

الدوال الأصلية

Kimou.

تعريف :

f دالة معرفة على مجال I جزئي من $\mathbb{R}$
نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F تحقق الشروط التالية :

$$(1) \quad F \text{ قابلة للاشتقاق على } I$$

$$(2) \quad \text{من أجل كل } x \text{ من المجال } I : F'(x) = f(x)$$

$$g : x \mapsto 3x^2 - 2$$

$$\text{أمثلة : } f : x \mapsto x^3 - 2x + 1$$

الدالة f هي الدالة الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ لأن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
من أجل كل x من $\mathbb{R} : f'(x) = g(x)$

ملاحظة : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن كل دالة معرفة من الشكل $x \mapsto F(x) + k$ حيث k ثابت حقيقي هي أيضا دالة أصلية للدالة f على المجال I لأنها تحقق شروط التعريف .

مثلا : في المثال السابق الدالة $h : x \mapsto x^3 - 2x + 7$ هي أيضا دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

لأن من أجل كل x من $\mathbb{R} : h'(x) = 3x^2 - 2$

وجود الدوال الأصلية :

نظرية :

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل عدد لا نهائي من الدوال الأصلية على هذا المجال

خاصية : f دالة مستمرة على مجال I . $x_0 \in I$ عدد حقيقي من المجال I و $y_0 \in \mathbb{R}$ من بين الدوال الأصلية غير المنتهية للدالة

f على المجال I توجد دالة وحيدة F تحقق الشروط :
 $\left. \begin{array}{l} F \text{ دالة أصلية للدالة } f \\ F(x_0) = y_0 \end{array} \right\}$

نشاط - 1

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} : f(x) = 2x + \cos x$

1 - عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

2 - عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تحقق $F(\pi) = -1$

الحل - 1

1 - الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي كل الدوال التي تكتب من الشكل :

$$x \mapsto x^2 + \sin x + k \quad \text{حيث } k \text{ عدد حقيقي ثابت .}$$

2 - لتكن F الدالة الأصلية لـ f حيث $F(x) = x^2 + \sin x + k$

$$\text{لدينا : } F(\pi) = \pi^2 + \sin \pi + k = \pi^2 + k$$

$$\text{إذن : } F(\pi) = -1 \Leftrightarrow \pi^2 + k = -1$$

$$\Leftrightarrow k = -1 - \pi^2$$

منه : الدالة F المطلوبة هي : $F(x) = x^2 + \sin x - \pi^2 - 1$

نشاط - 2

أثبت بطريقتين مختلفتين أن الدالتين F و G المعرفتان على $]2; +\infty[$ كمايلي هما دالتان أصليتان لنفس الدالة التي يطلب تعيينها :

$$G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x \quad ; \quad F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-2}$$

الحل - 2

كل من الدالتين F و G قابلتين للاشتقاق على المجال $]2; +\infty[$ إذن : يكفي أن يكون $F'(x) = G'(x)$ من أجل كل x من $]2; +\infty[$

$$F'(x) = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2-2x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$$G'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-1)}{(x-2)^2} + 1 = \frac{-3 + (x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

نتيجة : من أجل كل x من $]2; +\infty[$: $F'(x) = G'(x)$ إذن F و G هما دالتان أصليتان للدالة

$$x \mapsto \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} \text{ على المجال }]2; +\infty[$$

يمكن إثبات أن $F'(x) = G'(x)$ بطريقة أخرى كما يلي :

$$G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x = \frac{2x-1+x^2-2x}{x-2} = \frac{x^2-1}{x-2}$$

$$F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-2} = \frac{x^2-2x+3-4+4}{x-2} = \frac{x^2-1-2(x-2)}{x-2} = \frac{x^2-1}{x-2} - 2$$

نتيجة : من أجل كل x من $]2; +\infty[$: $F(x) = G(x) - 2$

إذن : $F'(x) = G'(x)$

منه : F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة على $]2; +\infty[$

الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة :

الدالة f	الدالة الأصلية للدالة f	ملاحظات
a	$ax + b$	$x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$x \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$x \in]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$x \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$x \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$	$x \in \mathbb{R}$ et $x \neq (2k+1)\pi/2$
$u' \times u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	$n \in \mathbb{N}$ u قابلة للاشتقاق
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ u قابلة للاشتقاق
$\frac{u'}{u}$	$\ln u(x) + c$	u قابلة للاشتقاق $u(x) \neq 0$
$u' e^u$	e^u	u قابلة للاشتقاق

أمثلة : باستعمال الجدول السابق عين الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$x \in \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 3x + 5 \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{R}^* : g(x) = \frac{2}{x^2} \quad (2)$$

$$x \in]0; +\infty[: h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (3)$$

$$x \in \mathbb{R} : k(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2 \quad (4)$$

$$x \in \mathbb{R} : \phi(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (5)$$

الحل :

$$(1) \text{ لدينا : الدالة الأصلية لـ } x \mapsto x^3 \text{ هي } x \mapsto \frac{1}{3+1} x^{3+1} = \frac{1}{4} x^4$$

و الدالة الأصلية لـ $x \mapsto x$ هي : $x \mapsto \frac{1}{1+1} x^{1+1} = \frac{1}{2} x^2$

و الدالة الأصلية لـ $x \mapsto 5$ هي : $x \mapsto 5x$
منه : الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^3 - 3x + 5$ هي الدالة :

$$c \in \mathbb{R} \text{ حيث } x \mapsto \frac{1}{4} x^4 - 3\left(\frac{1}{2} x^2\right) + 5x + c$$

$$x \mapsto \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + c \quad \text{أي}$$

$$g(x) = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2} \quad (2)$$

لدينا : الدالة الأصلية لـ $x \mapsto x^{-2}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$

منه : الدالة الأصلية لـ $x \mapsto 2x^{-2}$ هي $x \mapsto -\frac{2}{x} + c$

أي : الدالة الأصلية لـ g هي الدالة $x \mapsto -\frac{2}{x} + c$

$$h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 3x^{-3} - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \quad (3)$$

الدالة الأصلية لـ $x \mapsto x^{-3}$ هي $x \mapsto \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} = -\frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

الدالة الأصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ هي $x \mapsto \sqrt{x}$

منه : الدالة الأصلية لـ $x \mapsto 3x^{-3} - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ هي الدالة $x \mapsto 3\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - 2\sqrt{x} + c$

أي : الدالة الأصلية لـ h هي الدالة $x \mapsto -\frac{3}{2x^2} - 2\sqrt{x} + c$

(4) نضع $u(x) = x^2 + 2x + 5$ إذن : $u'(x) = 2x + 2$ أي $u'(x) = 2(x+1)$

منه : $(x+1) = \frac{u'(x)}{2}$ إذن : $k(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 5)^2$

أي : $k(x) = \frac{1}{2} u'(x)[u(x)]^2$

لكن الدالة الأصلية لـ $x \mapsto u'(x)[u(x)]^2$ هي : $x \mapsto \frac{1}{2+1} [u(x)]^{2+1} = \frac{1}{3} [u(x)]^3$

إذن : الدالة الأصلية لـ $\frac{1}{2} u'(x) \times [u(x)]^2$ هي : $x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} [u(x)]^3 = \frac{1}{6} [u(x)]^3$

منه : الدالة الأصلية لـ k هي الدالة : $x \mapsto \frac{1}{6} (x^2 + 2x + 5)^3 + c$

(5) نضع $u(x) = x^2 + 1$ إذن : $u'(x) = 2x$ منه : $x = \frac{1}{2} u'(x)$

$$\text{إذن : } \phi(x) = \frac{3 \times \frac{1}{2} u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{أي} \quad \phi(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \right)$$

لكن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ هي الدالة $x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$

منه : الدالة الأصلية للدالة $\frac{3}{2} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \right)$ هي الدالة $x \mapsto \frac{3}{2} (2\sqrt{u(x)})$

أي : الدالة الأصلية لـ ϕ هي : $x \mapsto 3\sqrt{x^2 + 1} + c$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I

فإن حلول المعادلة التفاضلة $y' = f(x)$ على المجال I هي الدوال y حيث $y = F(x) + c$ مع c ثابت حقيقي .

مثلا : حلول المعادلة التفاضلية $y' = x^2 - 2x + 5$ على $\mathbb{R}$ هي مجموعة الدوال y حيث $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$

حيث $c \in \mathbb{R}$ لأن الدالة $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 2x + 5$ على $\mathbb{R}$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لها على I وكانت G دالة أصلية للدالة F على المجال I فإن حلول المعادلة $y'' = f(x)$ على المجال I هي الدوال y من الشكل : $y = G(x) + ax + b$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة .

مثلا : حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \sin x$ هي الدوال y من الشكل :

$y = -\sin x + ax + b$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة لأن :

الدالة $x \mapsto -\cos x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sin x$ على $\mathbb{R}$

و الدالة $x \mapsto -\sin x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto -\cos x$ على $\mathbb{R}$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' + w^2 y = 0$

إذا كان w عدد حقيقي غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' + w^2 y = 0$ على $\mathbb{R}$ هي مجموعة الدوال y من

الشكل : $y = a \cos wx + b \sin wx$ حيث a و b أعداد حقيقية

مثلا : حلول المعادلة $y'' + 3y = 0$ هي الدوال من الشكل : $y = a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x$ حيث

a و b أعداد حقيقية ثابتة .

نشاط :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' = 3x^2 - 2x + 5$ ثم إستنتج الحل F الذي يحقق $F(1) = -2$

الحل :

حلول المعادلة $y' = 3x^2 - 2x + 5$ هي الدوال من الشكل :

$y = x^3 - x^2 + 5x + c$ حيث c ثابت حقيقي .

إذن : $F(x) = x^3 - x^2 + 5x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

منه : $F(1) = -2 \Leftrightarrow 1 - 1 + 5 + c = -2$

$\Leftrightarrow c = -7$

أخيرا : $F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$

نشاط :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y'' + \pi^2 y = 0$ ثم إستنتج الحل F الذي يحقق الشروط : $F(1/2) = 2/3$ و $F'(2/3) = 0$

الحل :

حلول المعادلة $y'' + \pi^2 y = 0$ هي الدوال من الشكل $y = a \cos \pi x + b \sin \pi x$

منه : $F(x) = a \cos \pi x + b \sin \pi x$ حيث a و b أعداد حقيقية

إذن : $F(1/2) = 2/3 \Leftrightarrow a \cos \frac{\pi}{2} + b \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 0 + b = 2/3$

$\Leftrightarrow b = 2/3$

من جهة أخرى : $F'(x) = -a \pi \sin \pi x + b \pi \cos \pi x$

إذن : $F'(2/3) = 0 \Leftrightarrow -a \pi \sin \frac{2\pi}{3} + b \pi \cos \frac{2\pi}{3} = 0$

$\Leftrightarrow -a \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{3} \pi \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ لأن $b = 2/3$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}a = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

نتيجة : $F(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \cos \pi x + \frac{2}{3} \sin \pi x$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y'' = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

الحل 1

لدينا الدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
و الدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + cx + b$
منه : حلول المعادلة $y'' = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ هي الدوال y حيث $y = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + cx + b$ حيث c و b أعداد ثابتة .

