الدوال الأسية و اللوغارتمية

I ـــ الدوال الأسية

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على IR و تحقق الشرطين التاليين :

$$\left.\begin{array}{l}(1)........\ f'(x) = f(x)\\ (2)............f(0) = 1\end{array}\right\}$$

هذه الدالة تسمى الدالة الأسية النيبيرية و نرمز لها بالرمز $\exp$

إذن الشرطين (1) و (2) يكتبان من الشكل :

$$\left.\begin{array}{l}'(1)......\ \exp'(x) = \exp(x)\\ '(2)......\ ......\ \exp(0) = 1\end{array}\right\}$$

الخواص الجبرية للدالة exp

من أجل كل عددين حقيقيين x و y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا :

(1) $\exp(x) \neq 0$

(2) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

(3) $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

(4) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

(5) $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

العدد e

العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة $\exp$ أي $\exp(1) = e$ إذن : الخاصية (5) تصبح كمايلي : من أجل $x = 1$ نحصل على $\exp(n) = [\exp(1)]^n$ أي $\exp(n) = e^n$

نعمم إصطلاحا هذه النتيجة من أجل كل عدد حقيقي x بـــ $\exp(x) = e^x$ و نقرأ : " أسية x "

ملاحظة (1) : العدد e تقريبا يساوي $2,718281828$

ملاحظة (2) : الخواص الجبرية للدالة $\exp$ متلائمة مع خواص القوى الصحيحة لعدد حقيقي .

و تكتب باستعمال العدد e كمايلي :

(1) $e^0 = 1$ (3) $e^{x+y} = e^x \times e^y$ (5) $e^{nx} = (e^x)^n$

(2) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ (4) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

<u>نشاط ـــ 1</u>

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1 ـــ بين أن f دالة فردية

2 ـــ بين أن من أجل كل x من IR : $f(2x) = \dfrac{2 f(x)}{1 + [f(x)]^2}$

<u>الحـل ـــ 1</u>

1 ـــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$

و لدينا :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{e^x} - 1}{\dfrac{1}{e^x} + 1}$$

$$= \frac{1 - e^x}{e^x} \times \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{-(e^x - 1)}{e^x + 1}$$

إذن : الدالة f فردية . $= -f(x)$

2 ـ ليكن $x \in IR$ إذن : $2x \in IR$

و لدينا :

$$\frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2} = \frac{\frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1}}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2}$$

$$= \frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1} \times \frac{(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{2(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x} + 2e^x + 1 + e^{2x} - 2e^x + 1}$$

$$= \frac{2(e^{2x} - 1)}{2(e^{2x} + 1)}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

و هو المطلوب . $= f(2x)$

<u>نشاط ـ 2</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

بين أن من أجل كل x من IR : $f(-x) + f(x) = 2$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

<u>الحـل ـ 2</u>

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و لدينا :

$$f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

لأن $e^{-x} \times e^x = e^0 = 1$ $\quad = \dfrac{e^{-x}(3 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} + \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

$$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$= \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$= \frac{2 + 2e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{2(1 + e^x)}{1 + e^x}$$

و هو المطلوب $= 2$

التفسر الهندسي : $f(-x) + f(x) = 2 \Rightarrow f(-x) = 2 - f(x)$

$$\Rightarrow f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$$

إذن : النقطة ذات الإحداثيات $(0 ; 1)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f .

حلول المعادلة $f' = kf$

مبرهنة :

k عدد حقيقي .

توجد دالة وحيدة f للمتغير الحقيقي x قابلة للاشتقاق على IR و تحقق الشروط التالية :

$$\begin{cases} f(0) = 1 & (1) \\ f'(x) = k\,f(x) & (2) \end{cases}$$ و هي معرفة بـ $f(x) = e^{kx}$

نتيجة : الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على IR حيث من أجل كل عددين حقيقيين x ، y :

$f(x+y)=f(x)\times f(y)$ هي الدوال من الشكل : $x\longmapsto e^{kx}$ حيث $k\in IR$

نتيجة أساسية :

الدالة f المعرفة على IR بـ $x\longmapsto c\,e^{kx}$ حيث $c\in IR$ و $k\in IR$ هي دالة قابلة للاشتقاق على IR

و دالتها المشتقة $f'(x)=c\,k\,e^{kx}$

مثال : الدوال f القابلة للاشتقاق على IR حيث $f'(x)=2f(x)$ هي دوال من الشكل $f(x)=c\,e^{2x}$ حيث $c\in IR$

لأن : $f'(x)=2c\,e^{2x}=2f(x)$

لكن حذار ! من بين هذه الدوال توجد دالة وحيدة تحقق الشرط $f(x)=a$ حيث a عدد حقيقي ثابت .

مثلا : $f(1/2)=e^2$ أي $c\,e^{2(1/2)}=e^2$

أي : $c.e=e^2$

منه : $c=e^2/e=e$

إذن : الدالة المطلوبة هي $f(x)=e.e^{2x}=e^{2x+1}$

تغيرات الدالة exp

الدالة exp معرفة على IR

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

الدالة exp قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $\exp'(x)=e^x$

إذن : الدالة exp متزايدة تماما على IR لأن $e^x>0$

منه : **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+		
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

نتائج : منحنى الدالة (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب في جوار $-\infty$

الدالة exp قابلة للاشتقاق عند 0 و $\exp'(0)=e^0=1$

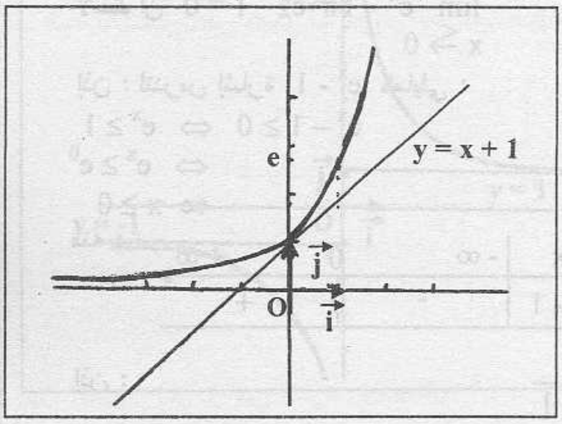
لكن تعريفا : $$\exp'(0)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$$

إذن : $$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

معادلة مماس منحنى الدالة exp عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل : $y=1(x-0)+1$ أي $y=x+1$

منه : أحسن تقريب تآلفي للدالة exp عند 0 هو الدالة $x\longmapsto x+1$

منحنى الدالة exp



المعادلات و المتراجحات :

بما أن الدالة exp متزايدة تماما فإن من أجل كل عددين حقيقيين x ؛ y لدينا ما يلي :

$e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$ (1)

$e^x\geq e^y \Leftrightarrow x\geq y$ (2)

حذار ! المعادلة $e^x=y$ حيث $y\leq0$ لا تقبل حلولا في IR لأن $e^x>0$

أمثلة :

1 ــ $e^{2x}+3=0 \Leftrightarrow e^{2x}=-3$: إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR .

2 ــ $e^{-2x+1}-1=0 \Leftrightarrow e^{-2x+1}=1$

$\Leftrightarrow e^{-2x+1}=e^0$

$\Leftrightarrow -2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1/2$

3 — $e^{-2x-1} - e^{x} < 0 \Leftrightarrow e^{-2x-1} < e^{x}$

$\Leftrightarrow -2x - 1 < x$

$\Leftrightarrow -3x < 1$

$\Leftrightarrow x > -1/3$

4 — $e^{2x} > 2 - e^{x} \Leftrightarrow e^{2x} + e^{x} - 2 > 0$

لحل هذه المتراجحة نضع $y = e^{x}$ بشرط $y > 0$ لأن $e^{x} > 0$

إذن : المتراجحة تكافئ $y^2 + y - 2 > 0$ و $y = e^{x}$

تكافئ $(y + 2)(y - 1) > 0$ و $y = e^{x}$

تكافئ $(e^{x} + 2)(e^{x} - 1) > 0$

تكافئ $e^{x} - 1 > 0$ لأن $e^{x} + 2 > 0$

تكافئ $e^{x} > 1$

تكافئ $e^{x} > e^{0}$

تكافئ $x > 0$

إذن : حلول المتراجحة هي المجال $]0 ; +\infty[$

<u>نشاط</u> :

f دالة معرفة بـــ $f(x) = \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ و (C) منحناها في معلم .

1 — أدرس تغيرات الدالة f

2 — أكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) .

3 — أنشئ المنحنى (C)

<u>الحـل</u> :

1 — f معرفة من أجل $e^{x} - 1 \neq 0$ أي $e^{x} \neq 1$ أي $e^{x} \neq e^{0}$ أي $x \neq 0$

منه : f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{0}+1}{e^{x}-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{2}{e^{x}-1}$$

لاحظ أن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} e^{x} - 1 = e^{0} - 1 = 0$

إذن : لندرس إشارة $e^{x} - 1$ كمايلي :

$e^{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{x} \geq e^{0}$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

منه :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x} - 1$		$-$	0	$+$	

إذن :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{2}{e^{x}-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^0 + 1}{e^x - 1}$$
$$= \lim_{\substack{y \to 0 \\ >}} \frac{2}{y}$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$
$$= \frac{1 + 0}{1 - 0} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$
$$= 1$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^2}$$
$$= \frac{-e^x - e^x}{(e^x - 1)^2}$$
$$= \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR^* : $f'(x) < 0$ لأن $-2e^x < 0$ و $(e^x - 1)^2 > 0$

منه جدول التغيرات :

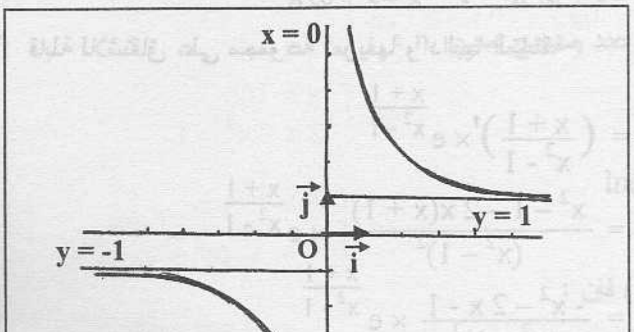
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

2 ــ المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى (C)

المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ **الإنشاء :**



دراسة تغيرات الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$

لتكن u دالة معرفة على مجال I جزئي من IR و قابلة للاشتقاق على I نعرف الدالة f بــ $f(x) = e^{u(x)}$

تغيرات الدالة f :

f معرفة على I

النهايات : ليكن $\alpha \in IR \cup \{-\infty ; +\infty\}$

لدينا النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$	$B \in IR$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} e^{u(x)}$	e^B	0	$+\infty$

مثال : $\lim\limits_{x \to -1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to -1/2} e^y = e^{-1/2}$

لأن $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}$

الدالة المشتقة : الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I ودالتها المشتقة $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $u'(x)$

نشاط :

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$

الحل :

f معرفة من أجل $x^2 - 1 \neq 0$ أي $x \notin \{-1 ; 1\}$

منه : f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to 0} e^y = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{-2}$ إذن : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to -1/2} e^y = e^{-1/2}$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{-2}$ إذن : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to -1/2} e^y = e^{-1/2}$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = -\infty$ إذن : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x+1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y \to 0} e^y = e^0 = 1$

f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)' \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$ نقبل أن α' هو مشتق α .

$$= \frac{x^2 - 1 - 2x(x+1)}{(x^2-1)^2} \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x - 1}{(x^2-1)^2} \times e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-x^2 - 2x - 1$ لأن $e^{\frac{x+1}{x^2-1}} > 0$ و $(x^2-1)^2 > 0$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-(x^2 + 2x + 1)$ أي $-(x+1)^2$ - كمايلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-(x+1)^2$	$-$	‖	$-$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↘ $e^{-1/2}$		‖	$e^{-1/2}$ ↘ 0	‖	$+\infty$ ↘ 1	

II . الدالة اللوغارتمية النيبيرية

تمهيد : الدالة exp متزايدة تماما على IR و تأخذ قيمها على المجال $]0\,;+\infty[$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a يوجد عدد حقيقي وحيد b يحقق $e^b = a$

هذا العدد b يسمى اللوغاريتم النيبيري للعدد الحقيقي الموجب a

و نرمز له بـ $\ln(a)$ إذن : $b = \ln(a) \Leftrightarrow \begin{cases} e^b = a \\ a > 0 \end{cases}$

مثلا : $b = \ln(3) \Rightarrow e^b = 3$ لأن $3 > 0$

تعريف :

نسمي دالة لوغارتمية نيبيرية الدالة التي نرمز لها بالرمز $\ln$ و المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ $x \longmapsto \ln x$

نتائج مباشرة :

1 ـ من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$ فإن : $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$

2 ـ من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$ فإن : $e^{\ln(x)} = x$

3 ـ من أجل كل x من IR فإن : $\ln(e^x) = x$

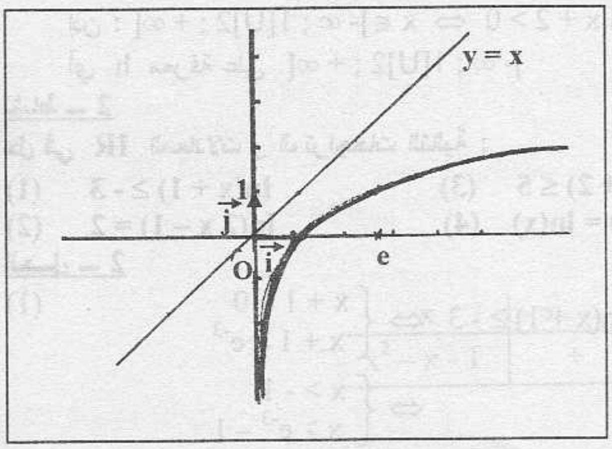
4 ـ $e^0 = 1$ إذن : $\ln(1) = 0$

5 ـ $e^1 = e$ إذن : $\ln(e) = 1$

خاصية :

منحنيا الدالتين ln و exp في معلم متعامد و متجانس متناظران بالنسبة إلى المستقيم المنصف الأول ذو المعادلة $y = x$.

منه : منحنى الدالة ln كما يلي :



ملاحظة : تم رسم هذا المنحنى باستعمال الخاصية السابقة أي برسم نظير منحنى الدالة exp بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

نتائج : من المنحنى الممثل لدالة ln نستنتج مايلي :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad (2)$$

خواص جبرية :

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ؛ b ، من أجل كل عدد صحيح نسبي n :

(1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

(2) $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ إذن : $\ln(1/a) = -\ln(a)$

(3) $\ln(a^n) = n\ln(a)$ منه $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{1/2}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

المعادلات و المتراجحات :

بما أن الدالة ln متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$ (حسب المنحنى) فإن :

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y لدينا :

(1) $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$

(2) $\ln(x) \geq \ln(y) \Leftrightarrow x \geq y$

نتائج : حسب الخاصية (1) فإن $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow x = 1$

حسب الخاصية (2) $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1)$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

منه جدول إشارة العدد $\ln(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	

نشاط ـ 1

عين مجموعات تعريف الدوال التالية : **(1)** $f(x) = \ln(x+1)$

(2) $g(x) = \ln(x^2)$

(3) $h(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

الحـل ـ 1

1 ـ f معرفة من أجل $x + 1 > 0$ أي $x > -1$

إذن : f معرفة على $]-1 ; +\infty[$

2 ـ g معرفة من أجل $x^2 > 0$ أي $x \neq 0$

إذن : g معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

3 ـ h معرفة من أجل $x^2 - 3x + 2 > 0$

لندرس إشارة $x^2 - 3x + 2$ كمايلي : $\Delta = 9 - 8 = 1$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

أي h معرفة على $]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

نشاط ـ 2

حل في IR المعادلات و المتراجحات التالية :

(1) $\ln(x+1) \geq -3$ **(3)** $\ln(x+2) \leq 5$

(2) $\ln(2x-1) = 2$ **(4)** $\ln(x^2+1) = \ln(x)$

الحـل ـ 2

(1)

$$\ln(x+1) \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \geq e^{-3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq e^{-3} - 1 \end{cases}$$

$x \geq e^{-3} - 1 \Leftrightarrow$ إذن مجموعة الحلول هي المجال $[e^{-3} - 1 ; +\infty[$

(2)

$$\ln(2x-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 = e^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ 2x = e^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ x = \frac{1}{2}(e^2 + 1) \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2}(e^2+1) \Leftrightarrow$ إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا $\{\frac{e^2+1}{2}\}$

(3)

$$\ln(x+2) \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 \leq e^5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq e^5 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2 ; e^5 - 2]$$

(4) دائما محقق $\ln(x^2+1)=\ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x>0 \\ x^2+1=x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-x+1=0 \text{ ....(1)} \end{cases}$

نحل المعادلة (1) في المجال $]0\,;+\infty[$

$\Delta = 1-4<0$ إذن المعادلة لا تقبل حلولا .

نتيجة : المعادلة $\ln(x^2+1)=\ln x$ لا تقبل حلولا في IR .

نشاط ــ 3

حل في IR المتراجحة $\ln(x^2-1)\le \ln(x)$

الحـل ــ 3

$$\ln(x^2-1)\le \ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x>0 \\ x^2-1\le x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[\\ x\in]0\,;+\infty[\\ x^2-1-x\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in]1\,;+\infty[& (1) \\ x^2-1-x\le 0 & (2) \end{cases}$$

لندرس إشارة كثير الحدود : x^2-x-1

$\Delta = 1+4=5$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt5}{2} \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt5}{2} \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt5}{2}$		$\frac{1+\sqrt5}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1		+	0	-	0	+	

إذن : $x^2-1-x\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1-\sqrt5}{2}\,;\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right]$

منه : الشروط (1) و (2) تصبح : $\begin{cases} x\in]1\,;+\infty[\\ x\in\left[\dfrac{1-\sqrt5}{2}\,;\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right] \end{cases}$

أي : $x\in\left]1\,;\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right]$ و هي حلول المتراجحة المطلوبة .

نشاط ــ 4

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $\ln(x-1)(x+2)=2\ln(2)$

(2) $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln(2)$

(3) $2[\ln(x)]^2+\ln(x)-6=0$

الحـل ــ 4

(1) $\ln(x-1)(x+2)=2\ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)>0 \\ \ln(x-1)(x+2)=\ln(2^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[\\ (x-1)(x+2)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ x^2 + x - 6 = 0 \ \dots\dots\dots (\alpha) \end{cases}$$

حل المعادلة (α) $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

منه :

$$\ln(x-1)(x+2) = 2\ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ x \in \{2 ; -3\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{2 ; -3\}$ إذن : المعادلة تقبل حلين هما (-3) و (2)

(2)

$$\ln(x-1) + \ln(x+2) = 2\ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ \ln(x-1)(x+2) = \ln(2^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > +1 \\ (x-1)(x+2) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]1 ; +\infty[\\ x \in \{2 ; -3\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$ إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو (2)

(3)

$$2[\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = \ln(x) \\ 2y^2 + y - 6 = 0 \end{cases}$$

لنحل في IR المعادلة $2y^2 + y - 6 = 0$ كمايلي :

$\Delta = 1 + 48 = 49$

إذن :

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-1+7}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\ y_2 = \dfrac{-1-7}{4} = -2 \end{cases}$$

منه المعادلة تكافئ

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3/2 = \ln(x) \\ \text{أو} \\ -2 = \ln(x) \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x = e^{3/2} \\ \text{أو} \\ x = e^{-2} \end{cases}$$

إذن : المعادلة تقبل حلين : $\{e^{-2} ; e^{3/2}\}$

النشاط – 5

حل في IR المتراجحة : $\ln(x-1)(x+2) \le 2\ln(2)$

الحـل – 5

$$\ln(x-1)(x+2) \le 2\ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) > 0 \\ \ln(x-1)(x+2) \le \ln(4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ (x-1)(x+2) \le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ x^2 + x - 6 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ x \in [-3 ; 2] \end{cases}$$

$x \in [-3\,;-2[\,\cup\,]1\,;2]$ $\Leftrightarrow$ و هي حلول المتراجحة .

دراسة تغيرات الدالة ln

الدالة ln مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بــ $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

إذن : من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$ فإن $\dfrac{1}{x} > 0$ منه الدالة ln متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln(x))'$				$+$			
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

لاحظ أن قيمة العدد المشتق للدالة ln عند 1 هو $1/1 = 1$

منه : تعريفا $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1$ أي $\displaystyle (\ln(1))' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

منه : معادلة مماس منحنى الدالة ln عند النقطة ذات الفاصلة 1 تكتب من الشكل : $y = x - 1$

إذن : أحسن تقريب تآلفي للدالة ln عند 1 هو الدالة $x \longmapsto x - 1$

<u>نشاط ــ 6</u>

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بــ $f(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x)$ ثم أرسم منحناها

<u>الحــل ــ 6</u>

f معرفة من أجل $x > 0$ إذن : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} [\ln(x)]^2 - \ln(x) = +\infty$$

لأن $\displaystyle \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x)\,[\ln(x) - 1] = +\infty$$

لأن $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

f قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 \times (\ln(x))' \times \ln(x) - (\ln(x))'$$

$$= \frac{2}{x}\ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}[2\ln(x) - 1]$$

إشارة $f'(x)$ على $]0\,;+\infty[$ هي إشارة الجداء $\dfrac{1}{x}(2\ln x - 1)$ كمايلي :

$$2\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \ln x \geq 1/2$$
$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln(e^{1/2})$$
$$\Leftrightarrow x \geq e^{1/2}$$
$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$$

منه : جدول الإشارة التالي :

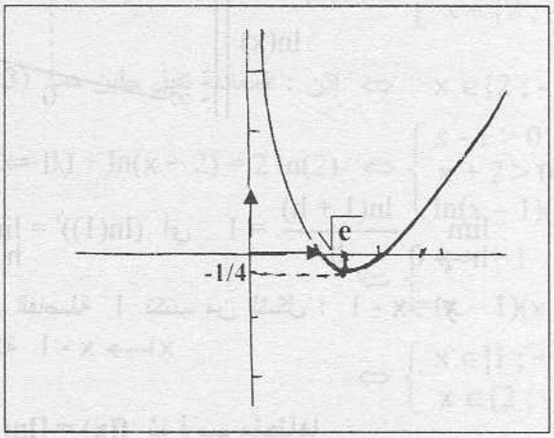
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$1/x$			$+$		
$2\ln x - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : جدول التغيرات :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\sqrt{e}) = (\ln\sqrt{e})^2 - \ln(\sqrt{e}) = (1/2)^2 - 1/2 = -1/4$$

الإنشاء :



III. الدالة اللوغاريتم العشري log

تعريف : نسمي دالة لوغاريتم عشري الدالة التي نرمز لها بـ log و المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

خواص الدالة log

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ؛ b و من أجل كل عدد صحيح نسبي n :

$$\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1 \quad (1)$$

$$\log(a\,b) = \log(a) + \log(b) \quad (2)$$

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad (3)$$

$\log(a^n) = n\log(a)$ (4) إذن $\log(10^n) = n\log(10) = n$

نتيجة هامة :

إذا كان x عدد حقيقي يحقق $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن $n \leq \log(x) \leq n+1$ لأن الدالة log متزايدة تماما على $]0 ; +\infty[$

نشاط ــ 7

حل في IR_+^* المعادلات و المتراجحات التالية :

$\log(x) = 2$ (1)

$\log(x) \leq -4$ (2)

$\log(x) > 3$ (3)

الحـل ــ 7

في كل المعادلات و المتراجحات $x > 0$ لأن الدالة log معرفة على $]0 ; +\infty[$

(1) $\log(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} = 2$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 2\ln(10)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln 100$

$\Leftrightarrow x = 100$

2 ــ $\log(x) \leq -4 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} + 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)+4\ln(10)}{\ln(10)} \le 0$$

$\ln 10 > 0$ لأن $\Leftrightarrow \ln(x)+\ln(10^4) \le 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) \le -\ln 10^4$

$\Leftrightarrow \ln(x) \le \ln(10^{-4})$

$\Leftrightarrow 0 < x \le 10^{-4}$

(3) $\log(x) > 3 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} > 3$

$\Leftrightarrow \ln(x) > 3\ln(10)$

$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(10^3)$

$\Leftrightarrow x > 10^3$

دراسة تغيرات الدالة ln o u :

u دالة عددية معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I جزئي من IR

نعرف الدالة f كمايلي : $f : x \longmapsto \ln(u(x))$

تغيرات الدالة f :

f معرفة من أجل $u(x) > 0$ مع $x \in I$

إذا كان α عنصر من المجموعة $IR \cup \{-\infty ; +\infty\}$ فإن :

$\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)$	0^+	$+\infty$	$B \in]0 ; +\infty[$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \ln(u(x))$	$-\infty$	$+\infty$	$\ln(B)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة : $f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$

إذن : إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريف الدالة f هي إشارة $u'(x)$ لأن $u(x) > 0$ حسب مجموعة تعريف الدالة f .

مثال : أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

الحـل :

f معرفة من أجل : $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$

لندرس إشارة $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ كما يلي

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+1				$+$			
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{x^2+1}{x^2-1}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

إذن : $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$ من أجل $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

منه : f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ منه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1+1}{y} = +\infty$ منه $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1+1}{y} = +\infty$ منه $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 1} \ln(y) = \ln(1) = 0$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$$

$$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \times \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

إذن : $f'(x)$ من إشارة $-4x$ لأن $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$ و $(x^2-1)^2 > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-4x$		$+$	‖	‖‖‖	‖	$-$	

منه : جدول إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	‖‖‖	‖	$-$	

منه : جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	‖‖‖	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖	‖‖‖	‖ $+\infty$	↘	0

نشاط ـ 8

f دالة معرفة على $]-2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x+2)$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس.
عين فاصلة النقطة التي يكون فيها مماس المنحنى (C) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = x$

الحـل ـ 8

f قابلة للاشتقاق على $]-2 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

يكون المماس عند النقطة ذات الفاصلة x يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = x$ إذا و فقط إذا كان معامل توجيهه 1 أي $f'(x) = 1$

أي $\frac{1}{x+2} = 1$ أي $x + 2 = 1$

منه : $x = -1$ أي نقطة التماس لها الإحداثيات $(-1 ; f(-1))$ أي $(-1 ; 0)$

نشاط ـ 9

إليك جدول تغيرات دالة u على المجال $]-3 ; +\infty[$

x	-3		1		$+\infty$
$u(x)$	3	↘	e	↗	$+\infty$

المطلوب: إستنتج جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $]-3 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(u(x))$

الحـل ـ 9

لاحظ أن من أجل كل x من $]-3 ; +\infty[$ فإن $u(x) > 0$ إذن : f معرفة على $]-3 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -3} u(x) = 3$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -3} f(x) = \ln 3$

$u(1) = e$ إذن : $f(1) = \ln(e) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$

إشارة $f'(x)$ على $]-3\,;+\infty[$ هي إشارة $u'(x)$ أي f لها نفس إتجاه تغير الدالة u على المجال $]-3\,;+\infty[$ كمايلي :

x	-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\ln 3$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

دراسة الدالة $x \longmapsto e^{-\lambda x}$ **حيث :** $\lambda > 0$

ليكن $\lambda > 0$ نعرف الدالة f على IR بـ $f(x) = e^{-\lambda x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-\lambda x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} -\lambda x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} -\lambda x = -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و $f'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ إذن $f'(x) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

دراسة الدالة $x \longmapsto e^{-\lambda x^2}$ **حيث :** $\lambda > 0$

ليكن $\lambda > 0$ نعرف الدالة f على IR بـ $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ نسمي (Γ_λ) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-\lambda x^2} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} -\lambda x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x^2} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} -\lambda x^2 = -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و $f'(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ إذن $f'(x)$ من إشارة $-x$

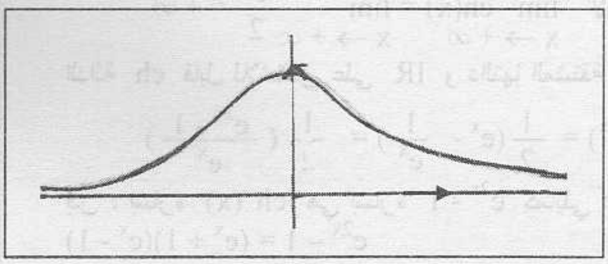
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	

منه : جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

ملاحظة : المنحنيات (Γ_λ) تسمى منحنيات Gauss و هي على شكل ناقوس . تستعمل خاصة في الإحتمالات و الإحصاء و الأكثر إستعمالا هو $(\Gamma_{0,5})$ ذو المعادلة $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

الإنشاء :



المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = a\,y + b$

البحث عن حلول المعادلة التفاضلية $y' = a\,y + b$ ذات المجهول y هو البحث عن الدوال العددية من الشكل $y = f(x)$ و التي تحقق الشروط التالية :

(1) f قابلة للاشتقاق
(2) $f'(x) = a f(x) + b$
ملاحظة : a و b عددان حقيقيان .
غالبا المعادلة $y' = a y + b$ تكتب من الشكل $\frac{dy}{dx} = a y + b$
مبرهنة :
a ؛ b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$
حلول المعادلة التفاضلية $y' = a y + b$ في المجموعة IR هي الدوال f من الشكل
$f(x) = c e^{ax} - b/a$ حيث c عدد حقيقي ثابت .
مثال : حل في IR المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 3$
الحـــل : $y' - 2y = 3 \Leftrightarrow y' = 2y + 3$
إذن : الحلول هي الدوال f حيث : $f : x \longmapsto c e^{2x} - \frac{3}{2}$ $(b = 3 ; a = 2)$
تحقيق : ليكن $f(x) = c e^{2x} - \frac{3}{2}$
إذن : $f'(x) = 2 c e^{2x}$
منه : $f'(x) - 2 f(x) = 2 c e^{2x} - 2\left(c e^{2x} - \frac{3}{2}\right)$
$= 2 c e^{2x} - 2 c e^{2x} + 3$
$= 3$ إذن فعلا الدالة f هي حل للمعادلة $y' - 2y = 3$

حالة خاصة : $b = 0$
حلول المعادلة $y' = a y$ هي الدوال f حيث $f(x) = c e^{ax}$ حيث c عدد حقيقي ثابت .
الدالتان تجب و جيب الزائديتان
نسمي الدالة تجب الزائدية و الدالة جيب الزائدية الدالتين المعرفتين على IR على الترتيب ch و sh و المعرفتين كمايلي :
$$Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
<u>**نشاط ــ 9**</u>
1 ــ أثبت أن الدالة ch زوجية .
2 ــ أدرس تغيرات الدالة ch على المجال $[0 ; +\infty[$
3 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة ch على IR
4 ــ أثبت أن الدالة sh فردية .
5 ــ أدرس تغيرات الدالة sh على المجال $[0 ; +\infty[$
6 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة sh على IR
ليكن (C_1) منحنى الدالة ch في معلم متعامد و متجانس و (C_2) منحنى الدالة sh في نفس المعلم
7 ــ أدرس الأوضاع النسبية لـــ (C_1) و (C_2)
8 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} [ch(x) - sh(x)]$ فسر النهاية هندسيا .

