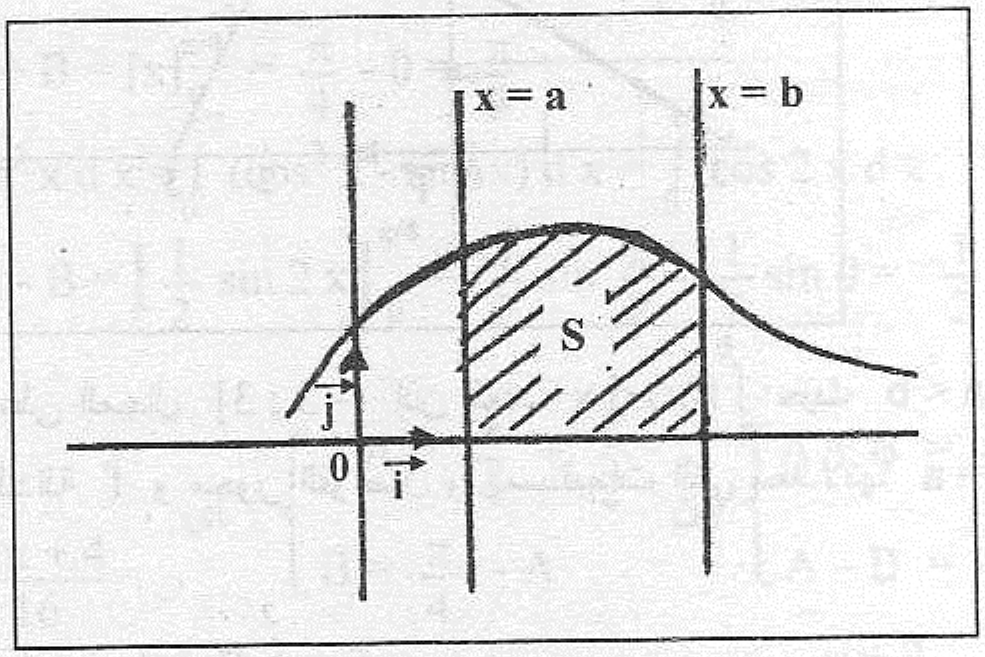
الحساب التكاملي

Kimou.

خاصية أساسية : f دالة مستمرة و موجبة على مجال جزئي I من IR و (C) منحناها في معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I حيث $a < b$ ،
العدد الحقيقي الموجب S حيث $S = [F(b) - F(a)] \times ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$ يعبر عن مساحة الحيز من المستوي المحدد
بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$ مقدرا بـ وحدة قياس المساحة حسب مقياس أشعة التوجيه حسب الشكل التالي :
الجزء الملون يمثل حيز المستوي S المحصور بين المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$



التكامل المحدود :
حسب الخاصية السابقة $S = F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f
لتكن G دالة أصلية أخرى للدالة f
هل $S = G(b) - G(a)$ ؟
الجواب : بما أن F و G دالتان أصليتان لـ f فإن $G(x) = F(x) + k$ حيث $k \in IR$
إذن :
$$G(b) - G(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k]$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= S$$
نتيجة : مساحة الحيز S لا تتعلق باختيار الدالة الأصلية للدالة f
إذن العدد S مستقل عن الدالة الأصلية F
تعريف : إذا كانت f دالة مستمرة على المجال I و كانت F دالة أصلية لـ f على المجال I فإن من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I العدد $F(b) - F(a)$ يسمى التكامل المحدود من a إلى b للدالة f و نرمز له بـ
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
ملاحظة : الكتابة $\int_a^b f(x)\,dx$ تقرأ : تكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x
مثلا : $f : x \longmapsto 3x^2$
f مستمرة على IR و $F : x \longmapsto x^3$ هي دالة أصلية لـ f على IR
إذن :
$$\int_1^0 f(x)\,dx = F(0) - F(1)$$
$$= (0)^3 - (1)^3$$
$$= -1$$
ملاحظة : بالرجوع إلى خاصية المساحة فإن $S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ حيث $a < b$ و f مستمرة و موجبة على المجال $[a ; b]$

تبسيط الكتابة : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال [a ; b] فإن العدد F(b) – F(a) يمكن كتابته $[F(x)]_a^b$

و عليه $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

أمثلة :

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2\right] = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_{0}^{1} e^{2x-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^{2-1} - \frac{1}{2}e^{0-1} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2-1}{2e}$$

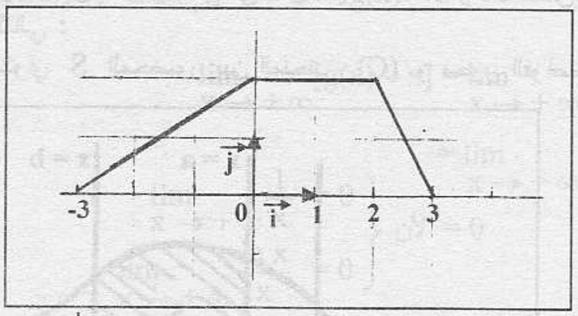
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = (-\cos\pi) - [-\cos(-\pi)] = 1 - 1 = 0$$

أمثلة بيانية : باستعمال المنحنى التالي لدالة f أحسب التكاملات التالية :

1 – $\int_0^1 f(x)\,dx$

2 – $\int_1^2 f(x)\,dx$

3 – $\int_0^2 f(x)\,dx$



الحـل : لاحظ أن الدالة f مستمرة و موجبة على المجال [3 ; 3 -] إذن العدد $\int_a^b f(x)\,dx$ حيث $a < b$ يعبر عن مساحة الحيز من المستوي المحدود بـــ المنحنى (C) للدالة f و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها x = a و x = b إذن يكفي إجراء قراءة بيانية لهذه المساحة كمايلي :

$\int_0^1 f(x)\,dx = 2$ ؛ $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$ ؛ $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$

نشاط :

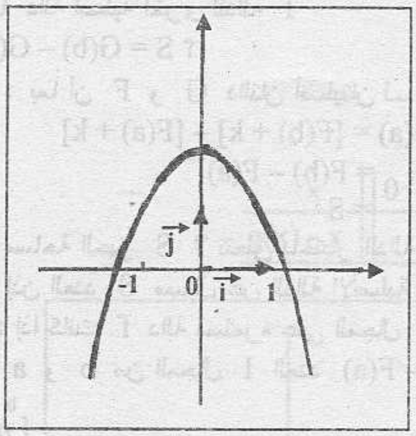
باستعمال الحاسبة البيانية إليك المنحنى (C) الممثل للدالة f حيث $f(x) = 2 - x^2$ في معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

حيث $\|\vec{i}\| = 2\text{ cm}$ و $\|\vec{j}\| = 1{,}5\text{ cm}$

المطلوب : أحسب مساحة حيز المستوي المحصور بين المنحنى (C)

و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها x = -1 ؛ x = 1

الحـل :



لاحظ أن المنحنى (C) يقع فوق محور الفواصل على المجال [1 ; 1-]

إذن : الدالة f موجبة على المجال [1 ; 1-] إذن :

المساحة المطلوبة هي : $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|\ \text{cm}^2$

أي : $S = \int_{-1}^{1}(2 - x^2)\,dx \times 2 \times 1{,}5\ \text{cm}^2$

لدينا : $\int_{-1}^{1}(2 - x^2)\,dx = \left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$

$$= \left(2 - \frac{1}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

منه : $S = \frac{10}{3} \times 2 \times 1{,}5\ \text{cm}^2 = 10\ \text{cm}^2$

خواص التكامل المحدود :

لتكن f و g دالتان مستمرتان على مجال I . a ، b ، c أعداد حقيقية من المجال I . k عدد حقيقي كيفي . لدينا

الخواص التالية :

1 ـ $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$: علاقة شال .

2 ـ $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$: خطية التكامل المحدود .

3 ـ $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$: خطية التكامل المحدود .

4 ـ إذا كان $a < b$ و f موجبة على $[a ; b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

5 ـ إذا كان $a < b$ و من أجل كل x من $[a ; b]$: $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

مثال ـ 1

ليكن $A = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx$ و $B = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx$

باستعمال الخواص أحسب $A + B$ ثم $A - B$ إستنتج قيم A و B

الحل ـ 1

$$A + B = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx + \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/4} 1 \cdot dx$$

إذن : $A + B = [x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

$$A - B = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx - \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx$$

إذن : $A - B = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}$

نتيجة : $\begin{cases} A + B = \frac{\pi}{4} \\ A - B = \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 2A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \\ B = \frac{\pi}{4} - A \end{cases}$ أي $\begin{cases} A = \frac{2\pi + 4}{16} \\ B = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi + 4}{16} \end{cases}$

أي $\begin{cases} A = \frac{\pi + 2}{8} \\ B = \frac{2\pi}{8} - \frac{\pi + 2}{8} \end{cases}$ منه $\begin{cases} A = \frac{\pi + 2}{8} \\ B = \frac{\pi - 2}{8} \end{cases}$

مثال ـ 2

ليكن $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$

باستعمال الخواص أثبت أن $0 < A \leq 1$

الحل ـ 2

الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ موجبة تماما على $[0 ; 1]$ إذن : $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx > 0$

من جهة أخرى : من أجل كل x من $[0 ; 1]$ فإن : $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$

منه : $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx \leq \int_0^1 1 \cdot dx$ أي $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx \leq [x]_0^1$ أي : $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx \leq 1$

نتيجة : $0 < \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx \leq 1$ أي $0 < A \leq 1$.

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف : f دالة مستمرة على مجال $[a ; b]$

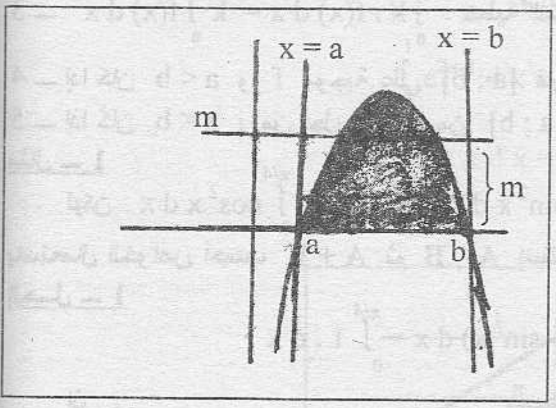
العدد الحقيقي m المعرف بـ $m = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a ; b]$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة و موجبة على المجال $[a ; b]$ و كان (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ فإن مساحة الحيز S المحصور بـ (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$

هي $S = \int_a^b f(x)\,dx$

إذن : القيمة المتوسطة m للدالة f على [a ; b] هي : $m = \dfrac{S}{b-a}$

أي : $S = m(b-a)$



التفسير الهندسي :

$S = \int_a^b f(x)\,dx$ هي مساحة الجزء الملون

إذا كان $S = m(b-a)$ فإن S هي مساحة المستطيل الذي طوله $(b-a)$ و عرضه m (أنظر الشكل)

نتيجة : إذا وجد عددين حقيقيين m و M حيث من أجل كل x من $[a ; b]$:

$m \le f(x) \le M$ فإن $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

مثال :

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = 1 + \ln(1+x)$

1 ـ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0 ; e-1]$

2 ـ إستنتج حصرا لـ f(x) على المجال $[0 ; e-1]$

3 ـ إستنتج حصرا للعدد $A = \int_1^{e-1} f(x)\,dx$

الحـل :

1 ـ f قابلة للاشتقاق على $]-1 ; +\infty[$ و خاصة على المجال $[0 ; e-1]$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

إذن : f متزايدة تماما على $[0 ; e-1]$ لأن $\dfrac{1}{x+1} > 0$

2 ـ منه : من أجل كل x من $[0 ; e-1]$: $f(0) \le f(x) \le f(e-1)$

أي : $1 + \ln(1) \le f(x) \le 1 + \ln(1+e-1)$

أي : $1 \le f(x) \le 2$

3 ـ $1 \le f(x) \le 2$ إذن : حسب خاصية القيمة المتوسطة على المجال $[1 ; e-1]$ فإن :

$$1(e-1-1) \le \int_1^{e-1} f(x)\,dx \le 2(e-1-1)$$

أي : $(e-2) \le A \le 2(e-2)$ و هو المطلوب .

ملاحظة : إذا أردنا حصر القيمة المتوسطة على المجال $[0 ; e-1]$ نحصل على :

$$1(e-1-0) \le \int_0^{e-1} f(x)\,dx \le 2(e-1-0) \quad \text{أي} \quad e-1 \le \int_0^{e-1} f(x)\,dx \le 2(e-1)$$

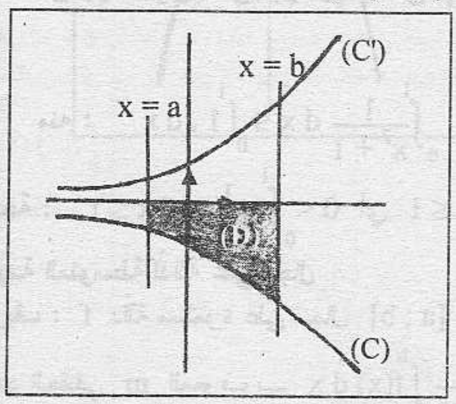
تكامل دالة سالبة على مجال

f دالة مستمرة سالبة على مجال $[a ; b]$. ليكن (C) منحناها في معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

نرمز بـ A إلى مساحة حيز المستوي (D) المحدود بـ المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ ؛ $x = b$

للبحث عن A نرسم نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل و ليكن (C') هذا المنحنى إذن (C') له المعادلة $y = -f(x)$

منه : $A = \int_a^b -f(x)\,dx$ لأن (C') فوق محور الفواصل أي الدالة $-f$ موجبة .



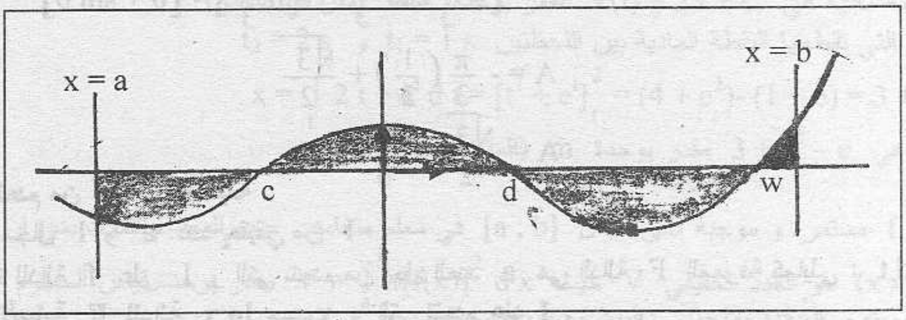
نقول أن المساحة الجبرية للحيز (D) سالبة لأن الدالة f سالبة على المجال $[a ; b]$

تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a ; b]$ و (C) منحناها في معلم متعامد كما هو موضح في الشكل .

نرمز بـ A إلى مساحة الحيز (D) من المستوي المحدود بـ المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ ؛ $x = b$

لحساب A نجزء الحيز (D) حسب إشارة f(x) أي موضع المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل ثم نعبر عن المساحة A على كل مجال . حسب الشكل التالي مثلا :



$$A = \int_a^c -f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^w -f(x)\,dx + \int_w^b f(x)\,dx$$

إذن : تم تقسيم الحيز (D) إلى 4 مجالات حسب وضع المنحنى (C) بالنسبة لمحور الفواصل

مثال : f دالة معرفة بـــ $f(x) = -e^{-0,5x+1}$ و (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$.

ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما .

أحسب $a(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المعرف بمجموعة النقط $M(x ; y)$ حيث $0 \le x \le \lambda$ و $f(x) \le y \le 0$

ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$

الحـل : $f(x) = -e^{-0,5x+1}$ إذن : $f(x) < 0$ من أجل كل x من IR

منه : $a(\lambda) = \int_0^\lambda -f(x)\,dx \times ||\vec{i}||.||\vec{j}|| = \int_0^\lambda e^{-0,5x+1}\,dx\,||\vec{i}||\,||\vec{j}||$ لأن الحيز المطلوب هو جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = \lambda$ منه :

$$a(\lambda) = \left[\left(-\frac{1}{0,5}\,e^{-0,5x+1}\right)\right]_0^\lambda$$

$$= [-2\,e^{-0,5x+1}]_0^\lambda$$

$$= -2\,e^{-0,5\lambda+1} + 2\,e$$

$$= 2(e - e^{-0,5\lambda+1})\,||\vec{i}||.||\vec{j}||$$

منه : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) = 2\,e\,||\vec{i}||.||\vec{j}||$ لأن $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-0,5\lambda+1} = 0$

التكامل بالتجزئة

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' مستمرتان على I . من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I فإن :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

مثال : $$\mathbf{A = \int_0^{\pi/3} x \sin x\,dx}$$

نضع : $\begin{cases} u(x) = x \text{ إذن : } u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin x \text{ إذن : } v(x) = -\cos x \end{cases}$

منه : $$A = \int_0^{\pi/3} u(x)\,.\,v'(x)\,dx$$

إذن : حسب التكامل بالتجزئة فإن : $A = [u(x)\,v(x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} u'(x)\,v(x)\,dx$

أي : $$A = [-x\cos x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} -\cos x\,dx$$

أي : $$A = [-x\cos x]_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \cos x\,dx$$

أي : $$A = [-x\cos x]_0^{\pi/3} + [\sin x]_0^{\pi/3}$$

أي : $A = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi/3}$

منه : $A = \left[-\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[0 + \sin 0\right]$

أي : $A = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

أخيرا : $A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

الدالة الأصلية التي تنعدم من أجل قيمة معينة :

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل العدد a هي الدالة F المعرفة كمايلي : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

<u>مثال</u> : **تعيين الدالة الأصلية F للدالة $x \longmapsto \ln x$ و التي تنعدم عند 1 .**

<u>الحـل</u> : $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$

$= [t\ln t - t]_1^x$

$= [x\ln x - x] - [\ln 1 - 1]$

$= x\ln x - x + 1$

توظيف التكامل في حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد (O, I, J, K) محاوره $(x x')$ ؛ $(y y')$ ؛ $(z z')$

نعتبر وحدة الحجوم (uv) هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على (O, I, J, K)

ليكن في الفضاء مجسم محدد بمستويين موازيين للمستوي $(x o y)$ معادلاتهما $z = a$ و $z = b$ حيث $a < b$

خاصية (1)

نضع $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو موازي للمستوي $(x o y)$ راقمه z حيث $a < z < b$

حجم المجسم بوحدة الحجوم $(u\,v)$ هي $V = \int_a^b S(z)\,dz$

<u>مثال</u> : **برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو $V = \frac{4}{3}\pi R^3$**

<u>الحـل</u> : نعتبر كرة في الفضاء مركزها هو المبدأ 0 و نصف قطرها R

إذن : مقطع الكرة بمستوى موازي للمستوي $(x o y)$ راقمه z حيث $-R < z < R$ هو دائرة مركزها $w(0 ; 0 ; z)$ و

نصف قطرها r حيث $R^2 = z^2 + r^2$ أي $r^2 = R^2 - z^2$

إذن : مساحة هذه الدائرة هي : $S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$

إذن : حسب الخاصية (1) فإن حجم الكرة بوحدة الحجوم هي :

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,dz = \int_{-R}^{R} \pi R^2\,dz - \int_{-R}^{R} \pi z^2\,dz$$

$$= \left[\pi R^2 z - \frac{1}{3}\pi z^3\right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi\left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi\left[R^2 R - \frac{1}{3}R^3 - \left(-R^2 R - \frac{1}{3}(-R)^3\right)\right]$$

$$= \pi\left[2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right]$$

$= \frac{4}{3}\pi R^3 (u.v)$ و هو المطلوب .

المسافة المقطوعة على مستقيم

نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة التي تقطعها نقطة مادية عند أي لحظة t .

السرعة اللحظية لهذه النقطة عند اللحظة t نرمز لها بـ $V(t)$ معرفة بالعلاقة

$V(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$ أي : $dx = V(t)\,dt$

خاصية : المسافة التي تقطعها نقطة مادية بين لحظتين t_1 و t_2 حيث $t_1 < t_2$ ذات السرعة اللحظية $V(t)$

هي : $x = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, d t$

نشاط : سرعة نقطة مادية هي $V(t) = 2t + e^t$ مقدر بوحدة m/s (متر في الثانية)

أحسب x المسافة التي تقطعها النقطة المادية بين اللحظتين $t_1 = 1\,s$ و $t_2 = 2\,s$

الحل : $x = \int_1^2 2t + e^t\, d t = [t^2 + e^t]_1^2 = (4 + e^2) - (1 + e) = 3 + e^2 - e$

إذن : المسافة x هي $3 + e^2 - e$ مقدر بوحدة m (المتر)

خاصية :

(C) منحنى لدالة f مستمرة و موجبة على مجال [a ; b] في معلم متعامد . حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل (x x') هو العدد الحقيقي V حيث $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, d x$ مقدر بوحدة قياس الحجوم

مساحة حيز من المستوي المحدد بمنحنيي دالتين مستمرتين

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال [a ; b] حيث من أجل كل x من [a ; b] $f(x) \geq g(x)$ فإن مساحة الحيز (D) من المستوي المحدد بمنحنيي الدالتين f و g و بالمستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$ هي العدد الحقيقي A حيث $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, d x$ مقدر بوحدة المساحة .

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـ 1

أحسب في كل ممايلي مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محور الفواصل على المجال I :

1 ـ $f(x) = 2x - 1$: $I = [1/2 ; 3]$

1 ـ $f(x) = -2x - 3$: $I = [-4 ; -2]$

1 ـ $f(x) = |x - 1|$: $I = [-1 ; 4]$

الحل ـ 1

في كل الحالات الدالة f مستمرة على المجال I إذن : لحساب المساحة المطلوبة يكفي معرفة إشارة الدالة f على المجال I ثم حساب المساحة S كمايلي :

1 ـ $1/2 \leq x \leq 3$ إذن : $1 \leq 2x \leq 6$ منه : $0 \leq 2x - 1 \leq 5$

منه : من أجل كل x من I : $f(x) \geq 0$

إذن : $S = \int_{1/2}^3 (2x - 1)\, d x = [x^2 - x]_{1/2}^3 = (9 - 3) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

2 ـ $-4 \leq x \leq -2$ إذن : $4 \leq -2x \leq 8$ منه : $1 \leq -2x - 3 \leq 5$

منه : من أجل كل x من I : $f(x) > 0$ إذن : $S = \int_{-4}^{-2} f(x)\, d x$

أي : : $S = \int_{-4}^{-2} (-2x - 3)\, d x = [-x^2 - 3x]_{-4}^{-2} = (-4 + 6) - (-16 + 12) = 2 + 4 = 6$

3 ـ من أجل كل x من R فإن $|x - 1| \geq 0$ و خاصة من أجل كل x من I

$S = \int_{-1}^4 |x - 1|\, d x = \int_{-1}^1 |x - 1|\, d x + \int_1^4 |x - 1|\, d x$

$= \int_{-1}^1 (1 - x)\, d x + \int_1^4 (x - 1)\, d x$ لأن $|x - 1| = \begin{cases} 1 - x : x \leq 1 \\ x - 1 : x \geq 1 \end{cases}$

$= \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^4$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)+(8-4)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+4+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{13}{2}$$

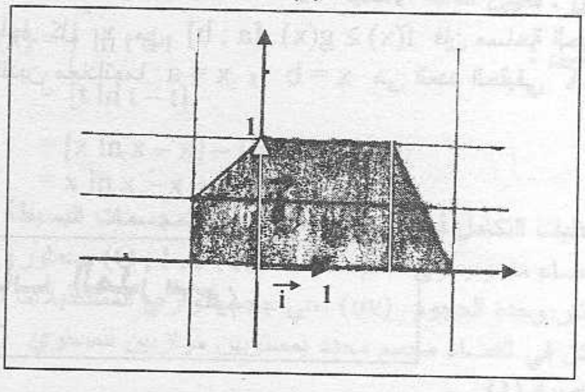
ملاحظة : المساحة S مقدرة بوحدة قياس أشعة توجيه المعلم

<u>التمرين ـ 2</u>

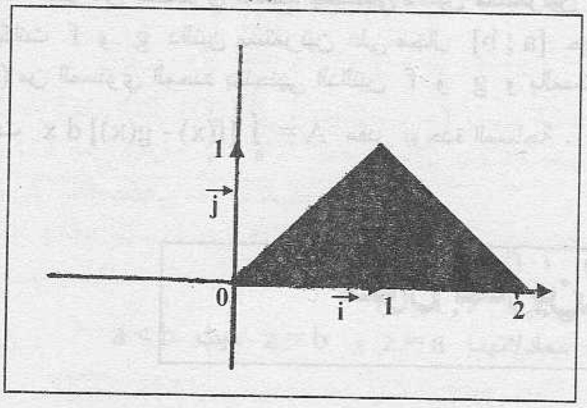
إليك في كل حالة ممايلي المنحنى (C) لدالة f على مجال I

أحسب تكامل الدالة f على المجال I

الحالة (1)



الحالة (2)

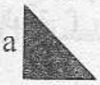


<u>الحـل ـ 2</u>

في كلا الحالتين المنحنى (C) يقع فوق محور الفواصل إذن : مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات $x = a$ و $x = b$ حيث $I = [a\,;\,b]$ (مجال تعريف الدالة f) هي : $S = \int_a^b f(x)\,dx$ مقدرة بوحدة قياس المساحة إذن يكفي أن نحسب مساحة الجزء الملون في كل شكل كما يلي :

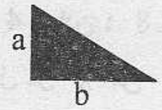
الحالة (1) حسب مقياس الرسم فإن :

مساحة الجزء  a b تساوي 1 إذن مساحة الجزء  a a تساوي 1/2 و مساحة الجزء  a b تساوي 1/2

و مساحة الجزء  a a تساوي 1/4

و عليه : $S = 2(1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ مقدرة بوحدة قياس المساحة

إذن : $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \frac{13}{4}$

الحالة (2) حسب مقياس الرسم فإن : مساحة الجزء  a b تساوي 1 و مساحة الجزء  a b تساوي 1/2

إذن : $S = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ مقدرة بوحدة قياس المساحة

و عليه : $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$

ملاحظة : مقياس الرسومات هي : $a = \|\vec{i}\|$ و $b = \|\vec{j}\|$ حسب المنحنى .

