$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1$$
$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1/3$$

منه معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1/3 هي : $y = 1\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

لنحسب $f\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 4}{4/9}$$
$$= \frac{1 - 12 + 72 - 108}{27} \times \frac{9}{4}$$
$$= -\frac{47}{27} \times \frac{9}{4}$$
$$= -\frac{47}{12}$$

إذن معادلة المماس هي : $y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}$

أي : $y = x + \frac{-4 - 47}{12}$

أي : $y = x - \frac{51}{12}$

أي : $y = x - \frac{17}{4}$

إذن : لما $m = -17/4$: (Δ_m) مماس لـ (C) أي المعادلة تقبل حلا واحدا

لما $m < -17/4$: (Δ_m) تحت المماس إذن المعادلة لا تقبل حلول

لما $-17/4 < m < -2$: (Δ_m) فوق المماس إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين

(3) لما $m > -2$: (Δ_m) يقع فوق (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطتين مختلفتين ومنه المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين مختلفين

7 ــ حل المعادلة $f(x) = x + m$ في $R - \{1\}$

$$f(x) = x + m \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x + m \quad \text{حيث } x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (x + m)(x^2 - 2x + 1)$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = x^3 - 2x^2 + x + mx^2 - 2mx + m$$
$$\Leftrightarrow (m + 2)x^2 - (7 + 2m)x + 4 + m = 0 \;\ldots\ldots (1)$$

المناقشة :

لما $m = -2$ المعادلة تكافئ : $-(7 - 4)x + 4 - 2 = 0$

أي : $-3x + 2 = 0$

أي : $x = 2/3$

إذن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا $x = 2/3$

لما $m \neq -2$ المعادلة من الدرجة الثانية ذات الوسيط m و المجهول x

$$\Delta = (7 + 2m)^2 - 4(4 + m)(m + 2)$$
$$= 49 + 28m + 4m^2 - 4(4m + 8 + m^2 + 2m)$$
$$= 49 + 28m + 4m^2 - 24m - 4m^2 - 32$$
$$= 4m + 17$$

منه

x	$-\infty$		$-17/4$		-2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	‖	$+$	

إذن : لما $m \in]-\infty ; -17/4[\; : \; \Delta < 0$ إذن المعادلة لا تقبل حلول في IR

لما $m = -17/4 \; : \; \Delta = 0$ إذن المعادلة تقبل حل مضاعف .

لما $m \in]-17/4 ; -2[\cup]-2 ; +\infty[\; : \; \Delta > 0$ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

التمرين ــ 71

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

3 ــ بين أن المستقيمان $(\Delta) : y = x+1$ و $(\Delta') : y = -x-1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

4 ــ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ') .

5 ــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1 ; 1[$

الحـل ــ 71

1 ــ

$$f(x) = \begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x+1 \geq 0 \\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x \in [-1 ; +\infty[\\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

2 ــ **التغيرات :**

f معرفة على $\{-1 ; 1\}$ - R أي $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x-1+\frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} -x-1+\frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} -(-1)-1+\frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} x+1+\frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} -1+1+\frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x+1+\frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} 1+1+\frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x+1+\frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 1+1+\frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x+1+\frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ -1+\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ -\left(1+\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

إشارة $f'(x)$:

على المجال $]-\infty ; -1[$: لدينا $f'(x) = -\left(1+\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right)$ إذن $f'(x) < 0$

لأن $1 + \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} > 0$

على المجال $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = 1 - \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ لندرس إ شارتها

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 \leq (x^2-1)^2$$ لأن $1 + x^2 > 0$ و $(x^2-1)^2 > 0$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 \leq x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-3) \geq 0$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		+					0			+	
x^2-3		+	0			−			0	+	
الجداء		+	0		−		0	−	0	+	

إذن على المجال $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ لدينا :

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	−	‖	−	0	+	

خلاصة : إ شارة $f'(x)$ على مجموعة تعريف الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

3 –
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - 1 + \frac{x}{x^2-1}\right) - (-x-1)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-1}$$
$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2-1}\right) - (x+1)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-1}$$
$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

4 ــ وضعية (Δ) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') :

على المجال $]1 ; +\infty[\cup]-1 ; 1[$: $f(x) - (x+1) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

x	-1		0		1	$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$
$x^2 - 1$		$-$				$+$
$\dfrac{x}{x^2-1}$		$+$	0	$-$		$+$

لما $x \in]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$: $f(x) - (x+1) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $x = 0$: $f(x) - (x+1) = 0$ إذن (C) يقطع (Δ)

لما $x \in]0 ; 1[$: $f(x) - (x+1) < 0$ إذن (C) تحت (Δ)

على المجال $]-\infty ; -1[$: $f(x) - (-x-1) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

x	$-\infty$	-1
x	$-$	
$x^2 - 1$	$+$	
$\dfrac{x}{x^2-1}$	$-$	

لما $x \in]-\infty ; -1[$: $f(x) - (-x-1) < 0$ إذن (C) تحت (Δ')

5 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج مايلي :

f مستمرة على $]-1 ; 1[$

f متناقصة تماما على $]-1 ; 1[$

f تأخذ قيم موجبة ثم قيم سالبة إذن تمر بالعدد 0 .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1 ; 1[$ حيث $f(\alpha) = 0$

القسمة في Z

1 ـ قابلية القسمة في Z

تعريف : a و b عددان صحيحان حيث a غير معدوم .
نقول أن a يقسم b إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $b = a\,k$ (نقول أيضا أن a قاسم لـ b و أن b مضاعف لـ a)

إذا كان a يقسم b نكتب $a|_b$ و نقرأ a يقسم b

أمثلة : $6|_{48}$ ؛ $-8|_{48}$ ؛ $4|_{-48}$؛ $-2|_{-48}$

ملاحظة : إذا كان $a|_b$ في Z فإن $-a|_b$ إذن b و $(-b)$ لهما نفس القواسم

خواص :
a و b عددان صحيحان حيث $a \neq 0$

(1) إذا كان $a|_b$ فإن من أجل كل عدد صحيح m : $a|_{m\,b}$

(2) إذا كان $a|_b$ فإن من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m : $m\,a|_{m\,b}$

نشاط ـ 1

عين الأعداد الصحيحة n حيث 11 يقسم $(n+5)$

الحل ـ 1

$11|_{n+5}$ إذا و فقط إذا وجد $k \in Z$ حيث : $n + 5 = 11\,k$ أي $n = 11\,k - 5$

نتيجة : الأعداد الصحيحة n حيث $11|_{n+5}$ هي كل الأعداد الصحيحة التي تكتب من الشكل $n = 11\,k - 5$ حيث $k \in Z$

نشاط ـ 2

عين الأعداد الصحيحة n حيث العدد $3\,n+5$ يقسم 8

الحل ـ 2

نعلم أن قواسم 8 هي $\{1 ؛ 2 ؛ 4 ؛ 8 ؛ -1 ؛ -2 ؛ -4 ؛ -8\}$

إذن : يكون $3\,n+5|_8$ إذا و فقط إذا كان $3\,n+5 = 1$ أو $3\,n+5 = 2$ أو $3\,n+5 = 4$ أو $3\,n+5 = 8$ أو $3\,n+5 = -1$ أو $3\,n+5 = -2$ أو $3\,n+5 = -4$ أو $3\,n+5 = -8$

أي $n = \frac{1-5}{3}$ أو $n = \frac{2-5}{3}$ أو $n = \frac{4-5}{3}$ أو $n = \frac{8-5}{3}$ أو $n = \frac{-1-5}{3}$ أو $n = \frac{-2-5}{3}$ أو $n = \frac{-4-5}{3}$ أو $n = \frac{-8-5}{3}$

أي $n = -4/3$ (مرفوض) أو $n = -1$ أو $n = -1/3$ (مرفوض) أو $n = 1$ أو $n = -2$ أو $n = -7/3$ (مرفوض) أو $n = -3$

نتيجة : يكون $3\,n+5|_8$ إذا و فقط إذا كان $n \in \{-1 ; 1 ; -2 ; -3\}$

نشاط ـ 3

عين مجموعة الأعداد الصحيحة n حيث $3\,n+8|_{n+6}$

الحل ـ 3

$3\,n+8|_{n+6}$ إذن : $3\,n+8|_{3(n+6)}$ أي $3\,n+8|_{3\,n+18}$

لدينا : $3\,n+8|_{3\,n+8}$ لأن $3\,n+8 = 1(3\,n+8)$ .... (1)

و $3\,n+8|_{3\,n+18}$ إذن : $3\,n+18 = k'(3\,n+8)$ حيث $k' \in Z$ ....(2)

بطرح (1) من (2) نحصل على : $3\,n+18-(3\,n+8) = k'(3\,n+8)-(3\,n+8)$

أي : $10 = (k' - 1)(3n + 8)$

أي : $3n + 8 \mid 10$

منه : $3n + 8 \in \{1 ; 2 ; 5 ; 10 ; -1 ; -2 ; -5 ; -10\}$

$3n + 8 = 1$ إذن $n = -7/3$ مرفوض — $3n + 8 = -1$ إذن $n = -3$

$3n + 8 = 2$ إذن $n = -2$ — $3n + 8 = -2$ إذن $n = -10/3$ مرفوض

$3n + 8 = 5$ إذن $n = -1$ — $3n + 8 = -5$ إذن $n = -13/3$ مرفوض

$3n + 8 = 10$ إذن $n = 2/3$ مرفوض — $3n + 8 = -10$ إذن $n = -6$

نتيجة : يكون $3n + 8 \mid n + 6$ إذا و فقط إذا كان $n \in \{-2 ; -1 ; -3 ; -6\}$

خاصية أساسية :

a ، b ، c أعداد صحيحة حيث $a \neq 0$

إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$ فإن $a \mid bm + cn$ حيث m و n أعداد صحيحة كيفية

مثال : n عدد صحيح . نضع $\left.\begin{array}{l} a = 5n - 2 \\ b = 2n + 3 \end{array}\right\}$

أثبت أن كل قاسم مشترك لـــ a و b هو قاسم أيضا للعدد 19

الحــل : ليكن k قاسم مشترك لـــ a و b إذن : $\left.\begin{array}{l} k \mid 5n - 2 \\ k \mid 2n + 3 \end{array}\right\}$

منه : حسب الخاصية الأساسية : $k \mid 2(5n - 2) + (-5)(2n + 3)$

أي : $k \mid 10n - 4 - 10n - 15$

أي : $k \mid -19$ منه $k \mid 19$ و هو المطلوب

نشاط : **عين الأعداد الصحيحة a و b حيث** $4a^2 - b^2 = 15$

الحــل : $4a^2 - b^2 = 15$ أي $(2a - b)(2a + b) = 15$

منه : $\left\{\begin{array}{l} (2a - b)(2a + b) = 1 \times 15 \\ \text{أو} \\ (2a - b)(2a + b) = 3 \times 5 \\ \text{أو} \\ (2a - b)(2a + b) = 5 \times 3 \\ \text{أو} \\ (2a - b)(2a + b) = 15 \times 1 \end{array}\right.$

أي : $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2a - b = 1 \\ 2a + b = 15 \end{array}\right\} \\ \text{أو} \left.\begin{array}{l} 2a - b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \\ \text{أو} \left.\begin{array}{l} 2a - b = 5 \\ 2a + b = 3 \end{array}\right\} \\ \text{أو} \left.\begin{array}{l} 2a - b = 15 \\ 2a + b = 1 \end{array}\right\} \end{array}\right.$

أي : $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 4a = 16 \\ b = 15 - 2a \end{array}\right\} \\ \text{أو} \left.\begin{array}{l} 4a = 8 \\ b = 5 - 2a \end{array}\right\} \\ \text{أو} \left.\begin{array}{l} 4a = 8 \\ b = 3 - 2a \end{array}\right\} \\ \text{أو} \left.\begin{array}{l} 4a = 16 \\ b = 1 - 2a \end{array}\right\} \end{array}\right.$

أي : $\left\{\begin{array}{l} a = 4 \;;\; b = 7 \\ \text{أو } a = 2 \;;\; b = 1 \\ \text{أو } a = 2 \;;\; b = -1 \\ \text{أو } a = 4 \;;\; b = -7 \end{array}\right.$ منه $(a ; b) \in \{(4 ; 7) ; (2 ; 1) ; (2 ; -1) ; (4 ; -7)\}$

نتيجة : مجموعة الثنائيات المرتبة $(a ; b)$ من Z^2 حيث $4a^2 - b^2 = 15$ هي :

$\{(4 ; 7) ; (2 ; 1) ; (2 ; -1) ; (4 ; -7) ; (-4 ; -7) ; (-2 ; -1) ; (-2 ; 1) ; (-4 ; 7)\}$

ملاحظة : الحلول الأربعة الأخرى ناتجة بضرب العددين a و b في (-1) لأن العدد 15 يكتب أيضا من الشكل -1×-15 أو -3×-5 أو -5×-3 أو -15×-1 و عليه كل جمل المعادلات السابقة تضرب في (-1)

2 ــ القسمة الإقليدية في Z

مبرهنة :

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم

توجد ثنائية مرتبة و حيدة $(q ; r)$ من $Z \times N$ حيث $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

عملية البحث عن الثنائية الوحيدة $(q ; r)$ تسمى القسمة الإقليدية في Z

العدد a يسمى حاصل هذه القسمة الإقليدية و r يسمى باقي القسمة الإقليدية

<u>مثال</u> : a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 6 . عين باقي قسمة a على 5

<u>الحـل</u> : باقي قسمة a على 10 هو 6 إلى $a = 10\,q + 6$ حيث $q \in Z$

منه : $a = 2 \times 5\,q + 5 + 1$

أي : $a = 5(2\,q + 1) + 1$

نضع $q' = 2\,q + 1$ إذن $q' \in Z$

منه : $a = 5\,q' + 1$

إذن : باقي قسمة a على 5 هو 1

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين

a و b عددان طبيعيان غير معدومان .

نرمز بـــ D_a و D_b إلى مجوعات قواسم العددين a و b على الترتيب .

تعريف :

أكبر عنصر من المجموعة $D_b \cap D_a$ يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و نرمز له بـــ $PGCD(a\,;b)$

ملاحظة : PGCD يعني : أكبر قاسم مشترك (Plus Grand Commun Diviseur)

حذار ! $D_0 = N^*$ (قواسم 0 هي كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة)

مثال :

$$D_{12} = \{1\,;2\,;3\,;4\,;6\,;12\}$$
$$D_{32} = \{1\,;2\,;4\,;8\,;16\,;32\}$$
$$D_{12} \cap D_{32} = \{1\,;2\,;4\}$$
$$PGCD(12\,;32) = 4$$

خواص :

الخاصية (1) : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . حيث $a \geq b$

إذا كان r هو باقي القسمة الإقليدية لـــ a على b فإن $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r)$

نتيجة مباشرة : (خوارزمية إقليدس)

مثال : لنبحث عن $PGCD(32\,;12)$ كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 32 & 12 \\ -24 & 2 \\ \hline 8 & \end{array}$$

إذن : حسب الخاصية (1) $PGCD(32\,;12) = PGCD(12\,;8)$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ -08 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(12\,;8) = PGCD(8\,;4)$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ 0 & 2 \end{array}$$

إذن : $PGCD(8\,;4) = 4$

نتيجة : $PGCD(32\,;12) = PGCD(12\,;8) = PGCD(8\,;4) = 4$

هذه الطريقة للبحث عن القاسم المشترك الأكبر تسمى خوارزمية إقليدس

إذن : القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هوآخر باقي قسمة غير معدوم من عمليات القسمة في خوارزمية إقليدس :

<u>نشاط</u> : باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD(150\,;108)$

إستنتج ثنائية $(x\,;y)$ من $Z \times Z$ حيث $150\,x + 108\,y = 6$

<u>الحـل</u> :

$$\begin{array}{r|l} 150 & 108 \\ 108 & 1 \\ \hline 42 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 42 \\ 84 & 2 \\ \hline 24 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 24 \\ 24 & 1 \\ \hline 18 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 18 \\ 18 & 1 \\ \hline 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ 0 & 3 \end{array}$$

الباقي الأول الباقي الثاني الباقي الثالث الباقي الرابع

نتيجة : آخر باقي غير معدوم هو الباقي الرابع الذي يساوي 6

إذن : $PGCD(150\,;108) = 6$

حسب عمليات القسمة المتتالية من خوارزية إقليدس السابقة نستنتج الكتابات التالية للبواقي :

$150 - (108)\,1 = 42$ .... (1)

$108 - (42)\,2 = 24$ .... (2)
$42 - (24)\,1 = 18$ .... (3)
$24 - (18)\,1 = 6$ .... (4)

نعوض 18 في المساواة (4) : $24 - [42 - 24(1)] = 6$

أي $24 - 42 + 24 = 6$

أي $-42 + 24(2) = 6$ .... (5)

نعوض كل من (2) و (1) في المساواة (5) نحصل على :

$- [150 - 108] + [108 - 42(2)](2) = 6$

أي $- 150 + 108 + 108(2) - 42(4) = 6$

أي $- 150 + 108(3) - 42(4) = 6$ .... (6)

نعوض (1) في (6) نحصل على :

$- 150 + 108(3) - 4[150 - 108] = 6$

أي $- 150 + 108(3) - 150(4) + 108(4) = 6$

أي $150(- 5) + 108(7) = 6$ و هو المطلوب

إذن : الثنائية $(x ; y)$ المطلوبة هي $(- 5 ; 7)$

الخاصية (2) : a و b عددان طبيعيان غير معدومان .

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن $PGCD(k\,a ; k\,b) = k \times PGCD(a ; b)$

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

إذا كان a و b عددان صحيحان غير معدومان فإن $PGCD(a ; b) = PGCD(|a| ; |b|)$

إذن : من أجل كل ثلاث أعداد صحيحة غير معدومة $a ; c ; k$ فإن :

$$PGCD(k\,a ; k\,b) = |k|\,PGCD(a ; b)$$

الأعداد الأولية فيما بينها

تعريف : a ؛ b عددان طبيعيان غير معدومين .

