BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

الجزء
4

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

3e Année Secondaire : Mathématiques

سلسلة هبــاج

الرياضيــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمــاذج للبكالوريا

الجزء الرابع

السنـة 3 ثانوي

تقني رياضي ــ رياضيات ــ علوم تجريبية

سلسلة هبــاج

يسرني أن أتقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكــل الشعب العلمية منها و التكنولوجية .

ـ محتـــوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

ـ يشمل هذا الجزء من السلسلة على أربعة محاور من البرنامج :

- ■ **المتتاليات**
- ■ **الإحتمالات الشرطية**
- ■ **قوانين الإحتمالات**
- ■ **الموافقات في Z**

ـ يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايـــة كل درس ، مجموعة تطبيقـــات للتصحيح الذاتـــي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايـــة كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

آملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هبـــاج جمال
لصواني وهيب

الهاتف : 0773 26 52 81

المتتاليات العددية

تذكير :

نسمي متتالية عددية حقيقية $(u_n)_{n \geq n_0}$ كل دالة عددية ترفق بكل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ العدد الحقيقي u_n (n_0 عدد طبيعي معطى)

اتجاه تغير متتالية عددية :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية

- ✓ تكون (u_n) متزايدة (على الترتيب متزايدة تماما) إذا و فقط اذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} \geq u_n$ (على الترتيب من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} > u_n$)
- ✓ تكون (u_n) متناقصة (على الترتيب متناقصة تماما) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} \leq u_n$ (على الترتيب $u_{n+1} < u_n$)
- ✓ تكون (u_n) متتالية ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} = u_n$
- ✓ إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة تماما أو متناقصة تماما أو متزايدة أو متناقصة نقول أن المتتالية (u_n) رتيبة

المتتاليات الحسابية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية و α عدد حقيقي ثابت

تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية ذات الأساس α و الحد الأول u_{n_0} إذا و فقط إذا تحققت إحدى الشروط التالية :

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_{n+1} = u_n + \alpha$

2 ـ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_{n+2} + u_n = 2\,u_{n+1}$

3 ـ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)\,\alpha$

ملاحظة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية حسابية فإن :

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots\ldots + u_n = (n - k + 1)\left(\frac{u_k + u_n}{2}\right)$$

المتتاليات الهندسية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية و q عدد حقيقي ثابت

تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية ذات الأساس q و الحد الأول u_{n_0} إذا و فقط إذا تحقق أحد الشروط التالية :

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_{n+1} = q \cdot u_n$

2 ـ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_{n+2} \times u_n = (u_{n+1})^2$

3 ـ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$

ملاحظة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية هندسية ذات الأساس q حيث $q \neq 1$ فإن :

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots\ldots + u_n = u_k\left(\frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}\right)$$

نهاية متتالية :

إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية حسابية أساسها α فإن :

1 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ إذا كان $\alpha > 0$

2 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ إذا كان $\alpha < 0$

3 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_k$ إذا كان $\alpha = 0$ (المتتالية ثابتة)

إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية هندسية أساسها q فإن :

1 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ إذا كان $-1 < q < 1$

2 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ إذا كان $q > 1$ و $u_k > 0$

3 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ إذا كان $q > 1$ و $u_k < 0$

4 ـ نهاية المتتالية (u_n) غير موجودة إذا كان $q \leq -1$

5 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_k$ إذا كان $q = 1$ (المتتالية ثابتة)

نشاط ـ 1

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_{n+1} - u_n$

1 ـ أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب حدها الأول و أساسها

2 ـ استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحـل ـ 1

1 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= (u_n - 5n - 1) - u_n \\ &= -5n - 1 \\ &= -5(n - 0) - 1 \end{aligned}$$

نتيجة : (v_n) متتالية حسابية أساسها $q = -5$ و حدها الأول $v_0 = -1$

2 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = u_{n+1} - u_n$

لنكتب هذه المساواة من أجل $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$ ...... كما يلي :

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = u_1 - u_0 \;\dots\dots\dots\dots\dots\; (1) \\ v_1 = u_2 - u_1 \;\dots\dots\dots\dots\dots\; (2) \\ v_2 = u_3 - u_2 \;\dots\dots\dots\dots\dots\; (3) \\ \vdots \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \;\dots\dots\dots\dots\dots\; n \end{array}\right\} \text{n مساواة مختلفة}$$

نجمع هذه المساواة طرف لطرف نحصل على :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots + v_{n-1} = -u_0 + u_n \;\dots\dots\dots\; (\alpha)$$

من جهة أخرى لدينا $v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots + v_{n-1} = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2}(n - 1 + 1)$ هو مجموع حدود متتابعة من المتتالية الحسابية (v_n)

إذن :

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots + v_{n-1} &= \left(\frac{n}{2}\right)\left[-1 - 5(n-1) - 1\right] \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)(-5n + 3) \end{aligned}$$

و عليه المساواة (α) تصبح : $\frac{n}{2}(-5n + 3) = u_n - u_0$

أي : $u_n = \frac{n}{2}(-5n + 3) + u_0$

أي : $u_n = \frac{n}{2}(-5n + 3) + 3$

تحقيق : لنحسب الحدود u_1 و u_2 بطريقتين مختلفتين كمايلي :

$u_1 = u_0 - 5(0) - 1 = 3 - 1 = 2$ ،

$u_2 = u_1 - 5(1) - 1 = 2 - 5 - 1 = -4$

من جهة أخرى :

$u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(-5 + 3) + 3$ إذن : $\frac{1}{2}(-5(1) + 3) + 3 = \frac{-2}{2} + 3 = 2$

$u_2 = \left(\frac{2}{2}\right)(-5(2) + 3) + 3$ إذن : $\frac{2}{2}(-5(2) + 3) + 3 = -10 + 3 + 3 = -4$

نشاط ـ 2

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = 2$ و العلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - 3$

1 ـ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول

2 ـ أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3 ـ ماهو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

4 ـ أحسب نهاية v_n

الحـل ـ 2

4 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \left(\frac{1}{3}u_n + 2\right) - 3 \\ &= \frac{1}{3}\,u_n - 1 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(u_n - 3\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) v_n \end{aligned}$$

لأن : $v_n = u_n - 3$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1/3$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = -1$

2 ـ (v_n) هندسية ، $v_0 = -1$ ، $q = 1/3$ إذن : $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا : $v_n = u_n - 3$

إذن : $u_n = v_n + 3$

منه : $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ و هو المطلوب

3 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n\left[-\frac{1}{3} + 1\right] \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

لدينا : $v_{n+1} - v_n > 0$

إذن : المتتالية (v_n) متزايدة تماما

4 ـ $$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

لأن $-1 < 1/3 < 1$

تقارب متتالية عددية :

$(u_n)_{n\in IN}$ متتالية عددية . ℓ عدد حقيقي ثابت

- ✓ إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو ℓ
- ✓ إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة نحو $+\infty$
- ✓ إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة نحو $-\infty$.

تذكير : لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_n = f(n)$ حيث f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $[a\,;+\infty[$

حيث a عدد حقيقي . ليكن ℓ عدد حقيقي

- ✓ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
- ✓ إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

✓ إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

نشاط ـ 3

$(u_n)_{n \in IN}$ متتالية معرفة على IN بـ $u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$ عين نهاية هذه المتتالية

الحـل ـ 3

نعرف الدالة العددية f على المجال $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{\frac{4x+3}{x+1}}$

إذن : $f(n) = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$ أي $f(n) = u_n$

لكن :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$$
$$= \sqrt{4}$$
$$= 2$$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$ و هو المطلوب

المتتاليات المحدودة :

تعريف : (u_n) متتالية عددية معرفة على IN

✓ إذا وجد عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq A$ نقول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد A أو A عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)

✓ إذا وجد عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$ نقول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد B أو B عنصر حاد من الأسفل للمتتالية (u_n)

✓ إذا كانت (u_n) متتالية محدودة من الأعلى و من الأسفل نقول أنها متتالية محدودة

✓

مثال : لتكن $(u_n)_{n > 0}$ متتالية عددية معرفة على *IN بـ $u_n = \frac{4n}{n+3}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : ،
$$u_n - 1 = \frac{4n}{n+3} - 1$$
$$= \frac{4n - n - 3}{n+3}$$
$$= \frac{3(n-1)}{n+3}$$

بماأن $n > 0$ أي $n \geq 1$ فإن $n - 1 \geq 0$

منه : $3(n-1) \geq 0$ أي $\frac{3(n-1)}{n+3} \geq 0$

إذن : $u_n - 1 \geq 0$

أي : $u_n \geq 1$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

منه حسب التعريف فإن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي 1

لدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :
$$u_n - 4 = \frac{4n}{n+3} - 4$$
$$= \frac{4n - 4n - 12}{n+3}$$
$$= \frac{-12}{n+3}$$

بماأن $n + 3 > 0$ فإن $\frac{-12}{n+3} < 0$

أي $u_n - 4 < 0$

أي $u_n < 4$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

إذن : حسب التعريف المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي 4

نتيجة :
$$\begin{cases} (u_n) \text{ متتالية محدودة من الأسفل بـ } 1 \\ (u_n) \text{ متتالية محدودة من الأعلى بـ } 4 \end{cases}$$

إذن : (u_n) متتالية محدودة

مبرهنة :

1) إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة

2) إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة

المتتاليات المتجاورة

تعريف : تكون متتاليتان متجاورتان إذا و فقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و كان الفرق بينهما يؤول إلى الصفر

مثال :

(u_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

(v_n) متتالية معرفة على IN^* بـ $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ لأن $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$

و عليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

و لدينا :

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ لأن $= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ لأن $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$

و عليه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

لدينا أيضا $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ إذن $v_n - u_n = \frac{1}{n}$

منه $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

خلاصة :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ \text{المتتالية } (v_n) \text{ متناقصة} \\ \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{array}\right.$$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

مبرهنة :

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية

نشاط ــ 4

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان بـ : $u_0 = 12$; $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2\,v_n}{3} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3\,v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

1 ــ أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب حدها الأول و أساسها

2 ــ أكتب عبارة w_n بدلالة n ثم أحسب نهاية w_n

3 ـ أثبت أن (t_n) متتالية ثابتة يطلب نهايتها

4 ـ أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

5 ـ استنتج نهاية كل من u_n و v_n

الحــل ــ 4

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

$$= \frac{u_n + 2\,v_n}{3} - \frac{u_n + 3\,v_n}{4}$$

$$= \frac{4\,u_n + 8\,v_n - 3\,u_n - 9\,v_n}{12}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n)$$

$$= \frac{1}{12}\,w_n$$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1/12$ و حدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 11$

2 ـ (w_n) متتالية هندسية حدها الأول $w_0 = 11$ و أساسها $q = 1/12$ إذن عبارة حدها العام $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 11\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ لأن : $-1 < 1/12 < 1$

3 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $t_{n+1} = 3\,u_{n+1} + 8\,v_n$

$$= 3\left(\frac{u_n + 2\,v_n}{3}\right) + 8\left(\frac{u_n + 3\,v_n}{4}\right)$$

$$= u_n + 2\,v_n + 2(u_n + 3\,v_n)$$

$$= 3\,u_n + 8\,v_n$$

$$= t_n$$

إذن : (t_n) متتالية ثابتة

أي كل حدودها متساوية و تساوي t_0 : $t_0 = 3\,u_0 + 8\,v_0 = 36 + 8 = 44$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t_0 = 44$

4 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2\,v_n}{3} - u_n$

$$= \frac{u_n + 2\,v_n - 3\,u_n}{3}$$

$$= \frac{2\,v_n - 2\,u_n}{3}$$

$$= \frac{-2}{3}(u_n - v_n)$$

$$= -\frac{2}{3}\,w_n$$ لأن : $w_n = u_n - v_n$

$$= -\frac{2}{3}\left[11\left(\frac{1}{12}\right)^n\right]$$

$$= \frac{-22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

بماأن $\left(\frac{1}{12}\right)^n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ لأن $\frac{-22}{3} < 0$

منه : المتتالية (u_n) متناقصة تماما

لدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3\,v_n}{4} - v_n$

$$\begin{aligned} &= \frac{u_n + 3\,v_n - 4\,v_n}{4} \\ &= \frac{1}{4}\ (u_n - v_n) \\ &= \frac{1}{4}\ w_n \\ &= \frac{1}{4} \times 11\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{aligned}$$

بماأن $\frac{1}{4} \times 11\left(\frac{1}{12}\right)^n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$

أي المتتالية (v_n) متزايدة تماما

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال (2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

خلاصة : $\left.\begin{array}{r} \text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة} \\ \text{المتتالية } (v_n) \text{ متزايدة} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{array}\right\}$

إذن : حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

5 ـ بماأن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فإنهما متقاربتان و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

منه $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\,u_n + 8\,v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 3\,u_n + 8\,u_n$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} 11\,u_n$

لكن $t_n = 3\,u_n + 8\,v_n$ و $t_n = 44$ لأن المتتالية (t_n) ثابتة .