<u>التمرين ـ 3</u>

f دالة معرفة على $[-1\,;\,1]$ بـ $f(x) = \begin{cases} -2x : x \in [-1\,;\,0] \\ x^2 \quad : x \in [0\,;\,1] \end{cases}$ و (C) منحناها في معلم متعامد

أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$ ؛ $x = 1$

الحل ــ 3

لتكن S المساحة المطلوبة . لأن f مسمرة على المجال $[-1 ; 1]$

على المجال $[-1 ; 0]$ لدينا : $-1 \leq x \leq 0$ إذن : $0 \leq -2x \leq 2$ أي $f(x) \geq 0$

على المجال $[0 ; 1]$ لدينا : $x^2 \geq 0$ إذن : $f(x) \geq 0$

منه :
$$S = \int_{-1}^{0} -2x\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx = \left[-x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} = \left[0-(-1)\right] + \left[\frac{1}{3} - 0\right] = \frac{4}{3}$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة .

التمرين ــ 4

f دالة معرفة على $[-3 ; 3]$ بـ
$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 1,5 : & -3 \leq x \leq -1 \\ x + 2 : & -1 < x < 0 \\ -\frac{2}{3}x + 2 : & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$
و (C) منحناها في معلم متعامد

1 ــ تحقق أن f مستمرة على $[-3 ; 3]$

2 ــ أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = -3$ و $x = 3$

الحل ــ 4

1 ــ f مستمرة على $[-3 ; -1[\cup]-1 ; 0[\cup [0 ; 3]$ إذن يكفي أن نثبت أنها مستمرة عند (1 -) على اليمين ثم عند 0 على اليسار حتى تكون f مستمرة على $[-3 ; 3]$ كمايلي :

$f(-1) = 0,5(-1) + 1,5 = 1$ و لدينا : $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} x + 2 = -1 + 2 = 1$

إذن : f مستمرة على يمين (1 -)

$f(0) = -\frac{2}{3}(0) + 2 = 2$ و لدينا : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x + 2 = 2$

إذن : f مستمرة عند 0 على اليسار .

نتيجة : f مستمرة على $[-3 ; 3]$

2 ــ $-3 \leq x \leq -1$ إذن : $-1,5 \leq 0,5x \leq -0,5$ أي $0 \leq 0,5x + 1,5 \leq 1$ أي $f(x) \geq 0$ على المجال $[-3 ; -1]$

$-1 < x < 0$ إذن : $1 < x + 2 < 2$ إذن : $f(x) > 0$ على المجال $[-1 ; 0]$

$0 \leq x \leq 3$ إذن : $-2 \leq -\frac{2}{3}x \leq 0$ إذن : $0 \leq -\frac{2}{3}x + 2 \leq 2$ أي $f(x) \geq 0$ على المجال $[0 ; 3]$

نتيجة : من أجل كل x من $[-3 ; 3]$: $f(x) \geq 0$

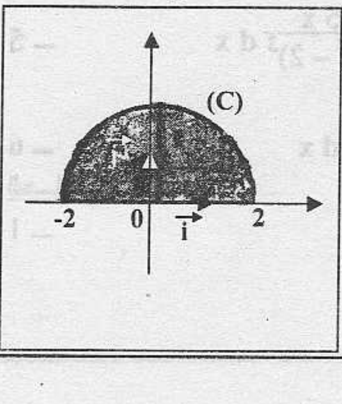
إذن : المساحة المطلوبة S هي :
$$S = \int_{-3}^{-1} (0,5x + 1,5)\,dx + \int_{-1}^{0} (x + 2)\,dx + \int_{0}^{3} \left(-\frac{2}{3}x + 2\right)dx$$
$$= \left[\frac{0,5}{2}x^2 + 1,5x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}x^2 + 2x\right]_{0}^{3}$$
$$= \frac{0,5}{2} - 1,5 - \left(\frac{0,5(9)}{2} - 3(1,5)\right) + 0 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) + \left(-\frac{9}{3} + 6\right) - 0$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + 3$$
$$= \frac{11}{2}$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة

التمرين ــ 5

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة f في معلم متعامد و متجانس . حيث (C) هو نصف الدائرة التي مركزها $O(0 ; 0)$ و نصف قطرها 2 .

أحسب $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ حيث $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$



الحل ــ 5

مساحة الجزء الملون من المستوي هي $S = \frac{1}{2}\pi(2)^2$ أي $S = 2\pi$ (نصف مساحة الدائرة)

لكن الجزء الملون هو حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيماتالتي معادلاتها $x = -2$ و $x = 2$

إذن : $S = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

لنثبت أن المنحنى (C) له المعادلة $y = \sqrt{4 - x^2}$

معادلة الدائرة ذات المركز 0 و نصف القطر 2 هي $x^2 + y^2 = 4$

إذن : $y^2 = 4 - x^2$

لكن جزء الدائرة الملون يقع فوق محور الفواصل إذن : $y \geq 0$ منه : $y = \sqrt{4 - x^2}$

إذن : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

منه : $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\pi$ و هو المطلوب .

التمرين – 6

أحسب التكاملات التالية :

1 – $\int_{0}^{1} 3x + 1\,dx$

2 – $\int_{1}^{3} -x + 3\,dx$

3 – $\int_{-5}^{-2} 4x + 3\,dx$

4 – $\int_{0}^{2} x^2 - x\,dx$

5 – $\int_{1}^{2} (x+1)^3\,dx$

الحل – 6

1 – $\int_{0}^{1} 3x + 1\,dx = \left[3\left(\frac{1}{2}x^2\right) + x\right]_{0}^{1} = \frac{3}{2} + 1 - 0 = \frac{5}{2}$

2 – $\int_{1}^{3} -x + 3\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{1}^{3} = -\frac{9}{2} + 9 - \left(-\frac{1}{2} + 3\right) = \frac{-9}{2} + 9 + \frac{1}{2} - 3 = 2$

3 – $\int_{-5}^{-2} 4x + 3\,dx = [2x^2 + 3x]_{-5}^{-2} = 8 - 6 - (50 - 15) = 2 - 35 = -33$

4 – $\int_{0}^{2} x^2 - x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 0 = \frac{2}{3}$

5 – $\int_{1}^{2} (x+1)^3\,dx = \left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_{1}^{2} = \frac{1}{4}(3)^4 - \frac{1}{4}(2)^4 = \frac{1}{4}(81 - 16) = \frac{65}{4}$

التمرين – 7

أحسب التكاملات التالية :

1 – $\int_{1/2}^{2} 2t - 1 + \frac{1}{t^2}\,dt$

2 – $\int_{1}^{4} \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

3 – $\int_{1}^{2} 2x(x^2 - 1)\,dx$

4 – $\int_{1}^{10} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

5 – $\int_{2}^{3} \frac{5x}{(x^2 - 2)^3}\,dx$

6 – $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$

7 – $\int_{0}^{3} \frac{dt}{\sqrt{t+1}}$

8 – $\int_{1}^{2} \frac{t^3}{t^4 + 1}\,dt$

9 – $\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,dx$

10 – $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4 - x}}\,dx$

11 – $\int_{0}^{3} \frac{dt}{(2t + 1)^2}$

الحل – 7

1 – $\int_{1/2}^{2} 2t - 1 + \frac{1}{t^2}\,dt = \int_{1/2}^{2} 2t - 1 + t^{-2}\,dt$

$= \left[t^2 - t - \frac{1}{t}\right]_{1/2}^{2}$

$$= \left(4 - 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{15}{4}$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = [\ln|x| - \sqrt{x}]_1^4$$ – 2

$$= (\ln 4 - 2) - (\ln 1 - 1)$$

$$= \ln 4 - 1$$

$$\int_1^2 2x(x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{1}{2}(x^2 - 1)^2\right]_1^2 = \frac{9}{2}$$ – 3

$$\int_1^{10} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\int_1^{10} \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = 2[\sqrt{t}]_1^{10} = 2(\sqrt{10} - 1)$$ – 4

$$\int_2^3 \frac{5x}{(x^2 - 2)^3}\, dx = \frac{5}{2}\int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 2)^3}\, dx$$ – 5

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{1}{-3+1}(x^2 - 2)^{-3+1}\right]_2^3$$

$$= \frac{-5}{4}\left[\frac{1}{(x^2 - 2)^2}\right]_2^3$$

$$= \frac{-5}{4}\left(\frac{1}{49} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\, dx = [e^x]_{\ln 2}^{\ln 3} = 3 - 2 = 1$$ – 6

$$\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t+1}} = 2\int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\, dt = 2\left[\sqrt{t+1}\right]_0^3 = 2(2 - 1) = 2$$ – 7

$$\int_1^2 \frac{t^3}{t^4 + 1}\, dt = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{4t^3}{t^4 + 1}\, dt$$ – 8

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|t^4 + 1|\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}(\ln 17 - \ln 2)$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}\, dx$$ – 9

$$= \frac{1}{2}[\ln|e^{2x} + 1|]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(e^2 + 1) - \ln 2)$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}} = -2\int_0^3 \frac{-1}{2\sqrt{4 - x}}\, dx$$ – 10

$$= -2\left[\sqrt{4 - x}\right]_0^3$$

$$= -2(1 - 2)$$

$$= 2$$

$$\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2\,dt}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2t+1}\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{7}+1\right) = \frac{3}{7}$$ – 11

التمرين – 8

أحسب التكاملات التالية :

1 – $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx$

2 – $\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$

3 – $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

4 – $\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x}\,dx$

5 – $\int_1^2 \frac{1}{2x+3}\,dx$

6 – $\int_0^{\pi} \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$

7 – $\int_{-2}^{2} \frac{x}{x^2-9}\,dx$

8 – $\int_0^1 3e^{4x}\,dx$

9 – $\int_0^1 t\,e^{t^2-1}\,dt$

10 – $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x\cos x\,dx$

الحل – 8

1 – $$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_{\pi/6}^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2 – $$\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

3 – $$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \left[\sqrt{2x+1}\right]_1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

4 – $$\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x}\,dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{2}{x}\,dx$$
$$= [x - 2\ln|x|]_{-2}^{-1}$$
$$= (-1 - 2\ln 1) - (-2 - 2\ln 2)$$
$$= 1 + 2\ln 2$$

5 – $$\int_1^2 \frac{1}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|2x+3|]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5)$$

6 – $$\int_0^{\pi} \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt = \left[-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}$$

7 – $$\int_{-2}^{2} \frac{x}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \frac{2x}{x^2-9}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}[\ln|x^2-9|]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 5)$$
$$= 0$$

8 – $\int_0^1 3\,e^{4x}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^1 4\,e^{4x}\,dx = \frac{3}{4}\,[e^{4x}]_0^1 = \frac{3}{4}(e^4 - 1)$

9 – $\int_0^1 t\,e^{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2\,t\,e^{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\,[e^{t^2-1}]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

10 – $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/3} 2\cos x \sin x\,dx$

$= \frac{1}{2}\,[\sin^2 x]_{-\pi/4}^{\pi/3}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$= 1/8$

التمرين – 9

أحسب التكاملات التالية :

1 – $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$

2 – $\int_0^1 3\,t\,e^{t^2-1}\,dt$

3 – $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

4 – $\int_1^3 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

5 – $\int_0^3 2^{3x}\,dx$

6 – $\int_0^1 (3t^2+1)\,e^{2t^3+2t}\,dt$

7 – $\int_0^1 \frac{3x}{x^2+\sqrt{2}}\,dx$

8 – $\int_0^1 (3x-6)(x^2-4x+1)^3\,dx$

الحـل – 9

1 – $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx = [\ln|x^2+x-1|]_1^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$

2 – $\int_0^1 3\,t\,e^{t^2-1}\,dt = \frac{3}{2}\int_0^1 2\,t\,e^{t^2-1}\,dt = \frac{3}{2}\,[e^{t^2-1}]_0^1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

3 – $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,(\sin x)^{-2}\,dx$

$= \left[\frac{1}{-2+1}\,(\sin x)^{-2+1}\right]_{\pi/6}^{\pi/4}$

$= \left[\frac{-1}{\sin x}\right]_{\pi/6}^{\pi/4}$

$= \frac{-2}{\sqrt{2}} + 2 = 2 - \sqrt{2}$

4 – $\int_1^3 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int_1^3 \frac{-1}{x^2}\,e^{1/x}\,dx$

$= -\,[e^{1/x}]_1^3$

$= -\,(e^{1/3} - e)$

$= e - \sqrt[3]{e}$

5 — $\int_0^3 2^{3x}\,dx = \int_0^3 8^x\,dx = \int_0^3 e^{x\ln 8}\,dx = \left[\frac{1}{\ln 8}e^{x\ln 8}\right]_0^3 = \frac{1}{\ln 8}(e^{3\ln 8}-1) = \frac{8^3-1}{\ln 8}$

6 — $\int_0^1 (3t^2+1)\,e^{2t^3+2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (6t^2+2)\,e^{2t^3+2t}\,dt$

$= \frac{1}{2}\left[e^{2t^3+2t}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(e^4-1)$

7 — $\int_0^1 \frac{3x}{x^2+\sqrt{2}}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+\sqrt{2}}\,dx = \frac{3}{2}\left[\ln|x^2+\sqrt{2}|\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\ln(1+\sqrt{2})-\ln\sqrt{2}\right)$

8 — $\int_0^1 (3x-6)(x^2-4x+1)^3\,dx = 3\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^3\,dx$

$= \frac{3}{2}\int_0^1 (2x-4)(x^2-4x+1)^3\,dx$

$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}(x^2-4x+1)^4\right]_0^1$

$= \frac{3}{8}\left[(x^2-4x+1)^4\right]_0^1$

$= \frac{3}{8}(16-1)$

$= 45/8$

<u>التمرين — 10</u>

1 — أوجد الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من $IR - \{-3\,;3\}$:

$$\frac{3}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$

2 — إستنتج $\int_{-1}^{2} \frac{3}{x^2-9}\,dx$

<u>الحل — 10</u>

1 — $\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3} = \frac{ax+3a+bx-3b}{(x-3)(x+3)} = \frac{(a+b)x+3(a-b)}{x^2-9}$

بالمطابقة مع $\frac{3}{x^2-9}$ نحصل على $\left.\begin{matrix} a+b=0 \\ 3(a-b)=3 \end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix} 2a=1 \\ b=-a \end{matrix}\right\}$ أي : $\left.\begin{matrix} a=1/2 \\ b=-1/2 \end{matrix}\right\}$

منه : $\frac{3}{x^2-9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}\right)$

2 — $\int_{-1}^{2} \frac{3}{x^2-9}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln|x-3|\right]_{-1}^{2} - \frac{1}{2}\left[\ln|x+3|\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 4) - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

$= \frac{-1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2$

<u>التمرين — 11</u>

1 — عين الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c حيث من أجل كل x من $IR - \{1/2\,;2\}$:

$$\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2} = a + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{x-2}$$

2 — إستنتج $\int_3^4 \frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}\,dx$

الحـل – 11

1 –
$$a+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{x-2}=\frac{a(2x-1)(x-2)+b(x-2)+c(2x-1)}{(2x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{2ax^2-5ax+2a+bx-2b+2cx-c}{2x^2-5x+2}$$
$$=\frac{2ax^2+(-5a+b+2c)x+2a-2b-c}{2x^2-5x+2}$$

بالمطابقة مع $\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}$ نحصل على $\left\{\begin{array}{l}2a=4\\-5a+b+2c=-5\\2a-2b-c=0\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}a=2\\b+2c=5\\-2b-c=-4\end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l}a=2\\2b+4c=10\\-2b-c=-4\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}a=2\\c=2\\b=1\end{array}\right.$

منه : $\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}=2+\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x-2}$

تحقيق : $2+\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{4x^2-10x+4+x-2+4x-2}{2x^2-5x+2}=\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}$

2 –
$$\int_3^4\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}\,dx=\int_3^4 2+\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x-2}\,dx$$
$$=\left[2x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|+2\ln|x-2|\right]_3^4$$
$$=\left(8+\frac{1}{2}\ln 7+2\ln 2\right)-\left(6+\frac{1}{2}\ln 5+2\ln 1\right)$$
$$=2+\frac{1}{2}\ln 7+2\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$$

التمرين – 12

1 – أوجد الأعداد الحقيقية a ، b ، c حيث من أجل $x\neq 1$: $\frac{x^2+2x-3}{x-1}=ax+b+\frac{c}{x-1}$

2 – إستنتج $\int_2^3\frac{x^2+2x-3}{x-1}\,dx$

الحـل – 12

1 – بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-3 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^2-x} & x+3 \\ 3x-3 & \\ \underline{3x-3} & \\ 0 & \end{array}$$

منه : من أجل $x\neq 1$: $\frac{x^2+2x-3}{x-1}=x+3$

إذن : $a=1$ ؛ $b=3$ ؛ $c=0$

2 –
$$\int_2^3\frac{x^2+2x-3}{x-1}\,dx=\int_2^3 x+3\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^3$$
$$=\frac{9}{2}+9-(2+6)=11/2$$

التمرين ـ 13

1 ـ بين أن من أجل كل x من IR : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

2 ـ إستنتج $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

الحـل ـ 13

ـ 1

$$1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$$

ـ 2

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 1 - \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$= [x - \ln|1+e^x|]_0^1$$

$$= 1 - \ln(1+e) - (0 - \ln 2)$$

$$= 1 - \ln(1+e) + \ln 2$$

التمرين ـ 14

f دالة معرفة على المجال $[-1 ; 1]$ بـ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1 ـ تحقق أن المنحنى (C) الممثل للدالة f هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 1 و الواقع فوق محور الفواصل

2 ـ إستنتج أن $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \pi/2$

الحـل ـ 14

1 ـ المعادلة ذات المركز O و نصف القطر 1 معادلتها : $x^2 + y^2 = 1$ أي $y^2 = 1 - x^2$

إذن : الجزء الواقع فوق محور الفواصل معادلته $y = \sqrt{1-x^2}$ لأن $y \geq 0$

إذن : $y = f(x)$ و هو المطلوب .

2 ـ لدينا مساحة نصف الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 هي $\frac{1}{2}(\pi \times 1^2) = \pi/2$

إذن : $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \pi/2$ لأن عبارة مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$ و $x = 1$ هي $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ و يمثل نصف الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 .

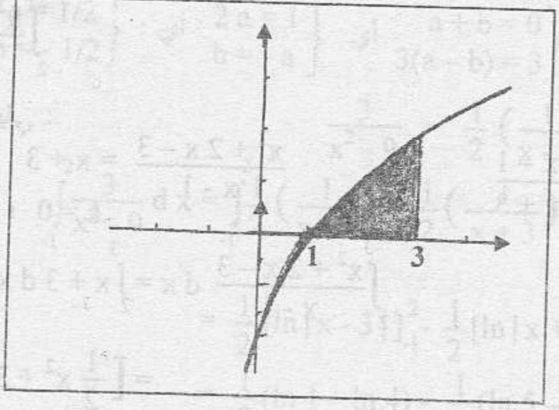
التمرين ـ 15

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{4}{(x+1)^2}$ و (C) تمثيلها البياني كما في الشكل (أنظر الشكل) .

1 ـ أحسب $\int_1^3 f(x)\,dx$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة .

2 ـ أحسب $\int_0^3 f(x)\,dx$

الشكل :



الحـل ـ 15

ـ 1

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 x - \frac{4}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int_1^3 x - 4(x+1)^{-2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 4\left(\frac{1}{-2+1}(x+1)^{-2+1}\right)\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x+1}\right]_1^3$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{4}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right)$$
$$= 3$$

التفسير الهندسي : حسب الشكل فإن منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل على المجال $[1 ; 3]$

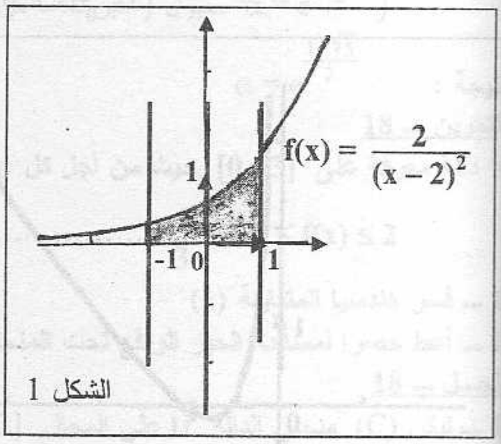
إذن العدد $\int_1^3 f(x)\,dx$ يعبر عن مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ و $x = 3$ أي الجزء الملون في الشكل . و عليه فإن مساحة هذا الجزء هي 3 (وحدة قياس المساحة) .

2 ــ $\int_0^3 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x+1}\right]_0^3 = \frac{9}{2} + \frac{4}{4} - (0+4) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$

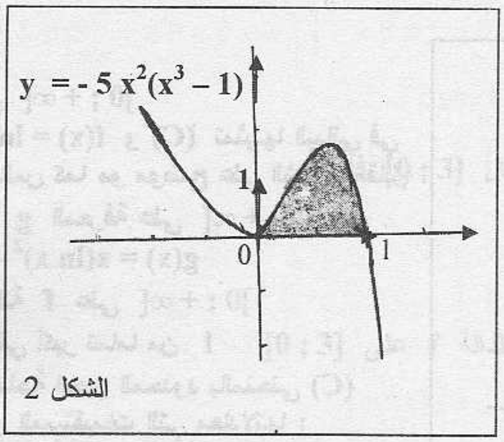
التمرين ــ 16

إليك الأشكال التالية لمنحنيات .

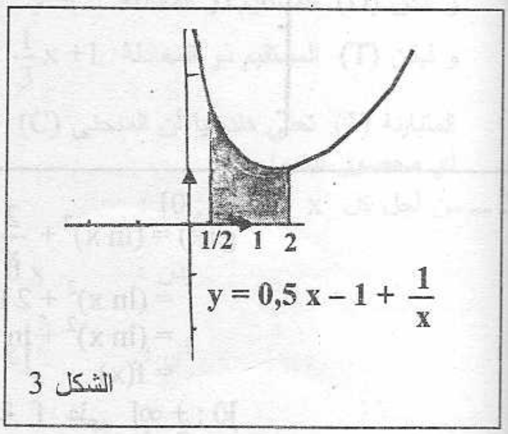
المطلوب : أحسب مساحة الحيز الملون مقدرة بوحدة القياس للمساحة .



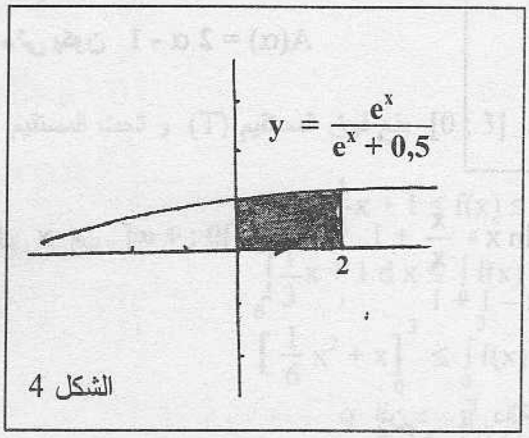
الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3



الشكل 4

الحل ــ 16

في كل الأشكال الجزء الملون يقع فوق محور الفواصل إذن إذا كانت $y = f(x)$ عبارة المنحنى فإن مساحة كل جزء من هذه الأجزاء مقدرة بوحدة قياس المساحات هي : $\int_a^b f(x)\,dx$ حيث a و b هي حدود الأجزاء على محور الفواصل كمايلي :

الشكل (1) : $S = \int_{-1}^{1} \frac{2}{(x-2)^2}\,dx = 2\left[\frac{-1}{x-2}\right]_{-1}^{1} = 2\left[\frac{-1}{-1} - \left(\frac{-1}{-3}\right)\right] = \frac{4}{3}$

الشكل (2) : $S = \int_0^1 -5x^2(x^3-1)\,dx = -\frac{5}{3}\int_0^1 3x^2(x^3-1)\,dx$

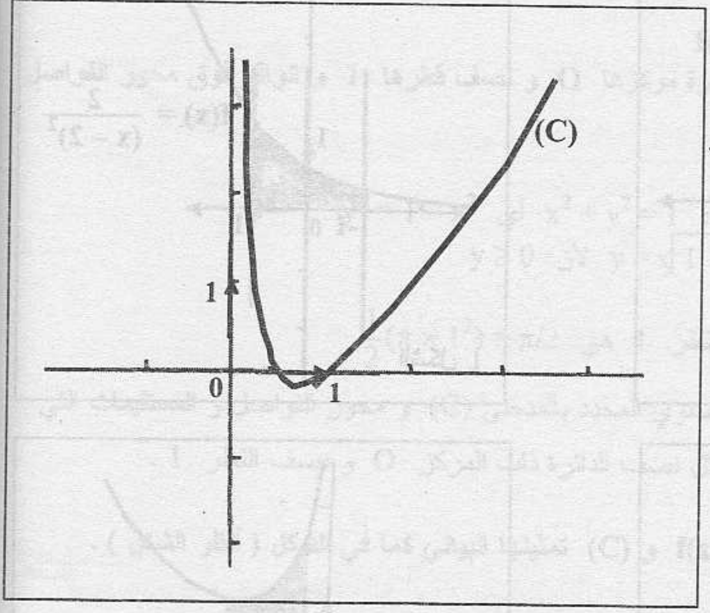
$$= -\frac{5}{3}\left[\frac{1}{2}(x^3-1)^2\right]_0^1$$

$$= -\frac{5}{6}\left[(x^3-1)^2\right]_0^1$$

$$= -\frac{5}{6}\left[0-(1)\right] = \frac{5}{6}$$

الشكل (3) :
$$S = \int_{1/2}^{2} 0{,}5\,x - 1 + \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^2 - x + \ln|x|\right]_{1/2}^{2}$$
$$= (1 - 2 + \ln 2) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2} - \ln 2\right)$$
$$= -1 + \ln 2 + \frac{7}{16} + \ln 2$$
$$= 2\ln 2 - \frac{9}{16}$$

الشكل (4) :
$$S = \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 0{,}5}\,dx = [\ln|e^x + 0{,}5|]_0^2 = \ln(e^2 + 0{,}5) - \ln(1{,}5)$$



التمرين – 17

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$
بـ $f(x) = \ln x + (\ln x)^2$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس كما مو موضح على الشكل المقابل .