نقول أن a و b أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا كان $PGCD(a ; b) = 1$

نتيجة : $a ; b ; d ; a' ; b'$ أعداد طبيعية غير معدومة

إذا كان $a = d\,a'$ و $b = d\,b'$ و $PGCD(a' ; b') = 1$ فإن $PGCD(a ; b) = d$

و العكس صحيح إذا كان $PGCD(a ; b) = d$ و $a = d\,a'$ و $b = d\,b'$ فإن $PGCD(a' ; b') = 1$

مثال : عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من $N^* \times N^*$ حيث : $\begin{cases} a + b = 66 \\ PGCD(a ; b) = 6 \end{cases}$

<u>الحـل</u> :

$PGCD(a ; b) = 6$ إذن : $\begin{cases} a = 6\,a' \\ b = 6\,b' \\ PGCD(a' ; b') = 1 \end{cases}$

منه : المساواة $a + b = 66$ تصبح $6\,a' + 6\,b' = 66$

أي $a' + b' = 11$

إذن نميز الحالات التالية :

a'	b'	PGCD(a' ; b')	a = 6 a'	b = 6 b'
1	10	1	6	60
2	9	1	12	54
3	8	1	18	48
4	7	1	24	42
5	6	1	30	36
6	5	1	36	30
7	4	1	42	24
8	3	1	48	18
9	2	1	54	12
10	1	1	60	6

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي : $\{(6;60);(12;54);(18;48);(24;42);(30;36);(36;30);(42;24);$ $(48;18);(54;12);(60;6)\}$

نشاط :

1 ـ أنشر العبارة $(n+3)(3n^2-9n+16)$ حيث $n \in N$

2 ـ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $3n^3-11n+48$ قابل للقسمة على $n+3$

3 ـ بين أن من أجل كل $n \in N$: $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

4 ـ بين أن من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة $a\ ;\ b\ ;\ c$ فإن :

$$PGCD(a\ ;\ b) = PGCD(bc-a\ ;\ b)$$

5 ـ بين أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن :

$$PGCD(3n^3-11n\ ;\ n+3) = PGCD(48\ ;\ n+3)$$

6 ـ عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48

7 ـ إستنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عدد طبيعي

الحـل :

1 ـ
$$(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-9n^2+16n+9n^2-27n+48$$
$$= 3n^3-11n+48$$

2 ـ لدينا $n \in N$ إذن : $(n+3) \in N$ و $(3n^2-9n+16) \in Z$

إذن : $(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-11n+48$ معناه $(n+3) \mid 3n^3-11n+48$

أي : العدد $3n^3-11n+48$ قابل للقسمة على $(n+3)$

3 ـ لدينا $n \in N$ إذن : $3n^2-9n+16 \in Z$ إذن : يكفي أن نبرهن أن $3n^2-9n+16>0$

لندرس إشارة كثير الحدود $p(x)=3x^2-9x+16$ على R

$$\Delta = 81-4(3)(16) = 81-192 = -111$$

إذن : من أجل كل x من R : $p(x)>0$

منه : $3n^2-9n+16>0$ من أجل كل n من N

إذن : $3n^2-9n+16 \in N^*$

4 ـ ليكن d قاسم مشترك لـ a و b

$\left.\begin{matrix} d \mid a \\ d \mid b \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} d \mid -a \\ d \mid cb \end{matrix}\right\}$ إذن : $d \mid cb-a$ .... (1)

ليكن الآن d قاسم مشترك لـ b و $cb-a$

$\left.\begin{matrix} d \mid b \\ d \mid bc-a \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} d \mid bc \\ d \mid -bc+a \end{matrix}\right\}$ منه : $d \mid bc-bc+a$ أي $d \mid a$ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $PGCD(a\ ;\ b) = PGCD(bc-a\ ;\ b)$

5 ـ باستعمال نتيجة السؤال (4) من أجل $\left.\begin{matrix} a=48 \\ b=n+3 \\ c=3n^2-9n+16 \end{matrix}\right\}$ نحصل على :

$$PGCD(48\ ;\ n+3) = PGCD((n+3)(3n^2-9n+16)-48\ ;\ n+3)$$

أي : $PGCD(48\ ;\ n+3) = PGCD(3n^3-11n+48-48\ ;\ n+3)$

أي $PGCD(48\ ;\ n+3) = PGCD(3n^3-11n\ ;\ n+3)$ و هو المطلوب .

6 ـ قواسم 48 هي : $D_{48} = \{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$

7 ـ يكون $A \in N$ إذا و فقط إذا كان $n+3 \mid 3n^3-11n$ أي $PGCD(3n^3-11n\ ;\ n+3) = n+3$

أي $PGCD(48\ ;\ n+3) = n+3$

أي $n+3 \mid 48$

أي $n+3 \in D_{48}$

منه : $n \in \{0;1;3;5;9;13;21;45\}$

لكن $n>1$ إذن : $n \in \{3;5;9;13;21;45\}$

مبرهنة بيزو :

يكون عددان صحيحان a و b أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا وجدت ثنائية $(\alpha ; \beta)$ من الأعداد الصحيحة حيث $\alpha a + \beta b = 1$

مثال : $b = 3$ ؛ $a = 5$

$$5(-4) + 3(7) = -20 + 21 = 1$$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (-4 ; 7)$ تحقق $5\alpha + 3\beta = 1$

إذن : 5 و 3 أوليان فيما بينهما .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

عين مجموعة القواسم الطبيعية للأعداد 24 و 75 و 20

الحـل ــ 1

$$D_{24} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$$
$$D_{75} = \{1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 25 ; 75\}$$
$$D_{20} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20\}$$

التمرين ــ 2

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من $N \times N$ حيث $a b = 39$

الحـل ــ 2

لدينا : $D_{39} = \{1 ; 3 ; 13 ; 39\}$

إذن : $\begin{cases} a = 1 \text{ و } b = 39 \text{ أو} \\ a = 3 \text{ و } b = 13 \text{ أو} \\ a = 13 \text{ و } b = 3 \text{ أو} \\ a = 39 \text{ و } b = 1 \end{cases}$

منه : $(a ; b) \in \{(1 ; 39) ; (3 ; 13) ; (13 ; 3) ; (39 ; 1)\}$

التمرين ــ 3

عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الصحيحة حيث $x^2 - y^2 = 15$

الحـل ــ 3

لدينا مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 15 هي : $D_{15} = \{1 ; 3 ; 5 ; 15 ; -1 ; -3 ; -5 ; -15\}$

لدينا أيضا : $x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 15$

إذن : $\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ x + y = 15 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x - 1 = 3 \\ x + y = 5 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x - y = 15 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$

أو $\left.\begin{matrix} x - y = -1 \\ x + y = -15 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x - y = -3 \\ x + y = -5 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x - y = -5 \\ x + y = -3 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x - y = -15 \\ x + y = -1 \end{matrix}\right\}$

أي : $\left.\begin{matrix} 2x = 16 \\ y = 15 - x \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x = 8 \\ y = 5 - x \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x = 8 \\ y = 3 - x \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x = 16 \\ y = 1 - x \end{matrix}\right\}$

أو $\left.\begin{matrix} 2x = -16 \\ y = -15 - x \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x = -8 \\ y = -5 - x \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x = -8 \\ y = -3 - x \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x = -16 \\ y = -1 - x \end{matrix}\right\}$

أي : $\left.\begin{matrix} x = 8 \\ y = 7 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = -1 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x = 8 \\ y = -7 \end{matrix}\right\}$

أو $\left.\begin{matrix} x = -8 \\ y = -7 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x = -4 \\ y = -1 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x = -4 \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x = -8 \\ y = 7 \end{matrix}\right\}$

نتيجة : الثنائيات هي : $\{(8 ; 7) ; (4 ; 1) ; (4 ; -1) ; (8 ; -7) ; (-8 ; -7) ; (-4 ; -1) ; (-4 ; 1) ; (-8 ; 7)\}$

التمرين – 4

1 – أنشر العبارة $(x - 2)(y - 3)$

2 – إستنتج الثنائيات $(x ; y)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ التي تحقق $x y = 3 x + 2 y$

الحـل – 4

1 – $(x - 2)(y - 3) = x y - 3 x - 2 y + 6$

2 – حسب السؤال (1) : $(x - 2)(y - 3) = x y - 3 x - 2 y + 6$

أي : $(x - 2)(y - 3) = x y - (3 x + 2 y) + 6$

منه : إذا كان $x y = 3 x + 2y$ فإن $(x - 2)(y - 3) = 6$ لأن $x y - (3 x + 2 y) = 0$

أي : $\begin{cases} x - 2 = 1 \text{ و } y - 3 = 6 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 2 \text{ و } y - 3 = 3 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 3 \text{ و } y - 3 = 2 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 6 \text{ و } y - 3 = 1 \\ \text{أو} \\ x - 2 = - 1 \text{ و } y - 3 = - 6 \\ \text{أو} \\ x - 2 = - 2 \text{ و } y - 3 = - 3 \\ \text{أو} \\ x - 2 = - 3 \text{ و } y - 3 = - 2 \\ \text{أو} \\ x - 2 = - 6 \text{ و } y - 3 = - 1 \end{cases}$

أي : $(x ; y) \in \{(3 ; 9) ; (4 ; 6) ; (5 ; 5) ; (8 ; 4) ; (1 ; - 3) ; (0 ; 0) ; (-1 ; 1) ; (- 4 ; 2)\}$

التمرين – 5

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $x^2 = 4 y^2 + 3$

الحـل – 5

$$x^2 = 4 y^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4 y^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow (x - 2 y)(x + 2 y) = 3$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 y = 3 \text{ و } x - 2 y = 1 \\ \text{أو} \\ x + 2 y = 1 \text{ و } x - 2 y = 3 \\ \text{أو} \\ x + 2 y = - 3 \text{ و } x - 2 y = - 1 \\ \text{أو} \\ x + 2 y = - 1 \text{ و } x - 2 y = - 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/2 \text{ و } x = 2 \quad \text{مرفوض} \\ \text{أو} \\ y = - 1/2 \text{ و } x = 2 \quad \text{مرفوض} \\ \text{أو} \\ y = - 1/2 \text{ و } x = - 2 \quad \text{مرفوض} \\ \text{أو} \\ y = 1/2 \text{ و } x = - 2 \quad \text{مرفوض} \end{cases}$$

نتيجة : المعادلة $x^2 = 4 y^2 + 3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

التمرين – 6

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5 x y - y^2 = 49$

الحـل – 6

$$5 x y - y^2 = 49 \Leftrightarrow y(5 x - y) = 49$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ و } 5x-y=49 \\ \text{أو} \\ y=7 \text{ و } 5x-y=7 \quad \text{مرفوض} \\ \text{أو} \\ y=49 \text{ و } 5x-y=1 \\ \text{أو} \\ y=-1 \text{ و } 5x-y=-49 \\ \text{أو} \\ y=-7 \text{ و } 5x-y=-7 \quad \text{مرفوض} \\ \text{أو} \\ y=-49 \text{ و } 5x-y=-1 \end{cases}$$

إذن : $(x ; y) \in \{(10 ; 1) ; (10 ; 49) ; (-10 ; -1) ; (-10 ; -49)\}$

التمرين ــ 7

ماهي عدد مضاعفات العدد 53 و المحصورة بين 1027 - و 1112

الحــل ــ 7

ليكن x مضاعف 53 إذن : $x = 53k$ حيث $k \in Z$

إذن : $-1027 \le x \le 1112$: $-1027 \le 53k \le 1112$

إذن : $\frac{-1027}{53} \le k \le \frac{1112}{53}$

أي $-19{,}37 \le k \le 20{,}98$

بما أن $k \in Z$ فإن عدد قيم k هو 40 (من 19 - إلى 20)

إذن : يوجد 40 مضاعف للعدد 53 محصور بين 1027 - و 1112

التمرين ــ 8

عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a حيث 7 قاسم لــ a و $a < 50$

الحــل ــ 8

a هو مضاعف 7 الأصغر من 50 و الأكبر من 0

إذن : $a \in \{7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; 42 ; 49\}$

التمرين ــ 9

ماهي الكسور المساوية لــ $\frac{33}{21}$ و التي مقام كل منها عدد طبيعي أصغر تماما من 50

الحــل ــ 9

ليكن $\frac{x}{y}$ هذا الكسر حيث $0 < y < 50$

لدينا : $\frac{x}{y} = \frac{33}{21}$ منه : $21x = 33y$

أي : $7x = 11y$

منه : $x = 11\alpha$ و $y = 7\alpha$ حيث $\alpha \in N^*$

لدينا : $\left.\begin{matrix} 0 < y < 50 \\ y = 7\alpha \end{matrix}\right\}$ إذن : $0 < 7\alpha < 50$

منه $0 < \alpha < 50/7$

أي : $0 < \alpha < 7{,}1$

أي : $\alpha \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$

منه : $y \in \{7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; 42 ; 49\}$

إذن : $x \in \{11 ; 22 ; 33 ; 44 ; 55 ; 66 ; 77\}$

نتيجة : $\frac{33}{21} = \frac{11}{7} = \frac{22}{14} = \frac{44}{28} = \frac{55}{35} = \frac{66}{42} = \frac{77}{49}$

التمرين ــ 10

عين كل الأعداد الصحيحة n التي من أجلها 13 قاسم لــ $n+4$ و $|n| \le 22$

الحـل – 10

إذن : $|n| \leq 22$ ، $-22 \leq n \leq 22$

منه $-18 \leq n+4 \leq 26$

إذن : نبحث عن مضاعفات 13 المحصورة بين 18 - و 26

منه $(n+4) \in \{-13 ; 0 ; 13 ; 26\}$

أي : $n \in \{-17 ; -4 ; 9 ; 22\}$

التمرين – 11

عين كل الأعداد الصحيحة n حتى يكون $5n+7$ قاسما لـ 12

الحـل – 11

$5n+7$ قاسم لـ 12 إذن : $(5n+7) \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ; -1 ; -2 ; -3 ; -4 ; -6 ; -12\}$

منه $5n \in \{-6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -1 ; 5 ; -8 ; -9 ; -10 ; -11 ; -13 ; -19\}$

أي $n \in \{-1 ; 1 ; -2\}$

التمرين – 12

عين الأعداد الطبيعية n غير المعدومة حيث يكون العدد $n+6$ قابلا للقسمة على n

الحـل – 12

يكون $n+6$ قابلا للقسمة على n إذا و فقط إذا وجد k من N حيث $n+6 = nk$

أي : $nk - n = 6$ منه $n(k-1) = 6$

أي $n|6$

أي : $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$

التمرين – 13

1 – عين الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n+6$ يقسم 34

2 – عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها $5n+6$ قاسم لـ $n+8$

الحـل – 13

– 1

$$5n+6|34 \Rightarrow 5n+6 \in \{1 ; 2 ; 17 ; 34 ; -1 ; -2 ; -17 ; -34\}$$
$$\Rightarrow 5n \in \{-5 ; -4 ; 11 ; 28 ; -7 ; -8 ; -23 ; -40\}$$
$$\Rightarrow n \in \{-1 ; -8\}$$

– 2

$$5n+6|n+8 \Rightarrow 5n+6|5(n+8)$$
$$\Rightarrow 5n+6|5n+40$$

باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 5n+40 & 5n+6 \\ \underline{5n+6} & \overline{1} \\ 34 & \end{array}$$

إذن : $5n+40 = 1 + \dfrac{34}{5n+6}$

منه : يكون $5n+6$ قاسم لـ $5n+40$ إذا و فقط إذا كان $5n+6|34$

أي $n \in \{-1 ; -8\}$ حسب السؤال (1)

التمرين – 14

n عدد صحيح . نضع $a = 3n+7$ و $b = n+1$

أثبت أن إذا كان d قاسم لـ a و قاسم لـ b فإن d قاسم للعدد 4

الحـل – 14

$$\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|3b \end{cases} \Rightarrow d|a-3b \Rightarrow d|3n+7-(3n+3) \Rightarrow d|4$$

التمرين – 15

n عدد صحيح . نضع $x = 3n+7$ و $y = 7n+2$

أثبت أن إذا كان Δ قاسم لـ x و y فإن Δ قاسم لـ 43

الحـل – 15

$$\begin{cases}\Delta|x\\ \Delta|y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta|7x\\ \Delta|3y\end{cases} \Rightarrow \Delta|7x-3y \Rightarrow \Delta|7(3n+7)-3(7n+2) \Rightarrow \Delta|49-6 \Rightarrow \Delta|43$$

التمرين – 16

ليكن a و b عددان صحيحان .

برهن أن إذا كان 2 يقسم a^2+b^2 فإن 2 يقسم $(a+b)^2$

الحـل – 16

a يقسم a^2+b^2 إذن : يوجد k من Z حيث $a^2+b^2=2k$

منه : $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=2k+2ab=2(k+ab)$

أي 2 يقسم $(a+b)^2$

التمرين – 17

a و b عددان صحيحان

1 – أنشر العبارة $(a+b)^3$

2 – أثبت أن إذا كان 3 يقسم a^3+b^3 فإن 3 يقسم $(a+b)^3$

الحـل – 17

1 –
$$(a+b)^3=(a+b)(a^2+b^2+2ab)$$
$$=a^3+ab^2+2a^2b+ba^2+b^3+2ab^2$$
$$=a^3+b^3+3ab^2+3a^2b$$

2 – إذا كان 3 يقسم a^3+b^3 فإن يوجد k من Z حيث $a^3+b^3=3k$

منه : $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab^2+3a^2b$

أي : $(a+b)^3=3k+3ab^2+3a^2b$ لأن $a^3+b^3=3k$

أي : $(a+b)^3=3(k+ab^2+a^2b)$

أي : 3 يقسم $(a+b)^3$

التمرين – 18

عين باقي القسمة الإقليدية لــ a على b في الحالات التالية :

1 – $a=118$ و $b=5$

2 – $a=-152$ و $7=b$

الحـل – 18

1 –

118	5
18	23
3	

إذن : باقي القسمة الإقليدية لــ 118 على 5 هو 3

2 –

152	7
12	21
5	

منه : $152=7(21)+5$

أي : $-152=7(-21)-5$

أي : $-152=7(-21)-5+7-7$

أي : $-152=7(-22)+2$

منه : باقي القسمة الإقليدية لــ 152 - على 7 هو 2

التمرين – 19

عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 100 و التي باقي قسمتها على 41 هو 5

الحـل – 19

باقي قسمة n على 41 هو 5 إذن : $n=41k+5$ حيث $k\in N$

$n\le 100$ منه $41k+5\le 100$

أي $41k\le 95$

أي $k\le 95/41$

أي $k\in\{0;1;2\}$

نتيجة : $n\in\{5;46;87\}$ لأن $n=41k+5$

التمرين – 20

عين العددين الطبيعيين غير المعدومين a و b حيث حاصل القسمة الإقليدية لــ a على b هو 17 و باقيها هو 3 و $a-27=23b$

الحــل ــ 20

$$\begin{cases} a = 17\,b + 3 \\ a - 27 = 23\,b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 17\,b = 3 \\ a - 23\,b = 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 17\,b - (a - 23\,b) = -24 \\ a = 17\,b + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\,b = -24 \\ a = 17\,b + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = -65 \end{cases}$$

إذن : لا يوجد عددان طبيعيان a و b يحققان الشروط المطلوبة .