أي : $44 = 3\,u_n + 8\,v_n$ منه : $44 = \lim\limits_{n \to +\infty} 11\,u_n$

أي : $44 = 11 \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

(u_n) متتالية حسابية أساسها r . (v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n

على الترتيب بــ : $v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2}$ و $w_n = u_{3n} + \sqrt{7}$

بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) حسابيتان يطلب تعين أساسيهما بدلالة r

الحـل ــ 1

(u_n) متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_0 اذن حدها العام : من أجل كل عدد طبيعي n هو $u_n = u_0 + n r$

إذن : $u_{3n} = u_0 + 3 n r$

منه : $$\left.\begin{array}{l} v_n = \frac{3}{5}(u_0 + n r) - \frac{1}{2} \\ w_n = u_0 + 3 n r + \sqrt{7} \end{array}\right\}$$

أي : $$\left.\begin{array}{l} v_n = \frac{3}{5}u_0 - \frac{1}{2} + \frac{3}{5} r n \\ w_n = u_0 + \sqrt{7} + 3 r n \end{array}\right\}$$

منه : (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{3}{5}$ r و حدها الأول $v_0 = \frac{3}{5}u_0 - \frac{1}{2}$

(w_n) متتالية حسابية أساسها 3 r و حدها الأول $w_0 = u_0 + \sqrt{7}$

التمرين ــ 2

أحسب أقياس زوايا مثلث قائم حيث هذه الأقياس تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية

الحـل ــ 2

المثلث قائم إذن إحدى زوياه قائمة و قيسها إذن 90°

ليكن a و b قيسي الزاويتين الأخريين من هذا المثلث حيث $a < b < 90°$

نعلم أن $a + b + 90° = 180°$ ....(1)

إذا كان a ، b ، 90° بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية فليكن أساسها r إذن : $b = a + r$ و $90 = a + 2 r$

المساواة (1) تصبح : $a + a + r + a + 2 r = 180°$

أي : $3 a + 3 r = 180°$

أي : $3(a + r) = 180°$

أي : $a + r = 60°$

أي : $b = 60°$

منه : $a = 30°$

نتيجة : الأقياس المطلوبة هي على الترتيب 30° ؛ 60° ؛ 90°

التمرين ــ 3

(v_n) متتالية عددية معرفة بــ $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$

1 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n > 0$

2 ــ نعرف المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n بــ $u_n = \frac{1}{v_n}$

بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب أساسها

الحـل ــ 3

1 ــ نستعمل الإستدلال بالتراجع

من أجل $n = 0$ لدينا $v_0 = 1$ و $1 > 0$ إذن : الخاصية محققة

من أجل $n = 1$: $v_1 = \frac{v_0}{v_0 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$ و $1/2 > 0$ إذن الخاصية محققة

لنفرض أن $v_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $v_{n+1} > 0$ ؟

لدينا $v_n > 0$ إذن : $v_n + 1 > 1$ و خاصة $v_n + 1 > 0$

منه : $\frac{1}{v_n + 1} > 0$

إذن $\frac{v_n}{v_n + 1} > 0$

أي : $v_{n+1} > 0$

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n > 0$

2 ـ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{v_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{v_n}{v_n + 1}} \\ &= \frac{v_n + 1}{v_n} \\ &= 1 + \frac{1}{v_n} \\ &= 1 + u_n \end{aligned}$$

إذن : (u_n) متتالية حسابية أساسها 1

التمرين ـ 4

(u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1 ـ أكتب u_n بدلالة n

2 ـ أحسب $u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_{20}$

الحـل ـ 4

1 ـ (u_n) متتالية حسابية إذن : $u_n = u_1 + (n - 1)r$ حيث r هو الأساس

منه : $u_n = -2 + 3(n - 1)$

أي : $u_n = 3n - 5$

2 ـ $u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_{20} = \frac{20}{2}(u_1 + u_{20})$ مجموع 20 حدود متتابعة

$$\begin{aligned} &= 10(-2 + 3(20) - 5) \\ &= 10(60 - 7) \\ &= 530 \end{aligned}$$

التمرين ـ 5

أحسب المجموع : $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \dots\dots + 10$

الحـل ـ 5

لاحظ أن الأعداد 1/2 ؛ 1 ؛ 3/2 ؛ 2 ؛ 5/2 ؛ 3 ؛ ..... 10 هي حدود متتابعة من متتالية حسابية (u_n) أساسها 1/2

نضع $u_1 = 1/2$

إذن : $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n - 1)$

أي : $u_n = \frac{1}{2}n$

لنبحث عن رتبة الحد الذي قيمته 10

لدينا : $u_n = 10$ أي $\frac{1}{2} n = 10$ أي : $n = 20$

إذن : عدد الحدود هو 20

منه : $S = \frac{20}{2}\left(\frac{1}{2} + 10\right)$

أي : $S = 5 + 100 = 105$

التمرين ـ 6

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1 ـ أكتب u_n بدلالة n

2 ـ أحسب المجموع $u_1 + u_2 + \dots\dots + u_7$

لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $v_n = u_{2n}$

3 ـ أحسب المجموع $v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n$ بدلالة n

الحـل ـ 6

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -2(3)^{n-1}$

2 ـ

$$u_1 + u_2 + \dots\dots + u_7 = u_1\left(\frac{3^7 - 1}{3 - 1}\right)$$

$$= -2\left(\frac{3^7 - 1}{2}\right)$$

$$= -(3^7 - 1)$$

$$= 1 - 3^7$$

3 ـ من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{2n}$

$$= -2\,(3)^{2n-1}$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\right)(3)^{2n}$$

$$= \frac{-2}{3}\,(9)^n$$

$$= \frac{9}{9} \times \left(\frac{-2}{3}\right)(9)^n$$

$$= 9\left(\frac{-2}{3}\right)(9)^{n-1}$$

$$= -6(9)^{n-1}$$

منه : (v_n) متتالية هندسية أساسها 9 و حدها الأول $v_1 = -6$

إذن : $v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n = v_1\left(\frac{9^n - 1}{9 - 1}\right)$

$$= -6\left(\frac{9^n - 1}{8}\right)$$

$$= \frac{-3}{4}\,(9^n - 1)$$

التمرين ـ 7

(u_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها موجبة تماما حيث $u_0 = 2$ و $u_3 = 9\,u_1$

1 ـ عين أساس المتتالية (u_n)

2 ـ أحسب u_n بدلالة n

3 ـ أحسب بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$

الحـل ـ 7

1 ـ ليكن k أساس هذه المتتالية حيث $k > 1$

لدينا : $u_1 = k\,u_0$ أي $u_1 = 2\,k$

و $u_2 = k\,u_1$ أي $u_2 = k(2\,k) = 2\,k^2$

و $u_3 = k\,u_2$ أي $u_3 = k(2\,k^2) = 2\,k^3$

من جهة أخرى $u_3 = 9\,u_1$ أي $2\,k^3 = 9(2\,k)$

أي $k^2 = 9$

أي : $k = 3$ أو $k = -3$

بماأن كل الحدود موجبة فإن أساس المتتالية موجب أي $k = 3$

2 ـ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2(3)^n$

3 ـ مجموع الحدود المتتابعة من متتالية هندسية :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = u_0\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1-3^{n+1}}{-2}\right)$$

$$= -1(1-3^{n+1})$$

$$= 3^{n+1} - 1$$

التمرين ـ 8

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

أوجد عدد طبيعي n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن $-10^{-3} < u_n < 10^{-3}$

الحـل ـ 8

لاحظ أن كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما أي من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 0$ و خاصة $u_n > -10^{-3}$

إذن يكفي تعين عدد طبيعي n حيث $u_n < 10^{-3}$ كمايلي :

لدينا $u_n < 10^{-3}$ أي $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$

أي : $\dfrac{1}{n^{3/2}} < \dfrac{1}{10^3}$

أي : $\dfrac{1}{n^{1/2}} < \dfrac{1}{10}$

أي : $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$

أي : $n > 100$

نتيجة : يكفي أن يكون $n_0 = 100$ حيث إذا كان $n > 100$ فإن $u_n < 10^{-3}$ و عليه $-10^{-3} < u_n < 10^{-3}$ و هو المطلوب

التمرين ـ 9

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = n\sqrt{n}$

أوجد عدد طبيعي n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن $u_n > 10^6$

الحـل ـ 9

لدينا $u_n > 10^6$ أي : $n\sqrt{n} > 10^6$

أي : $n^{3/2} > 10^6$

أي : $n^{1/2} > 10^2$

أي : $n > 10^4$

إذن يكفي أن نأخذ $n_0 = 10^4$ حيث إذا كان $n > 10^4$ فإن $u_n > 10^6$

التمرين ـ 10

(u_n) متتالية هندسية أساسها $1/2$ و حدها الأول $u_0 = 3$

ابتداء من أي دليل n يكون $u_n < 10^{-5}$ ؟

الحـل ـ 10

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3(1/2)^n$

إذن $u_n < 10^{-5}$ أي $3(1/2)^n < 10^{-5}$

أي : $(1/2)^n < \dfrac{1}{3 \times 10^5}$

أي : $2^n > 3 \times 10^5$

أي : $n > \log_2(3 \times 10^5)$

أي : $n > \dfrac{\ln(3 \times 10^5)}{\ln(2)}$

أي : $n > \dfrac{\ln(3) + 5\ln(10)}{\ln(2)}$

أي : $n > 18{,}19$

إذن : يكفي أخذ $n_0 = 18$ حيث إذا كان $n > 18$ فإن $u_n < 10^{-5}$

التمرين – 11

أحسب نهايات المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية :

1 – $u_n = \dfrac{3n+2}{2n-1}$

2 – $u_n = 2n - \dfrac{1}{n+1}$

3 – $u_n = \dfrac{7n^2 - 3n + 2}{n^2 - n + 1}$

4 – $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{2n+1}}$

5 – $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n+3}}$

6 – $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+1}$

7 – $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$

الحـل – 11

لاحظ أن في كل حالة يمكن تعريف دالة f للمتغير الحقيقي x حيث $f(n) = u_n$
ثم حساب النهايات كمايتم حسابها في الدوال العددية كمايلي :

1 – $$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n+2}{2n-1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

2 – $$\lim_{n \to +\infty} 2n - \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} 2n - \frac{1}{n} = +\infty$$

3 – $$\lim_{n \to +\infty} \frac{7n^2 - 3n + 2}{n^2 - n + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{7n^2}{n^2} = 7$$

4 – $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{3n}{2n}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

5 – $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n^2+2}{n+3}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

6 – $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

7 – $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n\sqrt{n}+n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(\sqrt{n}+1)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{1} = +\infty$$

التمرين – 12

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ $u_n = 5 - \dfrac{10}{n^2}$

من بين الأعداد الحقيقية التالية 0 ؛ 6 ؛ 4,999 ؛ 5 ؛ ماهي التي تمثل عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

الحـل – 12

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\dfrac{10}{n^2} > 0$ منه $-\dfrac{10}{n^2} < 0$

إذن : $5 - \frac{10}{n^2} \le 5$ أي : $u_n \le 5$

منه : كل من العددين الحقيقيين 5 و 6 تمثل عناصر حادة من الأعلى للمتتالية (u_n)

التمرين – 13

1 – أنجز جدول تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

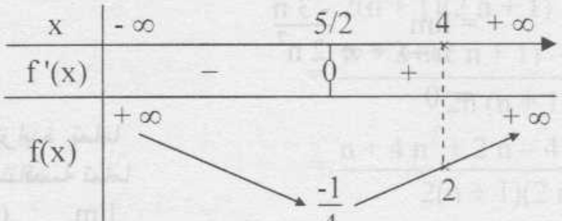
2 – أثبت أن العدد 1/2 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 4$ بـ : $\frac{1}{n^2 - 5n + 6}$

الحل – 13

1 – f معرفة على IR و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f قابلة للإشتقاق على IR و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = 2x - 5$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :



$$f(5/2) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25 - 50 + 24}{4} = \frac{-1}{4}$$

2 – حسب جدول تغيرات الدالة f فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]5/2 ; +\infty[$ و خاصة على المجال $]4 ; +\infty[$ و منه : فإن العدد w_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 4$ بـ $w_n = n^2 - 5n + 6$ يتزايد بتزايد n

إذن أصغر قيمة لـ w_n هي $w_4 = (4)^2 - 5(4) + 6 = 2$

منه : أكبر قيمة لـ $\frac{1}{w_n}$ هي $\frac{1}{w_4} = \frac{1}{2}$ (خواص المقلوب)

لكن $w_n = u_n$ إذن : $u_n \le 1/2$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 4$

إذن : العدد 1/2 هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)

التمرين – 14

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{-1}{2n + 4}$ ؛ $v_n = \frac{1}{n+1}$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم أوجد نهايتهما المشتركة

الحل – 14

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-1}{2(n+1) + 4} - \frac{-1}{2n + 4} \\ &= \frac{-1}{2n + 6} + \frac{1}{2n + 4} \\ &= \frac{-2n - 4 + 2n + 6}{(2n + 6)(2n + 4)} \\ &= \frac{2}{(2n + 6)(2n + 4)} \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n + 1 + 1} - \frac{1}{n + 1}$$

$$= \frac{n+1-(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

لدينا أيضا :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{2n+4} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-(n+1)-(2n+4)}{(2n+4)(n+1)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-3n}{2n^2}$$

$$= 0$$

خلاصة : $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ متتالية متزايدة تماما} \\ (v_n) \text{ متتالية متناقصة تماما} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{array}\right\}$

إذن حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{2n+4} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

التمرين – 15

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـــ $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ و $v_n = 3 - \frac{5}{n}$

هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

الحـل – 15

لاحظ أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة لأن العدد $(-1)^n$ موجب إذا كان n زوجي و سالب إذا كان n فردي

و عليه فالمتتاليتان (u_n) و (v_n) لا يمكن أن تكونا متجاورتان حسب التعريف

حذار: في هذا المثال $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$ و لكنهما متتاليتان غير متجاورتان .

