; 1)$ نقطة من (P)

ليكن $x = 0$ و $y = 4$ إذن : $0 + \frac{4}{4} - z = 0$ منه $z = 1$

إذن : $C(0 ; 4 ; 1)$ نقطة من (P)

نتيجة : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$

$\frac{0}{1} \neq \frac{4}{2}$ إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان .

منه : الثلاثية $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ تعين معلما ديكارتيا للمستوي (P)

التمرين ــ 4

(P) هو المستوي ذو المعادلة $x + y - 2z + 3 = 0$

نعتبر النقطة $A(2 ; -3 ; 1)$ و الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$

بين أن $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ معلم متعامد في المستوي (P)

الحـــل ــ 4

حتى يكون $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ معلما للمستوي (P) يلزم و يكفي أن تتحقق الشروط التالية :

(1) : $A \in (P)$

(2) : توجد نقطة B من (P) حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

(3) : توجد نقطة C من (P) حيث $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

(4) : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان

هل الشرط (1) محقق ؟ نعوض احداثيات A في معادلة (P) كما يلي :

$2 - 3 - 2(1) + 3 = 2 - 2 = 0$

إذن : $A \in (P)$ أي الشرط (1) محقق .

هل الشرط (2) محقق ؟ لتكن $B(x ; y ; z)$

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ يكافئ $\begin{cases} x - 2 = 1 \\ y + 3 = 1 \\ z - 1 = 1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$

منه : $B(3 ; -2 ; 2)$

هل $B \in (P)$ ؟ $3 - 2 - 2(2) + 3 = 6 - 6 = 0$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} B \in (P) \\ \overrightarrow{AB} = \vec{u} \end{matrix}\right\}$ إذن : الشرط (2) محقق .

هل الشرط (3) محقق ؟ لتكن $C(x ; y ; z)$

$$\begin{cases} x-2=3 \\ y+3=-3 \\ z-1=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \overrightarrow{AC}=\vec{v}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ y=-6 \\ z=1 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

منه : $C(5\ ;-6\ ;1)$

هل $C \in (P)$ ؟ $5-6-2(1)+3=8-8=0$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} C \in (P) \\ \overrightarrow{AC}=\vec{v} \end{matrix}\right\}$ إذن : الشرط (3) محقق .

هل الشرط (4) محقق ؟ لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$

بما أن $\frac{3}{1} \neq \frac{-3}{1}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان .

إذن : الشرط (4) محقق .

خلاصة : الشروط (1) ، (2) ، (3) ، (4) محققة إذن $(A\ ;\vec{u}\ ;\vec{v})$ هو فعلا معلم للمستوي (P)

يبقى أن نتحقق أن $\vec{u} \perp \vec{v}$ حتى يكون المعلم متعامد .

لدينا : $\vec{u}\,.\,\vec{v}=3(1)-3(1)+0(1)=0$

إذن : $\vec{u} \perp \vec{v}$

منه : المعلم $(A\ ;\vec{u}\ ;\vec{v})$ معلم متعامد .

التمرين ــ 5

(P) مستوي يشمل النقط $A(1:-1\ ;-1)$ ؛ $B(0\ ;1\ ;1)$ ؛ $C(1\ ;2\ ;0)$

1 ــ عين شعاعا ناظميا لـــ (P)

2 ــ استنتج معادلة ديكارتية لـــ (P)

الحـــل ــ 5

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\1+1\\1+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-1\\2+1\\0+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

بما أن $\frac{0}{-1} \neq \frac{3}{2}$ فإن A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

إذن فعلا النقط A ، B ، C تعين مستوي و ليكن (P)

$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـــ (P) يكافئ $\begin{cases} \vec{u}\,.\,\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{u}\,.\,\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -a+2b+2c=0 \\ 3b+c=0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

من أجل $b=1$ نحصل على : $\begin{cases} a=2b+2c \\ c=-3 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} a=2+2(-3)=-4 \\ c=-3 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

2 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـــ (P) إذن (P) له المعادلة :
$-4x+y-3z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .
$A \in (P)$ إذن : $-4(1)-1-3(-1)+\alpha=0$
أي $\alpha=2$.
منه : معادلة المستوي (P) هي : $-4x+y-3z+2=0$

التمرين ــ 6

(P) هو مجموعة النقط المعرفة بالتمثيل الوسيطي التالي :

$\begin{cases}x=1+t+2m\\y=-2+3t\\z=1-m\end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $m \in IR$

لتكن النقطة A(1 ; - 2 ; 1) و الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

1 ــ بين أن (P) هو مستوي للمعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$
2 ــ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

الحـــل ــ 6

1 ــ من أجل $t=0$ و $m=0$ نحصل على $\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=1\end{cases}$

منه النقطة A(1 ; - 2 ; 1) تنتمي إلى (P)
لتكن B(x ; y ; z) نقطة من الفضاء .

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ يكافئ $\begin{cases}x-1=1\\y+2=3\\z-1=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$

منه : B(2 ; 1 ; 1)

من أجل $m=0$ و $t=1$ نحصل على $\begin{cases}x=1+1+0=2\\y=-2+3=1\\z=1-0=1\end{cases}$

منه النقطة B(2 ; 1 ; 1) تنتمي إلى (P)
لتكن C(x ; y ; z) نقطة من الفضاء .