التمرين ــ 21

n عدد طبيعي باقي قسمته على 7 يساوي باقي قسمته على 3 (القسمة الإقليدية)

عين القيم الممكنة لـــ n

الحــل ــ 21

$\begin{cases} n = 7\,k + r \\ n = 3\,p + r \end{cases}$ حيث k و p و r أعداد طبيعية و $0 \le r < 3$

إذن $7\,k + r = 3\,p + r$ منه $7\,k = 3\,p$

إذن : $\begin{cases} k = 3\,q \\ P = 7\,q \end{cases}$ حيث q عدد طبيعي

نتيجة : قيم n المطلوبة هي الأعداد الطبيعية من الشكل $n = 7\,k + r = 7(3\,q) + r$

أي $n = 21\,q + r$ حيث $q \in N$ و $r \in \{0 ; 1 ; 2\}$

التمرين ــ 22

عين كل الأعداد الطبيعية n التي يكون باقي قسمتها على 7 و حاصل قسمتها على 7 متساويان .

الحــل ــ 22

ليكن q حاصل قسمة n على 7 و r باقي هذه القسمة

إذن : $n = 7\,q + r$ حيث $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

بما أن $q = r$ فإن $q \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

إذن : $n \in \{7(0) + 0 ; 7(1) + 1 ; 7(2) + 2 ; 7(3) + 3 ; 7(4) + 4 ; 7(5) + 5 ; 7(6) + 6\}$

أي : $n \in \{0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48\}$

التمرين ــ 23

عين كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها الحاصل هو ضعف الباقي عند القسمة الإقليدية لـــ n على 13

الحــل ــ 23

ليكن $n = 13\,q + r$ حيث $q \in N$ و $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$

$q = 2\,r$ إذن : $q \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24\}$

منه القيم الممكنة لـــ n هي كما يلي :

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q = 2\,r$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$n = 13\,q + r$	0	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324

التمرين ــ 24

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a + b = 416$ و باقي القسمة الإقليدية لـــ a على b هو 61 .

عين a و b

الحــل ــ 24

$\begin{cases} a + b = 416 \,........(1) \\ a = b\,q + 61 ....(2) \end{cases}$ حيث $q \in N$

$$\begin{array}{r|l} 355 & 5 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

من العلاقة (1) : $a = 416 - b$

بالتعويض في (2) : $416 - b = b\,q + 61$

منه : $416 - 61 = b\,q + b$

أي : $355 = b(q + 1)$

منه : b قاسم لـ 355

إذن : $b \in \{1 ; 5 ; 71 ; 355\}$

منه : $(q + 1) \in \{355 ; 71 ; 5 ; 1\}$

أي : $q \in \{354 ; 70 ; 4 ; 0\}$

نتيجة : قيم a الممكنة هي :

q	354	70	4	0
b	1	5	71	355
$a = b\,q + 61$	415	411	345	61

مرفوض مرفوض

نتيجة : $(a ; b) \in \{(345 ; 71) ; (61 ; 355)\}$ لأن $b > 61$

التمرين – 25

باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD(a ; b)$ في الحالات التالية :

1 – $(a ; b) = (315 ; 117)$

2 – $(a ; b) = (1260 ; 528)$

الحـل – 25

1 –

$$\begin{array}{r|l} 315 & 117 \\ \hline 234 & 2 \\ 081 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 117 & 81 \\ \hline 81 & 1 \\ 36 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 81 & 36 \\ \hline 72 & 2 \\ 09 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 9 \\ \hline 36 & 4 \\ 0 & \end{array}$$

آخر باقي غير معدوم هو 9 إذن : $PGCD(315 ; 117) = 9$

2 –

$$\begin{array}{r|l} 1260 & 528 \\ \hline 1056 & 2 \\ 204 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 528 & 204 \\ \hline 408 & 2 \\ 120 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 204 & 120 \\ \hline 120 & 1 \\ 84 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 120 & 84 \\ \hline 84 & 1 \\ 36 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 84 & 36 \\ \hline 72 & 2 \\ 12 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 12 \\ \hline 36 & 3 \\ 0 & \end{array}$$

آخر باقي غير معدوم هو 12 إذن : $PGCD(1260 ; 528) = 12$

التمرين – 26

n عدد طبيعي غير معدوم

1 – ماهو القاسم المشترك الأكبر لـ n و $3\,n$ ؟

2 – ماهو القاسم المشترك الأكبر لـ n و n^2 ؟

الحـل – 26

1 – n قاسم لـ $3\,n$ إذن $PGCD(n ; 3\,n) = n$

2 – n قاسم لـ n^2 إذن $PGCD(n ; n^2) = n$

التمرين – 27

برهن أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة قواسم العدد $PGCD(a ; b)$

الحـل – 27

لتكن D مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b

و لتكن d مجموعة قواسم العدد $PGCD(a ; b)$

ليكن k عنصر من D إذن : $k|a$ و $k|b$

نضع $q = PGCD(a ; b)$ إذن : $\left.\begin{array}{l} a = q\,a' \\ b = q\,b' \end{array}\right\}$ حيث $PGCD(a' ; b') = 1$

لدينا $\left.\begin{array}{l} k|a'\,q \\ k|b'\,q \end{array}\right\}$ إذن : $k|q$ لأن $PGCD(a' ; b') = 1$

منه : $k \in d$ .... (1)

ليكن الآن ℓ عنصر من d إذن : $\ell \mid q$

لكن $q|_a$ و $q|_b$

إذن : $\ell|_a$ و $\ell|_b$

إذن : $\ell \in D$ .... (2)

نتيجة : $D = d$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 28

عين كل القواسم المشتركة للعددين 456 و 792

الحـل ــ 28

لنبحث عن $PGCD(792 ; 456)$ كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 792 & 456 \\ \hline 456 & 1 \\ 336 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 456 & 336 \\ \hline 336 & 1 \\ 120 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 336 & 120 \\ \hline 240 & 2 \\ 96 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 120 & 96 \\ \hline 96 & 1 \\ 24 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 96 & 24 \\ \hline 96 & 4 \\ 0 & \end{array}$$

منه : $PGCD(792 ; 456) = 24$

إذن : مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي مجموعة قواسم العدد 24

و هي : $D = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$

التمرين ــ 29

n عدد طبيعي غير معدوم حيث باقي القسمة الإقليدية لــ 4294 و 3521 على n هما على الترتيب 10 و 11 .

عين القيم الممكنة لــ n

الحـل ــ 29

البواقي هي 10 و 11 إذن : $n > 11$

لدينا : $\begin{cases} 4294 = n\,q + 10 \\ 3521 = n\,p + 11 \end{cases}$ حيث $q \in N^*$ و $p \in N^*$

إذن : $\begin{cases} 4284 = n\,p \\ 3510 = n\,q \end{cases}$

منه : $\begin{cases} n|4284 \\ n|3510 \end{cases}$ إذن : n قاسم مشترك للعددين 4284 و 3510

أي n ينتمي إلى مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر للعددين 4284 و 3510 كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 4284 & 3510 \\ \hline 3510 & 1 \\ 774 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3510 & 774 \\ \hline 3096 & 4 \\ 414 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 774 & 414 \\ \hline 414 & 1 \\ 360 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 414 & 360 \\ \hline 360 & 1 \\ 54 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 360 & 54 \\ \hline 324 & 6 \\ 36 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 54 & 36 \\ \hline 36 & 1 \\ 18 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 18 \\ \hline 36 & 2 \\ 0 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(4284 ; 3510) = 18$

منه : $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\}$

لكن $n > 11$ إذن $n = 18$

التمرين ــ 30

n عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام

عين العدد n حيث 37 و 53 هما على الترتيب بواقي القسمة الإقليدية للعددين 21685 و 33509 على n

الحـل ــ 30

$\begin{cases} 21685 = n\,p + 37 \\ 33509 = n\,q + 53 \end{cases}$ حيث $p \in N$ ؛ $q \in N$ ؛ $n > 53$

إذن : $\begin{cases} 21648 = n\,p \\ 33456 = n\,q \end{cases}$ منه $\begin{cases} n \mid 21648 \\ n \mid 33456 \end{cases}$

إذن : n ينتمي إلى القواسم المشتركة للعددين 21648 و 33456

البحث عن PGCD(21648 ; 33456)

$$\begin{array}{r|l} 33456 & 21648 \\ \hline 21648 & 1 \\ 11808 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 21648 & 11808 \\ \hline 11808 & 1 \\ 9840 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11808 & 6840 \\ \hline 9840 & 1 \\ 1968 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9840 & 1968 \\ \hline 9840 & 5 \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : PGCD(21648 ; 33456) = 1968

إذن : n ينتمي إلى مجموعة قواسم 1968

لكن n يتكون من 4 أرقام إذن n = 1968 لأنه القاسم الوحيد لـ 1968 و الذي يتكون من 4 أرقام .

التمرين ـ 31

1 ـ عين PGCD(182 ; 126)

2 ـ باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد عددين صحيحين α و β حيث $182\,\alpha + 126\,\beta = 14$

الحل ـ 31

1 ـ

$$\begin{array}{r|l} 182 & 126 \\ \hline 126 & 1 \\ 56 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 126 & 56 \\ \hline 112 & 2 \\ 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 14 \\ \hline 56 & 4 \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : PGCD(182 ; 126) = 14

2 ـ لنكتب بواقي قسمة خوارزمية إقليدس كما يلي :

(1) .... 182 – 126(1) = 56

(2) .... 126 – 56(2) = 14

نعوض (1) في (2) نحصل على :

126 – 2[182 -126(1)] = 14 لأن 56 = 182 – 126(1)

أي 126 – 182(2) + 126(2) = 14

أي : 182(- 2) + 126(3) = 14

إذن : $(\alpha ; \beta) = (- 2 ; 3)$

التمرين ـ 32

أحسب باقي قسمة العدد 1399 على 82 ثم إستنتج PGCD(1399 ; 82)

الحل ـ 32

$$\begin{array}{r|l} 1399 & 82 \\ \hline 82 & 17 \\ 579 & \\ 574 & \\ 005 & \end{array}$$

نتيجة : باقي قسمة 1399 على 82 هو 5

إذن : PGCD(1399 ; 82) = PGCD(82 ; 5)

أي : PGCD(1399 ; 82) = 1 لأن 82 و 5 أوليان فيما بينهما .

التمرين ـ 33

عين PGCD(- 350 ; - 252)

الحل ـ 33

إذن : PGCD(- 350 ; - 252) = PGCD(350 ; 252)

$$\begin{array}{r|l} 350 & 252 \\ \hline 252 & 1 \\ 98 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 252 & 98 \\ \hline 196 & 2 \\ 56 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 98 & 56 \\ \hline 56 & 1 \\ 42 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 42 \\ \hline 42 & 1 \\ 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 42 & 14 \\ \hline 42 & 3 \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : PGCD(350 ; 252) = 14

إذن : PGCD(- 350 ; - 252) = 14

التمرين ـ 34

عين PGCD(54 ; 82) ثم إستنتج PGCD(5400 ; 8200)

الحـل ــ 34

$$\begin{array}{r|l} 82 & 54 \\ \underline{54} & 1 \\ 28 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 28 \\ \underline{28} & 1 \\ 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28 & 26 \\ \underline{26} & 1 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \underline{26} & 13 \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : $PGCD(54 ; 82) = 2$

إذن :

$$\begin{aligned} PGCD(5400 ; 8200) &= PGCD(54 \times 100 ; 82 \times 100) \\ &= 100 \times PGCD(54 ; 82) \\ &= 100 \times 2 \\ &= 200 \end{aligned}$$

التمرين ــ 35

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $\begin{cases} a + b = 72 \\ PGCD(a ; b) = 9 \end{cases}$

الحـل ــ 35

$PGCD(a ; b) = 9$ إذن : $\begin{cases} a = 9x \\ b = 9y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N \text{ ؛ } x \in N \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

لدينا $a + b = 72$ إذن : $9x + 9y = 72$

أي : $x + y = 8$

الحالات الممكنة :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	مرفوض		مرفوض		مرفوض		مرفوض		مرفوض

الحالات المرفوضة لا تحقق الشرط $PGCD(x ; y) = 1$

نتيجة : $(x ; y) \in \{(1 ; 7) ; (3 ; 5) ; (5 ; 3) ; (7 ; 1)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(9 ; 63) ; (27 ; 45) ; (45 ; 27) ; (63 ; 9)\}$

التمرين ــ 36

عين الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $\begin{cases} ab = 360 \\ PGCD(a ; b) = 6 \end{cases}$

الحـل ــ 36

$PGCD(a ; b) = 6$ إذن : $\begin{cases} a = 6x \\ b = 6y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N^* ; x \in N^* \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

لدينا $ab = 360$ إذن : $6x \,.\, 6y = 360$ أي $xy = 10$

منه القيم الممكنة لــ x و y كما يلي :

x	1	2	5	10
y	10	5	2	1

نتيجة : $(x ; y) \in \{(1 ; 10) ; (2 ; 5) ; (5 ; 2) ; (10 ; 1)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(6 ; 60) ; (12 ; 30) ; (30 ; 12) ; (60 ; 6)\}$

التمرين ــ 37

عين الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a ; b) = 5 \end{cases}$

الحـل ــ 37

$PGCD(a ; b) = 5$ إذن : $\begin{cases} a = 5x \\ b = 5y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N^* ; x \in N^* \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

$a^2 - b^2 = 825$ إذن : $(a - b)(a + b) = 825$

أي $(5x - 5y)(5x + 5y) = 825$

أي $5 \times 5(x - y)(x + y) = 825$

أي : $(x - y)(x + y) = 33$

منه : $\begin{cases} x - y > 0 \\ (x - y)(x + y) = 33 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x > y \\ (x - y)(x + y) = 33 \end{cases}$

منه القيم الممكنة لـ $(x - y)$ و $(x + y)$ هي كما يلي :

$x-y$	1	3	11	33
$x+y$	33	11	3	1
x	17	7	7	17
y	16	4	-4	-16

مرفوض مرفوض

ملاحظة : للبحث عن x و y نحل الجملة $\begin{cases} x - y = \alpha \\ x + y = \beta \end{cases}$ كما يلي : $2x = \alpha + \beta$

إذن : $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ منه : $y = x - \alpha$ إذن : $(x ; y) \in \{(17 ; 16) ; (7 ; 4)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(85 ; 80) ; (35 ; 20)\}$

التمرين ـــ 38

1 ـــ عين $PGCD(140 ; 143)$

2 ـــ إستنتج $PGCD(a ; b)$ في الحالات التالية :

$(a ; b) = (140 \times 34 ; 143 \times 34)$

$(a ; b) = (143 \times 82 ; 140 \times 82)$

الحـل ـــ 38

1 ـــ

$$\begin{array}{r|l} 143 & 140 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 140 & 3 \\ \hline 12 & 46 \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

نتيجة : $PGCD(140 ; 143) = 1$

2 ـــ $PGCD(140 \times 34 ; 143 \times 34) = 34 \times PGCD(140 ; 143) = 34$

$PGCD(143 \times 82 ; 140 \times 82) = 82 \times PGCD(140 ; 143) = 82$

التمرين ـــ 39

أثبت أن لا يوجد عددان طبيعيان مجموعهما 500 و قاسمهما المشترك الأكبر هو 7

الحـل ـــ 39

لنفرض أنه يوجد عددين طبيعيين a و b حيث $\begin{cases} PGCD(a ; b) = 7 \\ a + b = 500 \end{cases}$

$PGCD(a ; b) = 7$ إذن $\begin{cases} a = 7x \\ b = 7y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N^* ; x \in N^* \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

$a + b = 500$ إذن : $7x + 7y = 500$

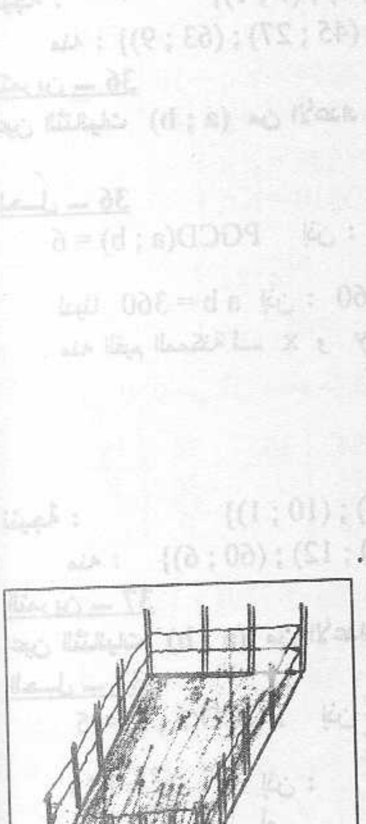
أي $7(x + y) = 500$

لكن 7 لا يقسم 500 إذن تناقض.

منه : لا يوجد أي عددين طبيعيين a و b يحققان الشروط المطلوبة.

التمرين ـــ 40

قطعة أرضية مستطيلة الشكل أبعادها $156 \text{ m} \times 90 \text{ m}$ كما هو في الشكل المقابل. نريد إحاطتها بسياج على شكل أعمدة حديدية حيث نضع في كل زاوية عمود و المسافة بين كل عمودين متتاليين متساوية مثنى مثنى. (نفس المسافة على طول السياج).
إذا علمت أن المسافة بين كل وتدين هي عدد طبيعي n مقدر بالمتر حيث $2 < n < 5$.
أحسب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط هذه القطعة الأرضية.



الحـل ـــ 40

بما أن المسافة بين وتدين متتاليين مثنى مثنى متساوية فإن العدد n يكون قاسم لـ 156 و قاسم لـ 90

لدينا $2 < n < 5$ إذن $n \in \{3 ; 4\}$

بما أن 4 لا يقسم 90 فإن القيمة الوحيدة الممكنة لـ n هي 3

إذن : عدد الأعمدة المحاطة بالقطعة الأرضية هو كما يلي :

محيط القطعة : $p = 2(156 + 90) = 2(246) = 492$

إذن : عدد الأعمدة هو : $492/3 = 164$

التمرين ــ 41

نسمي قاسما تاما للعدد الطبيعي n كل قاسم لــ n موجب و يختلف عن n

نقول عن عددين طبيعيين غير معدومين a و b أنهما وديان إذا كان a هو مجموع كل القواسم التامة للعدد b و b هو مجموع كل القواسم التامة للعدد a .