التمرين 2

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I

$$I =]0 ; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x} \quad -1$$

$$a \neq 0 : I = \mathbb{R} : f(x) = e^{ax+b} \quad -2$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{x^2-x-3} \quad -3$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \cos(2x) e^{\sin 2x} \quad -4$$

الحل 2

1 - لاحظ أن : مشتقة $x \mapsto \frac{1}{x}$ هي $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

منه : الدالة $x \mapsto e^{1/x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$

أي : الدالة $x \mapsto -e^{1/x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$

2 - لاحظ أن : مشتقة $x \mapsto ax + b$ هي a حيث $a \neq 0$

منه : الدالة $x \mapsto e^{ax+b}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto a e^{ax+b}$

إذن : الدالة $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto e^{ax+b}$ حيث $a \neq 0$

3 - لاحظ أن : مشتقة $x \mapsto x^2 - x - 3$ هي $x \mapsto 2x - 1 = -2\left(-x + \frac{1}{2}\right)$

منه : الدالة $x \mapsto e^{x^2-x-3}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto -2\left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{x^2-x-3}$

أي : الدالة $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{x^2-x-3}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{x^2-x-3}$

4 - لاحظ أن : مشتقة $x \mapsto \sin 2x$ هي $x \mapsto 2 \cos 2x$

منه : الدالة $x \mapsto e^{\sin 2x}$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto 2 \cos(2x) e^{\sin 2x}$

أي : الدالة $x \mapsto \frac{1}{2} e^{\sin 2x}$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \cos(2x) e^{\sin 2x}$

التمرين 3

عين في كل حالة من الحالات التالية الدالة الأصلية للدالة f على المجال I

$$I =]-2 ; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x+2} \quad -1$$

$$I =]1; +\infty[: f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad -2$$

$$I =]0; \pi[: f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad -3$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{-2e^x}{e^x + 1} \quad -4$$

الحل - 3

1 - لاحظ أن مشتقة $x \mapsto x+2$ هي $x \mapsto 1$
 منه : الدالة $x \mapsto \ln|x+2|$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ على $\mathbb{R} - \{-2\}$
 بما أن على المجال $I : x+2 > 0$ فإن الدالة $x \mapsto \ln(x+2)$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x+2}$

2 - مشتقة الدالة $x \mapsto x^2 - 1$ هي الدالة $x \mapsto 2x$

إذن : الدالة $x \mapsto \ln|x^2 - 1|$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 1}$ على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

أي الدالة $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 1}$ لأن $x^2 - 1 > 0$ على I

منه : الدالة $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$ على I

3 - مشتقة الدالة $x \mapsto \sin x$ هي $x \mapsto \cos x$

إذن : الدالة $x \mapsto \ln|\sin x|$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ من أجل $\sin x \neq 0$

أي : الدالة $x \mapsto \ln|\sin x|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ على المجال I

4 - مشتقة الدالة $x \mapsto e^x + 1$ هي الدالة $x \mapsto e^x$ على $\mathbb{R}$

منه : الدالة $x \mapsto \ln|e^x + 1|$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$

أي الدالة $x \mapsto -2 \ln|e^x + 1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{-2e^x}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$

تمرين - 4

تكن f دالة معرفة على $] -2; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x+3}{(x+2)^2}$

1 - عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من المجال $] -2; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $] -2; +\infty[$

الحل - 4

$$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{a(x+2)+b}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x) = \frac{2x+3}{(x+2)^2}$ نحصل على $\left. \begin{matrix} a=2 \\ b=-1 \end{matrix} \right\}$ أي $\left. \begin{matrix} a=2 \\ 2a+b=3 \end{matrix} \right\}$

نتيجة : من أجل كل x من $] -2; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

2 - الدالة $x \mapsto \ln|x+2|$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ على $\mathbb{R} - \{-2\}$

إذن : الدالة $x \mapsto 2 \ln(x+2)$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{2}{x+2}$ على $] -2; +\infty[$ لأن $x+2 > 0$

الدالة $x \mapsto \frac{1}{-2+1} (x+2)^{-2+1}$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2} = (x+2)^{-2}$ على $\mathbb{R} - \{-2\}$

أي : الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+2}$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ على المجال $] -2; +\infty[$

نتيجة : الدالة $x \mapsto 2 \ln(x+2) - \left(\frac{-1}{x+2}\right)$ أصلية للدالة f على $]-2; +\infty[$

أي الدالة $x \mapsto \frac{1}{x+2} + \ln(x+2)^2$ أصلية للدالة f على $]-2; +\infty[$

تحقيق : نضع $F(x) = \frac{1}{x+2} + \ln(x+2)^2$

$$F'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{2(x+2)}{(x+2)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$F'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+2} = f(x) \quad \text{منه :}$$

إذن : فعلا F هي دالة أصلية لـ f على $]-2; +\infty[$

التمرين 5

f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$

1 - عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = a + \frac{b e^x}{e^x - 1}$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

الحل 5

1 - من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$a + \frac{b e^x}{e^x - 1} = \frac{a e^x - a + b e^x}{e^x - 1} = \frac{(a+b) e^x - a}{e^x - 1}$$

$$b = 1 - a \quad \left. \begin{array}{l} \text{أي} \\ a = 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ -a = -2 \end{array} \right\} \quad \text{نحصل على} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1} \quad \text{بالمطابقة مع}$$

$$\left. \begin{array}{l} b = -1 \\ a = 2 \end{array} \right\} \quad \text{أي}$$

$$f(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1} \quad \text{نتيجة :}$$

2 - لدينا : الدالة $x \mapsto 2x$ أصلية للدالة 2

و الدالة $x \mapsto \ln|e^x - 1|$ أصلية للدالة $\frac{e^x}{e^x - 1}$

منه : الدالة $x \mapsto 2x - \ln|e^x - 1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1}$

أي $F(x) = 2x - \ln|e^x - 1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$

التمرين 6

في كل حالة من الحالات التالية بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D

$$D = \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} \quad ; \quad F(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 1} \quad -1$$

$$D = \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2} \quad ; \quad F(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3} \quad -2$$

$$D =]-\infty; 2[\quad : \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \quad ; \quad F(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \quad -3$$

$$D =]0; +\infty[\quad : \quad f(x) = \frac{3x + 1}{2x\sqrt{x}} \quad ; \quad F(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x}} \quad -4$$

الحل 6

1 - F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{(2x - 3)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 3x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x^3 + 2x - 3x^2 - 3 - 2x^3 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

إذن : F هي دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$
2 - F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{x^2 + 3 - 2x(x + 1)}{(x^2 + 3)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 3 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 3)^2} \\
 &= \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}
 \end{aligned}$$

$f(x) = F$: إذن : F هي دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

3 - F قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 2[$ و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{(2x - 5)(x - 2) - (x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2} \\
 &= \frac{2x^2 - 4x - 5x + 10 - x^2 + 5x - 7}{(x - 2)^2} \\
 &= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}
 \end{aligned}$$

$f(x) = F$: إذن : F هي دالة أصلية لـ f على $]-\infty; 2[$

4 - F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x - 1)}{(\sqrt{x})^2} \\
 &= \frac{6x - (3x - 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x})^2} \\
 &= \frac{3x + 1}{2x\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$f(x) = F$: إذن : F هي دالة أصلية لـ f على $]0; +\infty[$

التمرين - 7

F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$G(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} - 1 : x \in]-\infty; 0[\\ x^2 + \frac{1}{x} + 2 : x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

1 - بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}^*$

2 - هل يوجد عدد حقيقي ثابت c حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $G(x) = F(x) + c$ ؟

الحل - 7

$$G(x) = \begin{cases} F(x) - 1 : x \in]-\infty; 0[\\ F(x) + 2 : x \in]0; +\infty[\end{cases} \quad \text{إذن : } G'(x) = \begin{cases} F'(x) : x \in]-\infty; 0[\\ F'(x) : x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

أي : $G'(x) = F'(x) : x \in \mathbb{R}^*$

منه : الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة على المجموعة $\mathbb{R}^*$

2 - إذا وجد عدد حقيقي c حيث $G(x) = F(x) + c$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن :

$$\text{مستحيل} \begin{cases} -1 = c \\ 2 = c \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} - 1 = x^2 + \frac{1}{x} + c \\ x^2 + \frac{1}{x} + 2 = x^2 + \frac{1}{x} + c \end{cases}$$

إذن : لا يوجد أي عدد حقيقي c يحقق : من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ $G(x) = F(x) + c$

التمرين 8

$$f(x) = x + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^3} \quad \text{بـ} \quad]0; +\infty[\text{ على دالة معرفة}$$

$$1 - \text{تحقق أن الدالة } F \text{ المعرفة بـ} \quad F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} \quad \text{هي دالة أصلية لـ } f \text{ على }]0; +\infty[$$

$$2 - \text{استنتج الدالة } G \text{ الأصلية للدالة } f \text{ و التي تنعدم من أجل } x = 11/8$$

الحل 8

$$1 - \text{من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[: \quad F'(x) = \frac{1}{2} (2x) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{3}{8} \left(-\frac{2}{x^4}\right)$$

$$F'(x) = x + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^3} = f(x) \quad \text{منه :}$$

إذن : F أصلية لـ f على $]0; +\infty[$

$$2 - G \text{ أصلية لـ } f \text{ إذن : } G(x) = F(x) + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + c \quad \text{أي :}$$

$$G\left(\frac{11}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{11}{8}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \frac{8}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \left(\frac{8}{11}\right)^2 + c = 0 \quad \text{منه :}$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{121}{64 \times 2} + \frac{8}{11 \times 2} - \frac{24}{11 \times 11}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-121 \times 11 \times 11 + 8 \times 11 \times 64 - 24 \times 64 \times 2}{11 \times 11 \times 64 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-12081}{15488}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{12081}{15488} \quad \text{نتيجة : الدالة } G \text{ المطلوبة هي}$$

التمرين 9

$$f(x) = 3x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{بـ} \quad]0; +\infty[\text{ على دالة معرفة}$$

$$1 - \text{تحقق أن الدالة } F \text{ المعرفة بـ} \quad F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2+1) \quad \text{هي دالة أصلية لـ } f \text{ على المجال }]0; +\infty[$$

$$2 - \text{عين الدالة } G \text{ الأصلية للدالة } f \text{ و التي تنعدم من أجل } x = 1$$

الحل 9

$$1 - \text{من أجل كل } x \text{ من المجال }]0; +\infty[\text{ لدينا : } F'(x) = \frac{3}{2}(2x) + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} = f(x) \quad \text{إذن : } F \text{ هي دالة أصلية لـ } f \text{ على }]0; +\infty[$$

$$2 - G \text{ دالة أصلية لـ } f \text{ إذن : } G(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2+1) + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

$$G(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \ln 1 - \ln(1+1) + c = 0 \quad \text{منه :}$$

$$\Leftrightarrow c = \ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$\text{نتيجة : } G(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2+1) + \ln 2 - \frac{3}{2} \quad \text{هي الدالة المطلوبة.}$$

التمرين 10

$$F \text{ و } G \text{ دالتان معرفتان على } \mathbb{R} \text{ كمايلي : } F(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1} ; \quad G(x) = \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}$ بحساب الفرق $F(x) - G(x)$ ثم بحساب المشتقات .

الحل - 10

1 - بحساب الفرق $F(x) - G(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1} - \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{5x^2 - x + 3 + 6x + 2}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{5(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

إذن : $F(x) - G(x) = 5$ منه : $F(x) = G(x) + 5$

أي : $F'(x) = G'(x)$

أي F و G أصليتان لنفس الدالة .

2 - بحساب المشتقات :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(10x - 1)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(5x^2 - x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{10x^3 + 10x^2 + 10x - x^2 - x - 1 - 10x^3 + 2x^2 - 6x - 5x^2 + x - 3}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2} \\ G'(x) &= \frac{-6(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(-6x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{-6x^2 - 6x - 6 + 12x^2 + 4x + 6x + 2}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

نتيجة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $F'(x) = G'(x)$ إذن : F و G أصليتان لنفس الدالة .

التمرين - 11

أوجد الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1 \quad -1$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{3} \quad -2$$

$$f(x) = -3 \sin x + 2 \cos x + 1 \quad -3$$

$$f(x) = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \sin(x + \pi) \quad -4$$

$$f(x) = x^2 + 2x - e^x + \frac{2x}{x^2 + 1} \quad -5$$

الحل - 11

$$F(x) = \frac{1}{4+1} x^{4+1} - 4\left(\frac{1}{3+1} x^{3+1}\right) + 3\left(\frac{1}{2+1} x^{2+1}\right) - 6\left(\frac{1}{1+1} x^{1+1}\right) + x + c \quad -1$$

$$f \text{ الدالة الأصلية لـ } = \frac{1}{5} x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + x + c$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3} \quad -2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3+1} x^{3+1}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2+1} x^{2+1}\right) - \frac{2}{3} x + c \quad \text{منه}$$

$$f \text{ الدالة الأصلية لـ } = \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{9} x^3 - \frac{2}{3} x + c$$

- 3 - الدالة الأصلية لـ f $F(x) = 3 \cos x + 2 \sin x + x + c$
- 4 - الدالة الأصلية لـ f $F(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{2}) - 2 \cos(x + \pi) + c$
- 5 - الدالة الأصلية لـ f $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + x^2 - e^x + \ln(x^2 + 1) + c$

التمرين 12

أوجد الدوال الأصلية للدوال التالية على المجال $]0; +\infty[$

1 - $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ - 4 $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1$

2 - $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4}$ - 5 $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x}$

3 - $f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}$

الحل 12

1 - $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = 2 - x^{-2}$ - 1

منه : $F(x) = 2x - \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = 2x + x^{-1} = 2x + \frac{1}{x}$

2 - $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}$ - 2

منه : $F(x) = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$

3 - $f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} = 1 + x^{-3} - 2x^{-4}$ - 3

منه : $F(x) = x + \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} - 2(\frac{1}{-4+1} x^{-4+1}) = x - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3}$

4 - $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1$ - 4

منه : $F(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{2} x^2 - x$

5 - $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x}$ - 5

$F(x) = -e^{-x} + 2 \ln |x|$

التمرين 13

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ $f(x) = 3^x - 2^x$

عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

الحل 13

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{x \ln 3} - e^{x \ln 2}$

منه : $F(x) = \frac{1}{\ln 3} e^{x \ln 3} - \frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2}$