$\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ يكافئ $\begin{cases}x-1=2\\y+2=0\\z-1=-1\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x=3\\y=-2\\z=0\end{cases}$

منه : C(3 ; - 2 ; 0)

من أجل $m=1$ و $t=0$ نحصل على $\begin{cases}x=1+0+2=3\\y=-2+0=-2\\z=1-1=0\end{cases}$

منه : C(3 ; - 2 ; 0) تنتمي إلى (P)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

بما أن $0/3 \neq 2/1$ فإن A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

خلاصة : A ، B ، C ليست على استقامة واحدة من نفس المجموعة (P)

إذن : (P) هو المستوي للمعلم $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ أي المعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$

2 ــ ليكن $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{w} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{w} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a + 3b = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$

من أجل $a = 3$ نحصل على $\begin{cases} 3 + 3b = 0 \\ 6 - c = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} b = -1 \\ c = 6 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

منه (P) له المعادلة $3x - y + 6z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي

$A \in (P)$ إذن : $3(1) - (-2) + 6(1) + \alpha = 0$

أي $\alpha = -11$

منه : (P) له المعادلة $3x - y + 6z - 11 = 0$

تحقيق : $\begin{cases} x = 1 + t + 2m \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - m \end{cases}$ إذن :

$$\begin{aligned} 3x - y + 6z - 11 &= 3 + 3t + 6m + 2 - 3t + 6 - 6m - 11 \\ &= 3t + 6m - 3t - 6m + 11 - 11 \\ &= 0 \end{aligned}$$

التمرين ــ 7

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1 ; -2 ; 3)$ و $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ شعاعي توجيه له .

الحـل ــ 7

$\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ؛ $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ هما شعاعي الوحدة مستقلين خطيا

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{i} \\ \vec{u} \perp \vec{j} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـــ (P)

ليكن $c = 1$ إذن : $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـــ (P)

منه : (P) له المعادلة $z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A \in (P)$ إذن : $3 + \alpha = 0$

منه $\alpha = -3$

نتيجة : (P) له المعادلة $z - 3 = 0$

التمرين ــ 8

(P) مجموعة معرفة بـــ $\begin{cases} x = 2 - t + m \\ y = 1 + 3m \\ z = 1 - t \end{cases}$ **حيث** $t \in IR$ **و** $m \in IR$

بين أن (P) هو مستوي يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

الحـــل ــ 8

$$\begin{cases} x = 2 - t + m \\ y = 1 + 3m \\ z = 1 - t \end{cases}$$ منه $$\begin{cases} -3x = -6 + 3t - 3m \\ y = 1 + 3m \\ 3z = 3 - 3t \end{cases}$$

منه $-3x + y + 3z = -6 + 3t - 3m + 1 + 3m + 3 - 3t$

منه $-3x + y + 3z = -2$

منه $-3x + y + 3z + 2 = 0$

نتيجة : (P) هي جزء من المستوي ذو المعادلة $-3x + y + 3z + 2 = 0$

لندرس الآن الحالة العكسية .

ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $-3x + y + 3z + 2 = 0$

نضع $\begin{cases} y = 1 + 3m \\ z = 1 - t \end{cases}$ منه $-3x + (1 + 3m) + 3(1 - t) + 2 = 0$

منه $-3x + 1 + 3m + 3 - 3t + 2 = 0$

منه $-3x + 3m - 3t + 6 = 0$

منه $-3x = -3m + 3t - 6$

منه $x = m - t + 2$

منه $x = 2 - t + m$

نتيجة : (Q) هو جزء من (P)

خلاصة : $(Q) \subset (P)$ و $(P) \subset (Q)$ إذن : $(P) = (Q)$

أي (P) هو المستوي ذو المعادلة $-3x + y + 3z + 2 = 0$

التمرين ــ 9

(P) مستوي معادلته $2x + y - 2z + 5 = 0$

1 ــ عين $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

2 ــ بين أن الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستوي (P)

الحـــل ــ 9

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي لـــ (P)

2 ــ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(1) + 1(0) - 2(1) = 2 - 2 = 0$

إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان .

منه : $\vec{v}$ هو شعاع توجيه للمستوي (P)

التمرين ــ 10

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A(-3 ; 1 ; 2) و يوازي المستقيمين (D) و (T) اللذين تمثيلاهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$ و $$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -5 + k \\ z = 4 + k \end{cases}$$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

الحـــل ــ 10

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (T)

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ \vec{v} \perp \vec{n} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$

من أجل $a = 1$ نحصل على $\begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} b = 1 + c \\ 2 + 2c = 0 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} b = 1 + c \\ c = -1 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} b = 1 - 1 = 0 \\ c = -1 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) منه (P) له المعادلة $x - z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A \in (P)$ إذن : $-3 - 2 + \alpha = 0$

أي $\alpha = 5$

منه : (P) له المعادلة $x - z + 5 = 0$

التمرين ــ 11

(D) و (T) مستقيمان معرفان بالتمثيلين الوسيطيين التاليين على الترتيب :

$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = 2k \\ z = -5 - k \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن يوجد مستوي وحيد (P) يشمل (D) و (T) يطلب معادلته الديكارتية

الحـل ــ 11

$\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (T)

$1/2 \neq -3/2$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا مرتبطين خطيا .

منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .

إذن : إما (D) و (T) من نفس المستوي متقاطعان

أو (D) و (T) من مستويين مختلفين

نبحث عن تقاطع (D) و (T) :

$\begin{cases} 5 + 2k = 2 - 3t \\ 2k = 1 + t \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 5 + 1 + t = 2 - 3t \\ 2k = 1 + t \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 4t = -4 \\ k = \dfrac{1 + t}{2} \end{cases}$

منه : $\begin{cases} t = -1 \\ k = 0 \end{cases}$

من أجل $k = 0$ نحصل على : $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases}$

من أجل $t = -1$ نحصل على : $\begin{cases} x = 2 - 3(-1) = 5 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = -3 + 2(-1) = -5 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة $A(5 ; 0 ; -5)$

منه : (D) و (T) ينتميان إلى نفس المستوي الوحيد (P)

البحث عن معادلة (P)