<u>الحـــل ــ 9</u>
1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$
إذن : $ch(-x) = ch(x)$ منه الدالة ch زوجية .
2 ــ التغيرات على المجال $[0 ; +\infty[$
$\lim_{x \to +\infty} ch(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$
الدالة ch قابل للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :
$$ch'(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} + e^{x}) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)$$
إذن : إشارة $ch'(x)$ هي إشارة $e^{2x} - 1$ كمايلي :
$e^{2x} - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x+1	+		+
e^x-1	-	0	+
$(e^x+1)(e^x-1)$	-	0	+

3 ــ منه جدول تغيرات الدالة ch على IR : الدالة زوجية إذن : نستنتج الجزء على المجال $]-\infty\,;\,0[$ (بالتناظر)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		-	0	+	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x)\in IR$ و
$$sh(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=\frac{-(e^{x}-e^{-x})}{2}$$
إذن : $sh(-x)=-sh(x)$ منه الدالة sh فردية .

5 ــ تغيرات الدالة sh على $]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} sh(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$ لأن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

الدالة sh قابل للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة هي :
$$sh'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=ch(x)$$
و حسب السؤال (3) فإن $ch(x)>0$ من أجل كل x من IR .
إذن جدول تغيرات الدالة sh كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh'(x)$			+		
$sh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6 ــ الوضع النسبي لــ (C_1) و (C_2) :
$$ch(x)-sh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$=\frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}$$
$$=e^{-x}>0$$
إذن : المنحنى (C_1) يقع دائما فوق المنحنى (C_2) .

7 ــ $$\lim_{x\to+\infty}[ch(x)-sh(x)]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

التفسير الهندسي : لما x يؤول إلى $+\infty$ فإن المنحنيان (C_1) و (C_2) متجاوران نقول أنهما متقاربان .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

بسط العبارات التالية :

(1) $(e^x)^3 \times e^{-5x}$ (2) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{-2x}}$ (3) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$

الحــل ــ 1

(1) $(e^x)^3 \times e^{-5x} = e^{3x} \times e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x}$

(2) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} = e^{2x+3+2x} = e^{4x+3}$

(3) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} + \dfrac{e^{-x}}{e^{2x}} = e^{x-2x} + e^{-x-2x} = e^{-x} + e^{-3x}$

التمرين ــ 2

بين صحة كل من المساواة التالية :

(1) $\dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ (2) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

(3) $(e^x + e^{-x})^2 = \dfrac{(e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}}$ (4) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

الحــل ــ 2

(1) $\dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{e^{-2x}(e^{2x} - 1)}{e^{-2x}(e^{2x} + 1)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ لأن $e^{-2x}\, e^{2x} = e^0 = 1$

(2) $e^{-x} - e^{-2x} = e^{-2x}(e^x - 1) = \dfrac{1}{e^{2x}}(e^x - 1) = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

(3) $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2\, e^x\, e^{-x} + e^{-2x} = e^{-2x}(e^{4x} + 2\, e^{2x} + 1)$

$$= \frac{(e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}}$$

(4) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

التمرين ــ 3

$(u_n)_{n\in IN}$ **متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ** $u_n = \dfrac{e^{n-1}}{e^n}$

بين أن (u_n) متتالية ثابتة .

الحــل ــ 3

ليكن $n \in IN$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{e^{n+1-1}}{e^{n+1}} - \frac{e^{n-1}}{e^n}$$

$$= \frac{e^n}{e^{n+1}} - \frac{e^{n-1}}{e^n}$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e}$$

$= 0$ إذن : (u_n) ثابتة

ملاحظة : يمكن إثبات ذلك مباشرة من عبارة u_n كمايلي :

من أجل كل n من IN لدينا : $u_n = \dfrac{e^{n-1}}{e^n} = \dfrac{1}{e}$ إذن : (u_n) ثابتة .

التمرين – 4

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $e^{2x} = 1$

(2) $e^{-5x} = e$

(3) $e^{x} = e^{-2x}$

الحـل – 4

(1) $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^{0}$
$\Leftrightarrow 2x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

(2) $e^{-5x} = e \Leftrightarrow e^{-5x} = e^{1}$
$\Leftrightarrow -5x = 1$
$\Leftrightarrow x = -1/5$

(3) $e^{x} = e^{-2x} \Leftrightarrow x = -2x$
$\Leftrightarrow x = 0$

التمرين – 5

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $e^{-x^2} = 1/e$ (3) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$ (5) $e^{2x+1} - (e^{x})^3 = 0$

(2) $e^{x+3} = e^{4/x}$ (4) $e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{1/x}$

الحـل – 5

(1) $e^{-x^2} = 1/e \Leftrightarrow e^{-x^2} = e^{-1}$
$\Leftrightarrow -x^2 = -1$
$\Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases}$

(2) $e^{x+3} = e^{4/x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 3 = \frac{4}{x} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x+4)(x-1) = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = 1 \text{ أو } x = -4 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x \in \{1 ; -4\}$

(3) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \Leftrightarrow x^2 = -3(x+1)$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$

نحل المعادلة $x^2 + 3x + 3 = 0$ كمايلي : $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$ إذن لا تقبل حلول في R

نتيجة : المعادلة $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$ لا تقبل حلول في R .

(4) $e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{1/x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \neq 0 \\ x \neq 0 \\ \frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ x \neq 0 \\ x^2 + 4x = 6 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{0 ; 6\} \\ (x + 6)(x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{0 ; 6\} \\ x \in \{1 ; -6\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \{1 ; -6\}$$

(5) $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^{3x}$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = 3x$

$\Leftrightarrow x = 1$

<u>التمرين ــ 6</u>

حل في IR المتراجحات التالية :

(1)	$e^{3x} \leq 1$	(5)	$e^{x+1} > e^{-2/x}$
(2)	$e^x > e^2$	(6)	$e^{x^2} > (e^3)^4\, e^{-x}$
(3)	$e^x < e^{-2x}$	(7)	$e^{x-x^2} \geq 1$
(4)	$e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$	(8)	$(e^x - 1)(e^x - e^2) < 0$

<u>الحـــل ــ 6</u>

(1) $e^{3x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{3x} \leq e^0$

$\Leftrightarrow 3x \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 0$ إذن : مجموعة الحلول هي المجال $]-\infty ; 0]$

(2) $e^x > e^2 \Leftrightarrow x > 2$ إذن : مجموعة الحلول هي $]2 ; +\infty[$

(3) $e^x < e^{-2x} \Leftrightarrow x < -2x$

$\Leftrightarrow 3x < 0$

$\Leftrightarrow x < 0$ إذن : مجموعة الحلول هي $]-\infty ; 0[$

(4) $e^{2x^2} \leq e^{5x+3} \Leftrightarrow 2x^2 \leq 5x + 3$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

لندرس إشارة كثير الحدود $2x^2 - 5x - 3$ كمايلي :

$\Delta = 25 + 24 = 49$

منه $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5+7}{4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-7}{4} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-1/2$		3		$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$		+	0	-	0	+	

إذن حلول المتراجحة $e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$ هي $[-1/2 ; 3]$

(5) $e^{x+1} > e^{-2/x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 1 > -2/x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 1 + 2/x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2 + x + 2}{x} > 0 \end{cases}$$

لندرس إشارة الجداء $x(x^2 + x + 2)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		-	‖	+	
$x^2 + x + 2$		+	‖	+	
$\dfrac{x^2 + x + 2}{x}$		-	‖	+	

منه حلول المتراجحة هي المجال : $]0 ; +\infty[$

(6) $e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x} \Leftrightarrow e^{x^2} > e^{12-x}$
$\Leftrightarrow x^2 > 12 - x$
$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 > 0$
$\Leftrightarrow (x+4)(x-3) > 0$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -4[\cup]3 ; +\infty[$ و هي مجموعة الحلول .

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$(x+4)(x-3)$		+	0	-	0	+	

(7) $e^{x-x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x-x^2} \geq e^0$
$\Leftrightarrow x - x^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x(1-x) \geq 0$
$\Leftrightarrow x \in [0 ; 1]$ و هي مجموعة الحلول

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(1-x)$		-	0	+	0	-	

(8) $(e^x - 1)(e^x - e^2) < 0$

لندرس إشارة كل من $(e^x - 1)$ ثم $(e^x - e^2)$ كمايلي :

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0$
$\Leftrightarrow x \geq 0$ إذن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		-	0	+	

$e^x - e^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^2$
$\Leftrightarrow x \geq 2$ إذن :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^x - e^2$		-	0	+	

خلاصة : إشارة الجداء $(e^x - 1)(e^x - e^2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$e^x - 1$		-	0	+			
$e^x - e^2$				-	0	+	
$(e^x - 1)(e^x - e^2)$		+	0	-	0	+	

أخيرا : حلول المتراجحة $(e^x - 1)(e^x - e^2) < 0$ هي المجال $]0 ; 2[$

<u>التمرين ـــ 7</u>

في كل من الحالات التالية عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على IR و التي تحقق الشروط المطلوبة :

(1) $f' = 3f$ و $f(0) = 1$

(2) $f' = -f$ و $f(0) = 1$

(3) $f' = \frac{1}{2} f$ و $f(0) = 1$

<u>الحـــل ـــ 7</u>

(1) $\begin{cases} f' = 3f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto e^{3x}$

(2) $\begin{cases} f' = -f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto e^{-x}$

(3) $\begin{cases} f' = \frac{1}{2} f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto e^{\frac{1}{2}x}$

<u>التمرين ـــ 8</u>

f دالة قابلة للاشتقاق على IR حيث $f' = kf$ و $f(0) = \lambda$ مع λ و k عددان حقيقيان حيث $\lambda \neq 0$

لتكن g دالة معرفة على IR بـ $g = \frac{1}{\lambda} f$

1 ـــ تحقق أن $g' = kg$ و $g(0) = 1$

2 ـــ إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) = \lambda e^{kx}$

الحـل ـ 8

1 ـ لدينا من أجل كل x من IR : $g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$

إذن : من أجل كل x من IR : $g'(x) = \frac{1}{\lambda} f'(x)$

لكن $f'(x) = k\,f(x)$ إذن : $g'(x) = \frac{1}{\lambda} (k\,f(x))$

أي : $g'(x) = k \times \frac{1}{\lambda} f(x)$ منه $g'(x) = k\,g(x)$

أي : $g' = k\,.\,g$ و هو المطلوب .

لدينا : $g(0) = \frac{1}{\lambda} f(0)$ أي $g(0) = \frac{1}{\lambda}(\lambda)$ أي $g(0) = 1$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن $\begin{cases} g' = k\,g \\ g(0) = 1 \end{cases}$ إذن : $g : x \longmapsto e^{kx}$

من جهة أخرى لدينا : $g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$ إذن : $\lambda\,g(x) = f(x)$

أي : $f(x) = \lambda\,g(x)$

أي : $f(x) = \lambda\,e^{kx}$ و هو المطلوب .

التمرين ـ 9

في كل من الحالات التالية عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على IR حيث :

(1) $f' = -6f$ و $f(0) = -1$

(2) $f' = -2f$ و $f(0) = 1/2$

(3) $f' = \sqrt{2}\,f$ و $f(0) = 2$

الحـل ـ 9

(1) $\begin{cases} f' = -6f \\ f(0) = -1 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto -e^{-6x}$

(2) $\begin{cases} f' = -2f \\ f(0) = 1/2 \end{cases}$ إذن : $f : x \longmapsto \frac{1}{2} e^{-2x}$

(3) $\begin{cases} f' = \sqrt{2}\,f \\ f(0) = 2 \end{cases}$ إذن : $: x \longmapsto 2\,e^{\sqrt{2}\,x}$

التمرين ـ 10

f دالة معرفة على IR و غير معدومة حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

1 ـ بين أن $f(0) = 1$

2 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) \times f(-x) = 1$

3 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x/2) \times f(x/2) = f(x)$

4 ـ إستنتج إشارة $f(x)$ على IR

الحـل ـ 10

1 ـ من أجل $y = 0$ نحصل على : من أجل كل x من IR : $f(x+0) = f(x) \times f(0)$

أي : $f(x) = f(x) \times f(0)$

أي : $f(0) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$ لأن $f(x) \neq 0$

2 ـ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

2 ـ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f(x-x) = f(0) \Leftrightarrow f(x-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x+(-x)) = 1$$

$\Leftrightarrow f(x) \times f(-x) = 1$ لأن $f(x+(-x)) = f(x) \times f(-x)$ و هو المطلوب .

3 ــ من أجل كل x من IR فإن :

$$f(x/2) \times f(x/2) = f(x/2 + x/2) \Leftrightarrow f(x/2) \times f(x/2) = f(x)$$

4 ــ لدينا من أجل كل x من IR $\quad f(x) = f(x/2) \times f(x/2) = [f(x/2)]^2$

إذن : من أجل كل x من IR : $f(x) \geq 0$

لكن : f غير معدومة إذن : من أجل كل x من IR : $f(x) > 0$

التمرين ــ 11

f دالة معرفة و موجبة على IR حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

1 ــ عين $f(2x)$ ؛ $f(3x)$ ؛ $f(4x)$ بدلالة $f(x)$

2 ــ إستنتج عبارة $f(nx)$ بدلالة $f(x)$ من أجل $n \in IN^*$

نضع $f(1) = k$ حيث $k > 0$

3 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن : $f(n) = k^n$ و $[f(1/n)]^n = k$

4 ــ إستنتج $f(1/2)$ و $f(1/4)$ بدلالة k .

الحــل ــ 11

1 ــ

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) \times f(x) = [f(x)]^2$$

$$f(3x) = f(x + 2x) = f(x) \times f(2x) = f(x) \times [f(x)]^2 = [f(x)]^3$$

$$f(4x) = f(2x + 2x) = f(2x) \times f(2x) = [f(2x)]^2 = [f(x)]^4$$

2 ــ يمكن تعميم نتيجة السؤال الأول كمايلي :

من أجل كل n من IN^* : $f(nx) = [f(x)]^n$

ملاحظة : يمكن البرهان عن صحة هذه النتيجة بالبرهان بالتراجع (غير مطلوب)

3 ــ $f(1) = k$ إذن : $f(n \times 1) = [f(1)]^n = k^n$ (من أجل $x = 1$) .

أي : $f(n) = k^n$

أيضا : $f(n \times 1/n) = f(1) \Leftrightarrow f(n \times 1/n) = k$

$[f(1/n)]^n = k \Leftrightarrow$ لأن $f(n \times 1/n) = [f(1/n)]^n$ من أجل $x = 1/n$

4 ــ لدينا : $[f(1/2)]^2 = k \Rightarrow \begin{cases} f(1/2) = \sqrt{k} \\ \text{أو} \\ f(1/2) = -\sqrt{k} \end{cases}$

لكن الدالة f موجبة إذن : $f(1/2) = \sqrt{k}$

$$[f(1/4)]^4 = k \Rightarrow [f(1/4)]^2 = \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1/4) = +\sqrt{\sqrt{k}} \\ \text{أو} \\ f(1/4) = -\sqrt{\sqrt{k}} \end{cases}$$

لكن الدالة f موجبة إذن : $f(1/4) = \sqrt{\sqrt{k}}$

التمرين ــ 12

أحسب نهايات الدوال التالية عند $-\infty$ و $+\infty$

1 ــ $f(x) = e^{-x}$ $\qquad$ 4 ــ $f(x) = x + e^{2x}$

2 ــ $f(x) = 2e^{2x}$ $\qquad$ 5 ــ $f(x) = 1 + e^{x} + e^{2x}$

3 ــ $f(x) = e^{x} + e^{-x}$

الحــل ــ 12

الدالة f	$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$
$f(x) = e^{-x}$	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$)	0 (لأن $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$)
$f(x) = 2e^{2x}$	0 (لأن $\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$)	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$)
$f(x) = e^{x} + e^{-x}$	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$)	$+\infty$ (لأن $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$)
$f(x) = x + e^{2x}$	$-\infty$ (لأن $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$)	$+\infty$
$f(x) = 1 + e^{x} + e^{2x}$	1	$+\infty$

التمرين ــ 13

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = e^{2x} - e^{x}$

1 ــ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

2 ــ تحقق أن : $f(x) = e^{2x}(1 - e^{-x})$ ثم إستنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الحــل ــ 13

1 ــ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^{x} = 0$

لأن : $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

2 ــ لدينا : $e^{2x}(1 - e^{-x}) = e^{2x} - e^{2x-x}$

$= e^{2x} - e^{x}$

$= f(x)$ و هو المطلوب .

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}(1 - e^{-x})$

$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$= +\infty$

التمرين ــ 14

أحسب النهايات التالية :

1ــ $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{2e^{x} + 1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$

2ــ $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{2x}$ عند 0

3ــ $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^{3x} - 1)$ عند 0

4ــ $f(x) = x(e^{1/x} - 1)$ عند $-\infty$ و $+\infty$ (يمكنك وضع $X = 1/x$)

الحــل ــ 14

1ــ $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x} - 1}{2e^{x} + 1} = \dfrac{0 - 1}{0 + 1} = -1$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - 1}{2e^{x} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}(1 - e^{-x})}{e^{x}(2 + e^{-x})}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{2 + e^{-x}}$$

$= 1/2$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

2 ـ لحساب $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ نعتبر الدالة $g: x \longmapsto e^x$

لدينا g قابلة للاشتقاق على IR و خاصة عند 0 و دالتها المشتقة $g'(x) = e^x$

إذن : $g'(0) = e^0 = 1$

لكن حسب التعريف :

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

إذن : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

منه : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

3 ـ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(e^{3x} - 1) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

نضع : $g(x) = e^{3x}$ إذن : $g'(x) = 3e^{3x}$ منه : $g'(0) = 3e^0 = 3$ و $g(0) = 1$

لكن حسب التعريف :

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

منه : $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3$

4 ـ لحساب $\lim_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1)$ نضع $X = 1/x$ منه : $x = 1/X$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} X = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} X = 0$

منه : $\lim_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{X \to 0} \frac{1}{X}(e^X - 1)$

$= 1$ حسب السؤال (2).

التمرين ـ 15

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x}$

1 ـ أكتب f(x) من الشكل $f(x) = e^x g(x)$ حيث g دالة للمتغير x .

2 ـ إستنتج $\lim_{x \to 0} f(x)$

الحـل ـ 15

1 ـ $f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{x} = e^x\left(\frac{1 - e^x}{x}\right)$ إذن : $g(x) = \frac{1 - e^x}{x}$

2 ـ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x\left(\frac{1 - e^x}{x}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} -e^x\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad \text{لأن} \quad = -1$$

التمرين ـــ 16

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x)=e^{1/x}$

أحسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

الحــل ـــ 16

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} e^{1/x}=1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to} 0} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to} 0} e^{1/x}=\lim_{y\to -\infty} e^y=0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x\overset{<}{\to} 0}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to} 0} e^{1/x}=\lim_{y\to +\infty} e^y=+\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x\overset{>}{\to} 0}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} e^{1/x}=\lim_{y\to 0} e^y=1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$$

التمرين ـــ 17

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x)=x-\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

1 ـــ أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2 ـــ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$

3 ـــ بين أن الدالة f فردية .

4 ـــ إستنتج $\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

5 ـــ إستنتج أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ - يطلب تعيين معادلته .

الحــل ـــ 17

1 ـــ

$$\lim_{x\overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to} 0} x-\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to} 0} 0-\frac{e^0+1}{e^x-1}$$

$$=\lim_{y\overset{>}{\to} 0}\frac{-2}{y} \quad \text{لأن :} \quad \lim_{x\overset{>}{\to} 0} e^x-1=0$$

$$=-\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	-	0	+

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} x-\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1-e^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to +\infty} x-1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x\to +\infty} e^{-x}=0$$

$$=+\infty$$

2 ـــ

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to +\infty} x-\frac{e^x+1}{e^x-1}-(x-1)$$

$$=\lim_{x\to +\infty} 1-\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-1-e^x-1}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2}{e^x-1}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ لأن $= 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$

3 ــ من أجل كل x من IR^* فإن $(-x) \in IR^*$ و لدينا :

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$$
$$= -x - \frac{e^{-x}(1+e^x)}{e^{-x}(1-e^x)}$$
$$= -x - \frac{1+e^x}{1-e^x}$$
$$= -x + \frac{e^x+1}{e^x-1}$$
$$= -\left(x - \frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$$

$= -f(x)$ إذن الدالة f فردية

4 ــ لدينا f فردية $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right.$ إذن : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$

5 ــ لنثبت أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \to -\infty} x - \frac{e^x+1}{e^x-1} - (x+1)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} -1 - \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ لأن $= \lim\limits_{x \to -\infty} -1 - \frac{0+1}{0-1}$

$$= -1 + 1$$

$= 0$ إذن فعلا المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب لمنحنى f في جوار $-\infty$

<u>التمرين ــ 18</u>

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = 2x + 1 - e^{-x}$ و (C) منحناها في معلم .

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (D) .

<u>الحــل ــ 18</u>

1 ــ التغيرات : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x + 1 - e^{-x}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ لأن $= -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + 1 - e^{-x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ لأن $= +\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 - (-e^{-x}) = 2 + e^{-x}$$

إذن : من أجل كل x من R فإن $f'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2 ـــ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$

إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ـــ لدينا : $f(x) - (2x+1) = -e^{-x}$

إذن : من أجل كل x من IR : $f(x) - (2x+1) < 0$

أي المنحنى (C) يقع دائما تحت المستقيم المقارب (D) .

التمرين ـــ 19

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = -x + 2 + 3e^{-2x}$ و (C) منحناها في معلم .
بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته .

الحـل ـــ 19

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x+2) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x + 2 + 3e^{-2x} - (-x+2)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-2x}$

$= 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

التمرين ـــ 20

عين مشتقة الدالة f على المجموعة IR في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = x\,e^x$ **(5)** $f(x) = (e^x - 1)(e^x + 2)$

(2) $f(x) = (2x - 3)\,e^x$ **(6)** $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

(3) $f(x) = (x^2 + x + 1)\,e^x$ **(7)** $f(x) = \dfrac{3e^x - 2}{e^x + 1}$

(4) $f(x) = (1 + \cos x)e^x$

الحـل ـــ 20

(1) $f(x) = x\,e^x \Rightarrow f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times x = e^x + x\,e^x = e^x(1+x)$

(2) $f(x) = (2x-3)e^x \Rightarrow f'(x) = 2e^x + (2x-3)e^x = e^x(2x-1)$

(3) $f(x) = (x^2+x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x+1)e^x = e^x(x^2+3x+2)$

(4) $f(x) = (1+\cos x)e^x \Rightarrow f'(x) = -\sin x\,e^x + (1+\cos x)e^x = e^x(1+\cos x - \sin x)$

(5) $f(x) = (e^x-1)(e^x+2) \Rightarrow f'(x) = e^x(e^x+2) + e^x(e^x-1) = e^x(e^x+2+e^x-1) = e^x(2e^x+1)$

(6) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^x(e^x-x) - (e^x-1)e^x}{(e^x-x)^2} = \dfrac{e^x(e^x - x - e^x + 1)}{(e^x-x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$

(7) $f(x) = \dfrac{3e^x - 2}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3e^x(e^x+1) - e^x(3e^x-2)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + 2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{5e^x}{(e^x+1)^2}$

التمرين ـــ 21

عين مشتقات الدوال التالية على مجموعة تعريفها IR :

(1) $f(x) = e^{2x+3}$ **(3)** $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{x/2}}$

(2) $f(x) = (-x-1)e^{-x}$ **(4)** $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$

الحـل ــ 21

(1) $f(x) = e^{2x+3} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x+3}$

(2) $f(x) = (-x-1)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x-1)$

$\Rightarrow f'(x) = -e^{-x}(1 - x - 1)$

$\Rightarrow f'(x) = x e^{-x}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{x/2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{0 - \frac{1}{2}e^{x/2}}{(1+e^{x/2})^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-e^{x/2}}{2(1+e^{x/2})^2}$

(4) $f(x) = (x^2-1)e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2x e^{2x} + 2e^{2x}(x^2-1)$

$= 2e^{2x}(x + x^2 - 1)$

$= 2e^{2x}(x^2 + x - 1)$

التمرين ــ 22

عين مشتقة الدالة f على $IR - \{1\}$ حيث $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

الحـل ــ 22

$$f'(x) = \left(\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}\, e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

التمرين ــ 23

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = x + 1 + e^x$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ فسر هندسيا النتيجة .

3 ــ أرسم في معلم متعامد و متجانس منحنى الدالة f.

الحـل ــ 23

1 ــ التغيرات :

f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 1 + e^x$$

$= -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + e^x = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$f'(x) = 1 + e^x$

إذن : من أجل كل x من IR : $f'(x) > 0$

منه : جدول تغيرات الدالة f :

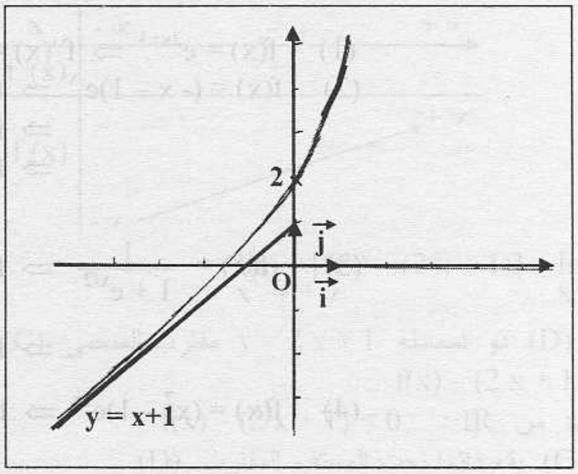
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 + e^x - (x+1)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

$= 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$

3 ـــ الإنشاء :



<u>التمرين ـــ 24</u>

f دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x}$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f على $]0 ; +\infty[$

2 ـــ بين أن المنحنى (C) للدالة f في معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $+\infty$ يطلب معادلته .

3 ـــ أدرس الوضعية النسبية لـــ (C) و (D) ثم أنشئ كل منهما .