أي : $F(x) = \frac{1}{\ln 3} (3^x) - \frac{1}{\ln 2} (2^x)$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين 14

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال f من الشكل $u' \times u^n$ عين الدوال الأصلية للدوال التالية على المجال I

1 - $f(x) = (x-1)^4$: $I = \mathbb{R}$ - 1

2 - $f(x) = \frac{(x+2)^3}{5}$: $I = \mathbb{R}$ - 2

3 - $f(x) = 3(3x+4)^5$: $I = \mathbb{R}$ - 3

4 - $f(x) = e^x(e^x-1)^2$: $I = \mathbb{R}$ - 4

$$I = IR : f(x) = x^2(x^3 + 1)^4 \quad -5$$

$$I =]0; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x} [\ln(x)]^2 \quad -6$$

$$I = IR : f(x) = 2 \cos x \sin^2 x \quad -7$$

$$I =]-\pi/2; \pi/2[: f(x) = \tan^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) \quad -8$$

$$I = IR : f(x) = -20x \left(8 - \frac{x^2}{2} \right)^3 \quad -9$$

$$I = IR : f(x) = e^{-2x}(e^{-2x} + 2)^3 \quad -10$$

الحل - 14

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة

$$x \mapsto \frac{1}{n+1} [u(x)]^{n+1} \quad \text{هي دالة أصلية للدالة } u(x) \mapsto u'(x)[u(x)]^n \text{ إذن :}$$

$$1 - \text{نضع : } u(x) = x - 1 \text{ منه } u'(x) = 1$$

$$\text{إذن : } f(x) = (x - 1)^4 = u'(x) \times [u(x)]^4$$

$$\text{منه : الدالة } x \mapsto \frac{1}{4+1} [u(x)]^{4+1} \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto (x - 1)^4$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{1}{5} (x - 1)^5 + c \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f$$

$$2 - \text{نضع : } u(x) = x + 2 \text{ إذن : } u'(x) = 1$$

$$\text{إذن : } f(x) = \frac{(x + 2)^3}{5} = \frac{1}{5} u'(x)[u(x)]^3$$

$$\text{منه : الدالة } x \mapsto \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3+1} [u(x)]^{3+1} \right) \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto \frac{1}{5} u'(x)[u(x)]^3$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{1}{20} (x + 2)^4 + c \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f$$

$$3 - \text{نضع : } u(x) = 3x + 4 \text{ إذن : } u'(x) = 3$$

$$\text{منه : } f(x) = 3(3x + 4)^5 = u'(x)[u(x)]^5$$

$$\text{إذن : الدالة } x \mapsto \frac{1}{6} [u(x)]^6 \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto u'(x)[u(x)]^5$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{1}{6} (3x + 4)^6 + c \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f$$

$$4 - \text{نضع : } u(x) = e^x - 1 \text{ إذن : } u'(x) = e^x$$

$$\text{منه : } f(x) = e^x(e^x - 1)^2 = u'(x)[u(x)]^2$$

$$\text{إذن : الدالة } x \mapsto \frac{1}{3} [u(x)]^3 \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto u'(x)[u(x)]^2$$

$$\text{أي الدالة } F(x) = \frac{1}{3} (e^x - 1)^3 + c \text{ هي دالة أصلية للدالة } f$$

$$5 - \text{نضع : } u(x) = x^3 + 1 \text{ منه : } u'(x) = 3x^2 \text{ أي } x^2 = \frac{1}{3} u'(x)$$

$$\text{منه : } f(x) = x^2(x^3 + 1)^4 = \frac{1}{3} u'(x)[u(x)]^4$$

$$\text{إذن : الدالة } x \mapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} [u(x)]^5 \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto \frac{1}{3} u'(x)[u(x)]^4$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{1}{15} (x^3 + 1)^5 + c \text{ هي دالة أصلية للدالة } f$$

$$6 - \text{نضع : } u(x) = \ln x \text{ إذن : } u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^2 = u'(x)[u(x)]^2 : \text{ منه}$$

$$\text{إذن : الدالة } x \mapsto \frac{1}{3} [u(x)]^3 \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto u'(x)[u(x)]^2$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c \text{ هي دالة أصلية للدالة } f$$

$$7 - \text{ نضع : } u(x) = \sin x \text{ , إذن : } u'(x) = \cos x$$

$$\text{إذن : } f(x) = 2 \cos x \sin^2 x = 2 u'(x)[u(x)]^2$$

$$\text{منه : الدالة } x \mapsto 2 \times \frac{1}{3} [u(x)]^3 \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto 2 u'(x)[u(x)]^2$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{2}{3} \sin^3 x + c \text{ هي دالة أصلية للدالة } f$$

$$8 - \text{ نضع : } u(x) = \tan x \text{ , إذن : } u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{منه : } f(x) = \tan^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) = [u(x)]^3 u'(x)$$

$$\text{إذن : الدالة } x \mapsto \frac{1}{4} [u(x)]^4 \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto u'(x)[u(x)]^3$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{1}{4} \tan^4 x + c \text{ هي دالة أصلية للدالة } f$$

$$9 - \text{ نضع : } u(x) = 8 - \frac{x^2}{2} \text{ , منه : } u'(x) = -x$$

$$\text{إذن : } f(x) = -20x \left(8 - \frac{x^2}{2} \right)^3 = 20 u'(x)[u(x)]^3$$

$$\text{إذن : الدالة } x \mapsto 20 \times \frac{1}{4} [u(x)]^4 \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto 20 u'(x)[u(x)]^3$$

$$\text{أي : } F(x) = 5 \left(8 - \frac{x^2}{2} \right)^4 + c \text{ هي دالة أصلية للدالة } f$$

$$10 - \text{ نضع : } u(x) = e^{-2x} + 2 \text{ , إذن : } u'(x) = -2e^{-2x} \text{ , منه : } e^{-2x} = -\frac{1}{2} u'(x)$$

$$\text{إذن : } f(x) = e^{-2x} (e^{-2x} + 2)^3 = -\frac{1}{2} u'(x)[u(x)]^3$$

$$\text{منه : الدالة } x \mapsto -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} [u(x)]^4 \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto -\frac{1}{2} u'(x)[u(x)]^3$$

$$\text{أي : } F(x) = -\frac{1}{8} (e^{-2x} + 2)^4 + c \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f$$

التمرين 15

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$ عين الدوال الأصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$1 - I =]2 ; +\infty[: f(x) = \frac{5}{(x-2)^7}$$

$$2 - I =]-1 ; +\infty[: f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$3 - I =]1/2 ; +\infty[: f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3}$$

$$4 - I =]1 ; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$5 - I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$6 - I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$7 - I =]-1 ; +\infty[: f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4}$$

$$I =]-\pi/2 ; \pi/2[: f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad - 8$$

$$I =]0 ; +\infty[: f(x) = \frac{-e^x - 2}{(e^x + 2x)^2} \quad - 9$$

$$I = [1 ; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x(\ln x + 2)^2} \quad - 10$$

الحل - 15

لاحظ أن : $\frac{u'(x)}{[u(x)]^n} = u'(x) \times [u(x)]^{-n}$

إذن : الدالة $x \mapsto \frac{1}{1-n} [u(x)]^{1-n}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$ حيث $n \neq 1$

أي الدالة $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)[u(x)]^{n-1}}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$

1 - نضع : $u(x) = x - 2$: منه $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \frac{5}{(x-2)^7} = 5 \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^7} \right)$

منه : الدالة $x \mapsto 5 \left(\frac{-1}{(7-1)[u(x)]^{7-1}} \right)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto 5 \frac{u'(x)}{[u(x)]^7}$

أي : $F(x) = \frac{-5}{6(x-2)^6} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 - نضع : $u(x) = x + 1$: منه $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} = -2 \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3} \right)$

إذن : الدالة $x \mapsto -2 \left(\frac{-1}{2(u(x))^2} \right)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto -2 \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3} \right)$

منه : $F(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 - نضع : $u(x) = 2x - 1$: إذن $u'(x) = 2$

منه : $f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

الدالة $x \mapsto \frac{-1}{2(u(x))^2}$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

إذن : $F(x) = \frac{-1}{2(2x-1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 - نضع : $u(x) = \ln x$: إذن $u'(x) = 1/x$

منه : $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{1/x}{(\ln x)^2} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 - نضع : $u(x) = 1 + e^x$: إذن $u'(x) = e^x$

منه : $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \frac{-1}{1+e^x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

6 - نضع : $u(x) = x^2 - x + 1$ إذن : $u'(x) = 2x - 1$

منه : $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \frac{-1}{x^2-x+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

7 - نضع : $u(x) = x^3 + 1$ منه : $u'(x) = 3x^2$

إذن : $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4} = 2 \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^4} \right)$

الدالة $x \mapsto 2 \left(\frac{-1}{3[u(x)]^3} \right)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto 2 \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^4} \right)$

إذن : $F(x) = \frac{-2}{3(x^3+1)^3} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8 - نضع : $u(x) = \cos x$ إذن : $u'(x) = -\sin x$

منه : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} = - \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3} \right)$

الدالة $x \mapsto - \left(\frac{-1}{2(u(x))^2} \right)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto - \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3} \right)$

إذن : $F(x) = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

9 - نضع : $u(x) = e^x + 2x$ منه : $u'(x) = e^x + 2$

منه : $f(x) = \frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2} = - \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2} \right)$

الدالة $x \mapsto - \left(\frac{-1}{u(x)} \right)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto - \left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2} \right)$

منه : $F(x) = \frac{1}{e^x+2x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

10 - نضع : $u(x) = \ln x + 2$ منه : $u'(x) = 1/x$

منه : $f(x) = \frac{1}{x(\ln x+2)^2} = \frac{1/x}{(\ln x+2)^2} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

منه : $F(x) = \frac{-1}{\ln x+2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين 16

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال I :

1 - $I =]1; +\infty[: f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

2 - $I =]2; +\infty[: f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

3 - $I =]3; +\infty[: f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$

4 - $I =]-\infty; 2[: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3$

$$I =]0 ; +\infty[: f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}} \quad -5$$

$$I =]3 ; +\infty[: f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}} \quad -6$$

$$I =]0 ; \pi[: f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \quad -7$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + 3}} \quad -8$$

$$I =]0 ; +\infty[: f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + x^2}} \quad -9$$

$$I =]1 ; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} \quad -10$$

الحل - 16

حسب الخواص فإن الدالة $x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

1 - نضع $u(x) = x - 1$ إذن $u'(x) = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{منه :}$$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 - نضع $u(x) = x^2 - 4$ إذن $u'(x) = 2x$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{منه :}$$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x^2-4} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 - نضع $u(x) = x^2 - x - 6$ إذن $u'(x) = 2x - 1$

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{منه :}$$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x^2-x-6} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 - نضع $u(x) = 2 - x$ إذن $u'(x) = -1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3 = -\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} + 3 \quad \text{منه :}$$

إذن : $F(x) = -2\sqrt{2-x} + 3x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 - نضع $u(x) = e^x - 1$ منه $u'(x) = e^x$

$$f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}} = 2 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{منه :}$$

إذن : $F(x) = 2(2\sqrt{e^x-1}) + c$

أي : $F(x) = 4\sqrt{e^x-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

6 - نضع $u(x) = x - 3$ منه $u'(x) = 1$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{إذن :}$$

منه : $F(x) = 2(2\sqrt{x}) - 2(2\sqrt{u(x)}) + c$

أي : $F(x) = 4\sqrt{x} - 4\sqrt{x-3} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

7 - نضع $u(x) = \sin x$ منه : $u'(x) = \cos x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{إذن :}$$

منه : $F(x) = 2\sqrt{\sin x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f 8 - نضع $u(x) = 2 \cos x + 3$ منه $u'(x) = -2 \sin x$ أي $\sin x = -\frac{1}{2} u'(x)$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + 3}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \right) \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} (2\sqrt{2 \cos x + 3}) + c \quad \text{منه :}$$

أي : $F(x) = -\sqrt{2 \cos x + 3} + c$ وهي الدالة الأصلية للدالة f 9 - نضع $u(x) = x^3 + x^2$ إذن : $u'(x) = 3x^2 + 2x$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{إذن :}$$

منه : $F(x) = 2\sqrt{x^3 + x^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f 10 - نضع $u(x) = \ln x$ إذن : $u'(x) = 1/x$