لدينا (P) يشمل النقطة $A(5\ ;\ 0\ ;\ -5)$ و شعاعي توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ \vec{n}\perp\vec{v}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}-3a+b+2c=0\\ 2a+2b-c=0\end{cases}$

من أجل $a=1$ نحصل على : $\begin{cases}b+2c-3=0\\ 2b-c+2=0\ \ldots.(1)\end{cases}$

منه : $\begin{cases}b+2c-3=0\\ 4b-2c+4=0\end{cases}$

بالجمع : $5b+1=0$ أي $b=-1/5$

بالتعويض في (1) : $-\frac{2}{5}-c+2=0$ منه $c=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1/5\\8/5\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي لـ (P) أي $\vec{m}\begin{pmatrix}5\\-1\\8\end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع ناظمي له

منه (P) له المعادلة $5x-y+8z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي

$A\in(P)$ إذن : $5(5)-0+8(-5)+\alpha=0$

أي : $\alpha=15$

خلاصة : المستوي (P) الوحيد الذي يشمل (D) و (T) له المعادلة : $5x-y+8z+15=0$

تحقيق : $5(2-3t)-(1+t)+8(-3+2t)+15=10-15t-1-t-24+16t+15=0$

$5(5+2k)-2k+8(-5-k)+15=25+10k-2k-40-8k+15=0$

التمرين ــ 12

(P) مستوي معادلته $2x+y-z+1=0$ و (Q) مستوي معادلته $-x+3y-2z+4=0$

1 ــ بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان

2 ــ عين شعاع توجيه و نقطة من مستقيم تقاطعهما .

الحـــل ــ 12

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (Q)

$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$-1/2\neq 3/1$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوازيان

منه : المستويان (P) و (Q) ليسا متوازيان فهما إذن متقاطعان .

2 ــ البحث عن تقاطع (P) و (Q)

$\begin{cases}2x+y-z+1=0\\ -x+3y-2z+4=0\end{cases}$

لنبحث عن x و y بدلالة z

$$\det=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6+1=7$$

$$x=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}1 & -z+1\\ 3 & -2z+4\end{vmatrix}=\frac{1}{7}(-2z+4+3z-3)=\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}$$

$$y = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} -z+1 & 2 \\ -2z+4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(z-1+4z-8) = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}$$

نتيجة : تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}t + \frac{1}{7} \\ y = \frac{5}{7}t - \frac{9}{7} \\ z = t \end{cases} \quad t \in IR \text{ حيث}$$

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D) و $A(1/7 ; -9/7 ; 0)$ هي نقطة منه .

التمرين ــ 13

(P) مستوي معادلته $x+y-z=0$ و (Q) مستوي معادلته $2x-y-z-1=0$
عين شعاع توجيه المستقيم (D) حيث $(D) = (P) \cap (Q)$

الحـــل ــ 13

لنبحث عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -z \\ -1 & -z-1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}(-z-1-z) = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \\ y = \frac{-1}{3}\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -z-1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}(-2z+z+1) = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} \end{cases}$$

نتيجة : (D) له التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad t \in IR \text{ حيث}$$

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D)

التمرين ــ 14

لتكن النقط $A(0 ; 1 ; 1)$ ؛ $B(1 ; 0 ; 0)$ ؛ $C(-1 ; 2 ; 1)$ ؛ $D(0 ; 1 ; 2)$

بين أن النقط A ، B ، C ، D من نفس المستوي ثم عين معادلة ديكارتية له .

الحـــل ــ 14

ليكن (P) مستوي معادلته $\alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda = 0$ حيث α ، β ، γ ، λ ثوابت حقيقية .
تكون النقط A ، B ، C ، D من نفس المستوي (P) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} \alpha(0)+\beta(1)+\gamma(1)+\lambda = 0 \\ \alpha(1)+\beta(0)+\gamma(0)+\lambda = 0 \\ \alpha(-1)+\beta(2)+\gamma(1)+\lambda = 0 \\ \alpha(0)+\beta(1)+\gamma(2)+\lambda = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \beta+\gamma+\lambda = 0 \ldots\ldots (1) \\ \alpha+\lambda = 0 \ldots\ldots (2) \\ -\alpha+2\beta+\gamma+\lambda = 0 \ldots\ldots (3) \\ \beta+2\gamma+\lambda = 0 \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

من (2) : $\lambda = -\alpha$

بالتعويض في (3) نحصل على : $\lambda + 2\beta + \gamma + \lambda = 0$

أي : $2\beta + \gamma + 2\lambda = 0 \ldots\ldots (5)$

نتيجة :
$$\begin{cases} \beta+\gamma+\lambda=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (a) \\ 2\beta+\gamma+2\lambda=0 \ldots\ldots\ldots (b) \\ \beta+2\gamma+\lambda=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (c) \\ \lambda=-\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d) \end{cases}$$

نطرح (a) من (c) نحصل على : $2\gamma-\gamma=0$ أي $\gamma=0$

نعوض γ في (a) و (b) و (c) نحصل على :
$$\begin{cases} \beta+\lambda=0 \\ 2\beta+2\lambda=0 \\ \beta+\lambda=0 \end{cases}$$

أي $\beta+\lambda=0$

منه : $\beta=-\lambda$

خلاصة : $\alpha=-\lambda$ ؛ $\beta=-\lambda$ ؛ $\gamma=0$ ؛ $\lambda\in IR^*$

إذن : يكفي أن نأخذ $\lambda=-1$ منه $\alpha=\beta=1$

و عليه فإن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى المستوي (P) ذو المعادلة $x+y-1=0$

تحقيق :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ إذن :
$$\begin{cases} \vec{u}.\overrightarrow{AB}=1-1+0=0 \\ \vec{u}.\overrightarrow{AC}=-1+1+0=0 \end{cases}$$