<u>الحــل ـــ 24</u>

1 ـــ التغيرات : $f(0) = 0 + 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - (-e^{-x}) = \frac{1}{2} + e^{-x}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$

منه : جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

2 ـــ لدينا : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} -e^{-x}$$

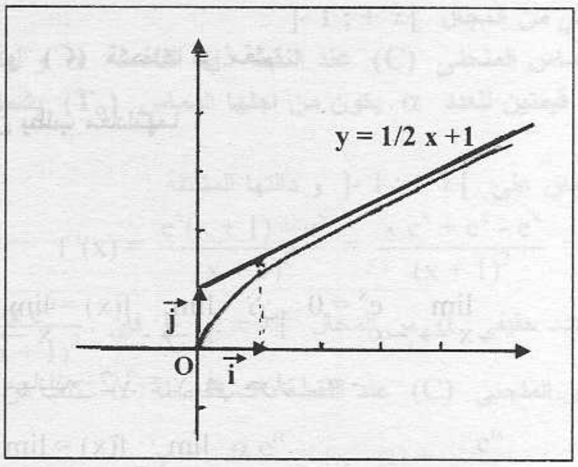
$= 0$ إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ـــ $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -e^{-x} < 0$

إذن : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) < 0$

أي : المنحنى (C) يقع دائما تحت المستقيم المقارب (D).

الإنشاء :



<u>التمرين ــ 25</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ أنشئ المنحنى (C) .

<u>الحـل ــ 25</u>

1 ــ التغيرات : f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} = \frac{-3}{1} = -3 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{4x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{4x}(1 - 3e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 3e^{-4x}}{1 + e^{-4x}} = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-4x} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

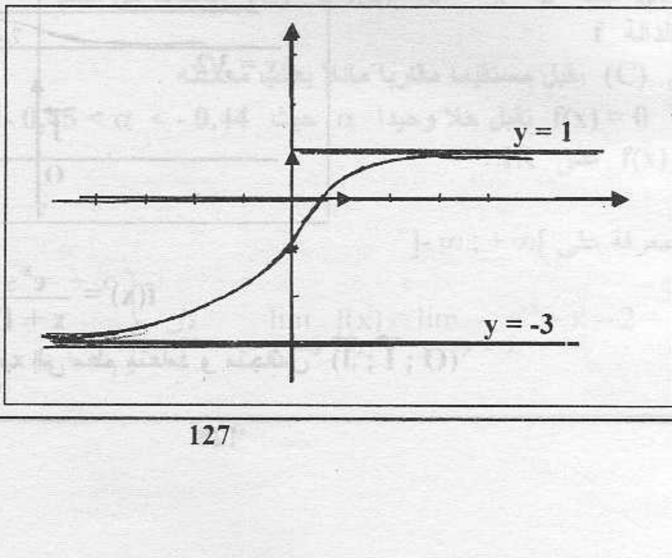
$$f'(x) = \frac{4e^{4x}(e^{4x} + 1) - 4e^{4x}(e^{4x} - 3)}{(e^{4x} + 1)^2} = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$

منه : جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		+	
f (x)	- 3	-1	1

2 ــ الإنشاء :



التمرين ـــ 26

f دالة معرفة على R بـ $f(x) = \dfrac{4e^x + 3}{2(e^x + 1)}$ و (C) منحناها في معلم .

1 ـــ أثبت أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلتهما .

2 ـــ أدرس تغيرات الدالة f .

3 ـــ أرسم بعناية المنحنى (C) .

الحـــل ـــ 26

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4e^x + 3}{2(e^x + 1)} = \frac{4(0) + 3}{2(0 + 1)} = \frac{3}{2} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

إذن : المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 3/2$ في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(4 + 3e^{-x})}{2e^x(1 + e^{-x})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4 + 3e^{-x}}{2(1 + e^{-x})}$$

$$= \frac{4 + 3(0)}{2(1 + 0)} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

$$= 2$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

2 ـــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 3/2$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{4e^x \cdot 2(e^x + 1) - 2e^x(4e^x + 3)}{[2(e^x + 1)]^2}$$

$$= \frac{8e^{2x} + 8e^x - 8e^{2x} - 6e^x}{4(e^x + 1)^2}$$

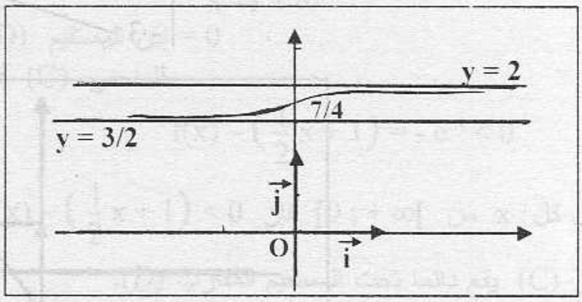
$$= \frac{+2e^x}{4(e^x + 1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$ لأن $\dfrac{2e^x}{4(e^x + 1)^2} > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)		+	
f (x)	3/2 ↗	7/4	↗ 2

7 ـــ الإنشاء :



التمرين ـــ 27

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

ليكن α عدد حقيقي من المجال $]-1 ; +\infty[$

1 – أكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة α و ليكن (T_α) هذا المماس .

2 – أثبت أنه توجد قيمتين للعدد α يكون من أجلها المماس (T_α) يشمل مبدأ المعلم .

<u>الحـل – 27</u>

1 – f قابلة للاشتقاق على $]-1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x\,e^x + e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي α من المجال $]-1 ; +\infty[$ فإن : $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha\, e^\alpha}{(\alpha+1)^2}$

نتيجة : معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة α تكتب من الشكل : $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$

أي :
$$y = \frac{\alpha\, e^\alpha}{(\alpha+1)^2}(x-\alpha) + \frac{e^\alpha}{\alpha+1}$$

أي :
$$y = \frac{\alpha\, e^\alpha}{(\alpha+1)^2}x - \frac{\alpha^2 e^\alpha}{(\alpha+1)^2} + \frac{e^\alpha}{\alpha+1}$$
و هي معادلة (T_α)

2 – يكون (T_α) يمر بالمبدأ إذا و فقط إذا تحقق مايلي :

$$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \dfrac{-\alpha^2 e^\alpha}{(\alpha+1)^2} + \dfrac{e^\alpha}{\alpha+1} = 0 \end{cases}$$
أي
$$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \dfrac{e^\alpha}{\alpha+1}\left(\dfrac{-\alpha^2}{\alpha+1} + 1\right) = 0 \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \dfrac{-\alpha^2}{\alpha+1} + 1 = 0 \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ -\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \alpha \in \left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2}\right\} \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} \alpha \in]-1 ; +\infty[\\ \alpha \in \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\} \end{cases}$$

أي
$$\alpha \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

إذن : يوجد مماسين عند النقطة ذات الفاصلة α يشملان المبدأ و هما من أجل $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

<u>التمرين – 28</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^{-x} - x - 2$ و (C) منحناها في معلم

1 – أدرس تغيرات الدالة f

2 – بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب معادلته .

3 – بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,45 < \alpha < -0,44$

4 – إستنتج إشارة $f(x)$ على IR .

<u>الحـل – 28</u>

1 – التغيرات : f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} - x - 2 = +\infty$$ لأن $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \end{array}\right\}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - x - 2 = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :
$f'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1)$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) < 0$ لأن $(e^{-x} + 1) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)		-	
f(x)	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

2 ــ لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ $f(-0,45) = e^{0,45} + 0,45 - 2 = 1,56 + 0,45 - 2 = 0,01$
$f(-0,44) = e^{0,44} + 0,44 - 2 = 1,55 + 0,44 - 2 = -0,01$

نتيجة : $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } [-0,45 ; -0,44] \\ f(-0,45) \times f(-0,44) < 0 \end{array} \right.$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α من المجال $]-0,45 ; -0,44[$
بما أن f متناقصة تماما على IR فإن هذا الحل وحيد على R.

4 ــ لدينا $f(\alpha) = 0$ مع $-0,45 < \alpha < -0,44$ منه حسب جدول تغيرات الدالة f
نستنتج إشارة f(x) كمايلي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f(x)	+	0	-

التمرين ــ 29

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .
2 ــ بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلاتهما .
3 ــ أثبت أن النقطة $A(0 ; 1/2)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .
4 ــ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة A .

لتكن g الدالة المعرفة على IR كمايلي : $g(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} - f(x)$

5 ــ بين أن من أجل كل x من IR : $g'(x) = \dfrac{(e^x - 1)^2}{4(1 + e^x)^2}$

6 ــ شكل جدول تغيرات الدالة g . ثم إستنتج إشارة g(x) على IR .

7 ــ إستنتج الوضعية النسبية للمماس (C) بالنسبة إلى المنحنى (C).
8 ــ أرسم بعناية المنحنى (C) .

الحل ــ 29

1 ــ تغيرات الدالة f :
f معرفة على IR

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1 + e^x} = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1 + e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \dfrac{1}{0 + 1} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x . e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR : $f'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	1/2	1

2 ــ المستقيمات المقاربة :

لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ من أجل كل x من IR فإن : $(-x) \in IR$ أي $[2(0) - x] \in IR$

و

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{1}{e^x+1}$$

من جهة أخرى

$$2(1/2) - f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$$

نتيجة : من أجل كل x من IR : $f(2(0) - x) = 2(1/2) - f(x)$

إذن : النقطة $A(0\,;\,1/2)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

4 ــ معادلة المماس عند النقطة $A(0\,;\,1/2)$ تكتب من الشكل :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \qquad \begin{cases} f(0) = 1/2 \\ f'(0) = \dfrac{1}{(2)^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

منه : معادلة المماس (T) هي : $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$

5 ــ g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1 + 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1 - 2e^x + e^{2x}}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$$ و هو المطلوب .

6 ــ لاحظ أن $g'(x)$ من إشارة $(e^x - 1)^2$ لأن المقام موجب كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(e^x-1)^2$		+	0	+	

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = -\infty$$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 1 = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

منه : جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(0) = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{2} - f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

7 ــ الوضعية النسبية لــ (C) و (T) :

لدينا : $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = g(x)$

إذن : إشارة $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$ هي إشارة $g(x)$ كمايلي :

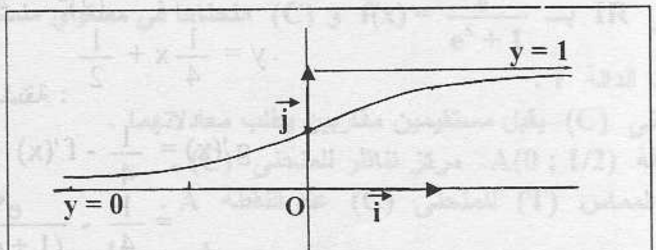
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$		$-$	0	$+$	

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 0[$: المماس (T) يقع تحت المنحنى (C).

لما $x = 0$: المماس (T) يقطع المنحنى (C) (مماس له)

لما $x \in]0 ; +\infty[$: المماس (T) يقع فوق المنحنى (C) .

8 ــ الإنشاء :



التمرين - 30

f و g دالتان معرفتان على المجال $[0 ; \pi]$ بـ : $f(x) = e^{-x} \sin x$ ؛ $g(x) = e^{-x}$

نسمي (C_1) و (C_2) على الترتيب منحنيا الدالتين f و g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 - أثبت أن (C_1) و (C_2) يتقاطعان في نقطة A يطلب إحداثياها .

2 - أثبت أن (C_1) و (C_2) لهما نفس المماس عند النقطة A .

الحـل - 30

- 1

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x}\sin x = e^{-x} \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 \\ x \in [0 ; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi/2$$

نتيجة : (C_1) و (C_2) يشتركان في نقطة واحدة A إحداثياها $A(\pi/2 ; f(\pi/2))$ أي : $A(\pi/2 ; e^{-\pi/2})$

2 ـ معادلة مماس المنحنى (C_1) عند النقطة A :

$$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$
$$= e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

إذن : $f'(\pi/2) = e^{-\pi/2}(0-1) = -e^{-\pi/2}$

منه : معادلة المماس هي : $y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2}$ ....(1)

معادلة مماس المنحنى (C_2) عند النقطة A :

$$g'(x) = -e^{-x}$$

إذن $g'(\pi/2) = -e^{-\pi/2}$

منه : معادلة المماس هي : $y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2}$ ....(2)

خلاصة : بمقارنة المعادلتين (1) و (2) نستنتج أن المنحنيين (C_1) و (C_2) لهما نفس المماس عند النقطة A و معادلته

$$y = -e^{-\pi/2}(x - \pi/2) + e^{-\pi/2}$$

التمرين ـ 31

هل الدالتان المعرفتان على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$

و $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ متساويتان ؟

الحل ـ 31

لدينا f معرفة على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن :

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

و من جهة أخرى : g معرفة على $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$

فإن $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

نتيجة : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $g(x) = f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

أي فعلا الدالتان g و f متساويتان على المجال $]0 ; +\infty[$ فقط

حذار ! الدالة f معرفة من أجل $\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ أي $x \in]0 ; +\infty[$

الدالة g معرفة من أجل $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 + \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x} > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \in]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[\end{cases}$

أي $x \in]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

أي g معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

التمرين ـ 32

ليكن p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث $p(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

1 ـ تحقق أن $p(x) = (2x-1)(x+2)(3-x)$

2 ـ حل في IR المعادلة $p(x) = 0$

3 ـ إستنتج مجموعة حلول المعادلة $-2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 + 11\ln x - 6 = 0$ ثم حلول المعادلة

$$-2e^{3x} + 3e^{2x} + 11e^{x} - 6 = 0$$

الحل ـ 32

1ـ لدينا : $(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$

منه $(2x-1)(x+2)(3-x) = (2x^2 + 3x - 2)(3-x)$

$$= 6x^2 - 2x^3 + 9x - 3x^2 - 6 + 2x$$
$$= -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$$
$$= p(x)$$ و هو المطلوب .

2ـ $p(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+2)(3-x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 & \text{أو} \\ x + 2 = 0 & \text{أو} \\ 3 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 & \text{أو} \\ x = -2 & \text{أو} \\ x = 3 \end{cases}$$

إذن : مجموعة حلول المعادلة $p(x) = 0$ في IR هي : $\{1/2 ; -2 ; 3\}$

3 – $-2[\ln(x)]^3 + 3[\ln(x)]^2 + 11\ln(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln(x) \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln(x) \\ \alpha \in \{1/2 ; -2 ; 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1/2 = \ln x \text{ أو } -2 = \ln x \text{ أو } 3 = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = e^{1/2} \text{ أو } x = e^{-2} \text{ أو } x = e^3)$$

إذن: حلول المعادلة هي المجموعة $\{e^{1/2} ; e^{-2} ; e^3\}$

4 – $-2e^{3x} + 3e^{2x} + 11e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow -2(e^x)^3 + 3(e^x)^2 + 11(e^x) - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha > 0 \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha > 0 \\ \alpha \in \{1/2 ; -2 ; 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^x \\ \alpha \in \{1/2 ; 3\} \end{cases} \text{ لأن } \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow (1/2 = e^x \text{ أو } 3 = e^x)$$

$$\Leftrightarrow (x = \ln(1/2) \text{ أو } x = \ln 3)$$

إذن: حلول المعادلة هي المجموعة $\{\ln(1/2) ; \ln(3)\}$

التمرين – 33

أكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية :

(1) $\ln 14 - \ln 7$ (6) $e^{1+\ln 2}$

(2) $\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3}$ (7) $e^{-2\ln 3}$

(3) $\frac{\ln 100}{\ln 10}$ (8) $\ln e^3 - \ln e^2$

(4) $\ln(10000) + \ln(0{,}01)$ (9) $\ln e\sqrt{e}$

(5) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}$ (10) $\ln 2 + \ln 8e - \ln 4e^2$

الحـل – 33

(1) $\ln 14 - \ln 7 = \ln(2 \times 7) - \ln 7 = \ln 2 + \ln 7 - \ln 7 = \ln 2$

(2) $\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} = \ln 3 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = 0$

(3) $\frac{\ln 100}{\ln 10} = \frac{\ln (10)^2}{\ln (10)} = \frac{2\ln 10}{\ln 10} = 2$

(4) $\ln(10000) + \ln(0{,}01) = \ln(10^4) + \ln(10^{-2}) = 4\ln(10) - 2\ln(10) = 2\ln(10)$

(5) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 5 + e^{\ln 1/3} = 5 + \frac{1}{3} = 16/3$

(6) $e^{1+\ln 2} = e \times e^{\ln 2} = 2\,e$

(7) $e^{-2\ln 3} = e^{\ln(3^{-2})} = 3^{-2} = 1/9$

(8) $\ln e^3 - \ln e^2 = 3 - 2 = 1$

(9) $\ln e\sqrt{e} = \ln(e \times e^{1/2}) = \ln(e^{3/2}) = \frac{3}{2}\ln e = \frac{3}{2}$

(10)
$$\begin{aligned}
\ln 2 + \ln 8\,e - \ln 4\,e^2 &= \ln 2 + \ln 8 + \ln e - (\ln 4 + \ln e^2)\\
&= \ln 2 + \ln(2^3) + 1 - \ln(2^2) - \ln(e^2)\\
&= \ln 2 + 3\ln 2 + 1 - 2\ln 2 - 2\ln e\\
&= 4\ln 2 + 1 - 2\ln 2 - 2\\
&= 2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

التمرين ــ 34

أكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

(1) $A = 3\ln 2 - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 8$

(2) $B = 2\ln(0{,}1) - 3\ln(0{,}01) + \ln(2)$

(3) $C = 2\ln(100) - \ln(1/10)$

الحـل ــ 34

(1)
$$\begin{aligned}
A &= 3\ln 2 - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 8\\
&= \ln(2^3) - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 8\\
&= \ln 8 - \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 8\\
&= \frac{3}{2}\ln 8 - \ln 5\\
&= \ln(8)^{3/2} - \ln 5\\
&= \ln 8\sqrt{8} - \ln 5\\
&= \ln\left(\frac{8\sqrt{8}}{5}\right)
\end{aligned}$$

لاحظ أن : $8^{3/2} = 8^1 \times 8^{1/2} = 8\sqrt{8}$

(2)
$$\begin{aligned}
B &= 2\ln(0{,}1) - 3\ln(0{,}01) + \ln(2)\\
&= 2\ln(10^{-1}) - 3\ln(10^{-2}) + \ln 2\\
&= -2\ln 10 + 6\ln 10 + \ln 2\\
&= 4\ln 10 + \ln 2\\
&= \ln(10^4) + \ln 2\\
&= \ln(2 \times 10^4)\\
&= \ln(20000)
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
C &= 2\ln(100) - \ln(1/10)\\
&= 2\ln(10^2) - \ln(10^{-1})\\
&= 4\ln(10) + \ln(10)\\
&= 5\ln 10\\
&= \ln(10^5)\\
&= \ln(100000)
\end{aligned}$$

التمرين ــ 35

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما .

أكتب العبارات التالية من الشكل $\ln x$

(1) $A = \ln a - \ln b + 2\ln a\,b$

(2) $B = \frac{1}{2}\ln a - \frac{3}{2}\ln b + \ln\frac{a}{b}$

(3) $C = \ln(a+1) - \frac{1}{2}\ln b + \frac{3}{2}\ln(a+b)$

الحـل – 35

(1) $A = \ln a - \ln b + 2\ln ab = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(ab)^2 = \ln\left(\frac{a}{b}\times(ab)^2\right) = \ln(b\,a^3)$

(2) $B = \frac{1}{2}\ln a - \frac{3}{2}\ln b + \ln\frac{a}{b} = \ln\sqrt{a} - \ln b\sqrt{b} + \ln\frac{a}{b} = \ln\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} + \ln\frac{a}{b}$

$= \ln\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} \times \frac{a}{b} = \ln\frac{a\sqrt{a}}{b^2\sqrt{b}}$

(3) $C = \ln(a+1) - \frac{1}{2}\ln b + \frac{3}{2}\ln(a+b) = \ln(a+1) - \ln\sqrt{b} + \ln(a+b)^{3/2}$

$= \ln\left(\frac{a+1}{\sqrt{b}}\right) + \ln(a+b)^{3/2}$

$= \ln\left(\frac{(a+1)(a+b)^{3/2}}{\sqrt{b}}\right)$

التمرين – 36

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $2\ln(x-3) = \ln 4$
(2) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$
(3) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln 2x$
(4) $\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln(3)$
(5) $\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1)$
(6) $\ln(x-1) - \ln(3) = \ln(2) - \ln(x+4)$

الحـل – 36

(1)
$$2\ln(x-3) = \ln 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ \ln(x-3)^2 = \ln 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ (x-3)^2 = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x-3=2 \text{ أو } x-3=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x=5 \text{ أو } x=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=5$$

إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو $\{5\}$

(2)
$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \\ \ln(x(x-1)) = \ln 6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ x^2-x=6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x-6=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-3)(x+2)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=3 \text{ أو } x=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=3$$

إذن : مجموعة حلول المعادلة هي $\{3\}$

(3)
$$2\ln x = \ln(x+4) + \ln 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x+4>0 \\ 2x>0 \end{cases}$$

$$\ln x^2 = \ln(x+4)(2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -4 \\ x > 0 \\ x^2 = 2x^2 + 8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x+8) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \text{ أو } x = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \phi$$

إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR

(4)

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4 - x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ \ln x(4-x) = \ln(3(2x-1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \\ x > 1/2 \\ 4x - x^2 = 6x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ -x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ (x+3)(x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 < x < 4 \\ x = -3 \text{ أو } x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

منه : مجموعة حلول المعادلة هي {1}

(5)

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ \ln(x+1) = -\ln e + \ln(x-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \\ \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x-1}{e}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x + 1 = \frac{x-1}{e} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ ex + e = x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x(e-1) = -1 - e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = \dfrac{-1-e}{e-1} \end{cases}$$ (مرفوض لأنه سالب)

$\Leftrightarrow \quad x \in \phi$ إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR

(6)
$$\ln(x-1) - \ln(3) = \ln(2) - \ln(x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ \ln\left(\dfrac{x-1}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{x+4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -4 \\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2}{x+4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x+4)(x-1) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-2)(x+5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 2 \text{ أو } x = -5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$ إذن : حلول المعادلة هي المجموعة $\{2\}$

<u>التمرين ـــ 37</u>

حل في IR المتراجحات التالية :

(1) $\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$

(2) $\ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$

(3) $\ln(35 - 8x) \geq 3\ln 2 + \ln(x^2)$

<u>الحـل ـــ 37</u>

(1)
$$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 2x > 4x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) > 0 \\ 4x > 5 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[\\ x \in]5/4 ; +\infty[\\ (x-5)(x-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]2 ; +\infty[\\ x \in]-\infty ; 1[\cup]5 ; +\infty[\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x \in]5 ; +\infty[$ إذن : حلول المتراجحة هي المجال $]5 ; +\infty[$

(2)
$$\ln(x) + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \\ \ln x(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \\ x \in IR \ (x^2 - 2x + 2 > 0 \text{ لأن دائما}) \\ x(x+1) \leq x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x \leq x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 2/3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 2/3$ منه حلول المتراجحة هي المجال $]0 \,;\, 2/3]$

(3) $\ln(35 - 8x) \geq 3\ln 2 + \ln x^2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 35 - 8x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \ln(35 - 8x) \geq \ln 8x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 35/8 \\ x \neq 0 \\ 35 - 8x \geq 8x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty \,;\, 0[\cup]0 \,;\, 35/8[\\ 8x^2 + 8x - 35 \leq 0 \text{ .... (1)} \end{cases}$$

لنحل المتراجحة (1) في IR : $\Delta = 64 + 32 \times 35 = 32(2 + 35) = 32 \times 37$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-8 - \sqrt{32 \times 37}}{16} = \dfrac{-8 - 4\sqrt{2 \times 37}}{16} = \dfrac{-4 - 2\sqrt{74}}{8} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-8 + \sqrt{32 \times 37}}{16} = \dfrac{-8 + 4\sqrt{2 \times 37}}{16} = \dfrac{-4 + 2\sqrt{74}}{8} \end{cases}$$

منه : حلول المتراجحة $8x^2 + 8x - 35 \leq 0$ على IR هي المجال $\left[\dfrac{-4 - 2\sqrt{74}}{8} \,;\, \dfrac{-4 + 2\sqrt{74}}{8}\right]$

أي حلول الجملة : $\begin{cases} x \in]-\infty \,;\, 0[\cup]0 \,;\, 35/8[\\ 8x^2 + 8x - 35 \leq 0 \end{cases}$ هي المجال : $\left[\dfrac{-4 - 2\sqrt{74}}{8} \,;\, 0\right[\cup\left]0 \,;\, \dfrac{-4 + 2\sqrt{74}}{8}\right]$

التمرين ــ 38

أدرس إشارات العبارات الجبرية التالية :

(1) $\mathbf{\ln x - \ln 3}$ **(3)** $\mathbf{(\ln x)(\ln x - 1)}$

(2) $\mathbf{(\ln x + 1)(\ln x - 1)}$ **(4)** $\mathbf{2x\ln(1 - x)}$

(5) $\mathbf{-x^2\ln(x + 1)}$

الحــل ــ 38

لدراسة إشارة عبارة جبرية من الشكل $f(x)$ نبحث عن حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ ثم نستنتج حلول المتراجحة $f(x) < 0$ (باقي الأعداد الحقيقية)

(1) $\ln x - \ln 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \geq \ln 3 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 0 \end{cases}$ منه جدول الإشارة كمايلي :

x	0		3		$+\infty$
$\ln x - \ln 3$	||	$-$	0	$+$	

(2) $\ln x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e^{-1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1/e \end{cases}$ منه جدول الإشارة :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$\ln x + 1$	||	$-$	0	$+$	

, $\ln x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases}$ منه جدول الإشارة :

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	||	$-$	0	$+$	

خلاصة :

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$\ln x + 1$	‖	$-$	0	$+$			
$\ln x - 1$	‖			$-$	0	$+$	
$(\ln x + 1)(\ln x - 1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

(3)

$$\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln 1 \end{cases}$$

منه: $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

$$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e \end{cases}$$

منه: $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases}$

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$	

خلاصة :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$			
$\ln x - 1$	‖				0	$+$	
$\ln x(\ln x - 1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

(4)

$$\ln(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x > 0 \\ \ln(1-x) \geq \ln 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 - x \geq 1 \end{cases}$$

منه: $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		1
$\ln(1-x)$		$+$	0	$-$	‖

خلاصة :

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
$\ln(1-x)$		$+$	0	$-$	‖	
$2x$		$-$	0	$+$		
$2x\ln(1-x)$		$-$	0	$-$	‖	غير معرف

(5)

$$\ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x > 0 \\ \ln(x+1) \geq \ln 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x + 1 \geq 1 \end{cases}$$

منه: $\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(x+1)$	‖	$-$	0	$+$	

خلاصة :

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$\ln(x+1)$		‖	$-$	0	$+$	
$-x^2$			$-$	0	$-$	
$-x^2\ln(x+1)$	غير معرف	‖	$+$	0	$-$	

التمرين ــ 39

p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث : $p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$

1 ــ حل في IR المعادلة $p(x) = 0$

2 – إستنتج حلول المعادلة $(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0$ في IR

3 – إستنتج حلول المعادلة $[\ln(\ln x)]^4 - 25\,[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0$ في IR

<u>الحـل – 39</u>

1 –
$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y : y \geq 0 \\ y^2 - 25y + 144 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y : y \geq 0 \\ (y-16)(y-9) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y : y \geq 0 \\ y = 16 \text{ أو } y = 9 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ \text{أو} \\ x^2 = 16 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ أو } x = -3 \\ \text{أو} \\ x = 4 \text{ أو } x = -4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in \{-4\,;\,-3\,;\,3\,;\,4\}$$ و هي حلول المعادلة $p(x) = 0$

2 –
$$(\ln x)^4 - 25(\ln x)^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = \alpha \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = \alpha \\ \alpha \in \{-4\,;\,-3\,;\,3\,;\,4\} \end{cases}$$ حسب السؤال (1)
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = -4 \text{ أو } \ln x = -3 \text{ أو } \ln x = 3 \text{ أو } \ln x = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x = e^{-4} \text{ أو } x = e^{-3} \text{ أو } x = e^3 \text{ أو } x = e^4)$$