1 – بين أن الدالة g المعرفة على $]0\,;+\infty[$
بـ $g(x) = x(\ln x)^2 - x\ln x + x$
هي دالة أصلية للدالة f على $]0\,;+\infty[$

2 – α عدد حقيقي أكبر تماما من 1
أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها :
$x = \alpha$ و $x = 1$

3 – عين α حتى يكون $A(\alpha) = 2\alpha - 1$

الحل – 17

1 – من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$:
$$g'(x) = (\ln x)^2 + \frac{2}{x}\,x\ln x - \ln x - \frac{x}{x} + 1$$
$$= (\ln x)^2 + 2\ln x - \ln x - 1 + 1$$
$$= (\ln x)^2 + \ln x$$
$$= f(x)$$

إذن : g دالة أصلية للدالة f على $]0\,;+\infty[$

2 – على المجال $[1\,;\alpha]$ منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل إذن مساحة الحيز المحدود بـ (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ و $x = \alpha$ هي :
$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x)\,dx = [g(x)]_1^{\alpha}$ مقدرة بوحدة قياس المساحة

منه : $A(\alpha) = g(\alpha) - g(1)$
أي : $A(\alpha) = \alpha(\ln\alpha)^2 - \alpha\ln\alpha + \alpha - 1$ و هو المطلوب .

3 –
$$A(\alpha) = 2\alpha - 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha > 1\\ \alpha(\ln\alpha)^2 - \alpha\ln\alpha + \alpha - 1 = 2\alpha - 1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha > 1\\ \alpha(\ln\alpha)^2 - \alpha\ln\alpha - \alpha = 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha > 1\\ (\ln\alpha)^2 - \ln\alpha - 1 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (1)\end{cases}$$

نحل المعادلة (1) ذات المجهول α حيث $\alpha > 1$

نضع : $t = \ln \alpha$ إذن : $t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

إذن : $\ln \alpha = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ أو $\ln \alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

أي : $\alpha = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ مرفوض (أصغر من 1)
أو
$\alpha = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ مقبول (أكبر تماما من 1)

نتيجة : $\alpha = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

التمرين ـــ 18

f دالة معرفة على [0 ; 3] حيث من أجل كل x من المجال [0 ; 3] فإن :

$$\frac{1}{3}x + 1 \le f(x) \le 2 \quad \text{.............. (1)}$$

1 ـــ فسر هندسيا المتباينة (1)

2 ـــ أعط حصرا لمساحة الحيز الواقع تحت المنحنى الممثل للدالة f على [0 ; 3]

الحـل ـــ 18

1 ـــ ليكن (C) منحنى الدالة f على المجال [0 ; 3]

و ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = 2$

و ليكن (T) المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{3}x + 1$

المتباينة (1) تعني هندسيا أن المنحنى (C) على المجال [0 ; 3] يقع فوق المستقيم (T) و تحت المستقيم (D) أي محصور بينهما

2 ـــ من أجل كل x من [0 ; 3] : $\frac{1}{3}x + 1 \le f(x) \le 2$

إذن : $\int_0^3 \frac{1}{3}x + 1\, dx \le \int_0^3 f(x)\, dx \le \int_0^3 2\, dx$

أي : $\left[\frac{1}{6}x^2 + x\right]_0^3 \le \int_0^3 f(x)\, dx \le \left[2x\right]_0^3$

أي : $\frac{9}{6} + 3 \le \int_0^3 f(x)\, dx \le 6$

أي : $\frac{9}{2} \le \int_0^3 f(x)\, dx \le 6$

نتيجة : مساحة الحيز الواقع تحت المنحنى (C) مقدرة بوحدة المساحة هي $S = \int_0^3 f(x)\, dx$

إذن : $9/2 \le S \le 6$

التمرين ـــ 19

باستعمال الخواص أحسب التكاملات التالية :

1 ـــ $\int_1^e \ln x\, dx + \int_1^e x + \ln(1/x)\, dx$

2 ـــ $\int_1^e \ln(x^2 + 1)\, dx + \int_e^1 \ln(x^2 + 1)\, dx$

3 ـــ $\int_1^{\pi/6} \cos 2x\, dx - \int_1^{7\pi/6} \cos 2x\, dx$

<u>الحل – 19</u>

1 –
$$\int_1^e \ln x\, dx + \int_1^e x + \ln(1/x)\, dx = \int_1^e \ln x + x + \ln(1/x)\, dx$$
$$= \int_1^e \ln x + x - \ln x\, dx$$
$$= \int_1^e x\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2}$$

2 –
$$\int_1^e \ln(x^2+1)\, dx + \int_e^1 \ln(x^2+1)\, dx = \int_1^1 \ln(x^2+1)\, dx = 0$$

3 –
$$\int_1^{\pi/6} \cos 2x\, dx - \int_1^{7\pi/6} \cos 2x\, dx = \int_1^{\pi/6} \cos 2x\, dx - \left[\int_1^{\pi/6} \cos 2x\, dx + \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \cos 2x\, dx\right]$$
$$= -\int_{\pi/6}^{7\pi/6} \cos 2x\, dx$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\pi/6}^{7\pi/6}$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\sin 7\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right]$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right]$$
$$= 0$$

<u>**التمرين – 20**</u>

f و g دالتان مستمرتان على المجال [5 ; 10] حيث $\left.\begin{array}{l}\int_5^{10} f(x)\, dx = 4\\ \int_5^{10} g(x)\, dx = -5\end{array}\right\}$

أحسب التكاملات التالية :

1 – $\int_5^{10} (f+g)(x)\, dx$

2 – $\int_5^{10} \frac{5}{2} f(x)\, dx$

3 – $\int_5^{10} (f-g)(x)\, dx$

4 – $\int_5^{10} (2f+3g)(x)\, dx$

5 – $\int_5^{10} \left(-f + \frac{2}{3}g\right)(x)\, dx$

6 – $\int_5^{10} (2f-g)(x)\, dx$

<u>**الحل – 20**</u>

1 –
$$\int_5^{10} (f+g)(x)\, dx = \int_5^{10} f(x)\, dx + \int_5^{10} g(x)\, dx = 4 - 5 = -1$$

2 –
$$\int_5^{10} \frac{5}{2} f(x)\, dx = \frac{5}{2}\int_5^{10} f(x)\, dx = \frac{5}{2}(4) = 10$$

3 –
$$\int_5^{10} (f-g)(x)\, dx = \int_5^{10} f(x)\, dx - \int_5^{10} g(x)\, dx = 4 - (-5) = 9$$

4 –
$$\int_5^{10} (2f+3g)(x)\, dx = 2\int_5^{10} f(x)\, dx + 3\int_5^{10} g(x)\, dx = 2(4) + 3(-5) = -7$$

5 –
$$\int_5^{10} \left(-f + \frac{2}{3}g\right)(x)\, dx = -\int_5^{10} f(x)\, dx + \frac{2}{3}\int_5^{10} g(x)\, dx = -4 + \frac{2}{3}(-5) = \frac{-22}{3}$$

6 –
$$\int_5^{10} (2f-g)(x)\, dx = 2\int_5^{10} f(x)\, dx - \int_5^{10} g(x)\, dx = 2(4) - (-5) = 13$$

التمرين ــ 21

أحسب التكامل I حيث $I=\int_{-1}^{1}|x|+|x+1|\,dx$

الحـل ــ 21

$$|x|=\begin{cases} x : x\geq 0\\ -x : x\leq 0\end{cases} \qquad |x+1|=\begin{cases} x+1 : x\geq -1\\ -x-1 : x\leq -1\end{cases}$$

إذن :
$$\int_{-1}^{1}|x|+|x+1|\,dx=\int_{-1}^{0}|x|+|x+1|\,dx+\int_{0}^{1}|x|+|x+1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}-x+x+1\,dx+\int_{0}^{1}x+x+1\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}1\,dx+\int_{0}^{1}2x+1\,dx$$
$$=[x]_{-1}^{0}+[x^2+x]_{0}^{1}$$
$$=0-(-1)+1+1-0$$
$$=3$$

نتيجة : $I=3$

التمرين ــ 22

أحسب $\int_{\pi/3}^{3\pi/2}|\sin t|\,dt$

الحـل ــ 22

$$|\sin t|=\begin{cases} \sin t : 0\leq t\leq \pi\\ -\sin t : \pi\leq t\leq 3\pi/2\end{cases}$$

إذن :
$$\int_{\pi/3}^{3\pi/2}|\sin t|\,dt=\int_{\pi/3}^{\pi}|\sin t|\,dt+\int_{\pi}^{3\pi/2}|\sin t|\,dt$$
$$=\int_{\pi/3}^{\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{3\pi/2}-\sin t\,dt$$
$$=[-\cos t]_{\pi/3}^{\pi}+[\cos t]_{\pi}^{3\pi/2}$$
$$=-(-1)+\frac{1}{2}+0-(-1)$$
$$=5/2$$

التمرين ــ 23

f دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بــ $f(x)=\begin{cases} x : 0\leq x\leq 1\\ 1/x : x>1\end{cases}$

أحسب التكاملات التالية :

1 ــ $I=\int_{0}^{3}f(x)\,dx$ 2 ــ $J=\int_{2}^{1/2}f(x)\,dx$

الحـل ــ 23

1 ــ
$$I=\int_{0}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{3}\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\left[\ln x\right]_{1}^{3}$$
$$=\frac{1}{2}-0+\ln 3-\ln 1$$
$$=\frac{1}{2}+\ln 3$$

2 ـ
$$J = \int_2^{1/2} f(x)\,dx$$
$$= \int_2^1 f(x)\,dx + \int_1^{1/2} f(x)\,dx$$
$$= \int_2^1 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{1/2} x\,dx$$
$$= \left[\ln x\right]_2^1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{1/2}$$
$$= \ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}$$
$$= -\ln 2 - \frac{3}{8}$$

التمرين ــ 24

قارن دون حساب بين التكاملين I و J في الحالات التالية :

1 ـ $I = \int_0^1 t\,e^t\,dt$ و $J = \int_0^1 t^2 e^t\,dt$

2 ـ $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ و $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

3 ـ $I = \int_1^2 u \sin u\,du$ و $J = \int_1^2 u^2 \sin u\,du$

الحل ــ 24

1 ــ لندرس إشارة الفرق $t^2 e^t - t e^t$ على المجال $[0 ; 1]$ كمايلي :

$t^2 e^t - t e^t = t e^t (t-1)$ إذن : $t^2 e^t - t e^t \le 0$ لأن $t e^t \ge 0$ و $t - 1 \le 0$

أي : $t^2 e^t \le t e^t$

منه : $\int_0^1 t^2 e^t\,dt \le \int_0^1 t e^t\,dt$

أي : $J \le I$

2 ــ ندرس إشارة الفرق $\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ على المجال $[0 ; 1]$ كما يلي :

$\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2}$ إذن : $\frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ لأن $x - 1 \le 0$

منه : $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

أي : $J \le I$

3 ــ ندرس إشارة الفرق $u^2 \sin u - u \sin u$ على المجال $[1 ; 2]$ كمايلي :

$u^2 \sin u - u \sin u = u \sin u (u-1)$ إذن : $u^2 \sin u \ge u \sin u$ لأن $u - 1 \ge 0$

منه : $\int_1^2 u^2 \sin u\,du \ge \int_1^2 u \sin u\,du$

أي : $J \ge I$

التمرين ــ 25

دون حساب التكاملات التالية عين إشارتها :

1 ـ $\int_2^3 \sqrt{x-1}\,dx$ 4 ـ $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{t-2}\,dt$

2 ـ $\int_{-3}^{-2} \sqrt{2-x}\,dx$ 5 ـ $\int_0^2 -e^{-u+1}\,du$

3 ـ $\int_0^3 t^2 + t + 1\,dt$ 6 ـ $\int_{-1/2}^{1} \ln(u+1)\,du$

الحل – 25

1 – لتكن $f : x \longmapsto \sqrt{x-1}$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f موجبة فإن F متزايدة أي $F(3) > F(2)$ منه : $F(3) - F(2) > 0$

أي : $\int_2^3 \sqrt{x-1}\, dx > 0$

2 – لتكن $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f موجبة فإن F متزايدة إذن : $F(-2) > F(-3)$ منه : $F(-2) - F(-3) > 0$

أي : $\int_{-3}^{-2} \sqrt{2-x}\, dx > 0$

3 – لتكن $f : t \longmapsto t^2 + t + 1$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f موجبة فإن F متزايدة إذن : $F(3) > F(0)$ منه : $F(3) - F(0) > 0$

أي : $\int_0^3 t^2 + t + 1\, dt > 0$

4 – لتكن $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t-2}$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f سالبة على المجال $[-4 ; -1]$ لأن $t - 2 < 0$ فإن F متناقصة على المجال $[-4 ; -1]$

أي $F(-1) < F(-4)$ منه $F(-1) - F(-4) < 0$

أي : $\int_{-4}^{-1} \dfrac{1}{t-2}\, dt < 0$

5 – لتكن $f : u \longmapsto -e^{-u+1}$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن f سالبة على IR فإن الدالة F متناقصة تماما على IR إذن : $F(2) < F(0)$

أي $F(2) - F(0) < 0$ منه $\int_0^2 -e^{-u+1}\, du < 0$

6 – لتكن $f : u \longmapsto \ln(u+1)$ و F دالة أصلية لها إذن : $F' = f$

بما أن $-1/2 \le u \le 1$ فإن $1/2 \le u + 1 \le 2$ إذن : $\ln(u+1)$ يغير إشارته من أجل $u \in [-1/2 ; 1]$ و عليه فإن

الدالة f تغير إشارتها على المجال $[-1/2 ; 1]$

إذن: F ليست رتيبة على المجال $[-1/2 ; 1]$

نتيجة : لا يمكن إستنتاج إشارة التكامل $\int_{-1/2}^{1} \ln(u+1)\, du$ دون حسابه كمايلي :

$$\int_{-1/2}^{1} \ln(u+1)\, du = [(u+1)\ln(u+1) - u]_{-1/2}^{1}$$

$$= (2\ln 2 - 1) - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2} > 0$$

التمرين – 26

بين أن من أجل كل x من المجال $[-\pi/4 ; 0]$: $1 \le \dfrac{1}{\cos x} \le \sqrt{2}$ ثم إستنتج أن :

$$\frac{\pi}{4} \le \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \le \pi\frac{\sqrt{2}}{4}$$

الحل – 26

$-\dfrac{\pi}{4} \le x \le 0$ إذن : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x \le 1$ حسب الدائرة المثلثية .

منه : $\dfrac{1}{1} \le \dfrac{1}{\cos x} \le \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

أي : $1 \le \dfrac{1}{\cos x} \le \sqrt{2}$ و هو المطلوب .

نتيجة : $\sqrt{2} \geq \frac{1}{\cos x} \geq 1$ على المجال $[-\pi/4 ; 0]$ إذن : حسب خواص التكامل فإن :

$$\int_{-\pi/4}^{0} 1\, dx \leq \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \leq \int_{-\pi/4}^{0} \sqrt{2}\, dx$$

أي : $$\left[x\right]_{-\pi/4}^{0} \leq \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \leq \left[x\sqrt{2}\right]_{-\pi/4}^{0}$$

أي : $$0-\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \leq 0-\left(-\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\right)$$

أي : $$\frac{\pi}{4} \leq \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x}\, dx \leq \pi\frac{\sqrt{2}}{4}$$ و هو المطلوب .

التمرين – 27

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في الحالات التالية :

1 – $f(x) = 2x+3$ و $I = [-1 ; 1]$

2 – $f(x) = |x|$ و $I = [-2 ; 2]$

الحـل – 27 :

لتكن m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في كل حالة .

1 – $$m = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} 2x+3\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2+3x\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{2}\left[1+3-(1-3)\right]$$
$$= 3$$

2 – $$m = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} |x|\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0}|x|\, dx + \int_{0}^{2}|x|\, dx\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0}-x\, dx + \int_{0}^{2}x\, dx\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(0-\left(-\frac{4}{2}\right)+\frac{4}{2}-0\right)$$
$$= 1$$

التمرين – 28

بين صحة مايلي :

1 – $\int_{1/2}^{1} \ln x\, dx \geq \frac{-\ln 2}{2}$

2 – $\int_{1}^{2} \frac{1}{1+x^3}\, dx \leq \frac{1}{2}$

3 – $-\frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1)\, dx \leq \frac{\pi}{2}$

الحـل – 28

1 – $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ إذن : $\ln\frac{1}{2} \leq \ln x \leq \ln 1$ أي $-\ln 2 \leq \ln x \leq 0$

منه : $\int_{1/2}^{1} \ln x\, dx \geq \int_{1/2}^{1} -\ln 2\, dx$ خواص الحصر .

أي : $\int_{1/2}^{1} \ln x \, dx \geq [-x \ln 2]_{1/2}^{1}$

أي : $\int_{1/2}^{1} \ln x \, dx \geq -\ln 2 - \left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)$

أي : $\int_{1/2}^{1} \ln x \, dx \geq \frac{-\ln 2}{2}$

2 ـ $1 \leq x \leq 2$ إذن : $1 \leq x^3 \leq 8$ منه : $2 \leq 1 + x^3 \leq 9$

منه : $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{2}$

إذن : $\int_{1}^{2} \frac{1}{1+x^3} dx \leq \int_{1}^{2} \frac{1}{2} dx$ حسب خواص التكامل

أي : $\int_{1}^{2} \frac{1}{1+x^3} dx \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_{1}^{2}$

أي : $\int_{1}^{2} \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{2}{2} - \frac{1}{2}$ أي : $\int_{1}^{2} \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{2}$

3 ـ من أجل كل عدد حقيقي x فإن $-1 \leq \sin(x^2+1) \leq 1$

إذن : $\int_{\pi/2}^{\pi} -1 \, dx \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1) \, dx \leq \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \, dx$

أي : $[-x]_{\pi/2}^{\pi} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1) \, dx \leq [x]_{\pi/2}^{\pi}$

أي : $-\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1) \, dx \leq \pi - \frac{\pi}{2}$

أي : $-\frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1) \, dx \leq \frac{\pi}{2}$

التمرين ـ 29

1 ـ بين أن من أجل كل x من المجال [0 ; 1] : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x+1} \leq x^2$

2 ـ إستنتج حصرا للتكامل $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{x+1} dx$

الحل ـ 29

1 ـ $0 \leq x \leq 1$ إذن : $1 \leq x+1 \leq 2$

منه : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

منه : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x+1} \leq x^2$ لأن $x^2 \geq 0$

2 ـ بما أن $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x+1} \leq x^2$ على المجال [0 ; 1] فإن من خواص التكامل :

$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{2} dx \leq \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x+1} dx \leq \int_{0}^{1} x^2 dx$$

أي : $\left[\frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{1} \leq \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x+1} dx \leq \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}$

أي : $\frac{1}{6} \leq \int_{0}^{1} \frac{x^2}{x+1} dx \leq \frac{1}{3}$

التمرين ـ 30

أثبت مايلي :

1 ـ $\int_{1}^{4} \cos(x^2) \, dx \leq 3$

2 ـ $\int_0^1 x^2 \cos x \, dx \leq \frac{1}{3}$

الحل ـ 30

1 ـ من أجل كل x من IR : $\cos(x^2) \leq 1$

إذن : $\int_1^4 \cos(x^2)\, dx \leq \int_1^4 1\, dx$

أيْ : $\int_1^4 \cos(x^2)\, dx \leq [x]_1^4$

أي : $\int_1^4 \cos(x^2)\, dx \leq 3$

2 ـ من أجل كل x من IR : $\cos x \leq 1$

إذن : $x^2 \cos x \leq x^2$ لأن $x^2 \geq 0$

منه : $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \leq \int_0^1 x^2\, dx$

أي : $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \leq \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

أي : $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \leq \frac{1}{3}$

التمرين ـ 31

1 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب t : $1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$

2 ـ إستنتج أن : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

الحل ـ 31

1 ـ ليكن $t \geq 0$ إذن : $t + 1 \geq 1$ منه $\frac{1}{t+1} \leq 1$ .... (1)

من جهة أخرى : $\frac{1}{t+1} - (1-t) = \frac{1-(1-t^2)}{t+1} = \frac{t^2}{t+1}$

بما أن $t + 1 > 0$ و $t^2 \geq 0$ فإن $\frac{t^2}{t+1} \geq 0$ أي : $\frac{1}{t+1} \geq 1 - t$ .... (2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن : من أجل $t \geq 0$: $1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن من أجل كل $t \geq 0$ فإن $1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$

إذن : $\int_0^b 1 - t\, dt \leq \int_0^b \frac{1}{t+1}\, dt \leq \int_0^b 1\, dt$ حيث $b \geq 0$

أي : $[t - \frac{1}{2}t^2]_0^b \leq [\ln|t+1|]_0^b \leq [t]_0^b$

أي : $b - \frac{1}{2}b^2 - 0 \leq \ln|b+1| - \ln|1| \leq b - 0$

أي : $b - \frac{1}{2}b^2 \leq \ln(b+1) \leq b$....... (3) لأن $b \geq 0$ إذن $b + 1 > 0$

من أجل $b = x$ حيث $x \geq 0$ فإن العلاقة (3) تصبح : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(x+1) \leq x$

التمرين ـ 32

في كل حالة من الحالات التالية ادرس تغيرات الدالة f على المجال [0 ;1] ثم إستنتج حصرا للتكامل : $\int_0^1 f(x)\, dx$

1 ـ $f(x) = e^x - 1$

2 ـ $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

3 ـ $f(x) = \ln(x+2) - 3$

الحل ـ 32

1 ـ $f(x) = e^x - 1$

التغيرات على $[0 ; 1]$: $f(0) = 0$ ؛ $f(1) = e - 1$

$f'(x) = e^x$ إذن : f متزايدة تماما .

جدول التغيرات :

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e - 1$

حسب جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; 1]$ فإن : $0 \le f(x) \le e - 1$

إذن : $0 \le \int_0^1 f(x)\, dx \le \int_0^1 e - 1 d x$ أي : $0 \le \int_0^1 f(x)\, dx \le [(e-1)\, x]_0^1$

أي : $0 \le \int_0^1 f(x)\, dx \le e - 1$

2 ـ $f(x) = \dfrac{-1}{x+1}$

التغيرات على $[0 ; 1]$: $f(0) = -1$ ؛ $f(1) = -\dfrac{1}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ إذن : f متزايدة تماما .

جدول التغيرات :

x	0		1
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$-1/2$

من جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; 1]$ فإن : $-1 \le f(x) \le -\dfrac{1}{2}$

إذن : $\int_0^1 -1\, d x \le \int_0^1 f(x)\, d x \le \int_0^1 -\dfrac{1}{2}\, d x$ أي $\left[-x\right]_0^1 \le \int_0^1 f(x)\, d x \le \left[-\dfrac{1}{2}x\right]_0^1$

أي : $-1 \le \int_0^1 f(x)\, d x \le -\dfrac{1}{2}$

3 ـ $f(x) = \ln(x+2) - 3$

التغيرات على $[0 ; 1]$: $f(0) = \ln(2) - 3$ ؛ $f(1) = \ln(3) - 3$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+2} > 0$ إذن : f متزايدة على $[0 ; 1]$

جدول التغيرات :

x	0		1
$f(x)$	$\ln(2) - 3$	$\nearrow$	$\ln(3) - 3$

حسب جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; 1]$: $\ln(2) - 3 \le f(x) \le \ln(3) - 3$

منه : $\int_0^1 \ln(2) - 3\, d x \le \int_0^1 f(x)\, d x \le \int_0^1 \ln(3) - 3\, d x$

أي : $[(\ln 2 - 3)x]_0^1 \le \int_0^1 f(x)\, d x \le [(\ln(3) - 3)\, x]_0^1$

أي : $\ln(2) - 3 \le \int_0^1 f(x)\, d x \le \ln(3) - 3$

التمرين – 33

بين صحة كل حصر مما يلي :

1 – $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} d x \leq 1$

2 – $\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} d x \leq 9$

3 – $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} d x \leq 3$

4 – $\frac{2}{e^4} \leq \int_0^2 e^{-x^2} d x \leq 2$

5 – $2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2-1) d x \leq 2 \ln 3 + 2 \ln 5$

الحـل – 33

1 – $0 \leq x \leq 1$ إذن : $0 \leq x^3 \leq 1$

منه : $1 \leq 1+x^3 \leq 2$

أي : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1$

منه : $\int_0^1 \frac{1}{2} d x \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} d x \leq \int_0^1 1 d x$

أي : $\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} d x \leq [x]_0^1$

أي : $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} d x \leq 1$

2 – $0 \leq x \leq 9$ إذن : $0 \leq \sqrt{x} \leq 3$

منه : $1 \leq 1+\sqrt{x} \leq 4$

أي : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1$

منه : $\int_0^9 \frac{1}{4} d x \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} d x \leq \int_0^9 1 d x$

أي : $\left[\frac{1}{4}x\right]_0^9 \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} d x \leq [x]_0^9$

أي : $\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} d x \leq 9$

3 – $1 \leq x \leq 2$ إذن : $1 \leq x^3 \leq 8$

منه : $2 \leq 1+x^3 \leq 9$

منه : $\sqrt{2} \leq \sqrt{1+x^3} \leq 3$

منه : $\int_1^2 \sqrt{2} d x \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} d x \leq \int_1^2 3 d x$

أي : $\left[x\sqrt{2}\right]_1^2 \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} d x \leq [3x]_1^2$

أي: $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} d x \leq 3$

4 – $0 \leq x \leq 2$ إذن : $0 \leq x^2 \leq 4$

منه : $-4 \leq -x^2 \leq 0$

منه : $e^{-4} \leq e^{-x^2} \leq e^0$

أي : $\frac{1}{e^4} \leq e^{-x^2} \leq 1$

منه : $\int_0^2 \frac{1}{e^4}\, d x \le \int_0^2 e^{-x^2} d x \le \int_0^2 1\, d x$

أي : : $\left[\frac{1}{e^4} x\right]_0^2 \le \int_0^2 e^{-x^2} d x \le [x]_0^2$

أي : $\frac{2}{e^4} \le \int_0^2 e^{-x^2} d x \le 2$

5 – $2 \le x \le 4$ إذن : $4 \le x^2 \le 16$

منه : $3 \le x^2 - 1 \le 15$

منه : $\ln 3 \le \ln(x^2 - 1) \le \ln 15$

إذن : $\int_2^4 \ln 3\, d x \le \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, d x \le \int_2^4 \ln 15\, d x$