منه :
$$\begin{cases} \vec{u}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{u}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

إذن : $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

منه : معادلة (ABC) : $x+y+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A\in(ABC)$ إذن : $0+1+\alpha=0$ منه $\alpha=-1$

نتيجة : معادلة (ABC) هي : $x+y-1=0$

$0+1-1=0$ إذن : $D(0;1;2)$ تنتمي إلى (ABC)

التمرين ــ 15

لتكن النقط A(-1 ; 2 ; 1) ؛ B(1 ; - 6 ; -1) ؛ C(2 ; 2 ; 2)

1 ــ بين أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا و ليكن (ABC)

2 ــ عين تقاطع المستوي (ABC) مع المستوي (P) ذو المعادلة $x-3y+z-4=0$

الحـل ــ 15

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+1\\-6-2\\-1-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-8\\-2\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2+1\\2-2\\2-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\neq\frac{0}{-8}$ منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان .

إذن : النقط A ، B ، C تعين مستويا (ABC)

لنبحث عن معادلة المستوي (ABC)

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$$\begin{cases} \vec{u}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{u}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} 2a-8b-2c=0 \\ 3a+c=0 \end{cases}$$

من أجل $c = -3$ نحصل على : $\begin{cases} 2a - 8b + 6 = 0 \\ 3a - 3 = 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} 2a + 6 = 8b \\ a = 1 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} 2 + 6 = 8b \\ a = 1 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

منه : معادلة المستوي (ABC) : $x + y - 3z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A \in (ABC)$ إذن : $-1 + 2 - 3 + \alpha = 0$

أي : $\alpha = 2$

خلاصة : معادلة المستوي (ABC) هي $x + y - 3z + 2 = 0$

2 ــ $\begin{cases} x - 3y + z - 4 = 0 \\ x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ لنبحث عن x و y بدلالة z

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -3 & z-4 \\ -3z+2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(9z - 6 - z + 4) = 2z - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} z-4 & 1 \\ -3z+2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(z - 4 + 3z - 2) = z - \frac{3}{2} \end{cases}$$

نتيجة : المستوي (ABC) يتقاطع مع المستوي (P) في المستقيم الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = 2t - \frac{1}{2} \\ y = t - \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases} \quad t \in IR \text{ حيث}$$

التمرين ــ 16

(P) و (Q) مستويان معادلاتهما على الترتيب $x + y + z = 0$ و $x - y + z - 4 = 0$

1 ــ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (Q)

2 ــ عين معادلة ديكارتية للمستوي (R) الذي يشمل النقطة A(1 ; 1 ; 2) و العمودي على (d)

الحـل ــ 16

1 ــ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ نبحث عن x و y بدلالة z

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & z \\ -1 & z-4 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}(z - 4 + z) = -z + 2 \\ y = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} z & 1 \\ z-4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}(z - z + 4) = -2 \end{cases}$$

نتيجة : (d) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

2 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (d)

بما أن (R) عمودي على (d) فإن $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (R)

منه : (R) له المعادلة $-x+z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A \in (R)$ إذن : $-1+2+\alpha=0$

أي $\alpha=-1$

نتيجة : معادلة المستوي (R) هي : $-x+z-1=0$

التمرين ــ 17

(P) ، (Q) ، (R) ثلاث مستويات معادلاتها الديكارتية كما يلي :

(P) : $2x+3y-z=-2$

(Q) : $5y-4z=1$

(R) : $z=1$

بين أن المستويات (P) ، (Q) ، (R) تشترك في نقطة وحيدة يطلب تعيينها .

الحـــل ــ 17

إذا وجدت نقطة مشتركة بين المستويات (P) ، (Q) ، (R) فإن احداثياتها $(x\,;y\,;z)$ هي حل للجملة

$$\begin{cases}2x+3y-z=-2 \ldots\ldots (1)\\5y-4z=1 \ldots\ldots (2)\\z=1 \ldots\ldots (3)\end{cases}$$

نعوض z في المعادلة (2) نحصل على : $5y-4(1)=1$

أي : $5y=5$

منه $y=1$

نعوض z و y في المعادلة (1) نحصل على : $2x+3(1)-1=-2$

أي : $2x=-4$

منه : $x=-2$

نتيجة : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة $A(-2\,;1\,;1)$

التمرين ــ 18

فسر هندسيا جملة المعادلتين : $\begin{cases}4x+6y-12z=5\\6x+9y-18z=8\end{cases}$

الحـــل ــ 18

إذا اعتبرنا في الفضاء (P) المستوي ذو المعادلة $4x+6y-12z-5=0$

و المستوي (Q) ذو المعادلة $6x+9y-18z-8=0$ فإن الجملة $\begin{cases}4x+6y-12z=5\\6x+9y-18z=8\end{cases}$

تعبر عن تقاطع المستويين (P) و (Q) كمايلي : $\det=\begin{vmatrix}4&6\\6&9\end{vmatrix}=0$

نتيجة : إما المستويين (P) و (Q) متطابقين أو متوازيين لا يتقاطعان

بما أن $\left.\begin{matrix}4/6=6/9=-12/-18=2/3\\-5/8\neq 2/3\end{matrix}\right\}$

فإن المستويين (P) و (Q) ليسا متطابقين فهما إذن متوازيان تماما . (لا يتقاطعان) و عليه فإن الجملة لا تقبل حلولا .