إذن : حلول المعادلة المطلوبة هي : $\{e^{-4}\,;\,e^{-3}\,;\,e^3\,;\,e^4\}$

3 –
$$[\ln(\ln x)]^4 - 25\,[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \\ y = \ln x \\ [(\ln y)]^4 - 25\,[(\ln y)]^2 + 144 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > \ln 1 \\ y = \ln x \\ y \in \{e^{-4}\,;\,e^{-3}\,;\,e^3\,;\,e^4\} \end{cases}$$ حسب السؤال (2)
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ \ln x = e^{-4} \text{ أو } \ln x = e^{-3} \text{ أو } \ln x = e^3 \text{ أو } \ln x = e^4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in \{(e)^{e^{-4}}\,;\,(e)^{e^{-3}}\,;\,(e)^{e^3}\,;\,(e)^{e^4}\} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in \{(e)^{\frac{1}{e^4}}\,;\,(e)^{\frac{1}{e^3}}\,;\,(e)^{e^3}\,;\,(e)^{e^4}\} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in \{e^{e^{-4}}\,;\,e^{e^{-3}}\,;\,e^{e^3}\,;\,e^{e^4}\}$$ إذن : حلول المعادلة هي $\{e^{e^{-4}}\,;\,e^{e^{-3}}\,;\,e^{e^3}\,;\,e^{e^4}\}$

لأن $e^x > 1$ من أجل $x > 0$

حذار ! $e^{e^\alpha} \neq (e^e)^\alpha$ و لكن $(e^e)^\alpha = e^{\alpha e}$

التمرين ــ 40

p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث $p(x) = 4x^2 - 4x - 3$

1 ــ عين جذور كثير الحدود p

2 ــ إستنتج حلول المعادلة $4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0$

3 ــ إستنتج حلول المعادلة $\ln(4x - 3) = \ln(x + 3) - \ln x$

الحـل ــ 40

1 ــ $p(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

إذن :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4-8}{8} = \dfrac{-1}{2} \\ x_2 = \dfrac{4+8}{8} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

نتيجة : جذور كثير الحدود p هي $\{-1/2 \,;\, 3/2\}$

2 ــ

$$4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln x \\ P(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \alpha = \ln x \\ \alpha \in \{-1/2 \,;\, 3/2\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = -1/2 \text{ أو } \ln x = 3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = e^{-1/2} \text{ أو } x = e^{3/2} \end{cases}$$

خلاصة : حلول المعادلة $4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0$ هي $\{e^{-1/2} \,;\, e^{3/2}\}$

3 ــ

$$\ln(4x-3) = \ln(x+3) - \ln x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ \ln(4x-3) = \ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > 3/4 \\ 4x - 3 = \dfrac{x+3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ x(4x-3) = x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ 4x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/4 \\ x = -1/2 \text{ أو } x = 3/2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = 3/2$ إذن : حلول المعادلة هي $\{3/2\}$

التمرين ــ 41

p كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث $p(x) = 2x^2 - x - 1$

1 ــ عين جذور كثير الحدود p

2 ــ إستنتج تحليلا لــ $2(\ln x)^2 - \ln x - 1$

3 ــ إستنتج حلول المتراجحة $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \leq 0$ ثم المتراجحة $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 > 0$

الحـل ـ 41

1 ـ $p(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

إذن : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{4} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$ منه : جذور كثير الحدود P هي : $\{-1/2\ ;1\}$

2 ـ حسب السؤال الأول فإن : $p(x) = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$

إذن : نضع $\left.\begin{matrix} \alpha = \ln x \\ x > 0 \end{matrix}\right\}$ منه : $2(\ln x)^2 - \ln x - 3 = p(\alpha)$

$= 2(\alpha - 1)(\alpha + \frac{1}{2})$

$= 2(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2})$ و هو التحليل المطلوب

3 ـ $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)\ (\ln x + \frac{1}{2}) \leq 0$

إذن : يكفي دراسة إشارة $(\ln x - 1)$ ثم إشارة $(\ln x + \frac{1}{2})$ كمايلي :

$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases}$

x	0		e		$+\infty$
ln x - 1		-	0	+	

$\ln x + 1/2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq -1/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq \ln e^{-1/2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e^{-1/2} \end{cases}$

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
ln x – 1/2		-	0	+	

خلاصة :

x	0		$e^{-1/2}$		e		$+\infty$
ln x + 1/2		-	0	+			
ln x - 1				-	0	+	
الجداء		+	0	-	0	+	

حلول المتراجحة $(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2}) \leq 0$ هي المجال $[e^{-1/2}\ ; e]$

إذن حلول المتراجحة $(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{2}) > 0$ هي $]0\ ; e^{-1/2}[\cup]e\ ; +\infty[$

التمرين ـ 42

حل في IR^2 جمل المعادلات التالية :

(1) $\begin{cases} x + y = 60 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln x/y = -\ln 3 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$

الحـل ـ 42

(1)

$\begin{cases} x + y = 60 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0\ ; y > 0 \\ x + y = 60 \\ \ln x\,y = \ln 1000 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \; ; \; y > 0 \\ x + y = 60 \; \dots\dots\dots\dots (1) \\ x\,y = 1000 \; \dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) : $y = 60 - x$

إذن المعادلة (2) تصبح : $x(60 - x) = 1000$

أي : $60\,x - x^2 = 1000$

أي : $x^2 - 60\,x + 1000 = 0$ و هي معادلة من الدرجة 2 ذات المجهول x .

إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR $\Delta = 3600 - 4000 = -400$

نتيجة : الجملة لا تقبل حلولا في IR^2

(2)

$$\begin{cases} x^2 + 2\,y = 16 \\ \ln(x/y) = -\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,y > 0 \\ x^2 + 2\,y - 16 = 0 \\ \ln \dfrac{x}{y} = \ln(1/3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\,y > 0 \\ x^2 + 2\,y - 16 = 0 \; \dots\dots (1) \\ x/y = 1/3 \; \dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من (2) : $y = 3\,x$

إذن : (1) تصبح : $x^2 + 2(3\,x) - 16 = 0$ أي $x^2 + 6\,x - 16 = 0$

$$\Delta = 36 + 64 = 100$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-6-10}{2} = -8 \\ x_2 = \dfrac{-6+10}{2} = 2 \end{cases}$$

من أجل $x = -8$ فإن $y = 3(-8) = -24$ منه : $x\,y = -8(-24) = 192$ مقبول لأن $x\,y > 0$

من أجل $x = 2$ فإن $y = 3(2) = 6$ منه : $x\,y = 2(6) = 12$ مقبول لأن $x\,y > 0$

خلاصة : حلول الجملة هي الثنائيات : $\{(-8\,;\,-24)\,;\,(2\,;\,6)\}$

تحقيق :

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2\,y = 4 + 12 = 16 \\ \ln(x/y) = \ln(2/6) = \ln(1/3) = -\ln 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x = -8 \\ y = -24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2\,y = 64 + 2(-24) = 64 - 48 = 16 \\ \ln(x/y) = \ln(-8/-24) = \ln(1/3) = -\ln 3 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \; ; \; y > 0 \\ x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x\,y = \ln 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \; ; \; y > 0 \\ x^2 + y^2 = 169 \; \dots\dots\dots\dots (1) \\ x\,y = 60 \; \dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) : $y = 60/x$

إذن المعادلة (1) تصبح : $x^2 + (60/x)^2 = 169$ أي : $x^2 + \dfrac{3600}{x^2} = 169$

أي $\dfrac{x^4 + 3600}{x^2} = 169$ أي $x^4 - 169\,x^2 + 3600 = 0$

نضع $\alpha = x^2$ حيث $\alpha \geq 0$ إذن : $\alpha^2 - 169\,\alpha + 3600 = 0$

$$\Delta = (169)^2 - 4(3600) = (169)^2 - (120)^2 = (169 - 120)(169 + 120) = 49 \times 289 = (7 \times 17)^2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{169 - 7 \times 17}{2} = \dfrac{169 - 119}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \\ \alpha_2 = \dfrac{169 + 7 \times 17}{2} = \dfrac{169 + 119}{2} = \dfrac{288}{2} = 144 \end{cases}$$

إذن : $x^2 = 25$ أو $x^2 = 144$

منه : $x \in \{-5 ; 5 ; -12 ; 12\}$

لكن : $x > 0$ إذن : $x \in \{5 ; 12\}$

من أجل $x = 5$ فإن $y = 60/5 = 12$

من أجل $x = 12$ فإن $y = 60/12 = 5$

خلاصة : حلول الجملة (3) هي الثنائيات $\{(5 ; 12) ; (12 ; 5)\}$

(4)

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \; ; \; y > 0 \\ x^3 + y^3 = 9 \\ \ln x\,y = \ln 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \; ; y > 0 \\ x^3 + y^3 = 9 \; \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x\,y = 2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) : $y = 2/x$

إذن المعادلة (1) تصبح : $x^3 + (2/x)^3 = 9$ أي $x^3 + \dfrac{8}{x^3} = 9$ أي $\dfrac{x^6 + 8}{x^3} = 9$

أي $x^6 + 8 = 9x^3$ أي $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

نضع $\alpha = x^3$ إذن : $\alpha^2 - 9\alpha + 8 = 0$ أي $(\alpha - 8)(\alpha - 1) = 0$

أي $\alpha = 1$ أو $\alpha = 8$

منه : $x^3 = 1$ أو $x^3 = 8$

أي : $x = 1$ أو $x = 2$

من أجل $x = 1$ فإن $y = 2/1 = 2$

من أجل $x = 2$ فإن $y = 2/2 = 1$

خلاصة : حلول الجملة (4) هي الثنائيات $\{(2 ; 1) ; (1 ; 2)\}$

التمرين ـــ 43

عين أصغر عدد طبيعي n في كل من الحالات التالية :

(1) $(1/2)^n \le 0{,}02$ **(3)** $(1{,}2)^n \ge 1040$

(2) $(0{,}8)^n \le 0{,}01$ **(4)** $21000(1 + 0{,}035)^n \ge 30000$

الحــل ـــ 43

(1)

$$(1/2)^n \le 0{,}02 \Rightarrow \ln((1/2)^n) \le \ln(0{,}02)$$
$$\Rightarrow n \ln(1/2) \le \ln(2/100)$$
$$\Rightarrow -n \ln 2 \le \ln 2 - \ln 100$$
$$\Rightarrow -n \le 1 - \frac{\ln 100}{\ln 2}$$
$$\Rightarrow n \ge \frac{\ln 100}{\ln 2} - 1$$

(باستعمال الحاسبة) $\Rightarrow n \ge 6{,}643 - 1$

(لأن $n \in IN$ أصغر عدد طبيعي) $\Rightarrow n = 6$

(2)

$$(0{,}8)^n \le 0{,}01 \Rightarrow \ln((0{,}8)^n) \le \ln(0{,}01)$$
$$\Rightarrow n \ln(0{,}8) \le \ln(0{,}01)$$

لأن $\ln(0{,}8) < 0$ $\Rightarrow n \ge \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$

باستعمال الحاسبة $\Rightarrow n \ge 20{,}63$

أصغر عدد طبيعي $\Rightarrow n = 21$

(3)

$$(1{,}2)^n \ge 1040 \Rightarrow \ln((1{,}2)^n) \ge \ln(1040)$$
$$\Rightarrow n \ln(1{,}2) \ge \ln(1040)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(1040)}{\ln(1{,}2)}$$

$$\Rightarrow n \geq 38{,}10$$

أصغر عدد طبيعي $\Rightarrow n = 39$

(4) $21000(1 + 0{,}035)^n \geq 30000 \Rightarrow (1 + 0{,}035)^n \geq \frac{30000}{21000}$

$$\Rightarrow n \ln(1{,}035) \geq \ln 30 - \ln 21$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 30 - \ln 21}{\ln(1{,}035)}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{0{,}35667}{0{,}0344}$$

أصغر عدد طبيعي $\Rightarrow n = 11$

التمرين ـــ 44

$(u_n)_{n\in IN}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها $3/2$

إبتداءا من أي رتبة n تكون حدود المتتالية (u_n) أكبر من 10^5 ؟.

الحـل ـــ 44

عبارة الحد العام : $u_n = u_0(3/2)^n$ أي $u_n = 2(3/2)^n$

منه : $u_n > 10^5 \Rightarrow 2(3/2)^n > 10^5$

$$\Rightarrow \ln[2(3/2)^n] > \ln(10^5)$$

$$\Rightarrow \ln 2 + \ln(3/2)^n > 5 \ln 10$$

$$\Rightarrow n \ln(3/2) > 5 \ln 10 - \ln 2$$

$\ln(3/2) > 0$ لأن $\Rightarrow n > \frac{5 \ln 10 - \ln 2}{\ln(3/2)}$

$$\Rightarrow n > 26{,}68$$

أصغر عدد طبيعي . $\Rightarrow n = 27$

التمرين ـــ 45

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

الحـل ـــ 45

f معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$= +\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{array}\right\}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \ln x$$

$= -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x = 0$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x}\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{-1}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{-x-1}{x^2}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$-x-1$	$-$
x^2	$+$
$\frac{-x-1}{x^2}$	$-$

منه جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

التمرين ـ 46

f دالة معرفة على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

أدرس تغيرات الدالة **f** على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

الحـل ـ 46

f معرفة على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{y} = 0$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0$$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

f قابلة للاشتقاق على $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-1/x}{[\ln(x)]^2} = \frac{-1}{x[\ln x]^2}$$

إذن : من أجل كل x من $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ فإن $f'(x)<0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

التمرين ـ 47

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = 2\,[\ln x]^2 - \ln x - 3$

الحـل ـ 47

f معرفة على $]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 2(\ln x)^2 - \ln x - 3 = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2(\ln x)^2 - \ln x - 3$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln x\left[2\ln x - 1 - \frac{3}{\ln x}\right] = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\ln x} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{x} \times \ln x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4\ln x - 1)$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$ هي إشارة $(4\ln x - 1)$ لأن $1/x > 0$

$$4\ln x - 1 \ge 0 \iff \ln x \ge 1/4$$

$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^{1/4}$

$\Leftrightarrow x \geq e^{1/4}$

منه جدول إشارة $f'(x)$:

x	0		$e^{1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$e^{1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-25}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e^{1/4}) = 2(\ln e^{1/4})^2 - \ln e^{1/4} - 3 = 2(1/4)^2 - \frac{1}{4} - 3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\ -3 = \frac{1-2-24}{8} = \frac{-25}{8}$$

التمرين – 48

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + \ln x$ (5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3 + \ln x}$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\ln x$ (6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)\ln x$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2\ln x$ (7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)}$

(4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x + 5 - \ln x$ (8) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x)\ln(-x)$

الحـل – 48

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + \ln x = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\ln x = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2\ln x = -\infty$

(4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x + 5 - \ln x = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3 + \ln x} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{3 + y} = 0$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)\ln x = -\infty$

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{2\ln x} = \frac{1}{2}$ لأن $x > 0$ إذن $\ln x^2 = 2\ln x$

(8) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x)\ln(-x) = +\infty$

التمرين – 49

أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

الحـل – 49

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x} + 1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{\frac{1}{\ln x} - 1} = 1/-1 = -1$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

التمرين – 50

f دالة معرفة كمايلي : $f(x) = \ln[\ln(x-1)]$

1 – بين أن f معرفة من أجل كل x من المجال $]2 ; +\infty[$

2 – أحسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الحـل – 50

1 – f معرفة من أجل : $\begin{cases} x-1>0 \\ \ln(x-1)>0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x>1 \\ \ln(x-1)>\ln 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x>1 \\ x-1>1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x>1 \\ x>2 \end{cases}$ أي $x>2$

منه : f معرفة من أجل كل x من المجال $]2 ; +\infty[$

2 – لدينا : $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} (x-1) = 1$ إذن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \ln(x-1) = \ln(1) = 0$

منه : $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \ln[\ln(x-1)] = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y$

أي : $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ إذن : $\lim_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

منه : $\lim_{x \to +\infty} \ln[\ln(x-1)] = \lim_{y \to +\infty} \ln y$

أي : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

التمرين – 51

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}$ **(3)** $\lim_{x \to 0} 2\left(\frac{\ln(1+x/2)}{x}\right)$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$ **(4)** $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$

الحـل – 51

لاحظ أن عند التعويض في الحساب نحصل على حالة عدم التعيين لأن البسط و المقام يؤولان إلى صفر معا إذن يجب إزالة حالة عدم التعيين في كل مرة . لذلك نلجأ إلى إستعمال تعريف العدد المشتق كمايلي :

1 – لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \ln(1+2x)$ على المجال $]-1/2 ; +\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $]-1/2 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$

إذن : $f'(0) = \frac{2}{1+0} = 2$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

أي : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)-0}{x}$ لأن $f(0) = 0$

أي : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

منه : $2 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

أي : $1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x}$

خلاصة : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$

2 ـ نعرف الدالة f على المجال $]-1/3\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \ln(1+3x)$

f قابلة للاشتقاق على $]-1/3\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \dfrac{3}{1+3x}$

إذن : $f'(0) = \dfrac{3}{1+0} = 3$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

أي : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)-0}{x}$ لأن $f(0) = 0$

أي : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

أي : $3 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

خلاصة : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3$

3 ـ نعرف الدالة f على المجال $]-2\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)$

f قابلة للاشتقاق على $]-2\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \dfrac{1/2}{1+\frac{1}{2}x}$

إذن : $f'(0) = \dfrac{1/2}{1+0} = 1/2$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

أي : $1/2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{2}x)-0}{x}$

أي : $1/2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$

خلاصة : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} = 2/2 = 1$

4 ـ نضع $y = \sqrt{x}$ إذن : لما $x \overset{>}{\to} 0$ فإن $y \overset{>}{\to} 0$

منه : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y}$

إذن : نعتبر الدالة f على المجال $[0\,;+\infty[$ معرفة بـ $f(y) = \ln(1+y)$

منه : $f'(y) = \dfrac{1}{1+y}$ أي $f_d'(0) = 1$ العدد المشتق على اليمين .

لكن تعريفا : $f_d'(0) = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(y)-f(0)}{y-0}$

أي : $1 = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y}$

خلاصة : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = 1$

التمرين ــ 51

f دالة معرفة على IR بـــ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0

الحــل ــ 51

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$$

(بوضع $x^2 = y$ حيث $y > 0$) $= \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\ln(y+1)}{y}$

$= 1$ حسب التمرين 57 .

إذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0) = 1$

التمرين ــ 52

عين مجموعات تعريف ثم مشتقات الدوال التالية :

(1)	$f(x) = x + \ln x$	(9)	$f(x) = \ln(-2x - 1)$
(2)	$f(x) = -x + \ln 2 + \ln x$	(10)	$f(x) = 1/2\,[\ln(1-x)]^2$
(3)	$f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$	(11)	$f(x) = x(2 - \ln x^2)$
(4)	$f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$	(12)	$f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$
(5)	$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$	(13)	$f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
(6)	$f(x) = x\ln x - x$	(14)	$f(x) = \dfrac{2x - 1 + \ln x}{x}$
(7)	$f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$	(15)	$f(x) = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2}$
(8)	$f(x) = 2x^2 - \ln x$	(16)	$f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x - 1}$

الحــل ــ 52

(1) $f(x) = x + \ln x$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

(2) $f(x) = -x + \ln 2 + \ln x$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x}$

(3) $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0\,;+\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}(2\ln x + 1)$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

منه : f معرفة على $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{-1/x}{[\ln(x)]^2} = \dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$

(5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ أي $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{x} - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

(6) $f(x) = x \ln x - x$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \ln x + \dfrac{x}{x} - 1 = \ln x$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ أي $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-1}{x} + 1\right) = \dfrac{x-1}{x^2}$

(8) $f(x) = 2x^2 - \ln x$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2 - 1}{x}$

(9) $f(x) = \ln(-2x - 1)$ إذن : f معرفة من أجل $-2x - 1 > 0$

أي : $x < -1/2$

منه : f معرفة على $]-\infty ; -1/2[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{-2}{-2x-1} = \dfrac{2}{2x+1}$

(10) $f(x) = 1/2\,[\ln(1-x)]^2$ إذن : f معرفة من أجل $1 - x > 0$ أي $x < 1$

منه : f معرفة على $]-\infty ; 1[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 1/2\left[2\left(\dfrac{-1}{1-x}\right)\ln(1-x)\right] = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$

(11) $f(x) = x(2 - \ln x^2)$ إذن : f معرفة من أجل $x^2 > 0$ أي $x \neq 0$

منه : f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = (2 - \ln x^2) + x\left(-\dfrac{2x}{x^2}\right) = -\ln x^2$

(12) $f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$ إذن : f معرفة من أجل $2x^2 + x - 6 > 0$

أي $2(x+2)(x - \dfrac{3}{2}) > 0$

أي $x \in]-\infty ; -2[\cup]3/2 ; +\infty[$

منه : f معرفة على $]-\infty ; -2[\cup]3/2 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{4x + 1}{2x^2 + x - 6}$

(13) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x \neq 1 \\ (x+1)(x-1) > 0 \end{cases}$

منه : f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}} = \dfrac{x-1}{x+1} \times \dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}$

(14) $f(x) = \dfrac{2x-1+\ln x}{x}$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ أي $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{\left(2+\frac{1}{x}\right)x - (2x-1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{2-\ln x}{x^2}$

(15) $f(x) = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2}$ إذن : f معرفة من أجل $x > 0$

منه : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 2x\ln x + \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{1}{2}(2x) = 2x\ln x + x - x = 2x\ln x$

(16) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x - 1}$ إذن : f معرفة من أجل : $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 1 \neq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \end{cases}$

منه : f معرفة على $]0 ; e[\cup]e ; +\infty[$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \dfrac{(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x - 1)^2} = \dfrac{\ln x - 2 - \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2}$

<u>التمرين ـــ 53</u>

f دالة معرفة على $]2 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = -x + 1 + \ln x$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أكتب معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة e .

<u>الحـل ـــ 53</u>

المعادلة تكتب من الشكل : $y = f'(e)(x-e) + f(e)$

لدينا : $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x}$

منه : $f'(e) = \dfrac{1-e}{e}$

من جهة أخرى : $f(e) = -e + 1 + \ln e = -e + 2$

إذن : معادلة المماس هي : $y = \dfrac{1-e}{e}(x-e) - e + 2$

أي : $y = \dfrac{1-e}{e}x - (1-e) - e + 2$

أي : $y = \dfrac{1-e}{e}x - 1 + e - e + 2$

أي : $y = \dfrac{1-e}{e}x + 1$

التمرين – 54

f دالة معرفة على $]-2\,;+\infty[$ بـ $f(x) = 3\ln(2+x) + x^2 - 3x$

بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل .

الحل – 54

يكون للمنحنى (C) مماس موازي لمحور الفواصل عند نقطة ذات الفاصلة x إذا و فقط إذا كان ميله معدوم أي $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{3}{2+x} + 2x - 3 = \frac{3 + (2x-3)(2+x)}{2+x} = \frac{2x^2 + x - 3}{x+2}$$

منه :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-2\,;+\infty[\\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-2\,;+\infty[\\ 2(x-1)(x+3/2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-2\,;+\infty[\\ x = 1 \text{ أو } x = -3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \{1\,;-3/2\}$$

نتيجة : يوجد مماسين للمنحنى (C) كل منهما موازي لحامل محور الفواصل

أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة 1 و الأخر عند النقطة ذات الفاصلة $-3/2$

التمرين – 55

إذا علمت أن $\log(3{,}81) \approx 0{,}58092$ أعط قيمة تقريبية للأعداد التالية :

(1) $\log(381)$ (2) $\log(0{,}381)$ (3) $\log(3{,}81 \times 10^{-3})$

الحل – 55

(1)

$$\begin{aligned} \log(381) &= \log(3{,}81 \times 10^2) \\ &= \log(3{,}81) + \log(10^2) \\ &= \log(3{,}81) + 2\log(10) \\ &\approx 0{,}58092 + 2 \quad \text{لأن } \log(10) = 1 \\ &\approx 2{,}58092 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \log(0{,}381) &= \log(3{,}81 \times 10^{-1}) \\ &= \log(3{,}81) + \log(10^{-1}) \\ &= \log(3{,}81) - \log(10) \\ &\approx 0{,}58092 - 1 \\ &\approx -0{,}41908 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \log(3{,}81 \times 10^{-3}) &= \log(3{,}81) + \log(10^{-3}) \\ &= \log(3{,}81) - 3\log(10) \\ &\approx 0{,}58092 - 3 \\ &\approx -2{,}41908 \end{aligned}$$

التمرين – 56

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $\log x = 5$ (2) $\log x = -3$ (3) $\log x = 0{,}01$

الحل – 56

(1)

$$\log x = 5 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 10} = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 5\ln 10 = \ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln 10^5 = \ln x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = 10^5$ إذن : مجموعة حلول المعادلة هي $\{10^5\}$

(2) $\log x = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x = \log(10^{-3}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 10^{-3} \end{cases}$

$x = 10^{-3} \Leftrightarrow$ إذن : مجموعة حلول المعادلة هي $\{10^{-3}\}$

ملاحظة : يمكن الإجابة عن السؤال الأول بهذه الطريقة أي دون الرجوع إلى العلاقة $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

(3) $\log x = 0,01 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x = \log(10^{0.01}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 10^{0.01} \end{cases}$

$x = 10^{0.01} \Leftrightarrow$ منه : مجموعة حلول المعادلة هي $\{10^{0,01}\}$

التمرين ـ 57

حل في IR المتراجحات التالية :

(1) $\log x > 4$ **(3)** $\log x \geq 0,1$

(2) $\log x < -10$ **(4)** $\log x < \log(1-x)$

الحـل ـ 57

بما أن الدالة log لها نفس خواص الدالة ln فإن يمكن حل هذه المتراجحات كمايلي :

(1) $\log x > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x > \log(10^4) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 10^4 \end{cases}$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال $]10^4 ; +\infty[$

(2) $\log x < -10 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x < \log(10^{-10}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10^{-10} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < x < 10^{-10}$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال $]0 ; 10^{-10}[$

(3) $\log x \geq 0,1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x \geq \log(10^{0.1}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 10^{0.1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \geq 10^{0.1}$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال $[10^{0.1} ; +\infty[$

(4) $\log x < \log(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \\ x < 1 - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x < 1/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1/2$

إذن : مجموعة الحلول هي المجال $]0 ; 1/2[$

التمرين ـ 58

حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y' = 3y$ (3) $2y' + 5y = 0$

(2) $y' + 2y = 0$ (4) $\frac{1}{2}y' = 4y$

الحـل ــ 58

بالرجوع إلى الدرس لدينا حل المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = a\,y$

حيث $a \in R^*$ هي الدوال من الشكل $y = c\,e^{ax}$ حيث $c \in R^*$ كمايلي :

(1) $y' = 3y$ إذن : $y = c\,e^{3x}$ حيث c ثابت حقيقي .

(2) $y' + 2y = 0$ أي $y' = -2y$

منه : $y = c\,e^{-2x}$ حيث c ثابت حقيقي .

(3) $2y' + 5y = 0$ أي $y' = \frac{-5}{2}y$

منه : $y = c\,e^{\frac{-5}{2}x}$ حيث c ثابت حقيقي .

(4) $\frac{1}{2}y' = 4y$ أي $y' = 8y$

منه : $y = c\,e^{8x}$ حيث c ثابت حقيقي .

التمرين ــ 59

1 ــ حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 0$

2 ــ عين الحل الخاص f الذي يحقق $f(\ln 4) = 1$

الحـل ــ 59

1 ــ $2y' + y = 0 \ldots\ldots(\alpha)$ إذن : $y' = \frac{-1}{2}y$

منه : $y = c\,e^{\frac{-1}{2}x}$ حيث c ثابت حقيقي .

2 ــ لتكن f حل للمعادلة التفاضلية (α) إذن : $f(x) = c\,e^{\frac{-1}{2}x}$ مع c ثابت حقيقي .

لدينا :

$$f(\ln 4) = 1 \Leftrightarrow c\,e^{\frac{-1}{2}\ln 4} = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left[\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln 4}}\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right) = 1 \quad \text{لأن} \quad (e^{\frac{1}{2}\ln 4} = e^{\frac{1}{2}\times 2\ln 2} = e^{\ln 2})$$

$$\Leftrightarrow c/2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c = 2$$

نتيجة : $f(x) = 2\,e^{\frac{-1}{2}x}$ هي الحل الخاص المطلوب .

التمرين ــ 60

f هي حل المعادلة التفاضلية $2y' + y - 5 = 0$

هل منحنى الدالة f يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = 5/2$ ؟

الحـل ــ 60

المعادلة $2y' + y - 5 = 0$ تكافئ $y' = \frac{-1}{2}y + 5/2 \quad \ldots\ldots\ldots(\alpha)$

و هي من الشكل $y' = a\,y + b$

منه : حلولها $y = c\,e^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $a \neq 0$

أي : حلول المعادلة (α) هي : $y = c\,e^{\frac{-1}{2}x} - \left(\frac{5/2}{-1/2}\right)$ حيث c ثابت حقيقي .