برهن أن العددان 220 و 284 وديان

الحــل ــ 41

لنبحث عن قواسم كل من 220 و 284 كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 284 & 2 \\ 142 & 2 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

إذن : $D_{220} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110 ; 220\}$

$D_{284} = \{1 ; 2 ; 4 ; 71 ; 142 ; 284\}$

منه القواسم التامة لــ 220 هي $\{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110\}$

و القواسم التامة لــ 284 هي $\{1 ; 2 ; 4 ; 71 ; 142\}$

$$\begin{cases} 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 \\ 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220 \end{cases}$$

إذن : فعلا العددان 220 و 284 وديان

التمرين ــ 42

n عدد طبيعي أكبر تماما من 2

برهن أن : يكون $n + 5$ مضاعف لــ $n - 2$ إذا و فقط إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$

الحــل ــ 42

لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر لــ $n + 5$ و $n - 2$ باستعمال خوارزمية إقليدس

$$\begin{array}{r|l} n + 5 & n - 2 \\ \underline{n - 2} & 1 \\ 7 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(n + 5 ; n - 2) = PGCD(n - 2 ; 7)$

منه : $PGCD(n + 5 ; n - 2) \in \{1 ; 7\}$ لأن قواسم 7 هي $\{1 ; 7\}$

نتيجة : يكون $(n + 5)$ مضاعف لــ $(n - 2)$ إذا و فقط إذا كان $PGCD(n + 5 ; n - 2) = n - 2$

أي : إذا و فقط إذا كان $n - 2 = 1$ أو $n - 2 = 7$

أي : إذا و فقط إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$ و هو المطلوب

التمرين ــ 43

1 ــ أحسب مجموع قواسم العدد 8 ثم مجموع قواسم العدد 81

2 ــ ماهو عدد قواسم العدد 8×81

الحــل ــ 43

1 ــ $D_8 = \{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$ إذن : مجموع قواسم 8 هو $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$D_{81} = \{1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81\}$ إذن : مجموع قواسم 81 هو $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$

2 ــ لنبحث عن عدد قواسم العدد 8×81

لدينا : $8 \times 81 = 2^3 \times 3^4$

إذن : قواسم العدد 8×81 تكتب من الشكل $2^n \times 3^p$ حيث $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ و $p \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

إذن : عدد قواسم العدد 8×81 هو $5 \times 4 = 20$

ملاحظة : يمكن البحث عن هذه القواسم كما يلي :

2^n	2^0					2^1					2^2					2^3				
3^p	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4
$2^n \times 3^p$	1	3	9	27	81	2	6	18	54	162	4	12	36	108	324	8	24	72	216	648

التمرين — 44

1 — كيف يمكن إختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا .

2 — عين الأعداد الطبيعية a حيث من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 و عدد قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد a

الحـل — 44

1 — يكون العدد $\frac{n+2}{n-1}$ صحيحا إذا و فقط إذا كان $PGCD(n+2 ; n-1) = n-1$

باجراء خوارزمية إقليدس كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} n+2 & n-1 \\ \underline{n-1} & 1 \\ 3 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(n+2 ; n-1) = PGCD(n-1 ; 3)$

منه : $PGCD(n+2 ; n-1) \in \{1 ; 3\}$ لأن قواسم 3 هي $\{1 ; 3\}$

نتيجة : يكون $\frac{n+2}{n-1}$ صحيحا إذا و فقط إذا كان $n-1=1$ أو $n-1=3$ أي $n=2$ أو $n=4$

2 — a له قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 إذن : $a = 2^n \times 3^p$ حيث $n \in N^*$ و $p \in N^*$

إذن : عدد قواسم a هو $(n+1)(p+1)$

من جهة أخرى : $a^2 = 2^{2n} \times 3^{2p}$

إذن : عدد قواسم a^2 هو $(2n+1)(2p+1)$

نتيجة : عدد قواسم a^2 هو 3 مرات عدد قواسم a إذن :

$$(2n+1)(2p+1) = 3(n+1)(p+1)$$

أي : $4np + 2n + 2p + 1 = 3np + 3n + 3p + 3$

أي : $np - n - p = 2$

أي : $np - n = p + 2$

أي : $n(p-1) = p+2$

أي : $n = \frac{p+2}{p-1}$ حيث $p \neq 1$

لكن : $n \in N^*$ إذن : $\left(\frac{p+2}{p-1}\right) \in N^*$

منه : حسب السؤال (1) فان $p=2$ أو $p=4$

منه : $n = \frac{2+2}{2-1} = 4$ أو $n = \frac{4+2}{4-1} = 2$

إذن : $(n ; p) \in \{(4 ; 2) ; (2 ; 4)\}$

منه : $a = 2^2 \times 3^4$ أو $a = 2^4 \times 3^2$

التمرين — 45

عين كل الثنائيات (x ; y) من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $xy - 4y - 12 = 0$

الحـل — 45

$$xy - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow xy - 4y = 12$$
$$\Leftrightarrow y(x-4) = 12$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{12}{x-4} \quad \text{حيث} \quad x \neq 4$$

بما أن y عدد صحيح فان $(x-4)$ هو قاسم لـ 12

أي : $(x-4) \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ; -1 ; -2 ; -3 ; -4 ; -6 ; -12\}$

منه : $x \in \{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 16 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; -2 ; -8\}$

لدينا : $y = \frac{12}{x-4}$ إذن $y \in \{12 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; -12 ; -6 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1\}$

نتيجة : $(x ; y) \in \{(5 ; 12) ; (6 ; 6) ; (7 ; 4) ; (8 ; 3) ; (10 ; 2) ; (16 ; 1) ; (3 ; -12) ; (2 ; -6) ; (1 ; -4) ;$
$(0 ; -3) ; (-2 ; -2) ; (-8 ; -1)\}$

التمرين — 46

في المستوي المنسوب إلى معلم نعتبر (C) منحنى الدالة f المعرفة على

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 3}{x - 1}$ بــ $D = [-3 ; 1[\cup]1 ; 3]$

1 ــ عين العدد الحقيقي a حتى يكون من أجل كل x من D : $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{a}{x - 1}$

2 ــ عين نقط المنحنى (C) التي إحداثياها أعداد صحيحة .

الحــل ــ 46

1 ــ باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 3x - 3 & x - 1 \\ \underline{2x^2 - 2x} & \overline{2x - 1} \\ -x - 3 & \\ \underline{-x + 1} & \\ -4 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{4}{x - 1}$

أي $a = -4$

2 ــ لتكن $N(x ; y)$ نقطة من (C)

تكون إحداثيات N صحيحة إذا و فقط إذا كان : $x \in \{-3 ; -2 ; 0 ; 2 ; 3\}$

و $f(x) \in Z$ أي $\dfrac{4}{x-1} \in Z$ لأن $(2x - 1) \in Z$

منه : $(x - 1)$ يقسم 4

أي $(x - 1) \in \{1 ; 2 ; 4 ; -1 ; -2 ; -4\}$

أي : $x \in \{2 ; 3 ; 5 ; 0 ; -1 ; -3\}$

بالتقاطع مع المجموعة $\{-3 ; -2 ; 0 ; 2 ; 3\}$ نحصل على : $x \in \{-3 ; 0 ; 2 ; 3\}$

إذن : $y \in \{f(-3) ; f(0) ; f(2) ; f(3)\}$

أي : $y \in \{-6 ; 3 ; -1 ; 3\}$

إذن : النقط المطلوبة هي $\{N_1(-3 ; -6) ; N_2(0 ; 3) ; N_3(2 ; -1) ; N_4(3 ; 3)\}$

التمرين ــ 47

n عدد طبيعي . نضع $a = n(n^2 + 5)$

1 ــ برهن أن a عدد زوجي .

2 ــ برهن أن a مضاعف 3

الحــل ــ 47

1 ــ n عدد طبيعي إذن نميز حالتين :

الحالة الأولى : n زوجي منه : $n = 2p$ حيث $p \in N$

إذن : $a = 2p(n^2 + 5)$

منه : a زوجي .

الحالة الثانية : n فردي إذن : $n = 2p + 1$ حيث $p \in N$

منه : $a = n[(2p + 1)^2 + 5]$

أي $a = n(4p^2 + 4p + 1 + 5)$

أي $a = n(4p^2 + 4p + 6)$

أي $a = 2n(2p^2 + 2p + 3)$

منه : a زوجي .

نتيجة : من أجل كل n من N فإن العدد a زوجي .

2 ــ n عدد طبيعي إذن نميز الحالات التالية :

الحالة الأولى : $n = 3p$ حيث $p \in N$

إذن : $a = 3p(n^2 + 5)$

منه : a مضاعف 3

الحالة الثانية : $n = 3p + 1$ حيث $p \in N$

إذن : $a = n[(3p + 1)^2 + 5]$

أي $a = n(9p^2 + 6p + 1 + 5)$

أي $a = n(9p^2 + 6p + 6)$

أي $a = 3\,n(3\,p^2 + 2\,p + 2)$

منه : a مضاعف 3

الحالة الثالثة : $n = 3\,p + 2$ حيث $p \in N$

إذن : $a = n[(3\,p + 2)^2 + 5]$

أي $a = n(9\,p^2 + 12\,p + 4 + 5)$

أي $a = n(9\,p^2 + 12\,p + 9)$

أي $a = 3\,n(3\,p^2 + 4\,p + 3)$

أي a مضاعف 3

نتيجة : من أجل كل قيمة للعدد الطبيعي n فإن a مضاعف 3

التمرين ـــ 48

a عدد طبيعي

برهن أن العدد $A = a(a^2 - 1)$ مضاعف 6

الحـل ـــ 48

ليكن a عدد طبيعي

إذن : الأعداد $(a - 1)$ ؛ a و $a + 1$ هي أعداد صحيحة متتابعة

منه : أحد هذه الأعداد زوجية أي تكتب من الشكل $2\,p$ حيث $p \in N$
أحد هذه الأعداد مضاعفة لـــ 3 أي تكتب من الشكل $3\,q$ حيث $q \in N$

إذن : جداء هذه الأعداد يكتب من الشكل $2\,p \times 3\,q$ أي $6p\,q$

بما أن $A = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1)$

فإن A يكتب من الشكل $6\,p\,q$ إذن : A مضاعف 6 .

التمرين ـــ 49

1 ـــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن رقم آحاد العدد $n^5 - n$ هو 0

2 ـــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p فإن العددين n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد

الحـل ـــ 49

1 ـــ يكون رقم آحاد العدد $n^5 - n$ هو 0 إذا و فقط إذا كان $n^5 - n$ مضاعف 10

لنثبت إذن بالتراجع صحة الخاصية : $n^5 - n$ مضاعف 10

من أجل : $n = 0$: $0^5 - 0 = 0$ و 0 مضاعف 10

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض أن $n^5 - n$ مضاعف 10 أي $n^5 - n = 10\,k$ حيث $k \in N$

هل $(n + 1)^5 - (n + 1)$ مضاعف 10 ؟

$$(n + 1)^5 - (n + 1) = n^5 + 5\,n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 + 5\,n + 1 - n - 1$$

$$= n^5 + 5\,n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 + 5\,n - n$$

$$= n^5 - n + 10(n^3 + n^2) + 5\,n(n^3 + 1)$$

$$= 10\,k + 10(n^3 + n^2) + 5\,n(n^3 + 1)$$

لكن : إذا كان n زوجي فإن $5\,n(n^3 + 1) = 5 \times 2\,p(n^3 + 1)$
أي $5\,n(n^3 + 1) = 10\,p(n^3 + 1)$
إذا كان n فردي فإن $n^3 + 1$ زوجي

أي $5\,n(n^3 + 1) = 10\,q$

منه : $(n + 1)^5 - (n + 1) = 10[k + (n^3 + n^2) + q]$

أي : $(n + 1)^5 - (n + 1)$ مضاعف 10

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^5 - n$ مضاعف 10

أي من أجل كل عدد طبيعي n فإن رقم آحاد $n^5 - n$ هو 0

2 ـــ لدينا : $n^{p+5} - n^{p+1} = n^p(n^5 - n)$

إذن : رقم آحاد العدد $n^{p+5} - n^{p+1}$ هو 0 منه العددان n^{p+5} و n^{p+1} لهما نفس رقم الآحاد .

التمرين ــ 50

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $\left.\begin{array}{l} a = n^2 + 5n + 4 \\ b = n^2 + 3n + 2 \end{array}\right\}$

1 ــ بين أن العدد $(n + 1)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

2 ــ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(n + 1)$ قاسما للعدد $3n^2 + 15n + 20$

الحـل ــ 50

1 ــ **باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :**

$$\begin{array}{r|l} n^2 + 5n + 4 & n + 1 \\ \cline{2-2} \underline{n^2 + n} & n + 4 \\ 4n + 4 & \\ \underline{4n + 4} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n^2 + 3n + 2 & n + 1 \\ \cline{2-2} \underline{n^2 + n} & n + 2 \\ 2n + 2 & \\ \underline{2n + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

بما أن بواقي القسمة الإقليدية لــ كل من a و b على $(n + 1)$ هو 0 فإن العدد $(n + 1)$ هو قاسم مشترك لكل من a و b

2 ــ يكون $(n + 1)$ قاسما لــ $3n^2 + 15n + 20$ إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي q

حيث $3n^2 + 15n + 20 = q(n + 1)$

أي : $q = \dfrac{3n^2 + 15n + 20}{n + 1}$

$$\begin{array}{r|l} 3n^2 + 15n + 20 & n + 1 \\ \cline{2-2} \underline{3n^2 + 3n} & 3n + 12 \\ 12n + 20 & \\ \underline{12n + 12} & \\ 8 & \end{array}$$

باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

نحصل على $q = 3n + 12 + \dfrac{8}{n + 1}$

إذن : يكون $(n + 1)$ قاسم لـ $3n^2 + 15n + 20$ إذا و فقط

إذا كان $(n + 1)$ قاسما لــ 8 أي $(n + 1) \in \{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$

منه : $n \in \{0 ; 1 ; 3 ; 7\}$

خلاصة : قيم n حتى يكون $(n + 1)$ قاسم لــ $3n^2 + 15n + 20$ هي $\{0 ; 1 ; 3 ; 7\}$

التمرين ــ 51

n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n - 1$ و $n^2 + n + 3$

1 ــ بين أن a يقسم $n^2 - 2n + 1$

2 ــ إستنتج أن a يقسم $3n + 2$

3 ــ بين إذن أن a يقسم 5

4 ــ ما هي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a ؟

الحـل ــ 51

1 ــ لدينا : $n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$

إذن : $(n - 1)$ يقسم $n^2 - 2n + 1$ من أجل $n \neq 1$

لكن : a يقسم $(n - 1)$

إذن : بالتعدي فإن a يقسم $n^2 - 2n + 1$

2 ــ لدينا $\left.\begin{array}{l} a \mid n^2 + n + 3 \\ a \mid n^2 - 2n + 1 \end{array}\right\}$ إذن : $a \mid n^2 + n + 3 - (n^2 - 2n + 1)$

أي $a \mid 3n + 2$ و هو المطلوب

3 ــ لدينا $\left.\begin{array}{l} a \mid n - 1 \\ a \mid 3n + 2 \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} a \mid 3(n - 1) \\ a \mid 3n + 2 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a \mid 3n - 3 \\ a \mid 3n + 2 \end{array}\right\}$

منه : $a \mid 3n + 2 - (3n - 3)$ أي $a \mid 5$ و هو المطلوب

4 ــ $\left.\begin{array}{l} a \mid 5 \\ a \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$ إذن : $a \in \{1 ; 5 ; -1 ; -5\}$

التمرين ـــ 52

n عدد طبيعي فردي . S هو مجموع أعداد طبيعية متتابعة و عددها n
بين أن العدد S يقبل القسمة على n .

الحـــل ـــ 52

ليكن $n = 2p + 1$ حيث $p \in N$

$S = q + (q+1) + (q+2) + \ldots\ldots + (q + n - 1)$ حيث q عدد طبيعي كيفي .

S هو مجموع n حد من حدود متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول q

إذن :

$$\begin{aligned} S &= \frac{n}{2}(q + q + n - 1) \\ &= \frac{n}{2}(2q + n - 1) \\ &= \frac{n}{2}(2q + 2p + 1 - 1) \\ &= \frac{n}{2}(2q + 2p) \\ &= \frac{2n}{2}(q + p) \\ &= n(q + p) \end{aligned}$$

إذن : S يقبل القسمة على n .

التمرين ـــ 53

برهن بالتراجع على n أن من أجل كل عدد طبيعي n : $n^3 + 11n$ يقبل القسمة على 6

الحـــل ـــ 53

من أجل $n = 0$: $n^3 + 11n = 0$ و 0 يقبل القسمة على 6

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض أن $n^3 + 11n$ يقبل القسمة على 6 من أجل $n > 0$ أي $n^3 + 11n = 6k$

هل $(n+1)^3 + 11(n+1)$ يقبل القسمة على 6 ؟

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 11(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 \\ &= (n^3 + 11n) + 12 + 3n^2 + 3n \\ &= 6k + 6(2) + 3n(n+1) \end{aligned}$$

نميز حالتين : إذا كان n زوجي فإن $n = 2p$ إذن : $3n(n+1) = 6p(n+1)$

إذا كان n فردي فإن $(n+1)$ زوجي أي $n + 1 = 2p$ منه $3n(n+1) = 6np$

إذن : من أجل كل n من N فإن $3n(n+1) = 6q$ حيث $q \in N$

منه :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 11(n+1) &= 6k + 6(2) + 6q \\ &= 6(k + 2 + q) \\ &= 6k' \end{aligned}$$

إذن : $(n+1)^3 + 11(n+1)$ يقبل القسمة على 6

أي الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^3 + 11n$ يقبل القسمة على 6

التمرين ـــ 54

ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 71 على 72 ؟

الحـــل ـــ 54

$71 < 72$ إذن : باقي القسمة الإقليدية لـــ 71 على 72 هو 71

التمرين ـــ 55

يحتوي كتاب على 4350 سطرا مكتوبا حيث كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة .
ما هو عدد صفحات هذا الكتاب و ما هو عدد الأسطر المكتوبة على الصفحة الأخيرة

الحل ـــ 55

باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 4350 & 34 \\ \underline{34} & 127 \\ 95 & \\ \underline{68} & \\ 270 & \\ \underline{238} & \\ 32 & \end{array}$$

إذن : $4350 = 34(127) + 32$

منه : عدد صفحات الكتاب هو : $127 + 1 = 128$

و الصفحة الأخيرة تحمل 32 سطرا مكتوبا .

التمرين ـــ 56

علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100} = 13k + 35$ ، ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 100^{100} على 13 ؟

الحل ـــ 56

$100^{100} = 13k + 35$ إذن : باقي قسمة 100^{100} على 13 هو نفسه باقي قسمة 35 على 13

إذن : باقي قسمة 100^{100} على 13 هو 9

التمرين ـــ 57

n و m عددان طبيعيان باقي قسمتهما على 17 هما على الترتيب 8 و 12 . عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $n + m$ ؛ $n\,m$ ؛ m^2 على 17

الحل ـــ 57

نضع $\left\{\begin{array}{l} n = 17k + 8 \text{ حيث } k \in \mathbb{N} \\ m = 17p + 12 \text{ حيث } p \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

منه : $\left\{\begin{array}{l} n + m = 17k + 8 + 17p + 12 \\ n\,m = (17k + 8)(17p + 12) \\ m^2 = (17p + 12)^2 \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l} n + m = 17(k + p) + 20 \\ n\,m = 17k(17p + 12) + 8 \times 17p + 96 \\ m^2 = 17^2 p^2 + 24(17p) + 144 \end{array}\right.$

$$\begin{array}{r|l} 96 & 17 \\ \underline{85} & 5 \\ 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 17 \\ \underline{136} & 8 \\ 8 & \end{array}$$

أي $\left\{\begin{array}{l} n + m = 17(k + p) + 17 + 3 \\ n\,m = 17(17kp + 12k + 8p) + 17(5) + 11 \\ m^2 = 17(17p^2 + 24p) + 17(8) + 8 \end{array}\right.$

منه $\left\{\begin{array}{l} n + m = 17(k + p + 1) + 3 \\ n\,m = 17(17kp + 12k + 8p + 5) + 11 \\ m^2 = 17(17p^2 + 24p + 8) + 8 \end{array}\right.$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} \text{باقي قسمة } n + m \text{ على 17 هو 3} \\ \text{باقي قسمة } n\,m \text{ على 17 هو 11} \\ \text{باقي قسمة } m^2 \text{ على 17 هو 8} \end{array}\right.$

التمرين ـــ 58

عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة n التي يكون باقي قسمتها على 43 مساويا لمربع حاصل هذه القسمة .