التمرين ــ 19

لتكن الجملة (I) $\begin{cases}x+y=-1 \ldots\ldots (1)\\2x+y+2z=0 \ldots\ldots (2)\\4x+4y+z+3=0 \ldots\ldots (3)\end{cases}$

نفرض أن المعادلة (1) هي معادلة مستوي (P) و أن المعادلة (2) هي معادلة مستوي (Q)

1 ــ أثبت أن (P) و (Q) يتقاطعان في مستقيم (d) يشمل النقطة $A(1\,;-2\,;0)$ و موجه بالشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

2 ــ ليكن (R) المستوي ذو المعادلة (3)

تحقق أن (d) و (R) يتقاطعان في نقطة وحيدة ثم استنتج حلول الجملة (I)

الحـــل ــ 19

1 ــ $\begin{cases} x + y = -1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x + y + 2z = 0 \ \ldots\ldots (2) \end{cases}$

بطرح (1) من (2) نحصل على : $2x - x + 2z = 0 + 1$

أي : $x = 1 - 2z$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على : $1 - 2z + y = -1$

منه $y = 2z - 2$

نتيجة : تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (d) ذو التمثيل الوسيطي التالي :

$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

منه (d) يشمل النقطة $A(1 ; -2 ; 0)$ (من أجل $t = 0$) و له شعاع توجيه $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 ــ تقاطع (d) و (R) هي حلول الجملة $\begin{cases} 4x + 4y + z + 3 = 0 \\ x = -2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases}$

منه : $4(-2t + 1) + 4(2t - 2) + t + 3 = 0$

أي : $-8t + 4 + 8t - 8 + t + 3 = 0$

أي : $t = 1$

منه : $\begin{cases} x = -2(1) + 1 = -1 \\ y = 2(1) - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

نتيجة : (d) و (R) يتقاطعان في نقطة وحيدة $w(-1 ; 0 ; 1)$

إذن : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة $w(-1 ; 0 ; 1)$ منه الجملة (I) تقبل حلا وحيدا هو $(-1 ; 0 ; 1)$

التمرين ــ 20

(P) و (Q) مستويين معادلاتهما على الترتيب $2x - y + 5 = 0$ و $3x + y - z = 0$

بين أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \end{cases}$ $t \in R$

الحـــل ــ 20

$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \ \ldots\ldots (1) \\ 3x + y - z = 0 \ \ldots\ldots (2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $5x - z + 5 = 0$ أي : $z = 5x + 5$

المعادلة (1) تكافئ $y = 2x + 5$

منه الجملة $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ z = 5x + 5 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \\ t \in IR \end{cases}$ و هو التمثيل الوسيطي لتقاطع المستويين (P) و (Q)

التمرين ــ 21

حل في IR^3 جمل المعادلات التالية ثم فسر النتائج هندسيا

1 ــ $\begin{cases} 4x + 2y + z = 4 \\ 4x - 2y + z = -2 \\ 4x - y = 0,5 \end{cases}$

2 ــ $\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -1 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

الحـــل ــ 21

1 ــ $\begin{cases} 4x+2y+z=4 \ldots\ldots (a) \\ 4x-2y+z=-2 \ldots\ldots (b) \\ 4x-y=0,5 \ldots\ldots (c) \end{cases}$

بجمع (a) و (b) نحصل على : $8x+2z=2$

منه : $8x=2-2z$

أي : $x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}z$

بالتعويض في (c) نحصل على : $4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}z\right)-y=0,5$

أي : $1-z-0,5=y$

أي : $0,5-z=y$

نتيجة : حلول الجملة (1) هي مجموعة غير منتهية من الثلاثيات $(x\,;y\,;z)$ حيث $\begin{cases} x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}z \\ y=0,5-z \\ z\in IR \end{cases}$

التفسير الهندسي : إذا كانت (P) ، (Q) ، (R) ثلاث مستويات معادلاتها على الترتيب

$4x+2y+z-4=0$ ؛ $4x-2y+z+2=0$ ؛ $4x-y-0,5=0$

فإن المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في مستقيم تمثيله الوسيطي هو

$\begin{cases} x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t \\ y=0,5-t \\ z=t \end{cases}$ حيث $t\in IR$

2 ــ $\begin{cases} 5x+3y+4z=-1 \ldots\ldots (a) \\ 2x+3y+z=-1 \ldots\ldots (b) \\ x+y+z=1 \ldots\ldots (c) \end{cases}$

بطرح (b) من (a) نحصل على : $3x+3z=0$

منه : $x=-z$

بالتعويض في (c) نحصل على : $-z+y+z=1$

أي : $y=1$

نتيجة : حلول الجملة (2) هي مجموعة غير منتهية من الثلاثيات $(x\,;y\,;z)$ حيث $\begin{cases} x=-z \\ y=1 \\ z\in IR \end{cases}$

التفسير الهندسي : المستويات التي معادلاتها $5x+3y+4z+1=0$ و $2x+3y+z+1=0$

و $x+y+z-1=0$ تتقاطع في مستقيم تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x=-t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$ حيث $t\in IR$

التمرين ــ 22

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة (E) ..... $z^3-12z^2+48z-128=0$ ذات المجهول z

1 ــ تحقق أن 8 حل للمعادلة (E) ثم استنتج الحلين الآخرين .