التمرين – 16

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

الحـل – 16

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots\dots + \frac{1}{2(n+1)} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots\dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1)+(2n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$ حسب العلاقة السابقة

$$= \frac{n+2n(2n+1)-2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n+4n^2+2n-4n^2-6n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

و لدينا أيضا

$$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(u_n + \frac{1}{n}\right) - u_n$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$$

$$= 0$$

خلاصة : $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ متتالية متزايدة تماما} \\ (v_n) \text{ متتالية متناقصة تماما} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{array}\right\}$

إذن : حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

<u>**التمرين ــ 17**</u>

(u_n) متتالية معرفة على IN^* بــ $u_n = \frac{\ln n}{n}$ حيث ln هو اللوغاريتم النيبيري

برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة 3

<u>**الحــل ــ 17**</u>

نعرف الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ بــ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

لندرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x لدينا $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ من اشارة $1 - \ln x$ كمايلي :

x	0		e	3	$+\infty$
$1 - \ln x$		$+$	0	$-$	

إذن : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0 ; e[$ و متناقصة تماما على المجال $]e ; +\infty[$

بماأن $f(n) = u_n$ من أجل $n \in IN^*$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ابتداء من الحد u_3 لأن $3 > e$ و $2 < e$

التمرين – 18

(u_n) متتالية معرفة على N بـ $u_n = \frac{5^n}{n!}$

أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها

الحـل – 18

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{5^n}{n!}$$

$$= \frac{5 \times 5^n}{(n+1) \times n!} - \frac{5^n}{n!}$$

$$= \frac{5^n}{n!}\left(\frac{5}{n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{5^n}{n!}\left(\frac{5-n-1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{5^n}{n!}\left(\frac{4-n}{n+1}\right)$$

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{5^n}{n!(n+1)} > 0$

إذن : اشارة $u_{n+1} - u_n$ هي اشارة $4 - n$ كمايلي

$4 - n > 0 \Rightarrow 4 > n$

$4 - n < 0 \Rightarrow 4 < n$

$4 - n = 0 \Rightarrow 4 = n$

إذن : ابتداء من u_5 فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما

حذار! ابتداء من الحد u_4 فان $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (لأن $u_5 = u_4$) أي المتتالية متناقصة

التمرين – 19

أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـ $u_n = \frac{n!}{7^n}$ متزايدة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها

الحـل – 19

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)!}{7^{n+1}} - \frac{n!}{7^n}$$

$$= \frac{(n+1) \times n!}{7 \times 7^n} - \frac{n!}{7^n}$$

$$= \frac{n!}{7^n}\left(\frac{n+1}{7} - 1\right)$$

$$= \frac{n!}{7^n}\left(\frac{n+1-7}{7}\right)$$

$$= \frac{n!}{7^n}\left(\frac{n-6}{7}\right)$$

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{n!}{7^n} \times \frac{1}{7} > 0$

إذن : اشارة $u_{n+1} - u_n$ هي اشارة $n - 6$

$n - 6 > 0 \Rightarrow n > 6$

$n - 6 < 0 \Rightarrow n < 6$

$n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6$

إذن : ابتداء من الحد u_7 فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن $u_{n+1} - u_n > 0$

حذار! ابتداء من الحد u_6 فإن المتتالية (u_n) متزايدة لأن $u_7 = u_6$ أي $u_{n+1} - u_n \geq 0$

التمرين – 20

(u_n) متتالية معرفة على IN بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $4\,u_{n+1} - 2\,u_n = 9$

و (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = 2\,u_n - 9$

1 – أحسب الحدود u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 ؛ v_0 ؛ v_1 ؛ v_2 ؛ v_3

2 ـ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب أساسها و حدها العام v_n بدلالة n

3 ـ استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n

الحـل ـ 20

1 ـ لدينا : $4\,u_{n+1} - 2\,u_n = 9$ اذن : $4\,u_{n+1} = 2\,u_n + 9$ أي : $u_{n+1} = \frac{1}{4}(2\,u_n + 9)$

منه :

$$u_1 = \frac{1}{4}(2\,u_0 + 9) = \frac{1}{4}(4 + 9) = \frac{13}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{4}(2\,u_1 + 9) = \frac{1}{4}\left(\frac{13}{2} + 9\right) = \frac{13 + 18}{8} = \frac{31}{8}$$

$$u_3 = \frac{1}{4}(2\,u_2 + 9) = \frac{1}{4}\left(\frac{31}{4} + 9\right) = \frac{31 + 36}{16} = \frac{67}{16}$$

لدينا $v_n = 2\,u_n - 9$ إذن :

$$v_0 = 2\,u_0 - 9 = 4 - 9 = -5$$

$$v_1 = 2\,u_1 - 9 = \frac{13}{2} - 9 = \frac{13 - 18}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$v_2 = 2\,u_2 - 9 = \frac{31}{4} - 9 = \frac{31 - 36}{4} = \frac{-5}{4}$$

$$v_3 = 2\,u_3 - 9 = \frac{67}{8} - 9 = \frac{67 - 72}{8} = \frac{-5}{8}$$

2 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2\,u_{n+1} - 9 \\ &= 2\left[\frac{1}{4}(2\,u_n + 9)\right] - 9 \\ &= \frac{1}{2}(2\,u_n + 9) - 9 \\ &= u_n + \frac{9}{2} - 9 \\ &= u_n - \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2\,u_n - 9) \\ &= \frac{1}{2}\,v_n \end{aligned}$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 1/2 و حدها الأول $v_0 = -5$

منه : $v_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3 ـ لدينا $v_n = 2\,u_n - 9$ أي : $2\,u_n = v_n + 9$ أي : $u_n = \frac{1}{2}\,v_n + \frac{9}{2}$

منه : $u_n = \frac{1}{2}\left[-5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{9}{2}$ أي : $u_n = \frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ و هي عبارة u_n المطلوبة

لنبحث الآن عن المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$

لدينا :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] + ... + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{9}{2}(n+1) - 5\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{9}{2}(n+1) - 5 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$= \frac{9}{2}(n+1) + 5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$ و هو المطلوب

التمرين ـ 21

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 14$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4\,u_n + 3$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـــ $v_n = u_n + 1$

1 ــ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول و عبارة حدها العام

2 ــ استنتج عبارة u_n بدلالة n

3 ــ أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2$

الحـل ــ 21

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= (4\,u_n + 3) + 1 \\ &= 4\,u_n + 4 \\ &= 4(u_n + 1) \\ &= 4\,v_n \end{aligned}$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 و حدها الأول $v_0 = u_0 + 1 = 15$

منه : $v_n = 15 \times (4)^n$

2 ــ لدينا $v_n = u_n + 1$ إذن : $u_n = v_n - 1$ أي : $u_n = 15(4)^n - 1$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2 \\ &= (v_0 - 1)^2 + (v_1 - 1)^2 + ...(v_n - 1)^2 \\ &= (v_0^2 - 2\,v_0 + 1) + (v_1^2 - 2\,v_1 + 1) + ... + (v_n^2 - 2\,v_n + 1) \\ &= (v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2) - 2(v_0 + v_1 + ... + v_n) + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\text{(n + 1) مرة}} \end{aligned}$$

لاحظ أن : $v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0\left(\frac{(4)^{n+1} - 1}{4 - 1}\right) = 15\left(\frac{4^{n+1} - 1}{3}\right) = 5[4^{n+1} - 1]$

نعرف المتتالية (t_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـــ $t_n = v_n^2$

إذن : $t_n = (15 \times 4^n)^2 = 225 \times 16^n$.

إذن : (t_n) متتالية هندسية حدها الأول $t_0 = 225$ و أساسها 16

منه :

$$\begin{aligned} v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2 &= t_0 + t_1 + ... + t_n = t_0 \times \left(\frac{16^{n+1} - 1}{16 - 1}\right) \\ &= 225 \times \left(\frac{16^{n+1} - 1}{15}\right) = 15(16^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

نتيجة :

$$\begin{aligned} S_n &= 15 \times (16^{n+1} - 1) - 2 \times 5 \times (4^{n+1} - 1) + n + 1 \\ &= 15 \times 16^{n+1} - 15 - 10 \times 4^{n+1} + 10 + n + 1 \\ &= 15 \times 16^{n+1} - 10 \times 4^{n+1} + n - 4 \end{aligned}$$

التمرين ــ 22

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول $u_0 = 2/9$

أحسب المجموع $S = u_3 + u_4 + ... + u_{10}$

الحـل ــ 22

المتتالية هندسية إذن : $S = u_3 \times \left(\frac{3^{10-3+1} - 1}{3 - 1}\right)$

لنحسب u_3 :

لدينا $u_n = u_0 \times 3^n$ إذن : $u_3 = \frac{2}{9} \times 3^3 = 6$

منه : $S = 6 \times \left(\frac{3^8 - 1}{2}\right) = 3(3^8 - 1) = 3^9 - 3$

التمرين ــ 23

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$

أحسب بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$

الحـل ــ 23

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + ... + u_n &= (2 \times 3^0 + 3 \times 4^0) + (2 \times 3^1 + 3 \times 4^1) + ... + (2 \times 3^n + 3 \times 4^n) \\ &= (2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + ... + 2 \times 3^n) + (3 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + ... + 3 \times 4^n) \\ &= 2(3^0 + 3^1 + ... + 3^n) + 3(4^0 + 4^1 + ... + 4^n) \\ &= 2\left[3^0 \times \left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}\right)\right] + 3\left[4^0 \times \left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= (3^{n+1} - 1) + (4^{n+1} - 1)$$
$$= 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$$

التمرين ـ 24

$(u_n)_{n>0}$ متتالية حدها الأول $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} = 2\ u_n + 3$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (v_n) بـ $v_n = u_n + 3$

1 ـ أثبت أن v_n متتالية هندسية يطلب حدها العام

2 ـ أحسب المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \ldots.. + v_n$ بدلالة n

3 ـ أثبت أن العدد $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + 3n$.مضاعف العدد 4 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

الحـل ـ 24

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= 2\ u_n + 3 + 3 \\ &= 2\ u_n + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \\ &= 2\ v_n \end{aligned}$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_1 = u_1 + 3 = 4$

منه $v_n = 4 \times 2^{n-1}$ أي $v_n = 2^{n+1}$ و هي عبارة الحد العام لـ v_n

2 ـ

$$\begin{aligned} S_n &= v_1 + v_2 + \ldots\ldots.. + v_n \\ &= v_1 \times \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) \\ &= 4 \times (2^n - 1) \end{aligned}$$

3 ـ لدينا : $v_n = u_n + 3$ إذن $u_n = v_n - 3$

منه :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \ldots.. + u_n &= (v_1 - 3) + (v_2 - 3) + \ldots.. + (v_n - 3) \\ &= (v_1 + v_2 + \ldots.. + v_n) \underbrace{- 3 - 3 - \ldots.. - 3}_{\text{مرة } n} \\ &= S_n - 3\ n \\ &= 4 \times (2^n - 1) - 3\ n \end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \ldots.. + u_n + 3\ n &= 4 \times (2^n - 1) - 3\ n + 3\ n \\ &= 4 \times (2^n - 1) \end{aligned}$$

منه : العدد $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + 3\ n$ مضاعف 4

التمرين ـ 25

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_0 = 2\ ;\ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4\ u_n - u_{n-1}\ :\ n > 0 \end{cases}$$

من أجل

1 ـ أوجد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a + b = 4 \\ a\ b = 1 \end{cases}$

2 ـ من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = u_{n+1} - a\ u_n$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها b

3 ـ من أجل كل عدد طبيعي n نضع $t_n = u_{n+1} - b\ u_n$

برهن أن (t_n) متتالية هندسية أساسها a

4 ـ أكتب كل من v_n و t_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحـل ـ 25

1 ـ إذا وجد عددين حقيقيين a و b يحققان $\begin{cases} a + b = 4 \\ a\ b = 1 \end{cases}$ فإن a و b هما حلا المعادلة $x^2 - 4\ x + 1 = 0$ في R .