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = \frac{1/x}{\sqrt{\ln x}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad \text{منه :}$$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{\ln(x)} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f **التمرين 17**باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال I :

$$I =]1; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x-1} \quad -1$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad -2$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad -3$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{6x+3}{x^2+x+1} \quad -4$$

$$I =]0; \pi[: f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad -5$$

الحل 17الدالة $x \mapsto \ln |u(x)|$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ إذن :1 - نضع $u(x) = x-1$ منه : $u'(x) = 1$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

منه : $F(x) = \ln |x-1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f 2 - نضع $u(x) = x^2+1$ إذن : $u'(x) = 2x$ منه : $x = \frac{1}{2} u'(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{u'(x)}{u(x)} \right) \quad \text{إذن :}$$

منه : $F(x) = \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f 3 - نضع $u(x) = e^x + 1$ منه : $u'(x) = e^x$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \ln |e^x + 1| + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة } f \quad \text{إذن :}$$

$$u(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{إذن :} \quad u'(x) = 2x + 1 \quad \text{نضع 4 -}$$

$$f(x) = \frac{6x+3}{x^2+x+1} = 3 \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) = 3 \left(\frac{u'(x)}{u(x)} \right) \quad \text{منه :}$$

$$F(x) = 3 \ln |x^2 + x + 1| + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة } f \quad \text{إذن :}$$

$$u(x) = \sin x \quad \text{منه :} \quad u'(x) = \cos x \quad \text{نضع 5 -}$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \ln |\sin x| + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة } f \quad \text{منه :}$$

التمرين 18 -

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$ عين الدوال الأصلية للدوال f على المجال I في كل من الحالات التالية :

$$I = \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = e^{4x+1} \quad -1$$

$$I = \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = x e^{-x^2} \quad -2$$

$$I =]0 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \frac{3}{x^2} e^{1/x} \quad -3$$

$$I = \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = (\sin x) e^{\cos x} \quad -4$$

$$I =]-1 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} \quad -5$$

الحل 18 -

صب الخواص فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$

$$u(x) = 4x + 1 \quad \text{منه :} \quad u'(x) = 4 \quad \text{نضع 1 -}$$

$$f(x) = e^{4x+1} = \frac{1}{4} (4 e^{4x+1}) = \frac{1}{4} u'(x) e^{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \frac{1}{4} e^{4x+1} + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة } f \quad \text{منه :}$$

$$u(x) = -x^2 \quad \text{منه :} \quad u'(x) = -2x \quad \text{نضع 2 -}$$

$$f(x) = x e^{-x^2} = \frac{-1}{2} (-2x e^{-x^2}) = \frac{-1}{2} u'(x) e^{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} e^{-x^2} + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة } f \quad \text{منه :}$$

$$u(x) = 1/x \quad \text{منه :} \quad u'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \text{نضع 3 -}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2} e^{1/x} = -3 \left(-\frac{1}{x^2} e^{1/x} \right) = -3 u'(x) e^{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = -3 e^{1/x} + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة } f \quad \text{منه :}$$

$$u(x) = \cos x \quad \text{منه :} \quad u'(x) = -\sin x \quad \text{نضع 4 -}$$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} = -(-\sin x e^{\cos x}) = -u'(x) e^{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = -e^{\cos x} + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة } f \quad \text{منه :}$$

$$u(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{منه :} \quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{نضع 5 -}$$

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} = -2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} \right) = -2 u'(x) e^{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = -2 e^{\sqrt{x+1}} + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة } f \quad \text{منه :}$$

التمرين 19

تعرف على الشكل المناسب ثم عين الدوال الأصلية لكل دالة f من الدوال التالية على المجال I .

$$I = \mathbb{R} \quad : f(x) = 2x^3(x^4 + 2)^3 \quad -1$$

$$I =]-\infty; -1[\quad : f(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad -2$$

$$I =]-1; +\infty[\quad : f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{x^3 + 1} \right) \quad -3$$

$$I =]0; \pi/2[\quad : f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad -4$$

$$I =]1; +\infty[\quad : f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad -5$$

الحل 19

$$1 - \text{نضع } u(x) = x^4 + 2 \text{ منه } u'(x) = 4x^3$$

$$\text{إذن : } f(x) = 2x^3(x^4 + 2)^3 = \frac{1}{2} (4x^3)(x^4 + 2)^3 = \frac{1}{2} u'(x)[u(x)]^3$$

$$\text{الدالة } x \mapsto u'(x)[u(x)]^3 \text{ أصلية للدالة } x \mapsto \frac{1}{3+1} [u(x)]^{3+1}$$

$$\text{إذن : } F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} (x^4 + 2)^4 \right) + c$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{1}{8} (x^4 + 2)^4 + c \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f$$

$$2 - \text{نضع } u(x) = x^2 - 1 \text{ منه } u'(x) = 2x$$

$$\text{إذن : } f(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{3}{2} \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = -\frac{3}{2} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \right)$$

$$\text{الدالة } x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \text{ أصلية للدالة } x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$$

$$\text{إذن : } F(x) = -\frac{3}{2} (2\sqrt{x^2 - 1}) + c$$

$$\text{أي : } F(x) = -3\sqrt{x^2 - 1} + c \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f$$

$$3 - \text{نضع } u(x) = x^3 + 1 \text{ إذن : } u'(x) = 3x^2$$

$$\text{إذن : } f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{x^3 + 1} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left(\frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) = \frac{1}{6} \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\text{الدالة } x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ أصلية للدالة } x \mapsto \ln |u(x)|$$

$$\text{إذن : } F(x) = \frac{1}{6} \ln |x^3 + 1| + c \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f$$

$$4 - \text{نضع } u(x) = \cos x \text{ إذن } u'(x) = -\sin x$$

$$\text{منه : } f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\left(\frac{-\sin x}{\cos^2 x} \right) = -\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2} \right)$$

$$\text{الدالة } x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2} \text{ هي الدالة الأصلية لـ } x \mapsto \frac{-1}{u(x)}$$

$$\text{إذن : } F(x) = -\left(-\frac{1}{\cos x} \right) + c$$

$$\text{أي : } F(x) = \frac{1}{\cos x} + c \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f$$

$$5 - \text{نضع } u(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ منه } u'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = - \left(\frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \right) = -u'(x) e^{u(x)} \quad \text{إذن :}$$

الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $u'(x)$

إذن : $F(x) = -e^{\frac{x+1}{x-1}} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين - 20

عين دالة أصلية على $\mathbb{R}$ لكل من الدوال التالية :

$$f(x) = \sin^2 x \quad -1$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad -2$$

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \quad -3$$

الحل - 20

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad -1$$

بما أن : $x \mapsto \frac{1}{2} x$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{2}$

$x \mapsto \sin 2x$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto 2 \cos 2x$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (2 \cos 2x) \quad \text{فإن :}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{إذن : هي دالة أصلية لـ } f$$

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \quad -2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (2 \cos 2x) \quad \text{منه :}$$

بما أن : $x \mapsto \frac{1}{2} x$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{2}$

$x \mapsto \sin 2x$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto 2 \cos 2x$

$$F(x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{فإن : هي الدالة الأصلية لـ } f$$

$$f(x) = \sin x \cos x \quad -3$$

نضع $u(x) = \sin x$ إذن : $u'(x) = \cos x$

$$f(x) = u'(x) \times u(x) \quad \text{منه :}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x + c \quad \text{إذن : هي الدالة الأصلية لـ } f$$

التمرين - 21

حل في المجال I المعادلات التفاضلية التالية :

$$I = \mathbb{R} : y' = 2x^2 + x - 1 \quad -1$$

$$I = \mathbb{R}^* : y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} \quad -2$$

$$I = \mathbb{R} : y' = 3 \sin(2x) \quad -3$$

$$I = \mathbb{R} : y' = 4x^3 - 3x^2 - 1 \quad -4$$

الحل - 21

البحث عن حل للمعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هو البحث عن الدالة F الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $F'(x) = f(x)$ أي : $F'(x) = y'$ منه : $y = F$ كمايلي :

$$y' = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 - x + c \quad -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

$$y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 2x + 1 - x^{-2} \quad -2$$

$$\Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{2} x^2\right) + x - \left(\frac{1}{-2+1} x^{-2+1}\right) + c$$

$$\Rightarrow y = x^2 + x + \frac{1}{x} + c$$

$$y' = 3 \sin(2x) \Rightarrow y = 3\left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) + c \quad -3$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cos 2x + c$$

$$y' = 4x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow y = x^4 - x^3 - x + c \quad -4$$

التمرين 22

حل المعادلات التفاضلية التالية على المجال I :

$$I = \mathbb{R}^* : y'' = \frac{x^2 + 1}{x^2} \quad -1$$

$$I = \mathbb{R} : y'' = \cos(2x + 3) \quad -2$$

$$I = \mathbb{R} : y'' = \cos 2x - 2 \sin x \quad -3$$

$$I = \mathbb{R}^* : y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \quad -4$$

الحل - 22

$$y'' = \frac{x^2 + 1}{x^2} \Rightarrow y'' = 1 + x^{-2} \quad -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = 1 + x^{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = 1 + x^{-2} \quad (x \mapsto 1 + x^{-2} \text{ دالة أصلية لـ } x \mapsto 1 + x^{-2}) \end{cases} \text{ لأن } g'(x) = y''$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = x + \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = x - \frac{1}{x} + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = x - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} x^2 - \ln|x| + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ أعداد حقيقية ثابتة}$$

$$y'' = \cos(2x + 3) \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \cos(2x + 3) \end{cases} \quad -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \cos(2x + 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2x + 3) \right] + cx + d$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} \cos(2x + 3) + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ أعداد حقيقية ثابتة}$$

$$y'' = \cos 2x - 2 \sin x \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \cos 2x - 2 \sin x \end{cases} \quad -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \cos 2x - 2 \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 2 \cos x + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \sin 2x + 2 \cos x + c$$

$$\text{حيث } c \text{ و } d \text{ أعداد حقيقية ثابتة} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \cos 2x + 2 \sin x + cx + d$$

$$y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \end{cases} \quad -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = x^2 + x + \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x} + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} x^4 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - \ln|x| + cx + d$$

$$\text{حيث } c \text{ و } d \text{ أعداد حقيقية ثابتة} \Rightarrow y = \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{6} x^3 - \ln|x| + cx + d$$

التمرين 23

حل المعادلات التفاضلية التالية في IR :

$$y'' + y = 0 \quad -1$$

$$y'' + 9y = 0 \quad -2$$

$$4y'' + \pi^2 y = 0 \quad -3$$

الحل 23

حلول المعادلة $y'' + w^2 y = 0$ هي الدوال من الشكل $y = a \cos wx + b \sin wx$ كما يلي :

$$y'' + y = 0 \Rightarrow y'' + (1)^2 y = 0 \quad -1$$

$$\text{حيث } a \text{ و } b \text{ أعداد حقيقية ثابتة} \Rightarrow y = a \cos x + b \sin x$$

$$y'' + 9y = 0 \Rightarrow y'' + (3)^2 y = 0 \quad -2$$

$$\text{حيث } a \text{ و } b \text{ أعداد حقيقية ثابتة} \Rightarrow y = a \cos 3x + b \sin 3x$$

$$4y'' + \pi^2 y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{\pi^2}{4} y = 0 \quad -3$$

$$\Rightarrow y'' + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 y = 0$$

$$\text{حيث } a \text{ و } b \text{ أعداد حقيقية ثابتة} \Rightarrow y = a \cos \frac{\pi}{2} x + b \sin \frac{\pi}{2} x$$

التمرين 24

حل المعادلة التفاضلية $4y'' + 121y = 0$ ثم عين الحل F الذي يحقق الشرطين $\begin{cases} F(\pi) = 1 \\ F'(\pi) = 2 \end{cases}$

$$4y'' + 121y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{121}{4}y = 0$$

$$\Rightarrow y'' + \left(\frac{11}{2}\right)^2 y = 0$$

$$\Rightarrow y = a \cos \frac{11}{2}x + b \sin \frac{11}{2}x$$

إذن : $F(x) = a \cos \frac{11}{2}x + b \sin \frac{11}{2}x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

لدينا : $F(\pi) = a \cos \frac{11}{2}\pi + b \sin \frac{11}{2}\pi$

$$= 0 + b \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -b$$

إذن : الشرط $F(\pi) = 1$ يصبح : $-b = 1$ أي : $b = -1$

و لدينا أيضا : $F'(x) = -\frac{11}{2}a \sin \frac{11}{2}x + \frac{11}{2}b \cos \frac{11}{2}x$

منه : $F'(\pi) = -\frac{11}{2}a \sin \frac{11}{2}\pi + \frac{11}{2}b \cos \frac{11}{2}\pi$

$$= -\frac{11}{2}a(-1)$$

$$= \frac{11}{2}a$$

إذن : الشرط $F'(\pi) = 2$ يصبح : $\frac{11}{2}a = 2$ أي : $a = \frac{4}{11}$

نتيجة : $a = \frac{4}{11}$ ، $b = -1$ إذن : $F(x) = \frac{4}{11} \cos \frac{11}{2}x - \sin \frac{11}{2}x$

التمرين - 25

1 - حل المعادلة التفاضلية $9y'' + 4y = 0$ (1)

2 - عين الحل الخاص F للمعادلة (1) و الذي يحقق الشرطين التاليين :

(1) منحنى الدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3}\right)$
 (2) منحنى الدالة F يقبل مماس عند النقطة A معامل توجيهه $-\frac{2}{3}$

3 - برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $F(x) = 2 \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

4 - حل المعادلة $F(x) = 0$ ثم مثل صور الحلول على الدائرة المثلثية .