الحل ـــ 58

ليكن $n = 43q + r$ حيث $\left\{\begin{array}{l} q \text{ حاصل القسمة} \\ r \text{ باقي القسمة إذن : } 0 \le r < 43 \end{array}\right.$

لدينا $r = q^2$ إذن : $0 \le q^2 < 43$

بما أن q عدد طبيعي فإن القيم الممكنة لـــ q حتى يكون $0 \le q^2 < 43$ هي :

$\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ لأن $7^2 = 49$

إذن : القيم الممكنة لـــ r حيث $r = q^2$ هي : $\{0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36\}$

نتيجة :

قيم q	0	1	2	3	4	5	6
قيم r	0	1	4	9	16	25	36
$n = 43q + r$	0	44	90	138	188	240	294

منه قيم n المطلوبة هي : $\{44 ; 90 ; 138 ; 188 ; 240 ; 294\}$ (n غير معدوم)

التمرين ـــ 59

1 ـــ حول 241312 s (ثانية) إلى الأيام و الساعات و الدقائق و الثواني .

2 ـــ أكتب خوارزمية لتحويل عدد n من الثواني إلى أيام ، ساعات ، دقائق و ثواني .

الحـل ـــ 59

1 ـــ 1 يوم ⟵ 24 ساعة

1 ساعة ⟵ 60 دقيقة

1 دقيقة ⟵ 60 ثانية

إذن : 1 ساعة ⟵ 60×60 ثانية

منه : 1 يوم ⟵ $24 \times 60 \times 60$ ثانية

أي : 1 يوم ⟵ 86400 ثانية

إذن : عدد الأيام المتواجدة في 241312 ثانية هو حاصل قسمة 241312 على 86400

منه : عدد الأيام هو : 2

$$\begin{array}{r|l} 241312 & 86400 \\ \cline{2-2} 172800 & 2 \\ \cline{1-1} 68512 & \end{array}$$

عدد الساعات المتواجدة في 68512 ثانية هو حاصل قسمة 68512 على 3600

منه عدد الساعات هو : 19

$$\begin{array}{r|l} 68512 & 3600 \\ \cline{2-2} 68400 & 19 \\ \cline{1-1} 112 & \end{array}$$

عدد الدقائق المتواجدة هي 112 ثانية هو

حاصل قسمة 112 على 60

إذن : عدد الدقائق هو : 1

$$\begin{array}{r|l} 112 & 60 \\ \cline{2-2} 60 & 1 \\ \cline{1-1} 52 & \end{array}$$

خلاصة : 241312 ثانية فيها يومين و 19 ساعة و دقيقة واحدة و 52 ثانية .

2 ـــ الخوارزمية

1 ـــ نبحث عن r_1 حيث $n = q_1 \times 86400 + r_1$ حيث $0 \le r_1 < 86400$

2 ـــ إذا كان $r_1 \neq 0$ نبحث عن r_2 حيث $r_1 = 3600\, q_2 + r_2$ حيث $0 \le r_2 < 3600$

3 ـــ إذا كان $r_2 \neq 0$ نبحث عن r_3 حيث $r_2 = 60\, q_3 + r_3$ حيث $0 \le r_3 < 60$

نتيجة : العدد n من الثواني مكون من :

q_1 يوم و q_2 ساعة و q_3 دقائق و r_3 ثواني .

التمرين ـــ 60

حاصل القسمة الإقليدية للعدد 1517 على العدد الطبيعي b هو 75

عين b ثم باقي هذه القسمة .

الحـل ـــ 60

ليكن r باقي هذه القسمة حيث $0 \le r < b$

إذن : $1517 = 75\, b + r$

لنجري القسمة الإقليدية لـــ 1517 على 75 كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 1517 & 75 \\ \cline{2-2} 150 & 20 \\ \cline{1-1} 17 & \end{array}$$

منه : $1517 = 75 \times 20 + 17$

إذن : $b = 20$ و $r = 17$

التمرين ـــ 61

1 ـــ أنجز القسمة الإقليدية للعدد 76 على 17

2 ـــ n عدد طبيعي . ما هو حاصل و باقي قسمة العدد $76 + n$ على 17

3 ـــ إستنتج الحالة العامة كما يلي : القسمة الإقليدية لـــ a على b هو q و الباقي r .

ما هو حاصل و باقي قسمة العدد $a + n$ على b

الحـل ـــ 61

1 ـــ

$$\begin{array}{r|l} 76 & 17 \\ \cline{2-2} 68 & 4 \\ \cline{1-1} 8 & \end{array}$$

إذن : $76 = 17(4) + 8$ أي الحاصل 4 و الباقي 8

2 ـ لدينا $76 = 17(4) + 8$ إذن : $n + 76 = n + 17(4) + 8$

أي : $n + 76 = (n + 8) + 17(4)$

منه : باقي قسمة $(n + 76)$ على 17 هو باقي قسمة $(n + 8)$ على 17

و حاصل القسمة هو $4 + q$ حيث q هو حاصل قسمة $(n + 8)$ على 17

مثال : ليكن $n = 20$ إذن : $20 + 8 = 28$ و $28 = 17(1) + 11$

منه : باقي قسمة $(20 + 76)$ على 17 هو 11 ، حاصل قسمة $(20 + 76)$ على 17 هو $1 + 4 = 5$

التحقيق : $20 + 76 = 96$

$$\begin{array}{r|l} 96 & 17 \\ \hline 85 & 5 \\ 11 & \end{array}$$

3 ـ **الحالة العامة :** $a = b\,q + r$ و $n + r = b\,q' + r'$ حيث $0 \le r < b$ و $0 \le r' < b$

إذن : باقي قسمة $(a + n)$ على b هو r' ، حاصل قسمة $(n + a)$ على b هو $q + q'$

<u>التمرين ـ 62</u>

1 ـ بين أن إذا كان a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $(a^2 + b^2)$ عدد فردي فإن a و b مختلفين في الشفعية أحدهما فردي و الآخر زوجي

2 ـ بين أن إذا كان n عدد فردي هو مجموع مربعين فإن n يكتب على الشكل $n = 4k + 1$ حيث $k \in N$

<u>الحـل ـ 62</u>

1 ـ ليكن a و b عددين طبيعيين . نميز الحالات التالية :

a	b	$a^2 + b^2$
$2p$	$2q$	$4p^2 + 4q^2 = 2(2p^2 + 2q^2)$
$2p$	$2q + 1$	$4p^2 + 4q^2 + 4q + 1 = 2(2p^2 + 2q^2 + 2q) + 1$
$2p + 1$	$2q$	$4p^2 + 4p + 4q^2 + 1 = 2(2p^2 + 2p + 2q^2) + 1$
$2p + 1$	$2q + 1$	$4p^2 + 4p + 4q^2 + 4q + 2 = 2(2p^2 + 2p + 2q^2 + 2q + 1)$

نتيجة : الحالات الوحيدة التي يكون فيها $a^2 + b^2$ فردي هي من أجل :

$a = 2p$ و $b = 2q + 1$ أو $a = 2p + 1$ و $b = 2q$ أي a و b مختلفين في الشفعية .

2 ـ n فردي و n مجموع مربعين

ليكن $n = a^2 + b^2$ حيث a و b عددين طبيعيين غير معدومين .

حسب السؤال (1) فإن a و b من شفعيتين مختلفتين .

نضع $a = 2p + 1$ و $b = 2q$ حيث p و q عددين طبيعيين .

إذن :
$$\begin{aligned} n &= (2p + 1)^2 + (2q)^2 \\ &= 4p^2 + 4p + 4q^2 + 1 \\ &= 4(p^2 + p + q^2) + 1 \\ &= 4k + 1 \quad \text{حيث } k = p^2 + p + q^2 \end{aligned}$$

نتيجة : n يكتب من الشكل $4k + 1$ حيث $k \in N$

<u>التمرين ـ 63</u>

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots\ldots + 5^n$

1 ـ برر أن u_n عدد طبيعي .

2 ـ أحسب u_n بدلالة n

3 ـ إستنتج باقي قسمة العدد 5^{n+1} على 4 من أجل كل عدد طبيعي n

<u>الحـل ـ 63</u>

1 ـ من أجل كل n من N فإن 5^n هو عدد طبيعي .

إذن : u_n عدد طبيعي لأنه عبارة عن مجموع أعداد طبيعية .

2 ـ $u_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots\ldots + 5^n$

إذن : u_n هو مجموع $(n+1)$ حد من حدود متتالية هندسية أساسها 5 و حدها الأول 1

منه : $u_n = 1 \times \frac{5^{n+1}-1}{5-1}$ أي $u_n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$

3 ــ بما أن $u_n \in N$ فإن $\frac{5^{n+1}-1}{4} \in N$

أي : 4 يقسم $5^{n+1}-1$

أي : $5^{n+1}-1 = 4k$ حيث $k \in N$

منه : $5^{n+1} = 4k+1$

أي : باقي قسمة 5^{n+1} على 4 هو 1

التمرين ــ 64

1 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $2^{3n}-1$ مضاعف 7

2 ــ إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 في كل من الحالات التالية :

أ) $a = 2^{3n}$ ب) $a = 2^{3n+1}$ ج) $a = 2^{3a+2}$

الحـل ــ 64

1 ــ البرهان بالتراجع :

من أجل $n = 0$: $2^{3n}-1 = 1-1 = 0$

0 مضاعف 7 إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض أن $2^{3n}-1$ مضاعف 7 من أجل $n > 0$ (أي $2^{3n}-1 = 7k$)

هل $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف 7 ؟

$$\begin{aligned}2^{3(n+1)}-1 &= 2^{3n+3}-1\\ &= 2^3 \times 2^{3n}-1\\ &= 8 \times 2^{3n}-1\\ &= 7 \times 2^{3n}+2^{3n}-1\\ &= 7 \times 2^{3n}+7k \quad \text{لأن حسب فرضية التراجع } 2^{3n}-1=7k\\ &= 7(2^{3n}+k)\end{aligned}$$

إذن : $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف 7

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل n من N : $2^{3n}-1$ مضاعف 7

2 ــ ليكن $2^{3n}-1 = 7k$ حيث $k \in N$

أ) إذن : $2^{3n} = 7k+1$

منه : باقي قسمة 2^{3n} على 7 هو 1

ب) $2^{3n+1} = 2 \times 2^{3n} = 2^{3n}+2^{3n} = 2^{3n}-1+2^{3n}-1+2 = 7k+7k+2 = 7(2k)+2$

إذن : باقي قسمة 2^{3n+1} على 7 هو 2

ج) $2^{3n+2} = 4 \times 2^{3n} = 2^{3n}+2^{3n}+2^{3n}+2^{3n} = (2^{3n}-1)+(2^{3n}-1)+(2^{3n}-1)+(2^{3n}-1)+4$

$= 7k+7k+7k+7k+4$

إذن : باقي قسمة 2^{3n+2} على 7 هو 4

التمرين ــ 65

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

1 ــ برهن أن القواسم المشتركة لــ a و (a^2+b) هي نفسها القواسم المشتركة لــ a و b

إستنتج علاقة بين $PGCD(a^2+b\,;a)$ و $PGCD(a\,;b)$

2 ــ برهن أن $PGCD(a+b\,;2a+3b) = PGCD(a\,;b)$

الحـل ــ 65

1 ــ ليكن Δ قاسم مشترك لــ a و a^2+b

$\left.\begin{array}{l}\Delta|_a\\ \Delta|_{a^2+b}\end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l}\Delta|_{a^2}\\ \Delta|_{a^2+b}\end{array}\right\}$ منه : $\Delta|_{a^2+b-a^2}$ أي $\Delta|_b$

إذن : إذا كان Δ قاسم مشترك لــ a و a^2+b فإن Δ قاسم لــ b ....(1)

ليكن الآن Δ قاسم مشترك لـ a و b

$\left.\begin{array}{l}\Delta|a\\ \Delta|b\end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l}\Delta|a^2\\ \Delta|b\end{array}\right\}$ منه : $\Delta|a^2+b$

إذن : إذا كان Δ قاسم مشترك لـ a و b فإن Δ قاسم مشترك لـ a^2+b .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن القواسم المشتركة لـ a و a^2+b هي نفسها القواسم المشتركة لـ a و b و خاصة القاسم المشترك الأكبر .

أي : $PGCD(a^2+b\,;a)=PGCD(a\,;b)$

2 ـ بإجراء القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{r|l} 2a+3b & a+b \\ 2a+2b & 2 \\ \hline b & \end{array}$$

$PGCD(2a+3b\,;a+b)=PGCD(a+b\,;b)$

$$\begin{array}{r|l} a+b & b \\ b & 1 \\ \hline a & \end{array}$$

من جهة أخرى و بإجراء القسمة الإقليدية

$PGCD(a+b\,;b)=PGCD(b\,;a)$

نتيجة : $PGCD(2a+3b\,;a+b)=PGCD(a\,;b)$

التمرين ـ 66

n عدد طبيعي . نضع $a=11n+3$ و $b=13n-1$

1 ـ بين أن : $13a-11b=50$

2 ـ عين كل القيم الممكنة لـ $PGCD(a\,;b)$

3 ـ عين ثنائية $(a\,;b)$ حيث يكون $PGCD(a\,;b)=50$

الحـل ـ 66

1 ـ

$$\begin{aligned}13a-11b&=13(11n+3)-11(13n-1)\\&=143n+39-143n+11\\&=50\end{aligned}$$

2 ـ ليكن $PGCD(a\,;b)=\Delta$

$\left.\begin{array}{l}\Delta|a\\ \Delta|b\end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l}\Delta|13a\\ \Delta|11b\end{array}\right\}$ إذن : $\Delta|13a-11b$ أي $\Delta|50$

منه : القيم الممكنة لـ Δ هي قواسم العدد 50

أي : $PGCD(a\,;b)\in\{1\,;2\,;5\,;10\,;25\,;50\}$

3 ـ لنبحث عن a و b حيث $PGCD(a\,;b)=50$

لدينا $13a-11b=50$

لاحظ أن : $13(6)-11(7)=78-77=1$

إذن : $13(6\times 50)-11(7\times 50)=50$

أي $13(300)-11(350)=50$

إذن : الثنائية $(300\,;350)$ هي حل للمعادلة $13a-11b=50$

منه : $\left.\begin{array}{l}11n+3=300\\13n-1=350\end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l}11n=297\\13n=351\end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l}n=297/11\\n=351/13\end{array}\right\}$

نتيجة : $n=27$ إذن $\left.\begin{array}{l}a=300\\b=350\end{array}\right\}$

التمرين ـ 67

عين كل الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $\left.\begin{array}{l}\mathbf{2a^2+b^2=20992}\\ \mathbf{PGCD(a\,;b)=16}\end{array}\right\}$

الحـل ـ 67

ليكن $\left.\begin{array}{l}a=16x\\b=16y\end{array}\right\}$ حيث $\left.\begin{array}{l}y\in N^*\,;x\in N^*\\PGCD(x\,;y)=1\end{array}\right\}$

إذن : الشرط $2a^2+b^2=20992$ يصبح $2(16x)^2+(16y)^2=20992$

أي : $2(256x^2)+256y^2=20992$

أي $2x^2+y^2=82$

أي $y^2 = 82 - 2x^2$

أي $y^2 = 2(41 - x^2)$

بما أن $y^2 > 0$ فإن $41 - x^2 > 0$ إذن $x^2 < 41$ منه $x < 7$

إذن : القيم الممكنة لـ x هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

منه الجدول التالي :

x	1	2	3	4	5	6
x^2	1	4	9	16	25	36
$41 - x^2$	40	37	32	25	16	5
$2(41 - x^2)$	80	74	64	50	32	10

نتيجة : الحالة الوحيدة التي يكون فيها العدد $2(41 - x^2)$ مربع تام هي من أجل $x = 3$ إذن : $y^2 = 64$ منه $y = 8$

بما أن $PGCD(3 ; 8) = 1$ فإن الثنائية المطلوبة هي :

$(x ; y) = (3 ; 8)$ منه $(a ; b) = (16 \times 3 ; 16 \times 8)$

أي $(a ; b) = (48 ; 128)$

التمرين – 68

a و b عددان طبيعيان غير معدومين . نضع $PGCD(a ; b) = d$

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ التي تحقق $ab + 5d^2 = 35d$

الحـل – 68

ليكن $\begin{cases} a = xd \\ b = yd \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N^* ; x \in N^* \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

إذن :

$$ab + 5d^2 = 35d \Leftrightarrow (xd)(yd) + 5d^2 = 35d$$
$$\Leftrightarrow xyd^2 + 5d^2 = 35d$$
$$\Leftrightarrow (xy + 5)d^2 = 35d$$
$$\Leftrightarrow (xy + 5)d = 35$$ لأن $d \neq 0$

إذن : $(xy + 5)$ يقسم 35

لكن $xy > 0$ إذن : $xy + 5 > 5$

منه : $(xy + 5) \in \{7 ; 35\}$

إذن : $d \in \{5 ; 1\}$

الحالة (1) من أجل $xy + 5 = 7$ إذن : $xy = 2$ و $d = 5$

منه : $(x ; y) \in \{(1 ; 2) ; (2 ; 1)\}$

أي $(a ; b) \in \{(5 ; 10) ; (10 ; 5)\}$

الحالة (2) من أجل $xy + 5 = 35$ إذن : $xy = 30$ و $d = 1$

منه : $(x ; y) \in \{(1 ; 30) ; (2 ; 15) ; (3 ; 10) ; (5 ; 6) ; (6 ; 5) ; (10 ; 3) ; (15 ; 2) ; (30 ; 1)\}$

إذن : $(a ; b) \in \{(1 ; 30) ; (2 ; 15) ; (3 ; 10) ; (5 ; 6) ; (6 ; 5) ; (10 ; 3) ; (15 ; 2) ; (30 ; 1)\}$

خلاصة : الثنائيات $(a ; b)$ المطلوبة هي :

$\{(5 ; 10) ; (10 ; 5) ; (1 ; 30) ; (2 ; 15) ; (3 ; 10) ; (5 ; 6) ; (6 ; 5) ; (10 ; 3) ; (15 ; 2) ; (30 ; 1)\}$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ـ 1