إذن لإيجادهما يكفي حل المعادلة كمايلي :

$$\Delta = 16 - 4 = 12$$

$$a = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$b = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

ملاحظة : يمكن أن نأخذ $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2-\sqrt{3}$

إذن نأخذ $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2-\sqrt{3}$

2 ــ لدينا $v_n = u_{n+1} - a\,u_n$ أي : $v_n = u_{n+1} - (2+\sqrt{3})\,u_n$

منه : $v_{n+1} = u_{n+2} - (2+\sqrt{3})\,u_{n+1}$

$$= (4\,u_{n+1} - u_n) - (2+\sqrt{3})\,u_{n+1}$$
$$= (4 - 2 - \sqrt{3})\,u_{n+1} - u_n$$
$$= (2-\sqrt{3})\,u_{n+1} - u_n$$
$$= \left(2-\sqrt{3}\right)\left[u_{n+1} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}\,u_n\right]$$
$$= b\left[u_{n+1} - \frac{1}{b}\,u_n\right]$$

لأن $a\,b = 1$ إذن $\frac{1}{b} = a$ $\quad = b\,[u_{n+1} - a\,u_n]$

$$= b\,v_n$$

منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $b = 2-\sqrt{3}$

3 ــ لدينا $t_n = u_{n+1} - b\,u_n$ إذن : $t_n = u_{n+1} - (2-\sqrt{3})\,u_n$

منه : $t_{n+1} = u_{n+2} - (2-\sqrt{3})\,u_{n+1}$

$$= (4\,u_{n+1} - u_n) - (2-\sqrt{3})\,u_{n+1}$$
$$= (4 - 2 + \sqrt{3})\,u_{n+1} - u_n$$
$$= (2+\sqrt{3})\,u_{n+1} - u_n$$
$$= a\,u_{n+1} - u_n$$
$$= a\left(u_{n+1} - \frac{1}{a}\,u_n\right)$$

لأن $a\,b = 1$ إذن $\frac{1}{a} = b$ $\quad = a(u_{n+1} - b\,u_n)$

$$= a\,t_n$$

منه : (t_n) متتالية هندسية أساسها $a = 2+\sqrt{3}$

4 ــ لدينا $v_0 = u_1 - a\,u_0$ إذن : $v_0 = 4 - (2+\sqrt{3}) \times 2 = -2\sqrt{3}$

منه : $v_n = -2\sqrt{3} \times (2-\sqrt{3})^n$

و لدينا $t_0 = u_1 - b\,u_0$ إذن : $t_0 = 4 - (2-\sqrt{3}) \times 2 = 2\sqrt{3}$

منه : $t_n = 2\sqrt{3} \times (2+\sqrt{3})^n$

و لدينا : $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - a\,u_n \\ t_n = u_{n+1} - b\,u_n \end{cases}$ إذن : $t_n - v_n = -\,b\,u_n - (-\,a\,u_n)$

أي : $t_n - v_n = (a-b)\,u_n$

أي : $u_n = \dfrac{t_n - v_n}{a-b}$

منه : $$u_n = \frac{2\sqrt{3} \times (2+\sqrt{3})^n + 2\sqrt{3} \times (2-\sqrt{3})^n}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}$$

أي : $$u_n = \frac{2\sqrt{3} \times [(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]}{2\sqrt{3}}$$

أي : $u_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$

التمرين ــ 26

c ; b ; a أعداد حقيقية غير معدومة

1 ــ بين أن إذا كانت a ; b ; c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a - b + c)$$

2 ــ أوجد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 و مجموع مربعاتها هو 3276

الحــل ــ 26

1 ــ لدينا : $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 - a\,b + a\,c + a\,b - b^2 + b\,c + a\,c - b\,c + c^2$

$= a^2 + 2\,a\,c - b^2 + c^2$

إذا كانت a ; b ; c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن حسب الوسط الهندسي لدينا : $a\,c = b^2$

منه : $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + 2\,b^2 - b^2 + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2$ و هو المطلوب

2 ــ لتكن a ; b ; c بهذا الترتيب هذه الأعداد المطلوبة

إذن : $\begin{cases} a + b + c = 78 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3276 \end{cases}$

لكن حسب السؤال (1) فإن : $a^2 + b^2 + c^2 = (a ; b + c)(a - b + c)$

أي : $3276 = 78(a - b + c)$

أي : $a - b + c = 3276/78$

أي : $a - b + c = 42$

لدينا إذن الجملة $\begin{cases} a + b + c = 78 \text{ ......(1)} \\ a - b + c = 42 \text{ ......(2)} \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $2\,b = 36$ أي : $b = 18$

ليكن k أساس هذه المتتالية الهندسية حيث $k \in IR^*$

لدينا $a = b/k = 18/k$ و $c = b\,k = 18\,k$

إذن المساواة (1) تصبح : $\frac{18}{k} + 18 + 18\,k = 78$ نضرب الطرفين في k :

أي : $18 + 18\,k + 18\,k^2 = 78\,k$

أي : $18\,k^2 - 60\,k + 18 = 0$

أي : $3\,k^2 - 10\,k + 3 = 0$ و هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول k

$$\Delta = 100 - 36 = 64$$

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{10 - 8}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ k_2 = \dfrac{10 + 8}{6} = \dfrac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

لنختار مثلا $k = 3$

إذن : $a = 18/3 = 6$ و $c = 18 \times 3 = 54$

تحقيق : $\begin{cases} a + b + c = 6 + 18 + 54 = 78 \\ a - b + c = 6 - 18 + 54 = 42 \end{cases}$

لاحظ أن من أجل $k = 1/3$ نحصل على $a = 54$ و $b = 18$ و $c = 6$

خلاصة : الأعداد المطلوبة هي : $(a ; b ; c) = (6 ; 18 ; 54)$ أو $(a ; b ; c) = (54 ; 18 ; 6)$

التمرين ــ27

(α_n) متتالية هندسية منتهية كل حدودها موجبة حيث حدها الأول $\alpha_1 = 3$ و $\alpha_3 + \alpha_5 = 15/16$

1 ــ عين أساس المتتالية (α_n) ثم حدها العام

2 ــ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \text{........} \alpha_n$

من أجل كل عدد طبيعي، غير معدوم n نضع $\beta_n = \ln(\alpha_n)$ حيث ln هو اللوغاريتم النيبيري

3 ــ برهن أن (β_n) متتالية حسابية يطلب أساسها و حدها العام β_n

4 ــ أحسب بدلالة n المجموع $t_n = \beta_1 + \beta_2 + \text{.......} \beta_n$

الحــل ــ 27

1 ــ ليكن k أساس المتتالية (α_n) حيث $0 < k < 1$ (لأن حدودها موجبة و المتتالية منتهية)

لدينا : $\alpha_3 = \alpha_1 k^{3-1}$ أي : $\alpha_3 = 3 k^2$

و $\alpha_5 = \alpha_1 k^{5-1}$ أي : $\alpha_5 = 3 k^4$

إذن : $\alpha_3 + \alpha_5 = 15/16$ تكافئ $3 k^2 + 3 k^4 = 15/16$

تكافئ $k^2 + k^4 = 5/16$

تكافئ $16 k^4 + 16 k^2 - 5 = 0$ وهي معادلة مضاعفة التربيع

نضع $t = k^2$ حيث $t \geq 0$

نحل المعادلة $16 t^2 + 16 t - 5 = 0$ كمايلي : $\Delta = 16^2 + 20 \times 16 = 16(16 + 20) = 16 \times 36 = (4 \times 6)^2$

إذن : $\begin{cases} t_1 = \dfrac{-16 + 24}{32} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4} \\ t_2 = \dfrac{-16 - 24}{32} = \dfrac{-40}{32} \end{cases}$ مرفوض

منه : $k^2 = 1/4$ أي $k = 1/2$ لأن $k > 0$

نتيجة : (α_n) متتالية هندسية أساسها $1/2$ و حدها الأول 3 إذن $\alpha_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

2 ـ $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

$$= \alpha_1 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$= 3 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 6 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

3 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\beta_{n+1} = \ln(\alpha_{n+1})$

$$= \ln\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \ln 3 + n \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

أي : $\beta_n = \ln 3 + (n - 1) \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

منه : (β_n) متتالية حسابية حدها الأول $\beta_1 = \ln 3$ و أساسها $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

4 ـ $t_n = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$

$$= \frac{n}{2} \times (\beta_1 + \beta_n)$$

$$= \frac{n}{2}\left[\ln 3 + \ln 3 + (n - 1) \ln \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2 \ln 3 - (n - 1) \ln 2\right]$$

$$= n \ln 3 - \frac{n(n - 1)}{2} \ln 2$$

التمرين ـ28

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $A_n = \underbrace{111......1}_{n \text{ مرة}}$

أحسب بدلالة n العدد $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$

الحـل ـ 28

لاحظ أن العدد A_n هو حد عام لمتتالية عددية معرفة على IN* كما يلي :

$A_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $A_{n+1} = A_n + 10^n$

بهذه الطريقة لدينا الكتابات التالية :

$$\begin{aligned} &A_1 = 1 \\ &A_2 = A_1 + 10 \\ &A_3 = A_2 + 10^2 \\ \oplus\quad &A_4 = A_3 + 10^3 \\ &\vdots \\ &A_n = A_{n-1} + 10^{n-1} \end{aligned}$$

بجمع هذه المساواة طرف لطرف نحصل على :

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} + A_n = A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} + 1 + 10 + 10^2 + \ldots.. + 10^{n-1}$$

أي :

$$A_n = 1 + 10 + 10^2 + \ldots.. + 10^{n-1}$$

لاحظ أن $1 ; 10 ; 10^2 ; \ldots. 10^{n-1}$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها 10

إذن :

$$1 + 10 + 10^2 + \ldots\ldots + 10^{n-1} = 1 \times \left[\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right] = \frac{10^n - 1}{9}$$

منه :

$$A_n = \frac{10^n - 1}{9} \quad \text{أي :} \quad A_n = \frac{1}{9} \times 10^n - \frac{1}{9}$$

لنكتب هذه الحدود كمايلي :

$$\begin{aligned} &A_1 = \frac{1}{9} \times 10^1 - \frac{1}{9} \\ &A_2 = \frac{1}{9} \times 10^2 - \frac{1}{9} \\ \oplus\quad &A_3 = \frac{1}{9} \times 10^3 - \frac{1}{9} \\ &\vdots \\ &A_n = \frac{1}{9} \times 10^n - \frac{1}{9} \end{aligned}$$

بجمع هذه المساواة نحصل على :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n &= \frac{1}{9}\,[10^1 + 10^2 + \ldots.. + 10^n] - \frac{1}{9} \times n \\ &= \frac{1}{9}\left[10 \times \left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right)\right] - \frac{n}{9} \\ &= \frac{10}{81}\,(10^n - 1) - \frac{n}{9} \end{aligned}$$

و هي عبارة المجموع S_n

مثلا : $A_1 = 1 \ ; \ A_2 = 11 \ ; \ A_3 = 111$ إذن : $A_1 + A_2 + A_3 = 123$

و بتطبيق العلاقة الناتجة فإن :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \frac{10}{81}\,(10^3 - 1) - \frac{3}{9} \\ &= \frac{10 \times 999}{9 \times 9} - \frac{3}{9} \\ &= \frac{10 \times 111}{9} - \frac{3}{9} \\ &= \frac{1110 - 3}{9} \\ &= \frac{1107}{9} \\ &= 123 \end{aligned}$$

التمرين ـ 29

(u_n) متتالية معرفة بـــ $u_0 = -2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$

حيث α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha \neq 0$

1 ـ أوجد الأعداد α و β و التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة .

نفرض أن المتتالية (u_n) ليست ثابتة و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ $v_n = u_n + \lambda$

حيث λ عدد حقيقي غير معدوم .