أي : $y = c\,e^{\frac{-1}{2}x} + 5$

منه : $f(x) = c\,e^{\frac{-1}{2}x} + 5$ حيث c ثابت حقيقي

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} c\, e^{\frac{-1}{2}x} + 5 = 5$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{-1}{2}x} = 0$

إذن : منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته $y = 5$ (و ليس $y = 5/2$)

التمرين – 61

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = 3\,e^{-2x} - 4$

أوجد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = a\,y + b$ حيث تكون الدالة f حلا لها .

الحـل – 61

يمكن حل هذا التمرين بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى :

$$f(x) = 3\,e^{-2x} - 4 = 3\,e^{-2x} - \left(\frac{-8}{-2}\right)$$

نضع $\begin{cases} c = 3 \\ a = -2 \\ b = -8 \end{cases}$ إذن : $f(x) = c\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$

منه : f هي حل للمعادلة التفاضلة $y' = a\,y + b$

أي f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = -2\,y - 8$

تحقيق : $f'(x) = -6\,e^{-2x}$

من جهة أخرى : $-2\,f(x) - 8 = -2(3\,e^{-2x} - 4) - 8 = -6\,e^{-2x}$

إذن فعلا : $f'(x) = -2\,f(x) - 8$

أي : f هي حل للمعادلة $y' = -2\,y - 8$

الطريقة الثانية :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6\,e^{-2x} \\ &= -2\,[3\,e^{-2x}] \\ &= -2\,[3\,e^{-2x} - 4 + 4] \\ &= -2\,[3\,e^{-2x} - 4] - 8 \\ &= -2\,f(x) - 8 \end{aligned}$$

إذن .... هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = -2\,y - 8$

التمرين – 62

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = 2\,e^{-5x}$

أوجد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = a\,y$ حيث تكون الدالة f حلا لها .

الحـل – 62

نضع : $\begin{cases} c = 2 \\ a = -5 \end{cases}$ إذن : $f(x) = c\,e^{ax}$

منه : f هي حل للمعادلة التفاضلة $y' = a\,y$

أي f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = -5\,y$

تحقيق : $f'(x) = -10\,e^{-5x} = -5(2\,e^{-5x}) = -5\,f(x)$

إذن : f هي فعلا حل للمعادلة $y' = -5\,y$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ـ 1

1 ـ حل في IR المعادلة $2t^2 - 5t + 2 = 0$ ذات المجهول t .

2 ـ حل في IR^2 الجملة : $\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases}$ ذات المجهولين x و y

الحـل ـ 1

1 ـ $2t^2 - 5t + 2 = 0$ معادلة من الدرجة 2 : $\Delta = 25 - 16 = 9$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2 \\ t_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

إذن : مجموعة حلول المعادلة هي $\{2 ; 1/2\}$

2 ـ $\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0 \\ t > 0 \text{ و } t = e^x \\ e^x \cdot e^y = 1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t = 2 \text{ أو } t = 1/2 \\ t = e^x \\ 1/e^x = e^y \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} e^x = 2 \text{ أو } e^x = 1/2 \\ y = \ln(1/e^x) = -x \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = \ln 2 \text{ و } y = -\ln 2 \\ \text{أو} \\ x = \ln(1/2) \text{ و } y = -\ln(1/2) \end{cases}$

إذن : حلول الجملة هي الثنائيات $\{(\ln 2 ; -\ln 2) ; (\ln 1/2 ; -\ln 1/2)\}$

التمرين ـ 2

حل في IR المعادلتين التاليتين :

(1) $e^{x+2} - e - 2e^{-x} = 0$

(2) $\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2$

الحـل ـ 2

(1) $e^{x+2} - e - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(e^{2x+2} - e^{x+1} - 2) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x+2} - e^{x+1} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^2(e^x)^2 - e(e^x) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^2t^2 - et - 2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha) \\ t > 0 \text{ و } e^x = t \end{cases}$

المعادلة (α) من الدرجة الثانية ذات المجهول الموجب t إذن :

$\Delta = e^2 + 8e^2 = 9e^2 = (3e)^2$

منه : $\begin{cases} t_1 = \dfrac{e - 3e}{2e^2} & \text{مرفوض لأنه سالب} \\ t_2 = \dfrac{e + 3e}{2e^2} = \dfrac{4e}{2e^2} = \dfrac{2}{e} & \text{مقبول} \end{cases}$

إذن : $e^x = t_2 \Rightarrow e^x = 2/e$

$\Rightarrow x = \ln(2/e)$

نتيجة : المعادلة تقبل حلا واحدا هو $\{\ln(2/e)\}$

(2)

$$\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ \ln|2x+1||x-1| = \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ \ln|(2x+1)(x-1)| = \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ |2x^2 - x - 1| = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1/2 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - x - 1 = 2 \text{ أو } 2x^2 - x - 1 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \text{ أو } 2x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

المعادلة $2x^2 - x - 3 = 0$	المعادلة $2x^2 - x + 1 = 0$
$\Delta = 1 + 24 = 25$	$\Delta = 1 - 8 = -7$
$\begin{cases} x_1 = \frac{1-5}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$	لا تقبل حلولا في R

نتيجة :

$$\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1/2 \\ x \neq 1 \\ x = -1 \text{ أو } x = 3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1 \,;\, 3/2\}.$$

منه : حلول المعالدلة هي $\{-1 \,;\, 3/2\}$

التمرين ـــ 3

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـــ $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

1 ـــ أحسب $f'(x)$ ثم بين أن $f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

2 ـــ إستنتج جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$ (دون حساب النهاية عند $+\infty$)

3 ـــ أثبت أن من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$: $\ln x < \sqrt{x}$

4 ـــ بين أن من أجل كل x حيث $x > 1$ فإن : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

5 ـــ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ثم إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

الحــل ـــ 3

1 ـــ

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$ و هو المطلوب

2 ـــ إشارة $f'(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$ هي إشارة $2-\sqrt{x}$ لأن $2x > 0$ كما يلي :

x	0		4		$+\infty$
$2-\sqrt{x}$	||	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$2(\ln 2-1)$ (سالب)	$\searrow$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$f(4)=\ln 4-\sqrt{4}=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x-\sqrt{0}=-\infty$$

لاحظ أن الدالة f متناقصة على المجال $[4;+\infty[$

و بماأن $f(4)<0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$

3 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن :

$f(x)<0$ أي $\ln x-\sqrt{x}<0$ منه $\ln x<\sqrt{x}$ و هو المطلوب .

4 ــ لدينا : $\begin{cases}\ln x<\sqrt{x}\\ x>1\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\ln x<\sqrt{x}\\ 1/x>0\end{cases}$

منه : $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ (ضرب الطرفين في $1/x$)

أي $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ......(α)

من جهة أخرى : $x>1$ إذن : $\ln x>0$ أي $\dfrac{\ln x}{x}>0$ ......(β)

نتيجة : من العلاقتين (α) و (β) نستنتج أن : $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5 ــ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

حسب نظرية الحصر : $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ إذن $0<\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}<0$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

ملاحظة : هذه النتيجة ستستعمل في التمارين المقبلة .

<u>التمرين ــ 4</u>

f دالة معرفة على IR بــ $f(x)=a\,e^{2x}+b\,e^{x}+c$ حيث $a\,;\,b\,;\,c$ أعداد حقيقية .

نسمي (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ عين $a\,;\,b\,;\,c$ حتى يشمل المنحنى (C) النقطة $O(0\,;\,0)$ و $f'(\ln(3/4))=0$ و المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

لتكن الدالة f معرفة على IR بــ $f(x)=2\,e^{2x}-3\,e^{x}+1$

2 ــ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3 ــ أدرس تغيرات الدالة f

4 ــ حدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل .

5 ــ عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

6 ــ أنشئ المنحنى (C)

<u>**الحــل ــ 4**</u>

1 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

إذن : يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$ إذا و فقط إذا كان : $c = 1$ منه : . $f(x) = a\,e^{2x} + b\,e^{x} + 1$

المنحنى (C) يشمل المبدأ $(0\,;0)$ إذن : $f(0) = 0$ أي : $a + b + 1 = 0$ .... (α)

$f'(x) = 2\,a\,e^{2x} + b\,e^{x}$ إذن : $f'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\,a\left(\frac{3}{4}\right)^2 + b\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\,a + b\right)$

منه :
$$f'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\,a + b = 0$$
$$\Leftrightarrow 3\,a + 2\,b = 0 \text{ .... } (\beta)$$

لنحل الجملة $\begin{cases} a + b = -1 \\ 3\,a + 2\,b = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2\,a + 2\,b = -2 \\ 3\,a + 2\,b = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

أخيرا : $a = 2 \;;\; b = -3 \;;\; c = 1$ أي $f(x) = 2\,e^{2x} - 3\,e^{x} + 1$

2 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(2\,e^{x} - 3 + e^{-x}) = +\infty$

3 ـ f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = 4\,e^{2x} - 3\,e^{x}$
$$= e^{x}(4\,e^{x} - 3)$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $4\,e^{x} - 3$ كمايلي :
$$4\,e^{x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \geq 3/4$$
$$\Leftrightarrow e^{x} \geq e^{\ln(3/4)}$$
$$\Leftrightarrow x \geq \ln(3/4)$$

x	$-\infty$		$\ln(3/4)$		$+\infty$
$4e^{x} - 3$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α		$\ln(3/4)$		0	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$	1	0	$\searrow$	$-1/8$	$\nearrow$	0	$+\infty$

$$f\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9 - 18 + 8}{8} = -\frac{1}{8}$$

4 ـ نقاط التقاطع مع حامل محور الفواصل :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,e^{2x} - 3\,e^{x} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{x} \;:\; y > 0 \\ 2\,y^2 - 3\,y + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{x} \;:\; y > 0 \\ 2(y - 1)(y - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x} = 1 \\ \text{أو} \\ e^{x} = 1/2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 1 \\ \text{أو} \\ x = \ln(1/2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -\ln 2 \end{cases}$$

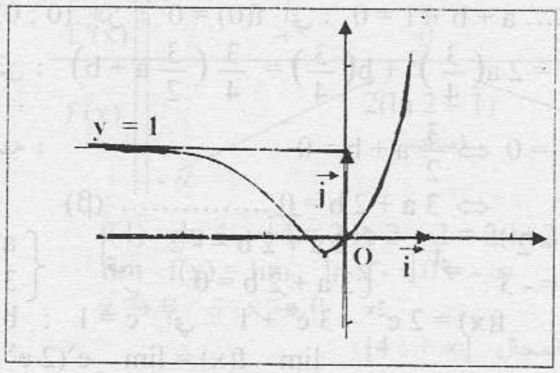
نتيحة : المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين إحداثياهما $(0 ; 0)$ ؛ $(-\ln 2 ; 0)$

5 ــ معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

حيث : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 4 - 3 = 1 \end{cases}$

منه : المعادلة هي : $y = x$

6 ــ الإنشاء :



التمرين ــ 5

لتكن المعادلتين التفاضليتين : $(E_1) : y' - 2y = 0$ ؛ $(E_2) : y' = y$

1 ــ حل المعادلتين (E_1) و (E_2)

2 ــ عين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) حيث $f_1'(0) = 4$

3 ــ عين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) حيث $f_2(0) = 1$

g دالة المعرفة على IR بـ $g(x) = 2e^{2x} - e^x$

4 ــ أدرس تغيرات الدالة g

5 ــ عين معادلة المستقيم المقارب لمنحنى الدالة g .

6 ــ عين نقط تقاطع منحنى الدالة g مع محوري الإحداثيات .

7 ــ أنشئ منحنى الدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

الحــل ــ 5

1 ــ ليكن c ثابت حقيقي $y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = 2y$

$\Rightarrow y = c\,e^{2x}$

إذن : حلول المعادلة (E_1) هي الدوال من الشكل $f(x) = c\,e^{2x}$ حيث c ثابت حقيقي .

ليكن α ثابت حقيقي $y' = y \Rightarrow y = \alpha\,e^x$

إذن : حلول المعادلة (E_2) هي الدوال من الشكل $f(x) = \alpha\,e^x$ حيث α ثابت حقيقي .

2 ــ f_1 حل للمعادلة (E_1) إذن : $f_1(x) = ce^{2x}$

منه : $f_1'(x) = 2\,c\,e^{2x}$

إذن : $f_1'(0) = 4 \Leftrightarrow 2c = 4$

$\Leftrightarrow c = 2$

منه : $f_1(x) = 2\,e^{2x}$ و هي الدالة f_1 المطلوبة .

3 ــ f_2 حل المعادلة (E_2) إذن : $f_2(x) = \alpha\,e^x$

منه : $f_2(0) = \alpha$

إذن : $f_2(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

إذن : $f_2(x) = e^x$ و هي الدالة f_2 المطلوبة .

4 ــ تغيرات الدالة g : (لاحظ أن $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$)

g معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2e^{2x} - e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x(2e^x - 1) = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$g'(x) = 4e^{2x} - e^x = e^x(4e^x - 1)$

إذن : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $4e^x - 1$ لأن $e^x > 0$ كما يلي :

$4e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1/4$

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$4e^x - 1$	$-$	0	$+$

$\Leftrightarrow x \geq \ln(1/4)$

$\Leftrightarrow x \geq -\ln 4$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(-\ln 4) = 2(4^{-2}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{8}$$

5 ـ بما أن $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) مقارب لمنحنى الدالة g عند $-\infty$

6 ـ **التقاطع مع محور التراتيب :** $g(0) = 2 - 1 = 1$

إذن : منحنى الدالة g يقطع حامل محور التراتيب عند النقطة $(0 ; 1)$

التقاطع مع محور الفواصل : $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2e^x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0$

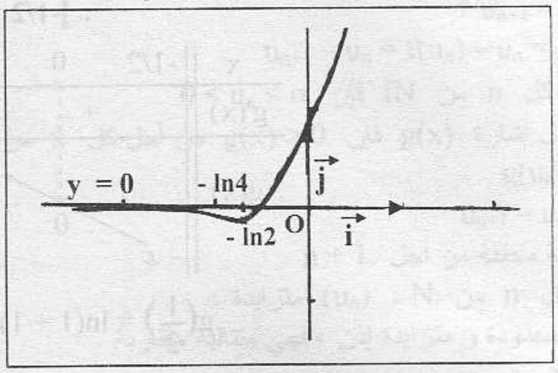
$\Leftrightarrow e^x = 1/2$

$\Leftrightarrow x = \ln(1/2)$

$\Leftrightarrow x = -\ln 2$

إذن : منحنى الدالة g يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(-\ln 2 ; 0)$

7 ـ **الإنشاء :**



التمرين ـ 6

الجزء I : f دالة معرفة على $I =]-1/2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln(1 + 2x)$

1 ـ بين أن f متزايدة تماما على I .

2 ـ أحسب نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $-1/2$ بقيم كبرى .

لتكن g دالة معرفة على I بـ $g(x) = f(x) - x$

3 ـ أدرس تغيرات الدالة g على المجال I .

4 ـ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الأخر α حيث $1 < \alpha < 2$

5 ـ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I .

6 ـ بين أن من أجل كل x من المجال $]0 ; \alpha[$ فإن $f(x) \in]0 ; \alpha[$

الجزء II : نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة بـ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1 ـ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in]0 ; \alpha[$

2 ـ برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة

3 ـ بين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

الحـل ـ 6

الجزء I :

1 ـ f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة : $f'(x) = \dfrac{2}{1 + 2x}$

إذن : من أجل كل x من I فإن $f'(x) > 0$ لأن $(1 + 2x) > 0$

منه : f متزايدة تماما على المجال I .

2 ـ $\lim_{x \overset{>}{\to} -1/2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1/2} \ln(1 + 2x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y = -\infty$

3 ـ **تغيرات الدالة g :** g معرفة على $]-1/2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1/2} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1/2} \ln(1+2x) - x = -\infty$$

لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} -1/2} \ln(1+2x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1+2x) - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1+2x)\left[\frac{\ln(1+2x)}{(1+2x)} - \frac{x}{1+2x}\right]$$

نضع $y = 1 + 2x$ إذن $\lim_{x \to +\infty}(1+2x) = \lim_{y \to +\infty} y$. $= \lim_{y \to +\infty} y\left[\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{2}\right]$

لأن $\lim \frac{\ln y}{y} = 0$ حسب التمرين 3 $= \lim_{x \to +\infty} y\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -\infty$

g قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{2-1-2x}{1+2x} = \frac{1-2x}{1+2x}$$

إذن : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $1 - 2x$ لأن $0 < (1+2x)$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$1-2x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-1/2 \, ; +\infty[$:

x	$-1/2$		0		$1/2$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	0	-		-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1+1) - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$$

4 ــ من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن g تنعدم مرتين أي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في المجال I .

إذن : أحد حلول المعادلة $g(x) = 0$ هو 0 $\quad g(0) = \ln 1 - 0 = 0$

الحل الأخر :

$g(1) = \ln(1+2) - 1 = \ln 3 - 1 > 0$

$g(2) = \ln(1+4) - 2 = \ln 5 - 2 < 0$

لدينا $\left\{\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على المجال } [1 \, ; 2] \\ g(1) \times g(2) < 0 \end{array}\right.$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $1 < \alpha < 2$ و هو المطلوب .

5 ــ بملاحظة جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	$-1/2$		0		1		α		2		$+\infty$
$g(x)$		-	0		+		0		-		

6 ــ حسب السؤال (1) فإن f متزايدة تماما على I و خاصة على $[0 \, ; \alpha]$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l} f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0 \\ f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha \quad \text{لأن } g(\alpha) = 0 \end{array}\right.$

إذن : جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0 \, ; \alpha]$ هو كما يلي :

x	0		1		α
$f(x)$	0	↗		↗	α

نتيجة : من أجل كل x من المجال $]0 ; \alpha[$ فإن $f(x) \in]0 ; \alpha[$ و هو المطلوب . (لأن f مستمرة)

الجزء II :

1 ــ البرهان بالتراجع أن : $u_n \in]0 ; \alpha[$ من أجل كل عدد طبيعي n

من أجل $n = 0$: $u_0 = 1$ و $0 < 1 < \alpha$ محقق .

من أجل $n = 1$: $u_1 = f(u_0)$ أي $u_1 = f(1)$ أي $0 < u_1 < \alpha$ لأن $0 < f(1) < \alpha$

منه : الخاصية محققة من أجل $n = 0$ و $n = 1$

نفرض أن $0 < u_n < \alpha$ من أجل $n > 1$

هل $0 < u_{n+1} < \alpha$ ؟

لدينا : $0 < u_n < \alpha$ إذن : $0 < f(u_n) < \alpha$ أي $0 < u_{n+1} < \alpha$

منه : الخاصية محققة من أجل $(n + 1)$.

نتيجة : من أجل كل n من N فإن $0 < u_n < \alpha$.

2 ــ البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة :

من أجل $n = 1$: $u_1 - u_0 = f(1) - 1 = g(1)$

لكن حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن $g(1) > 0$

إذن : $u_1 - u_0 > 0$

منه : (u_n) متزايدة من أجل $n \in \{0 ; 1\}$

نفرض أن (u_n) متزايدة من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} - u_n > 0$ ؟

لدينا $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$

لكن من أجل كل n من IN فإن $0 < u_n < \alpha$

و حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن $g(x) > 0$ من أجل كل x من $]0 ; \alpha[$

إذن : $g(u_n) > 0$

منه : $u_{n+1} - u_n > 0$

أي : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من N : (u_n) متزايدة .

3 ــ لدينا (u_n) محدودة و متزايدة إذن : فهي متتالية متقاربة .

التمرين ــ 7

f دالة معرفة على المجال $[0 ; 1]$ بــ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ 0 : x = 1 \\ \ln(x) \times \ln(1 - x) : x \in]0 ; 1[\end{cases}$$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

نقبل أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = 0$ و من أجل $\alpha > 0$ فإن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^{\alpha} \ln x = 0$

1 ــ عين $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - x)}{x}$ ثم إستنتج $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)}{x}$

2 ــ بين أن من أجل كل x من المجال $]-1/2 ; 1/2[$: $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$. فسر النتيجة هندسيا .

لتكن ϕ دالة معرفة على $]0 ; 1[$ بــ $\phi(x) = (1 - x)\ln(1 - x) - x \ln x$

3 ــ أحسب $\phi'(x)$ ثم بين أن $\phi''(x) = \dfrac{2x - 1}{x(1 - x)}$ (الدالة المشتقة الثانية)

4 ــ إستنتج تغيرات الدالة ϕ'

5 ــ بين أن ϕ' تنعدم عند قيمتين α_1 و α_2 من المجال $]0 ; 1[$

6 ــ إستنتج إشارة ϕ' على المجال $]0 ; 1[$

7 ــ عين $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \phi(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \phi(x)$ و $\phi(1/2)$

8 ــ إستنتج إشارة $\phi(x)$ على المجال $]0 ; 1[$

9 ـ بين أن $f'(x)$ لها نفس إشارة $\phi(x)$ على $]0\,;1[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

10 ـ بين أن من أجل كل x من المجال $]0\,;1[$: $0 \le (\ln x)(\ln(1-x)) \le (\ln 2)^2$

<u>الحــل ـ 7</u>

1 ـ نعرف الدالة g بـ : $g(x) = \ln(1-x)$

إذن : g قابلة للاشتقاق على $]-\infty\,;1[$ و دالتها المشتقة : $g'(x) = \dfrac{-1}{1-x}$

منه : $g'(0) = -1$

لكن حسب تعريف العدد المشتق عند 0 : $g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

إذن : $g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)-0}{x}$

أي : $-1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

منه : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$ و هو المطلوب

لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x\,[\ln(1-x)]}{x}$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x\left[\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right]$

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\ln x)(-1)$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$ حسب السؤال (1)

$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} -\ln x$

$= +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

2 ـ ليكن $-1/2 < x < 1/2$ إذن $\left\{\begin{array}{l} -1/2 < -x < 1/2 \\ 0 < \frac{1}{2} + x < 1 \end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l} 0 < \frac{1}{2} - x < 1 \\ 0 < \frac{1}{2} + x < 1 \end{array}\right.$

و لدينا : $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - x\right)\left[\ln\left(1 - \frac{1}{2} + x\right)\right]$

$= \ln\left(\frac{1}{2} - x\right)\left[\ln\left(\frac{1}{2} + x\right)\right]$

من جهة أخرى : $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + x\right)\left[\ln\left(1 - \frac{1}{2} - x\right)\right]$

$= \ln\left(\frac{1}{2} + x\right)\left[\ln\left(\frac{1}{2} - x\right)\right]$

$= \ln\left(\frac{1}{2} - x\right)\left[\ln\left(\frac{1}{2} + x\right)\right]$

نتيجة : من أجل كل x من $]-1/2\,;1/2[$: $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $x = 1/2$ هو محور تناظر للمنحنى (C)

3 ـ $\phi'(x) = -\ln(1-x) + \dfrac{-1}{1-x}(1-x) - \left[\ln x + \dfrac{1}{x}(x)\right]$

$= -\ln(1-x) - 1 - \ln x - 1$

$= -[\ln(1-x) + \ln x + 2]$

منه : $\phi''(x) = -\left[\dfrac{-1}{1-x} + \dfrac{1}{x}\right]$

$$= -\left[\frac{-x+1-x}{x(1-x)}\right]$$

$$= \frac{2x-1}{x(1-x)}$$ و هو المطلوب .

4 ـ تغيرات الدالة ϕ' :

لدينا $\phi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$ منه جدول إشارة $\phi''(x)$ كمايلي :

x	0		$1/2$		1
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$x(1-x)$			$+$		
$\phi''(x)$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة $\phi'(x)$:

x	0	α_1	$1/2$	α_2	1
$\phi'(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-2(1-\ln 2)$	↗ 0	↗ $+\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \phi'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} -[\ln(1-x)+\ln x+2] = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \phi'(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} -[\ln(1-x)+\ln x+2] = +\infty$$

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2\right] = -\left[2\ln\frac{1}{2}+2\right] = -2\,[1-\ln 2]$$

5 ـ بملاحظة جدول تغيرات الدالة ϕ' نستنتج أن يوجد قيمتين α_1 و α_2
بحيث $\phi'(\alpha_1) = 0$ و $\phi'(\alpha_2) = 0$ لأن $\phi'(1/2) < 0$ إذن المعادلة $\phi'(x) = 0$
تقبل حلا على المجال $]0\,;1/2[$ و أخر على المجال $]1/2\,;1[$ أي المعادلة $\phi'(x) = 0$ تقبل حلين α_1 و α_2

6 ـ دائما بملاحظة جدول تغبرات الدالة ϕ' نستنتج مايلي :

x	0		α_1	$1/2$	α_2		1
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7 ـ $$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \phi(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (1-x)\ln(1-x) - x\ln x$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 1\ln 1 - x\ln x$$

$$= 0 - 0 = 0$$ لأن حسب المعطيات نقبل أن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^{\alpha}\ln x = 0$

أي $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^{1}\ln x = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \phi(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} (1-x)\ln(1-x) - x\ln x$$

$$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y\ln y - 1\ln 1$$ لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} 1-x = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\times\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

8 ـ لإستنتاج جدول إشارة $\phi(x)$ على المجال $]0\,;1[$ نقوم أولا
برسم جدول تغيرات الدالة ϕ على المجال $]0\,;1[$ كما يلي :

x	0		α_1		$1/2$		α_2		1
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\phi(x)$	0	$\nearrow$	$\phi(\alpha_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\phi(\alpha_2)$	$\nearrow$	0

منه جدول إشارة $\phi(x)$ على المجال $]0\,;1[$ كمايلي :

x	0		$1/2$		1
$\phi(x)$		$+$	0	$-$	

9 ــ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ln(1-x) + \left(\frac{-1}{1-x}\right)\ln x$$

$$= \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x)\ln(1-x) - x\ln x}{x(1-x)}$$

$$= \frac{\phi(x)}{x(1-x)}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $]0\,;1[$ هي إشارة $\phi(x)$ لأن $x(1-x)>0$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$(\ln 2)^2$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 = (-\ln 2)^2 = (\ln 2)^2$$

10 ــ من جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0\,;1[$ نستنتج أن:

من أجل كل x من $]0\,;1[$: $0 \le f(x) \le (\ln 2)^2$

أي من أجل كل x من $]0\,;1[$: $0 \le (\ln x)(\ln(1-x)) \le (\ln 2)^2$ و هو المطلوب .

<u>التمرين ــ 8</u>

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بــ $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln x$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بــ $g(x) = x - 1 + \ln x$

2 ــ تحقق أن $g(1) = 0$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 ــ بين أن من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

4 ــ إستنتج إشارة $f'(x)$

5 ــ أدرس نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$

6 ــ شكل جدول تغيرات الدالة f

7 ــ أنشئ بدقة المنحنى (C)

<u>الحـل ــ 8</u>

1 ــ تغيرات الدالة g : g معرفة على $]0\,;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 - 1 + \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 + \ln x = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

إذن : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$+$		
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 ـ $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

إذن $g(1) = 0$ أي الدالة g تنعدم مرة واحدة على $]0 ; +\infty[$ (أنظر جدول التغرات)

منه جدول إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3 ـ f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \left[\frac{x-(x-1)}{x^2}\right]\ln x + \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}(x-1)$$

$$= \frac{1}{x^2}(\ln x + x - 1)$$

$$= \frac{1}{x^2}\, g(x)$$ و هو المطلوب .

4 ـ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ لأن $x^2 > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

5 ـ

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x-1}{x}\ln x$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-1}{x}\ln x$$

$$= +\infty$$ لأن $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x}\ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln x$$ لأن $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

$$= +\infty$$

6 ـ جدول تغيرات الدالة f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$ (نفس إشارة $g(x)$)	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = \frac{1-1}{1} \ln 1 = 0$$

7 ــ الإنشاء :

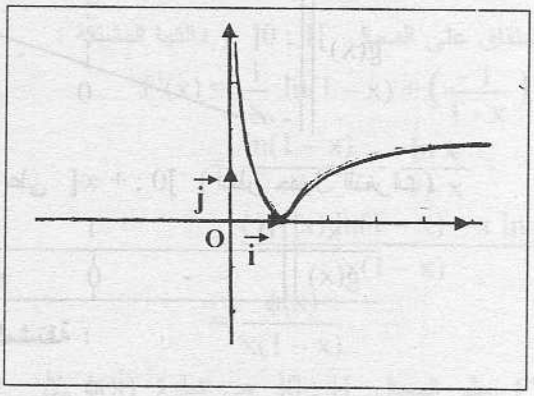
لاحظ أن

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} \ln x - \ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln x \left[\frac{x-1}{x} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln x}{x}$$

$= 0$ إذن منحنى الدالة f مقارب لمنحنى الدالة $x \mapsto \ln x$ في جوار $+\infty$



<u>التمرين ــ 9</u>

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ و (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

k عدد حقيقي موجب تماما

4 ــ ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$ تحليليا ثم باستعمال منحنى الدالة f .