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

نضع $x = 7a - 5b$ و $y = 4a - 3b$

1 ـ برهن أن : $PGCD(|x|;|y|) = PGCD(a;b)$

2 ـ عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(\alpha;\beta)$ حيث $\begin{cases}(7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300\\ PGCD(\alpha;\beta) = 5\end{cases}$

الحـل ـ 1

1 ـ ليكن Δ قاسم مشترك لـ a و b

$\begin{cases}\Delta | a\\ \Delta | b\end{cases}$ إذن ، $\begin{cases}\Delta | 7a \text{ و } \Delta | 5b\\ \Delta | 4a \text{ و } \Delta | 3b\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\Delta | 7a - 5b\\ \Delta | 4a - 3b\end{cases}$ أي $\begin{cases}\Delta | x\\ \Delta | y\end{cases}$

منه : Δ قاسم مشترك لـ x و y .... (1)

ليكن الآن Δ' قاسم مشترك لـ x و y

$\begin{cases}\Delta' | x\\ \Delta' | y\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\Delta' | 4x \text{ و } \Delta' | 7y\\ \Delta' | 3x \text{ و } \Delta' | 5y\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\Delta' | 4x - 7y\\ \Delta' | 3x - 5y\end{cases}$

أي $\begin{cases}\Delta' | 4(7a - 5b) - 7(4a - 3b)\\ \Delta' | 3(7a - 5b) - 5(4a - 3b)\end{cases}$

أي $\begin{cases}\Delta' | b\\ \Delta' | a\end{cases}$

أي Δ' قاسم مشترك لـ a و b .... (2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة لـ x و y

إذن : $PGCD(x;y) = PGCD(a;b)$

و خاصة : $PGCD(|x|;|y|) = PGCD(a;b)$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن $PGCD(7\alpha - 5\beta; 4\alpha - 3\beta) = PGCD(\alpha;\beta)$

إذن : $PGCD(7\alpha - 5\beta; 4\alpha - 3\beta) = 5$

منه : $\begin{cases}7\alpha - 5\beta = 5k\\ 4\alpha - 3\beta = 5q\end{cases}$ حيث $\begin{cases}q \in Z \text{ و } k \in Z\\ PGCD(k;q) = 1\end{cases}$

إذن المساواة $(7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300$ تصبح : $(5k)(5q) = 1300$

أي : $25kq = 1300$

أي : $kq = 52$

منه : $(k;q) \in \{(1;52)(4;13)(13;4)(52;1)(-1;-52)(-4;-13)(-13;-4)(-52;-1)\}$

لنحل الجملة $\begin{cases}7\alpha - 5\beta = 5k\\ 4\alpha - 3\beta = 5q\end{cases}$ أي $\begin{cases}7\alpha - 5\beta - 5k = 0\\ 4\alpha - 3\beta - 5q = 0\end{cases}$

المحدد : $D = \begin{vmatrix}7 & -5\\ 4 & -3\end{vmatrix} = -21 + 20 = -1$

إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & -5k \\ -3 & -5q \end{vmatrix}}{-1} = -(25q - 15k) = 15k - 25q \\ \beta = \dfrac{\begin{vmatrix} -5k & 7 \\ -5q & 4 \end{vmatrix}}{-1} = -(-20k + 35q) = 20k - 35q \end{cases}$$

جدول القيم الممكنة لــ α و β :

k	q	15 k	25 q	$\alpha = 15k - 25q$	20 k	35 q	$\beta = 20k - 35q$
1	52	15	1300	- 1285	20	1820	- 1800
4	13	60	325	- 265	80	455	- 375
13	4	195	100	95	260	140	120
52	1	780	25	755	1040	35	1005
- 1	- 52	- 15	- 1300	1285	- 20	- 1820	1800
- 4	- 13	- 60	- 325	265	- 80	- 455	375
- 13	- 4	- 195	- 100	- 95	- 260	- 140	- 120
- 52	- 1	- 780	- 25	- 755	- 1040	- 35	- 1005

نتيجة : الثنائيات $(\alpha ; \beta)$ المطلوبة هي :

$\{(-1285 ; -1800) ; (-265 ; -375) ; (95 ; 120) ; (755 ; 1005) ; (1285 ; 1800) ; (265 ; 375) ;$
$(-95 ; -120) ; (-755 ; -1005)\}$

التمرين ــ 2

n عدد طبيعي . نضع $a = 3n + 4$ و $b = 8n + 11$

برهن أن a و b اوليان فيما بينهما

الحــل ــ 2

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} 3b - 8a &= 3(8n + 11) - 8(3n + 4) \\ &= 24n + 33 - 24n - 32 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (3 ; -8)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تحقق $\alpha b + \beta a = 1$

منه : حسب نظرية بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين ــ 3

n عدد طبيعي . نضع $a = 7n^2 + 2$ و $b = 4n^2 + 1$

برهن أن a و b أوليان فيما بينهما .

الحــل ــ 3

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} 4a - 7b &= 4(7n^2 + 2) - 7(4n^2 + 1) \\ &= 28n^2 + 8 - 28n^2 - 7 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (4 ; -7)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تحقق $\alpha a + \beta b = 1$

إذن : حسب نظرية بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين ــ 4

n عدد طبيعي غير معدوم .

1 ــ عين القيم الممكنة لــ $PGCD(2n - 1 ; 9n + 4)$

2 ــ برهن أن إذا كان $PGCD(2n - 1 ; 9n + 4) = 17$ فإن 17 يقسم $n + 8$

3 ــ إستنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $PGCD(2n - 1 ; 9n + 4) = 17$

الحــل ــ 4

1 ــ ليكن $PGCD(2n - 1 ; 9n + 4) = \Delta$

$\begin{cases} \Delta \mid 9n + 4 \\ \Delta \mid 2n - 1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \Delta \mid 2(9n + 4) \\ \Delta \mid 9(2n - 1) \end{cases}$ أي $\begin{cases} \Delta \mid 18n + 8 \\ \Delta \mid 18n - 9 \end{cases}$ منه $\Delta \mid 18n + 8 - (18n - 9)$

أي $17 \mid \Delta$ إذن : القيم الممكنة لـ Δ هي $\{1 ; 17\}$

2 ـ ليكن $PGCD(2n-1 ; 9n+4) = 17$

$\begin{cases} 17 \mid 9n+4 \\ 17 \mid 2n-1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 17 \mid 9n+4 \\ 17 \mid 4(2n-1) \end{cases}$ أي $\begin{cases} 17 \mid 9n+4 \\ 17 \mid 8n-4 \end{cases}$ منه $17 \mid 9n+4-(8n-4)$

أي $17 \mid n+8$ و هو المطلوب .

3 ـ يكون $PGCD(2n-1 ; 9n+4) = 17$ إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} 17 \text{ يقسم } n+8 \\ PGCD(2n-1 ; 9n+4) \neq 1 \end{cases}$

إذن : $n+8 = 17k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

أي : $n = 17k - 8$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$ لأن n عدد طبيعي .

تحقيق : $2n-1 = 2(17k-8)-1 = 34k-17$

$9n+4 = 9(17k-8)+4 = 153k-68$

$$\begin{array}{r|l} 153k-68 & 34k-17 \\ \hline 136k-68 & 4 \\ \hline 17k & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 34k-17 & 17k \\ \hline 34k & 2 \\ \hline -17 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17k & 17 \\ \hline 17k & k \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(153k-68 ; 34k-17) = 17$

منه : $PGCD(9n+4 ; 2n-1) = 17$

التمرين ـ 5

n عدد طبيعي . نضع $a = 5n^2+14n+14$ ؛ $b = n+2$

1 ـ برهن أن b قاسم لعدد $5n^2+14n+8$

2 ـ إستنتج أن b يقسم a معناه b يقسم 6

3 ـ عين حسب قيم العدد n باقي قسمة a على b

الحـل ـ 5

1 ـ بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 5n^2+14n+8 & n+2 \\ \hline 5n^2+10n & 5n+4 \\ \hline 4n+8 & \\ 4n+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن : $5n^2+14n+8 = (n+2)(5n+4)$

منه : $n+2$ قاسم لـ $5n^2+14n+8$

أي : b قاسم لـ $5n^2+14n+8$

2 ـ بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 5n^2+14n+14 & n+2 \\ \hline 5n^2+10n & 5n+4 \\ \hline 4n+14 & \\ 4n+8 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

نتيجة : $\dfrac{5n^2+14n+14}{n+2} = 5n+4+\dfrac{6}{n+2}$

إذن : يكون $(n+2)$ قاسم لـ $5n^2+14n+14$ إذا و فقط إذا كان $n+2$ قاسم لـ 6

أي : b يقسم a معناه b يقسم 6

3 ـ نميز الحالات التالية :

أ) b يقسم 6 إذن : $b \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$

أي : $n+2 \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$

منه : $n \in \{0 ; 1 ; 4\}$ لأن n طبيعي .

في هذه الحالة b يقسم a إذن : باقي قسمة a على b هو 0

ب) b لا يقسم 6 إذن : $b \in \mathbb{N} - \{0 ; 1 ; 4\}$

في هذه الحالة باقي قـ ـة a على b هو كمايلي :

قيم n	2	3	$n \geq 5$
باقي قسمة a على b	2	1	6

التمرين ــ 6

n عدد صحيح يختلف عن 1

نضع $a = 3n + 5$ و $b = n - 1$

1 ــ تحقق أن $a = 3b + 8$.

2 ــ أوجد قيم n حتى يكون $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا .

3 ــ نفرض أن n عدد طبيعي . برهن أن $PGCD(a ; b)$ هو قاسم لــ 8

ثم ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لــ $PGCD(a ; b)$

الحــل ــ 6

1 ــ

$$3b + 8 = 3(n-1) + 8$$
$$= 3n - 3 + 8$$
$$= 3n + 5$$
$$= a$$

2 ــ يكون $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا إذا و فقط إذا كان b قاسم لــ a

بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي

$$\begin{array}{r|l} 3n+5 & n-1 \\ \hline 3n-3 & 3 \\ 8 & \end{array}$$

إذن : يكون باقي قسمة $3n + 5$ على $n - 1$ معدوم

إذا و فقط إذا كان $(n - 1)$ قاسم لــ 8

أي : $(n - 1) \in \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; -1 ; -2 ; -4 ; -8\}$

منه : $n \in \{2 ; 3 ; 5 ; 9 ; 0 ; -1 ; -3 ; -7\}$

3 ــ n عدد طبيعي يختلف عن 1

ليكن Δ قاسم مشترك أكبر لــ a و b

$\left.\begin{array}{l}\Delta | a \\ \Delta | b\end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l}\Delta | a \\ \Delta | 3b\end{array}\right\}$ إذن : $\Delta | a - 3b$ أي $\Delta | 8$ لأن $a = 3b + 8$

نتيجة : إذا كان $PGCD(a ; b) = \Delta$ فإن $\Delta | 8$

إذن : $PGCD(a ; b) \in \{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$

حسب خوارزمية إقليدس :

$$\begin{array}{r|l} 3n+5 & n-1 \\ \hline 3n-3 & 3 \\ 8 & \end{array}$$

$PGCD(a ; b) = PGCD(n - 1 ; 8)$

منه الحالات التالية :

أ) إذا كان $n - 1 = 8k$ أي $n = 8k + 1$ فإن $PGCD(a ; b) = 8$

ب) إذا كان $n - 1 = 8k + 4$ أي $n = 8k + 5$ فإن $PGCD(a ; b) = 4$

ج) إذا كان $n - 1 = 4k + 2$ أي $n = 4k + 3$ فإن $PGCD(a ; b) = 2$

د) في الحالات الأخرى : $PGCD(a ; b) = 1$

أمثلة :

من أجل $n = 45$ لدينا : $n = 8(5) + 5$ إذن : $PGCD(a ; b) = 4$

من أجل $n = 100$ لا يمكن كتابة n من أحد الأشكال $8k + 1$ أو $8k + 5$ أو $4k + 3$

إذن : $PGCD(a ; b) = 1$

من أجل $n = 43$ لدينا : $n = 4(10) + 3$ إذن : $PGCD(a ; b) = 2$

التمرين ــ 7

n عدد طبيعي غير معدوم .

نصع $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$

1 ــ برهن أن : $PGCD(\alpha ; \beta) = PGCD(n ; \beta)$

2 ــ إستنتج القيم الممكنة لــ $PGCD(\alpha ; \beta)$

نعتبر العددين a و b حيث $a = 3n^3 + 5n^2 + 2n$ و $b = 3n^2 + 8n + 4$

3 ــ برهن أن العدد $(3n + 2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

4 ــ إستنتج حسب قيم n أن $PGCD(a ; b)$ هو $(3n + 2)$ أو $2(3n + 2)$

5 ــ عين α و β علما أن : $PGCD(a ; b) = 41$

الحـل ـ 7

1 ـ بإجراء خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} n^2+n & n+2 \\ \cline{2-2} n^2+2n & n \\ \hline -n & \end{array}$$

$PGCD(n^2+n\,;\,n+2) = PGCD(-n\,;\,n+2)$

أي : $PGCD(\alpha\,;\,\beta) = PGCD(|-n|\,;\,\beta)$

أي : $PGCD(\alpha\,;\,\beta) = PGCD(n\,;\,\beta)$ و هو المطلوب

2 ـ لدينا $PGCD(\alpha\,;\,\beta) = PGCD(n\,;\,\beta)$ منه حسب خوارزمية إقليدس :

$$\begin{array}{r|l} n+2 & n \\ \cline{2-2} n & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

إذن : القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha\,;\,\beta)$ هي $\{1\,;\,2\}$ كمايلي :

$PGCD(\alpha\,;\,\beta) = PGCD(n\,;\,2)$

نتيجة :

إذا كان n زوجي فإن $PGCD(n\,;\,2) = 2$

إذا كان n فردي فإن $PGCD(n\,;\,2) = 1$

3 ـ نجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 3n^3+5n^2+2n & 3n+2 \\ \cline{2-2} 3n^3+2n^2 & n^2+n \\ \hline 3n^2+2n & \\ 3n^2+2n & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3n^2+8n+4 & 3n+2 \\ \cline{2-2} 3n^2+2n & n+2 \\ \hline 6n+4 & \\ 6n+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} (3n+2) \text{ قاسم لـ } 3n^3+5n^2+2n \\ (3n+2) \text{ قاسم لـ } 3n^2+8n+4 \end{array}\right\}$

إذن : $3n+2$ هو قاسم مشترك لـ $3n^3+5n^2+2n$ و $3n^2+8n+4$

أي : $\left.\begin{array}{l} 3n^3+5n^2+2n = (3n+2)(n^2+n) \\ 3n^2+8n+4 = (3n+2)(n+2) \end{array}\right\}$

منه : $PGCD(3n^3+5n^2+2n\,;\,3n^2+8n+4) = (3n+2)\times PGCD(n^2+n\,;\,n+2)$

لكن حسب السؤال (2) فإن $PGCD(n^2+n\,;\,n+2) \in \{1\,;\,2\}$

إذن : $PGCD(3n^3+5n^2+2n\,;\,3n^2+8n+4) \in \{3n+2\,;\,2(3n+2)\}$ كمايلي :

إذا كان n زوجي : $PGCD(3n^3+5n^2+2n\,;\,3n^2+8n+4) = 2(3n+2)$

إذا كان n فردي : $PGCD(3n^3+5n^2+2n\,;\,3n^2+8n+4) = 3n+2$

5 ـ $PGCD(a\,;\,b) = 41$ إذن : $3n+2 = 41$

منه : $3n = 39$

أي $n = 13$

منه : $\left.\begin{array}{l} \alpha = (13)^2+13 = 169+13 = 182 \\ \beta = 13+2 = 15 \end{array}\right\}$

التمرين ـ 8

n عدد طبيعي . نضع $a = 9n+1$ ؛ $b = 9n-1$

1 ـ أوجد علاقة بين a و b مستقلة عن n

2 ـ عين $PGCD(a\,;\,b)$ في حالة n عدد زوجي ثم في حالة n عدد فردي .

3 ـ إستنتج باقي قسمة العدد $81n^2$ على 4 في حالة n عدد فردي .

الحـل ـ 8

1 ـ $a-b = 9n+1-(9n-1) = 9n+1-9n+1 = 2$

نتيجة : من أجل كل n من N : $a-b = 2$

2 ـ ليكن $PGCD(a\,;\,b) = \Delta$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} \Delta|_a \\ \Delta|_b \end{array}\right.$ أي $\Delta|_{a-b}$ أي $\Delta|_2$ منه $\Delta \in \{1\,;\,2\}$

ليكن n فردي إذن : $n = 2k+1$ حيث $k \in N$

منه : $\left.\begin{array}{l} a = 9(2k+1)+1 \\ b = 9(2k+1)-1 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a = 18k+10 \\ b = 18k+8 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a = 2(9k+5) \\ b = 2(9k+4) \end{array}\right\}$

إذن : $PGCD(a ; b) = 2$

ليكن n زوجي إذن : $n = 2k$ حيث $k \in N$

منه : $\left.\begin{array}{l} a = 9(2k) + 1 \\ b = 9(2k) - 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} a = 18k + 1 \\ b = 18k - 1 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a \text{ فردي} \\ b \text{ فردي} \end{array}\right\}$

إذن : $PGCD(a ; b) = 1$

خلاصة : إذا كان n زوجي فإن $PGCD(a ; b) = 1$

إذا كان n فردي فإن $PGCD(a ; b) = 2$

3 ــ n عدد فردي إذن : $n = 2k + 1$ حيث $k \in N$

منه :

$$81n^2 = 81(2k+1)^2 = 81(4k^2 + 4k + 1) = 4 \times 81k^2 + 4 \times 81k + 81$$
$$= 4 \times 81k^2 + 4 \times 81k + 80 + 1$$
$$= 4(81k^2 + 81k + 20) + 1$$
$$= 4k' + 1 \quad \text{حيث} \quad k' = 81k^2 + 81k + 20$$

إذن : باقي قسمة $81n^2$ على 4 هو 1 من أجل n فردي .

<u>التمرين ــ 9</u>

n عدد طبيعي . نضع $a = 7n^2 + 4$ ؛ $b = n^2 + 1$

1 ــ برهن أن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم لــ 3

2 ــ إشرح لماذا يكون $n^2 = 3k - 1$ في حالة $PGCD(a ; b) = 3$

3 ــ بين باستعمال فصل الحالات أن هذا غير ممكن .

4 ــ إستنتج $PGCD(a ; b)$

<u>الحــل ــ 9</u>

1 ــ ليكن Δ قاسم مشترك لــ a و b

$\left.\begin{array}{l} \Delta|a \\ \Delta|b \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} \Delta|a \\ \Delta|7b \end{array}\right\}$ إذن $\Delta|7b - a$ أي $\Delta|7(n^2+1) - (7n^2+4)$

منه : $\Delta|3$ و هو المطلوب.