2 ـ عين λ بدلالة α و β حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3 ـ نضع $\alpha = 3$ ؛ $\beta = 2$ ؛ $\lambda = 1$

أحسب المجموعين S_n و t_n بدلالة n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$

الحـل ـ 29

1 ـ تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا وفقط إذا تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} = u_n$

أي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\alpha u_n + \beta = u_n$

أي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $(\alpha - 1) u_n + \beta = 0$

بالمطابقة نحصل على $\left.\begin{array}{l}\alpha - 1 = 0\\ \beta = 0\end{array}\right\}$ أي : $\alpha = 1$ و $\beta = 0$

2 ـ لتكن (u_n) متتالية ليست ثابتة أي : $(\alpha ; \beta) \neq (1 ; 0)$

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda$ أي : $v_{n+1} = \alpha u_n + \beta + \lambda$

أي : $v_{n+1} = \alpha\left(u_n + \frac{\beta + \lambda}{\alpha}\right)$ حيث $\alpha \neq 0$

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$u_n + \frac{\beta + \lambda}{\alpha} = u_n + \lambda$ أي : $\lambda = \frac{\beta + \lambda}{\alpha}$

أي : $\alpha \lambda = \beta + \lambda$

أي : $\lambda(\alpha - 1) = \beta$

أي : $\lambda = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ حيث $\alpha \neq 1$

و عليه (v_n) متتالية هندسية أساسها α و حدها الأول $v_0 = u_0 + \lambda = -2 + \frac{\beta}{\alpha - 1}$

3 ـ بوضع $\alpha = 3$ ؛ $\beta = 2$ ؛ $\lambda = 1$

لاحظ أن : $\frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{2}{3 - 1} = 1$ إذن : $\frac{\beta}{\alpha - 1} = \lambda$

منه : الأعداد α ؛ β و λ تحقق شروط السؤال (2) أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\alpha = 3$ و حدها الأول

$v_0 = -2 + \lambda = -1$

إذن : $(v_n) = -1(3)^n$

منه :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$$
$$= v_0 \times \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}\right)$$
$$= -1\left(\frac{1 - 3^{n+1}}{-2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - 3^{\,n+1}\right]$$

و لدينا : $v_n = u_n + \lambda$ أي $v_n = u_n + 1$ منه : $u_n = v_n - 1$

إذن :

$$t_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$$
$$= (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots\dots + (v_n - 1)$$
$$= (v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n) - 1 \times (n + 1)$$
$$= S_n - n - 1$$

$$= \frac{1}{2}[1 - 3^{n+1}] - n - 1$$

مثال : $u_0 = -2$ ؛ $u_1 = \alpha u_0 + \beta = 3(-2) + 2 = -4$ إذن : $u_0 + u_1 = -2 - 4 = -6$

بتطبيق العلاقة الناتجة : $u_0 + u_1 = \frac{1}{2}[1 - 3^2] - 1 - 1 = -4 - 2 = -6$

التمرين ــ 30

في كل حالة من الحالات التالية أحسب نهاية المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام .

ــ 1 $u_n = e^{1-n}$

ــ 2 $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)$

ــ 3 $u_n = (n+2)e^{-n}$

ــ 4 $u_n = \ln(3 + e^{2-n})$

ــ 5 $u_n = \frac{e^n - 6}{2e^n + 1}$

ــ 6 $u_n = \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1}$

ــ 7 $u_n = \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right)$ **من أجل $n > 1$**

ــ 8 $u_n = \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right)$

ــ 9 $u_n = \frac{2^n}{5^n} - 1$

الحــل ــ 30

ــ 1 $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{1-n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{e^n}$

$= 0$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

ــ 2 $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1)$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$

$= 0$

ــ 3 $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+2)e^{-n} = \lim\limits_{n \to +\infty} (n e^{-n} + 2 e^{-n})$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{e^n} + \frac{2}{e^n}\right)$

$= 0$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

ــ 4 $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(3 + e^{2-n}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(3 + \frac{e^2}{e^n}\right)$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(3)$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

$= \ln(3)$

ــ 5 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n\left(1 - \frac{6}{e^n}\right)}{e^n\left(2 + \frac{1}{e^n}\right)}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1 - 0}{2 + 0}\right)$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

$= 1/2$

ــ 6 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^n} - 1}{\frac{2}{e^n} + 1}$

$= -1/1$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

$= -1$

7 – $$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e^n-3}{e^n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e^n\left(1-\frac{3}{e^n}\right)}{e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1-0}{1+0}\right)$$ لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}=0$

$$= \ln 1$$

$$= 0$$

8 – $$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e^n+2}{e^{2n}+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e^n\left(1+\frac{2}{e^n}\right)}{e^n\left(e^n+\frac{1}{e^n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1+0}{e^n+0}\right)$$ لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}=0$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^n}\right)$$

$$= -\infty$$ لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}=0$

9 – $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{5^n}-1 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1$$

$$= -1$$ لأن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ $\left(-1<\frac{2}{5}<1\right)$

التمرين – 31

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على IN بـ : $u_0 = 2$ ؛ $u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n+1}$

و $v_n = \frac{1}{u_n}$ (حيث من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \neq 0$)

1 – برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2 – برهن أن (v_n) متتالية حسابية ثم أكتب عبارة حدها العام .

3 – إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحل – 31

1 – لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 0$

لنبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 1$ لدينا $u_1 = \frac{u_0}{3u_0+1} = \frac{2}{6+1} = \frac{2}{7}$ و $2/7 > 0$

إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$ و $n = 1$ (لأن $u_0 = 2$ و $2 > 0$)

لنفرض أن $u_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا : $u_n > 0$ إذن : $3u_n > 0$ إذن : $3u_n + 1 > 1$ و خاصة $3u_n + 1 > 0$

منه : $\frac{1}{3u_n+1} > 0$ و بضرب طرفي هذه المتباينة في u_n حيث $u_n > 0$ نحصل على $\frac{u_n}{3u_n+1} > 0$

أي $u_{n+1} > 0$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2 – لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$

$$= \frac{1}{\frac{u_n}{3u_n+1}}$$

$$= \frac{3\,u_n + 1}{u_n}$$

$$= 3 + \frac{1}{u_n}$$

$$= 3 + v_n$$

إذن : (v_n) متتالية حسابية أساسها 3 و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

منه : $v_n = \frac{1}{2} + 3\,n$

3 ـ لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n}$ إذن : $u_n = \frac{1}{v_n}$ أي $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 3\,n}$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + 3\,n} = 0$

التمرين ـ 32

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN بـ : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n - 2$ و $v_n = u_n + 3$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$

1 ـ برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حدها العام .

2 ـ عين نهاية كل من المتتاليات (u_n) ؛ (S_n) و (t_n)

الحـل ـ 32

1 ـ من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_{n+1} = u_{n+1} + 3$

$$= \frac{1}{3} u_n - 2 + 3$$

$$= \frac{1}{3} u_n + 1$$

$$= \frac{1}{3} (u_n + 3)$$

$$= \frac{1}{3} v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 1/3 و حدها الأول $v_0 = u_0 + 3 = 5$

منه : $v_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2 ـ لدينا : $v_n = u_n + 3$ إذن : $u_n = v_n - 3$ أي $u_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = -3$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$

$$= v_0 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} \right)$$

$$= 5 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{-2/3} \right)$$

$$= \frac{-15}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{15}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right] = \frac{15}{2}$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

و لدينا أيضا : $t_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

$= (v_0 - 3) + (v_1 - 3) + ... + (v_n - 3)$

$= (v_0 + v_1 + ... + v_n) - 3(n + 1)$

$= S_n - 3(n + 1)$

$= S_n - 3\,n - 3$.

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n - 3\,n - 3 = -\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} -3\,n = -\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 15/2 \end{array}\right\}$

التمرين — 33

عين نـهايات كل من المتتاليات (u_n) ؛ (v_n) ؛ (w_n) ؛ (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كمايلي :

$$u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} \quad ; \quad v_n = \frac{u_n}{n} \quad ; \quad w_n = u_n - n \quad ; \quad t_n = \frac{v_n - 1}{w_n - 1}$$

الحـل — 33

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 1}{n(n + 1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} u_n - n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} - n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 1 - n^2 - n}{n + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-n}{n} = -1$$

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{v_n - 1}{w_n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{u_n}{n} - 1}{u_n - n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n - n}{n} \times \frac{1}{u_n - n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^2 + 1}{n + 1} - n}{n} \times \frac{1}{\frac{n^2 + 1}{n + 1} - n - 1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^2 + 1 - n^2 - n}{n + 1}}{n} \times \frac{1}{\frac{n^2 + 1 - n^2 - 2\,n - 1}{n + 1}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - n}{n(n + 1)} \times \frac{n + 1}{-2\,n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - n}{-2\,n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-n}{-2\,n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\,n}$$

$$= 0$$

ملاحظة : يمكن إيجاد نهاية t_n بإستعمال نهاية w_n و v_n كمايلي :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - 1 = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -1$ إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n - 1 = -2$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n - 1}{w_n - 1} = \frac{0}{-2} = 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$

التمرين ـ 34

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \frac{1}{n!}$

حيث $\left\{ \begin{array}{l} 0! = 1 \\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n \text{ من أجل } n > 0 \end{array} \right.$

1 ـ أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) .

2 ـ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_n \le \frac{1}{n}$

2 ـ إستنتج نهاية المتتالية u_n .

الحـل ـ 34

1 ـ

$$u_1 = \frac{1}{1!} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

$$u_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24}$$

$$u_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{120}$$

2 ـ نستعمل الإستدلال بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 1$ الخاصية محققة لأن $u_1 = 1$ و $0 < 1 \le 1/1$

نفرض أن $0 < u_n \le \frac{1}{n}$ من أجل $n > 1$

هل $0 < u_{n+1} \le \frac{1}{n+1}$ ؟

لدينا : $\frac{1}{(n+1)!} > 0$ إذن : $u_{n+1} > 0$ .... (1)

لنحسب الفرق $u_{n+1} - \frac{1}{n+1}$ كمايلي :

$$u_{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)n!} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n!} - 1\right]$$

لكن $n! \ge 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

إذن : $\frac{1}{n!} \le 1$ منه : $\frac{1}{n!} - 1 \le 0$

أي : $\frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n!} - 1\right] \le 0$

أي : $u_{n+1} - \frac{1}{n+1} \le 0$

أي : $u_{n+1} \le \frac{1}{n+1}$ .... (2)

من المتباينتين (1) و (2) فإن $0 < u_{n+1} \le \frac{1}{n+1}$ أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $0 < u_n \le 1/n$

3 ـ لدينا : $0 < u_n \le \frac{1}{n}$ إذن : $0 < \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \le \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$

لكن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

إذن : $0 < \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \le 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

التمرين ـ 35

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \frac{\cos(3n - \pi)}{\sqrt{n}}$

1 ـ تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$

2 ـ إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

الحـل ـ 35

1 ـ نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \le \cos x \le 1$

إذن : $-1 \le \cos(3n - \pi) \le 1$ .... (1)

نضرب المتباينة (1) في العدد الموجب $\frac{1}{\sqrt{n}}$ فنحصل على :

$\frac{-1}{\sqrt{n}} \le \frac{\cos(3n - \pi)}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ أي $\frac{-1}{\sqrt{n}} < u_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ و هو المطلوب

2 ـ لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = 0$

إذن : $0 < \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \le 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

التمرين ـ 36

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = n + 1 - \cos\frac{n\pi}{5}$

تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n : $n \le u_n \le n + 2$ ثم إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحـل ـ 36

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \le \cos x \le 1$

أي : $-1 \le -\cos x \le 1$

منه : $0 \le 1 - \cos x \le 2$

و خاصة لدينا : $0 \le 1 - \cos\frac{n\pi}{5} \le 2$

نضيف n إلى الأطراف : $n \le n + 1 - \cos\frac{n\pi}{5} \le n + 2$

أي : $n \le u_n \le n + 2$ و هو المطلوب

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ و $u_n \ge n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

التمرين ـ 37

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

برر أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 30 يكون $u_n \ge 2^n$ ثم إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحـل ـ 37

لدينا : $n \ge 30$ إذن : $\frac{n}{10} \ge \frac{30}{10}$

إذن: $\frac{n}{10} \ge 3$

منه : $\frac{n}{10} - 1 \ge 3 - 1$

أي : $\frac{n}{10} - 1 \geq 2$

منه : $\left(\frac{n}{10} - 1\right)^n \geq 2^n$

أي : $u_n \geq 2^n$ و هو المطلوب

بما أن $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ و $u_n \geq 2^n$ فإن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

التمرين ــ 38

1 ــ برهن أن إبتداء من رتبة معينة يطلب تعيينها يكون $2^n \leq (n-1)!$

2 ــ بين أن المتتالية (u_n) ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ متقاربة .

الحـل ــ 38

ــ 1

n	2^n	$(n-1)!$
1	2	1
2	4	1
3	8	2
4	16	6
5	32	24
6	64	120
7	128	720

$n = 6 \longrightarrow$

لاحظ أن إبتداء من $n = 6$ فإن $2^n \leq (n-1)!$

لنبرهن هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 6$: الخاصية محققة حسب الجدول السابق

نفرض أن $2^n \leq (n-1)!$ من أجل $n > 6$

هل $2^{n+1} \leq (n+1-1)!$ أي هل $2^{n+1} \leq n!$

لدينا : $2^n \leq (n-1)!$ ....(1) حسب فرضية التراجع .