الحل - 25

$$9y'' + 4y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{4}{9}y = 0$$

- 1

$$\Rightarrow y'' + \left(\frac{2}{3}\right)^2 y = 0$$

$$\Rightarrow y = a \cos \frac{2}{3}x + b \sin \frac{2}{3}x$$

2 - حل المعادلة (1) $F(x) = a \cos \frac{2}{3}x + b \sin \frac{2}{3}x$ حيث a و b أعداد حقيقية نبحت عنها حسب الشروط كمايلي :

منحنى الدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3}\right)$ إذن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

لدينا : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \cos \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{2} + b \sin \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{2}$

$$= a \cos \frac{\pi}{3} + b \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{إذن : الشرط } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \text{ يصبح :}$$

$$\text{أي : } a + b\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad (\alpha) \dots \dots \dots$$

$$F'(x) = -\frac{2a}{3} \sin \frac{2}{3}x + \frac{2b}{3} \cos \frac{2}{3}x \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2a}{3} \sin \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{2} + \frac{2b}{3} \cos \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{منه :}$$

$$= -\frac{2a}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{2b}{3} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{2a}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2b}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{3}$$

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3} \quad \text{إذن : الشرط معامل توجيه المماس عند النقطة A هو } -\frac{2}{3} \text{ يصبح :}$$

$$\text{أي : } a\sqrt{3} - b = 2 \quad (\beta) \dots \dots \dots \text{أي : } -\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} a + b\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0 \\ a\sqrt{3} - b - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{نحل إذن الجملة :}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4$$

$$\begin{cases} a = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3} \\ b = \frac{\begin{vmatrix} -2\sqrt{3} & 1 \\ -2 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-6 + 2}{-4} = 1 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$\text{خلاصة : } a = \sqrt{3} ; b = 1$$

$$F(x) = \sqrt{3} \cos \frac{2}{3}x + \sin \frac{2}{3}x \quad \text{و هو المطلوب} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \sqrt{3} \cos \frac{2}{3}x + \sin \frac{2}{3}x \quad \text{3 - لدينا :}$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \sin \frac{2}{3}x \right)$$

$$= 2 \left[\left(\cos \frac{\pi}{6} \right) \left(\cos \frac{2}{3}x \right) + \left(\sin \frac{\pi}{6} \right) \left(\sin \frac{2}{3}x \right) \right]$$

$$= 2 \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \quad \text{4 -}$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

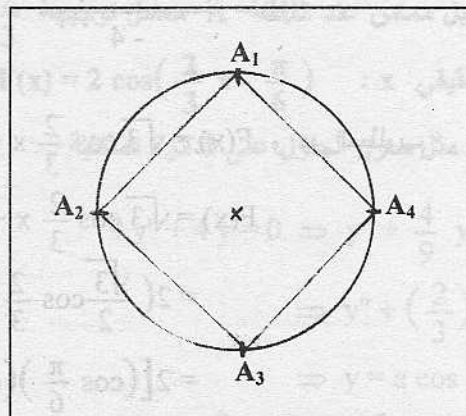
$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{8}{12}\pi + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x = -\frac{4}{12}\pi + 2\pi k \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \times \frac{8}{12}\pi + \frac{3}{2} \times 2\pi k \\ \text{أو} \\ x = -\frac{3}{2} \times \frac{4}{12}\pi + \frac{3}{2} \times 2\pi k \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 3\pi k \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 3\pi k \end{cases} \end{aligned}$$

و هي حلول المعادلة $F(x)=0$ في $\mathbb{R}$

الحلول على الدائرة المثلثية

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = \pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{من أجل } k=0 \\ & \begin{cases} x = \pi + 3\pi = 4\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{5}{2}\pi \end{cases} \quad \text{من أجل } k=1 \\ & \begin{cases} x = \pi + 6\pi = 7\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 6\pi \end{cases} \quad \text{من أجل } k=2 \end{aligned}$$

إذن : صور حلول المعادلة على الدائرة المثلثية هي النقط A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 كمايلي :



التمرين - 26

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; 1[$ بـ $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1 - عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل x من $]0; 1[$:

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

2 - استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0; 1[$ تحقق $F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$

الحل - 26

1 - من أجل كل x من $]0; 1[$ لدينا :

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{a(x^2 - 2x + 1) + b x^2}{x^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 - 2ax + a}{x^2(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ نحصل على

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

أي $\begin{cases} b=-a \\ a=-1 \\ a=-1 \end{cases}$

نتيجة : من أجل كل x من $]0; 1[$:

$$f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

2 - لدينا :

$$f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = -(x^{-2}) + (x-1)^{-2}$$

الدالة $\left. \begin{aligned} x &\mapsto x^{-2} \text{ أصلية للدالة } x \mapsto \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = -\frac{1}{x} \\ x &\mapsto (x-1)^{-2} \text{ أصلية للدالة } x \mapsto \frac{1}{-2+1} (x-1)^{-2+1} = \frac{-1}{x-1} \end{aligned} \right\}$

منه الدالة : $x \mapsto -\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x-1}$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto -x^{-2} + (x-1)^{-2}$

أي : $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت يمكن البحث عنه بحساب $F\left(\frac{1}{2}\right)$ كمايلي :

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{1/2} - \frac{1}{\frac{1}{2}-1} + c = 6$$

$$\Leftrightarrow c = 6 - 2 - 2$$

$$\Leftrightarrow c = 2$$

نتيجة : $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + 2$

تحقيق :

$$F(x) = \frac{x-1-x+2x(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2x^2-2x-1}{x(x-1)}$$

$$F'(x) = \frac{(4x-2)x(x-1) - (2x-1)(2x^2-2x-1)}{x^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)[2x(x-1) - 2x^2 + 2x + 1]}{x^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

$f = F$ إذن : أصلية لـ f

التمرين - 27

f دالة معرفة على $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$

1 - عين العددين الحقيقيين a و b حيث : $f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$

2 - استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1; +\infty[$

3 - استنتج دالة أصلية F للدالة f تحقق : $F(0) = 1$

الحل - 27

$$\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3} = \frac{a(x+1)^3 + b(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3} \quad :]1; +\infty[\text{ من أجل كل } x$$

$$= \frac{a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

$$= \frac{(a+b)x^3 + 3(a-b)x^2 + 3(a+b)x + a-b}{(x^2 - 1)^3}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{(x^2 - 1)^3}$ نحصل على $\left. \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = 1/2 \end{array} \right\}$ أي $\left. \begin{array}{l} a+b=1 \\ a-b=0 \end{array} \right\}$

نتيجة : من أجل كل x من $]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{2(x+1)^3}$

2 - الدالة $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$ من الشكل $x \mapsto (x+1)^{-3}$ إذن : الدالة $x \mapsto \frac{1}{-3+1} (x+1)^{-3+1} = \frac{-1}{2(x+1)^2}$

هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$

الدالة $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$ من الشكل $x \mapsto (x-1)^{-3}$ إذن : الدالة $x \mapsto \frac{1}{-3+1} (x-1)^{-3+1} = \frac{-1}{2(x-1)^2}$

هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$

منه : الدالة $x \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2(x-1)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2(x+1)^2} \right) + c$ هي دالة أصلية

للدالة $x \mapsto \frac{1}{2(x+1)^3} + \frac{1}{2(x-1)^3}$

أي : $F(x) = \frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

3 - $F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} + c = 0$

$\Leftrightarrow c = 1/2$

منه : $F(x) = \frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{2}$ هي الدالة الأصلية المطلوبة .

التمرين - 28

f دالة معرفة على $] -1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$

1 - أكتب $f(x)$ من الشكل $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f على $] -1; +\infty[$

الحل - 28

1 - $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1) + b}{(x+1)^2} = \frac{ax + a + b}{(x+1)^2}$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$ نحصل على $\left. \begin{array}{l} a=3 \\ b=-1 \end{array} \right\}$ أي $\left. \begin{array}{l} a=1 \\ a+b=2 \end{array} \right\}$

نتيجة : $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

2 - الدالة $x \mapsto \ln|x+1|$ أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1}$ أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$

منه : الدالة $x \mapsto \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$ أصلية لـ $x \mapsto 3 \ln |x+1| - \left(\frac{-1}{x+1}\right) + c$ أي : $F(x) = 3 \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين - 29

عين دالة أصلية للدالة $f: x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ على $]1; +\infty[$

الحل - 29

لنبسط عبارة $f(x)$ باستعمال القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x & x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 2x + 1 & 1 \\ \hline & -1 \end{array} \quad f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{إذن :}$$

منه : $F(x) = x + \frac{1}{x-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين - 30

عين دالة أصلية للدالة $f: x \mapsto \frac{3x^2 + 4x - 25}{x^2 + x - 6}$ على $] -3; 2[$

الحل - 30

لنبسط عبارة $f(x)$ باستعمال القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 4x - 25 & x^2 + x - 6 \\ 3x^2 + 3x - 18 & 3 \\ \hline & x - 7 \end{array} \quad f(x) = 3 + \frac{x-7}{x^2+x-6} \quad \text{إذن :}$$

لاحظ أن : $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$

$$f(x) = 3 + \frac{x-7}{(x+3)(x-2)} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2} = \frac{x-7}{(x+3)(x-2)} \quad \text{لنبحث عن الأعداد } a \text{ و } b \text{ حيث}$$

$$\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2} = \frac{ax - 2a + bx + 3b}{(x+3)(x-2)} = \frac{(a+b)x + 3b - 2a}{(x+3)(x-2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 3b = 3 \\ -2a + 3b = -7 \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ -2a + 3b = -7 \end{array} \right\} \text{نحصل على} \quad \frac{x-7}{(x+3)(x-2)} \quad \text{بالمطابقة مع العبارة}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} 5a = 10 \\ b = 1 - a \end{array} \right\} \text{أي} \quad \frac{x-7}{(x+3)(x-2)} = \frac{2}{(x+3)} - \frac{1}{(x-2)} \quad \text{منه :}$$

$$f(x) = 3 + \frac{2}{(x+3)} - \frac{1}{(x-2)} \quad \text{نتيجة :}$$

منه : $F(x) = 3x + 2 \ln |x+3| - \ln |x-2| + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

التمرين - 31

عين دالة أصلية للدالة $f: x \mapsto \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$ على $] -\infty; -1[$

الحل - 31

لنبسط عبارة $f(x)$ كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 3x + 2 & x+1 \\ 2x^2 + 2x & 2x+1 \\ \hline & x+2 \\ & \frac{x+1}{1} \end{array} \quad f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} \quad \text{إذن :}$$

منه : $F(x) = x^2 + x + \ln |x+1| + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

التمرين 32 -

$f(x) = \cos^3 x$ IR دالة معرفة على بـ

1 - تحقق أن : $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f على IR

الحل 32 -

1 - من أجل كل x من IR : $\cos x - \cos x \sin^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$

$$= \cos x(\cos^2 x)$$

$$= \cos^3 x$$

$f(x) = \cos^3 x$ هو المطلوب

2 - الدالة $x \mapsto \sin x$ أصلية لـ $x \mapsto \cos x$

الدالة $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x$ أصلية لـ $x \mapsto \cos x \sin^2 x$

إذن : الدالة $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين 33 -

$f(x) = \sin x + \sin^3 x$ IR دالة معرفة على بـ

1 - تحقق أن : $f(x) = 2 \sin x - \sin x \cos^2 x$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f

الحل 33 -

1 - $2 \sin x - \sin x \cos^2 x = \sin x + \sin x - \sin x \cos^2 x$

$$= \sin x + \sin x(1 - \cos^2 x)$$

$$= \sin x + \sin x \sin^2 x$$

$$= \sin x + \sin^3 x$$

$f(x) = \sin x + \sin^3 x$ هو المطلوب

2 - الدالة $x \mapsto -\cos x$ أصلية لـ $x \mapsto \sin x$

الدالة $x \mapsto -\frac{1}{3} \cos^3 x$ أصلية لـ $x \mapsto \sin x \cos^2 x$

منه : الدالة $x \mapsto -2 \cos x - \left(-\frac{1}{3} \cos^3 x\right) + c$ أصلية لـ $x \mapsto 2 \sin x - \sin x \cos^2 x$