أي : $[x \ln 3]_2^4 \le \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, d x \le [x \ln 15]_2^4$

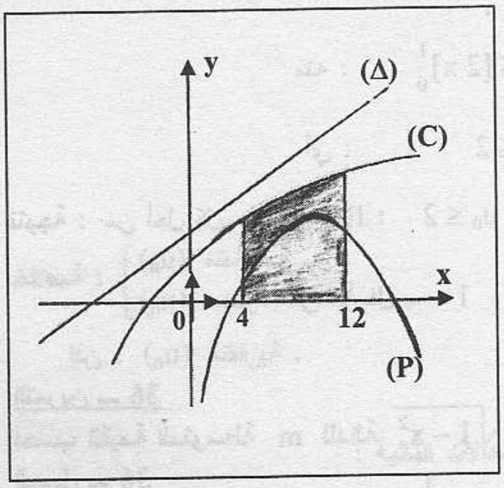
أي : $4 \ln 3 - 2 \ln 3 \le \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, d x \le 4 \ln 15 - 2 \ln 15$

أي : $2 \ln 3 \le \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, d x \le 2 \ln 15$

أي: $2 \ln 3 \le \int_2^4 \ln(x^2 - 1)\, d x \le 2 \ln 3 + 2 \ln 5$

التمرين – 34

إليك الشكل التالي :



(C) هو منحنى دالة f مستمرة على $[0 ; +\infty[$

(P) هو القطع المكافئ ذو المعادلة $y = \frac{-1}{10} x^2 + 2 x - 5$

(Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2} x + 2$

لتكن A مساحة مجموعة النقط $A(x ; y)$

حيث $4 \le x \le 12$ و $0 \le y \le f(x)$

1 – باستعمال الشكل أثبت أن : $\frac{-1}{10} x^2 + 2 x - 5 \le f(x) \le \frac{1}{2} x + 2$

2 – إستنتج حصرا للمساحة A

الحل – 34

1 – حسب الشكل لدينا (C) يقع فوق (P) إذن : $f(x) \ge \frac{-1}{10} x^2 + 2 x - 5$

و (C) يقع تحت (Δ) إذن : $f(x) \le \frac{1}{2} x + 2$

نتيجة : $\frac{-1}{10} x^2 + 2 x - 5 \le f(x) \le \frac{1}{2} x + 2$

2 – حسب السؤال (1) : $\frac{-1}{10} x^2 + 2 x - 5 \le f(x) \le \frac{1}{2} x + 2$

إذن : $\int_4^{12} \frac{-1}{10} x^2 + 2 x - 5\, d x \le \int_4^{12} f(x)\, d x \le \int_4^{12} \frac{1}{2} x + 2\, d x$

أي : $\left[\frac{-1}{30} x^3 + x^2 - 5 x\right]_4^{12} \le \int_4^{12} f(x)\, d x \le \left[\frac{1}{4} x^2 + 2 x\right]_4^{12}$

أي : $\frac{-144 \times 2}{5} + 144 - 60 - \left(\frac{-32}{15} + 16 - 20\right) \le \int_4^{12} f(x)\, d x \le 36 + 24 - (4 + 8)$

أي : $32,54 \leq \int_4^{12} f(x)\,dx \leq 48$

نتيجة : $32,54 \leq A \leq 48$ لأن $A = \int_4^{12} f(x)\,dx$

التمرين ــ 35

(u_n) متتالية معرفة على IN بـ $u_n = \int_0^1 (1 + x^n)\,dx$

1 ــ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

2 ــ هل (u_n) متقاربة ؟

الحـل ــ 35

1 ــ من أجل كل n من IN : $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 1 + x^{n+1}\,dx - \int_0^1 1 + x^n\,dx$

$$= \int_0^1 x^{n+1}\,dx - \int_0^1 x^n\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$= \dfrac{-1}{(n+2)(n+1)}$ سالب لأن $(n+2)(n+1) > 0$

بما أن $u_{n+1} - u_n < 0$ فإن (u_n) متتالية متناقصة

2 ــ لدينا : $0 \leq x \leq 1$ إذن : $0 \leq x^n \leq 1$

منه : $1 \leq 1 + x^n \leq 2$

منه : $\int_0^1 1\,dx \leq \int_0^1 1 + x^n\,dx \leq \int_0^1 2\,dx$

منه : $[x]_0^1 \leq \int_0^1 1 + x^n\,dx \leq [2x]_0^1$

أي : $1 \leq \int_0^1 1 + x^n\,dx \leq 2$

نتيجة : من أجل كل n من IN : $1 \leq u_n \leq 2$

خلاصة : (u_n) متناقصة .
(u_n) محدودة من الأسفل بـــ 1

إذن : (u_n) متقاربة .

التمرين ــ 36

احسب القيمة المتوسطة m للدالة $f : x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$ على المجال $[-1 ; 1]$

الحـل ــ 36

$$m = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

لاحظ أن العدد I حيث $I = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ هو نصف مساحة الدائرة ذات المركز $O(0 ; 0)$ و نصف القطر 1 و

التي معادلتها $x^2 + y^2 = 1$ أي $y = \sqrt{1-x^2}$ أي $y = f(x)$

إذن : $I = \frac{1}{2}(\pi)$

منه : $m = \frac{1}{2} I$ أي : $m = \frac{\pi}{4}$

التمرين ــ 37

في كل حالة من الحالات التالية m هي القيمة المتوسطة لدالة f مستمرة على المجال I . فالمطلوب حساب التكامل المطلوب

1 ــ $m = 2$ ؛ $I = [1 ; 4]$ أحسب $\int_1^4 f(x)\,dx$

1 ـ $m = \ln 2$ ؛ $I = [1 ; 3]$ أحسب $\int_1^3 f(x)\,dx$

3 ـ $m = 2/\pi$ ؛ $I = [-\pi/4 ; \pi/4]$ أحسب $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$ علما أن f دالة زوجية .

الحـل ـ 37

1 ـ $m = \frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,dx$ أي : $2 = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx$

منه : $\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{2}{1/3}$

أي : $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$

2 ـ $m = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx$ إذن : $\ln 2 = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx$

منه : $\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{\ln 2}{1/2}$

أي : $\int_1^3 f(x)\,dx = 2\ln 2$

3 ـ $m = \dfrac{1}{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx$ إذن : $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx$

منه : $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = \frac{2/\pi}{2/\pi}$

أي : $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = 1$ ....(1)

لكن $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = \int_{-\pi/4}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$

و بما أن الدالة f زوجية فإن $\int_{-\pi/4}^{0} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$

إذن : $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$

منه : العلاقة (1) تصبح : $2\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = 1$

أي : $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = 1/2$

التمرين ـ 38

عين حصرا للقيمة المتوسطة m للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـ $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ ، $I = [0 ; 1]$

2 ـ $f(x) = \ln x$ ، $I = [1 ; e]$

3 ـ $f(x) = e^{x^2}$ ، $I = \left[1 ; \sqrt{2}\right]$

الحـل ـ 38

1 ـ $0 \le x \le 1$ إذن : $0 \le x^2 \le 1$

منه : $1 \le x^2 + 1 \le 2$

إذن : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{x^2+1} \le 1$

أي : $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$

منه : $\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 1\,dx$

أي : $\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq [x]_0^1$

أي: $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$

لكن $m = \int_0^1 f(x)\,dx$ إذن : $1/2 \leq m \leq 1$ و هو المطلوب . (لأن $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx$ $(m =$

2 – $1 \leq x \leq e$ إذن : $\ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$

أي : $0 \leq f(x) \leq 1$

منه : $0 \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq \int_1^e 1\,dx$

منه : $0 \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq [x]_1^e$

أي : $0 \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq e-1$

منه : $0 \leq \frac{1}{e-1}\int_1^e f(x)\,dx \leq \frac{e-1}{e-1}$

أي : $0 \leq m \leq 1$

3 – $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ إذن : $1 \leq x^2 \leq 2$

منه : $e \leq e^{x^2} \leq e^2$

أي : $e \leq f(x) \leq e^2$

منه : $\int_1^{\sqrt{2}} e\,dx \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \leq \int_1^{\sqrt{2}} e^2\,dx$

أي : $[x\,e]_1^{\sqrt{2}} \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \leq [x\,e^2]_1^{\sqrt{2}}$

أي : $(\sqrt{2}-1)\,e \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \leq (\sqrt{2}-1)\,e^2$

منه : $\frac{(\sqrt{2}-1)\,e}{\sqrt{2}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \leq \frac{(\sqrt{2}-1)e^2}{\sqrt{2}-1}$

أي : $e \leq m \leq e^2$

التمرين – 39

f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و (u_n) متتالية معرفة على IN بـ $u_n = \int_0^n f(x)\,dx$

1 – بين أن (u_n) متزايدة

2 – بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{n-1}{2}$

3 – هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

الحل – 39

1 – من أجل كل n من IN : $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(x)\,dx - \int_0^n f(x)\,dx$

$= \int_0^n f(x)\,dx + \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_0^n f(x)\,dx$

$= \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

لتكن F دالة أصلية لـ f على $[0 ; +\infty[$ إذن : $u_{n+1} - u_n = F(n+1) - F(n)$

لكن $f(x) > 0$ على المجال $[0 ; +\infty[$ إذن : F متزايدة تماما على $[0 ; +\infty[$ لأن $F'(x) = f(x)$

منه : $F(n+1) > F(n)$ أي $F(n+1) - F(n) > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$

نتيجة : (u_n) متزايدة تماما .

2 ــ من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\int_1^n \frac{x}{x+1} \, dx \geq \int_1^n \frac{1}{2} \, dx$

أي : $\int_1^n f(x)\, dx \geq \left[\frac{1}{2}x \right]_1^n$

أي : $\int_1^n f(x)\, dx \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$

أي : $\int_1^n f(x)\, dx \geq \frac{n-1}{2}$

لكن من أجل $n \in IN^*$: $u_n = \int_0^n f(x)\, dx$

$= \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^n f(x)\, dx$

بما أن $\int_0^1 f(x)\, dx > 0$ لأن F متزايدة تماما فإن : $\int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^n f(x)\, dx > \frac{n-1}{2}$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN^*$: $u_n > \frac{n-1}{2}$

3 ــ لدينا : $u_n > \frac{n-1}{2}$

و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{2} = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ أي المتتالية (u_n) ليست متقاربة .

ملاحظة : (u_n) متزايدة تماما إذن $u_1 > u_0$ أي $\int_0^1 f(x)\, dx > 0$ حيث $\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \int_0^1 f(x)\, dx \\ u_0 = \int_0^0 f(x)\, dx = 0 \end{array} \right.$

التمرين ــ 39

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$

1 ــ بين أن : $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n}$ ،

2 ــ هل المتتالية (u_n) متقاربة .

الحــل ــ 39

1 ــ من أجل كل $n \in IN^*$: إذا كان $n \le x \le n+1$ فإن $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$

منه : $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\, dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dx$

أي : $\left[\frac{1}{n+1} x\right]_n^{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le \left[\frac{1}{n} x\right]_n^{n+1}$

أي : $\frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} \le u_n \le \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n}$

أي : $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n}$ و هو المطلوب .

2 ــ $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n}$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ أي (u_n) متقاربة نحو 0

التمرين ــ 40

f دالة معرفة على المجال $[2 ; 5]$ بــ $f(x) = x - 3$

أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيمين اللذان معادلاتهما $x = 2$ و $x = 5$

الحــل ــ 40

لندرس وضعية منحنى الدالة f بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $[2 ; 5]$

x	2		3		5
$x - 3$		-	0	+	

نتيجة : لما $x \in [2 ; 3[$: المنحنى تحت محور الفواصل (f سالبة)

لما $x \in]3 ; 5]$: المنحنى فوق محور الفواصل (f موجبة)

منه : المساحة S للحيز المحدود بالمنحنى الممثل للدالة f و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 2$ و $x = 5$ هي :

$$S = \int_2^3 - f(x)\, dx + \int_3^5 f(x)\, dx$$

$$= \int_2^3 3 - x\, dx + \int_3^5 x - 3\, dx$$

$$= \left[3x - \frac{1}{2}x^2\right]_2^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_3^5$$

$$= \left[9 - \frac{9}{2} - (6 - 2)\right] + \left[\frac{25}{2} - 15 - \left(\frac{9}{2} - 9\right)\right]$$

$$= 5 - \frac{9}{2} + \frac{25}{2} - \frac{9}{2} - 6$$

$$= \frac{25}{2} - 10$$

$$= 5/2$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة .

التمرين ــ 41

f دالة معرفة على $[-2 ; 2]$ بــ $f(x) = \begin{cases} -x : x \in [-2 ; 2] \\ 2x - 6 : x \in [2 ; 3] \end{cases}$

أحسب $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx$

الحــل ــ 41

بما أن f مستمرة على $[-2\,;3]$ فإن : $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$

$$= \int_{-2}^{2} -x\,dx + \int_{2}^{3} 2x - 6\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2} + \left[x^2 - 6x\right]_{2}^{3}$$

$$= [-2 - (-2)] + [9 - 18 - (4 - 12)]$$

$$= -1$$

التمرين ــ 42

f دالة معرفة على المجال $[-1\,;5]$ بـ $f(x) = \begin{cases} x+1 : -1 \le x \le 0 \\ -x+1 : \ 0 < x \le 3 \\ x-5 \ : \ 3 < x \le 5 \end{cases}$

أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلاتهما $x = -1$ و $x = 5$

الحــل ــ 42

f مستمرة على المجال $[-1\,;5]$ إذن : يكفي تحديد وضعية منحنى الدالة f بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $[-1\,;5]$ كمايلي :

x	$-\infty$	-1		0		1		3		5	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$						
$-x+1$	$+$				$+$	0	$-$		$-$		
$x-5$					$-$				$-$	0	$+$

نتيجة : لما $-1 \le x \le 0$ فإن $f(x) \ge 0$ أي المنحنى فوق محور الفواصل

لما $0 \le x \le 1$ فإن $f(x) \ge 0$ أي المنحنى فوق محور الفواصل

لما $1 \le x \le 3$ فإن $f(x) \le 0$ أي المنحنى تحت محور الفواصل

لما $3 \le x \le 5$ فإن $f(x) \le 0$ أي المنحنى تحت محور الفواصل

إذن : المساحة S للحيز المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$ و $x = 5$ هي كمايلي :

$$S = \int_{-1}^{0} x+1\,dx + \int_{0}^{1} -x+1\,dx + \int_{1}^{3} -(-x+1)\,dx + \int_{3}^{5} -(x-5)\,dx$$

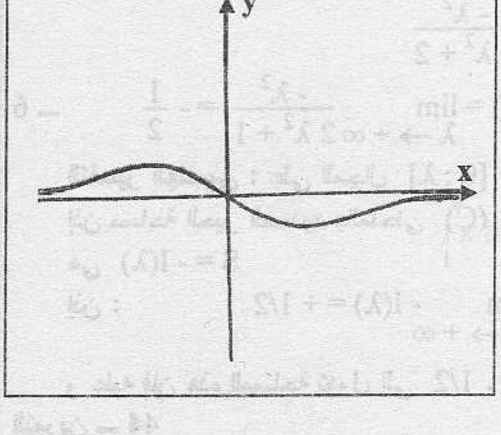
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1}^{3} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_{3}^{5}$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{-1}{2} + 1 - 0 + \frac{9}{2} - 3 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{25}{2} + 25 - \left(\frac{-9}{2} + 15\right)$$

$$= 5$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة .

التمرين ــ 43



إليك المنحنى (C) ذو المعادلة $y = \dfrac{-x}{(x^2+1)^2}$ في معلم متعامد

1 ــ عين المساحة A_1 لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم (D) ذو المعادلة $x = 1$

2 ــ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند المبدأ .

3 ــ احسب المساحة A_2 لمثلث المحدد بـ (T) و محور الفواصل و المستقيم (D) و محور التراتيب .

4 ــ استنتج المساحة A لحيز المستوي المحدد بـ المنحنى (C) و المماس (T) و المستقيم (D) و محور التراتيب .

5 ــ احسب $I(\lambda) = \int_{0}^{\lambda} \dfrac{-x}{(x^2+1)^2}\,dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما

6 ــ احسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

الحـل ـ 43

1 ـ حسب الشكل فإن المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل على المجال [0 ; 1] إذن :

$$A_1 = \int_0^1 -\left[\frac{-x}{(x^2+1)^2}\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+1)^{-2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}+1\right]$$
$$= 1/4$$ مقدر بوحدة قياس المساحة .

2 ـ نضع $f(x) = \dfrac{-x}{(x^2+1)^2}$ إذن : معادلة المماس (T) تكتب من الشكل : $y = f'(0)x + f(0)$

حيث : $f'(x) = \dfrac{-(x^2+1)^2 + 2x(2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

إذن : $f'(0) = -1$ و $f(0) = 0$

إذن : (T) له المعادلة $y = -x$

3 ـ على المجال [0 ; 1] المستقيم (T) يقع تحت محور الفواصل إذن :

$A_2 = \int_0^1 -(-x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ مقدر بوحدة قياس المساحة .

4 ـ لندرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (T) على المجال [0 ; 1] :

$$f(x) - (-x) = \frac{-x}{(x^2+1)^2} + x = x\left[1 - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right]$$

بما أن $x \geq 0$ و $1 - \dfrac{1}{(x^2+1)^2} \geq 0$ فإن $f(x) - (-x) \geq 0$

إذن : المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (T) على المجال [0 ; 1]

منه : $A = A_2 - A_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ مقدرة بوحدة المساحة

5 ـ
$$\int_0^\lambda \frac{-x}{(x^2+1)} dx = -\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_0^\lambda$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\lambda^2+1}+1\right]$$
$$= \frac{-\lambda^2}{2\lambda^2+2}$$

6 ـ
$$\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{-\lambda^2}{2\lambda^2+1} = -\frac{1}{2}$$

التفسير الهندسي : على المجال [0 ; λ] المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل .

إذن مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم ذو المعادلة $x = \lambda$

هي $S = -I(\lambda)$

إذن : $\lim_{\lambda \to +\infty} S = \lim_{\lambda \to +\infty} -I(\lambda) = +1/2$

و عليه فإن هذه المساحة تؤول إلى 1/2 .

التمرين ـ 44

1 ـ x عدد حقيقي موجب تماما . باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0 ; +\infty[$

الحـل ـ 44

1 ـ نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1/t^2 \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} u'(t) = 1/t \\ v(t) = -1/t \end{array}\right\}$

منه :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} d t = \int_1^x u(t) . v'(t) d t$$
$$= [u(t) . v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t) .v(t) d t$$
$$= \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x - \frac{1}{t^2} d t$$
$$= \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^x + \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x$$
$$= \frac{-\ln x}{x} - \frac{-\ln 1}{1} + \frac{-1}{x} - \frac{-1}{1}$$
$$= 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

2 ـ حسب السؤال (1) : $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} d t = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ من أجل $x > 0$

إذن : الدالة $x \longmapsto 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0 ; +\infty[$

و التي تنعدم من أجل $x = 1$

تحقيق : ليكن $F(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

إذن : $F(1) = 1 - 1 - 0 = 0$

و
$$F'(x) = \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\frac{1}{x}. x - \ln x}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

التمرين ـ 45

باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية :

1 ـ $\int_1^e x \ln x\, d x$ 5 ـ $\int_{-1}^0 x \sqrt{1 - x}\, d x$

2 ـ $\int_2^e \ln(x - 1)\, d x$ 6 ـ $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{2 x - 3}} d x$

3 ـ $\int_0^\pi x \cos x\, d x$ 7 ـ $\int_1^2 (x - 2) e^x d x$

4 ـ $\int_0^1 x e^x d x$ 8 ـ $\int_0^{\pi/3} 3 x \sin 3 x\, d x$

الحـل ـ 45

1 ـ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1/x \\ v(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{array}\right\}$

منه :

$$\int_1^e x \ln x\, d x = \int_1^e v'(x)\, u(x)\, d x$$
$$= [u(x) . v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x) .v(x) d x$$
$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} x^2\right) d x$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x\, d x$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2 + 1}{4}$$

2 ـــ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{x-1} \\ v(x) = x - 1 \end{array}\right\}$

منه :

$$\int_2^e \ln(x-1)\,dx = \int_2^e u(x) \, . \, v'(x)\,dx$$

$$= [u(x) \, . \, v(x)]_2^e - \int_2^e u'(x) \, . v(x)\,dx$$

$$= \left[(x-1)\ln(x-1)\right]_2^e - \int_2^e \frac{x-1}{x-1}\,dx$$

$$= (e-1)\ln(e-1) - 1\ln 1 - \int_2^e 1\,dx$$

$$= (e-1)\ln(e-1) - [x]_2^e$$

$$= (e-1)\ln(e-1) - (e-2)$$

3 ـــ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x \end{array}\right\}$

منه :

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = \int_0^\pi u(x) \, . \, v'(x)\,dx$$

$$= [u(x) \, . \, v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$= \pi\sin\pi - 0 - [-\cos x]_0^\pi$$

$$= -(-\cos\pi + \cos 0)$$

$$= -2$$

4 ـــ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{array}\right\}$

منه :

$$\int_0^1 x e^x\,dx = \int_0^1 u(x) \, . \, v'(x)\,dx$$

$$= [u(x) \, . \, v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= e - 0 - [e^x]_0^1$$

$$= e - (e - 1)$$

$$= 1$$

5 ـــ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-2}{3}(1-x)^{3/2} \end{array}\right\}$

منه :

$$\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_{-1}^0 u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$= [u(x) \, . \, v(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{-2}{3}x(1-x)^{3/2}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \frac{2}{3}(2)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(1-x)^{\frac{3}{2}+1}\right)_{-1}^0$$

$$= \frac{-2}{3}(2\sqrt{2}) - \frac{4}{15}[(1-x)^{5/2}]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{-4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(1-(2)^{5/2})$$
$$= \frac{-4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(1-4\sqrt{2})$$
$$= \frac{-4\sqrt{2}-4}{15}$$

6 ـــ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} \end{array}\right\}$ منه : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{2x-3} \end{array}\right\}$

منه :
$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \left[x\sqrt{2x-3}\right]_2^3 - \int_2^3 \sqrt{2x-3}\,dx$$
$$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{1} - \frac{1}{2}\int_2^3 2(2x-3)^{1/2}\,dx$$
$$= 3\sqrt{3} - 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(2x-3)^{3/2}\right]_2^3$$
$$= 3\sqrt{3} - 2 - \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{5}{3}$$

7 ـــ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x-2 \\ v'(x) = e^x \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{array}\right\}$

منه :
$$\int_1^2 (x-2)\,e^x\,dx = [(x-2)\,e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx$$
$$= 0 - (-e) - [e^x]_1^2$$
$$= e - (e^2 - e)$$
$$= 2e - e^2$$

8 ـــ نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = 3\sin 3x \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos 3x \end{array}\right\}$

منه :
$$\int_0^{\pi/3} 3x\sin 3x\,dx = [-x\cos 3x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} -\cos 3x\,dx$$
$$= -\frac{\pi}{3}\cos\pi - 0 + \left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/3}$$
$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin\pi - 0$$
$$= \pi/3$$

التمرين ـــ 46

1 ـــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

2 ـــ بلستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$

الحـل ـــ 46

1 ـــ من أجل كل x من IR : $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^x}{e^x}\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) = \dfrac{1}{1+e^x}$

2 ـــ التكامل بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{-1}{e^x+1} \end{array}\right\}$

منه :
$$\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(e^x+1)^2}\,dx = \left[\frac{-x}{e^x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{e^x+1}\,dx$$
$$= \frac{-1}{e+1} - 0 - \int_0^1 \frac{-1}{e^x+1}\,dx$$
$$= \frac{-1}{e+1} - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$ لأن حسب السؤال الأول $\frac{-1}{e^x+1} = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$
$$= \frac{-1}{e+1} - [\ln(e^{-x}+1)]_0^1$$
$$= \frac{-1}{e+1} - \left[\ln\left(\frac{1}{e}+1\right) - \ln(1+1)\right]$$
$$= \frac{-1}{e+1} - \ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$$

التمرين ــ 47

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين متتابعتين أحسب $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

الحــل ــ 47

نضع $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

منه : $\int_0^1 x^2 e^x\,dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x\,e^x\,dx$ .... (1)

لنحسب الأن $\int_0^1 2x\,e^x\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\begin{cases} u(x) = 2x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

منه :
$$\int_0^1 2x\,e^x\,dx = [2x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 2\,e^x\,dx$$
$$= 2e - 0 - 2[e^x]_0^1$$
$$= 2e - 2(e-1)$$
$$= 2$$

نعوض الأن $\int_0^1 2x\,e^x\,dx$ بــ 2 في المساواة (1) فنحصل على :
$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2$$
$$= e - 0 - 2$$
$$= e - 2$$

التمرين ــ 48

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\,dx$

الحــل ــ 48

نضع $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$

منه : $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\,dx = [-x^2 \cos x]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} 2x \cos x\,dx$ .... (1)

لنحسب الأن $\int_0^{\pi/4} 2x \cos x\,dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\begin{cases} u(x) = 2x \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \sin x \end{cases}$

منه :
$$\int_0^{\pi/4} 2x \cos x\,dx = [2x \sin x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 2 \sin x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} - 0 + [2\cos x]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} - 2\cos(0)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 2$$
$$= \frac{\pi}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2$$

نعوض الأن $\int_0^{\pi/4} 2\,x \cos x\, d\,x$ بـ $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}-2$ في المساواة (1) فنحصل على :

$$\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\, d\,x = [-\,x^2 \cos x]_0^{\pi/4} + \left(\frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\right)$$
$$= \frac{-\,\pi^2}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 + \frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}-2$$
$$= -\,\frac{\pi^2}{32}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\sqrt{2}+\sqrt{2}-2$$

التمرين ـــ 49

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n = \int_0^{\pi} x^2 \cos(n\,x)\, d\,x$

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب I_n بدلالة n

الحـل ـــ 49

نضع $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos n\,x \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 2\,x \\ v(x) = \frac{1}{n}\sin n\,x \end{array}\right.$ حيث $n \neq 0$

منه :
$$\int_0^{\pi} x^2 \cos n\,x\, d\,x = \left[\frac{x^2}{n}\sin n\,x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2\,x}{n}\sin n\,x\, d\,x$$
$$= \frac{\pi^2}{n}\sin n\,\pi - 0 - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin n\,x\, d\,x$$
$$= -\,\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin n\,x\, d\,x \,..........\, (1)$$

لنحسب الأن $\int_0^{\pi} x \sin n\,x\, d\,x$ باستعمال التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \sin n\,x \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-1}{n}\cos n\,x \end{array}\right.$ ،

منه :
$$\int_0^{\pi} x \sin n\,x\, d\,x = \left[\frac{-\,x}{n}\cos n\,x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-1}{n}\cos n\,x\, d\,x$$
$$= \frac{-\,\pi}{n}\cos n\,\pi - 0 + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos n\,x\, d\,x$$
$$= \frac{-\,\pi}{n}\cos n\,\pi + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin n\,x\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{-\,\pi}{n}\cos n\,\pi + \frac{1}{n^2}(\sin n\,\pi - \sin 0)$$
$$= \frac{-\,\pi}{n}\cos n\,\pi$$

نعوض الأن $\int_0^{\pi} x \sin n\,x\, d\,x$ بـ $\frac{-\,\pi}{n}\cos n\,\pi$ في المساواة (1) فنحصل على :

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos n\,x\, d\,x = \frac{-\,2}{n}\left(\frac{-\,\pi}{n}\cos n\,\pi\right)$$

أي : $I_n = \frac{2\,\pi}{n^2}\cos n\,\pi$

أي : $I_n = \frac{2\,\pi}{n^2}(-\,1)^n$ لأن :

$\cos n\,\pi = \left\{\begin{array}{ll} 1 : & \text{زوجي } n \\ -1 : & \text{فردي } n \end{array}\right.$ أي $\cos n\,\pi = (-\,1)^n$

التمرين – 50

في كل حالة من الحالات التالية و باستعمال التكامل بالتجزئة ، عين دالة أصلية F للدالة f على المجال I و التي تحقق $f(a) = 0$ حيث a معطى .