و $2 \leq n$ ...... (2) لأن البرهان من أجل $n > 6$

نضرب المتباينتين (1) و (2) طرف لطرف نحصل على : $2 \times 2^n \leq n(n-1)!$

أي : $2^{n+1} \leq n!$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 6$ فإن $2^n \leq (n-1)!$

2 ــ لتكن المتتالية (u_n) معرفة بـــ $u_n = \frac{2^n}{n!}$

لدينا من أجل $n \geq 6$ فإن $2^n \leq (n-1)!$ إذن : $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n!}$

أي : $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n \times (n-1)!}$

أي : $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{1}{n}$

أي : $u_n \leq \frac{1}{n}$ من أجل $n \geq 6$

لما يؤول n إلى $+\infty$ فإن $n >>> 6$ إذن : $u_n \leq 1/n$

لكن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ لأن $u_n > 0$

منه : المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

التمرين ــ 39

(u_n) متتالية معرفة بـــ $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

1 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

2 ـ برر أن المتتالية (u_n) متقاربة و أن نهايتها ℓ أكبر من أو يساوي 2

3 ـ بين أن النهاية ℓ تحقق $\ell = \sqrt{2+\ell}$ ثم إستنتج قيمة ℓ

الحـل ـ 39

1 ـ الإستدلال بالتراجع :

من أجل n = 1 لدينا : $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{7}$

بما أن $2 \le \sqrt{7} \le 5$ فإن $2 \le u_1 \le u_0$ أي الخاصية محققة من أجل n = 1

نفرض أن $2 \le u_{n+1} \le u_n$ من أجل n > 1

هل $2 \le u_{n+1+1} \le u_{n+1}$

أي هل $2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $2 \le u_{n+1} \le u_n$

منه : $4 \le 2+u_{n+1} \le 2+u_n$

منه : $\sqrt{4} \le \sqrt{2+u_{n+1}} \le \sqrt{2+u_n}$

أي : $2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

أي : الخاصية صحيحة من أجل n + 1

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 \le u_{n+1} \le u_n$

2 ـ حسب السؤال (1) لدينا : $u_n \ge 2$ إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بـ 2

و لدينا أيضا : $u_{n+1} \le u_n$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

نتيجة : (u_n) متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة إذن : هي متتالية متقاربة .

و لتكن ℓ نهايتها إذن : $\ell \ge 2$ لأن 2 هو الحد الأسفل للمتتالية .

3 ـ لدينا : لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = u_n$ أي $\sqrt{2+u_n} = u_n$

و في هذه الحالة u_n يؤول إلى ℓ أي : $\sqrt{2+\ell} = \ell$

إذن : يكفي حل المعادلة $\sqrt{2+\ell} = \ell$ كمايلي :

المعادلة تكافئ $2+\ell = \ell^2$

أي : $\ell^2 - \ell - 2 = 0$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} \ell_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \ell_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

(نبحث عن ℓ حيث $\ell \ge 2$)

مرفوض

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

التمرين ـ 40

(u_n) متتالية معرفة على IN* بـ $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n}$

1 ـ أدرس إتجاه تغير الدالة f المعرفة على IR* بـ $f(x) = \ln(x+1) - x$

2 ـ استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن $\ln(k+1) - \ln(k) \le 1/k$

ثم استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\ln(n+1) \le u_n$

3 ـ ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الحـل ـ 40

1 ـ تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

$f(x) = \ln(x+1) - x$

$f(0) = \ln(1) - 0 = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left(-\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \to +\infty} -x$$

$$= -\infty$$

f دالة قابلة للإشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

لاحظ أن : $\frac{x}{x+1} \geq 0$. لأن $x \geq 0$ و $x+1 > 0$ إذن : $\frac{-x}{x+1} \leq 0$

منه : الدالة f متناقصة على المجال $[0 ; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
f'(x)		–	
f(x)	0	↘	$-\infty$

2 ــ حسب جدول تغيرات الدالة f فإن من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$: $f(x) \leq 0$

أي : $\ln(x+1) - x \leq 0$

أي : $\ln(x+1) \leq x$ ...... (α)

ليكن $k \in IN^*$ إذن : $1/k > 0$ أي $1/k \in]0 ; +\infty[$

منه : $\ln\left(\frac{1}{k} + 1\right) \leq \frac{1}{k}$ حسب الخاصية (α)

أي : $\ln\left(\frac{1+k}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$

أي : $\ln(1+k) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ و هو المطلوب

لدينا من أجل كل $k \in IN^*$ فإن $\ln(k+1) - \ln k \leq 1/k$

لنكتب هذه العلاقة من أجل $k = 1$; $k = 2$; $k = 3$; .... $k = n$ كمايلي :

$$\begin{array}{l} \ln(2) - \ln(1) \leq 1 \\ \ln(3) - \ln(2) \leq 1/2 \\ \oplus \quad \ln(4) - \ln(3) \leq 1/3 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \ln(n+1) - \ln(n) \leq 1/n \end{array}$$

بجمع هذه المتباينات طرف لــ طرف : ———————— نحصل على :

$$-\ln(1) + \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

أي : $\ln(n+1) \leq u_n$ و هو المطلوب .

3 ــ لدينا $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ و $u_n \geq \ln(n+1)$ إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

التمرين ــ 41

(u_n) و (v_n) **متتاليتان معرفتان على** IN^* **بــ** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n = \frac{1}{n}$

1 ــ أثبت أن 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

2 ــ أثبت أن من أجل كل n من IN^* فإن $u_n < v_n$

3 ــ هل المتتاليتين (u_n) و (v_n) محدودتين

الحل ــ 41

1 ــ لدينا : $n > 0$ إذن : $n^2 > 0$

إذن : $n^2 + 1 > 1$

إذن : $\sqrt{n^2 + 1} > 1$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < 1$

أي : $u_n < 1$ أي العدد 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)

2 ــ لاحظ أن من أجل كل n من IN* فإن $\frac{1}{n} > 0$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} > 0$

أي $u_n > 0$ و $v_n > 0$ و عليه يكفي مقارنة $(u_n)^2$ و $(v_n)^2$ كمايلي :

$$(u_n)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}\right)^2 = \frac{1}{n^2 + 1} \quad \text{و} \quad (v_n)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

لدينا : $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$

إذن : $(u_n)^2 < (v_n)^2$

منه : $u_n < v_n$ (لأن $u_n > 0$ و $v_n > 0$)

لدينا حسب السؤال (1) : $u_n < 1$

و من جهة أخرى : $u_n > 0$

إذن : $0 < u_n < 1$

أي المتتالية (u_n) محدودة

و لدينا أيضا : $n \geq 1$

إذن : $1/n \leq 1$

أي : $v_n \leq 1$

منه : $0 < v_n \leq 1$ إذن : المتتالية (v_n) محدودة

التمرين ــ 42

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$u_n = \ln(1 + 1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots\dots\dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

1 ــ بين ان المتتالية (u_n) متزايدة .

2 ــ أعط عبارة مختصرة للحد u_n .

3 ــ هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

الحــل ــ 42

1 ــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} - u_n = \left[\ln(1 + 1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right] - \left[\ln(1 + 1) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

بما أن $\frac{1}{n+1} > 0$ فإن $1 + \frac{1}{n+1} > 1$

إذن $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \ln 1$

أي : $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$

منه : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2 ــ لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$$

مثلا : $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2+1}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2$

إذن : بتطبيق هذه الخاصية من أجل $k = 2$; $k = 3$; $k = 4$; $k = 5$; ...... $k = n$ نحصل على :

$$u_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots\dots\dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots\dots + \ln(n+1) - \ln n$$
$$= \ln(n+1)$$

أخيرا : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = \ln(n+1)$

ملاحظة : يمكن إثبات هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 1$ لدينا : $u_n = \ln(1+1) = \ln 2$

و $\ln(n+1) = \ln(1+1) = \ln 2$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$.

نفرض أن $u_n = \ln(n+1)$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} = \ln(n+1+1)$ ؟

لدينا : $$u_{n+1} = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= u_n + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)$$ لأن $u_n = \ln(1+n)$
$$= \ln(n+1) + \ln(n+1+1) - \ln(n+1)$$
$$= \ln(n+1+1)$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$.

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = \ln(n+1)$

3 ـ لدينا : $n \geq 1$ إذن : $n+1 \geq 2$ منه : $\ln(n+1) \geq \ln 2$ أي $u_n \geq \ln 2$

إذن : المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد $\ln 2$

لكن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$

إذن : المتتالية (u_n) ليست محدودة من الأعلى .

نتيجة : المتتالية (u_n) ليست محدودة .

التمرين ـ 43

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots + \frac{1}{3^n}$

1 ـ هل العدد $3/2$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

2 ـ برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة و استنتج أنها متقاربة .

3 ـ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

الحـل ـ 43

1 ـ لاحظ أن u_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $1/3$ و حدها الأول 1

إذن : $u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}$ أي : $u_n = \frac{-3}{2} \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$

أي : $u_n = \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

لدينا : $0 \leq 1/3 \leq 1$

إذن : $0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 1$

إذن : $-1 \leq -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 0$

إذن : $0 \leq 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 1$

إذن : $0 \leq \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \leq \frac{3}{2}$

أي $0 \leq u_n \leq 3/2$

منه : العدد $3/2$ هو حد أعلى للمتتالية (u_n) .

2 ـ لدينا من أجل كل n من IN^* فإن :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}$$

بما أن $\frac{1}{3^{n+1}} > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

نتيجة : (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى إذن : هي متتالية متقاربة .

3 ـ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

التمرين ـ 44

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in IR$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = e^{-u_n}$
برهن أن إبتداء من الدليل 2 تكون المتتالية (u_n) محدودة بالعددين 0 و 1

الحـل ـ 44

لنبرهن عن الخاصية : من أجل كل n من $IN - \{0 ; 1\}$ فإن $0 \leq u_n \leq 1$

بإستعمال الإستدلال بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 2$ لدينا : $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in IR$

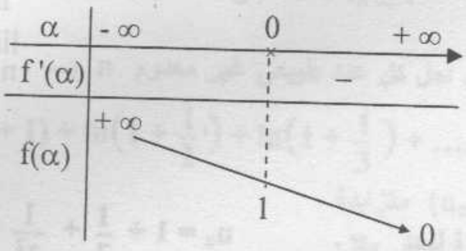
إذن : $u_1 = e^{-\alpha}$

إذن : $u_2 = e^{-u_1} = e^{-e^{-\alpha}}$

لندرس تغيرات الدالة f حيث $f(\alpha) = e^{-\alpha}$ من أجل $\alpha \in IR$ كمايلي :

f معرفة وقابلة للإشتقاق على IR و $f'(\alpha) = - e^{-\alpha}$

إذن : من أجل كل $\alpha \in IR$ فإن $f'(\alpha) < 0$



من جدول التغيرات نستنتج أن : من أجل كل $\alpha > 0$ فإن $0 \leq f(\alpha) \leq 1$

أي من أجل كل $\alpha > 0$ فإن $0 \leq e^{-\alpha} \leq 1$

إذن : من أجل كل $\alpha \in IR$ فإن $0 \leq e^{-e^{-\alpha}} \leq 1$ (لأن $e^{-\alpha} > 0$)

أي $0 \leq u_2 \leq 1$

منه : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن $0 \leq u_n \leq 1$ من أجل $n > 2$

هل $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ؟

لدينا : $0 \leq u_n \leq 1$ إذن : $-1 \leq -u_n \leq 0$

إذن : $e^{-1} \leq e^{-u_n} \leq e^0$

أي $1/e \leq u_{n+1} \leq 1$

لكن $1/e > 0$ إذن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN - \{0 ; 1\}$ فإن $0 \leq u_n \leq 1$ أي المتتالية (u_n) محصورة بين 0 و 1

التمرين ـ 45

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$

1 ـ ماهو إتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

2 ـ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

3 ــ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ثم استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة .

الحـل ــ 45

1 ــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{4^{n+1}}$$

إذن : $\frac{1}{4^{n+1}} > 0$: $u_{n+1} - u_n > 0$

منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2 ــ لاحظ أن u_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 1/4 و حدها الأول 1

إذن : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4^n}$

$$= 1 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right)$$

$$= \frac{-4}{3} \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$= \frac{-4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}$$

$= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ و هو المطلوب

3 ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

نتيجة : لدينا كل حدود المتتالية (u_n) أكبر أو تساوي 1 و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4/3$ و (u_n) متزايدة

إذن : $1 \le u_n \le 4/3$ أي المتتالية (u_n) محدودة بــ 4/3 و 1 .

التمرين ــ 46

(u_n) متتالية معرفة على IN بــ $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in IR$ و من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = u_n^2 - 3\,u_n + 5$$

1 ــ برر أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \ge 1$ ماذا تستنتج ؟

2 ــ نفرض أن المتتالية (u_n) متقاربة و نهايتها ℓ . أكتب معادلة من الدرجة الثانية تكون محققة من أجل ℓ .
ثم إستنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

الحـل ــ 46

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3\,u_n + 5 - u_n$$
$$= u_n^2 - 4\,u_n + 5$$

لندرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بــ $f(x) = x^2 - 4\,x + 5$

لدينا : $f'(x) = 2\,x - 4$ و إشارتها :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2\,x - 4$		−	0	+	

منه : جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$f(2) = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن من أجل كل x من IR فإن $f(x) \ge 1$

أي : $x^2 - 4x + 5 \geq 1$

إذن : من أجل كل حد u_n من حدود المتتالية (u_n) فإن $u_n^2 + 4u_n + 5 \geq 1$

أي $u_{n+1} - u_n \geq 1$ و هو المطلوب .

نتيجة : $u_{n+1} - u_n \geq 1$ و خاصة $u_{n+1} - u_n > 0$

أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2 ـ لنفرض أن (u_n) متقاربة حيث $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = \ell$ و $u_n = \ell$

أي : $\ell = \ell^2 - 3\ell + 5$

أي : $\ell^2 - 4\ell + 5 = 0$ و هي المعادلة المطلوبة .