2 ــ لتكن A ، B ، C نقط لواحقها على الترتيب $a=2-2i\sqrt{3}$ ؛ $b=2+2i\sqrt{3}$ ؛ $c=8$

a) أحسب طويلة و عمدة a

b) أحسب $q=\frac{a-c}{b-c}$ ثم عين طويلة و عمدة له .

c) ما هي طبيعة المثلث ABC

d) عين D مرجح الجملة $\{(A\,;|a|)\,;(B\,;|b|)\,;(C\,;|c|)\}$

e) عين المجموعة (T) من النقط M حيث $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$

الحـــل ــ 22

1 ــ من أجل $z = 8$:

$$(8)^3 - 12(8)^2 + 48(8) - 128 = 8(64 - 96 + 48 - 16)$$
$$= 8(112 - 112)$$
$$= 0$$

إذن : $z = 8$ هو حل لـــ (E)

الحلول الأخرى :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 12z^2 + 48z - 128 & z - 8 \\ \underline{z^3 - 8z^2} & \\ -4z^2 + 48z - 128 & z^2 - 4z + 16 \\ \underline{-4z^2 + 32z} & \\ 16z - 128 & \\ \underline{16z - 128} & \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : الحلول الأخرى للمعادلة (E) هي حلول المعادلة $z^2 - 4z + 16 = 0$ في C كما يلي :

$$\Delta = 16 - 4(16) = -3(16) = (4i\sqrt{3})^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 2 - 2i\sqrt{3} \\ z_2 = \dfrac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة (E) هي $\{8 ; 2 - 2i\sqrt{3} ; 2 + 2i\sqrt{3}\}$

ــ 2 a) $a = 2 - 2i\sqrt{3}$ منه $|a| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

لتكن $\theta = \text{Arg}(a)$ إذن :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

منه : $\theta = \dfrac{-\pi}{3}$

b)
$$q = \frac{a - b}{b - c}$$
$$= \frac{2 - 2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}}{2 + 2i\sqrt{3} - 8}$$
$$= \frac{-4i\sqrt{3}}{-6 + 2i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \times \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{6i\sqrt{3} - 6}{9 + 3}$$
$$= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

منه : $|q| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

لتكن $\alpha = Arg(q)$ إذن : $\begin{cases} \cos\alpha = -1/2 \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

منه : $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

c) $AB^2 = |a-b|^2 = |2-2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}|^2 = |-4i\sqrt{3}|^2 = 48$

$AC^2 = |a-c|^2 = |2-2i\sqrt{3}-8|^2 = |-6-2i\sqrt{3}|^2 = 36+12 = 48$

$BC^2 = |b-c|^2 = |2+2i\sqrt{3}-8|^2 = |-6+2i\sqrt{3}|^2 = 48$

منه المثلث ABC متقايس الأضلاع .

d) $|a| = 4$

$|b| = |\bar{a}| = |a| = 4$

$|c| = |8| = 8$

منه : $z_d = \dfrac{4a+4b+8c}{8+4+4}$

$= \dfrac{8-8i\sqrt{3}+8+8i\sqrt{3}+64}{16}$

$= 5$

إذن : احداثيات النقطة D هي : $(5\ ;\ 0)$

2 ــ من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MD}$ لأن D هي مرجح الجملة $\{(A\ ;\ 4)\ ;\ (B\ ;\ 4)\ ;\ (C\ ;\ 8)\}$ و هي نفسها مرجح الجملة $\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ 1)\ ;\ (C\ ;\ 2)\}$ بضرب كل المعاملات في 1/2

من جهة أخرى الشعاع $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M لأن مجموع المعاملات معدوم .

إذن : من أجل M تنطبق على C نحصل على : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

نتيجة : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$ يكافئ $\|4\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\|$

يكافئ $\|\overrightarrow{MD}\| = \dfrac{1}{4}\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\|$

يكافئ $MD = \dfrac{1}{4}|a-c+b-c|$

يكافئ $MD = \dfrac{1}{4}|2-2i\sqrt{3}-8+2+2i\sqrt{3}-8|$

يكافئ $MD = \dfrac{1}{4}|-12|$

يكافئ $MD = 3$

نتيجة : (T) هي الدائرة التي مركزها $D(5\ ;\ 0)$ و نصف قطرها 3

التمرين ــ 23

لتكن (P_m) مجموعة نقط الفضاء ذات الاحداثيات $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ حيث $(3-m)x+4y-(1+2m)z-5=0$ مع m وسيط حقيقي .

1 ــ بين أن من أجل كل m من IR فإن (P_m) مستوي

2 ــ عين نقطة و شعاع توجيه المستقيم (D) تقاطع (P_0) و (P_1)

3 ــ بين أن (D) محتواة في كل المستويات (P_m)

الحـل ــ 23

1 ــ من أجل كل m من IR لدينا : $(3-m\ ;\ 4\ ;\ 1+2m) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$

إذن : من أجل كل $m \in IR$ فإن (P_m) هو مستوي .

2 ــ معادلة (P_0) : $3x+4y-z-5=0$ ..... (1)

معادلة (P_1) : $2x+4y-3z-5=0$ ..... (2)

نطرح (2) من (1) نحصل على : $x + 2z = 0$

منه : $x = -2z$

نعوض x في (1) نحصل على : $3(-2z) + 4y - z - 5 = 0$

منه : $4y = 7z + 5$

أي : $y = \frac{7}{4}z + \frac{5}{4}$

نتيجة : (P_0) و (P_1) يتقاطعان في مستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{7}{4}t + \frac{5}{4} \\ z = t \end{cases} \quad t \in IR \text{ حيث}$$

منه : (D) يشمل النقطة $A(0 ; 5/4 ; 0)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 7/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

3 ــ لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من المستقيم (D) إذن : يوجد $t \in IR$ حيث $\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{7}{4}t + \frac{5}{4} \\ z = t \end{cases}$

منه : من أجل كل عدد حقيقي m فإن :

$$(3-m)x + 4y - (1+2m)z - 5 = (3-m)(-2t) + 4\left(\frac{7}{4}t + \frac{5}{4}\right) - (1+2m)t - 5$$

$$= -6t + 2mt + 7t + 5 - t - 2mt - 5$$

$$= 7t - 7t + 2mt - 2mt + 5 - 5$$

$$= 0$$

إذن : $M \in (P_m)$

نتيجة : كل نقطة من (D) هي نقطة من (P_m) إذن : $(D) \subset (P_m)$

التمرين ــ 24

لتكن النقط $A(3 ; -2 ; 2)$ ؛ $B(6 ; 1 ; 5)$ ؛ $C(6 ; -2 ; -1)$

1 ــ بين أن المثلث ABC قائم .