1 – $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ حيث $I =]0 ; +\infty[$ و $a = 1$

2 – $f(x) = 2 x e^{-x}$ حيث $I = R$ و $a = 0$

3 – $f(x) = x^2 \ln x$ حيث $I =]0 ; +\infty[$ و $a = 1$

الحل – 50

الدالة الأصلية للدالة f، و التي تنعدم عند a معرفة بـ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ كمايلي :

1 – نضع $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1/t^2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = -1/t \end{cases}$

منه : من أجل $x > 0$ فإن :

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$
$$= \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}\,dt$$
$$= \frac{-\ln x}{x} - 0 - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x$$
$$= \frac{-\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

نتيجة : $F(x) = 1 - \frac{1}{x}(1 + \ln x)$

تحقيق :

$F(1) = 1 - 1(1 + 0) = 0$

$F'(x) = \frac{1}{x^2}(1 + \ln x) - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = f(x)$

2 – ليكن $x \in IR$: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 2\,t\,e^{-t}\,dt$

نضع $\begin{cases} u(t) = 2\,t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

إذن :

$$F(x) = [-2\,t\,e^{-t}]_0^x - \int_0^x -2\,e^{-t}\,dt$$
$$= -2\,x\,e^{-x} - [2\,e^{-t}]_0^x$$
$$= -2\,x\,e^{-x} - (2\,e^{-x} - 2)$$
$$= 2 - 2\,x\,e^{-x} - 2\,e^{-x}$$

نتيجة : $F(x) = 2 - 2\,x\,e^{-x} - 2\,e^{-x}$

تحقيق :

$F(0) = 2 - 0 - 2 = 0$

$F'(x) = -2\,e^{-x} + 2\,x\,e^{-x} + 2\,e^{-x} = 2\,x\,e^{-x} = f(x)$

3 – ليكن $x > 0$: $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x t^2 \ln t\,dt$

نضع $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = t^2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$

منه : $F(x) = \left[\frac{1}{3}t^3 \ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3}t^2\,dt$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}(x^3 - 1)$$

نتيجة :
$$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$$

تحقيق :
$$F'(x) = x^2 \ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = f(x)$$

التمرين ـــ 51

نضع : $I = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx$ و $J = \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx$

1 ــ أحسب $I + J$

2 ــ تحقق أن : $I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) \, dx$

3 ــ إستنتج قيم كل من I و J

الحـل ـــ 51

1 ــ
$$I + J = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx + \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} x(\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \, dx \quad \text{لأن} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

2 ــ
$$I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx - \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} x(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx \quad \text{لأن} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

3 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة نحسب : $I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

منه :
$$I - J = \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\pi - 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{2}\cos(0)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

نتيجة : $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = -\frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 2I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \\ J = I + \frac{1}{2} \end{cases}$

أي $\begin{cases} I = \frac{\pi^2 - 4}{16} \\ J = \frac{\pi^2 + 4}{16} \end{cases}$

التمرين — 52

(C) منحنى الدالة f على المجال [0 ; 1] حيث $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1 — أحسب α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال [0 ; 1]

2 — أحسب v الحجم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل .

الحل — 52

1 — لندرس إشارة الدالة f على المجال [0 ; 1]

$\Delta = 9 - 8 = 1$ إذن : $\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{array}\right\}$

منه :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 3x + 2$		+	0	-	0	+	

إذن : على المجال [0 ; 1] المنحنى (C) فوق محور الفواصل $(f(x) \geq 0)$

إذن : $\alpha = \int_0^1 f(x)\,dx$

أي : $\alpha = \int_0^1 x^2 - 3x + 2\,dx$

أي : $\alpha = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^1$

أي : $\alpha = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2$

أي : $\alpha = 5/6$

2 — $v = \int_0^1 \pi(x^2 - 3x + 2)^2\,dx$

$= \pi \int_0^1 x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4\,dx$

$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x\right]_0^1$

$= \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{13}{3} - 6 + 4\right)$

$= \frac{\pi}{30}(6 - 45 + 130 - 60)$

$= \frac{31}{30}\pi$ مقدر بوحدة قياس الحجم

التمرين — 53

ليكن (C) منحنى الدالة f على المجال [0 ; 1] حيث $f(x) = (x-1)e^x$

1 — أحسب α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال [0 ; 1]

2 — أحسب v حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل .

الحل — 53

1 — على المجال [0 ; 1] لدينا $0 \leq x - 1 \leq 0$ إذن : $(x-1)e^x \leq 0$ لأن $e^x > 0$

منه : $f(x) \leq 0$

أي : $\alpha = \int_0^1 -f(x)\,dx$

أي : $\alpha = \int_1^0 f(x)\,dx$

أي : $\alpha = \int_1^0 (x-1)e^x\,dx$

التكامل بالتجزئة : نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x - 1 \\ v'(x) = e^x \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{array}\right\}$

منه . $\alpha = [(x-1)\,e^x]_1^0 - \int_1^0 e^x\,dx$

أي : $\alpha = -e^0 - 0 - [e^x]_1^0$

أي : $\alpha = -1 - (1 - e)$

أي : $\alpha = e - 2$

2 —

$$v = \int_0^1 \pi[(x-1)e^x]^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,e^{2x}\,dx$$

$$= \pi\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx - 2\pi\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx + \pi\int_0^1 e^{2x}\,dx \;............ (1)$$

لنحسب $\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx$ بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{2x} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$

منه : $\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 x\,e^{2x}\,dx$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_0^1 x\,e^{2x}\,dx \;........... (2)$$

لنحسب $\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx$ بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2x} \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$

منه : $\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx = \left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

نتيجة (1) المساواة (2) تصبح : $\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$

نرجع إلى المساواة (1) : $V = \pi\left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) - 2\pi\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx + \pi\int_0^1 e^{2x}\,dx$

$\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$ لأن $= \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\pi}{4} - 2\pi\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$

$$= \frac{\pi}{4}\,[e^2 - 1 - 2e^2 - 2 + 2e^2 - 2]$$

$= \frac{\pi}{4}(e^2 - 5)$ مقدر بوحدة قياس الحجم

التمرين — 54

1 — أحسب التكامل $I = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\,dx$

ليكن $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2}\,dx$

2 — أحسب $I + J$ **ثم إستنتج قيمة** J **.**

الحـل ـ 54

1 ـ $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2+1|]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$

2 ـ $I + J = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

$= \int_0^1 \frac{x+x^3}{x^2+1} dx$

$= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{x^2+1} dx$

$= \int_0^1 x\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$= 1/2$

نتيجة : $\begin{cases} I = \frac{1}{2}\ln 2 \\ I + J = 1/2 \end{cases}$ إذن : $J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ أي : $J = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

التمرين ـ 55

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (1-x)e^x$

1 ـ بين أن من أجل كل x من IR : $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$

2 ـ إستنتج $\int_0^1 f(x)\, dx$

الحـل ـ 55

1 ـ من أجل كل x من IR : $f'(x) = -e^x + e^x(1-x) = -e^x + e^x - x e^x = -x e^x$

إذن : $f''(x) = -e^x - x e^x$

منه : $f(x) + f''(x) = (1-x)e^x - e^x - x e^x$

$= e^x(1 - x - 1 - x)$

$= -2x e^x$

$= 2f'(x)$ و هو المطلوب .

2 ـ حسب السؤال (1) فإن : $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$

إذن : $f(x) = 2f'(x) - f''(x)$

منه : $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 2f'(x)\, dx - \int_0^1 f''(x)\, dx$

أي : $\int_0^1 f(x)\, dx = 2[f(x)]_0^1 - [f'(x)]_0^1$ لأن $\begin{cases} f \text{ دالة أصلية لـ } f' \\ f' \text{ دالة أصلية لـ } f'' \end{cases}$

أي : $\int_0^1 f(x)\, dx = 2[(1-x)e^x]_0^1 - [-x e^x]_0^1$

أي : $\int_0^1 f(x)\, dx = 2(0-1) - (-e - 0)$

أي : $\int_0^1 f(x)\, dx = e - 2$

التمرين ـ 56

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^{-2x}\ln(1 + 2e^x)$

1 ـ بين أن من أجل كل x من IR : $f'(x) + 2f(x) = \dfrac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR

3 ـ α عدد حقيقي موجب تماما. أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ منحنى الدالة f و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 0$ و $x = \alpha$

<u>الحـل ـ 56</u>

1 ـ من أجل كل x من IR :
$$f'(x) = -2e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{2e^{x}}{1+2e^{x}}e^{-2x}$$
$$= -2e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

منه :
$$f'(x) + 2f(x) = -2e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}} + 2e^{-2x}\ln(1+2e^{x})$$
$$= \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

2 ـ حسب السؤال (1) :
$$f'(x) + 2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

إذن :
$$2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}} - f'(x)$$

أي :
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} - \frac{1}{2}f'(x)$$

منه :
$$\int f(x)\,dx = \int \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\,dx - \int \frac{1}{2}f'(x)\,dx$$

منه :
$$\int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}f(x) + \int \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\,dx \quad \text{لأن} \quad \int f'(x)\,dx = f(x)$$

منه :
$$\int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}f(x) + \int \frac{e^{-x}}{e^{x}(e^{-x}+2)}\,dx$$

منه :
$$\int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}f(x) + \int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2}\,dx$$

بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} e^{-2x} & e^{-x}+2 \\ \hline e^{-2x}+2e^{-x} & e^{-x} \\ -2e^{-x} & \end{array}$$

إذن :
$$\frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2}$$

منه :
$$\int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2}\,dx = \int e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2}\,dx$$
$$= -e^{-x} + 2\ln|e^{-x}+2|$$

نتيجة :
$$F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) - e^{-x} + 2\ln|e^{-x}+2|$$

و هي عبارة الدالة الأصلية للدالة f .

تحقيق :
$$F'(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) - \frac{1}{2}e^{-2x}\left(\frac{2e^{x}}{1+2e^{x}}\right) + e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2}$$
$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) - \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} + e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}(1+2e^{x})}$$
$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) - \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} + e^{-x} - \frac{2}{1+2e^{x}}$$
$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{-e^{-x} + e^{-x}(1+2e^{x}) - 2}{1+2e^{x}}$$
$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + \frac{-e^{-x} + e^{-x} + 2 - 2}{1+2e^{x}}$$
$$= e^{-2x}\ln(1+2e^{x}) + 0$$
$$= f(x)$$

3 ــ لاحظ أن $f(x) > 0$ من أجل كل x من IR إذن : $A(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

$$= \left[\frac{-1}{2} e^{-2x} \ln(1+2e^x) - e^{-x} + 2\ln(e^{-x}+2)\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{-1}{2} e^{-2\alpha} \ln(1+2e^{\alpha}) - e^{-\alpha} + 2\ln(e^{-\alpha}+2) - \left(-\frac{1}{2}\ln 3 - 1 + 2\ln 3\right)$$

مقدر بوحدة المساحة $= \frac{-1}{2} e^{-2\alpha} \ln(1+2e^{\alpha}) - e^{-\alpha} + 2\ln(e^{-\alpha}+2) + 1 - \frac{3}{2}\ln 3$

<u>التمرين ــ 57</u>

ليكن $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$

1 ــ أحسب $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

2 ــ أحسب $I + J$ ثم إستنتج قيمة I .

<u>الحــل ــ 57</u>

1 ــ $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|1+2\sin x|\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{2}$

2 ــ $I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} + \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \cos x}{1+2\sin x}\,dx$

لدينا : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

منه : $\sin 2x + \cos x = 2\sin x\cos x + \cos x = \cos x(1+2\sin x)$

إذن : $I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x(1+2\sin x)}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

3 ــ لدينا : $\left\{\begin{array}{l} J = \frac{\ln 3}{2} \\ I + J = 1 \end{array}\right.$ إذن : $I = 1 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{2 - \ln 3}{2}$

<u>التمرين ــ 58</u>

المستوي منسوب إلى معلم متعامد .

r عدد حقيقي موجب تماما. (C) منحنى معادلته $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

1 ــ حدد هندسيا مجموعة النقط M ذات الإحداثيات $(x ; y)$ حيث $0 \le x \le r$ و $0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}$

2 ــ إستنتج $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ و $\int_{-r}^0 \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

<u>الحــل ــ 58</u>

1 ــ (C) له المعادلة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ أي $y^2 = r^2 - x^2$ أي : $x^2 + y^2 = r^2$ مع $y \ge 0$

إذن : (C) هو نصف الدائرة التي مركزها $O(0 ; 0)$ و نصف قطرها r و الواقع فوق محور الفواصل .

منه : مجموعة النقط M ذات الإحداثيات $(x ; y)$ حيث $0 \le x \le r$ و $0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}$ هو حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = r$ و هذا الجزء هو ربع الدائرة ذات المركز O و نصف القطر r و التي مساحتها $S = \pi r^2$

2 ــ حسب السؤال السابق العدد $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ هو مساحة ربع الدائرة التي نصف قطرها r

إذن : $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} r^2$

نفس الشئ بالنسبة لــ $\int_{-r}^0 \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ إذن : $\int_{-r}^0 \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} r^2$

<u>التمرين ــ 59</u>

f دالة معرفة على $IR - \{1\}$ بــ $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1 - x}$

1 ــ عين الأعداد الحقيقية $d ; c ; b ; a$ حيث من أجل $x \ne 1$: $f(x) = a x^2 + b x + c + \frac{d}{1 - x}$

2 ـــ أحسب $I = \int_0^{1/2} f(x)\, d x$

3 ـــ باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $J = \int_0^{1/2} (3 x^2 - 12 x + 1) \ln(1 - x)\, d x$

الحـل ــ 59

1 ـــ من أجل $x \neq 1$ فإن :

$$f(x) = - x^2 + 5 x + 4 - \frac{4}{1 - x}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6 x^2 + x & 1 - x \\ \underline{x^3 - x^2} & \overline{- x^2 + 5 x + 4} \\ - 5 x^2 + x & \\ \underline{- 5 x^2 + 5 x} & \\ - 4 x & \\ \underline{- 4 x + 4} & \\ - 4 & \end{array}$$

تحقيق :

$$- x^2 + 5 x + 4 - \frac{4}{1 - x} = \frac{- x^2 + x^3 + 5 x - 5 x^2 + 4 - 4 x - 4}{1 - x}$$

$$= \frac{x^3 - 6 x^2 + x}{1 - x} = f(x)$$

2 ـــ

$$I = \int_0^{1/2} f(x)\, d x$$

$$= \int_0^{1/2} - x^2 + 5 x + 4 - \frac{4}{1 - x} d x$$

$$= \left[- \frac{1}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + 4 x + 4 \ln | 1 - x | \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{-1}{24} + \frac{5}{8} + 2 + 4 \ln \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{31}{12} - 4 \ln 2$$

3 ـــ

$$J = \int_0^{1/2} (3 x^2 - 12 x + 1) \ln(1 - x)\, d x$$

نضع $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \ln(1 - x) \\ v'(x) = 3 x^2 - 12 x + 1 \end{array} \right.$ إذن : $\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = \frac{-1}{1 - x} \\ v(x) = x^3 - 6 x^2 + x \end{array} \right.$

منه :

$$J = [(x^3 - 6 x^2 + x) \ln(1 - x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{- (x^3 - 6 x^2 + x)}{1 - x} d x$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{6}{4} + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{1}{2} - 0 + \int_0^{1/2} \frac{x^3 - 6 x^2 + x}{1 - x} d x$$

$$= \frac{1 - 12 + 4}{8} \ln \frac{1}{2} + \int_0^{1/2} f(x)\, d x$$

$$= \frac{-7}{8} \ln \frac{1}{2} + I$$

$$= \frac{7}{8} \ln 2 + \frac{31}{12} - 4 \ln 2$$

$$= \frac{31}{12} - \frac{25}{8} \ln 2$$

التمرين ــ 60

باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال I و التي تنعدم من أجل القيمة α في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـــ $f(t) = \ln(t^2)$: $I =]0 ; + \infty[$ و $\alpha = 1$

2 ـــ $f(t) = (2 t + 1) \sin t$: $I = IR$ و $\alpha = 0$

3 ـــ $f(t) = \ln(t + 1)$: $I =]- 1 ; + \infty[$ و $\alpha = 0$

4 ـــ $f(t) = (t + 1)^2 e^{2t}$: $I = IR$ و $\alpha = - 1$

الحـل ــ 60

في كل حالة الدالة F الأصلية لـــ f تنعدم عند α معرفة بـــ $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\, d t$

1 ـــ $f(t) = \ln(t^2) = 2 \ln |t|$ إذن : على المجال $]0 ; + \infty[$: $f(t) = 2 \ln t$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 2 \end{array}\right\}$ منه $\left.\begin{array}{l} u'(t) = 1/t \\ v(t) = 2t \end{array}\right\}$

إذن :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x 2 \ln t \, dt \\ &= [2t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{2t}{t} dt \\ &= 2x \ln x - 0 - \int_1^x 2 \, dt \\ &= 2x \ln x - [2t]_1^x \\ &= 2x \ln x - (2x - 2) \\ &= 2x \ln x - 2x + 2 \end{aligned}$$

تحقيق : $F(1) = 0 - 2 + 2 = 0$

$$F'(x) = 2 \ln x + \frac{2x}{x} - 2 = 2 \ln x = \ln x^2 = f(x)$$

2 — $F(x) = \int_0^x (2t + 1) \sin t \, dt$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = 2t + 1 \\ v'(t) = \sin t \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = 2 \\ v(t) = -\cos t \end{array}\right\}$

منه :

$$\begin{aligned} F(x) &= [-(2t + 1) \cos t]_0^x - \int_0^x -2 \cos t \, dt \\ &= -(2x + 1) \cos x + 1 + 2[\sin t]_0^x \\ &= -(2x + 1) \cos x + 1 + 2 \sin x \end{aligned}$$

3 — $F(x) = \int_0^x \ln(t + 1) \, dt$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \ln(t + 1) \\ v'(t) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = \dfrac{1}{t + 1} \\ v(t) = t + 1 \end{array}\right\}$

منه :

$$\begin{aligned} F(x) &= [(t + 1) \ln(t + 1)]_0^x - \int_0^x \frac{t + 1}{t + 1} dt \\ &= (x + 1) \ln(x + 1) - 0 - \int_0^x 1 \, dt \\ &= (x + 1) \ln(x + 1) - [t]_0^x \\ &= (x + 1) \ln(x + 1) - x \end{aligned}$$

4 — $F(x) = \int_{-1}^x (t + 1)^2 e^{2t} \, dt$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = (t + 1)^2 \\ v'(t) = e^{2t} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 2(t + 1) \\ v(x) = \dfrac{1}{2} e^{2t} \end{array}\right\}$

منه :

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{1}{2} (t + 1)^2 e^{2t}\right]_{-1}^x - \int_{-1}^x (t + 1) e^{2t} dt \\ &= \frac{(x + 1)^2}{2} e^{2x} - \int_{-1}^x (t + 1) e^{2t} dt \text{ .... (1)} \end{aligned}$$

لنحسب بالتجزئة $\int_{-1}^x (t + 1) e^{2t} \, dt$ كما يلي :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = t + 1 \\ v'(t) = e^{2t} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{1}{2} e^{2t} \end{array}\right\}$

منه :

$$\int_{-1}^x (t + 1) e^{2t} \, dt = \left[\frac{t + 1}{2} e^{2t}\right]_{-1}^x - \int_{-1}^x \frac{1}{2} e^{2t} \, dt = \frac{x + 1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_{-1}^x$$

أي : $\int_{-1}^{x}(t+1)\,e^{2t}\,d\,t = \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2})$

بالرجوع إلى العلاقة (1) : $F(x) = \frac{(x+1)^2}{2}\,e^{2x} - \frac{x+1}{2}\,e^{2x} + \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2})$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 1}{2}\,e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2}$$

$$= \frac{x^2 + x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2}$$

التمرين – 61

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين عين دالة أصلية F للدالة f على IR

حيث $f(t) = e^{-2t}\cos t$ و $F(0) = 0$

الحل – 61

$$F(x) = \int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t$$

نضع $\left.\begin{matrix} u(t) = e^{-2t} \\ v'(t) = \cos t\end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(t) = -2\,e^{-2t} \\ v(t) = \sin t\end{matrix}\right\}$

منه : $\int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t = [e^{-2t}\sin t]_0^x - \int_0^x -2\,e^{-2t}\sin t\,d\,t$ .... (1)

لنحسب الأن بالتجزئة $\int_0^x -2\,e^{-2t}\sin t\,d\,t$ كمايلي :

نضع $\left.\begin{matrix} u(t) = 2\,e^{-2t} \\ v'(t) = -\sin t\end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(t) = -4\,e^{-2t} \\ v(t) = \cos t\end{matrix}\right\}$

منه : $\int_0^x -2\,e^{-2t}\sin t\,d\,t = [2\,e^{-2t}\cos t]_0^x - \int_0^x -4\,e^{-2t}\cos t\,d\,t$

أي : $\int_0^x -2\,e^{-2t}\sin t\,d\,t = [2\,e^{-2t}\cos t]_0^x + 4\int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t$

بالتعويض في المساواة (1) نحصل على :

$$\int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t = [e^{-2t}\sin t]_0^x - \left([2\,e^{-2t}\cos t]_0^x + 4\int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t\right)$$

أي : $\int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t + 4\int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t = [e^{-2t}\sin t]_0^x - [2\,e^{-2t}\cos t]_0^x$

منه : $5\int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t = e^{-2x}\sin x - (2\,e^{-2x}\cos x - 2)$

أي : $\int_0^x e^{-2t}\cos t\,d\,t = \frac{1}{5}(e^{-2x}\sin x - 2\,e^{-2x}\cos x + 2)$

نتيجة : $F(x) = \frac{1}{5}(e^{-2x}\sin x - 2\,e^{-2x}\cos x + 2)$

تحقيق : $F'(x) = (-2\,e^{-2x}\sin x + e^{-2x}\cos x + 4\,e^{-2x}\cos x + 2\,e^{-2x}\sin x) \times \frac{1}{5}$

$$= e^{-2x}\cos x = f(x)$$

$$F(0) = \frac{1}{5}(0 - 2 + 2) = 0$$

التمرين – 62

باستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية F للدالة f على $]0\,;+\infty[$ المعرفة بـ $f(t) = (\ln t)^2$ حيث $F(1) = 0$

الحل – 62

$$F(x) = \int_1^x (\ln t)^2\,d\,t$$

نضع $\left.\begin{matrix} u(t) = (\ln t)^2 \\ v'(t) = 1\end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u'(t) = \frac{2}{t}\ln t \\ v(t) = t\end{matrix}\right\}$

منه :
$$F(x) = [t(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x \frac{2\,t}{t}\ln t\,dt$$
$$= x(\ln x)^2 - 2\int_1^x \ln t\,d\,t$$
$$= x(\ln x)^2 - 2[t\ln t - t]_1^x$$
$$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - x + 1]$$
$$= x(\ln x)^2 - 2\,x\ln x + 2\,x - 2$$

ملاحظة : الدالة $t \longmapsto t\ln t - t$ هي دالة أصلية للدالة $t \longmapsto \ln t$ عل المجال $]0\,;+\infty[$

التمرين ـــ 63

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,d\,x$

1 ـــ بين أن من أجل كل x من [0 ; 1] و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$

2 ـــ إستنتج حصرا للعدد u_n ثم بين أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **و** $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$

الحـل ـــ 63

1 ـــ $0 \le x \le 1$ إذن : $e^0 \le e^x \le e^1$

أي : $1 \le e^x \le e$

منه : $2 \le 1 + e^x \le e + 1$

منه : $\frac{1}{e+1} \le \frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{2}$

منه : $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$ لأن $e^{nx} > 0$

2 ـــ بما أن $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$ فإن $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e}\,d\,x \le \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,d\,x \le \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2}\,d\,x$

أي : $\frac{1}{1+e}\int_0^1 e^{nx}\,d\,x \le u_n \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx}\,d\,x$

منه : $\frac{1}{1+e}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 \le u_n \le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1$

أي : $\frac{1}{n(1+e)}(e^n - 1) \le u_n \le \frac{1}{2\,n}(e^n - 1)$

لدينا :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\,n}(e^n - 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{2\,n} - \frac{1}{2\,n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{2\,n}$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(1+e)}(e^n - 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n(1+e)} - \frac{1}{n(1+e)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n(1+e)}$$
$$= +\infty$$

نتيجة : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ حسب خاصية الحصر.