لكن لا يوجد أي عدد حقيقي ℓ يحقق المعادلة $\ell^2 - 4\ell + 5 = 0$

لأن حسب السؤال السابق : $\ell^2 - 4\ell + 5 \geq 1$ من أجل كل $\ell \in IR$

و عليه فإن العدد ℓ غير موجود أي المتتالية (u_n) ليست متقاربة .

و منه : المتتالية (u_n) متباعدة .

التمرين ـ 47

(u_n) متتالية معرفة على IN بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ و من أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = 3u_n - 4$

1 ـ أحسب الحدين u_1 و u_2

2 ـ برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

3 ـ عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب حدها العام ثم الحد العام للمتتالية (u_n) .

4 ـ هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

5 ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \dots\dots + \frac{u_n}{4^n}$

برهن أن المتتالية (w_n) متقاربة نحو العدد 17/3

الحـل ـ 47

1 ـ لدينا :

$$u_1 = 3u_0 - 4 = 3\left(\frac{11}{4}\right) - 4 = \frac{33-16}{4} = \frac{17}{4}$$

$$u_2 = 3u_1 - 4 = 3\left(\frac{17}{4}\right) - 4 = \frac{51-16}{4} = \frac{35}{4}$$

2 ـ لنبرهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

- من أجل $n = 1$ و $n = 2$ لاحظ أن $u_2 > u_1$ إذن : المتتالية متزايدة تماما .

نفرض أن $u_{n+1} - u_n > 0$ من أجل $n > 2$ (أي (u_n) متزايدة تماما من أجل $n > 2$)

هل : $u_{n+2} - u_{+1} > 0$ ؟

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= (3u_{n+1} - 4) - (3u_n - 4) \\ &= 3u_{n+1} - 4 - 3u_n + 4 \\ &= 3(u_{n+1} - u_n) \end{aligned}$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن : $3(u_{n+1} - u_n) > 0$

أي : $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 2$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3 ـ من أجل كل $n \in IN$ لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4u_{n+1} + \alpha \\ &= 4(3u_n - 4) + \alpha \\ &= 12u_n - 16 + \alpha \\ &= 3\left(4u_n + \frac{\alpha - 16}{3}\right) \end{aligned}$$

إذن : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان من أجل كل $n \in IN$:

$4u_n + \frac{\alpha-16}{3} = 4u_n + \alpha$ أي $\frac{\alpha-16}{3} = \alpha$

أي : $3\alpha = \alpha - 16$

أي : $2\alpha = -16$

أي : $\alpha = -8$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول $v_0 = 4u_0 - 8 = 4\left(\frac{11}{4}\right) - 8 = 3$

منه : $v_n = 3 \times 3^n$ أي $v_n = 3^{n+1}$

لدينا : $v_n = 4u_n + \alpha$ إذن : $4u_n = v_n - \alpha$ إذن : $u_n = \frac{v_n - \alpha}{4}$

منه : $u_n = \frac{3^{n+1} + 8}{4}$ أي $u_n = 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1}$

4 ـ لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^{n+1} = +\infty$

و عليه فالمتتالية (u_n) ليست محدودة من الأعلى إذن فهي ليست محدودة .

5 ـ لدينا : $u_n = 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1}$

منه :

$$\frac{u_n}{4^n} = \frac{2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1}}{4^n} = \frac{2}{4^n} + \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} = 2 \times \frac{1}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

إذن :

$$w_n = \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \ldots\ldots + \frac{u_n}{4^n}$$

$$= \left[2 \times \frac{1}{4^0} + \left(\frac{3}{4}\right)^1\right] + \left[2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + \ldots\ldots + \left[2 \times \frac{1}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \left(2 \times \frac{1}{4^0} + 2 \times \frac{1}{4} + \ldots. + 2 \times \frac{1}{4^n}\right) + \left(\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots.. + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \ldots. + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] + \left[\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots.. + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 2 \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{4}\right) - 1} + \frac{3}{4} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}$$

$$= \frac{-4}{3} \times 2 \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right] - 4 \times \frac{3}{4} \times \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$= \frac{8}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + 3 \times \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

بما أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ لأن $0 < 3/4 < 1$ و $0 < 1/4 < 1$

فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{8}{3} \times (1 - 0) + 3 \times (1 - 0)$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3}$

أي : المتتالية (w_n) متقاربة نحو العدد $17/3$.

التمرين ـ 48

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN بـ $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad ، \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = u_n - v_n$

1 ــ برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب حدها العام و نهايتها .

2 ــ عبر عن $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n ثم أستنتج إتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3 ــ بين أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية التي نرمز لها بـ ℓ

4 ــ من أجل كل عدد طبيعي n نضع $t_n = 3\,u_n + 10\,v_n$

برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم إستنتج قيمة ℓ .

الحل ــ 48

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \frac{u_n + 2\,v_n}{3} - \frac{u_n + 4\,v_n}{5} \\ &= \frac{5\,u_n + 10\,v_n - 3\,u_n - 12\,v_n}{15} \\ &= \frac{2\,u_n - 2\,v_n}{15} \\ &= \frac{2}{15}(u_n - v_n) \\ &= \frac{2}{15}\,w_n \end{aligned}$$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها 2/15 و حدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$

منه : $w_n = -\left(\frac{2}{15}\right)^n$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\frac{2}{15}\right)^n = 0$ لأن $0 \leq 2/15 \leq 1$

2 ــ

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2\,v_n}{3} - u_n \\ &= \frac{u_n + 2\,v_n - 3\,u_n}{3} \\ &= \frac{2\,v_n - 2\,u_n}{3} \\ &= \frac{-2}{3}(u_n - v_n) \\ &= \frac{-2}{3}\,w_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 4\,v_n}{5} - v_n \\ &= \frac{u_n + 4\,v_n - 5\,v_n}{5} \\ &= \frac{u_n - v_n}{5} \\ &= \frac{1}{5}(u_n - v_n) \\ &= \frac{1}{5}\,w_n \end{aligned}$$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{3}\,w_n = \frac{-2}{3} \times \left(-\left(\frac{2}{15}\right)^n\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{15}\right)^n$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

و لدينا: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5}\,w_n = \frac{1}{5} \times \left(-\left(\frac{2}{15}\right)^n\right) = \frac{-1}{5}\left(\frac{2}{15}\right)^n$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه : المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3 ـ من جهة أخرى لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

نتيجة :
$$\begin{cases} (u_n) \text{ متتالية متزايدة تماما} \\ (v_n) \text{ متتالية متناقصة تماما} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

منه : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية و لتكن ℓ

4 ـ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $t_{n+1} = 3\ u_{n+1} + 10\ v_{n+1}$

$$\begin{aligned} &= 3 \times \left(\frac{u_n + 2\ v_n}{3}\right) + 10 \times \left(\frac{u_n + 4\ v_n}{5}\right) \\ &= u_n + 2\ v_n + 2(u_n + 4\ v_n) \\ &= 3\ u_n + 10\ v_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

إذن : من أجل كل $n \in IN$: $t_{n+1} = t_n$

أي : المتتالية (t_n) ثابتة و كل حدودها تساوي $t_0 = 3\ u_0 + 10\ v_0 = 3 + 20 = 23$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t_0 = 23$

لكن : $t_n = 3\ u_n + 10\ v_n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (3\ u_n + 10\ v_n)$

أي : $23 = \lim\limits_{n \to +\infty} (3\ u_n + 10\ v_n)$

أي : $23 = 3\ \ell + 10\ \ell$ (لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$)

أي : $23 = 13\ \ell$

أي : $\ell = 23/13$

التمرين ـ 49

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على IN بـ $u_0 = 3$; $v_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

1 ـ أحسب u_1 ؛ v_1 ؛ u_2 ؛ v_2

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = v_n - u_n$

2 ـ بين أن المتتالية (w_n) هندسية و عين نهايتها .

3 ـ أدرس إتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم استنتج أنهما متجاورتان .

(t_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2\ v_n)$

4 ـ برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_n) و (v_n) .

الحل ـ 49

1 ـ

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}$$

$$v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{14 + 15}{4}}{2} = \frac{29}{8}$$

$$v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{29 + 30}{8}}{2} = \frac{59}{16}$$

2 ـــ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n - u_n - v_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,(u_{n+1} - u_n) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n}{2} - u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n - 2\,u_n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{v_n - u_n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\,(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{4}\,w_n \end{aligned}$$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها 1/4 و حدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$

منه : $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ لأن $0 \leq 1/4 \leq 1$

3 ـــ إتجاه التغير:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2\,u_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{2}\,w_n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

لدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n - 2\,v_n}{2} \\ &= \frac{u_{n+1} - v_n}{2}\,, \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} \\ &= \frac{u_n + v_n - 2\,v_n}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

$$= -\frac{1}{4} w_n$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ أي المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

لدينا أيضا : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

نتيجة : (u_n) متتالية متزايدة تماما

(v_n) متتالية متناقصة تماما

$\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

4 ــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $t_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2\,v_{n+1})$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + 2 \times \left(\frac{u_{n+1} + v_n}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n\right)$$

$$= \frac{1}{3}(u_n + v_n + v_n)$$

$$= \frac{1}{3}(u_n + 2\,v_n)$$

$$= t_n$$

إذن : المتتالية (t_n) ثابتة و كل حدودها تساوي $t_0 = \frac{1}{3}(u_0 + 2\,v_0) = \frac{1}{3}(3 + 8) = \frac{11}{3}$

تيجة : لدينا المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن هما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نضع $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$

من جهة أخرى (t_n) متتالية ثابتة إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t_0 = \frac{11}{3}$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3}(u_n + 2\,v_n)$

أي $\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(\ell + 2\,\ell)$

أي : $\frac{11}{3} = \frac{1}{3} \times 3\,\ell$

أي $\ell = 11/3$ و هي نهاية كل من المتتاليتان (u_n) و (v_n)

لتمرين ــ 50

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بــ $u_0 = -1$ ؛ $v_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4\,v_n}{5}$$

1 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

2 ـ برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $x_n = u_n + a\,v_n$ و $y_n = u_n + b\,v_n$ حيث a و b عددان حقيقيان متمايزان .

3 ـ أوجد a و b حتى تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتان ثم عبر عن x_n و y_n بدلالة n

4 ـ أوجد النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_n) و (v_n) .

الحـل ـ 50

1 ـ الإستدلال بالتراجع :

من أجل $n = 0$: $u_0 < v_0$ لأن $-1 < 2$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

من أجل $n = 1$:

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$v_1 = \frac{u_0 + 4\,v_0}{5} = \frac{-1+8}{5} = \frac{7}{5}$$

لدينا $1/2 < 7/5$ إذن : $u_1 < v_1$ منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_n < v_n$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} < v_{n+1}$ ؟

لدينا :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4\,v_n}{5}$$

$$= \frac{5\,u_n + 5\,v_n - 2\,u_n - 8\,v_n}{10}$$

$$= \frac{3\,u_n - 3\,v_n}{10}$$

$$= \frac{3}{10}(u_n - v_n)$$

لكن حسب فرضية التراجع $u_n < v_n$ أي $u_n - v_n < 0$

منه : $\frac{3}{10}(u_n - v_n) < 0$ أي $u_{n+1} - v_{n+1} < 0$ أي $u_{n+1} < v_{n+1}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

2 ـ هل (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

إتجاه التغير : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2\,u_n}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}(u_n - v_n)$$

لكن $u_n - v_n < 0$ إذن : $-\frac{1}{2}(u_n - v_n) > 0$ منه : $u_{n+1} - u_n > 0$

أي : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4\,v_n}{5} - v_n$$

$$= \frac{u_n + 4\,v_n - 5\,v_n}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(u_n - v_n)$$

لكن $u_n - v_n < 0$ إذن : $\frac{1}{5}(u_n - v_n) < 0$ منه : $v_{n+1} - v_n < 0$

أي : المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

نهاية الفرق $u_n - v_n$

لما n يؤول إلى ما لا نهاية فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1})$

لكن : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$ حسب السؤال (1)

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-v_{n+1})=\frac{3}{10}\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\frac{3}{10}\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$ لأن في جوار $+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-v_{n+1})=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$

منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

خلاصة :
(u_n) متتالية متزايدة تماما
(v_n) متتالية متناقصة تماما
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

إذن : هما متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ حيث $\ell\in IR$

3 ـ من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$x_{n+1}=u_{n+1}+a\,v_{n+1}$$
$$=\frac{u_n+v_n}{2}+a\left(\frac{u_n+4\,v_n}{5}\right)$$
$$=\frac{5\,u_n+5\,v_n+2\,a\,u_n+8\,a\,v_n}{10}$$
$$=\frac{(2\,a+5)\,u_n+(8\,a+5)\,v_n}{10}$$
$$=\frac{2\,a+5}{10}\times\left(u_n+\frac{8\,a+5}{2\,a+5}\,v_n\right)$$ حيث $2\,a+5\neq0$

إذن : تكون (x_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا تحقق أن من أجل كل $n\in IN$

$x_{n+1}=\frac{2\,a+5}{10}\,x_n$ أي من أجل كل $n\in IN$: $u_n+\frac{8\,a+5}{2\,a+5}\,v_n=u_n+a\,v_n$

إذن : يكفي و يلزم أن يكون : $\frac{8\,a+5}{2\,a+5}=a$ مع $2\,a+5\neq0$

أي : $2\,a^2+5\,a=8\,a+5$

أي : $2\,a^2-3\,a-5=0$ و هي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول a .

$$\Delta=9+40=49$$
$$a_1=\frac{3+7}{4}=\frac{5}{2}$$
$$a_2=\frac{3-7}{4}=-1$$

لاحظ أن من أجل $a=-1$ فإن $2\,a+5=3\neq0$

إذن : يكفي أن ناخذ $a=-1$

في هذه الحالة : $x_{n+1}=\frac{3}{10}\,x_n$

أي (x_n) متتالية هندسية أساسها 3/10 و حدها الأول $x_0=u_0-v_0=-3$ إذن : $x_n=-3\left(\frac{3}{10}\right)^n$.