<u>الحـل ــ 9</u>

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln 1 = 0$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln [e^x(e^x - 1 + e^{-x})]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln e^x + \ln(e^x - 1 + e^{-x})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x + \ln(e^x - 1 + e^{-x})$$

$$= +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(2e^x - 1)$ لأن $\frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 1} > 0$

منه :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow e^x \geq 1/2$$
$$\Leftrightarrow x \geq \ln(1/2)$$
$$\Leftrightarrow x \geq -\ln 2$$

منه جدول تغيرات الدالة f :

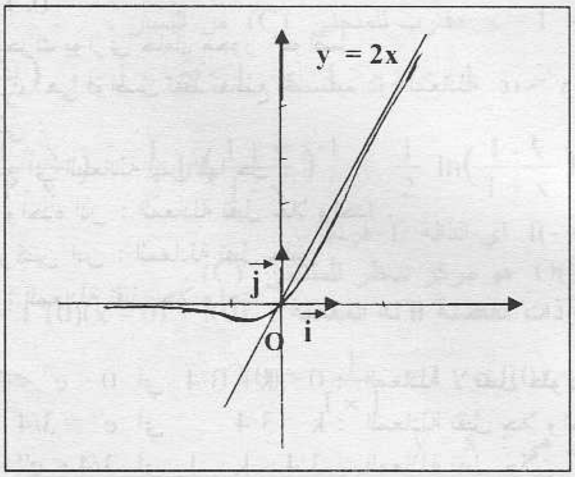
x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$\ln(3/4)$	↗	$+\infty$

$$f(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{1-2+4}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

2 –
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} [\ln(e^{2x} - e^{x} + 1) - 2x]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} [\ln e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x)]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$
$$= \ln 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$$
$$= 0$$

إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 – **الإنشاء :**



4 – $k > 0$: $e^{2x} - e^{x} + 1 - k = 0$ ....(α)

طريقة الحل تحليليا : نضع $e^{x} = y$ حيث $y > 0$

إذن : $y^2 - y + 1 - k = 0$ حيث $y > 0$

منه : $\Delta = 1 - 4(1-k) = 4k - 3$

k	0		3/4		$+\infty$
$\Delta = 4k - 3$		-	0	+	

نتيجة : لما $0 < k < 3/4$: المعادلة لا تقبل حلولا في IR

لما $k = 3/4$: المعادلة تقبل حلا مضاعفا $y = 1/2$

لما $k > 3/4$: المعادلة تقبل حلان مختلفان هما $y_1 = \frac{1 + \sqrt{4k-3}}{2}$ و $y_2 = \frac{1 - \sqrt{4k-3}}{2}$ > 0

لنبحث عن إشارة الحل y_2 :

لدينا $y_1 \times y_2 = 1 - k$ إذن : إشارة y_2 هي إشارة $(1-k)$ لأن $y_1 > 0$ كما يلي :

x	0	3/4	1	+∞
1 - k		+	0	-

خلاصة :

لما $0 < k < 3/4$: المعادلة (α) لا تقبل حلولا في IR

لما $k = 3/4$: المعادلة (α) تقبل حلا مضاعفا x حيث $1/2 = e^x$ أي $x = \ln(1/2)$

لما $3/4 < k < 1$: المعادلة (α) تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $e^{x_1} = y_1$ و $e^{x_2} = y_2$

أي $x_1 = \ln y_1$ و $x_2 = \ln y_2$

لما $k \geq 1$: المعادلة (α) تقبل حلا واحدا x حيث $e^x = y_1$ أي $x = \ln y_1$

طريقة الحل باستعمال منحنى الدالة f :

$$\begin{cases} k > 0 \\ e^{2x} - e^x + 1 - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ e^{2x} - e^x + 1 = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \alpha \\ \alpha = \ln k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ y = f(x) \\ y = \alpha \\ \alpha = \ln k \end{cases}$$

بيانيا : $y = f(x)$ هي معادلة المنحنى (C)

$y = \alpha$ هي معادلة مستقيم متحرك يوازي حامل محور الفواصل

اذن : حلول المعادلة $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$ هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = \alpha$ مع المنحنى (C)

اذن : بملاحظة منحنى الدالة f نستنتج مايلي :

لما $\alpha < \ln(3/4)$: لا يوجد نقط تقاطع أي المعادلة ليس لها حل .

لما $\alpha = \ln 3/4$: يوجد نقطة تقاطع واحدة اذن : المعادلة تقبل حلا واحدا .

لما $\ln 3/4 < \alpha < 0$: يوجد نقطتين مشتركتين اذن : المعادلة تقبل حلين .

لما $\alpha \geq 0$: يوجد نقطة تقاطع واحدة اذن : المعادلة تقبل حلا واحدا .

خلاصة : $\alpha = \ln k \Leftrightarrow k = e^\alpha$

لما : $\alpha < \ln(3/4)$ أي $0 < e^\alpha < 3/4$ أي $0 < k < 3/4$: المعادلة لا تقبل حلولا

لما : $\alpha = \ln(3/4)$ أي $e^\alpha = 3/4$ أي $k = 3/4$: المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا .

لما : $\ln 3/4 < \alpha < 0$ أي $3/4 < e^\alpha < e^0$ أي $3/4 < k < 1$: المعادلة تقبل حلان .

لما : $\alpha \geq 0$ أي $e^\alpha \geq e^0$ أي $k \geq 1$: المعادلة تقبل حلا واحدا .

التمرين – 10

f دالة معرفة على]1 ; 1-[بـ $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ نسمي (C) منحناها

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 – أدرس تغيرات الدالة f

2 – عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

3 – أثبت أن مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحنى (C)

4 – أكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

5 – أنشئ المنحنى (C)

6 – بين أن من أجل كل y من R فإن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا واحدا يطلب عبارته بدلالة y

7 – نرمز بـ (C') إلى المنحنى الممثل للدالة $x \longmapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

اشرح لماذا (C) و (C') متناظران بالنسبة الى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

الحل – 10

1 – تغيرات الدالة f : f دالة معرفة على $]-1 ; 1[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{2}\ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1-x}\right) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2}\ln y = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-1 ; 1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

منه : من أجل كل x من $]-1 ; 1[$ فإن $f'(x) > 0$ لأن $(1-x)(1+x) > 0$

منه : **جدول تغيرات الدالة f** :

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2 – المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب للمنحنى (C) من اليمين .

المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب للمنحنى (C) من اليسار .

3 – لدينا $-1 < x < 1$ إذن : $1 > -x > -1$ أي $-1 < -x < 1$ و $f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

من جهة أخرى : $-f(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

إذن : $f(-x) = -f(x)$ أي الدالة f فردية .

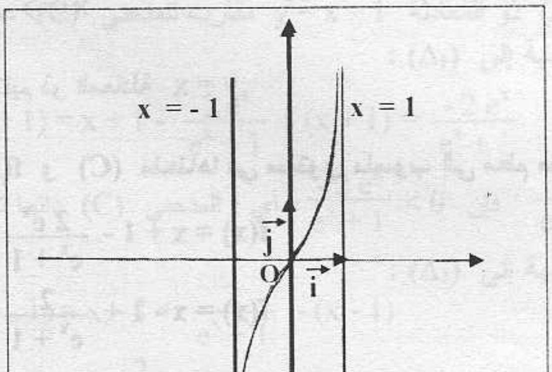
منه : المبدأ $O(0 ; 0)$ هو مركز تناظر للمنحنى (C) .

4 – المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 له المعادلة : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ حيث :

$$f'(0) = \frac{1}{1 \times 1} = 1 \quad \text{و} \quad f(0) = \frac{1}{2}\ln 1 = 0$$

منه : معادلة المماس هي : $y = x$

5 – الإنشاء :



6 ـ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1 ; 1[$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$

إذن : المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-1 ; 1[$ من أجل كل y من IR .

البحث عن عبارة x بدلالة y :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 + x = e^{2y}(1-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 + x - e^{2y} + x\,e^{2y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x(1 + e^{2y}) + 1 - e^{2y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \end{cases}$$

نتيجة : $x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$ و هي عبارة x بدلالة y .

7 ـ لتكن $M(x ; y)$ نقطة من المنحنى (C)

إذن : $-1 < x < 1$ و $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

منه النقطة $M'(y ; x)$ تنتمي إلى نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

أي $M'\left(y ; \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}\right)$ (حسب السؤال 6)

أي M' تنتمي إلى منحنى الدالة $x \longmapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

أي M' تنتمي إلى (C')

نتيجة : (C) و (C') متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

<u>التمرين ـ 11</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ـ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + 1 - \frac{2\,e^x}{e^x + 1}$

2 ـ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$

3 ـ إستنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

4 ـ بين أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) اللذين معادلاتهما على الترتيب $y = x + 1$ و $y = x - 1$ مقاربان للمنحنى (C) عند $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب .

5 ـ أدرس وضعية (C) بانسبة إلى كل من (Δ_1) و (Δ_2)

6 ـ أثبت أن الدالة f فردية .

7 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

8 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C) على IR

الحـل ــ 11

1 ــ من أجل كل x من IR :

$$x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x + \frac{e^x + 1 - 2e^x}{e^x+1}$$
$$= x + \frac{1 - e^x}{e^x+1}$$
$$= x - \frac{e^x - 1}{e^x+1}$$
$$= f(x)$$ و هو المطلوب

2 ــ من أجل كل x من IR :

$$x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = x + \frac{-e^x - 1 + 2}{e^x+1}$$
$$= x + \frac{-e^x + 1}{e^x+1}$$
$$= x - \frac{e^x - 1}{e^x+1}$$
$$= f(x)$$ و هو المطلوب

3 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$

4 ــ
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to -\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{e^x+1} - (x+1)\right]$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \left[-2 + \frac{2}{e^x+1}\right]$$
$$= -2 + \frac{2}{0+1}$$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$$= 0$$

إذن : المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{e^x+1} - (x-1)\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x+1}$$
$$= 0$$

إذن : المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

5 ــ وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ_1) :

$$f(x) - (x+1) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} - (x+1) = \frac{-2e^x}{e^x+1}$$

بما أن $\frac{e^x}{e^x+1} > 0$ فإن $\frac{-2e^x}{e^x+1} < 0$ أي : المنحنى (C) دائما تحت (Δ_1)

وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ_2) :

$$f(x) - (x-1) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1} - (x-1)$$
$$= \frac{2}{e^x+1} > 0$$

إذن : المنحنى (C) دائما فوق المستقيم (Δ_2)

6 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$
$$= -x - \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$$

$$= -x - \frac{1-e^x}{1+e^x}$$

$$= -x + \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$= -\left[x - \frac{e^x-1}{e^x+1}\right]$$

$$= -f(x)$$

إذن : f دالة فردية .

7 ــ تغيرات الدالة f على $]0 ; +\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

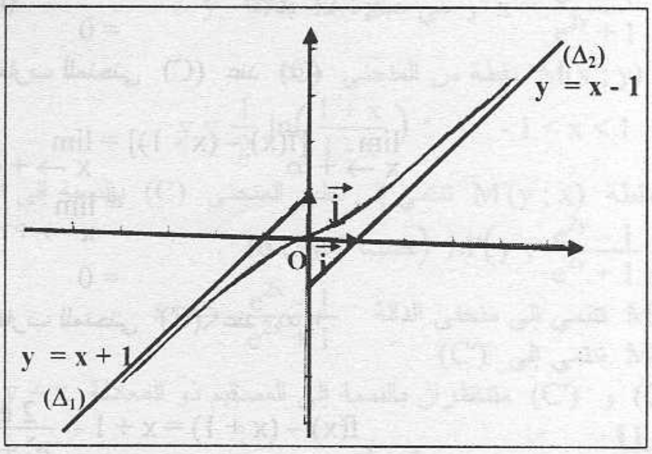
$$= \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

إذن : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

8 ــ الإنشاء :



التمرين ــ 12

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على IR و تحققان الشروط التالية :

(1) من أجل كل عدد حقيقي x : $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

(2) من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = g'(x)$

(3) $f(0) = 1$

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) \neq 0$

2 ــ أحسب $g(0)$

3 ــ باستعمال الشرط (1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = f'(x)$

نضع $u = f + g$ و $v = f - g$

4 ــ أحسب $u(0)$ ؛ $v(0)$

5 ـ بين أن $u' = u$ و $v' = -v$
6 ـ عين الدالتين u و v
7 ـ إستنتج عبارتي $f(x)$ و $g(x)$

الحـل ـ 12

1 ـ من أجل كل x من IR : $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

أي : $[f(x)]^2 = 1 + [g(x)]^2$

أي : $f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x)]^2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + [g(x)]^2 = 0$

لكن من أجل كل x من IR فإن $[g(x)]^2 \geq 0$

إذن : $1 + [g(x)]^2 \geq 1$

منه : $1 + [g(x)]^2 > 0$

أي : $f(x) \neq 0$ و هو المطلوب .

2 ـ لدينا : $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

إذن : $[g(x)]^2 = [f(x)]^2 - 1$

أي : $[g(0)]^2 = [f(0)]^2 - 1$

أي : $[g(0)]^2 = 1 - 1$

أي : $[g(0)]^2 = 0$ منه $g(0) = 0$

3 ـ لدينا : $[f(x)]^2 = 1 + [g(x)]^2$ منه باشتقاق الطرفين :

$2\,f'(x) \,.\, f(x) = 0 + 2\,g'(x) \,.\, g(x)$

أي : $2\,f'(x) \,.\, f(x) = 2\,g(x) \,.\, f(x)$ لأن حسب الشرط (2) $f(x) = g'(x)$

أي : $f'(x) = g(x)$ بقسمة الطرفين على $2\,f(x)$ لأن $f(x) \neq 0$

منه : $g(x) = f'(x)$ و هو المطلوب

4 ـ $u(0) = f(0) + g(0) = 1 + 0 = 1$

$v(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0 = 1$

5 ـ $u = f + g$ منه : $u' = f' + g'$

أي : $u' = g + f$ لأن : $f' = g$ و $g' = f$

أي : $u' = u$ و هو المطلوب

$v = f - g$ منه : $v' = f' - g'$

أي : $v' = g - f$ لأن : $f' = g$ و $g' = f$

أي : $v' = -(f - g)$

أي : $v' = -v$ و هو المطلوب

6 ـ $u' = u$ معادلة تفاضلية ذات المجهول u من الشكل $y' = a\,y$ حيث

$a = 1$ منه $u = c\,e^x$ حيث c ثابت حقيقي .

$v' = -v$ معادلة تفاضلية ذات المجهول v من الشكل $y' = a\,y$ حيث

$a = -1$ منه $v = \alpha\,e^{-x}$ حيث α ثابت حقيقي .

نتيجة : $u : x \longmapsto c\,e^x$ و $v : x \longmapsto \alpha\,e^{-x}$

7 ـ $\begin{cases} u(x) = f(x) + g(x) \\ v(x) = f(x) - g(x) \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u(x) + v(x) = 2\,f(x) \\ g(x) = u(x) - f(x) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\,[u(x) + v(x)] \\ g(x) = u(x) - f(x) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{c}{2}\,e^x + \dfrac{\alpha}{2}\,e^{-x} \\ g(x) = c\,e^x - \dfrac{c}{2}\,e^x - \dfrac{\alpha}{2}\,e^{-x} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} f(x) = \frac{c}{2}\, e^{x} + \frac{\alpha}{2}\, e^{-x} \\ g(x) = \frac{c}{2}\, e^{x} - \frac{\alpha}{2}\, e^{-x} \end{cases}$ حيث c و α عددين حقيقيين يطلب تعيينهما .

البحث عن c و α :

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} + \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow c + \alpha = 2 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$g(0) = 0 \Rightarrow \frac{c}{2} - \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow c - \alpha = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

بجمع (1) و (2) نحصل على: $2c = 2$ أي $c = 1$

بالتعويض في (1) نحصل على $\alpha = 2 - c$ أي $\alpha = 1$

نتيجة : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\, e^{x} + \frac{1}{2}\, e^{-x} \\ g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x} - \frac{1}{2}\, e^{-x} \end{cases}$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 13

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس نهاية f عند $+\infty$

2 ــ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C)

3 ــ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D)

4 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$

5 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f'(x) > 0$

6 ــ أحسب $f'(0)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

7 ــ أنشئ المنحنى (C) على المجال $[0 ; +\infty[$

8 ــ عين النقطة A من (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (D)

الحــل ــ 13

1 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - 1)(2 - e^{-x})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x - 1)(2 - 0) \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

$$= +\infty$$

2 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x \to +\infty} (x - 1)(2 - e^{-x}) - 2x + 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2x - x e^{-x} - 2 + e^{-x} - 2x + 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -x e^{-x} + e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -x e^{-x} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln(e^{x})}{e^{x}} \quad \text{لأن} \quad x = \ln e^{x}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{-\ln y}{y} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{x} = \lim_{y \to +\infty} y$$

$$= 0$$

منه : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ــ الوضعية النسبية لــ (C) و (D) :

$$f(x) - (2x - 2) = -x e^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

منه : إشارة $f(x) - (2x - 2)$ هي إشارة $(1 - x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
1 - x		+	0	-	

نتيجة :

لما $0 \leq x < 1$: المنحنى (C) فوق (D)

لما $x = 1$: المنحنى (C) يقطع (D)

لما $x > 1$: المنحنى (C) تحت (D)

4 ــ f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = (2 - e^{-x}) + (+e^{-x})(x - 1)$$
$$= 2 - e^{-x} + x e^{-x} - e^{-x}$$
$$= 2 - 2e^{-x} + x e^{-x}$$
$$= x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$$ و هو المطلوب .

5 ــ لدينا مايلي :

$$x > 0 \Rightarrow -x < 0$$
$$\Rightarrow e^{-x} < e^{0}$$
$$\Rightarrow e^{-x} < 1$$
$$\Rightarrow -e^{-x} > -1$$
$$\Rightarrow 1 - e^{-x} > 1 - 1$$
$$\Rightarrow 1 - e^{-x} > 0$$
$$\Rightarrow 2(1 - e^{-x}) > 0$$
$$\Rightarrow x e^{-x} + 2(1 - e^{-x}) > 0$$ لأن $x e^{-x} > 0$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$ و هو المطلوب .

6 ــ $f'(0) = 0 + 2(1 - 1) = 0$

منه إشارة $f'(x)$ على $]0 ; +\infty[$:

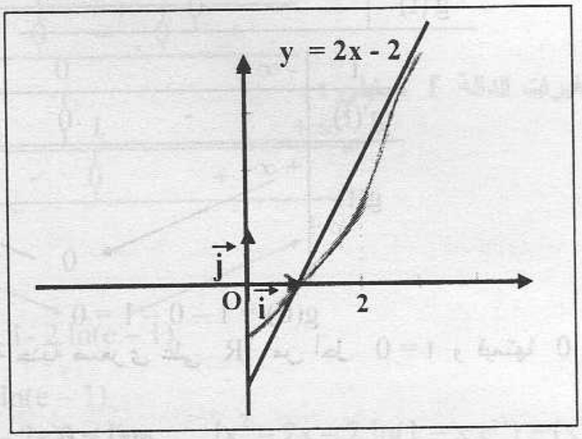
x	0		$+\infty$
f'(x)	0	+	

إذن : جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
f(x)	- 1	↗	0	↗	$+\infty$

$f(0) = (-1)(2 - 1) = -1$

7 ــ الإنشاء :



8 ــ يكون المماس عند النقط A ذات الفاصلة x موازيا للمستقيم (D) إذا و فقط إذا كان ميله 2 أي $f'(x) = 2$ كما يلي :

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2 - 2e^{-x} + x e^{-x} = 2$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}(x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

إذن : النقطة المطلوبة هي $A(2 ; f(2))$

$f(2) = (2 - 1)(2 - e^{-2}) = 2 - e^{-2}$ إذن : $A(2 ; 2 - e^{-2})$

__التمرين ــ 14__

1 أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على IR بــ $g(t) = e^t - t - 1$

2 ــ ماهي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على IR ؟

3 ــ إستنتج أن : من أجل كل عدد حقيقي t : $e^t \geq t + 1$ و $e^t > t$

لتكن f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$

4 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x})$

5 ــ نقبل أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

6 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

7 ــ شكل جدول تغيرات الدالة f (نقبل $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$)

في معلم متعامد و متجانس نعتبر القطع المكافئ (p) ذو المعادلة $y = x^2 - 2x$ و (C) منحنى الدالة f

8 ــ بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x^2 - 2x) = 0$ ماذا تستنتج بالنسبة لــ (C) و (p)

9 ــ أدرس الوضعية النسبية لــ (C) و (p)

10 ــ عين معادلة لكل من (D_1) و (D_2) مماسي المنحنيين (p) و (C) على الترتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

11 ــ أرسم كل من (C) و (p) في نفس المعلم .

__الحــل ــ 14__

1 ــ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR

$\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} e^t - t - 1 = +\infty$ لأن $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} e^t(1 - t e^{-t} - e^{-t}) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{t \to +\infty} t e^{-t} = 0$

الدالة g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(t) = e^t - 1$$

منه : $g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1$
$\Leftrightarrow t \geq \ln 1$
$\Leftrightarrow t \geq 0$ منه جدول إشارة $g'(t)$:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(t)		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة g:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(t)		-	0	+	
g(t)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$

2 ــ من جدول التغيرات نستنتج أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على IR من أجل $t = 0$ و قيمتها 0

أي : من أجل كل t من IR فإن : $g(t) \geq 0$

3 ــ حسب السؤال (2) من أجل كل t من IR : $g(t) \geq 0$

أي : $e^t - t - 1 \geq 0$

منه : $e^t \geq t + 1$ و هو المطلوب .

من جهة أخرى $e^t > t$ إذن $e^t \geq t + 1 > t$: إذن $t + 1 > t$

نتيجة : من أجل كل t من IR : $e^t \geq t + 1 > t$

4 – $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$

$= x^2 - 2\ln[e^x(1 - x e^{-x})]$

$= x^2 - 2[\ln e^x + \ln(1 - x e^{-x})]$

$= x^2 - 2[x + \ln(1 - x e^{-x})]$

$= x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x})$ و هو المطلوب

5 – $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x})$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 2\ln(1)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$

$= +\infty$

6 – f دالة قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2x - 2\left(\frac{e^x - 1}{e^x - x}\right)$$

$$= \frac{2x(e^x - x) - 2(e^x - 1)}{e^x - x}$$

$$= \frac{2x e^x - 2x^2 - 2e^x + 2}{e^x - x}$$

$$= \frac{2(x e^x - e^x - x^2 + 1)}{e^x - x}$$

$$= \frac{2[e^x(x - 1) - (x^2 - 1)]}{e^x - x}$$

$$= \frac{2[e^x(x - 1) - (x - 1)(x + 1)]}{e^x - x}$$

$$= \frac{2(x - 1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$ وهو المطلوب .

7 – لاحظ أن : حسب السؤال (3) : $e^x \geq x + 1 > x$

أي : $e^x - x - 1 \geq 0$ و $e^x - x > 0$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x - 1)(e^x - x - 1)$ كمايلي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - 1$	−		− 0 +	
$e^x - x - 1$	+	0	+	+
الجداء	−	0	− 0 +	

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	− 0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $1 - 2\ln(e - 1)$ ↗	$+\infty$

$f(1) = 1 - 2\ln(e - 1)$

8 – $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x^2 - 2x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} [x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x}) - (x^2 - 2x)]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} -2\ln(1 - x e^{-x})$

$$= \lim_{x \to +\infty} - 2\ln(1) \quad \text{لأن}\quad \lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$$
$$= 0$$

إذن : المنحنيان (C) و (p) متقاربان عند $+\infty$

9 ـ الوضعية النسبية لـ (C) و (p) :

لدينا :
$$f(x) - (x^2 - 2x) = -2\ln(1 - x e^{-x})$$
$$= \ln(1 - x e^{-x})^{-2}$$
$$= \ln\left(\frac{1}{1 - x e^{-x}}\right)^2$$
$$= \ln\left[\frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}\right]^2$$
$$= \ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right)^2$$
$$= 2\ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right)$$
من إشارة $\ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right)$ كمايلي :

$$\ln\left(\frac{e^x}{e^x - x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x - x} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow e^x \geq e^x - x \quad \text{لأن}\quad e^x > 0 \text{ و } e^x - x > 0$$
$$\Leftrightarrow 0 \geq -x$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

منه جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (x^2 - 2x)$	$-$	0	$+$

نتيجة : لما $x < 0$: المنحنى (C) تحت القطع المكافئ (p)
لما $x = 0$: المنحنى (C) يقطع القطع المكافئ (p)
لما $x > 0$: المنحنى (C) فوق القطع المكافئ (p)

10 ـ معادلة المماس (D_2) للمنحنى (C) عند النقطة $A(0 ; 0)$ هي : $y = f'(0)x + f(0)$

حيث $f(0) = 0$ و $f'(0) = 0$ إذن : $y = 0$

معادلة المماس (D_1) للمنحنى (p) عند النقطة $A(0 ; 0)$ هي : $y = \phi'(0)x + \phi(0)$

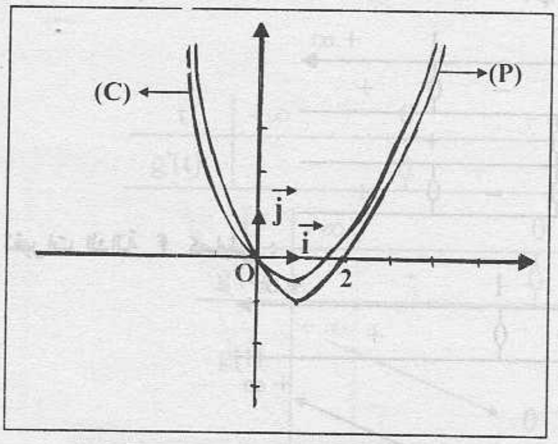
حيث ϕ هي الدالة $x \longmapsto x^2 - 2x$

منه : $\phi'(x) = 2x - 2$

أي : $\phi'(0) = -2$

إذن : معادلة (D_1) هي : $y = -2x$

11 ـ الإنشاء :



التمرين ـ 15

f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$ و (Γ) منحناها البياني

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

لتكن g دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = e^{-x}$ و (C) منحناها في معلم $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; +\infty[$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

2 ـ إستنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3 ـ عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (Γ) و (C)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بـ $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

4 ـ بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول .

5 ـ إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) و أدرس تقاربها .

6 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = -e^{-x}[\cos(4x) + 4\sin(4x)]$$

7 ـ أعط قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة $\pi/2$

الحـل ـ 15

1 ـ من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$ فإن : $\begin{cases} e^{-x} > 0 \\ -1 \leq \cos 4x \leq 1 \end{cases}$

منه : $-e^{-x} \leq e^{-x}\cos 4x \leq e^{-x}$

أي : $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ و هو المطلوب .

2 ـ لدينا $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$

إذن : حسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3 ـ تقاطع (Γ) و (C) :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{-x}\cos 4x = e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos(0)$$
$$\Leftrightarrow 4x = 2\pi k : k \in IN \quad (x \geq 0 \text{ لأن } k \in IN)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}k$$

إذن : (Γ) و (C) يتقاطعان في مجموعة غير منتهية من النقط

فواصلها من الشكل $x = \frac{1}{2}k$ ، حيث $k \in IN$ لأن $(x \geq 0)$

4 ـ لدينا من أجل كل $n \in IN$:

$$u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= e^{-n\pi/2}\cos\left(4 \times n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= e^{-n\pi/2}\cos(2\pi n)$$
$$= \left(\frac{1}{e^{\pi/2}}\right)^n \quad \text{لأن } \cos 2\pi n = 1$$

منه : (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{e^{\pi/2}}$ و حدها الأول $u_0 = 1$

5 ـ لدينا : أساس المتتالية (u_n) هو $0 < \frac{1}{e^{\pi/2}} < 1$ و حدها الأول $u_0 = 1$ أي $u_0 > 0$

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو 0 أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

6 ـ f قابلة للاشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$ لدينا :

$$f'(x) = -e^{-x}\cos 4x - (4\sin 4x)e^{-x}$$
$$= -e^{-x}[\cos 4x + 4\sin 4x] \quad \text{و هو المطلوب}$$

7 ـ معامل توجيه مماس المنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة $\pi/2$ هو :

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\pi/2}\left[\cos 4\frac{\pi}{2} + 4\sin 4\frac{\pi}{2}\right]$$
$$= -e^{-\pi/2}[\cos 2\pi + 4\sin 2\pi]$$
$$= -e^{-\pi/2}$$
$$= \frac{-1}{e^{\pi/2}}$$

$\approx -0,2$ باستعمال الحاسبة .