من جهة أخرى : $\frac{1}{n(1+e)}(e^n - 1) \le u_n \le \frac{1}{2\,n}(e^n - 1)$

إذن : $\frac{1}{n\,e^n(1+e)}(e^n - 1) \le \frac{u_n}{e^n} \le \frac{1}{2\,n\,e^n}(e^n - 1)$

لدينا:
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\,n\,e^n}(e^n - 1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{2\,n\,e^n} - \frac{1}{2\,n\,e^n}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\,n} - \frac{1}{2\,n\,e^n}$$
$$= 0$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\,e^n(1+e)}(e^n - 1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n\,e^n(1+e)} - \frac{1}{n\,e^n(1+e)}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n(1+e)} - \frac{1}{n\,e^n(1+e)}$$
$$= 0$$

إذن : حسب خاصية الحصر فإن $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$

حلول تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{x\,e^x}{1+e^x}$

1 ــ بين أن من أجل كل x من $[1\,;+\infty[$: $\frac{e^x}{1+e^x} \le f(x) \le x$

2 ــ إستنتج حصرا لمساحة حيز المستوي المكون من مجموعة النقط $M(x\,;y)$ حيث : $1 \le x \le \lambda$ **و** $0 \le y \le f(x)$

حيث λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1

الحـل ــ 1

1 ــ من أجل كل x من $[1\,;+\infty[$: $f(x) - x = \frac{x\,e^x}{1+e^x} - x = x\left[\frac{e^x - 1 - e^x}{1+e^x}\right] = \frac{-x}{1+e^x}$

بما أن $\frac{x}{1+e^x} \ge 0$ على المجال $[1\,;+\infty[$ فإن $\frac{-x}{1+e^x} \le 0$

إذن : $f(x) \le x$ .... (1)

من أجل كل x من $[1\,;+\infty[$: $f(x) - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{x\,e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}(x-1)$

بما أن $x - 1 \ge 0$ و $\frac{e^x}{1+e^x} > 0$ على المجال $[1\,;+\infty[$ فإن $\frac{e^x}{1+e^x}(x-1) \ge 0$

إذن : $f(x) \ge \frac{e^x}{1+e^x}$ .... (2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن من أجل كل x من $[1\,;+\infty[$: $\frac{e^x}{1+e^x} \le f(x) \le x$

2 ــ لدينا : $\frac{e^x}{1+e^x} \le f(x) \le x$ من أجل $x \in [1\,;+\infty[$

إذن : $\int_1^{\lambda} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \le \int_1^{\lambda} f(x)\,dx \le \int_1^{\lambda} x\,dx$

أي : $\left[\ln|1+e^x|\right]_1^{\lambda} \le \int_1^{\lambda} f(x)\,dx \le \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\lambda}$

أي : $\ln|1+e^{\lambda}| - \ln|1+e| \le \int_1^{\lambda} f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}$

نتيجة : بما أن منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل على المجال $[1\,;+\infty[$ و خاصة على المجال $[1\,;\lambda]$ فإن مساحة الحيز المحدود بمنحناها و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ و $x = \lambda$ هي نفسها مساحة الحيز المكون من مجموعة النقط $M(x\,;y)$ حيث $1 \le x \le \lambda$ و $0 \le y \le f(x)$ أي إذا كانت S هذه المساحة

فإن : $\ln|1+e^{\lambda}| - \ln|1+e| \le S \le \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}$

التمرين ــ 2

f دالة معرفة على $]-\infty\,;0[$ بـ $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

3 ــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $-1 \le \alpha \le -1/2$

4 ــ أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x = -1$ ؛ $x = \alpha$ و $y = 1$

5 ـــ بين أن $A(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{4}$ ثم إستنتج حصرا لـ $A(\alpha)$

الحــل ـــ 2

1 ـــ التغيرات : f معرفة على IR^* و خاصة على $]-\infty\,;0[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{\ln x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} 1-2\frac{\ln|x|}{x}=1$$ لأن $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} 1-\frac{\ln x^2}{x}=-\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty\,;0[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=-\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\ln x^2}{x^2}=\frac{\ln x^2-2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x^2-2$ كمايلي :

$$\ln x^2-2\ge 0 \Leftrightarrow \ln x^2\ge \ln e^2$$
$$\Leftrightarrow x^2\ge e^2$$
$$\Leftrightarrow (x-e)(x+e)\ge 0$$
منه $$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;-e]\cup[e\,;+\infty[$$

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$\ln x^2-2$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

إذن : إشارة $f'(x)$ على $]-\infty\,;0[$ كما يلي :

x	$-\infty$		$-e$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||

منه جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-e$		α		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	||
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\frac{2}{e}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$f(-e)=1-\frac{\ln e^2}{-e}=1+\frac{2}{e}$$

2 ـــ وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة y = 1

$$f(x)-1=1-\frac{\ln x^2}{x}-1=-\frac{\ln x^2}{x}$$

من إشارة $\ln x^2$ لأن $-x>0$ كمايلي :

$$\ln x^2\ge 0 \Leftrightarrow \ln x^2\ge \ln 1$$
$$\Leftrightarrow x^2\ge 1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;-1]\cup[1\,;+\infty[$$

نتيجة : لما $x\in\,]-\infty\,;-1[$ المنحنى فوق المستقيم .

لما $x=-1$ المنحنى يقطع المستقيم .

لما $x\in\,]-1\,;0[$ المنحنى تحت المستقيم .

3 ـــ من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن الدالة f تنعدم مرة واحدة على المجال $]-e\,;0[$

إذن : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا :
$$f(-1)=1-\frac{\ln 1}{-1}=1$$

$$f(-1/2)=1-\frac{\ln\frac{1}{4}}{-1/2}=1+2\ln\frac{1}{4}=1-2\ln 4$$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} f \text{ مستمرة على } [-1\,;-1/2] \\ f(-1)\times f(-1/2)<0 \end{matrix}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α من المجال $[-1\,;-1/2]$ حيث $f(\alpha)=0$

بما أن f متناقصة تماما على $[-1\,;-1/2]$ فإن α وحيد .

4 ــ على المجال $]-1\,;0[$ المنحنى (C) تحت المستقيم ذو المعادلة $y=1$ إذن : $A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha} 1-f(x)\,dx$

منه :

$$A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}\frac{\ln x^2}{x}dx$$

$$=\int_{-1}^{\alpha}\frac{2\ln|x|}{x}dx$$

$$=2\int_{-1}^{\alpha}\frac{1}{x}\ln|x|\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}(\ln|x|)^2\right]_{-1}^{\alpha}$$

$$=[(\ln|x|)^2]_{-1}^{\alpha}$$

$$=(\ln|\alpha|)^2$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة القياس .

5 ــ لدينا $f(\alpha)=0$ أي : $1-\dfrac{\ln\alpha^2}{\alpha}=0$

منه : $\dfrac{\ln\alpha^2}{\alpha}=1$

أي : $\dfrac{2\ln|\alpha|}{\alpha}=1$

أي : $\ln|\alpha|=\dfrac{\alpha}{2}$

منه : $(\ln|\alpha|)^2=\dfrac{\alpha^2}{4}$

نتيجة : $A(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{4}$ و هو المطلوب .

الحصر : $-1\le\alpha\le-1/2$ إذن : $1/4<\alpha^2<1$

منه : $1/16<\dfrac{\alpha^2}{4}<1/4$

نتيجة : $1/16<A(\alpha)<1/4$ و هو الحصر المطلوب .

التمرين ــ 3

f دالة معرفة على IR بــ $f(x)=2e^{\frac{1}{2}x+1}-x-2$ نسمي (C) منحناها في معلم متعامد .

1 ــ أدرس إشارة $f(x)-(-x-2)$ على IR

2 ــ أحسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ؛ $x=\alpha$ ؛ $y=-x-2$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما .

3 ــ نعرف المتتالية (u_n) على IN^* بــ $u_n=A(n)+4e$

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول .

الحـل ــ 3

1 ــ $f(x)-(-x-2)=2e^{\frac{1}{2}x+1}$

إذن : من أجل كل x من IR : $f(x)-(-x-2)>0$

2 ــ حسب السؤال (1) $f(x)-(-x-2)>0$ إذن : المنحنى (C) يقع دائما فوق المستقيم ذو المعادلة $y=-x-2$

منه : $A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)-(-x-2)\,dx$

$$=\int_0^{\alpha}2e^{\frac{1}{2}x+1}dx$$

$$= 2e\int_0^{\alpha} e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$
$$= 2e\left[2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{\alpha}$$
$$= 2e\left[2e^{\frac{1}{2}\alpha} - 2\right]$$
$$= 4e\,.\,e^{\frac{1}{2}\alpha} - 4e$$

ملاحظة : المساحة $A(\alpha)$ مقدرة بوحدة قياس المساحة .

3 ـ من أجل كل n من IN^* : $u_n = A(n) + 4e$
$$= 4e\,.\,e^{\frac{1}{2}n} - 4e + 4e$$
$$= 4e(e^{1/2})^n$$

منه :
$$u_{n+1} = 4e(e^{1/2})^{n+1}$$
$$= 4e(e^{1/2})\,.\,(e^{1/2})^n$$
$$= e^{1/2}\,u_n$$

إذن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $e^{1/2} = \sqrt{e}$ و حدها الأول $u_1 = 4e\sqrt{e}$

التمرين ـ 4

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 + x}$

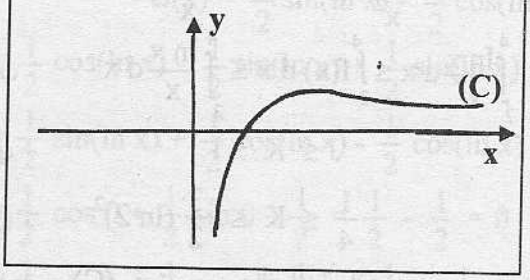
1 ـ بين أن من أجل كل $x > 1$: $\dfrac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$

2 ـ أحسب $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$ و $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

3 ـ إستنتج حصرا لـ $K = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$

إليك الشكل التالي لمنحنى الدالة f في معلم متعامد حيث $\|\vec{i}\| = 1\,cm$ و $\|\vec{j}\| = 4\,cm$

4 ـ باستعمال الحصر الموجود في السؤال (3) أعط حصرا بـ cm^2 للمساحة A لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي حيث $2 \leq x \leq 4$ و $0 \leq y \leq f(x)$



الحل ـ 4

1 ـ ليكن $x > 1$:
$$f(x) - \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x}{x^2 + x} - \frac{\ln x}{x}$$
$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{2}{x+1} - 1\right)$$
$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{2 - x - 1}{x+1}\right)$$
$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{1 - x}{x+1}\right)$$

بما أن $x \geq 1$ فإن $\begin{cases} 1 - x \leq 0 \\ x + 1 > 0 \\ \dfrac{\ln x}{x} \geq 0 \end{cases}$ إذن : $\dfrac{\ln x}{x}\left(\dfrac{1 - x}{x+1}\right) \leq 0$

منه : $f(x) - \dfrac{\ln x}{x} \leq 0$

أي : $(1)\,\ldots\ldots\ldots\; f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$

من جهة أخرى :

$$f(x) - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2\ln x}{x^2+x} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{x}\left(\frac{x-1}{x^2+x}\right)$$

بما أن $x \geq 1$ فإن $\left.\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x^2+x > 0 \\ \frac{\ln x}{x} \geq 0 \end{array}\right\}$ إذن $\frac{\ln x}{x}\left(\frac{x-1}{x^2+x}\right) \geq 0$

أي $f(x) - \frac{\ln x}{x^2} \geq 0$

أي $(2)\ldots\ldots\ldots f(x) \geq \frac{\ln x}{x^2}$

نتيجة : من (1) و (2) فإن : $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ من أجل $x > 1$

2 ــ $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_2^4 = \frac{1}{2}(\ln 4)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 = \frac{3}{2}(\ln 2)^2$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1/x^2 \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1/x \\ v(x) = -1/x \end{array}\right\}$

منه :

$$J = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_2^4 - \int_2^4 \frac{-1}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{-\ln 4}{4} + \frac{\ln 2}{2} + [-1/x]_2^4$$

$$= \frac{-2\ln 2}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= 1/4$$

3 ــ لدينا من أجل $x > 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

إذن : $\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\, dx \leq \int_2^4 f(x)\, dx \leq \int_2^4 \frac{\ln x}{x}\, dx$

أي : $J \leq K \leq I$

أي : $\frac{1}{4} \leq K \leq \frac{3}{2}(\ln 2)^2$

4 ــ حسب الشكل فإن المنحنى (C) فوق محور الفواصل إذن :

$$A = \int_2^4 f(x)\, dx \,.\, \|\vec{i}\| \,.\, \|\vec{j}\| \,.\, cm^2 = K \,.\, 4\, cm^2$$

بما أن $\frac{1}{4} \leq K \leq \frac{3}{2}(\ln 2)^2$ فإن $4\left(\frac{1}{4}\right) cm^2 \leq 4\,K\, cm^2 \leq 4 \times \frac{3}{2}(\ln 2)^2\, cm^2$

أي : $1\, cm^2 \leq A \leq 6(\ln 2)^2\, cm^2$ و هو المطلوب .

<u>التمرين ــ 5</u>

F و G دالتان أصليتان على $]0 ; +\infty[$ للدالتين $t \longmapsto \cos(\ln t)$ و $t \longmapsto \sin(\ln t)$
على الترتيب و اللتان تنعدمان عند 1

1 ــ بين باستعمال التكامل باتجزئة أن : $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$
و : $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$

2 ــ إستنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$

<u>الحل ــ 5</u>

1 ــ تعريفا لدينا : $F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\, dt$ حيث $x > 0$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \cos(\ln t) \\ v'(t) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = \dfrac{-1}{t}\sin(\ln t) \\ v(t) = t \end{array}\right\}$

منه : $F(x) = [t\cos(\ln t)]_1^x - \int_1^x \dfrac{-t}{t}\sin(\ln t)\,d\,t$

$$= x\cos(\ln x) - \cos(\ln 1) + \int_1^x \sin(\ln t)\,d\,t$$

$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,d\,t$ لأن (1)........ $= x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$

تعريفا دائما لدينا : $G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,d\,t$ حيث $x > 0$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t) = \sin(\ln t) \\ v'(t) = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(t) = \dfrac{1}{t}\cos(\ln t) \\ v(t) = t \end{array}\right\}$

إذن : $G(x) = [t\sin(\ln t)]_1^x - \int_1^x \dfrac{t}{t}\cos(\ln t)\,d\,t$

$$= x\sin(\ln x) - \sin(\ln 1) - \int_1^x \cos(\ln t)\,d\,t$$

(2)............ $= x\sin(\ln x) - F(x)$

2 ــ حسب السؤال (1) لدينا $\left.\begin{array}{l} F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \\ G(x) = x\sin(\ln x) - F(x) \end{array}\right\}$

بجمع المساوتين طرف لــ طرف نحصل على :

$$F(x) + G(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) + x\sin(\ln x) - F(x)$$

أي : $2F(x) = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - 1$

منه : $F(x) = \dfrac{x}{2}\cos(\ln x) + \dfrac{x}{2}\sin(\ln x) - \dfrac{1}{2}$

بالتعويض في المساواة (2) نحصل على :

$$G(x) = x\sin(\ln x) - \frac{x}{2}\cos(\ln x) - \frac{x}{2}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}$$

أي : $G(x) = \dfrac{x}{2}\sin(\ln x) - \dfrac{x}{2}\cos(\ln x) + \dfrac{1}{2}$

تحقيق : $F'(x) = \dfrac{1}{2}\cos(\ln x) - \dfrac{1}{2}\sin(\ln x) + \dfrac{1}{2}\sin(\ln x) + \dfrac{1}{2}\cos(\ln x) = \cos(\ln x)$

$$G'(x) = \frac{1}{2}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2}\sin(\ln x) = \sin(\ln x)$$

$$F(1) = \frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$G(1) = \frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

التمرين ــ 6

f دالة معرفة على $[0 ; 1]$ بــ $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$

1 ــ بين أن f مستمرة و موجبة على $[0 ; 1]$

2 ــ أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in]0 ; 1[$

3 ــ إستنتج تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; 1]$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

نعتبر النقطة $I(1/2 ; 0)$ و لتكن M نقطة من (C) فاصلتها x حيث $0 \le x \le 1$

4 ــ أحسب IM^2

5 ــ بين أن (C) هي نصف دائرة يطلب مركزها و نصف قطرها

6 ــ فسر هندسيا التكامل $\int_0^1 f(x)\,d\,x$ ثم أثبت أن $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,d\,x = \pi/8$

الحـل ــ 6

1 ــ الدالة f هي مركب الدالتين $u : x \longmapsto x(1-x)$ و $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ الموجبتين و المستمرتين على $[0 ; 1]$

إذن : f مستمرة و موجبة على $[0 ; 1]$

2 ــ من أجل كل x من $]0 ; 1[$: $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-2x$ لأن $2\sqrt{x(1-x)} > 0$

x	0		1/2		1
$1-2x$		+	0	-	

3 ــ من جدول إشارة $f'(x)$ نستنتج جدول التغيرات التالي :

x	0		1/2		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	0

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$
$$f(1) = \sqrt{0} = 0$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

4 ــ M نقطة من (C) فاصلتها x إذن ترتيبها $y = f(x)$

منه : $M(x ; \sqrt{x(1-x)})$ حيث $0 \le x \le 1$

إذن : $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ \sqrt{x(1-x)} - 0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ \sqrt{x(1-x)} \end{pmatrix}$

منه : $IM^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x(1-x)}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + x - x^2 = \frac{1}{4}$

5 ــ حسب السؤال السابق $IM^2 = 1/4$ إذن : $IM = 1/2$ أي النقطة M من (C) تبعد بمسافة ثابتة عن النقطة I و تساوي 1/2 إذن فهي تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $I(1/2 ; 0)$ و نصف القطر 1/2
بما أن الدالة f موجبة فإن (C) هو نصف هذه الدائرة الذي يقع فوق محور الفواصل

6 ــ المنحنى (C) يقع فوق محور الفواصل لأن f موجبة إذن التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز المحدد بـ (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = 1$ أي هو نصف مساحة الدائرة ذات المركز I و نصف القطر 1/2

منه : $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\pi \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$ أي $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \frac{\pi}{8}$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة القياس .

التمرين ــ 7

f دالة معرفة على $[0 ; 1]$ بـ $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

1 ــ أحسب مشتقة الدالة $u : x \longmapsto \sqrt{x^2+2}$

2 ــ إستنتج $f'(x)$

3 ــ أحسب $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

4 ــ نضع $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ و $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

تحقق أن : $J + 2I = K$

5 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة لحساب K بين أن : $K = \sqrt{3} - J$

6 ـ إستنتج قيم كل من K و J

الحـل ـ 7

1 ـ
$$u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

2 ـ
$$f'(x) = \frac{1+u'(x)}{x+u(x)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{(x+\sqrt{x^2+2})\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

3 ـ
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = [f(x)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$$

4 ـ
$$J+2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = K$$

5 ـ $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$ لنحسب هذا التكامل بالتجزئة كما يلي :

نضع $\left\{\begin{array}{l} u(x) = \sqrt{x^2+2} \\ v'(x) = 1 \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \\ v(x) = x \end{array}\right.$

منه :
$$K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \sqrt{3} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \sqrt{3} - J$$

6 ـ لدينا :
$$\left.\begin{array}{l} (1) \ldots\ldots\ I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2} \\ (2) \ldots\ldots\ J+2I = K \\ (3) \ldots\ldots\ K = \sqrt{3} - J \end{array}\right\}$$

نعوض (3) في (2) نحصل على : $J + 2I = \sqrt{3} - J$

منه : $2J = \sqrt{3} - 2I$

أي : $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I$

أي : $(4) \ldots\ldots\ J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2}$

نعوض (4) في (3) نحصل على : $K = \sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2}\right)$

أي : $K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$

التمرين ـ 8

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x\,dx$ و $J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\,dx$

1 ـ أحسب I_0 و J_0

2 ـ نضع $n \geq 1$ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $\left\{\begin{array}{l} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{array}\right.$

3 ـ إستنتج عبارة I_n و J_n بدلالة n من أجل $n \geq 1$.

الحـل ـ 8

1 ـ
$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$
$$J_0 = \int_0^{\pi/2} 1\cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

2 ـ ليكن $n \geq 1$

لنحسب $I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x\,dx$ بالتجزئة :

نضع $\left\{\begin{array}{l} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = \sin x \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = -n\,e^{-nx} \\ v(x) = -\cos x \end{array}\right.$

$$I_n = [-e^{-nx}\cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n e^{-nx}\cos x\, dx = 1 - n\int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\, dx = 1 - n J_n$$

نتيجة : $I_n = 1 - n J_n$ منه : $(1) \ldots\ldots I_n + n J_n = 1$

لنحسب $J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\, dx$ بالتجزئة كما يلي :

نضع $\left.\begin{matrix} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = \cos x \end{matrix}\right\}$ إذن $\left.\begin{matrix} u'(x) = -n e^{-nx} \\ v(x) = \sin x \end{matrix}\right\}$

منه : $J_n = [e^{-nx}\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -n e^{-nx}\sin x\, dx = e^{-n\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x\, dx = e^{-n\frac{\pi}{2}} + n I_n$

نتيجة : $J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} + n I_n$ منه : $(2) \ldots\ldots -n I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$

خلاصة : $\left\{\begin{matrix} (1) \ldots\ldots\ldots\ldots I_n + n J_n = 1 \\ (2) \ldots\ldots\ldots -n I_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{matrix}\right.$

3 ـ نضرب طرفي المساواة (1) في n نحصل على : $(3) \ldots\ldots\ldots n I_n + n^2 J_n = n$

نجمع المساواتين (3) و (2) طرف لطرف نحصل على : $n I_n + n^2 J_n - n I_n + J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}}$

أي : $(1+n^2) J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}}$

منه : $J_n = \dfrac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$

بتعويض J_n في المساواة (1) نحصل على : $I_n = 1 - n\left(\dfrac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}\right)$

أي : $I_n = 1 - \dfrac{n^2 + n e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$

التمرين ــ 9

(u_n) و (v_n) **متتاليتان معرفتان على IN^* كما يلي :** $\left\{\begin{matrix} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} : n \geq 2 \end{matrix}\right.$

و $v_n = u_n - \ln n$ **من أجل كل** $n \geq 1$

1 ــ أحسب u_2 ؛ u_3 ؛ u_4

2 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

3 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $\dfrac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\, dx \leq \dfrac{1}{k}$

4 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \dfrac{1}{n}$ **و** $0 \leq v_n \leq 1$

5 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\, dx$

6 ــ إستنتج إتجاه تغير المتتالية (v_n)

7 ــ بين أن المتتالية (v_n) متقاربة نحو λ (لا يطلب تعيين λ)

8 ــ ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الحل ــ 9

1 ــ

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

2 ــ لنثبت بالتراجع على n صحة الخاصية $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ من أجل $n \geq 1$

من أجل $n = 1$: $u_1 = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1/1 = 1$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

من أجل $n = 2$: $u_2 = 3/2$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ ؟

لدينا : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1}$

منه : $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \dfrac{1}{n+1}$ لأن $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

أي : $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

3 ــ لدينا : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$

لنعتبر الدالة $f : x \longmapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x}$ على المجال $[1 ; +\infty[$

f قابلة للاشتقاق و دالتها المشتقة : $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

$$= \frac{x^2 - x(x+1) + x + 1}{x^2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2(x+1)}$$

إذن : $f'(x) > 0$ على المجال $[1 ; +\infty[$

منه : f متزايدة تماما على $[1 ; +\infty[$

$f(1) = \ln 2 - \ln 1 - 1 = \ln 2 - 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} = 0$$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	1 $\longrightarrow$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\ln 2 - 1$ $\nearrow$ 0

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن :

من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $f(x) \leq 0$

أي من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x} \leq 0$

منه : من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$: $\ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$

و خاصة $\ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$ من أجل $k \in IN^*$

نعتبر الآن الدالة $g : x \longmapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$ على المجال $[1 ; +\infty[$

g قابلة للاشتقاق و دالتها المشتقة : $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

إذن : $g'(x) < 0$ من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$

منه : g متناقصة تماما على $[1 ; +\infty[$

$$g(1) = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	1 \hfill $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$\ln 2 - \frac{1}{2}$ $\searrow$ 0

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[1 ; +\infty[$

أي $\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1} \geq 0$ منه $\ln(x+1) - \ln x \geq \dfrac{1}{x+1}$

و خاصة $\ln(k+1) - \ln k \geq \dfrac{1}{k+1}$ من أجل $k \in IN^*$

نتيجة : من أجل كل $k \in IN^*$ فإن : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$

أي : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k}$

4 ـــ حسب السؤال (2) فإن من أجل كل $k \in IN^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$

لنكتب هذه المساواة $(n-1)$ مرة $(k = 1$ ؛ $k = 2$ ؛ .... $k = n - 1)$ كمايلي :

$k = 1$: $1/2 \leq \ln 2 - \ln 1 \leq 1/1$

$\oplus$

$k = 2$: $1/3 \leq \ln 3 - \ln 2 \leq 1/2$

$\oplus$

$k = 3$: $1/4 \leq \ln 4 - \ln 3 \leq 1/3$

$\oplus$

$k = n - 1$: $\dfrac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1) \leq \dfrac{1}{n-1}$

بجمع هذه المتباينات طرف لطرف نحصل على :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

أي : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1 \leq \ln n \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n}$

أي : $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \dfrac{1}{n}$

إذن : $u_n - 1 \le \ln n \le u_n - \frac{1}{n}$ منه $-u_n + \frac{1}{n} \le -\ln n \le -u_n + 1$

أي $1/n \le u_n - \ln n \le 1$

و خاصة : $0 \le u_n - \ln n \le 1$ لأن $1/n \ge 0$

أي : $0 \le v_n \le 1$

5 ـ من أجل كل $n \in IN^*$: $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - (u_n - \ln n)$

$$= u_{n+1} - u_n - [\ln(n+1) - \ln n]$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{لأن} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

6 ـ حسب السؤال (3) لدينا من أجل $n = k$: $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{n}$

أي : $\frac{-1}{n} \le -\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{-1}{n+1}$

منه : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$

أي : $\frac{-1}{n(n+1)} \le v_{n+1} - v_n \le 0$

و خاصة $v_{n+1} - v_n \le 0$ أي المتتالية (v_n) متناقصة

7 ـ حسب السؤال (4) فإن $0 \le v_n \le 1$ إذن : (v_n) متتالية محدودة و خاصة فهي محدودة من الأسفل .