أي الدالة : $x \mapsto -2 \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$ أصلية للدالة f

التمرين 34 -

$f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$ IR دالة معرفة على بـ

1 - عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = \sin x(a \cos^2 x + b \cos^4 x)$$

2 - استنتج دالة أصلية لـ f

الحل 34 -

$$f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$$

$$= \sin x(\sin^2 x \cos^2 x)$$

$$= \sin x(1 - \cos^2 x) \cos^2 x$$

$$= \sin x(\cos^2 x - \cos^4 x)$$

$$f(x) = \sin x(\cos^2 x - \cos^4 x)$$

$$f(x) = \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x$$

2 - لدينا :

أي :

الدالة $x \mapsto -\frac{1}{3} \cos^3 x$ أصلية لـ $x \mapsto \sin x \cos^2 x$

الدالة $x \mapsto \frac{1}{5} \cos^5 x$ أصلية لـ $x \mapsto -\sin x \cos^4 x$

إذن : الدالة $x \mapsto -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + c$ أصلية للدالة f

التمرين 35

- 1 - أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$ حيث a, b, c أعداد حقيقية .
 2 - إستنتج دالة أصلية لـ f

الحل 35

- 1

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^4 x \cos^5 x \\ &= \cos x \sin^4 x \cos^4 x \\ &= \cos x \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \\ &= \cos x \sin^4 x (1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x) \\ &= \cos x (\sin^4 x - 2 \sin^6 x + \sin^8 x) \end{aligned}$$

2 - لدينا :

$$f(x) = \cos x (\sin^4 x - 2 \sin^6 x + \sin^8 x)$$

أي :

$$f(x) = \cos x \sin^4 x - 2 \cos x \sin^6 x + \cos x \sin^8 x$$

$$F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad \text{منه :}$$

التمرين 36

$$u(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad \text{و} \quad v(x) = \frac{1}{\cos^4 x} \quad \text{و} \quad I = [0 ; \pi/4] \quad \text{كـمـايـلي}$$

$$1 - \text{تحقق أن من أجل كل } x \text{ من } I : u'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$2 - \text{أوجد دالة أصلية } V \text{ للدالة } v \text{ على } I \text{ والتي تنعدم من أجل } 0$$

الحل 36

- 1

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\cos x \cos^3 x + 3 \sin x \cos^2 x \sin x}{(\cos^3 x)^2} \\ &= \frac{\cos^4 x + 3 \cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x} \\ &= \frac{\cos^4 x + 3 \cos^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^6 x} \\ &= \frac{\cos^4 x + 3 \cos^2 x - 3 \cos^4 x}{\cos^6 x} \\ &= \frac{3 \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^6 x} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{و هو المطلوب}$$

2 - حسب السؤال (1) :

$$u'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

منه :

$$u'(x) - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^4 x}$$

أي :

$$\frac{1}{3} u'(x) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^4 x}$$

أي :

$$\frac{1}{3} u'(x) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} = v(x)$$

$$x \mapsto \frac{1}{3} u'(x) - \frac{1}{3 \cos^2 x} \quad \text{إذن : الدالة الأصلية للدالة } v \text{ هي الدالة الأصلية للدالة}$$

$$V(x) = \frac{1}{3} u(x) - \frac{1}{3} \tan x + c \quad \text{منه :}$$

$$V(x) = \frac{\sin x}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{3} \tan x + c \quad \text{أي : حيث } c \in \mathbb{R}$$

البحث عن c :

$$V(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 0}{3 \cos^3 0} - \frac{1}{3} \tan 0 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

$$V(x) = \frac{\sin x}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{3} \tan x \quad \text{نتيجة :}$$

التمرين 37 -

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x \cos x$ 1 - أثبت أن : $f'(x) + f''(x) = -2 \sin x$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f على IR

الحل 37 -

$$f'(x) = \cos x - x \sin x$$

- 1

$$f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x \quad \text{منه : } f''(x) = -2 \sin x - f(x)$$

أي : $f''(x) + f(x) = -2 \sin x$ و هو المطلوب .

$$f''(x) + f(x) = -2 \sin x$$

2 - لدينا :

$$f(x) = -f''(x) - 2 \sin x$$

إذن :

أي : الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة الأصلية للدالة $-f''(x) - 2 \sin x$

$$F(x) = -f'(x) + 2 \cos x + c$$

منه :

$$F(x) = -\cos x + x \sin x + 2 \cos x + c$$

أي :

$$F(x) = \cos x + x \sin x + c \quad \text{هي الدالة الأصلية للدالة f}$$

أي :

$$F'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x = f(x) \quad \text{تحقيق :}$$

التمرين 38 -

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x \sin x$ 1 - تحقق أن f تقبل دالة أصلية F من الشكل : $F(x) = a x \cos x + b \sin x$ 2 - عين F حيث $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

الحل 38 -

$$F(x) = a x \cos x + b \sin x$$

1 - لتكن F معرفة بـ

$$F'(x) = a \cos x - a x \sin x + b \cos x$$

إذن :

$$F'(x) = (a + b) \cos x - a x \sin x$$

أي :

$$F'(x) = (a + b) \cos x - a f(x)$$

أي :

إذن : يكفي أن يكون $a + b = 0$ و $a = 1$ - حتى تكون $F'(x) = f(x)$ أي F دالة أصلية لـ f على R

$$F(x) = -x \cos x + \sin x \quad \text{منه : } \left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array} \right\} \text{ أي :}$$

نتيجة : الدوال الأصلية لـ f على IR هي دوال من الشكل : $F(x) = -x \cos x + \sin x + c$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + c = 0$$

- 2

$$\Leftrightarrow 1 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -1$$

$$F(x) = -x \cos x + \sin x - 1 \quad \text{نتيجة :}$$

التمرين 39 -

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 e^{2x}$

1 - عين الأعداد الحقيقية a , b , c حيث تكون الدالة F المعرفة على IR

$$F(x) = (a x^2 + b x + c) e^{2x} \quad \text{بـ } f \text{ أصلية لـ}$$

2 - استنتج دالة أصلية ϕ للدالة f تنعدم من أجل $x = 0$

الحل 39 -

1 - تكون F دالة أصلية لـ f إذا وفقط إذا كان $F'(x) = f(x)$ من أجل كل x من IR

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2 a x + b) e^{2x} + 2(a x^2 + b x + c) e^{2x} \\ &= [2 a x^2 + (2 a + 2b) x + b + 2 c] e^{2x} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{array} \right\} \text{ نحصل على } f(x) = x^2 e^{2x} \text{ بالمطابقة مع}$$

نتيجة : $F(x) = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x}$ دالة أصلية لـ f

2- لنكن ϕ دالة أصلية لـ f إذن : $\phi(x) = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

$$\phi(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} e^0 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -1/4$$

$$\phi(x) = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} - \frac{1}{4} \quad \text{منه :}$$

$$\phi'(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x} + 2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} \quad \text{تحقيق :}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2} + x^2 - x + \frac{1}{2} \right) e^{2x}$$

$$= x^2 e^{2x}$$

$$= f(x)$$

التمرين - 40

عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال D

$$D =]0 ; +\infty[: f(x) = \sqrt{x} \quad -1$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = x \sqrt{x^2 + 1} \quad -2$$

$$D =]-1 ; +\infty[: f(x) = (x+1) \sqrt{x+1} \quad -3$$

الحل - 40

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} + c = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c \quad \text{إذن : } f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad -1$$

$$f(x) = x \sqrt{x^2 + 1} = x(x^2 + 1)^{1/2} \quad -2$$

$$x = \frac{1}{2} u'(x) \quad \text{نضع : } u(x) = x^2 + 1 \quad \text{إذن : } u'(x) = 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} u'(x) [u(x)]^{1/2} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} [u(x)]^{\frac{1}{2} + 1} \right) + c \quad \text{منه :}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u(x) \sqrt{u(x)} \right) + c \quad \text{أي :}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} + c \quad \text{أي :}$$

$$f(x) = (x+1) \sqrt{x+1} = (x+1)^{1 + \frac{1}{2}} \quad -3$$

$$u'(x) = 1 \quad \text{نضع : } u(x) = x+1$$

$$f(x) = u'(x) [u(x)]^{1 + \frac{1}{2}} \quad \text{منه :}$$

$$F(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + 1} [u(x)]^{1 + \frac{1}{2} + 1} + c \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \frac{2}{5} [u(x)]^2 \sqrt{u(x)} + c \quad \text{أي :}$$

$$F(x) = \frac{2}{5} (x+1)^2 \sqrt{x+1} + c \quad \text{أي :}$$

التمرين 41

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$$

1 - عين العددين الحقيقيين a و b حيث $f(x) = e^x + a + \frac{b e^x}{e^x - 1}$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$

الحل 41

$$\begin{aligned} e^x + a + \frac{b e^x}{e^x - 1} &= \frac{e^{2x} - e^x + a e^x - a + b e^x}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^{2x} + (a + b - 1) e^x - a}{e^x - 1} \end{aligned}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$ نحصل على $\left. \begin{aligned} a + b - 1 &= 1 \\ -a &= -1 \end{aligned} \right\}$ أي $\left. \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \end{aligned} \right\}$

نتيجة : $f(x) = e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$

2 - $f(x) = e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ إذن : $F(x) = e^x + x + \ln |e^x - 1| + c$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين 42

f دالة معرفة على $]2; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$

1 - عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على $] -a; +\infty[$ بـ

$g(x) = (x+a) \ln |x+a| - x$ حيث a عدد حقيقي ثابت .

2 - استنتج دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln |x+a|$ على $] -a; +\infty[$

3 - استنتج دالة أصلية للدالة f على $]2; +\infty[$

الحل 42

$$g'(x) = \ln |x+a| + (x+a) \times \frac{1}{x+a} - 1$$

$$= \ln |x+a| + 1 - 1$$

$$= \ln |x+a|$$

2 - لدينا : $g'(x) = \ln |x+a|$ أي $g'(x) = h(x)$

منه : g هي دالة أصلية لـ h على $] -a; +\infty[$

$$f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \ln |x-2| - \ln |x+2| \quad -3$$

حسب السؤال (1) فإن :

$$\left. \begin{aligned} \text{الدالة } x \mapsto \ln |x-2| &\text{ أصلية لـ } x \mapsto (x-2) \ln |x-2| - x \\ \text{الدالة } x \mapsto \ln |x+2| &\text{ أصلية لـ } x \mapsto (x+2) \ln |x+2| - x \end{aligned} \right\}$$

إذن : الدالة $x \mapsto (x-2) \ln |x-2| - x - [(x+2) \ln |x+2| - x]$

أصلية للدالة $x \mapsto \ln |x-2| - \ln |x+2|$

أي الدالة $x \mapsto (x-2) \ln |x-2| - (x+2) \ln |x+2| + c$ أصلية للدالة f

التمرين 43

f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{6 e^x}{e^{2x} - 1}$

1 - عين العددين الحقيقيين a و b حيث $f(x) = \frac{a e^x}{e^x - 1} + \frac{b e^x}{e^x + 1}$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$

الحل 43

$$\frac{a e^x}{e^x - 1} + \frac{b e^x}{e^x + 1} = \frac{a e^{2x} + a e^x + b e^{2x} - b e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{(a+b) e^{2x} + (a-b) e^x}{e^{2x} - 1} \quad -1$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{6e^x}{e^{2x}-1}$ نحصل على $\left. \begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=6 \end{array} \right\}$ أي $\left. \begin{array}{l} 2a=6 \\ b=-a \end{array} \right\}$ أي $\left. \begin{array}{l} a=3 \\ b=-3 \end{array} \right\}$

نتيجة : $f(x) = \frac{3e^x}{e^x-1} - \frac{3e^x}{e^x+1}$

2- $\left. \begin{array}{l} \text{الدالة } x \mapsto \ln|e^x-1| \text{ أصلية لـ } x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1} \\ \text{الدالة } x \mapsto \ln|e^x+1| \text{ أصلية لـ } x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1} \end{array} \right\}$

إذن : الدالة $x \mapsto 3 \ln|e^x-1| - 3 \ln|e^x+1| + c$ هي دالة أصلية لـ f

التمرين 44

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$

1- أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2- تحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$

3- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

الحل 44

1- $f'(x) = (4x - 7)e^x + (2x^2 - 7x + 5)e^x$

$= (2x^2 - 7x + 5 + 4x - 7)e^x$

$= (2x^2 - 3x - 2)e^x$

$f''(x) = (4x - 3)e^x + (2x^2 - 3x - 2)e^x$

$= (2x^2 - 3x - 2 + 4x - 3)e^x$

$= (2x^2 + x - 5)e^x$

2- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن :

$4e^x + 2f'(x) - f''(x) = 4e^x + 2(2x^2 - 3x - 2)e^x - (2x^2 + x - 5)e^x$

$= (4 + 4x^2 - 6x - 4 - 2x^2 - x + 5)e^x$

$= (2x^2 - 7x + 5)e^x$

$= f(x)$ وهو المطلوب

3- حسب السؤال السابق فإن : $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$

$\left. \begin{array}{l} \text{الدالة } x \mapsto 4e^x \text{ أصلية لـ } x \mapsto 4e^x \\ \text{الدالة } x \mapsto f'(x) \text{ أصلية لـ } x \mapsto f'(x) \\ \text{الدالة } x \mapsto f''(x) \text{ أصلية لـ } x \mapsto f''(x) \end{array} \right\}$

منه الدالة $x \mapsto 4e^x + 2f'(x) - f''(x) + c$ أصلية لـ f

أي الدالة $x \mapsto 4e^x + 2(2x^2 - 7x + 5)e^x - (2x^2 - 3x - 2)e^x + c$ أصلية للدالة f

أي الدالة $x \mapsto (4 + 4x^2 - 14x + 10 - 2x^2 + 3x + 2)e^x + c$ أصلية للدالة f

أي الدالة $x \mapsto (2x^2 - 11x + 16)e^x + c$ أصلية للدالة f

$F(x) = (2x^2 - 11x + 16)e^x + c$

تحقيق : نضع

$F'(x) = (4x - 11)e^x + (2x^2 - 11x + 16)e^x$ إذن :

$F'(x) = (2x^2 - 11x + 16 + 4x - 11)e^x$ أي :

$F'(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$ أي :

$F'(x) = f(x)$ أي :

التمرين 45

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^x \cos x$

1- أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2- أوجد العددين a و b حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = a f''(x) + b f'(x)$

3- استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

الحل 45

1- $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$

$f''(x) = (e^x \cos x - e^x \sin x) - (e^x \sin x + e^x \cos x)$

$= -2e^x \sin x$

2 - لدينا : $f(x) = e^x \cos x$ و $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$
 إذن : $f'(x) = f(x) - e^x \sin x$
 أي : $e^x \sin x = f(x) - f'(x)$
 نعوض $e^x \sin x$ بـ $f(x) - f'(x)$ في عبارة $f''(x)$ فنحصل على :
 $f''(x) = -2(f(x) - f'(x))$
 $f''(x) = -2f(x) + 2f'(x)$
 أي : $2f(x) = 2f'(x) - f''(x)$
 أي : $f(x) = f'(x) - \frac{1}{2}f''(x)$ منه :
 هو المطلوب

نتيجة : $a = -1/2$; $b = 1$

3 - الدالة $x \mapsto f(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto f'(x)$
 الدالة $x \mapsto -\frac{1}{2}f''(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto -\frac{1}{2}f'(x)$

منه : الدالة $F : x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}f'(x) + c$ هي دالة أصلية لـ f

إذن : $F(x) = e^x \cos x - \frac{1}{2}(e^x \cos x - e^x \sin x) + c$
 $= \frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + c$

تحقيق : $F'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x - \frac{1}{2}(-2e^x \sin x)$
 $= e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \sin x$
 $= e^x \cos x$
 $= f(x)$

التمرين - 46

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^3 e^{2x}$ أوجد دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $F(x) = p(x) e^{2x}$ و p كثير حدود من الدرجة الثالثة .

الحل - 46ليكن $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a \neq 0$ ؛ d ؛ c ؛ b ؛ a أعداد حقيقية و

$F(x) = p(x) e^{2x}$ نضع :

إذن : $F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^{2x} + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x}$

أي : $F'(x) = (2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d + 3ax^2 + 2bx + c)e^{2x}$

أي : $F'(x) = [2ax^3 + (2b + 3a)x^2 + (2c + 2b)x + 2d + c]e^{2x}$

حتى تكون F دالة أصلية لـ f يكفي و يلزم أن يتحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$F'(x) = f'(x)$ أي $F'(x) = x^3 e^{2x}$

إذن بالمطابقة نحصل على :
 $\left. \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -3/4 \\ c = 3/4 \\ d = -3/8 \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} 2a = 1 \\ 2b + 3a = 0 \\ 2c + 2b = 0 \\ 2d + c = 0 \end{array} \right\}$

نتيجة : $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) e^{2x}$

تحقيق : $F'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right) e^{2x} + 2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) e^{2x}$

$= \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right) e^{2x}$

$= x^3 e^{2x}$

$= f(x)$

التمرين 47

$f(x) = (a \cos \theta x + b \sin \theta x) e^{\lambda x}$ — IR دالة معرفة على λ : θ : a : b أعداد حقيقية ثابتة .

1 — أحسب $f'(x)$

لتكن $g(x) = (\sin x - 5 \cos x) e^{-x}$ — IR دالة المعرفة على

2 — باستعمال نتيجة السؤال (1) عين دالة أصلية G للدالة g و التي تحقق $G(0) = 3$

الحل 47

$$f'(x) = (-a\theta \sin \theta x + b\theta \cos \theta x) e^{\lambda x} + \lambda (a \cos \theta x + b \sin \theta x) e^{\lambda x} \quad 1$$

$$= (a\lambda \cos \theta x + b\lambda \sin \theta x - a\theta \sin \theta x + b\theta \cos \theta x) e^{\lambda x}$$

$$= [(a\lambda + b\theta) \cos \theta x + (b\lambda - a\theta) \sin \theta x] e^{\lambda x}$$

$$x \mapsto (a \cos \theta x + b \sin \theta x) e^{\lambda x} + c \quad 2 \text{ — حسب السؤال (1) فإن الدالة}$$

$$x \mapsto [(a\lambda + b\theta) \cos \theta x + (b\lambda - a\theta) \sin \theta x] e^{\lambda x} \text{ هي دالة أصلية للدالة}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ a = 2 \\ b = -3 \end{array} \right\} \text{منه} \quad \left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ -a + b = -5 \\ -b - a = 1 \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ a\lambda + b\theta = -5 \\ b\lambda - a\theta = 1 \end{array} \right\} \text{نضع :}$$

$$\text{منه : الدالة } x \mapsto (2 \cos x - 3 \sin x) e^{-x} + c \text{ هي دالة أصلية للدالة } x \mapsto [-5 \cos x + \sin x] e^{-x}$$

$$\text{أي : } G(x) = (2 \cos x - 3 \sin x) e^{-x} + c \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي نبحث عنه كمايلي :}$$

$$G(0) = 3 \Rightarrow (2 \cos(0) - 3 \sin(0)) e^0 + c = 3$$

$$\Rightarrow 2 + c = 3$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$$\text{نتيجة : } G(x) = (2 \cos x - 3 \sin x) e^{-x} + 1$$

$$G'(x) = (-2 \sin x - 3 \cos x) e^{-x} - (2 \cos x - 3 \sin x) e^{-x} \quad \text{تحقيق :}$$

$$= (-2 \sin x - 3 \cos x - 2 \cos x + 3 \sin x) e^{-x}$$

$$= (\sin x - 5 \cos x) e^{-x}$$

$$= g(x)$$

التمرين 48

$f(x) = e^{-x} \sin x$ — IR دالة معرفة على

1 — أحسب المشتقات المتتالية للدالة f إلى غاية الرتبة 4 (نرمز لها f' : f'' : $f^{(3)}$: $f^{(4)}$)

2 — أوجد علاقة بين الدالة f ومشتقتها $f^{(4)}$ (ذات الرتبة 4)

3 — استنتج دالة أصلية F للدالة f على IR

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = F[(2n+1)\pi] - F[2n\pi]$

4 — أحسب u_0

5 — بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2} (e^{-\pi} + 1)$

6 — بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب أساسها

7 — أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الحل 48

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \quad 1$$

$$f''(x) = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -2e^{-x} \cos x$$

$$f^{(3)}(x) = 2e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = -2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x - 2e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \cos x = -4e^{-x} \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = -4e^{-x} \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = -4f(x)$$

2 — حسب السؤال السابق لدينا :

أي :

$$f(x) = -\frac{1}{4} f^{(4)}(x) \text{ و هو المطلوب}$$

منه :

3 - الدالة $x \mapsto f^{(3)}(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto f^{(4)}(x)$

إذن : الدالة $x \mapsto \frac{-1}{4} f^{(3)}(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{-1}{4} f^{(4)}(x)$

منه : $F(x) = \frac{-1}{4} f^{(3)}(x)$

أي : $F(x) = \frac{-1}{4} (2 e^{-x} \cos x + 2 e^{-x} \sin x)$

أي : $F(x) = \frac{-1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x)$

4 - من أجل $n = 0$ نحصل على : $u_0 = F(\pi) - F(0)$

$$= \left[\frac{-1}{2} e^{-\pi} (\cos \pi + \sin \pi) \right] - \left[\frac{-1}{2} e^0 (\cos 0 + \sin 0) \right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)$$

5 - ليكن n عدد طبيعي كفي إذن : $(2n+1)$ عدد فردي و $(2n)$ عدد زوجي .

$$\begin{cases} \cos 2n\pi = 1 \\ \sin 2n\pi = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \cos(2n+1)\pi = -1 \\ \sin(2n+1)\pi = 0 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$F[(2n+1)\pi] = -\frac{1}{2} e^{-(2n+1)\pi} (-1 + 0) = \frac{1}{2} e^{-(2n+1)\pi} \quad \text{إذن :}$$

$$F[2n\pi] = -\frac{1}{2} e^{-2n\pi} (1 + 0) = -\frac{1}{2} e^{-2n\pi}$$

$$F[(2n+1)\pi] - F[2n\pi] = \frac{1}{2} e^{-2n\pi-\pi} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2n\pi}\right) \quad \text{نتيجة :}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2n\pi} (e^{-\pi} + 1)$$

خلاصة : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{2} e^{-2n\pi} (e^{-\pi} + 1)$ و هو المطلوب .

6 - لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{2} e^{-2n\pi} (e^{-\pi} + 1)$

$$= \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1) (e^{-2\pi})^n$$

إذن : (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)$ و أساسها $e^{-2\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1) (e^{-2\pi})^n \quad - 7$$

$$= 0 \quad \text{لأن} \quad 0 < e^{-2\pi} < 1$$

التمرين 49

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

1 - بين أن f زوجية ثم أدرس تغيراتها .

2 - بين أن يمكن كتابة $f(x)$ من الشكل : $f(x) = 1 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$

3 - استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

لتكن g الدالة المعرفة على $D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ $g(x) = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$.
نسمي (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

4 - بين أن g فردية ثم أدرس تغيراتها .

- 5 - بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب معادلته .
 6 - أرسم المنحنى (C) .
 7 - أحسب مشتقة الدالة $h: x \mapsto (x+a) \ln |x+a| - x$ من أجل $x \neq a$
 8 - إستنتج دالة أصلية G للدالة g على المجال D

الحل - 49

1 - من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$$

نتيجة : f دالة زوجية . يمكن اقتصار دراستها على المجال $[0; 2[\cup]2; +\infty[$ كمايلي :

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2)^2}{x^2 - 4} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{4}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2)^2}{x^2 - 4} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{4}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

إذن : $f'(x)$ تتبع إشارة $-8x$ فقط لأن المقام موجب .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-8x$	+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	-	-
f(x)	1	$+\infty$	0	$+\infty$	1

ملاحظة : تم إستنتاج النهايات على المجال $]-\infty; 0[$ بالتناظر إلى محور الترتيب لأن f دالة زوجية .2 - ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$1 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{x^2 - 4 + a(x+2) + b(x-2)}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + (a+b)x + 2a - 2b - 4}{x^2 - 4}$$

$$\left. \begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \end{matrix} \right\} \text{ أي } \left. \begin{matrix} a+b=0 \\ a-b=2 \end{matrix} \right\} \text{ أي } \left. \begin{matrix} a+b=0 \\ 2a-2b-4=0 \end{matrix} \right\} \text{ نحصل على } f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

نتيجة : $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ و هو المطلوب

- 3 - الدالة $x \mapsto x$ أصلية لـ $x \mapsto 1$
 الدالة $x \mapsto \ln |x-2|$ أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{x-2}$
 الدالة $x \mapsto \ln |x+2|$ أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{x+2}$

إذن : الدالة $x \mapsto x + \ln |x-2| - \ln |x+2|$ هي دالة أصلية لـ fأي : $F(x) = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$ هي دالة أصلية للدالة f4 - من أجل كل x من D فإن $(-x) \in D$

$$g(-x) = -x + \ln \left| \frac{-x-2}{-x+2} \right|$$

$$\frac{-x-2}{-x+2} = \frac{-(x+2)}{-x+2} = \frac{x+2}{x-2} \quad \text{لأن} \quad -x + \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right|$$

$$\ln \left| \frac{a}{b} \right| = -\ln \left| \frac{b}{a} \right| \quad \text{لأن} \quad -x - \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

$$= - \left(x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right)$$

إذن g دالة فردية .