التمرين – 16

الجزء I

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (2x-1)e^{-2x}$ نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 – أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (إستعمل $\lim_{\alpha \to -\infty} \alpha e^{\alpha}$) فسر هندسيا .

2 – أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

3 – أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها على IR

4 – شكل جدول تغيرات الدالة f

5 – عين إحداثيات النقطة A نقطة تقاطع المنحنى (C) بحامل محور الفواصل .

6 – إستنتج إشارة $f(x)$ من أجل $x \in IR$

الجزء II

1 – بين أن من أجل كل x من IR : $f''(x) = 4(2x-3)e^{-2x}$ حيث f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f

2 – حل في IR المعادلة $f''(x) = 0$

3 – لتكن B النقطة من المنحنى (C) التي فاصلتها 1/2 . عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند B

نريد دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) لذلك نعرف الدالة g على IR كمايلي :

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$$

4 – عين $g'(x)$ ثم $g''(x)$

5 – أدرس إشارة $g''(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة g' على IR

6 – إستنتج إشارة $g'(x)$ ثم إتجاه تغير الدالة g على IR

7 – عين إشارة $g(x)$ على IR ثم إستنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس (T)

8 – أنشئ بعناية المنحنى (C) و المماس (T)

الحل – 16

– 1

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x-1)e^{-2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2x e^{-2x} - e^{-2x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \to +\infty} 2x e^{-2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -(-2x e^{-2x})$$

$$\lim_{x \to +\infty} -2x = \lim_{\alpha \to -\infty} \alpha \quad \text{لأن} \quad = \lim_{\alpha \to -\infty} -\alpha e^{\alpha}$$

$$(\lim_{\alpha \to -\infty} \alpha e^{\alpha} = 0 \quad \text{لأن}) \quad = 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

– 2

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x-1)e^{-2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty \end{array}\right\} \text{لأن} \quad = -\infty$$

3 – f دالة قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x-1)$$

$$= 4e^{-2x} - 4x e^{-2x}$$

$$= 4e^{-2x}(1-x)$$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-x)$ لأن $4e^{-2x} > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

4 ـــ منه جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(1/e)^2$	$\searrow$	0

$$f(1) = (2-1)\,e^{-2} = (1/e)^2$$

5 ـــ $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\,e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1/2$

منه : (C) يقطع محور الفواصل في النقطة $A(1/2\,;\,0)$

6 ـــ حسب جدول تغيرات الدالة f فإن إشارة $f(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء II

1 ـــ من أجل كل x من IR لدينا : $f'(x) = 4\,e^{-2x}(1-x)$

منه من أجل كل x من IR فإن : $f''(x) = 4[-2\,e^{-2x}(1-x) - e^{-2x}]$

أي : $f''(x) = 4(-2\,e^{-2x} + 2x\,e^{-2x} - e^{-2x})$

أي : $f''(x) = 4\,e^{-2x}(2x-3)$ و هو المطلوب

2 ـــ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\,e^{-2x}(2x-3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3/2$

3 ـــ **معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1/2 تكتب من الشكل** $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

حيث $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ و $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\,e^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e}$

منه المعادلة هي : $y = \frac{2}{e}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ أي $(T)\ :\ y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$

4 ـــ $g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$

منه : $g'(x) = f'(x) - \frac{2}{e}$

منه : $g''(x) = f''(x) = 4\,e^{-2x}(2x-3)$

5 ـــ **إشارة $g''(x)$ هي إشارة $(2x-3)$ لأن $4\,e^{-2x} > 0$ كمايلي :**

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$	

منه :

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : g' متناقصة على المجال $]-\infty\,;\,3/2[$

g' متزايدة على المجال $]3/2\,;\,+\infty[$

g' تقبل قيمة حدية صغرى على IR عند $x = 3/2$ و قيمتها :

$$g'\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{e} = 4e^{-3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{e} = -2e^{-3} - 2e^{-1} = -2(e^{-3} + e^{-1})$$

منه جدول تغيرات الدالة g' كمايلي :

x	$-\infty$	α_1		$3/2$		$+\infty$
$g''(x)$		-		0	+	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\searrow$	$-2(e^{-3} + e^{-1})$	$\nearrow$	$-2/e$

$$\lim_{x \to -\infty} g'(x) = \lim_{x \to -\infty} f'(x) - \frac{2}{e}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 4e^{-2x}(1 - x) - \frac{2}{e}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = \lim_{x \to +\infty} 4e^{-2x}(1 - x) - \frac{2}{e}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 4e^{-2x} + 2(-2xe^{-2x}) - \frac{2}{e}$$

$$= -\frac{2}{e}$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} -2xe^{-2x} = 0$

لاحظ أن $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e}$ إذن : $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e} - \frac{2}{e} = 0$ منه : $\alpha_1 = \frac{1}{2}$

6 ـــ إذن : حسب جدول تغيرات الدالة g' نستنتج إشارة $g'(x)$ على IR كمايلي :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2x - 1)e^{-2x} - \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^{-2x}\left(2x - 1 - \frac{2}{e}xe^{2x} - \frac{1}{e}e^{2x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^{-2x}(2x - 1)$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} 2xe^{2x} = 0$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{e}x + \frac{1}{2}$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$= -\infty$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \left[\frac{2}{e} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right] = 0 - 0 = 0$$

7 ــ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ على IR كمايلي :

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
g(x)	-	0	-

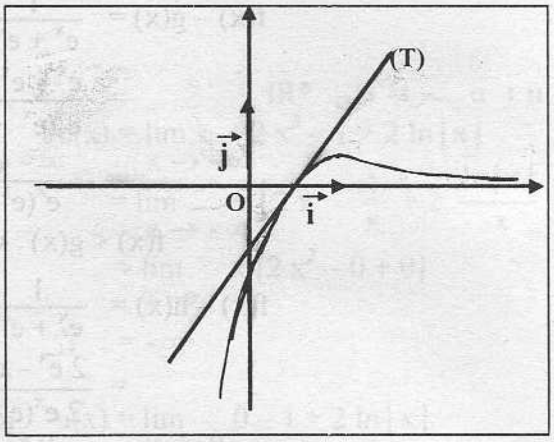
لدينا : $g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{e}\right)$

منه : إشارة $f(x) - \left(\frac{2}{e}x - \frac{1}{2}\right)$ هي إشارة $g(x)$

إذن : لما $x = 1/2$ المنحنى (C) يقطع المماس (T)

لما $x \in IR - \{1/2\}$ المنحنى (C) يقع تحت المماس (T)

8 ــ الإنشاء :



التمرين ــ 17

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس

1 ــ أدرس شفعية الدالة f ثم فسر النتيجة هندسيا .

2 ــ بين أن من اجل كل عدد حقيقي موجب x فإن $e^{-x} \le e^x$

3 ــ عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

4 ــ أدرس تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$

5 ــ نعتبر الدالتين g و h المعرفتان على IR بـــ $g(x) = \frac{1}{e^x}$ و $h(x) = \frac{1}{2e^x}$

بين أن من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$ $h(x) \le f(x) < g(x)$

6 ــ أنشئ المنحنى (C)

الحــل ــ 17

1 ــ ليكن $x \in IR$ إذن : $(-x) \in IR$ و $f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$

منه : الدالة f زوجية .

إذن : المنحنى (C) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر .

2 ــ لدينا $x \ge 0$ إذن : $-x \le 0$

منه : $-x \le x$

منه : $e^{-x} \le e^x$ لأن الدالة exp متزايدة .

3 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

4 ــ التغيرات : f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-(e^x - e^{-x})$ - لأن المقام موجب (على المجال $[0 ; +\infty[$)

لكن حسب السؤال (2) : من أجل $x \geq 0$ فإن $e^x \geq e^{-x}$ منه $e^x - e^{-x} \geq 0$ أي $-(e^x - e^{-x}) \leq 0$

إذن : إشارة $-(e^x - e^{-x})$ - كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-(e^x - e^{-x})$		بالتناظر $+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f على IR كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

$$f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

5 ــ ليكن $x \in [0 ; +\infty[$:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} - \frac{1}{e^x}$$
$$= \frac{e^x - e^x - e^{-x}}{e^x(e^x + e^{-x})}$$
$$= -\frac{e^{-x}}{e^x(e^x + e^{-x})} < 0$$

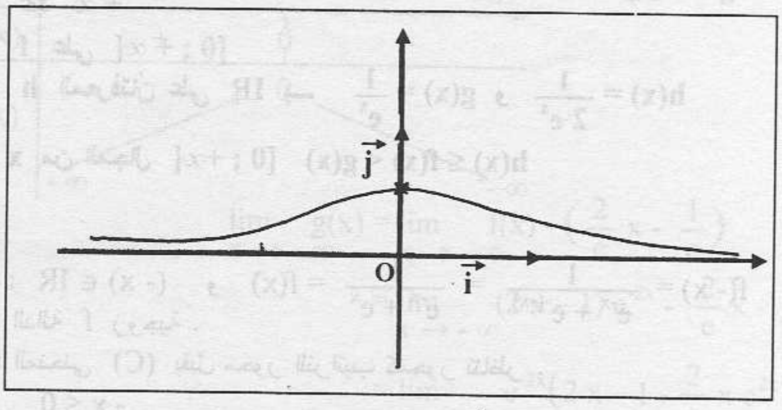
إذن : $f(x) - g(x) < 0$ منه $f(x) < g(x)$

$$f(x) - h(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} - \frac{1}{2e^x}$$
$$= \frac{2e^x - e^x - e^{-x}}{2e^x(e^x + e^{-x})}$$
$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x(e^x + e^{-x})} \geq 0$$ حسب السؤال (2) (على المجال $[0 ; +\infty[$)

إذن : $f(x) - h(x) \geq 0$ منه $f(x) \geq h(x)$

نتيجة : من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$: $h(x) \leq f(x) < g(x)$

6 ــ الإنشاء :



التمرين ــ 18

الجزء I

u دالة معرفة على IR^* بـ $u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة u على IR^*

2 ــ بين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]1/2 ; 1[$

3 ــ إستنتج إشارة $u(x)$ على IR^*

الجزء II

f دالة معرفة على IR^* بـ $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$ نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أحسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (نقبل أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)

و $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x^2} = 0 \right)$

2 ـــ أدرس تغيرات الدالة f

3 ـــ بين أن $f(\alpha) = 3\alpha - \dfrac{1}{2\alpha^2}$

4 ـــ باستعمال حصر α في السؤال (2) أثبت أن $-0{,}5 < f(\alpha) < 2{,}5$

الجزء III

لتكن $M(x\,;y)$ و $M'(x'\,;y')$ نقطتين من المستوي حيث M' هي نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب

1 ـــ عين x' و y' بدلالة x و y

2 ـــ بين أن إذا كانت M تتغير على المنحنى (C) فإن النقطة M' تتغير على المنحنى

(γ) الذي معادلته $y = -2x - \dfrac{\ln|x|}{x^2}$

3 ـــ أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (γ)

الحـل ـــ 18

الجزء I

1 ـــ تغيرات الدالة u : u معرفة على IR^*

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$$
$$= \lim_{x \to -\infty} x\left[2x^2 - \frac{1}{x} + 2\,\frac{\ln|x|}{x}\right]$$
$$= \lim_{x \to -\infty} x\,[2x^2 - 0 + 0]$$
$= -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \lim_{x \to 0} 0 - 1 + 2\ln|x|$$
$= -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 - 1 + 2\ln|x| = +\infty$$

الدالة u قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة :

$$u'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} = \frac{6x^3 + 2}{x} = \frac{2(3x^3 + 1)}{x}$$

منه إشارة $u'(x)$:

x	$-\infty$		$\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$		0		$+\infty$
$3x^3 + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2(3x^3+1)}{x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة u :

x	$-\infty$		$\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$u(x)$	$-\infty$	↗	$u\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

$$u\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{1/3}\right) = 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-5}{3} - \frac{2}{3}\ln 3 = -\frac{1}{3}(5 + 2\ln 3) < 0$$

2 ـــ من جدول تغيرات الدالة u نستنتج أن الدالة u تنعدم مرة واحدة على المجال $]0\,;+\infty[$ و عليه فالمعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0\,;+\infty[$

من جهة أخرى : $u(1) = 2 - 1 + 2\ln 1 = 1 > 0$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} - 1 + 2\ln\frac{1}{2} = -\frac{6}{8} - 2\ln 2 < 0$$

إذن : $\begin{cases} u \text{ مستمرة على المجال } [1/2\,;1] \\ u(1/2) \times u(1) < 0 \end{cases}$

منه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلا α على المجال $]1/2\,;1[$

بما أن u متزايدة تماما على $]1/2\,;1[$ فإن α و حيد .

3 ـــ بملاحظة جدول تغيرات الدالة u نستنتج إشارة $u(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$1/2$		α		1		$+\infty$
$u(x)$		$-$	||	$-$			0	$+$			

الجزء II

1 ـــ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 - \frac{\ln|x|}{x^2} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} -\ln|x| = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0$

2 ـــ تغيرات الدالة f : f قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x\ln|x|}{x^4}$$

$$= \frac{2x^4 - (x - 2x\ln|x|)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^4 - x + 2x\ln|x|)}{x^4}$$

$$= \frac{x(2x^3 - 1 + 2\ln|x|)}{x^4}$$

$$= \frac{x\,u(x)}{x^4}$$

منه : إشارة $f'(x)$ على IR^* هي إشارة $x\,u(x)$ كمايلي :

x		0		α	$+\infty$
x	$-$	||	$+$		
$u(x)$	$-$	||	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	||	$-$	0	$+$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3 ـ لدينا : $f(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{\ln|\alpha|}{\alpha^2}$ .... (1) حيث $u(\alpha) = 0$

إذن : $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 - 1 + 2\ln|\alpha| = 0$

$$\Leftrightarrow 2\ln|\alpha| = 1 - 2\alpha^3$$

$$\Leftrightarrow \ln|\alpha| = \frac{1 - 2\alpha^3}{2}$$

بالتعويض في (1) :

$$f(\alpha) = 2\alpha - \frac{\frac{1-2\alpha^3}{2}}{\alpha^2}$$

$$= 2\alpha - \frac{1 - 2\alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$= 2\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$= 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$$ و هو المطلوب

4 ـ لدينا : $1/2 < \alpha < 1$ إذن : $3/2 < 3\alpha < 3$ .... (1)

و $1/2 < \alpha < 1$ إذن : $1/4 < \alpha^2 < 1$

منه : $1/2 < 2\alpha^2 < 2$

منه : $1/2 < \dfrac{1}{2\alpha^2} < 2$

منه : $-2 < \dfrac{-1}{2\alpha^2} < -\dfrac{1}{2}$ ....(2)

بجمع المتباينتان (1) و (2) طرف لـ طرف نحصل على : $\dfrac{3}{2} - 2 < 3\alpha - \dfrac{1}{2\alpha^2} < 3 - \dfrac{1}{2}$

أي : $\dfrac{-1}{2} < 3\alpha - \dfrac{1}{2\alpha^2} < \dfrac{5}{2}$

أي : $-0,5 < f(\alpha) < 2,5$

الجزء III

$M(x ; y)$ ، $M'(x' ; y')$

1 ـ تكون M' نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب إذا و فقط إذا كان : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

2 ـ M تتغير على المنحنى (C) إذن : $y = f(x)$

أي : $y = 2x - \dfrac{\ln|x|}{x^2}$

منه : $y' = y \Leftrightarrow y' = 2x - \dfrac{\ln|x|}{x^2}$

$$\Leftrightarrow y' = -2(-x) - \frac{\ln|-x|}{(-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow y' = -2x' - \frac{\ln|x'|}{(x')^2}$$ لأن $x' = -x$

منه : النقطة $M'(x' ; y')$ تنتمي إلى منحنى الدالة $x \longmapsto -2x - \dfrac{\ln|x|}{x^2}$ و هو المطلوب .

3 ـ وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (γ) :

$$f(x) - \left(-2x - \frac{\ln|x|}{x^2}\right) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2} + 2x + \frac{\ln|x|}{x^2} = 4x$$

منه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4x$	$-$	‖	$+$

لما $x \in]-\infty ; 0[$: المنحنى (C) تحت المنحنى (γ) .

لما $x \in]0 ; +\infty[$: المنحنى (C) فوق المنحنى (γ) .

التمرين ــ 19

الجزء I : f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس شفعية الدالة f . فسر هندسيا النتيجة

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

3 ــ ارسم المنحنى (C) على IR

الجزء II : لتكن $A(1 ; 0)$ نقطة من المستوي و $M(x ; y)$ نقطة من المنحنى (C)

1 ــ عين بدلالة x المسافة AM

نعرف الدالة g على IR بـــ $g(x) = (x-1)^2 + \dfrac{(e^x - e^{-x})}{4}$

2 ــ أحسب $g'(x)$

3 ــ أحسب $g''(x)$ حيث g'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة g .

4 ــ بين أن : من أجل كل x من IR : $g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

5 ــ إستنتج تغيرات الدالة g' على IR

6 ــ بين أن يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; 1]$ يحقق $g'(\alpha) = 0$

7 ــ تحقق أن $0,46 < \alpha < 0,47$

8 ــ عين إشارة $g'(x)$ على IR

9 ــ أدرس تغيرات الدالة g على IR (لا يطلب حساب النهايات)

10 ــ ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على IR

نقبل أن المسافة AM تكون أصغر ما يمكن عند النقطة M_α من المنحنى (C) و التي فاصلتها α .

11 ــ مثل النقطة M_α في الشكل .

12 ــ بين أن : $\alpha - 1 = -\dfrac{1}{2} f(2\alpha)$ ثم $g(\alpha) = \dfrac{1}{4}[f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2$

13 ــ إستنتج حصرا للعدد $g(\alpha)$ ثم للمسافة AM_α

الحــل ــ 19

الجزء I :

1 ــ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \dfrac{-(e^x - e^{-x})}{2}$

أي : $f(-x) = -f(x)$

منه : f دالة فردية

إذن : المبدأ $O(0 ; 0)$ هو مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C)

2 ــ تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$

$$f(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

الدالة f قابلة للا شتقاق على IR و دالتها المشتقة :

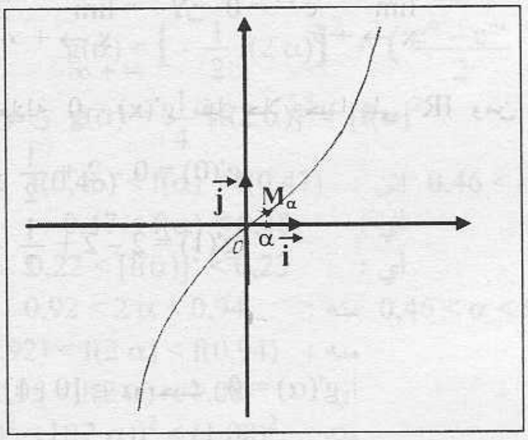
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[e^x - (-e^{-x})\right] = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

منه : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من IR

منه جدول تغيرات الدالة f على IR :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3 ـ الإنشاء :



الجزء II :

1 ـ لدينا $A(1\,;\,0)$

و $M(x\,;\,y)$

لكن $M \in (C)$ إذن : $y = f(x)$ أي $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

منه : $M\left(x\,;\, \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

إذن الشعاع $\overrightarrow{AM}$ له المركبات : $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{pmatrix}$

منه : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}$

أي : $AM = \sqrt{(x-1)^2 + \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{4}}$ و هي المسافة المطلوبة .

2 ـ $g(x) = (x-1)^2 + \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$

إذن : $g'(x) = 2\,(x-1) + \dfrac{1}{4}\ [2\,(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})]$

$= 2\,x - 2 + \dfrac{1}{2}\ (e^{2x} - e^{-2x})$

$= 2\,x - 2 + \dfrac{1}{2}\ e^{2x} - \dfrac{1}{2}\ e^{-2x}$

3 ـ $g''(x) = 2 + \dfrac{1}{2}\ (2\,e^{2x}) - \dfrac{1}{2}\ (-\,2\,e^{-2x})$

4 ـ أي $g''(x) = 2 + e^{2x} + e^{-2x}$ و هو المطلوب .

5 ـ لدينا : $g''(x) = 2 + e^{2x} + e^{-2x}$ إذن : $g''(x) > 0$ من أجل كل x من IR

منه : الدالة g' متزايدة تماما على IR كمايلي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2\,x - 2 + \dfrac{1}{2}\ e^{2x} - \dfrac{1}{2}\ e^{-2x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 2\,x - 2 - \dfrac{1}{2}\ e^{-2x}$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

$= -\,\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\,x - 2 + \dfrac{1}{2}\ e^{2x} - \dfrac{1}{2}\ e^{-2x}$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \to +\infty} 2x - 2 + \frac{1}{2} e^{2x} = +\infty$$

6 ـــ من جدول تغيرات الدالة g' نستنتج أن المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على IR ومن جهة أخرى لدينا :

$$g'(0) = 0 - 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

$$g'(1) = 2 - 2 + \frac{1}{2} e^{2} - \frac{1}{2} e^{-2} = \frac{1}{2}(e^{2} - e^{-2})$$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} g' \text{ مستمرة على } [0 ; 1] \\ g'(0) \times g'(1) < 0 \end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد $\alpha \in [0 ; 1]$ حيث $g'(\alpha) = 0$

7 ـــ لنتحقق أن $0{,}46 < \alpha < 0{,}47$

$$g'(0{,}46) = 2\,(0{,}46) - 2 + \frac{1}{2} e^{2(0{,}46)} - \frac{1}{2} e^{-2(0{,}46)} = -0{,}02$$

$$g'(0{,}47) = 2\,(0{,}47) - 2 + \frac{1}{2} e^{2(0{,}47)} - \frac{1}{2} e^{-2(0{,}47)} = 0{,}01$$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} g' \text{ مستمرة على } [0{,}46 ; 0{,}47] \\ g'(0{,}46) \times g'(0{,}47) < 0 \end{array}\right\}$ إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد $\beta \in [0{,}46 ; 0{,}47]$ حيث $g'(\beta) = 0$

بما أن α وحيد فإن $\beta = \alpha$ و هو المطلوب

8 ـــ بملاحظة جدول تغيرات الدالة g' نستنتج إشارة $g'(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$ $0{,}46$ α $0{,}47$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$

9 ـــ حسب جدول إشارة $g'(x)$ فإن : $\left\{\begin{array}{l} g \text{ : متناقصة على المجال }]-\infty ; \alpha[\\ g \text{ : متزايدة على المجال }]\alpha ; +\infty[\end{array}\right.$

منه جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	$-\infty$ $0{,}46$ α $0{,}47$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	↘ $g(\alpha)$ ↗

10 ـــ من جدول تغيرات الدالة g فإن القيمة الحدية الصغرى للدالة g على IR هي $g(\alpha)$

11 ـــ أنظر الرسم لتمثيل النقطة M_α

12 ـــ

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 2 + \frac{1}{2} e^{2\alpha} - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha - 2 = -\frac{1}{2} e^{2\alpha} + \frac{1}{2} e^{-2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha - 1) = -\frac{1}{2}(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = -\frac{1}{4}(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = -\frac{1}{2} f(2\alpha) \text{ و هو المطلوب}$$

منه جهة أخرى : $g(\alpha) = (\alpha - 1)^2 + \frac{1}{4}(e^{\alpha} - e^{-\alpha})^2$

أي : $g(\alpha) = \left[- \frac{1}{2} f(2\alpha)\right]^2 + \left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \right)^2$

أي : $g(\alpha) = \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2$ و هو المطلوب

13 ـ الحصر : $0,46 < \alpha < 0,47$ إذن : $f(0,46) < f(\alpha) < f(0,47)$ لأن f متزايدة على $[0,46 ; 0,47]$

أي : $0,47 < f(\alpha) < 0,48$

أي : $0,22 < [f(\alpha)]^2 < 0,23$ ....(1)

منه جهة أخرى : $0,46 < \alpha < 0,47$ منه : $0,92 < 2\alpha < 0,94$

منه : $f(0,92) < f(2\alpha) < f(0,94)$

أي : $1,05 < f(2\alpha) < 1,08$

منه : $(1,05)^2 < [f(2\alpha)]^2 < (1,08)^2$

أي : $1,10 < [f(2\alpha)]^2 < 1,16$

منه : $0,27 < \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 < 0,29$ .... (2)

بجمع (1) و (2) نحصل على : $0,22 + 0,27 < \frac{1}{4} [f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2 < 0,29 + 0,23$

أي : $0,49 < g(\alpha) < 0,52$

بما أن $AM = \sqrt{g(x)}$ فإن $AM_{\alpha} = \sqrt{g(\alpha)}$

أي : $\sqrt{0,49} < AM_{\alpha} < \sqrt{0,52}$ أي $0,7 < AM_{\alpha} < 0,72$

(هذه المسافة مقدرة بوحدة قياس أشعة توجيه المعلم)

التمرين ـ 20

لتكن f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$

الجزء I :

1 أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]1 ; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

2 ـ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α من المجال $[e+1 ; e^3+1]$

ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1 ; +\infty[$

لتكن ϕ الدالة المعرفة على $]1 ; +\infty[$ بـ $\phi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$

3 ـ بين أن إشارة $\phi'(x)$ هي إشارة $g(x^2)$ على المجال $]1 ; +\infty[$

4 ـ بين أن ϕ متزايدة على المجال $]1 ; \sqrt{\alpha}[$ و متناقصة على المجال $]\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

الجزء III :

1 ـ تحقق أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $f(x) = \phi(e^x)$

2 ـ إستنتج $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

4 ـ أثبت أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $\ln(\sqrt{\alpha})$

5 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0 ; +\infty[$: $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

6 ـ أنشئ المنحنى (C) الممثل للدالة f

الحـل ـ 20

الجزء I :

1 ـ تغيرات الدالة g حيث $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

g معرفة على $]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} 2x - (x-1)\ln(x-1)$$

$$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 2 - y\ln y \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x-1) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} y$$

$= 2$ لأن $\lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} y \ln y = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x - (x-1)\ln(x-1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x-1)\left[\frac{2x}{x-1} - \ln(x-1)\right]$$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)[2 - \ln(x-1)]$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$

$= -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(x-1) = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على $]1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 2 - \left[\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}(x-1)\right]$$

$$= 2 - [\ln(x-1) + 1]$$

$$= 1 - \ln(x-1)$$

إشارة $g'(x)$:

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \ln e$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \leq e$$

$$\Leftrightarrow x \leq e + 1$$

منه إشارة $g'(x)$ كمايلي :

x	1		$1+e$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	1		$1+e$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$2+e$	$\searrow$ 0	$-\infty$

$$g(1+e) = 2(1+e) - e\ln(1+e-1) = 2 + 2e - e = 2 + e$$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تنعدم مرة واحدة فقط .

أي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

لدينا : $g(1+e) = 2 + e > 0$

و $g(1+e^3) = 2(1+e^3) - (1+e^3-1)\ln(1+e^3-1) = 2 + 2e^3 - e^3 \ln e^3 = 2 - e^3 < 0$

نتيجة : $\left\{ \begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [1+e ; 1+e^3] \\ g(1+e)g(1+e^3) < 0 \end{array} \right.$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α من المجال $[1+e ; 1+e^3]$ و هو المطلوب

منه إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	1	$1+e$	α	$1+e^3$	$+\infty$
$g(x)$	$+$		0	$-$	

3 ــ لدينا :

$$\phi'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1} \times x - \ln(x^2-1)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$$

$$= \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

لاحظ أن على المجال $]1 ; +\infty[$ لدينا : $x^2 - 1 > 0$ إذن $x^2(x^2 - 1) > 0$

منه : إشارة $\phi'(x)$ هي إشارة $g(x^2)$ كمايلي :

لما $1 < x^2 < \alpha$ أي $1 < x < \sqrt{\alpha}$ فإن $g(x^2) > 0$ أي $\phi'(x) > 0$

لما $x^2 > \alpha$ أي $x > \sqrt{\alpha}$ فإن $g(x^2) < 0$ أي $\phi'(x) < 0$

نتيجة : ϕ متزايدة على المجال $]1 ; \sqrt{\alpha}[$

ϕ متناقصة على المجال $]\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

ϕ تقبل قيمة حدية عظمى عند $x^2 = \alpha$ أي $x = \sqrt{\alpha}$

لأن $\phi'(\sqrt{\alpha}) = 0$ و قيمتها : $\phi(\sqrt{\alpha}) = \dfrac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$

الجزء II :

1 ــ من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $\phi(e^x) = \dfrac{\ln[(e^x)^2 - 1]}{e^x} = \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$

منه : $f(x) = \phi(e^x)$ و هو المطلوب .