2 ــ ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $x + y + z - 3 = 0$

بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3 ــ ليكن (Q) المستوي العمودي على (AC) و الذي يشمل A . أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

4 ــ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) حيث (d) هو تقاطع المستويين (P) و (Q)

5 ــ لتكن D نقطة احداثياتها $(-1 ; 4 ; 0)$

a) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

b) أحسب حجم الرباعي الوجوه ABDC

الحـل ــ 24

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 1+2 \\ 5-2 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2+2 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

نتيجة : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(3) + 3(0) + 3(-3) = 9 - 9 = 0$

إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان .

منه : ABC مثلث قائم في A .

2 ــ (P) له المعادلة $x + y + z - 3 = 0$ إذن : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي له .

من جهة أخرى $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AB)

بما أن $3/1 = 3/1 = 3/1$ فإن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ متوازيان .
منه : المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P)
هل $A \in (P)$ ؟ $3 - 2 + 2 - 3 = 0$
إذن : فعلا A تنتمي إلى (P)
نتيجة : (P) يشمل النقطة A و عمودي على المستقيم (AB)

3 ــ (Q) مستوي عمودي على (AC) إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي له
منه : (Q) له المعادلة $3x - 3z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .
إذن : $A \in (Q)$ $3(3) - 3(2) + \alpha = 0$
أي : $\alpha = -3$
منه : معادلة المستوي (Q) هي : $3x - 3z - 3 = 0$
أي : $x - z - 1 = 0$

4 ــ $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \ldots\ldots (1) \\ x - z - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$
بجمع (1) و (2) : $2x + y - 4 = 0$ أي $y = 4 - 2x$
من المعادلة (2) : $z = x - 1$
نتيجة : المستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (Q) له التمثيل الوسيطي التالي :
$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \\ z = t - 1 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

5 ــ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-3\\4+2\\-1-2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3(-3) + 3(6) + 3(-3) = 0$
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(-3) + 0(6) - 3(-3) = 0$
نتيجة : $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$
إذن : $\overrightarrow{AD}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)
أي : المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

b) بما أن (AD) عمودي على المستوي (ABC) فإن [AD] هو ارتفاع رباعي الوجوه ABDC
منه : حجم الرباعي ABCD هو : $V = \frac{1}{3} AD \times S$ حيث S هي مساحة القاعدة الممثلة بالمثلث ABC
منه $S = \frac{1}{2} AB \times AC$ لأن ABC مثلث قائم في A
نتيجة : $V = \frac{1}{3} AD \times \frac{1}{2} AB \times AC$
أي $V = \frac{1}{6} AB \times AC \times AD$
أي : $V = \frac{1}{6}\sqrt{9+9+9} \times \sqrt{9+9} \times \sqrt{9+36+9}$
أي $V = \frac{1}{6} \times \sqrt{27} \times \sqrt{18} \times \sqrt{54}$
أي $V = \frac{1}{6} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}$
أي $v = 27$ (مقدر بوحدة الحجوم)

التمرين ــ 25

لتكن النقط A(4 ; 0 ; - 3) ؛ B(2 ; 2 ; 2) ؛ C(3 ; - 3 ; -1) ؛ D(0 ; 0 ; - 3)
1 ــ عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) المحوري للقطعة [AB]

2 ــ نقبل أن المستويين المحوريين للقطعتين [BD] و [DC] معرفان بالمعادلتين $2x-10y-6z-7=0$ و $3x-3y+2z-5=0$ على الترتيب
بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب احداثياتها
3 ــ بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E و يطلب تعيين نصف قطرها .

الحـــل ــ 25

1 ــ لتكن w منتصف [AB] إذن : $w\left(\frac{4+2}{2}\ ;\ \frac{0+2}{2}\ ;\ \frac{-3+2}{2}\right)$

أي $w(3\ ;\ 1\ ;\ -1/2)$

من جهة أخرى : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-4\\2-0\\2+3\end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$

منه المستوي (P) يشمل النقطة w و الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له إذن :

(P) له المعادلة $-2x+2y+5z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي

$w \in (P)$ إذن : $-2(3)+2(1)+5(-1/2)+\alpha=0$

منه : $\alpha=\frac{5}{2}+4=\frac{13}{2}$

نتيجة : (P) له المعادلة $-2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0$

أي : $4x-4y-10z-13=0$

2 ــ إذا وجدت نقطة E مشتركة بين المستويات الثلاثة فإن احداثياتها $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ هي حل للجملة :

$$\begin{cases}4x-4y-10z-13=0 \ \ldots\ldots (1)\\2x-10y-6z-7=0 \ \ldots\ldots (2)\\3x-3y+2z-5=0 \ \ldots\ldots (3)\end{cases}$$

نبحث عن x و y بدلالة z في المعادلتين (1) و (2) كما يلي :

$$\det=\begin{vmatrix}4 & -4\\2 & -10\end{vmatrix}=-40+8=-32$$

$$x=\frac{-1}{32}\begin{vmatrix}-4 & -10z-13\\-10 & -6z-7\end{vmatrix}=\frac{-1}{32}(24z+28-100z-130)=\frac{-1}{32}(-76z-102)$$

$$y=\frac{-1}{32}\begin{vmatrix}-10z-13 & 4\\-6z-7 & 2\end{vmatrix}=\frac{-1}{32}(-20z-26+24z+28)=\frac{-1}{32}(4z+2)$$

أي $\begin{cases}x=\frac{19}{8}z+\frac{51}{16}\\y=\frac{-1}{8}z-\frac{1}{16}\end{cases}$