من أجل $a=5/2$ فإن $2\,a+5=10\neq0$

إذن : من أجل $a=5/2$ فإن $x_{n+1}=1\times x_n$

أي المتتالية (x_n) هندسية أساسها 1 (ثابتة)

نتيجة : تكون المتتالية (y_n) المعرفة بـ $y_{n+1}=u_n+b\,v_n$ هندسية حيث $b\neq-1$ إذا وفقط إذا كان $b=5/2$

و في هذه الحالة المتتالية (y_n) ثابتة و كل حدودها تساوي $y_0=u_0+\frac{5}{2}\,v_0=-1+5=4$

منه : من أجل كل $n\in IN$ فإن $y_n=4$

4 ـ لتكن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$

لدينا من أجل كل $n \in IN$: $y_n = u_n + \frac{5}{2} v_n$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n + \frac{5}{2} v_n\right)$

إذن : $4 = \ell + \frac{5}{2} \ell$

أي : $4 = \frac{7}{2} \ell$

منه : $\ell = 8/7$ و هو المطلوب

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 8/7$

التمرين – 51

لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n) المعرفة على IN و التي تحقق الخاصية

$$u_{n+2} = \frac{3}{35} u_{n+1} + \frac{2}{35} u_n$$

1 – هل توجد في المجموعة (E) متتالية ثابتة ؟ متتالية حسابية ؟ متتالية هندسية ؟

2 – تحقق أن : من أجل كل عددين حقيقين α و β تكون المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$ عنصر من المجموعة (E)

3 – عين المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$ علما أن $u_0 = 3$ و $u_1 = - 4/35$ ثم أحسب نهاية هذه المتتالية .

الحـل – 51

1 – لتكن (u_n) عنصر من المجموعة (E)

إذا كانت (u_n) ثابتة فإن من أجل كل $n \in IN$: $u_{n+2} = u_{n+1} = u_n$

إذن الخاصية تصبح : $u_n = \frac{3}{35} u_n + \frac{2}{35} u_n$

أي : $u_n = \frac{5}{35} u_n$

منه : $u_n = 0$

أي : المتتالية (u_n) معدومة .

نتيجة : لا توجد أي متتالية ثابتة من المجموعة (E) .

إذا كانت (u_n) حسابية نسمي α أساسها إذن $\left.\begin{array}{l} u_{n+2} = u_n + 2\alpha \\ u_{n+1} = u_n + \alpha \end{array}\right\}$

إذن الخاصية تصبح : $u_n + 2\alpha = \frac{3}{35}(u_n + \alpha) + \frac{2}{35} u_n$

أي : $u_n + 2\alpha = \left(\frac{3}{35} + \frac{2}{35}\right) u_n + \frac{3}{35}\alpha$

أي : $u_n - \frac{1}{7} u_n = \frac{3}{35}\alpha - 2\alpha$

أي : $\frac{6}{7} u_n = \frac{-67}{35}\alpha$

أي : $u_n = \frac{-67}{35} \times \frac{7}{6}\alpha$

أي : $u_n = \frac{-67}{30}\alpha$

أي : المتتالية (u_n) ثابتة و عليه $\alpha = 0$ (لأن (u_n) حسابية)

إذن : المتتالية (u_n) معدومة .

نتيجة : لا توجد أي متتالية حسابية من المجموعة (E) .

إذا كانت (u_n) هندسية نسمي α أساسها إذن $\left.\begin{array}{l} u_{n+2} = \alpha^2 u_n \\ u_{n+1} = \alpha u_n \end{array}\right\}$

إذن الخاصية تصبح : $\alpha^2 u_n = \frac{3}{35}\alpha u_n + \frac{2}{35}u_n$ ....(1)

بما أن المتتالية (u_n) ليست معدومة فإن $u_n \neq 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

إذن : العلاقة (1) تصبح بعد القسمة على u_n : $\alpha^2 = \frac{3}{35}\alpha + \frac{2}{35}$

أي : $35\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$

و هي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول α .

$$\Delta = 9 + 280 = 289$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{3-17}{70} = \frac{-14}{70} = \frac{-1}{5} \\ \alpha_2 = \frac{3+17}{70} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

نتيجة : كل المتتاليات الهندسية ذات الأساس (1/5-) أو (2/7) و ذات الحد الأول غير معدوم هي متتاليات من المجموعة (E) .

2 — $u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$

إذن :

$$\frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n = \frac{3}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right]$$

$$= \frac{3\alpha}{35} \times \frac{2}{7} \times \left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{3\beta}{35} \times \left(\frac{-1}{5}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)^n + \frac{2\alpha}{35}\left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{2}{35}\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{6\alpha}{35 \times 7} + \frac{2\alpha}{35}\right) \times \left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{-3\beta}{35 \times 5} + \frac{2\beta}{35}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{6\alpha + 14\alpha}{35 \times 7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{-3\beta + 10\beta}{35 \times 5}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{20\alpha}{5 \times 7 \times 7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{7\beta}{7 \times 5 \times 5}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \frac{4\alpha}{7 \times 7}\left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{\beta}{5 \times 5}\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+2}$$

$$= u_{n+2}$$

نتيجة : $u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n$ إذن : المتتالية (u_n) عنصر من المجموعة (E)

3 — $u_n = \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$

$u_0 = 3$ إذن : $3 = \alpha + \beta$ .... (1)

$u_1 = \frac{-4}{35}$ إذن : $\frac{-4}{35} = \frac{2}{7}\alpha - \frac{1}{5}\beta$ أي $-4 = 10\alpha - 7\beta$ .... (2)

لنحل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ 10\alpha - 7\beta + 4 = 0 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} 10\alpha + 10\beta - 30 = 0 \\ 10\alpha - 7\beta + 4 = 0 \end{cases}$$

منه :

$$\begin{cases} 17\beta - 34 = 0 \\ 10\alpha = 7\beta - 4 \end{cases}$$

أي : $\begin{cases} \beta = \frac{34}{17} = 2 \\ \alpha = \frac{7\beta - 4}{10} \end{cases}$

أخيرا : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ إذن $u_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$

لأن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$

التمرين ــ 52

1 ــ أدرس إتجاه تغير كل من الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0 ; +\infty[$ بـــ

$$g(x) = \ln(1 + x) - x \quad \text{و} \quad f(x) = x - \frac{1}{2} x^2 - \ln(1 + x)$$

2 ــ برهن أن من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن (1) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x \;.....\; (1)$

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على IN^* بـــ $u_1 = 3/2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

3 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ $u_n > 0$

4 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

5 ــ نضع $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...+ \frac{1}{2^n}$ **و** $t_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...+ \frac{1}{4^n}$

باستعمال العلاقة (1) برهن أن $S_n - \frac{1}{2} t_n \leq \ln u_n \leq S_n$

أحسب S_n و t_n بدلالة n ثم إستنتج نهاية كل من S_n و t_n

الحـل ــ 52

ــ 1 $f(x) = x - \frac{1}{2} x^2 - \ln(1 + x)$

f معرفة و قابلة للإشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1 + x} = \frac{1 - x^2 - 1}{1 + x} = \frac{-x^2}{1 + x}$$

لاحظ أن : على المجال $[0 ; +\infty[$ فإن $1 + x > 0$ إذن : $\frac{-x^2}{1 + x} \leq 0$

منه : الدالة f متناقصة على المجال $[0 ; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
f(x)	0	↘	$-\infty$

$$g(x) = \ln(1 + x) - x$$

g معرفة و قابلة للإشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{1 - 1 - x}{1 + x} = \frac{-x}{1 + x}$$

لاحظ أن على المجال $[0 ; +\infty[$ فإن $1 + x > 0$ إذن : $\frac{-x}{1 + x} \leq 0$

منه الدالة g متناقصة على المجال $[0 ; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
g(x)	0	↘	$-\infty$

2 ـ حسب جدول تغيرات الدالة f فإن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $f(x) \leq 0$

أي : من أجل كل x موجب فإن $x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1 + x) \leq 0$

منه : من أجل كل x موجب فإن $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1 + x)$ .... (2)

و حسب جدول تغيرات الدالة g فإن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $g(x) \leq 0$

أي : من أجل كل x موجب فإن $\ln(1 + x) - x \leq 0$

منه : من أجل كل x موجب فإن $\ln(1 + x) \leq x$ .... (3)

من العلاقتين (2) و (3) نستنتج أن :

من أجل كل x موجب فإن $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1 + x) \leq x$ .... (1)

3 ـ لتكن الخاصية : من أجل كل n من IN* : $u_n > 0$

من أجل n = 1 : $u_1 = 3/2$ و $3/2 > 0$ إذن الخاصية محققة .

نفرض أن : $u_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا : $u_n > 0$ حسب فرضية التراجع

إذن : $u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ لأن $1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

أي : $u_{n+1} > 0$

منه : الخاصية صحيحية من أجل n + 1

تيجة : من أجل كل n من IN* : $u_n > 0$

4 ـ لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

نبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل n = 1 : $u_1 = 3/2$ إذن : $\ln u_1 = \ln \frac{3}{2}$

لكن $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

إذن: $\ln u_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$

منه : الخاصية محققة من أجل n = 1

نفرض أن $\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ من أجل $n > 1$

هل $\ln u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ ؟

لدينا :

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) &= \ln\left[u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]\\ &= \ln u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

إذن : الخاصية محققة من أجل n + 1

تيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

5 ـ حسب السؤال (2) فإن من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1 + x) \leq x$

لنكتب هذه العلاقة من أجل $x = \frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2^2}$ ، $x = \frac{1}{2^3}$; ………… $x = \frac{1}{2^n}$ كما يلي :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \le \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \le \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \le \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^3}\right)^2 \le \ln\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \le \frac{1}{2^3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \le \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n}$$

بجمع هذه المتباينات طرف لـ طرف نحصل على :

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n}\right) \le \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

أي $S_n - \frac{1}{2} t_n \le \ln u_n \le S_n$ و هو المطلوب

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\dots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$t_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\dots + \frac{1}{4^n}$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{3}$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

التمرين ـــ 53

(u_n) المتتالية المعرفة على IN بـــ $u_0 = 1,5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n - 1$

المطلوب : ميز فيمايلي بين الجمل الصحيحة و الخاطئة مع التبرير .

1 ـــ المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1 الذي هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الذين معادلتيهما $y = x$ و $y = 2x - 1$

2 ـــ المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـــ $v_n = u_n - 1$ هي متتالية هندسية .

3 ـــ المتتالية (v_n) المعرفة في السؤال (2) محدودة من الأعلى .

الحـل ـــ 53

1 ـــ لنثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة (بالتراجع)

لدينا : $u_1 = 2u_0 - 1 = 2(1,5) - 1 = 2$

إذن : $u_1 > u_0$

نفرض أن $u_n - u_{n-1} > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} - u_n > 0$ ؟

$$u_{n+1} - u_n = 2\,u_n - 1 - u_n$$
$$= u_n - 1$$

لكن $u_n > u_0 > 1$ حسب فرضية التراجع

إذن : $u_n - 1 > 0$

منه : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة من أجل $n + 1$

نتيجة : المتتالية (u_n) متزايدة على IN

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > u_0 > 1$

و عليه : فالمتتالية (u_n) لا يمكن أن تتقارب نحو العدد 1 .

2 ـــ من أجل كل طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= 2\,u_n - 1 - 1 \\ &= 2\,u_n - 2 \\ &= 2(u_n - 1) \\ &= 2\,v_n \end{aligned}$$

إذن : فعلا (v_n) متتالية هندسية أساسها 2

3 ـــ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 1,5 - 1 = 0.5$

إذن : $v_n = 0,5 \times 2^n$

نتيجة: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,5 \times 2^n = +\infty$

إذن : المتتالية (v_n) متباعدة نحو $+\infty$

إذن : فهي متتالية غير محدودة من الأعلى .