2 ــ في حالة $PGCD(a ; b) = 3$ فإن 3 يقسم b أي : $b = 3k$ حيث $k \in N$

منه : $n^2 + 1 = 3k$ أي $n^2 = 3k - 1$ و هو المطلوب

3 ــ لنثبت أن من أجل كل n من N فإن n^2 لا يكتب من الشكل $3k - 1$

الحالة (1) $n = 3p$

إذن : $n^2 = 9p^2 = 3(3p^2) = 3k$

الحالة (2) $n = 3p + 1$

إذن : $n^2 = (3p+1)^2 = 9p^2 + 6p + 1 = 3(3p^2 + 2p) + 1 = 3k + 1$

الحالة (3) $n = 3p + 2$

إذن : $n^2 = (3p+2)^2 = 9p^2 + 12p + 4 = 9p^2 + 12p + 3 + 1 = 3(3p^2 + 4p + 1) + 1 = 3k + 1$

خلاصة : في كل الحالات العدد n^2 لا يكتب من الشكل $3k - 1$

4 ــ بما أن العدد n^2 لا يمكن أن يكتب من الشكل $3k - 1$ فإن $n^2 + 1$ لا يمكن أن يكتب من الشكل $3k$

أي العدد 3 لا يمكن أن يقسم b

منه : $PGCD(a ; b) \neq 3$

أي : $PGCD(a ; b) = 1$ العددين (a و b أوليين فيما بينهما)

<u>التمرين ــ 10</u>

x و y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما

نضع $s = x + y$ و $p = xy$

1 ــ برهن أن x و s أوليان فيما بينهما و أن y و s أوليان فيما بينهما

2 ــ باستعمال البرهان بالخلف برهن أن s و p أوليان فيما بينهما

3 ــ برهن أن العددين s و p من شفعيتين مختلفتين أحدهما زوجي و الآخر فردي

4 ــ عين القواسم الموجبة للعدد 84

5 ــ عين الأعداد الأولية فيما بينها x و y حيث $x\,y = 84$

6 ــ عين عددين طبيعيين a و b يحققان الشرطان التاليان $\begin{cases} a + b = 84 \\ a\,b = d^2 \end{cases}$ حيث $d = PGCD(a\,;\,b)$

الحـل ــ 10

1 ــ x و y أوليان فيما بينهما إذن حسب بيزو فإن توجد ثنائية $(\alpha\,;\,\beta)$ من الأعداد الصحيحة حيث $1 = \alpha\,x + \beta\,y$ ....(1)

لدينا $s = x + y$ إذن : $\begin{cases} \alpha\,s = \alpha\,x + \alpha\,y \ \ ....\ (2) \\ \beta\,s = \beta\,x + \beta\,y \ \ ....\ (3) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $1 - \alpha\,s = \alpha\,x + \beta\,y - \alpha x - \alpha\,y$

أي : $1 - \alpha\,s = (\beta - \alpha)\,y$

أي : $1 = \alpha\,s + (\beta - \alpha)\,y$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha\,;\,\beta - \alpha)$ من الأعداد الصحيحة حيث $1 = \alpha\,s + (\beta - \alpha)\,y$ إذن : s و y أوليان فيما بينهما .

بطرح (3) من (1) نحصل على : $1 - \beta\,s = \alpha\,x + \beta\,y - \beta\,x - \beta\,y$

أي $1 - \beta\,s = (\alpha - \beta)\,x$

أي $1 = \beta\,s + (\alpha - \beta)\,x$

إذن : توجد ثنائية $(\beta\,;\,\alpha - \beta)$ من الأعداد الصحيحة حيث $1 = \beta\,s + (\alpha - \beta)\,x$

إذن : s و x أوليان فيما بينهما .

خلاصة : s و x أوليان فيما بينهما .

s و y أوليان فيما بينهما .

2 ــ ليكن $PGCD(s\,;\,p) = \Delta$ حيث $\Delta > 1$

$\begin{cases} \Delta \mid s \\ \Delta \mid p \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \Delta \mid x + y \\ \Delta \mid x\,y \end{cases}$

منه $\begin{cases} \Delta \mid x^2 + x\,y \\ \Delta \mid x\,y \end{cases}$

أي $\Delta \mid x^2 + x\,y - x\,y$

أي $\Delta \mid x^2$ تناقض لأن $PGCD(x\,;\,s) = 1$

منه : العددين s و p أوليان فيما بينهما .

3 ــ p و s أوليان فيما بينهما إذن : لا يمكن أن يكونا زوجيين معا .

هل يمكن أن يكون p فردي و s فردي ؟

إذا كان p فردي فإن x فردي و y فردي إذن s زوجي

منه : لا يمكن أن يكون p فردي و s فردي .

خلاصة : العددين s و p من شفعيتين مختلفتين .

4 ــ قواسم 84 الموجبة هي : $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\,;\,7\,;12\,;\,14\,;\,21\,;\,28\,;\,42\,;\,84\}$

5 ــ $\begin{cases} x\,y = 84 \\ x \text{ و } y \text{ أوليان فيما بينهما} \end{cases}$ إذن : $(x\,;\,y) \in \{(1\,;\,84)\,;\,(3\,;\,28)\,;\,(4\,;\,21)\,;\,(7\,;\,12)\,;\,(12\,;\,7)\,;\,(21\,;\,4)\,;$
$(28\,;\,3)\,;\,(84\,;\,1)\}$

6 ــ $\begin{cases} a + b = 84 \\ a\,b = d^2 \end{cases}$

نضع $\begin{cases} a = d\,x \\ b = d\,y \end{cases}$ حيث $PGCD(x\,;\,y) = 1$

إذن $\begin{cases} d\,x + d\,y = 84 \\ d\,x\,d\,y = d^2 \end{cases}$

أي $\begin{cases} d(x+y)=84 \\ x\,y\,d^2=d^2 \end{cases}$

أي $\begin{cases} d(x+y)=84 \\ x\,y=1 \end{cases}$

منه $x=y=1$

إذن : $2\,d=84$ أي $d=42$

منه : $a=42$ و $b=42$

تحقيق : $PGCD(42\,;42)=42$

إذن : $d=42$ منه : $d^2=42\times 42$

التمرين — 11

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n=1^3+2^3+\ldots\ldots\ldots+n^3$

1 — برهن بالتراجع أن من أجل كل n من N^* : $S_n=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2 — تحقق أن : $PGCD(k\,;k+1)=1$ حيث $k\in N^*$

3 — برهن أن من أجل $k\in N^*$ فإن : $PGCD(S_{2k}\,;S_{2k+1})=(2\,k+1)^2$

4 — عين $PGCD(2\,k+1\,;2\,k+3)$ من أجل $k\in N^*$

5 — أحسب $PGCD(S_{2k+1}\,;S_{2k+2})$ من أجل $k\in N$

6 — إستنتج حسب قيم العدد الطبيعي n : $PGCD(S_n\,;S_{n+1})$

ملاحظة : في هذا التمرين يمكن إستعمال النتيجة التالية : $PGCD(a\,;b)=1$ يكافئ $PGCD(a^2\,;b^2)=1$

الحــل — 11

1 — البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية : $1+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

من أجل $n=1$: $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2=\left[\dfrac{1(2)}{2}\right]^2=1$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=1$.

نفرض أن : $1+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ من أجل $n>1$

هل $1+2^3+\ldots\ldots\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$ ؟

$$1+2^3+\ldots\ldots\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3$$
$$=(n+1)^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2+n+1\right]$$
$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4\,n+4}{4}\right)$$
$$=(n+1)^2\,\frac{(n+2)^2}{4}$$
$$=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل $n\in N^*$: $S_n=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

2 — من أجل كل k من N^* لدينا : $(k+1)+(-1)\,k=1$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha\,;\beta)=(1\,;-1)$ من الأعداد الصحيحة

تحقق $\alpha(k+1)+\beta\,k=1$

منه : حسب بيزو فإن $PGCD(k+1\,;k)=1$

3 ـ ليكن : $k \in N^*$

$$S_{2k} = \left[\frac{2k(2k+1)}{2}\right]^2 = k^2(2k+1)^2$$

$$S_{2k+1} = \left[\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{2(k+1)(2k+1)}{2}\right]^2 = (k+1)^2(2k+1)^2$$

إذن :
$$PGCD(S_{2k}\,;S_{2k+1}) = PGCD(k^2(2k+1)^2\,;(k+1)^2(2k+1)^2)$$
$$= (2k+1)^2\,PGCD(k^2\,;(k+1)^2)$$
$$= (2k+1)^2\,PGCD(k\,;k+1) \quad \text{لأن } PGCD(k\,;k+1)=1$$
$$= (2k+1)^2$$

4 ـ بإجراء القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{c|c} 2k+3 & 2k+1 \\ \hline 2k+1 & 1 \\ 2 & \end{array}$$

$PGCD(2k+3\,;2k+1) = PGCD(2k+1\,;2)$

لكن من أجل كل k من N فإن $(2k+1)$ فردي .

إذن : $PGCD(2k+1\,;2)=1$

منه : $PGCD(2k+3\,;2k+1)=1$

5 ـ
$$S_{2k+1} = (k+1)^2(2k+1)^2$$
$$S_{2k+2} = \left[\frac{(2k+2)(2k+3)}{2}\right]^2 = \left[\frac{2(k+1)(2k+3)}{2}\right]^2 = (k+1)^2(2k+3)^2$$

إذن :
$$PGCD(S_{2k+1}\,;S_{2k+2}) = PGCD((k+1)^2(2k+1)^2\,;(k+1)^2(2k+3)^2)$$
$$= (k+1)^2\,PGCD((2k+1)^2\,;(2k+3)^2)$$
$$= (k+1)^2 \quad \text{لأن } PGCD(2k+1\,;2k+3)=1$$

6 ـ نميز حالتين :

الأولى : n زوجي إذن : $n=2k$ منه
$$PGCD(S_n\,;S_{n+1}) = PGCD(S_{2k}\,;S_{2k+1}) = (2k+1)^2 = (n+1)^2$$

الثانية : n فردي إذن : $n=2k+1$ منه
$$PGCD(S_n\,;S_{n+1}) = PGCD(S_{2k+1}\,;S_{2k+2}) = (k+1)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

التمرين ـ 12

n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي (E) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكتب من الشكل $9+a^2$ حيث $a \in N^*$

لتكن المعادلة $9+a^2=2^n$ .....(I) ذات المجهول a حيث n عدد طبيعي أكبر من 3 .

1 ـ برهن أن إذا كان a حلا للمعادلة (I) فإن a فردي .

2 ـ باستعمال القسمة على 4 برهن أن المعادلة (I) لا تقبل حلا .

لتكن المعادلة $9+a^2=3^n$ .....(II) ذات المجهول a حيث n عدد طبيعي أكبر من 2

3 ـ برهن بالتراجع أن من أجل كل n من N^* : $3^{2n}-1$ يقبل القسمة على 4

4 ـ إستنتج بواقي القسمة الإقليدية لـ 3^{2n} و 3^{2n+1} على 4

5 ـ برهن أن إذا كان a حلا للمعادلة (II) فإن a زوجي و إستنتج أن n زوجي .

6 ـ حلل العدد $3^{2p}-a^2$ ثم إستنتج أن المعادلة (II) لا تقبل حلا

لتكن المعادلة $9+a^2=5^n$ .....(III) ذات المجهول a و n عدد طبيعي أكبر من 1

7 ـ باستعمال القسمة على 3 برهن أن إذا كان n فردي فإن المعادلة (III) لا تقبل حلا .

8 ـ في حالة n زوجي برهن أن يوجد عدد طبيعي وحيد a حيث يكون العدد $9+a^2$ من قوى العدد 5

الحل ـ 12

1 ـ ليكن a حل للمعادلة (I) إذن : $9+a^2=2^n$

منه : $9=2^n-a^2$

إذا كان a زوجي نضع $a=2k$ حيث $k \in N$

منه : $9=2^n-(2k)^2$

أي $9=2^n-4k^2$

أي $9 = 2(2^{n-1} - 2k^2)$ تناقض لأن 2 لا يقسم 9

نتيجة : a ليس زوجي

إذن : إذا كان a حل للمعادلة (I) فإن a فردي

2 ـ ليكن a حل للمعادلة I إذن : $a = 2k + 1$ حيث $k \in N$

المعادلة (I) تكافئ $9 + (2k+1)^2 = 2^n$

تكافئ $9 + 4k^2 + 4k + 1 = 2^n$

تكافئ $10 + 4k^2 + 4k = 2^n$

تكافئ $10 = 2^n - 4k^2 - 4k$

تكافئ $10 = 4(2^{n-2} - k^2 - k)$ تناقض لأن 4 لا يقسم 10

نتيجة : $a = 2k + 1$ لا يمكن أن يكون حلا للمعادلة (I)

خلاصة : المعادلة (I) لا تقبل حلولا .

3 ـ **البرهان بالتراجع :** من أجل $n > 2$: $3^{2n} - 1$ مضاعف 4

من أجل $n = 3$: $3^{2(3)} - 1 = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$

بما أن $728 = 4 \times 182$ فإن الخاصية صحيحة من أجل $n = 3$

نفرض أن $3^{2n} - 1$ مضاعف 4 من أجل $n > 3$ أي $3^{2n} - 1 = 4k$

هل $3^{2(n+1)} - 1$ مضاعف 4 ؟

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n} \times 3^2 - 1$$
$$= 9 \times 3^{2n} - 1$$
$$= 8 \times 3^{2n} + 3^{2n} - 1$$
$$= 8 \times 3^{2n} + 4k$$ حسب فرضية التراجع $3^{2n} - 1 = 4k$
$$= 4(2 \times 3^{2n} + k)$$
$$= 4k'$$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل $n > 2$ فإن $3^{2n} - 1$ مضاعف 4

4 ـ $3^{2n} - 1 = 4k$ إذن : $3^{2n} = 4k + 1$ منه باقي قسمة 3^{2n} على 4 هو 1

$3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n}$ إذن : $3^{2n+1} = 3(4k + 1)$ لأن $3^{2n} = 4k + 1$

منه : $3^{2n+1} = 12k + 3$

أي : $3^{2n+1} = 4k' + 3$ حيث $k' = 3k$

إذن : باقي قسمة 3^{2n+1} على 4 هو 3

5 ـ ليكن a حل للمعادلة (II)

إذا كان a فردي نضع $a = 2k + 1$ حيث $k \in N$

المعادلة (II) تكافئ : $9 + (2k+1)^2 = 3^n$

تكافئ $9 + 4k^2 + 4k + 1 = 3^n$

تكافئ $10 + 4k^2 + 4k = 3^n$

تكافئ $10 + 4k^2 + 4k = 4q + 1$ إذا كان n زوجي .
أو $10 + 4k^2 + 4k = 4q + 3$ إذا كان n فردي .

تكافئ $9 = 4(q - k^2 - k)$ إذا كان n زوجي .
أو $7 = 4(q - k^2 - k)$ إذا كان n فردي .

لكن 4 لا يقسم 9 و 4 لا يقسم 7

إذن : تناقض

منه : a ليس فردي

نتيجة : إذا كان a حل للمعادلة (II) فإن a زوجي .

في هذه الحالة $a = 2k$

إذن : المعادلة تكافئ $9 + 4k^2 = 3^n$

تكافئ $9 + 4k^2 = 4q + 1$ إذا كان n زوجي .
أو $9 + 4k^2 = 4q + 3$ إذا كان n فردي .

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 8 = 4(q-k^2) \\ 6 = 4(q-k^2) \end{array}\right.$ أو إذا كان n زوجي . / إذا كان n فردي .

لكن 4 لا يقسم 6 إذن : n ليس فردي

منه : n زوجي

6 ــ $3^{2p} - a^2 = (3^p - a)(3^p + a)$

ليكن a حل للمعادلة (II) حيث $n = 2p$ $(p \neq 0)$

المعادلة (II) تكافئ $9 = 3^{2p} - a^2$

تكافئ $9 = (3^p - a)(3^p + a)$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 3^p - a = 1 \\ 3^p + a = 9 \end{array}\right.$ لأن $p \neq 0$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 2 \times 3^p = 10 \\ a = 9 - 3^p \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 3^p = 5 \\ a = 9 - 3^p \end{array}\right.$ تناقض . لأن 3 لا يقسم 5

نتيجة : المعادلة (II) لا تقبل حلولا

7 ــ ليكن n فردي إذن : $n = 2k + 1$ حيث $k \in N^*$ لأن $n > 2$

المعادلة (III) تكافئ $9 + a^2 = 5^{2k+1}$

تكافئ $9 = 5^{2k+1} - a^2$ تناقض لأن $5^{2k+1} - a^2$ لا يقبل القسمة على 3

إذن : إذا كان n فردي فإن المعادلة (III) لا تقبل حلا

8 ــ ليكن n زوجي حيث $n = 2k$

المعادلة (III) تكافئ $9 + a^2 = 5^{2k}$

تكافئ $9 = (5^k - a)(5^k + a)$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 5^k - a = 1 \\ 5^k + a = 9 \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 2 \times 5^k = 10 \\ a = 5^k - 1 \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 5^k = 5 \\ a = 5^k - 1 \end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} k = 1 \\ a = 4 \end{array}\right.$

نتيجة : المعادلة $9 + a^2 = 5^n$ تقبل حلا وحيدا $a = 4$

إذن : يوجد عدد طبيعي وحيد a حيث يكون $9 + a^2$ من قوى العدد 5

التمرين ــ 13

a عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و k عدد طبيعي كيفي .

1 ــ أثبت أن إذا كان d قاسم للعددين $(a^k - 1)$ و $a^{k+1} - 1$ فإن d قاسم للعدد $a^k(a-1)$

2 ــ أعط القيم الممكنة لــ $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بــ $\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \ ; \ u_0 = 0 \\ \text{من أجل كل عدد طبيعي } n : \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{array}\right.$

3 ــ تحقق أن العددين u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما .

4 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

5 ــ برهن أن من اجل كل عدد طبيعي n : u_n هو عدد طبيعي

6 ــ عين $PGCD(u_n ; u_{n+1})$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بــ $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

7 ــ برهن أن (v_n) متتالية هندسية ثم أحسب u_n بدلالة n

8 ــ إستنتج $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$

الحـــل ــ 13

1 ــ ليكن d قاسم للعددين $a^k - 1$ و $a^{k+1} - 1$

إذن : d قاسم لـــ $(a^{k+1} - 1) - (a^k - 1)$

منه : d قاسم لـــ $a^{k+1} - a^k$

أي : d قاسم لـــ $a^k(a-1)$

2 ــ ليكن $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1) = \Delta$

$\left.\begin{array}{l} \Delta \mid 4^{k+1} - 1 \\ \Delta \mid 4^k - 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\Delta \mid 4^{k+1} - 1 - (4^k - 1)$

أي $\Delta \mid 4^{k+1} - 4^k$

أي $\Delta \mid 4^k(4-1)$

أي $\Delta \mid 3 \times 4^k$

نتيجة : القيم الممكنة لـــ $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$ هي قواسم العدد 3×4^k

3 ــ $u_2 = 5u_1 - 4u_0 = 5 - 0 = 5$

$u_3 = 5u_2 - 4u_1 = 5(5) - 4(1) = 21$

$PGCD(5 ; 21) = 1$ إذن : u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما .

4 ــ البرهان بالتراجع عن الخاصية : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

من أجل $n = 0$: $u_1 = 1 = 4(0) + 1$

إذن : $u_1 = 4u_0 + 1$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

من أجل $n = 1$: $u_2 = 5 = 4(1) + 1$

إذن : $u_2 = 4u_1 + 1$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن : $u_{n+1} = 4u_n + 1$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$ ؟

لدينا : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$ .... (1)

لكن حسب فرضية التراجع : $u_{n+1} = 4u_n + 1$ منه $4u_n = u_{n+1} - 1$

منه : المساواة (1) تصبح : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - (u_{n+1} - 1)$

أي : $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

5 ــ البرهان بالتراجع عن الخاصية : u_n عدد طبيعي

من أجل $n = 0$ ؛ $n = 1$ ؛ $n = 2$ الخاصية محققة لأن u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 أعداد طبيعية

نفرض أن u_n عدد طبيعي من أجل $n > 2$

هل u_{n+1} عدد طبيعي ؟

$u_n \in N$ إذن : $4 \times u_n \in N$

منه : $(4u_n + 1) \in N$ أي $u_{n+1} \in N$

أي الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n عدد طبيعي .

6 ــ حسب السؤال (4) فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

منه $u_{n+1} - 4u_n = 1$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (1 ; -4)$ من الأعداد الصحيحة حيث $\alpha u_{n+1} + \beta u_n = 1$

إذن : حسب بيزو فإن u_{n+1} و u_n أوليان فيما بينهما

أي $PGCD(u_{n+1} ; u_n) = 1$

7 ــ $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3}$

$$= (4\,u_n + 1) + \frac{1}{3}$$
$$= 4\,u_n + \frac{4}{3}$$
$$= 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 4\,v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 و حدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

منه : $v_n = \frac{1}{3}(4)^n$

أي : $u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4)^n$

منه : $u_n = \frac{1}{3}(4)^n - \frac{1}{3}$

أي $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

8 ـ حسب السؤال (7) فإن :

$\left.\begin{array}{l} u_k = \frac{1}{3}(4^k - 1) \\ u_{k+1} = \frac{1}{3}(4^{k+1} - 1) \end{array}\right\}$ منه $\left.\begin{array}{l} 3\,u_k = 4^k - 1 \\ 3\,u_{k+1} = 4^{k+1} - 1 \end{array}\right\}$

إذن : $PGCD(4^{k+1} - 1\,;\,4^k - 1) = PGCD(3\,u_{k+1}\,;\,3\,u_k)$
$= 3\,PGCD(u_{k+1}\,;\,u_k)$
$= 3$ لأن $PGCD(u_{k+1}\,;\,u_k) = 1$

التمرين ـ 14

نقول عن العدد الطبيعي p أنه أولي إذا وفقط إذا قبل قاسمين بالضبط هما 1 و p

نعتبر في المجموعة N^2 المعادلة $x^2 + y^2 = p^2$ .....(E) ذات المجهولين الطبيعيين x و y حيث p عدد طبيعي أولي

1 ـ نضع $p = 2$ بين أن المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $N^* \times N^*$

نفرض أن $p \neq 2$ و $(x\,;\,y)$ حل للمعادلة (E)

2 ـ برهن أن العددين x و y أحدهما زوجي و الآخر فردي .

3 ـ برهن أن p لا يقسم x و لا يقسم y .

4 ـ برهن أن $PGCD(x^2\,;\,y^2)$ يقسم p^2

5 ـ إستنتج أن العددين x و y أوليان فيما بينهما .

نفرض أن p هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي $p = u^2 + v^2$ حيث u و v عددين طبيعيين غير معدومين

6 ـ تحقق أن الثنائية $(|u^2 - v^2|\,;\,2\,u\,v)$ حل للمعادلة (E)

7 ـ أعط حلا للمعادلة (E) من أجل $p = 5$ ثم في حالة $p = 13$

الحـل ـ 14

1 ـ من أجل $p = 2$ المعادلة (E) تكافئ $x^2 + y^2 = 4$
تكافئ $x^2 = 4 - y^2$
تكافئ $x^2 = (2 - y)(2 + y)$

إذن : $2 - y > 0$ لأن $x^2 > 0$

منه : $y < 2$

أي : $y = 1$ لأن y غير معدوم .

لكن من أجل $y = 1$ نحصل على : $x^2 = 3$ إذن : لا يوجد x من N^* يحقق المعادلة

نتيجة : المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $N^* \times N^*$ من أجل $p = 2$

2 ـ إذا كان $(x\,;\,y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x^2 + y^2 = p^2$

لدينا p فردي لأن (p أولي و $p \neq 2$) إذن : p^2 فردي

إذا كان x زوجي و y زوجي فإن x^2 زوجي و y^2 زوجي أي $x^2 + y^2$ زوجي . تناقض

إذا كان x فردي و y فردي فإن x^2 فردي و y^2 فردي أي $x^2 + y^2$ زوجي . تناقض

نتيجة : إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x و y أحدهما زوجي و الآخر فردي

3 – لنفرض أن p يقسم x $(x \neq 0)$

إذن : يوجد عدد طبيعي α حيث $x = p\,\alpha$ منه $x^2 = p^2\,\alpha^2$

إذن : المعادلة (E) تكافئ $p^2\,\alpha^2 + y^2 = p^2$

تكافئ $y^2 = p^2 - p^2\,\alpha^2$

تكافئ $y^2 = p^2(1 - \alpha^2)$

تكافئ $y^2 = p^2(1 - \alpha)(1 + \alpha)$

لكن $y^2 > 0$ إذن : $1 - \alpha > 0$

أي $\alpha < 1$

أي $\alpha = 0$

منه $x = 0$ تناقض . إذن : p لا يقسم x

لنفرض الآن أن p يقسم y $(y \neq 0)$

إذن : يوجد عدد طبيعي α حيث $y = p\,\alpha$ منه $y^2 = p^2\,\alpha^2$

إذن : المعادلة (E) تكافئ $x^2 + p^2\,\alpha^2 = p^2$

تكافئ $x^2 = p^2(1 - \alpha^2)$

تكافئ $x^2 = p^2(1 - \alpha)(1 + \alpha)$

إذن : $1 - \alpha > 0$ لأن $x^2 > 0$

إذن : $\alpha < 1$

منه $\alpha = 0$ أي $y = 0$ تناقض إذن : p لا يقسم y

نتيجة : إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن p لا يقسم x و لا يقسم y

4 – ليكن $PGCD(x^2 ; y^2) = \Delta$

إذن : $\left.\begin{array}{l}\Delta \mid x^2 \\ \Delta \mid y^2\end{array}\right\}$ $\Delta \mid x^2 + y^2$ منه $\Delta \mid p^2$ و هو المطلوب

5 – حسب السؤال (4) فإن $PGCD(x^2 ; y^2)$ يقسم p^2

إذن : $PGCD(x^2 ; y^2) \in \{1 ; p ; p^2\}$ لأن p أولي إذن قواسم p^2 هي $\{1 ; p ; p^2\}$

لكن p لا يقسم x و لا يقسم y

إذن p لا يقسم x^2 و لا يقسم y^2

منه : $PGCD(x^2 ; y^2) \neq p$ و $PGCD(x^2 ; y^2) \neq p^2$

أي $PGCD(x^2 ; y^2) = 1$

منه : $PGCD(x ; y) = 1$

أي : x و y أوليان فيما بينهما .

6 – ليكن $p = u^2 + v^2$ حيث $u \geq v$ إذن : $|u^2 - v^2| = u^2 - v^2$

لدينا : $(u^2 - v^2)^2 + (2\,u\,v)^2 = u^4 - 2\,u^2\,v^2 + v^4 + 4\,u^2\,v^2$

$= u^4 + 2\,u^2\,v^2 + v^4$

$= (u^2 + v^2)^2$

$= p^2$

إذن : الثنائية $(|u^2 - v^2| ; 2\,u\,v)$ حل للمعادلة (E)

7 – من أجل $p = 5$ لدينا : $(4)^2 + (3)^2 = 16 + 9$

$= 25$

$= (5)^2$

إذن : $(4 ; 3)$ حل للمعادلة (E)

من أجل $p = 13$ لدينا : $(12)^2 + (5)^2 = 144 + 25$

$= 169$

$= (13)^2$

إذن : $(12 ; 5)$ حل للمعادلة (E)

التمرين ــ 15

لتكن (x_n) و (y_n) متتاليتين معرفتين بـــ $x_0 = 1$ ؛ $y_0 = 8$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3} x_n + \frac{1}{3} y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3} x_n + \frac{8}{3} y_n + 5 \end{cases}$$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $5x - y + 3 = 0$

1 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن النقطة $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ)

2 ــ إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $x_{n+1} = 4x_n + 2$

3 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $x_n \in N$

4 ــ إستنتج أن $y_n \in N$

نضع $PGCD(x_n ; y_n) = d$

5 ــ ما هي القيم الممكنة لــ d

6 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n = \frac{5}{3} \times 4^n - \frac{2}{3}$

7 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $5 \times 4^n - 2$ مضاعف 6

الحــل ــ 15

1 ــ لتكن الخاصية : من أجل كل n من N : النقطة $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى (Δ)

من أجل $n = 0$: $x_0 = 1$ ؛ $y_0 = 8$

$5(1) - (8) + 3 = -3 + 3 = 0$ إذن : $M_0(x_0 ; y_0)$ تنتمي إلى (Δ)

من أجل $n = 1$:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3}(1) + \frac{1}{3}(8) + 1 = 6 \\ y_1 = \frac{20}{3}(1) + \frac{8}{3}(8) + 5 = 33 \end{cases}$$

$5(6) - (33) + 3 = 33 - 33 = 0$ إذن : $M_1(x_1 ; y_1)$ تنتمي إلى (Δ)

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ و $n = 1$

نفرض أن النقطة $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى (Δ) من أجل $n > 1$

هل النقطة $M_{n+1}(x_{n+1} ; y_{n+1})$ تنتمي إلى (Δ) ؟

$$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 5\left(\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1\right) - \left(\frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5\right) + 3$$
$$= \frac{35}{3}x_n + \frac{5}{3}y_n + 5 - \frac{20}{3}x_n - \frac{8}{3}y_n - 5 + 3$$
$$= \frac{15}{3}x_n - \frac{3}{3}y_n + 3$$
$$= 5x_n - y_n + 3$$

$= 0$ لأن $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى (Δ)

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن النقطة $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى (Δ)

2 ــ $M_{n+1}(x_{n+1} ; y_{n+1})$ تنتمي إلى (Δ) إذن : $5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 0$

منه : $y_{n+1} = 5x_{n+1} + 3$

لكن : $y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5$

منه : $5x_{n+1} + 3 = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5$

أي $5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 2$ ....(1)

من جهة أخرى لدينا $5x_n - y_n + 3 = 0$

إذن : $y_n = 5x_n + 3$

منه المساواة (1) تصبح : $5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}(5x_n + 3) + 2$

أي : $5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{40}{3}x_n + 8 + 2$

أي : $5x_{n+1} = \frac{60}{3}x_n + 10$

أي : $5x_{n+1} = 20x_n + 10$

منه : $x_{n+1} = 4x_n + 2$

3 ـ لتكن الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n \in N$ (بالتراجع)

من أجل $n = 0$ الخاصية محققة لأن $1 \in N$ و $x_0 = 1$

من أجل $n = 1$ الخاصية محققة لأن $6 \in N$ و $x_1 = 6$

نفرض أن $x_n \in N$ من أجل $n > 1$

هل $x_{n+1} \in N$ ؟

لدينا : $x_n \in N$ إذن : $4x_n \in N$

منه : $4x_n + 2 \in N$

أي $x_{n+1} \in N$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $x_n \in N$

4 ـ لدينا : $5x_n - y_n + 3 = 0$ إذن : $y_n = 5x_n + 3$

منه : $y_n \in N$ لأن $(x_n \in N)$

5 ـ ليكن $PGCD(x_n ; y_n) = d$

$\left.\begin{array}{l} d \mid x_n \\ d \mid y_n \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} d \mid 5x_n \\ d \mid y_n \end{array}\right\}$ إذن : $d \mid 5x_n - y_n$

لكن $5x_n - y_n + 3 = 0$

أي $5x_n - y_n = -3$

منه : $d \mid -3$

أي $d \mid 3$

إذن : القيم الممكنة لـ d هي $\{1 ; 3\}$

6 ـ لتكن الخاصية : من أجل كل n من N : $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}$ (بالتراجع)

من أجل $n = 0$: $x_0 = 1$

$\frac{5}{3}(4)^0 - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

من أجل $n = 1$: $x_1 = 6$

$\frac{5}{3}(4)^1 - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} - \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن : $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}$ من أجل $x > 1$

هل $x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{2}{3}$ ؟

لدينا حسب السؤال (2) : $x_{n+1} = 4x_n + 2$

منه : $x_{n+1} = 4\left[\frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}\right] + 2$

أي : $x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{8}{3} + 2$

أي : $x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{2}{3}$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل n من N : $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}$

7 ـ لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}[5 \times 4^n - 2]$

بما أن $x_n \in N$ فإن العدد $5 \times 4^n - 2$ مضاعف 3

من جهة أخرى $5 \times 4^n - 2 = 5 \times 2^{2n} - 2 = 2(5 \times 2^{2n-1} - 1)$ إذن : $5 \times 4^n - 2$ مضاعف 2 $(n \neq 0)$

خلاصة : $\begin{cases} 5 \times 4^n - 2 \text{ مضاعف } 3 \\ 5 \times 4^n - 2 \text{ مضاعف } 2 \end{cases}$

إذن : $5 \times 4^n - 2$ مضاعف 6 من أجل $n \neq 0$

حذار ! من أجل $n = 0$ فإن $5 \times 4^0 - 2 = 3$ إذن : $5 \times 4^n - 2$ ليس مضاعف 6

التمرين ـ 16

1 ـ x عدد طبيعي . برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k :

$(x - 1)(1 + x + x^2 + \dots\dots + x^{k-1}) = x^k - 1$

2 ـ d و n عددان طبيعيان غير معدومان حيث d يقسم n

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي a أكبر تماما من 1 العدد $a^d - 1$ يقسم العدد $a^n - 1$

3 ـ إستنتج أن العدد $2^{2010} - 1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9

4 ـ عين $PGCD(63 ; 60)$

5 ـ بين أن : $(a^{63} - 1) - (a^{60} - 1)\, a^3 = a^3 - 1$

6 ـ برهن أن : $PGCD(a^{63} - 1 ; a^{60} - 1) = a^3 - 1$

7 ـ إستنتج قيمة $PGCD(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1)$

الحل ـ 16

1 ـ من أجل $x = 0$ فإن : $(0 - 1)(1) = 0 - 1 = -1$ إذن الخاصية محققة.

من أجل $x = 1$ فإن : $(x - 1)(1) = 1 - 1 = 0$ إذن الخاصية محققة.

من أجل $x > 1$ فإن : $(x - 1)(1 + x + x^2 + \dots\dots + x^{k-1}) = (x - 1)\frac{x^k - 1}{x - 1}$

$= x^k - 1$ لأن $1 + x + x^2 + \dots\dots + x^{k-1}$ هو مجموع k حد من حدود

متتالية هندسية أساسها x و حدها الأول 1

2 ـ d يقسم n إذن : يوجد k من N^* حيث $n = d\,k$

حسب السؤال الأول فإن : من أجل $x = a^d$ نحصل على :

$(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \dots\dots + a^{dk-d}) = a^{dk} - 1$

أي : $(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \dots\dots + a^{dk-d}) = a^n - 1$

منه : $a^d - 1$ يقسم $a^n - 1$ لأن : $(1 + a^d + \dots\dots + a^{dk-d}) \in N$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن : $(x - 1)(1 + x + \dots\dots + x^{k-1}) = x^k - 1$.

3 ـ لدينا : $2^3 - 1 = 7$

نضع $d = 3$ و $n = 2010$ و $a = 2$

إذن : d يقسم n لأن 3 يقسم 2010

منه $a^d - 1$ يقسم $a^n - 1$

أي $a^3 - 1$ يقسم $a^{2010} - 1$

أي $2^3 - 1$ يقسم $2^{2010} - 1$

أي 7 يقسم $2^{2010} - 1$ و هو المطلوب

من جهة أخرى لدينا : $2^6 - 1 = 63$

نضع $d = 6$ و $n = 2010$ و $a = 2$

إذن : d يقسم n لأن 6 يقسم 2010

منه $a^d - 1$ يقسم $a^n - 1$

أي $2^6 - 1$ يقسم $2^{2010} - 1$

أي 63 يقسم $2^{2010} - 1$ و هو المطلوب

نتيجة : 63 يقسم $2^{2010} - 1$ و $63 = 7 \times 9$

إذن : 9 يقسم $2^{2010} - 1$.

4 ـ حسب خوارزمية إقليدس :

$$\begin{array}{r|l} 63 & 60 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 3 \\ \hline 0 & 20 \end{array}$$

إذن : $PGCD(63 ; 60) = 3$

5 ـ $(a^{63} - 1) - (a^{60} - 1)\, a^3 = a^{63} - 1 - a^{63} + a^3$

$= a^3 - 1$ و هو المطلوب .

6 ـ ليكن $PGCD(a^{63} - 1 ; a^{60} - 1) = \Delta$

إذن : $\begin{cases} \Delta \mid a^{63} - 1 \\ \Delta \mid a^{60} - 1 \end{cases}$ منه $\begin{cases} \Delta \mid a^{63} - 1 \\ \Delta \mid a^3(a^{60} - 1) \end{cases}$ أي $\Delta \mid a^{63} - 1 - a^3(a^{60} - 1)$

أي $\Delta \mid a^3 - 1$ ....(1)

من جهة أخرى : لدينا حسب السؤال (2) : $\begin{cases} a^3 - 1 \mid a^{60} - 1 & \text{لأن 3 يقسم 60} \\ a^3 - 1 \mid a^{63} - 1 & \text{لأن 3 يقسم 63} \end{cases}$

إذن : $a^3 - 1 \mid \Delta$ ....(2)

نتيجة : $\Delta \mid a^3 - 1$ و $a^3 - 1 \mid \Delta$ إذن : $\Delta = a^3 - 1$

إذن : $\Delta = PGCD(a^{63} - 1 ; a^{60} - 1)$

أي : $PGCD(a^{63} - 1 ; a^{60} - 1) = a^3 - 1$

7 ـ بوضع $a = 2$ فإن : $PGCD(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1) = 2^3 - 1 = 7$