بالتعويض في المعادلة (3) : $3\left(\frac{19}{8}z\right)+3\left(\frac{51}{16}\right)-3\left(\frac{-1}{8}z\right)-3\left(\frac{-1}{16}\right)+2z-5=0$

أي : $\left(\frac{57}{8}+\frac{3}{8}+2\right)z+\frac{153}{16}+\frac{3}{16}-5=0$

أي : $\frac{57+3+16}{8}z=\frac{80-3-153}{16}$

أي : $z=\frac{-76}{16}\times\frac{8}{76}$

أي : $z=-1/2$

بالتعويض في عبارتي x و y نحصل على : $\begin{cases}x=\frac{19}{8}\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{51}{16}=\frac{32}{16}=2\\y=\frac{-1}{8}\left(\frac{-1}{2}\right)-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=0\end{cases}$

نتيجة : المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة $E(2\ ;\ 0\ ;\ -1/2)$

3 ــ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2-4\\0-0\\-\frac{1}{2}+3\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-2\\0\\5/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2-2\\0-2\\-\frac{1}{2}-2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}0\\-2\\-5/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2-3\\0+3\\-\frac{1}{2}+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\3\\1/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2-0\\0-0\\-\frac{1}{2}+3\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\0\\5/2\end{pmatrix}$

نتيجة :

$$AE=\sqrt{4+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{16+25}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$BE=\sqrt{4+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$CE=\sqrt{1+9+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4+36+1}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$DE=\sqrt{4+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

منه : $AE=BE=CE=DE=\frac{\sqrt{41}}{2}$

إذن : النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها $E(2\ ;\ 0\ ;\ -1/2)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{41}}{2}$

التمرين ــ 26

$S(1\ ;\ -2\ ;\ 0)$ نقطة من الفضاء و (P) المستوي ذوالمعادلة : $x+y-3z+4=0$.

اختر الجواب الصحيح في كل سؤال من الأسئلة التالية :

1 ــ التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل S و يعامد (P) هو :

a) $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=-3\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=1-3t\end{cases}$

c) $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-2t\\z=3t\end{cases}$ d) $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=-3-3t\end{cases}$

2 ــ H هي نقطة تقاطع (P) و (D) . هل احداثيات H هي :

a) $(-4\ ;\ 0\ ;\ 0)$ b) $(6/5\ ;\ -9/5\ ;\ -3/5)$

c) $(7/9\ ;\ -2/3\ ;\ 1/3)$ d) $(8/11\ ;\ -25/11\ ;\ 9/11)$

3 ــ بعد النقطة S عن المستوي (P) هو :

a) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ b) $\frac{3}{\sqrt{11}}$ c) $\frac{9}{\sqrt{11}}$ d) $\frac{9}{11}$

4 ــ ليكن (s) سطح الكرة التي مركزها S و نصف قطرها 3

هل تقاطع السطح (s) مع المستوي (P) هو :

a) النقطة $A(1\ ;\ -5\ ;\ 0)$

b) الدائرة ذات المركز H و نصف القطر $3\sqrt{\frac{10}{11}}$

c) الدائرة ذات المركز S و نصف القطر 2

d) الدائرة ذات المركز H و نصف القطر $\frac{3\sqrt{10}}{11}$

الحـل ـ 26

1 ـ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) إذن : هو شعاع توجيه المستقيم (D)

منه : (D) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases}x-1=k\\y+2=k\\z-0=-3k\end{cases}$ حيث $k \in IR$

أي : $\begin{cases}x=1+k\\y=-2+k\\z=-3k\end{cases}$

نضع $k=t+1$ منه : $\begin{cases}k+1=t+2\\k-2=t-1\\-3k=-3-3t\end{cases}$ حيث $t \in IR$

نتيجة : $\begin{cases}x=t+2\\y=t-1\\z=-3-3t\end{cases}$

إذن : الجواب الصحيح هو d) $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=-3-3t\end{cases}$

2 ـ لتكن H نقطة تقاطع (P) و (D)

إذن : $2+t-1+t-3(-3-3t)+4=0$

أي $1+2t+9+9t+4=0$

أي $11t=-14$

أي $t=-14/11$

منه : $\begin{cases}x=2-\frac{14}{11}=\frac{8}{11}\\y=-1-\frac{14}{11}=\frac{-25}{11}\\z=-3+\frac{42}{11}=\frac{9}{11}\end{cases}$

نتيجة : الجواب الصحيح هو d) (8/11 ; -25/11 ; 9/11)

3 ـ لتكن ℓ مسافة النقطة S عن المستوي (P)

$$\ell=\frac{|1-2-3(0)+4|}{\sqrt{1+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) $\frac{3}{\sqrt{11}}$

4 ـ بتعويض احداثيات A في معادلة المستوي (P) نحصل على :

$1-5+4=-4+4=0$ إذن : $A \in (P)$

من جهة أخرى : $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}1-1\\-2+5\\0-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ منه : $AS=\sqrt{0+9+0}=3$ إذن : $A \in (s)$

نتيجة : $A \in (s) \cap (P)$ منه الجواب الصحيح هو a) النقطة A(1 ; -5 ; 0)

الفهرس

المحـــور	الصفحـــة
المحـــور 1 : **الإستدلال بالتراجع**	**1**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**2**
المحـــور 2 : **النهايات و الإستمرارية**	**15**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**22**
المحـــور 3 : **القسمة في Z**	**73**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**78**
حلول لتمـــاريـــن نماذج للبكلوريا	**101**
المحـــور 4 : **الجداء السلمي**	**119**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**124**
المحـــور 5 : **المستقيمات و المستويات في الفضاء**	**157**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**163**
حلول لتمـــاريـــن نماذج للبكلوريا	**185**

سلسلة هبـــاج

TEL : 0773 26 52 81