التغيرات : g معرفة على D

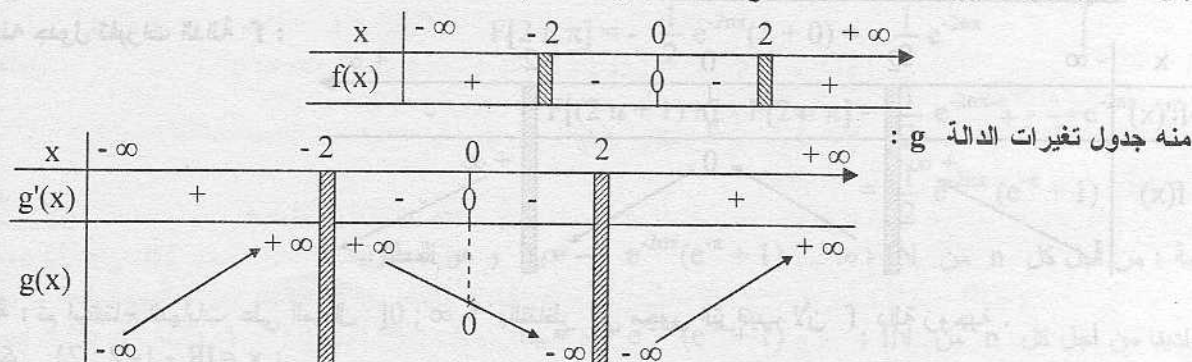
$$g(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2 + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \lim_{y \rightarrow 0^+} 2 + \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \lim_{y \rightarrow 0^-} 2 + \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln \left| \frac{x}{x} \right| = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على D و دالتها المشتقة $g'(x) = f(x)$ لأن g هي دالة أصلية للدالة f حسب السؤال (3) منه جدول إشارة $g'(x)$ هو نفسه جدول إشارة $f(x)$.
إذن : حسب جدول تغيرات الدالة f نستنتج إشارة $f(x)$ كما يلي :



ملاحظة : النهايات على المجال $]-\infty; 0[$ تستنتج بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ لأن الدالة g فردية .

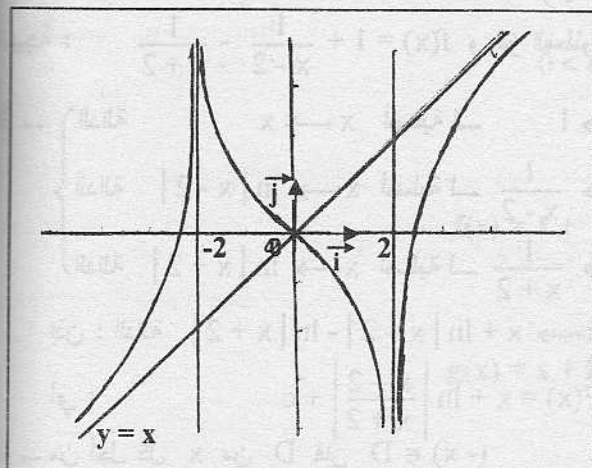
$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x}{x} \right| = 0 \quad -5$$

إذن : المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ عند $+\infty$ و $-\infty$

6- الإنشاء : لاحظ من جدول تغيرات الدالة g أن $g'(0) = 0$

و الدالة g' لا تغير إشارتها حول 0 إذن النقطة $A(0; 0)$

هي نقطة إنعطاف المنحنى (C)



$$h'(x) = \ln |x+a| + \frac{1}{x+a} (x+a) - 1 \quad - 7$$

$$= \ln |x+a| + 1 - 1$$

$$= \ln |x+a|$$

إذن : h هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln |x+a|$

$$- 8 \quad \text{الدالة } x \mapsto \ln |x-2| \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto (x-2) \ln |x-2| - x$$

$$\text{الدالة } x \mapsto \ln |x+2| \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto (x+2) \ln |x+2| - x$$

$$\text{إذن : الدالة } x \mapsto \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto (x-2) \ln(x-2) - x - [(x+2) \ln |x+2| - x]$$

$$\text{لأن } \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \ln |x-2| - \ln |x+2|$$

$$\text{منه : الدالة } x \mapsto \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \text{ هي دالة أصلية لـ } x \mapsto (x-2) \ln(x-2) - (x+2) \ln |x+2|$$

$$\text{نتيجة : } G(x) = \frac{1}{2} x^2 + (x-2) \ln |x-2| - (x+2) \ln |x+2| + c \text{ هي دالة أصلية للدالة } g.$$

التمرين - 50

$$f \text{ دالة معرفة على }]0; +\infty[\text{ بـ } f(x) = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3 \ln x}{2x^2} \text{ و } (C) \text{ منحناها في معلم}$$

متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

2 - أحسب $f(\sqrt{e})$ ثم أدرس تغيرات الدالة f

3 - عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

4 - أرسم (C)

5 - أثبت أن من أجل كل $x > 0$: $f(x) > 0$

6 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي k عدد حلول المعادلة : $4(k-1)x^2 - 3 + 6 \ln x = 0$

$$\text{لتكن } g \text{ دالة معرفة على }]0; +\infty[\text{ بـ } g(x) = x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x}$$

7 - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ فسر النتيجة هندسيا .

8 - أحسب $g'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة g

9 - عين معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) الممثل للدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

10 - بين أن (γ) يقبل نقطة إنعطاف يطلب إحداثياتها .

11 - أحسب $g(1/2) \times g(1)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة $g(x) = 0$ ؟

12 - بين أن (γ) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب معادلته

13 - أدرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) ثم أرسم (γ)

الحل - 50

1 - f معرفة على $]0; +\infty[$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln x}{x^2} &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3 \ln x}{2x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3}{2x} \times \frac{\ln x}{x} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ لأن}$$

$$f(\sqrt{e}) = 1 + \frac{3}{4e} - \frac{3 \ln(e^{1/2})}{2e} = 1 + \frac{3}{4e} - \frac{3}{4e} = 1 \quad - 2$$

$$f'(x) = \frac{-8x(3)}{16x^4} - \frac{\frac{3}{x}(2x^2) - 4x(3\ln x)}{4x^4} \quad \text{التغيرات :}$$

$$= \frac{-3x}{2x^4} - \frac{6x - 12x\ln x}{4x^4}$$

$$= \frac{-3x - 3x + 6x\ln x}{2x^4}$$

$$= \frac{6x(-1 + \ln x)}{2x^4}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-1 + \ln x)$ فقط لأن $\left. \begin{array}{l} 2x^4 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\}$ كما يلي :

منه جدول تغيرات الدالة f :

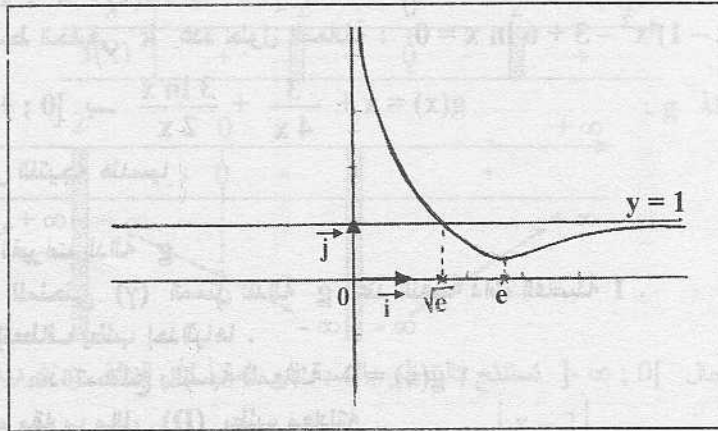
x	0	e	$+\infty$
$\ln x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$1 - \frac{3}{4e^2}$	1

$$f(e) = 1 + \frac{3}{4e^2} - \frac{3\ln e}{2e^2} = 1 + \frac{3}{4e^2} - \frac{3}{2e^2} = 1 - \frac{3}{4e^2} > 0$$

3 - المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى (C) على اليمين عند 0

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

4 - الإنشاء



5 - حسب الإنشاء فإن المنحنى (C) يقع دائما فوق محور الفواصل إذن : من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f(x) > 0$

$$6 - \text{ليكن } x > 0 : 4(k-1)x^2 - 3 + 6\ln x = 0 \Leftrightarrow 4kx^2 - 4x^2 - 3 + 6\ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4kx^2 = 4x^2 + 3 - 6\ln x$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4x^2 + 3 - 6\ln x}{4x^2}$$

$$\Leftrightarrow k = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3}{2x^2}\ln x$$

$$\Leftrightarrow k = f(x)$$

إذن : عدد حلول المعادلة $4(k-1)x^2 - 3 + 6\ln x = 0$ هو عدد نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = k$

مع المنحنى (C) الممثل للدالة f كمايلي :

لما $k \in]-\infty; 1 - \frac{3}{4e^2}[$ لا يوجد نقط تقاطع إذن : المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$

لما $k = 1 - \frac{3}{4e^2}$: يوجد نقطة تقاطع واحدة إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو $x = e$

لما $k \in]1 - \frac{3}{4e^2}, 1[$: يوجد نقطتي تقاطع إذن : المعادلة تقبل حلين مختلفين

لما $k \in [1; +\infty[$: يوجد نقطة تقاطع واحدة إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x} \quad -7$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[x^2 + \frac{3}{4} + 3 \ln x \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ لأن } = -\infty$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب لمنحنى الدالة g عند 0 على اليمين .

$$g'(x) = 1 + \frac{-12}{16x^2} + \frac{\frac{3}{x}(2x) - 6 \ln x}{4x^2} \quad -8$$

$$= 1 - \frac{3}{4x^2} + \frac{6 - 6 \ln x}{4x^2}$$

$$= 1 - \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3 \ln x}{2x^2}$$

$$= 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3 \ln x}{2x^2}$$

$$= f(x)$$

إذن : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f(x)$ أي $g'(x) > 0$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x} = +\infty$$

$$g(1) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \quad -9$$

$$g'(1) = f(1) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

إذن : معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي :

$$y = \frac{7}{4}x \quad \text{أي} \quad y = \frac{7}{4}(x-1) + \frac{7}{4}$$

$$g'(x) = f(x) \quad \text{لأن} \quad g''(x) = [g'(x)]' = f'(x) \quad -10$$

$$\text{إذن : } g''(x) = \frac{6x(-1 + \ln x)}{2x^4} \quad \text{حسب السؤال (2)}$$

منه جدول إشارة $g''(x)$ على $]0; +\infty[$: هو نفسه جدول إشارة $f'(x)$ كمايلي :

x	0	e	$+\infty$
$g''(x)$		0	$+$

إذن : g'' تتعدم عند e و تغير إشارتها .

منه : النقطة $A(e; g(e))$ هي نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة g

$$g(e) = e + \frac{3}{4e} + \frac{3}{2e} = \frac{4e^2 + 9}{4e} \quad : \text{حساب } g(e)$$

منه : $A(e; \frac{4e^2 + 9}{4e})$ هي نقطة إنعطاف المنحنى (γ)

$$g(1) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} > 0 \quad - 11$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{6}{4} - \frac{6 \ln 2}{2} = 2 - 3 \ln 2 < 0$$

g مستمرة على $[1/2; 1]$
 $g(1) \times g(1/2) < 0$

إذن : حسب مبرهنة الفيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا من المجال $]1/2; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x} - x \right] \quad - 12$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{4x} + \frac{3}{2} \times \frac{\ln x}{x} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ لأن } = 0$$

منه المنحنى (γ) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) عند $+\infty$ بمعادلته $y = x$

13 - وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) :

$$g(x) - x = \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x} = \frac{3}{2x} \left(\frac{1}{2} + \ln x \right)$$

إذن : إشارة $[g(x) - x]$ هي إشارة $\frac{1}{2} + \ln x$ فقط لأن $\frac{3}{2x} > 0$ كما يلي :

$$\frac{1}{2} + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

منه إشارة $g(x) - x$ كما يلي :

x	0	$1/\sqrt{e}$	$+\infty$
$g(x) - x$	$-$	0	$+$

نتيجة :

لما $x \in]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[$: (γ) تحت (D)

لما $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$: (γ) يقطع (D)

لما $x \in]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[$: (γ) فوق (D) الإثشاء :