خلاصة : (v_n) متتالية متناقصة .
(v_n) متتالية محدودة من الأسفل

إذن : (v_n) متتالية متقاربة و لتكن λ نهايتها .

8 ـ لدينا : $v_n = u_n - \ln n$ إذن : $u_n = v_n + \ln n$

منه $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n + \ln n$ أي $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ لأن $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lambda \in IR$

التمرين ـ 10

f دالة معرفة على $[0 ; 2]$ بـ $f(x) = (x - 2)\,e^x$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس .

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم (C) على المجال $[0 ; 2]$

2 ـ (s) هو جزء المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل .

أحسب A(s) مساحة الجزء (s) بتقريب 10^{-2} بالزيادة

بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل نولد مجسما حجمه v .

3 ـ أوجد الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c حيث تكون الدالة G المعرفة بـ $G(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)e^{2x}$ أصلية للدالة f^2 على IR .

4 ـ إستنتج قيمة الحجم v بتقريب 10^{-3} بالزيادة .

الحـل ـ 10

1 ـ تغيرات الدالة f على $[0 ; 2]$

f معرفة على IR و خاصة على $[0 ; 2]$: $f(0) = -2$ ؛ $f(2) = 0$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = e^x + (x - 2)\,e^x = (x - 1)\,e^x$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x - 1$ لأن $e^x > 0$ كما يلي :

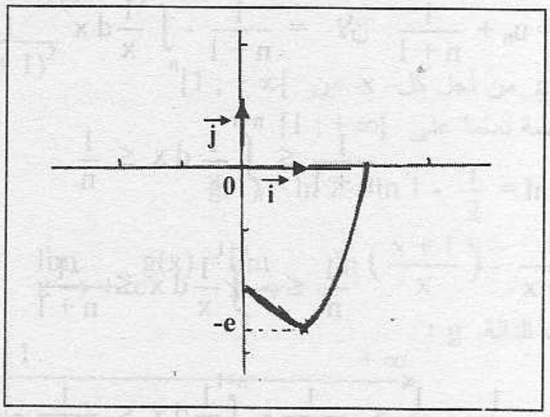
x	0		1		2
$x - 1$		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	0

$f(1) = -e$

المنحنى :



2 ــ حسب الشكل المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[0 ; 2]$ إذن :

$$A(s) = -\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$= \int_2^0 (x-2)\,e^x\,dx$$

التكامل بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x - 2 \\ v'(x) = e^x \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{array}\right\}$

منه :

$$A(s) = [(x-2)\,e^x]_2^0 - \int_2^0 e^x\,dx$$
$$= -2 - [e^x]_2^0$$
$$= -2 - (1 - e^2)$$
$$= e^2 - 3$$
$$\approx 4{,}39 \quad \text{(بالزيادة)}$$

3 ــ من أجل كل x من IR لدينا :

$$G'(x) = (2\,a\,x + b)\,e^{2x} + 2(a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{2x}$$
$$= (2\,a\,x^2 + 2\,b\,x + 2\,c + 2\,a\,x + b)\,e^{2x}$$
$$= [2\,a\,x^2 + 2(a+b)\,x + 2\,c + b]\,e^{2x}$$

من جهة أخرى : $f^2(x) = (x-2)^2\,e^{2x} = (x^2 - 4\,x + 4)\,e^{2x}$

إذن تكون G دالة أصلية لــ f^2 إذا و فقط إذا كان :

$$\left.\begin{array}{r} 2\,a = 1 \\ 2(a+b) = -4 \\ 2\,c + b = 4 \end{array}\right\} \text{ أي } \left.\begin{array}{l} a = 1/2 \\ a + b = -2 \\ c = \dfrac{4-b}{2} \end{array}\right\} \text{ أي } \left.\begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 - \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{4-b}{2} \end{array}\right\} \text{ أي } \left.\begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -5/2 \\ c = 13/4 \end{array}\right\}$$

نتيجة : $G(x) = \left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{5}{2}\,x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$

تحقيق :

$$G'(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{5}{2}\,x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$$
$$= \left(x - \frac{5}{2} + x^2 - 5\,x + \frac{13}{2}\right)e^{2x}$$

$$= (x^2 - 4x + 4)\, e^{2x}$$
$$= [f(x)]^2$$

4 ــ

$$v = \pi \int_0^2 f^2(x)\, dx$$
$$= \pi [G(x)]_0^2$$
$$= \pi\left[\left(\frac{4}{2} - \frac{10}{2} + \frac{13}{4}\right) e^4 - \left(\frac{13}{4}\right)\right]$$
$$= \pi\left[\frac{1}{4} e^4 - \frac{13}{4}\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}(e^4 - 13)$$
$$\approx 32{,}671 \quad \text{بالزيادة}$$

ملاحظة : هذه القيم مقدرة بوحدة القياس .

التمرين ــ 11

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = x^2 e^{1-x}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ الوحدة $2\ cm$

1 ــ عين نهاية الدالة f عند: $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم فسر النتائج هندسيا .

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم المنحنى (C)

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نعرف التكامل I_n بـــ $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$

3 ــ عين علاقة بين I_n و I_{n+1}

4 ــ أحسب I_1 و I_2

5 ــ أعط تفسيرا هندسيا لـــ I_2

6 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; 1]$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$

7 ــ إستنتج حصرا لـــ I_n ثم نهاية I_n لما n يؤول إلى $+\infty$

الحــل ــ 11

1 ــ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{1-x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right.$$

لنحسب إذن :
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x\, e^{1-x} = -\infty$$

التفسير الهندسي : المنحنى (C) يقبل فرعا من قطع مكافئ في إتجاه محور التراتيب عند $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 e}{e^x} = 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

2 ــ تغيرات الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2x\, e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2 - x)\, e^{1-x}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(2 - x)$ لأن $e^{1-x} > 0$ كما يلي :

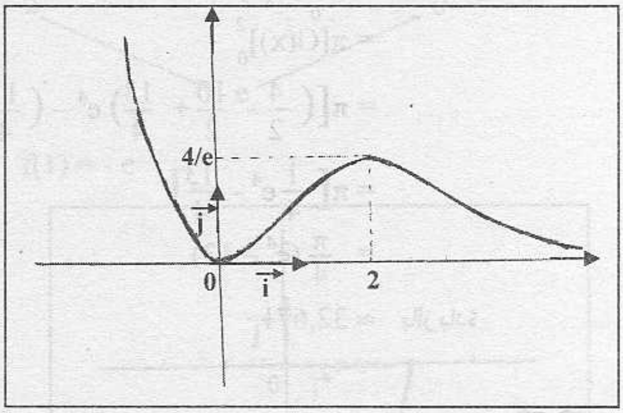
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$	0

$f(0) = 0$
$f(2) = 4/e$

الإنشاء :



3 ــ $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$ إذن : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}\, dx$

لنحسب I_{n+1} بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{1-x} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = (n+1)\, x^n \\ v(x) = -\, e^{1-x} \end{array}\right\}$

منه : $I_{n+1} = [-\, x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -\,(n+1)\, x^n e^{1-x}\, dx$

$$= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$$

$$= -1 + (n+1)\, I_n$$

نتيجة : $I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1$

4 ــ $I_1 = \int_0^1 x\, e^{1-x}\, dx$ (بالتجزئة) :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^{1-x} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\, e^{1-x} \end{array}\right\}$

إذن : $I_1 = [-\, x\, e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -\, e^{1-x}\, dx$

$$= -1 - [e^{1-x}]_0^1$$

$$= -1 - (1 - e)$$

$$= e - 2$$

منه : $I_2 = 2\, I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5$

5 ــ $I_2 = \int_0^1 x^2 e^{1-x}\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$

بما أن الدالة f موجبة على المجال $[0 ; 1]$ فإن $\int_0^1 f(x)\, dx$ هو مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = 1$

إذن : I_2 هي هذه المساحة مقدرة بــ $4\ cm^2$

6 ــ ليكن $x \in [0 ; 1]$ و $n \in IN^*$

$$x^n e^{1-x} - x^n e = x^n e(e^{-x} - 1)$$

$$= x^n e\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)$$

$$= \frac{x^n e}{e^x}(1 - e^x)$$ من إشارة $1 - e^x$ كمايلي :

$0 \le x \le 1$ إذن : $1 \le e^x \le e$

منه : $-\, e \le -\, e^x \le -\, 1$

أي $1 - e \le 1 - e^x \le 0$

و خاصة $1 - e^x \le 0$ منه : $\frac{x^n e}{e^x}(1 - e^x) \le 0$

أي : $x^n e^{1-x} - x^n e \le 0$ ....(1)

من جهة أخرى : $x^n e^{1-x} - x^n = x^n(e^{1-x} - 1)$ من إشارة $e^{1-x} - 1$

إذن $0 \le x \le 1$: إذن $-1 \le -x \le 0$

منه : $0 \le 1 - x \le 1$

إذن : $1 \le e^{1-x} \le e$

منه : $0 \le e^{1-x} - 1 \le e - 1$

و خاصة $e^{1-x} - 1 \ge 0$ إذن : $x^n(e^{1-x} - 1) \ge 0$

أي $x^n e^{1-x} \ge x^n$ ......(2)

من العلاقتين (2) و (1) : $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$

7 – لدينا : $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$ إذن : $\int_0^1 x^n\,dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \le \int_0^1 x^n e\,dx$

أي : $\int_0^1 x^n\,dx \le I_n \le e\int_0^1 x^n\,dx$

أي : $\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le e\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

أي : $\frac{1}{n+1} - 0 \le I_n \le e\left(\frac{1}{n+1} - 0\right)$

أي : $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$

منه : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \le \lim_{n \to +\infty} I_n \le \lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1}$

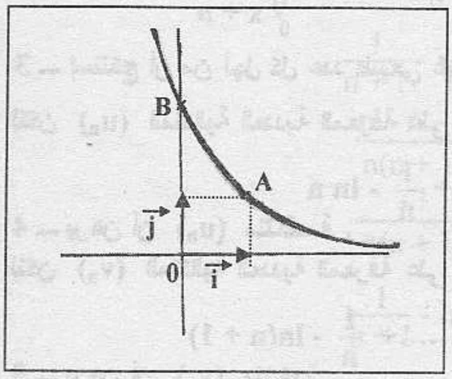
أي : $0 \le \lim_{n \to +\infty} I_n \le 0$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

__التمرين – 12__

لتكن f الدالة العددية القابلة للاشتقاق على IR حيث f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ و تحقق $f(0) = e$.

إليك منحنى الدالة f في الشكل المقابل



1 – عين عبارة f(x)

ليكن t عدد حقيقي من المجال [1 ; e]

2 – حل في R المعادلة $e^{1-x} = t$ ذات المجهول x .

لتكن A و B نقطتان من منحنى الدالة f فواصلهما على الترتيب 1 و 0 .

نعتبر المجسم المحصل بدوران قوس المنحنى $\overset{\frown}{AB}$ حول محور التراتيب

نرمز بـ v إلى حجم هذا المجسم . و نقبل أن $v = \pi\int_1^e (1 - \ln t)^2\,dt$

3 – أحسب v بالتكامل بالتجزئة

__الحـل – 12__

1 – تعيين f(x) : $y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$

$c \in IR^*$ حيث $\Rightarrow y = c\,e^{-x}$

إذن : $f(x) = c\,e^{-x}$

منه : $f(0) = c$ أي $c = e$

نتيجة : $f(x) = e \,.\, e^{-x}$ أي $f(x) = e^{1-x}$ و هي عبارة f(x)

2 – $1 \le t \le e$: $e^{1-x} = t \Rightarrow 1 - x = \ln t$

$\Rightarrow x = 1 - \ln t$ و هو الحل المطلوب .

3 – $v = \pi\int_1^e (1 - \ln t)^2\,dt$

$$= \pi \int_1^e 1 - 2\ln t + (\ln t)^2\, dt$$

$$= \pi \int_1^e 1\, dt - 2\pi \int_1^e \ln t\, dt + \pi \int_1^e (\ln t)^2\, dt$$

$$= \pi [t]_1^e - 2\pi [t\ln t - t]_1^e + \pi \int_1^e (\ln t)^2\, dt$$

$$= \pi(e-1) - 2\pi(e - e + 1) + \pi \int_1^e (\ln t)^2\, dt$$

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots = \pi(e-3) + \pi \int_1^e (\ln t)^2\, dt$$

لنحسب $\int_1^e (\ln t)^2\, dt$ بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(t) = (\ln t)^2 \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{2}{t}\ln t \\ v(t) = t \end{cases}$

إذن : $\int_1^e (\ln t)^2\, dt = [t(\ln t)^2]_1^e - \int_1^e 2\ln t\, dt$

$$= e - 0 - 2\int_1^e \ln t\, dt$$

$$= e - 2[t\ln t - t]_1^e$$

$$= e - 2(e - e + 1)$$

$$= e - 2$$

بالتعويض في المساواة (1) نحصل على : $v = \pi(e-3) + \pi(e-2)$

$$= \pi(2e - 5)$$

ملاحظة : هذا الحجم مقدر بوحدة القياس .

التمرين ـ 13

1 ـ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; 1]$ فإن :

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

2 ـ أحسب $\int_0^1 \frac{1}{x+n}\, dx$

3 ـ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على IN^* بـ :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

4 ـ برهن أن (u_n) متناقصة .

لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على IN^* بـ :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

5 ـ برهن أن (v_n) متزايدة .

6 ـ برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ (لا يطلب تعيين ℓ) .

الحل ـ 13

1 ـ ليكن $x \in [0 ; 1]$ و $n \in IN^*$

$$\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{n - x - n}{n(x+n)} = \frac{-x}{n(x+n)}$$

بما أن $x \geq 0$ فإن $-x \leq 0$ إذن : $\frac{-x}{n(x+n)} \leq 0$ أي $\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \leq 0$

منه : $\frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \ldots\ldots\ldots(1)$

$$\frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\right) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} + \frac{x}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - n(x+n) + x(x+n)}{n^2(x+n)}$$

$$= \frac{n^2 - n\,x - n^2 + x^2 + n\,x}{n^2(x+n)}$$

$$= \frac{x^2}{n^2(x+n)}$$

إذن : $\frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\right) \geq 0$ منه : $\frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}$ .... (2)

نتيجة : من (1) و (2) : $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

2 ـ $\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,d\,x = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

3 ـ لدينا : $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

إذن : $\int_0^1 \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\,d\,x \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,d\,x \leq \int_0^1 \frac{1}{n}\,d\,x$

أي : $\frac{1}{n}\left[x\right]_0^1 - \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left[x\right]_0^1$

أي : $\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ و هو المطلوب

4 ـ $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

لكن $\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ إذن : $-\frac{1}{n} \leq -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{n}$

منه : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2\,n^2} - \frac{1}{n}$

أي $\frac{n-n-1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{2\,n^2 + n + 1 - 2\,n(n+1)}{2\,n^2(n+1)}$

أي $\frac{-1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1-n}{2\,n^2(n+1)}$

بما أن $\frac{1-n}{2\,n^2(n+1)} \leq 0$ و $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$ فإن $\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0$

أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ منه المتتالية (u_n) متناقصة

5 ـ $v_n - v_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n\right)$

$$= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

بما أن $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ فإن $\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq 0$

أي $v_n - v_{n-1} \geq 0$ منه المتتالية (v_n) متزايدة .

6 –
$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\Big)$$
$$= -\ln n + \ln(n+1)$$
$$= \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$$

منه :
$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) = 0$$

نتيجة :
(u_n) متناقصة
(v_n) متزايدة
$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن : فهما متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ

التمرين – 14

f و g دالتان معرفتان على IR كمايلي : $f(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = x^2 e^{-x^2}$
نسمي (C_f) و (C_g) منحناهما على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$
1 – أدرس شفعية الدالتين f و g .
2 – أدرس تغيرات الدالتين f و g على $]0 ; +\infty[$ ثم إستنتج جدولي تغيراتهما على IR .
3 – أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C_g) ثم أنشأهما .
لتكن G الدالة المعرفة على R بـ $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$
4 – ماذا تمثل الدالة G بالنسبة إلى الدالة g ؟
5 – أعط تفسيرا هندسيا لـ $G(x)$ من أجل $x > 0$
6 – أدرس تغيرات الدالة G على IR (لا يطلب حساب النهايات)
لتكن F الدالة المعرفة على IR بـ $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$
7 – بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x : $G(x) = \frac{1}{2}[F(x) - x e^{-x^2}]$
نقبل أن الدالة F تقبل نهاية منتهية h عند $+\infty$
8 – بين أن الدالة G تقبل نهاية منتهية عند $+\infty$ يطلب تعيينها .
9 – فسر هندسيا العدد N حيث $N = \int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt$

الحل – 14

1 – من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و :
$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$
$$g(-x) = (-x)^2 e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} = g(x)$$
نتيجة : الدالتين f و g زوجيتان

2 – تغيرات الدالة f على $]0 ; +\infty[$:
$$f(0) = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$$
$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$
إذن : $f'(x) \leq 0$ على المجال $]0 ; +\infty[$ لأن $-2x \leq 0$
أي : f متناقصة على $]0 ; +\infty[$
بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نحصل على جدول تغيرات الدالة f على IR كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

تغيرات الدالة g على $]0 ; +\infty[$: $g(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

$$g'(x) = 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = (1 - x^2)\, 2x e^{-x^2}$$

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x(1 - x^2)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$+$	0	$-$	
$x(1 - x^2)$	0	$+$	0	$-$	

بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نحصل على جدول تغيرات الدالة g على IR كمايلي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$1/e$	↘	0	↗	$1/e$	↘	0

$$g(-1) = g(1) = e^{-1} = 1/e$$

3 ــ الوضعية النسبية لــ (C_f) و (C_g)

$$f(x) - g(x) = e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} = (1 - x^2) e^{-x^2}$$

إذن : إشارة $f(x) - g(x)$ هي إشارة $1 - x^2$ كما يلي :

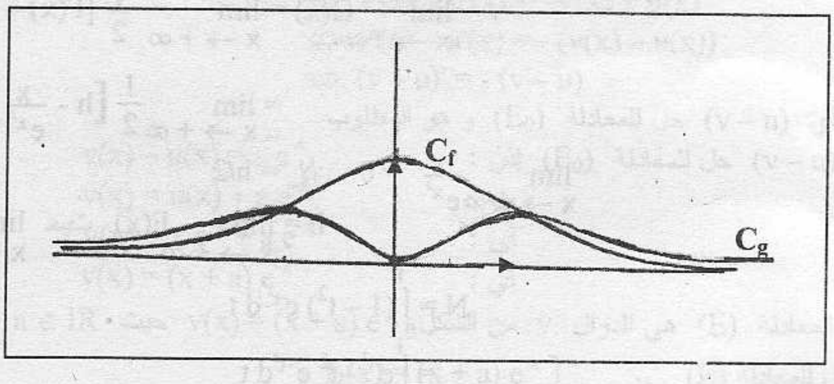
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

خلاصة : لما $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$: (C_f) يقع تحت (C_g)

لما $x \in \{-1 ; 1\}$: (C_f) يقطع (C_g)

لما $x \in]-1 ; 1[$: (C_f) يقع فوق (C_g)

الإنشاء :



4 ــ
$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt = \int_0^x g(t)\, dt$$

إذن : G هي الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 أي $\begin{cases} G'(x) = g(x) \\ G(0) = 0 \end{cases}$

5 ــ من أجل $x > 0$ فإن العدد $G(x)$ يمثل مساحة حيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_g) و محور الفواصل على المجال $[0 ; x]$ لأن المنحنى يقع فوق محور الفواصل

6 ــ تغيرات الدالة G على IR : $G'(x) = g(x)$

إذن : إشارة $G'(x)$ هي إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة G :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$+$	
$G(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} G(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$

7 — $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \int_0^x f(t)\, dt$

إذن : F هي دالة أصلية للدالة f و التي تنعدم عند 0 أي $\left.\begin{matrix} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 0 \end{matrix}\right\}$

لتكن ϕ الدالة المعرفة على IR بـ $\phi(x) = \frac{1}{2}\,[F(x) - x\, e^{-x^2}]$

لدينا ϕ قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) - e^{-x^2} + 2\,x^2\, e^{-x^2}]$$

$$= \frac{1}{2}\,[e^{-x^2} - e^{-x^2} + 2\,x^2\, e^{-x^2}]$$

$$= x^2\, e^{-x^2}$$

$$= g(x)$$

إذن : ϕ هي دالة أصلية للدالة g .

من جهة أخرى : $\phi(0) = \frac{1}{2}\,[F(0) - 0\, e^{-0}] = \frac{1}{2}(0) = 0$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} \phi'(x) = g(x) \\ \phi(0) = 0 \end{matrix}\right\}$ إذن : ϕ هي الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0

إذن : $\phi = G$ أي : $G(x) = \frac{1}{2}\,[F(x) - x\, e^{-x^2}]$

8 — نقبل أن $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = h$ حيث $h \in IR$

لدينا : $G(x) = \frac{1}{2}\,[F(x) - x\, e^{-x^2}]$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\,[F(x) - x\, e^{-x^2}]$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left[h - \frac{x}{e^{x^2}}\right]$$

$= h/2$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = h/2$ حيث $h = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

9 — $N = \int_0^1 (1 - t^2)\, e^{-t^2}\, dt$

$$= \int_0^1 e^{-t^2} - t^2\, e^{-t^2} dt$$

$$= \int_0^1 f(t) - g(t)\, dt$$

بما أن المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (C_g) على المجال $[0 ; 1]$ فإن العدد $N = \int_0^1 f(t) - g(t)\, dt$ يمثل مساحة حيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المنحنى (C_g) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ و $x = 1$

التمرين — 15

الجزء I : لتكن المعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$ ....(E)

1 — بين أن الدالة u المعرفة على IR بـ $u(x) = x\, e^{-x}$ حل للمعادلة (E)

2 — حل في IR المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ ....(E_0)

3 — بين أن الدالة v المعرفة و القابلة للاشتقاق على IR تكون حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت v - u

حلا للمعادلة (E_0)

4 ــ إستنتج جميع حلول المعادلة (E)

5 ــ عين الدالة f_2 حل المعادلة (E) و التي تأخذ القيمة 2 من أجل $x = 0$

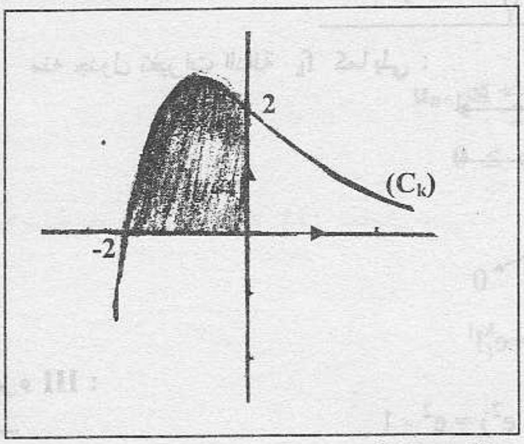
الجزء **II** : k عدد حقيقي معطى . نرمز بــ f_k إلى الدالة المعرفة على IR كمايلي : $f_k(x) = (x + k)\, e^{-x}$ و نرمز بــ (C_k) إلى منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ عين نهايات الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f_k

الجزء **III** : نعتبر متتالية التكاملات (I_n) المعرفة بــ $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\, dx$$



1 ــ أحسب I_0

2 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n + 1)\, I_n$$

3 ــ إستنتج قيم I_1 و I_2

4 ــ التمثيل البياني المقابل هو للدالة f_k المعرفة في الجزء II . باستعمال قراءة بيانية عين قيمة k المرفقة بالمنحنى (C_k)

5 ــ لتكن S مساحة الجزء الملون . عبر عن S بدلالة I_0 و I_1 ثم إستنتج قيمته .