2 ــ لدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \phi(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \ln(x^2 - 1) = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \phi(e^x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \phi(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x + 1) + \ln(x - 1)}{x}$$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x - 1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x - 1)}{x - 1} \times \dfrac{x - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x - 1)}{x - 1} \times 1 = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x - 1)}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{x + 1} \times \dfrac{x + 1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{x + 1}$

$= 0$

منه : $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{x} + \dfrac{\ln(x - 1)}{x}$

$= 0 + 0$

$= 0$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{\ln(y^2 - 1)}{y} = 0$ (بوضع $y = e^x$)

3 ــ **تغيرات الدالة f :**

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

لدينا $f(x) = \phi(e^x)$ إذن : $f'(x) = e^x \phi'(e^x)$

$= e^x \left[\dfrac{g[(e^x)^2]}{(e^x)^2 [(e^x)^2 - 1]}\right]$

$= \dfrac{e^x}{e^{2x}(e^{2x} - 1)} g(e^{2x})$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(e^{2x})$ لأن $\dfrac{e^x}{e^{2x}(e^{2x} - 1)} > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

كمايلي : $g(e^{2x}) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \leq \alpha$ حسب جدول إشارة $g(x)$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \leq e^{\ln\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 2x \leq \ln\alpha$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}\ln\alpha$$

منه :

x	0		$\frac{1}{2}\ln\alpha$	
$g(e^{2x})$		$+$	0	$-$

منه جدول تغيرات الدالة **f** :

x	0		$\frac{1}{2}\ln\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\phi(\sqrt{\alpha})$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{1}{2}\ln\alpha\right) = \phi(e^{\frac{1}{2}\ln\alpha}) = \phi(e^{\ln\sqrt{\alpha}}) = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$$

4 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $x = \frac{1}{2}\ln\alpha = \ln(\alpha)^{1/2} = \ln\sqrt{\alpha}$

و قيمتها $f(\ln\sqrt{\alpha}) = \phi(e^{\ln\sqrt{\alpha}})$

$$(\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$$

لكن $g(\alpha) = 0$

أي : $2\alpha - (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1) = 0$

منه : $2\alpha = (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1)$

أي : $\ln(\alpha - 1) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$

إذن : بالرجوع إلى المساواة (β) : $\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha - 1}}{\sqrt{\alpha}}$

أي : $\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\sqrt{\alpha}\,2\alpha}{\sqrt{\alpha}\,(\alpha - 1)}$

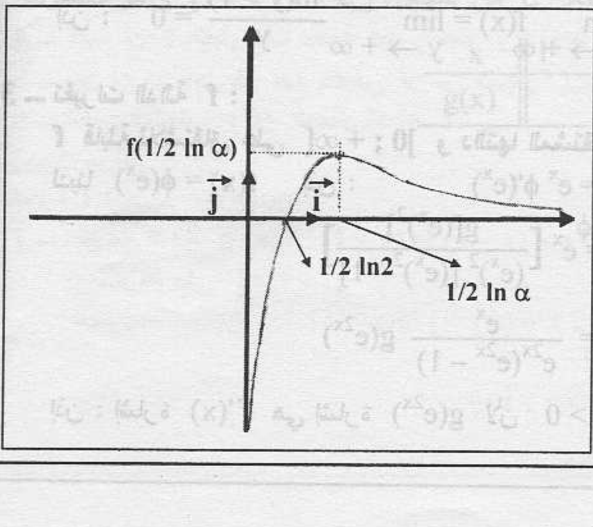
أي : $\phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

نتيجة : القيمة الحدية العظمى للدالة f هي $f(\ln\sqrt{\alpha}) = \phi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

منه : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$ و هو المطلوب

6 ــ الإنشاء :

لاحظ أن $\phi(\sqrt{\alpha}) > 0$ و الدالة f تنعدم من أجل $x = \frac{1}{2}\ln 2$



التمرين ـــ 21

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما k نعرف الدالة f_k على المجال $]0 ; +\infty[$ كمايلي : $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ و نرمز بـــ (C_k) إلى منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

لتكن g الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـــ $g(x) = \ln(x+1) - x$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0 ; +\infty[$

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي موجب a فإن : $\ln(a+1) \leq a$

3 ــ أحسب $f_1'(x)$ ثم إستنتج تغيرات الدالة f_1

4 ــ بين أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $f_1(x) = \ln(1 + \frac{x}{e^x})$

5 ــ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ علما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

6 ــ أحسب $f_k'(x)$ ثم إستنتج تغيرات الدالة f_k

7 ــ بين أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $f_k(x) = \ln(1 + k\frac{x}{e^x})$

8 ــ إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k

9 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0 ; +\infty[$: $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

10 ــ أكتب معادلة مماس المنحنى (C_k) عند النقطة ذات الفاصلة 0 و ليكن (T_k) هذا المماس .

11 ــ ليكن p و m عددان حقيقيان موجبان تماما حيث $p < m$

أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_m) و (C_p)

12 ــ أنشئ (C_1) و (T_1) ثم (C_2) و (T_2)

الحــل ــ 21

1 ــ تغيرات الدالة g على المجال $]0 ; +\infty[$:

$$g(0) = \ln(0+1) - 0 = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)[0 - 1] \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \end{array}\right\}$$

$$= -\infty$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1 - x - 1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

إذن : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $g'(x) \leq 0$ لأن $\frac{-x}{x+1} \leq 0$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن :

$g(x) \leq 0$ أي $\ln(x+1) - x \leq 0$ منه $\ln(x+1) \leq x$

نتيجة : من أجل كل a من المجال $]0 ; +\infty[$: $\ln(a+1) \leq a$

3 ــ لدينا : $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

منه : $f_1'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1$

أي : $f_1'(x) = \dfrac{e^x + 1 - e^x - x}{e^x + x}$

أي : $f_1'(x) = \dfrac{1 - x}{e^x + x}$

منه : إشارة $f_1'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $1 - x$ لأن $e^x + x > 0$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	

منه : **جدول تغيرات الدالة f_1 على المجال $]0 ; +\infty[$**

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e + 1) - 1$	$\searrow$	0

$f_1(0) = \ln(e^0 + 0) - 0 = \ln(1) = 0$

$f_1(1) = \ln(e + 1) - 1$

ملاحظة : نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$ تحسب في السؤال 5 .

4 ـــ من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ لدينا :

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$$
$$= \ln\left[e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)\right] - x$$
$$= \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - x$$
$$= x + \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) - x$$
$$= \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$$ و هو المطلوب .

5 ـــ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$= 0$ (يوضع في جدول التغيرات)

6 ـــ لدينا : $f_k(x) = \ln(e^x + k\,x) - x$

إذن : $f_k'(x) = \dfrac{e^x + k}{e^x + k\,x} - 1$

$$= \frac{e^x + k - e^x - k\,x}{e^x + k\,x}$$
$$= \frac{k(1 - x)}{e^x + k\,x}$$

منه : إشارة $f_k'(x)$ على $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $1 - x$ فقط لأن $k > 0$ و $(e^x + k\,x) > 0$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	

منه : **جدول تغيرات الدالة f_k على $]0 ; +\infty[$ كما يلي :**

x	0		1		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e+k)-1$	$\searrow$	0

$$f_k(0) = \ln(e^0 + k(0)) - 0 = \ln(1) = 0$$
$$f_k(1) = \ln(e^1 + k) - 1 = \ln(e + k) - 1$$

ملاحظة : نهاية الدالة f_k عند $+\infty$ تحسب في السؤال 8

7 ــ من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$: $f_k(x) = \ln(e^x + k\,x) - x$

$$= \ln\left[e^x\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right)\right] - x$$
$$= \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right) - x$$
$$= x + \ln\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right) - x$$
$$= \ln\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right)$$ و هو المطلوب .

8 ــ $$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{k\,x}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln(1)$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} k = 0$

$= 0$ يوضع في جدول التغيرات

9 ــ حسب جدول تغيرات الدالة f_k فإن الدالة f_k تقبل قيمة حدية عظمى على $[0 ; +\infty[$ عند $x = 1$ و قيمتها : $f_k(1) = \ln(e + k) - 1$

أي : من أجل كل x من $[0 ; +\infty[$ $f_k(x) \le \ln(e + k) - 1$

أي : $f_k(x) \le \ln(e + k) - \ln(e)$

أي : $f_k(x) \le \ln\left(\frac{e + k}{e}\right)$

أي : $f_k(x) \le \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right)$

لكن حسب السؤال (2) فإن $\ln(a + 1) \le a$ أي $\ln\left(\frac{k}{e} + 1\right) \le \frac{k}{e}$

منه : $f_k(x) \le \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right) \le \frac{k}{e}$

أي : $f_k(x) \le \frac{k}{e}$ و هو المطلوب .

10 ــ معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل : $y = f_k'(0)\,x + f_k(0)$ حيث :

$$f_k'(0) = \frac{k(1 - 0)}{e^0 + k(0)} = k$$
$$f_k(0) = \ln(e^0 + 0) - 0 = \ln 1 = 0$$

منه : معادلة المماس (T_k) هي : $y = k\,x$

11 ــ ليكن $p > 0$ و $m > 0$ حيث $p < m$

$$f_m(x) - f_p(x) = \ln(e^x + m\,x) - x - [\ln(e^x + p\,x) - x]$$
$$= \ln(e^x + m\,x) - \ln(e^x + p\,x)$$
$$= \ln\left(\frac{e^x + m\,x}{e^x + p\,x}\right)$$

لندرس إذن إشارة $\ln\left(\frac{e^x + m x}{e^x + p x}\right)$ على المجال $]0 ; +\infty[$

لاحظ أن $x > 0$ و $m > 0$ و $p > 0$ و $e^x > 0$

إذن : $e^x + m x > 0$ و $e^x + p x > 0$

منه : $\ln\left(\frac{e^x + m x}{e^x + p x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + m x}{e^x + p x} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^x + m x \geq e^x + p x$

$\Leftrightarrow m x \geq p x$

$\Leftrightarrow m x - p x \geq 0$

$\Leftrightarrow (m - p) x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$ لأن $m - p > 0$

منه إشارة $f_m(x) - f_p(x)$ كمايلي :

x	0		$+\infty$
$f_m(x) - f_p(x)$	0	$+$	

نتيجة : إذا كان $m > p$ فإن : (C_m) و (C_p) يتقاطعان في النقطة $(0 ; 0)$

(C_m) يقع دائما فوق (C_p) من أجل $x \in]0 ; +\infty[$

12 ــ الإنشاء :

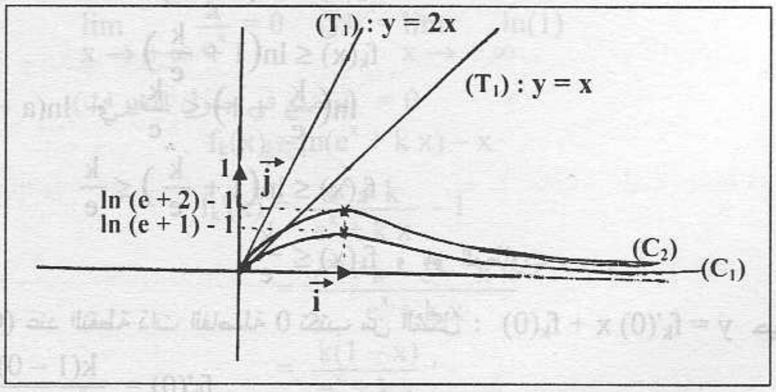
لنرسم جدول تغيرات f_1 : (من أجل $k = 1$)

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	↗	$\ln(e + 1) - 1$	↘	0

لنرسم جدول تغيرات f_2 : (من أجل $k = 2$)

x	0		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	0	↗	$\ln(e + 2) - 1$	↘	0

منه الإنشاء التالي :



التمرين ــ 22

f دالة معرفة على المجال $]-2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = 1 + x\ln(x + 2)$ نسمي (C)

منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

الجزء I :

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ من أجل كل x من المجال $]-2 ; +\infty[$

2 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة f'

3 ــ بين أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-0,6 ; -0,5[$

4 ــ إستنتج إشارة $f'(x)$

5 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-2\,;+\infty[$

الجزء II :

ليكن x_0 عدد حقيقي من المجال $]-2\,;+\infty[$ نسمي (T_0) مماس (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2\,;+\infty[$ نضع :

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$$

1 ـ تحقق ان : من أجل كل x من المجال $]-2\,;+\infty[$: $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

2 ـ باستعمال تزايد الدالة f' أعط إشارة $d'(x)$ ثم إستنتج تغيرات الدالة d على المجال $]-2\,;+\infty[$

3 ـ أدرس الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة إلى (T_0)

الجزء III :

1 ـ عين معادلة المماس (T_0) من أجل $x_0 = 0$

2 ـ أوجد الأعداد الحقيقية x_0 التي تكون من أجلها مماسات المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تمر بمبدأ المعلم

3 ـ أرسم المنحنى (C) [نأخذ $\alpha = -0,54$ و $f(\alpha) = 0,8$]

<u>الحل ـ 22</u>

<u>الجزء I</u> :

1 ـ
$$f'(x) = 1(\ln(x+2)) + \frac{x}{x+2} = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{x+2+2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

2 ـ لاحظ أن : $x > -2$ إذن : $x + 4 > 2$ و خاصة $x + 4 > 0$

منه : $f''(x) > 0$ من أجل كل x من $]-2\,;+\infty[$

أي : الدالة f' متزايدة تماما على $]-2\,;+\infty[$ كمايلي :

x	-2		α		$+\infty$
$f''(x)$			+		
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -2} \ln(x+2) + \frac{-2}{x+2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y = -\infty \\ \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} -2/y = -\infty\end{array}\right\} \text{لأن} \quad = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \ln y - \frac{2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+2) + \frac{x}{x+2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+2} = 1 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{y \to +\infty} \ln(y) + 1 = +\infty$$

(نضع النهايات في جدول التغيرات)

3 ـ بملاحظة جدول تغيرات الدالة f' نستنتج أن
$$\left\{\begin{array}{l} f' \text{ مستمرة على }]-2\,;+\infty[\\ f' \text{ تأخذ قيم موجبة و سالبة} \\ f' \text{ متزايدة تماما .}\end{array}\right.$$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-2\,;+\infty[$ حيث $f'(\alpha) = 0$

و لدينا :
$$f'(-0,6) = \ln(1,4) - \frac{0,6}{1,4} = -0,09$$

$$f'(-0,5) = \ln(1,5) - \frac{0,5}{1,5} = 0,07$$

إذن : $\begin{cases} f' \text{ مستمرة على } [-0,6\,;-0,5] \\ f'(-0,6)\times f'(-0,5)<0 \end{cases}$

منه : يوجد α من المجال $]-0,6\,;-0,5[$ (حسب مبرهنة القيم المتوسطة)

يحقق $f'(\alpha)=0$

4 ـ بملاحظة جدول تغيرات الدالة f' نستنتج ما يلي :

x	-2	-0.6	α	$-0,5$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

5 ـ تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -2} 1 + x\ln(x+2)$$
$$= \lim_{x \xrightarrow{>} -2} 1 - 2\ln(x+2)$$

$= +\infty$ لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} -2} \ln(x+2) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln(x+2)$$
$$= +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-2\,;+\infty[$ و $f'(x)=\ln(x+2)+\dfrac{x}{x+2}$

و إشارة $f'(x)$ حسب السؤال (4) كمايلي :

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\alpha\ln(\alpha+2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\alpha) = 1 + \alpha\ln((\alpha+2)$$

الجزء II :

1 ـ $d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)] \Rightarrow d(x) = f(x) - f'(x_0)x + \underbrace{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}_{\text{ثابت}}$

$\Rightarrow d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ و هو المطلوب

2 ـ بما أن الدالة f' متزايدة تماما على $]-2\,;+\infty[$ فإن : يكون $f'(x)-f'(x_0)$ موجب

إذا و فقط إذا كان $x \geq x_0$ منه جدول الإشارة التالي :

x	-2		x_0		$+\infty$
$d'(x)=f'(x)-f'(x_0)$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة d كمايلي :

x	-2		x_0		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$d(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\,.\,x_0 + f'(x_0)\,.\,x_0 - f(x_0) = 0$$

إذن : الدالة d تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]-2\,;+\infty[$ و قيمتها $d(x_0)=0$

منه : من أجل كل x من $]-2\,;x_0[\cup]x_0\,;+\infty[$ فإن $d(x)>0$

أي : المنحنى (C) يقع دائما فوق المماس (T_0) من أجل $x \in\,]-2\,;x_0[\cup]x_0\,;+\infty[$

ماعدا عند النقطة $(x_0\,;f(x_0))$ حيث المماس و المنحنى (C) يشتركان في هذه النقطة .

الجزء III :

1 ـ من أجل $x_0 = 0$ معادلة (T_0) هي : $y = f'(0)x + f(0)$

حيث : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = \ln 2 \end{cases}$

أي معادلة (T_0) : $y = x\ln 2 + 1$

2 ـ **معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تكتب من الشكل :**

$$y = f'(x_0)[x - x_0] + f(x_0)$$

أي $y = f'(x_0) . x - f'(x_0) . x_0 + f(x_0)$

إذن : يكون المماس يشمل المبدأ إذا و فقط إذا كان : $- f'(x_0) . x_0 + f(x_0) = 0$

إذن نحل في $]-2 ; +\infty[$ المعادلة $f(x) - x f'(x) = 0$ كمايلي :

$$f(x) - x f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x\ln(x+2) - x\left[\ln(x+2) + \frac{x}{x+2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + x\ln(x+2) - x\ln(x+2) - \frac{x^2}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2-x^2}{x+2} = 0$$

$\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$ معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول x :

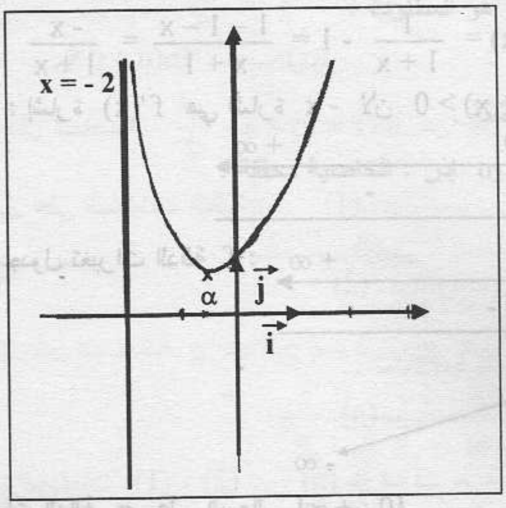
$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$$

نتيجة : يوجد مماسين للمنحنى (C) يشملان المبدأ أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة 1- و الآخر عند النقطة ذات الفاصلة 2

3 ـ الإنشاء :

من أجل $\alpha = -0,54$ و $f(\alpha) = 0,8$ نحصل على المنحنى (C) كمايلي :



__التمرين ـ 23__

f و g دالتان معرفتان على $[0 ; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \ln(1+x) - x$ و $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$

1 ـ أدرس تغيرات كل من f و g على المجال $[0 ; +\infty[$

2 ـ إستنتج أن من أجل كل $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

لتكن $(u_n)_{n>0}$ متتالية معرفة بـ $u_1 = \dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

3 ـ برهن بالتراجع أن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

4 ـ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

نضع :
$$\begin{cases} S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dots\dots\dots\dots + \dfrac{1}{2^n} \\ T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \dots\dots\dots\dots + \dfrac{1}{4^n} \end{cases}$$

5 ـ بين أن : $S_n - \dfrac{1}{2} T_n \le \ln u_n \le S_n$

6 ـ أحسب S_n و T_n بدلالة n ثم إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

7 ـ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

8 ـ إستنتج أن (u_n) متقاربة و لتكن ℓ نهايتها .

9 ـ نقبل أن إذا كانت (v_n) و (w_n) متتاليتان متقاربتان حيث $v_n \le w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \le \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$

بين إذن أن $5/6 \le \ln \ell \le 1$

الحـل ـ 23

1 ـ تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$

$$f(0) = \ln(1) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 + x) - x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x) \left[\frac{\ln(1 + x)}{1 + x} - \frac{x}{1 + x}\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x)(0 - 1) \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + x)}{1 + x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 + x} = 1 \end{cases}$$
$$= -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{1 - 1 - x}{x + 1} = \frac{-x}{1 + x}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-x$ لأن $(1 + x) > 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$

أي :

x	0		$+\infty$
$-x$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$

تغيرات الدالة g على المجال $[0 ; +\infty[$

$$g(0) = \ln(1) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x) \left[\frac{\ln(1 + x)}{1 + x} - \frac{x}{1 + x} + \frac{x^2}{2(1 + x)}\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x) \left[-1 + \frac{x^2}{2x}\right] \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{1 + x} = 0$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x)\left(-1 + \frac{1}{2} x\right)$$
$$= +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$$
$$= \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x}$$
$$= \frac{x^2}{1+x}$$

إذن : $g'(x) \geq 0$ من أجل $x \in [0 ; +\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 ــ من جدول تغيرات الدالتين f و g نستنتج مايلي :

من أجل كل $x \in [0 ; +\infty[$: $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \ln(1+x) - x \leq 0 \\ \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \ln(1+x) \leq x \\ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \end{cases}$

أي : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ و هو المطلوب .

3 ــ البرهان بالتراجع أن : من أجل كل $n \in IN^*$: $u_n > 0$

من أجل $n = 1$: $u_1 = 3/2$ و $3/2 > 0$ إذن : الخاصية محققة .

من أجل $n = 2$: $u_2 = u_1\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$ إذن : الخاصية محققة .

نفرض أن $u_n > 0$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا $\begin{cases} u_n > 0 \\ \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0 \end{cases}$ إذن : $u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$

أي $u_{n+1} > 0$

أي : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من IN^* : $u_n > 0$

4 ــ البرهان بالتراجع أن : من أجل كل n من IN^* :

$$\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

من أجل $n = 1$ لدينا $\ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ إذن : الخاصية صحيحة .

من أجل $n = 2$: لدينا $\ln(u_2) = \ln(15/8)$

و $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}\right) = \ln\left(\frac{15}{8}\right)$

منه : $\ln(u_2) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن : من أجل $n > 2$ $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

هل $\ln(u_{n+1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ ؟

لدينا :

$$\ln(u_{n+1}) = \ln\left[u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]$$

$$= \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $(n + 1)$

نتيجة : من أجل كل n من IN^* : $\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

5 ــ باستعمال الخاصية $\ln(1 + x) \le x$ من أجل $x \in \{1/2 ; 1/2^2 ; \ldots. 1/2^n\}$ نحصل على المتباينات التالية :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \le \frac{1}{2^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\vdots$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

بجمع المتباينات (1) ، (2) ... (n) طرف لـ طرف نحصل على :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots\ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$$

أي : $\ln(u_n) \le S_n$ .... (α)

باستعمال الخاصية $\ln(1 + x) \ge x - \frac{x^2}{2}$ من أجل $x \in \{1/2 ; 1/2^2 ; \ldots. 1/2^n\}$

نحصل على المتباينات التالية :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \ge \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\vdots$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \ge \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

بجمع المتباينات (1) ، (2) .... (n) طرف لـ طرف نحصل على :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \ge \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2\right] + \ldots. + \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right]$$

أي : $\ln(u_n) \ge \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots. + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right]$

أي : $\ln u_n \ge S_n - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

أي : $\ln u_n \ge S_n - \frac{1}{2}T_n$ .... (β)

نتيجة : من المتباينتان (α) و (β) نستنتج أن :

$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$ و هو المطلوب

6 ـ S_n هو مجموع n حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $1/2$ و حدها الأول $1/2$ منه

$$S_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{(1/2)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right)$$

أي :

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{(1/2)^n - 1}{-1/2} \right)$$

أي :

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

T_n هو مجموع n حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $1/4$ و حدها الأول $1/4$ منه :

$$T_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{(1/4)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right)$$

أي :

$$T_n = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 \right) \times \frac{-4}{3}$$

أي :

$$T_n = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$$

إذن :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] = \frac{1}{3}$$

7 ـ

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n$$

$$= u_n\left[1 + \frac{1}{2^{n+1}} - 1\right]$$

$$= u_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

بما أن $\left\{ \begin{array}{l} u_n > 0 \text{ من أجل كل } n \in IN^* \\ \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \end{array} \right.$

فإن $u_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ أي (u_n) متتالية متزايدة تماما .

8 ـ لدينا من أجل كل n من IN^* :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

منه :

$$e^{S_n - \frac{1}{2}T_n} \leq u_n \leq e^{S_n}$$

أي المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ e^{S_n}

نتيجة : $\left\{ \begin{array}{l} (u_n) \text{ متزايدة تماما} \\ (u_n) \text{ محدودة من الأعلى} \end{array} \right.$

إذن : (u_n) متتالية متقاربة :

9 ـ لتكن $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$

لدينا :

$$e^{S_n - \frac{1}{2}T_n} \leq u_n \leq e^{S_n}$$

منه :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{S_n - \frac{1}{2}T_n} \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} e^{S_n}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$ ، $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 1/3$ لأن $e^{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} \leq \ell \leq e^1$: أي

أي : $e^{5/6} \leq \ell \leq e^1$

منه : $5/6 \leq \ln \ell \leq 1$ و هو المطلوب.

التمرين ــ 24

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]-\infty\,;1[$ بـــ $g(x) = (1-x)\,e^x - 1$

2 ــ إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل $x \in]-\infty\,;1[$

3 ــ بين أن : من أجل كل x من المجال $]-\infty\,;1[$: $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty\,;1[$ بـــ $f(x) = e^x + \ln(1-x)$ نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

4 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty\,;1[$

5 أرسم المنحنى (C)

الحـل ــ 24

1 ــ g معرفة على IR خاصة على $]-\infty\,;1[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)\,e^x - 1 = \lim_{x\to-\infty} e^x - x\,e^x - 1 = -1$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} (1-x)\,e^x - 1 = (1-1)\,e^1 - 1 = -1$$

g قابلة للاشتقاق على $]-\infty\,;1[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = -1(e^x) + e^x(1-x) = -e^x + e^x - x\,e^x = -x\,e^x$$

منه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(-x)$ لأن $e^x > 0$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		1
$-x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-1	↗ قيم سالبة	0	قيم سالبة ↘	-1

$$g(0) = (1-0)\,e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		1
$g(x)$		-	0	-	

3 ــ حسب جدول تغيرات الدالة g فإن من أجل كل x من المجال $]-\infty\,;1[$:

أي $g(x) \leq 0$ ، $(1-x)\,e^x - 1 \leq 0$

منه : $(1-x)e^x \leq 1$

منه : $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ و هو المطلوب . (لأن $1-x > 0$)

4 ــ تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty\,;1[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + \ln(1-x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} e^x + \ln(1-x)$$

$$= \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} e^1 + \ln y$$

$$= -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty\,;1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = e^x + \frac{-1}{1-x} = \frac{(1-x)e^x - 1}{1-x} = \frac{g(x)}{1-x}$$

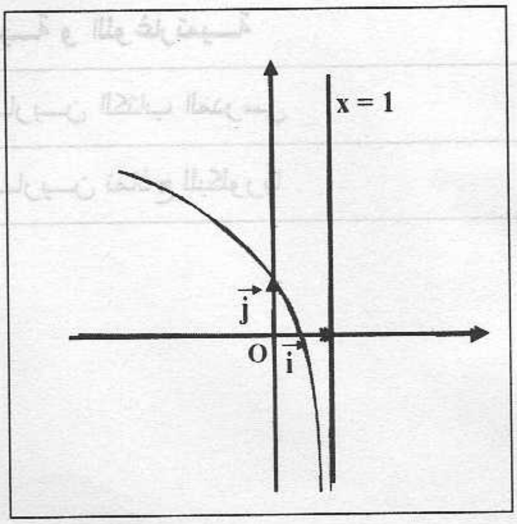
منه : إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty\,;1[$ هي إشارة $g(x)$ فقط لأن $(1-x) > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$

$$f(0) = e^0 + \ln(1-0) = 1$$

5 ـ الإنشاء :



الفهرس

سلسلة هبــاج

TEL : 0773 26 52 81