الحـل ــ 15

الجزء I

1 ــ u قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $u'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x}$

منه : $u'(x) + u(x) = e^{-x} - x\, e^{-x} + x\, e^{-x} = e^{-x}$

إذن : u هي فعلا حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$ ....(E)

2 ــ $y' + y = 0$ إذن : $y' = -y$

منه حلول المعادلة (E_0) هي الدوال f من الشكل $f(x) = a\, e^{-x}$ حيث $a \in IR$

3 ــ لتكن v حلا للمعادلة (E) إذن : $v'(x) + v(x) = e^{-x}$

لكن $u'(x) + u(x) = e^{-x}$

إذن

$$v'(x) + v(x) = e^{-x} \Leftrightarrow v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$$
$$\Leftrightarrow v'(x) - u'(x) = -v(x) + u(x)$$
$$\Leftrightarrow v'(x) - u'(x) = -(v(x) - u(x))$$
$$\Leftrightarrow (v - u)' = -(v - u)$$

أي $(v - u)$ حل للمعادلة (E_0) و هو المطلوب

4 ــ نتيجة : $(v - u)$ حل للمعادلة (E_0) إذن : $v(x) - u(x) = a\, e^{-x}$

منه : $v(x) = u(x) + a\, e^{-x}$

أي : $v(x) = x\, e^{-x} + a\, e^{-x}$

أي : $v(x) = (x + a)\, e^{-x}$

خلاصة : حلول المعادلة (E) هي الدوال v من الشكل $v(x) = (x + a)\, e^{-x}$ حيث $a \in IR$

5 ــ $\left.\begin{array}{l} f_2 \text{ حل للمعادلة } (E) \\ f_2(0) = 2 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} f_2(x) = (x + a)\, e^{-x} \\ f_2(0) = 2 \end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l} f_2(x) = (x + a)\, e^{-x} \\ a\, e^0 = 2 \end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l} f_2(x) = (x + a)\, e^{-x} \\ a = 2 \end{array}\right\}$

منه : $f_2(x) = (x + 2)\, e^{-x}$

الجزء **II** :

1 ــ

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + k)\, e^{-x} = -\infty$$

(لأن $\lim_{x \to -\infty} (x + k) = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + k)\, e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} x\, e^{-x} + k\, e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} + k\, e^{-x} = 0$$

(لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} k\, e^{-x} = 0$)

2 ــ f_k قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f_k'(x) = e^{-x} - (x + k)\, e^{-x} = (1 - k - x)\, e^{-x}$

إذن : إشارة $f_k'(x)$ هي إشارة $(1 - k - x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كما يلي:

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$1-k-x$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f_k كما يلي :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & 1-k & & +\infty \\
\hline
f_k'(x) & & + & 0 & - & \\
\hline
 & & & e^{k-1} & & \\
f_k(x) & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -\infty & & & & 0
\end{array}$$

$$f_k(1 - k) = (1 - k + k)\, e^{-(1 - k)} = e^{k-1}$$

الجزء III :

1 ــ $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx = [- e^{-x}]_{-2}^{0} = - 1 - (- e^2) = e^2 - 1$

2 ــ $I_{n+1} = \int_{-2}^{0} x^{n+1}\, e^{-x}\, dx$ لنحسب هذا التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{-x} \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = (n + 1)\, x^n \\ v(x) = - e^{-x} \end{array}\right.$

منه :
$$I_{n+1} = [- x^{n+1}\, e^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} - (n + 1)\, x^n\, e^{-x}\, dx$$
$$= 0 - (- (- 2)^{n+1}\, e^2) + (n + 1) \int_{-2}^{0} x^n\, e^{-x}\, dx$$
$$= (- 2)^{n+1}\, e^2 + (n + 1)\, I_n$$

نتيجة : من أجل $n \geq 0$: $I_{n+1} = (- 2)^{n+1}\, e^2 + (n + 1)\, I_n$

3 ــ حسب النتيجة السابقة :
$$I_1 = (- 2)^1\, e^2 + I_0 = - 2\, e^2 + e^2 - 1 = - e^2 - 1$$
$$I_2 = (- 2)^2\, e^2 + 2\, I_1 = 4\, e^2 + 2(- e^2 - 1) = 2\, e^2 - 2$$

4 ــ حسب المنحنى الممثل للدالة f_k فإن النقطة A ذات الإحداثيات $(0 ; 2)$ تنتمي إلى المنحنى

إذن : $f_k(0) = 2$ أي $(0 + k)\, e^0 = 2$ منه $k = 2$

نتيجة : المنحنى ممثل للدالة f_2 حيث $f_2(x) = (x + 2)\, e^{-x}$ (أي $k = 2$)

5 ــ منحنى الدالة f_2 يقع فوق محور الفواصل على المجال $[- 2 ; 0]$ إذن عبارة المساحة S هي كمايلي :

$$S = \int_{-2}^{0} f_2(x)\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (x + 2)\, e^{-x}\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} x\, e^{-x} + 2\, e^{-x}\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx + 2 \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx$$
$$= I_1 + 2\, I_0$$ و هو المطلوب

نتيجة :
$$S = I_1 + 2\, I_0$$
$$= - e^2 - 1 + 2(e^2 - 1)$$
$$= e^2 - 3$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة القياس .

التمرين ــ 16

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$

1 ــ أحسب I_1

2 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 \le I_n \le \frac{2^{n+1}}{n!} e^2$

3 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

4 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$: $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$: $u_n = \frac{2^n}{n!}$

5 ــ أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثم تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 3$: $u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$

6 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 3$: $0 \le u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

7 ــ إستنتج نهاية المتتالية (u_n) ثم نهاية المتتالية (I_n)

8 ــ بين أن $e^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots + \frac{2^n}{n!}\right)$

الحـل ــ 16

1 ــ

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{1!}(2-x)^1 e^x \, dx$$

$$= \int_0^2 (2-x) e^x \, dx$$

بالتجزئة : نضع $\left.\begin{aligned} u(x) &= 2 - x \\ v'(x) &= e^x \end{aligned}\right\}$ إذن $\left.\begin{aligned} u'(x) &= -1 \\ v(x) &= e^x \end{aligned}\right\}$

منه :

$$I_1 = [(2-x) e^x]_0^2 - \int_0^2 - e^x \, dx$$

$$= 0 - 2 + [e^x]_0^2$$

$$= -2 + e^2 - 1$$

$$= e^2 - 3$$

2 ــ $0 \le x \le 2$: إذن $\left.\begin{aligned} e^0 &\le e^x \le e^2 \\ -2 &\le -x \le 0 \end{aligned}\right\}$

منه : $\left.\begin{aligned} 1 &\le e^x \le e^2 \\ 0 &\le 2 - x \le 2 \end{aligned}\right\}$

منه : $\left.\begin{aligned} 1 &\le e^x \le e^2 \\ 0 &\le (2-x)^n \le 2^n \end{aligned}\right\}$

منه : $0 \le (2-x)^n e^x \le 2^n e^2$ (جداء المتباينتين)

منه : $0 \le \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \le \frac{2^n}{n!} e^2$

إذن : $0 \le \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx \le \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^2 \, dx$

أي : $0 \le I_n \le \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^2 \, dx$

أي : $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!} e^2 [x]_0^2$

أي : $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!} e^2 (2)$

منه : $0 \le I_n \le \frac{2^{n+1}}{n!} e^2$ و هو المطلوب

3 – $I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1} e^x\,dx$

$= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x\,dx \ldots\ldots (1)$ لنحسب $\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x\,dx$ بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = (2-x)^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} u'(x) = -(n+1)(2-x)^n \\ v(x) = e^x \end{array}\right\}$

منه : $\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x\,dx = [(2-x)^{n+1} e^x]_0^2 - \int_0^2 -(n+1)(2-x)^n e^x\,dx$

$= -(2)^{n+1} + (n+1)\int_0^2 (2-x)^n e^x\,dx$

$= -2^{n+1} + n!(n+1)\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$

$= -2^{n+1} + (n+1)!\,I_n$

نتيجة : بالرجوع إلى المساواة (1) نحصل على :

$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(-2^{n+1} + (n+1)!\,I_n)$

أي : $I_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} I_n$

أي : $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ و هو المطلوب

4 – لتكن الخاصية : $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

لنثبت صحتها بالتراجع من أجل كل $n \geq 1$

من أجل $n = 1$: $1 + \frac{2}{1!} + I_1 = 1 + 2 + e^2 - 3 = e^2$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$ من أجل $n > 1$

هل $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} = e^2$ ؟

لدينا : $\underbrace{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!}}_{e^2 - I_n \text{ حسب فرضية التراجع}} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} = e^2 - I_n + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

$= e^2 - I_n + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$= e^2$ إذن : الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN^*$: $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$

5 – $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$

نتيجة : $n \geq 3$ إذن : $n + 1 \geq 4$ منه $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{4}$

أي $\frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ منه : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ و هو المطلوب (لأن $u_n > 0$)

6 – لنثبت بالتراجع أن من أجل $n \geq 3$: $u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

من أجل $n = 3$ لدينا : $u_3 \leq u_3$ أي $u_3 \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ منه الخاصية محققة .

نفرض أن $u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ من أجل $n > 3$

هل $u_{n+1} \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-3}$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

من جهة أخرى : $u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n$

إذن : $u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

أي $u_{n+1} \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-3}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل $n \ge 3$: $u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

من جهة أخرى : $u_n = \frac{2^n}{n!}$ إذن : $u_n \ge 0$ لأن $2^n > 0$ و $n! > 0$

خلاصة : من أجل كل $n \ge 3$: $0 \le u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

7 ـ لدينا : $0 \le u_n \le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ من أجل $n \ge 3$

و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$ إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (حسب الحصر)

حسب السؤال (2) لدينا : $0 \le I_n \le \frac{2^{n+1}}{n!}e^2$

أي : $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!}(2e^2)$

أي : $0 \le I_n \le 2e^2 u_n$

لكن $\lim\limits_{n \to +\infty} 2e^2 u_n = 0$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ إذن : حسب الحصر فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

8 ـ لدينا : من أجل $n \ge 1$: $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

من أجل n يؤول إلى $+\infty$ نحصل على :

$$e^2 = \lim_{n \to +\infty}\left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!} + I_n\right]$$

أي : $e^2 = \lim\limits_{n \to +\infty}\left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!}\right]$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$

التمرين ـ 17

من أجل كل عدد حقيقي k حيث $k \ge 0$ نعتبر الدالة f_k المعرفة على IR بـ $f_k(x) = \frac{1 - k e^x}{1 + k e^x} + x$

1 ـ بين أن الدالة f_k هي حل للمعادلة التفاضلية $2y' = (y - x)^2 + 1$ .... (E)

2 ـ إستنتج إتجاه تغير الدالة f_k

نرمز بـ (C_k) إلى منحنى الدالة f_k في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

في الشكل المقابل رسمنا المستقيمين (d) و (d') اللذين معادلاتهما على الترتيب $y = x - 1$ و $y = x + 1$ و ثلاث منحنيات للدالة f_k مرفقة لقيم مختلفة لـ k

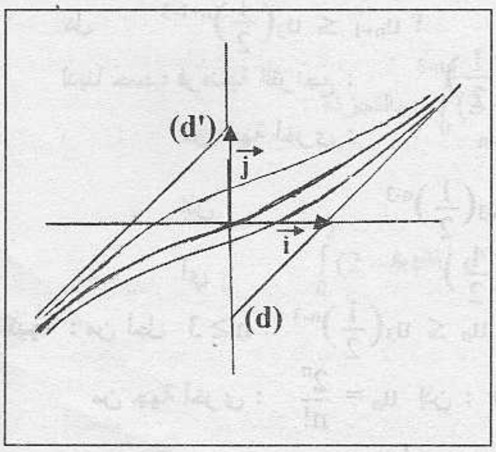
3 ـ عين العدد الحقيقي k المرفق بالمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ 0 ثم العدد k المرفق بالمنحنى (C') الذي يشمل النقطة $A(1 ; 1)$

4 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + k e^x}$ .... (1)

و $f_k(x) = x + 1 - \frac{2 k e^x}{1 + k e^x}$ .... (2)

5 ـ من أجل $k > 0$ إستنتج ما يلي :

أ ـ وضعية المنحنى (C_k) بالنسبة إلى المستقيمين (d) و (d')



ب ــ معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_k) .

ليكن $k = 1$

6 ــ بين أن f_1 دالة فردية .

لتكن F الدالة المعرفة على IR بـ $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$

7 ــ فسر هندسيا العدد $F(x)$ في الحالتين $x > 0$ و $x < 0$

ثم استنتج شفعية الدالة F

8 ــ شكل جدول تغيرات الدالة F على IR

(لا يطلب حساب النهايات) .

9 ــ أحسب $F(x)$ مستعملا الشكل الأنسب لـ $f_1(x)$

<u>الحـل ــ 17</u>

1 ــ من أجل كل x من IR :
$$f_k'(x) = \frac{-k e^x(1 + k e^x) - k e^x(1 - k e^x)}{(1 + k e^x)^2} + 1$$
$$= \frac{-k e^x - k^2 e^{2x} - k e^x + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2} + 1$$
$$= \frac{-2 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

منه : $2 f_k'(x) = \dfrac{-4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 2 \ldots\ldots\ldots (1)$

من جهة أخرى :
$$(f_k(x) - x)^2 + 1 = \left(\frac{1 - k e^x}{1 + k e^x}\right)^2 + 1$$
$$= \frac{1 - 2 k e^x + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2} + 1$$
$$= \frac{1 - 2 k e^x + k^2 e^{2x} + 2 k e^x - 2 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$
$$= \frac{1 + 2 k e^x + k^2 e^{2x} - 4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$
$$= \frac{(1 + k e^x)^2 - 4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$
$$= 1 - \frac{4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$
$$= \frac{-4 k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $2 f_k'(x) = (f_k(x) - x)^2 + 1$

أي : الدالة f_k حل للمعادلة $2 y' = (y - x)^2 + 1 \ldots\ldots$ (E)

2 ــ حسب السؤال (1) : $2 f_k'(x) = (f_k(x) - x)^2 + 1$ إذن : $f_k'(x) = \frac{1}{2}\left[(f_k(x) - x)^2 + 1\right]$

منه : $f_k'(x) > 0$ من أجل كل x من IR

إذن : f_k متزايدة تماما على IR كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_k(x)$	↗

3 ـ المنحنى (C) يشمل ال بدأ 0 إذن : $f_k(0) = 0$

منه : $\frac{1-k}{1+k} + 0 = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0$

$\Leftrightarrow k = 1$

المنحنى (C') يشمل النقطة $A(1 ; 1)$ إذن : $f_k(1) = 1$

منه : $\frac{1-ke}{1+ke} + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1-ke}{1+ke} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - ke = 0$

$\Leftrightarrow k = 1/e$

4 ـ من أجل كل x من IR فإن :

$$x - 1 + \frac{2}{1+ke^x} = x + \frac{-1-ke^x+2}{1+ke^x} = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x} = f_k(x)$$

$$x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} = x + \frac{1+ke^x-2ke^x}{1+ke^x} = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x} = f_k(x)$$

5 ـ ليكن $k > 0$

أ ـ وضعية (C_k) بالنسبة لـ (d) و (d')

$$f_k(x) - (x-1) = x - 1 + \frac{2}{1+ke^x} - (x-1) = \frac{2}{1+ke^x} > 0$$

إذن : المنحنى (C_k) فوق المستقيم (d)

$$f_k(x) - (x+1) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} - (x+1) = \frac{-2ke^x}{1+ke^x} < 0$$

إذن : المنحنى (C_k) تحت المستقيم (d')

ب ـ معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_k) :

$$\lim_{x \to -\infty} [f_k(x) - (x+1)] = \lim_{x \to -\infty} \left[x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} - (x+1)\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2ke^x}{1+ke^x} = 0$$

إذن : المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_k) في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f_k(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{1+ke^x} - (x-1)\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+ke^x} = 0$$

إذن : المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_k) في جوار $+\infty$

6 ـ $k = 1$: $f_1(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} + x$

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و :

$$f_1(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} - x = \frac{e^{-x}(e^x-1)}{e^{-x}(e^x+1)} - x = \frac{e^x-1}{e^x+1} - x = \frac{-(1-e^x)}{(1+e^x)} - x = -\left(\frac{1-e^x}{1+e^x} + x\right) = -f_1(x)$$

إذن : f_1 دالة فردية .

7 ـ $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x \frac{1-e^t}{1+e^t} + t\,dt$

بملاحظة منحنى الدالة f_1 على الشكل (يشمل المبدأ 0) . نستنتج مايلي :

من أجل $x > 0$: المنحنى فوق محور الفواصل .

من أجل $x < 0$: المنحنى تحت محور الفواصل .

نتيجة : نسمي S مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f_1 و محور الفواصل على المجال $[0 ; x]$ حيث $x > 0$

و نسمي S' مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f_1 و محور الفواصل على المجال $[x ; 0]$ حيث $x < 0$

إذن لدينا النتائج التالية :

إذا كان $x > 0$ فإن : $\int_0^x f_1(t)\,dt = S$ لأن المنحنى فوق محور الفواصل .

إذا كان $x < 0$ فإن : $\int_0^x f_1(t)\,dt = -\int_x^0 f_1(t)\,dt$ (حسب خواص التكامل)

$$= \int_x^0 -f_1(t)\,dt$$

$= S'$ لأن المنحنى تحت محور الفواصل .

خلاصة : العدد $\int_0^x f_1(t)\,dt$ هو مساحة الجزء من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال $[0\,;|x|]$ لأن الدالة f_1 فردية

نتيجة : $F(x) - F(-x) = \int_0^x f_1(t)\,dt - \int_0^{-x} f_1(t)\,dt = 0$ منه $F(-x) = F(x)$

إذن : F دالة زوجية

8 ـــ $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$ إذن : F هي الدالة الأصلية لـــ f_1 و التي تنعدم عند 0

منه $F'(x) = f_1(x)$ إذن : إشارة $F'(x)$ هي إشارة $f_1(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x) = f_1(x)$ (حسب المنحنى)		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة F :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	0	↗	

9 ـــ حساب $F(x)$:

$$F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{1-e^t}{1+e^t} + t\,dt$$

$$= \int_0^x t + 1 - \frac{2e^t}{1+e^t}\,dt$$ حسب السؤال (4) .

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + t - 2\ln(1+e^t)\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - 2\ln(1+e^x) + 2\ln 2$$

نتيجة : عبارة $F(x)$ هي : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2\ln(1+e^x) + \ln 4$

تحقيق : $F'(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{1+e^x} = x + \frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x} = x + \frac{1-e^x}{1+e^x} = f_1(x)$

$$F(0) = 0 - 2\ln(2) + \ln 4 = -\ln 4 + \ln 4 = 0$$

التمرين ـــ 18

نعتبر الدوال f_n المعرفة على المجال $[0\,;1]$ بـــ $f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$$

نضع $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

الجزء I

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f_0 ثم أرسم منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$ حيث وحدة القياس $6\ cm$ محددا المماسات عند النقط ذات الفواصل 0 و 1

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\,;1]$ نضع $f(x) = -f_0'(x)$

2 ـــ أحسب الدالة المشتقة للدالة f ثم بين أن f متناقصة على المجال $[0\,;1]$

3 ـ إستنتج أن من أجل كل x من المجال $[0 ; 1]$: $1/3 \leq f(x) \leq 1$

الجزء II

1 ـ أحسب $I_0 + I_1 + I_2$ ثم $I_0 + 2 I_1$

2 ـ أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[0 ; 1]$

3 ـ إستنتج إتجاه تغير المتتالية (I_n)

4 ـ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل $x \in [0 ; 1]$: $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

5 ـ إستنتج أن : $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

6 ـ عين نهاية المتتالية (I_n)

7 ـ باستعمال التكامل بالتجزئة برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx$$

8 ـ باستعمال حصر العدد $f(x)$ في الجزء I بين أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 f(x)\, x^{n+1}\, dx \leq \frac{1}{n+2}$$

9 ـ بين أن : $\dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

10 ـ إبتداءا من أي عدد طبيعي n_0 يكون هذا الحصر يقترب بالزيادة إلى $0,01$ من I_n

11 ـ عين قيمة مقربة إلى $0,01$ بالزيادة لـ I_n من أجل $n = n_0$

<u>الحـل ـ 18</u>

الجزء I

1 ـ تغيرات الدالة f_0 على المجال $[0 ;1]$:

$f_0(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ إذن : $f_0(0) = 1$ و $f_0(1) = 1/3$

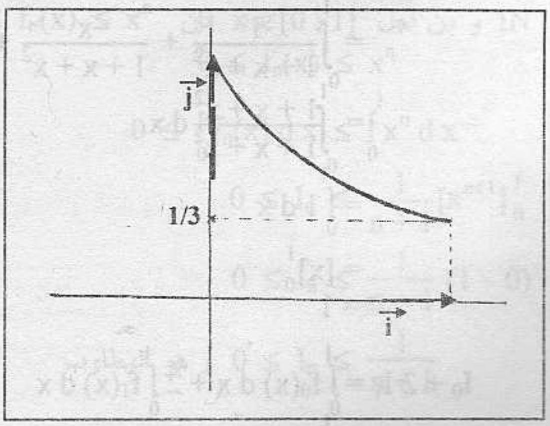
f_0 قابلة للاشتقاق على $[0 ; 1]$ و : $f_0'(x) = \dfrac{-2x - 1}{(1 + x + x^2)^2} = \dfrac{-(2x + 1)}{(1 + x + x^2)^2}$

منه : $f_0'(x) < 0$ على المجال $[0 ; 1]$ لأن $-(2x + 1) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة f_0 :

x	0 → 1
$f_0'(x)$	$-$
$f_0(x)$	1 ↘ $1/3$

الإنشاء :



المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $f_0(0) = 1$ ؛ $f_0'(0) = -1$

إذن : المماس له المعادلة $y = -x + 1$

المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 : $f_0(1) = 1/3$ ؛ $f_0'(1) = -3/9 = -1/3$

إذن : المماس له المعادلة $y = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}$ أي $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

2 ــ $f(x) = -f_0'(x)$ إذن : $f(x) = \dfrac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

إذن :
$$f'(x) = \frac{2(1+x+x^2)^2 - 2(2x+1)(1+x+x^2)(2x+1)}{(1+x+x^2)^4}$$
$$= \frac{1+x+x^2}{(1+x+x^2)^4}\left[2(1+x+x^2) - 2(2x+1)^2\right]$$
$$= \frac{1}{(1+x+x^2)^3}(2+2x+2x^2-8x^2-8x-2)$$
$$= \frac{-6x^2-6x}{(1+x+x^2)^3}$$
$$= \frac{-6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}$$

على المجال $[0 ; 1]$ لدينا $x+1 \geq 0$ و $-6x \leq 0$ إذن $\dfrac{-6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3} \leq 0$

إذن : الدالة f متناقصة على المجال $[0 ; 1]$

3 ــ f متناقصة على المجال $[0 ; 1]$ إذن جدول تغيراتها كما يلي :

x	0		1
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/3$

$$f(0) = -f_0'(0) = -(-1) = 1$$
$$f(1) = -f_0'(1) = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن من أجل كل x من $[0 ; 1]$: $1/3 \leq f(x) \leq 1$

الجزء II

1 ــ
$$I_0 + I_1 + I_2 = \int_0^1 f_0(x)\,dx + \int_0^1 f_1(x)\,dx + \int_0^1 f_2(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} + \frac{x}{1+x+x^2} + \frac{x^2}{1+x+x^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 1\,dx$$
$$= [x]_0^1$$
$$= 1$$

$$I_0 + 2I_1 = \int_0^1 f_0(x)\,dx + 2\int_0^1 f_1(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 f_0(x) + 2f_1(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} + \frac{2x}{1+x+x^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x+x^2}\,dx$$
$$= [\ln(1+x+x^2)]_0^1$$
$$= \ln 3 - \ln 1$$
$$= \ln 3$$

2 ــ إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

الحالة الأولى : من أجل $n = 0$

$$f_1(x) - f_0(x) = \frac{x}{1+x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{x-1}{1+x+x^2}$$

إذن : $f_1(x) - f_0(x) \leq 0$ لأن على المجال $[0\,;1]$ فإن $x-1 \leq 0$ و $1+x+x^2 > 0$

الحالة الثانية : من أجل $n > 0$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2} - \frac{x^n}{1+x+x^2} = \frac{x^n}{1+x+x^2}(x-1)$$

إذن : $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ لأن على المجال $[0\,;1]$ فإن $x-1 \leq 0$ و $x^n \geq 0$ و $1+x+x^2 > 0$

خلاصة : من أجل كل n من IN فإن $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

3 ــ حسب السؤال السابق فإن على المجال $[0\,;1]$: $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

أي $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

منه : $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx$

أي $I_{n+1} \leq I_n$

نتيجة : المتتالية (I_n) متناقصة

4 ــ من أجل $n = 0$ لدينا : $f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ إذن : $f_0(x) \geq 0$ على المجال $[0\,;1]$

و $f_0(x) - 1 = \frac{1}{1+x+x^2} - 1 = \frac{-x-x^2}{1+x+x^2} \leq 0$ إذن : $f_0(x) \leq 1$

منه : $0 \leq f_0(x) \leq 1$

من أجل $n > 0$: لدينا : $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$ إذن : $f_n(x) \geq 0$ على المجال $[0\,;1]$

$f_n(x) - x^n = \frac{x^n}{1+x+x^2} - x^n = x^n\left(\frac{1}{1+x+x^2} - 1\right) = \frac{x^n}{1+x+x^2}(-x-x^2) \leq 0$ إذن : $f_n(x) \leq x^n$

منه : $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

خلاصة : من أجل كل n من IN و من أجل $x \in [0\,;1]$ فإن $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

5 ــ حسب السؤال السابق : $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

إذن : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$

أي : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}[x^{n+1}]_0^1$

أي : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}(1-0)$

أي : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ و هو المطلوب

6 ــ لدينا : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ إذن : حسب الحصر فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

7 ــ لنحسب I_n بالتجزئة كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 x^n f_0(x)\,dx$$

بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = f_0(x) \\ v'(x) = x^n \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = f_0'(x) = -f(x) \text{ لأن } f(x) = -f_0'(x) \\ v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \end{array}\right\}$

منه : $I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}f_0(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{n+1}x^{n+1}f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{n+1}f_0(1) - 0 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,dx$$ و هو المطلوب

8 ــ حسب الجزء I من التمرين فإن : $1/3 \le f(x) \le 1$

إذن : $\frac{1}{3}x^{n+1} \le f(x)\,x^{n+1} \le x^{n+1}$ من أجل $0 \le x \le 1$

منه : $\int_0^1 \frac{1}{3}x^{n+1}\,dx \le \int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,dx \le \int_0^1 x^{n+1}\,dx$

منه : $\frac{1}{3(n+2)}\left[x^{n+2}\right]_0^1 \le \int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,dx \le \frac{1}{n+2}\left[x^{n+2}\right]_0^1$

أي $\frac{1}{3(n+2)} \le \int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,dx \le \frac{1}{n+2}$ و هو المطلوب

9 ــ لدينا : $\frac{1}{3(n+2)} \le \int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,dx \le \frac{1}{n+2}$

إذن : $\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{3(n+2)}\right) \le \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,dx \le \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+2}\right)$

أي $\frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,dx \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

منه : $\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,dx \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

أي $\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le I_n \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

10 ــ يكون الحصر مقتربا من 0,01 بالزيادة إذا و فقط إذا كان :

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left[\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)}\right] \le 0{,}01$$

أي : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le 0{,}01$

أي : $\frac{2}{3(n+1)(n+2)} \le 0{,}01$

أي : $0,01 \times 3(n+1)(n+2) \geq 2$

أي : $0,03(n^2+3n+2) \geq 2$

أي : $0,03\,n^2 + 0,09\,n + 0,06 \geq 2$

أي : $0,03\,n^2 + 0,09\,n - 1,94 \geq 0$

أي : $3\,n^2 + 9\,n - 194 \geq 0$

لنحل المعادلة $3\,x^2 + 9\,x - 194 = 0$ في IR

$x = 81 + 2328 = 2409$

إذن : $x_1 = \dfrac{-9+\sqrt{2409}}{6}$ و $x_2 = \dfrac{-9-\sqrt{2409}}{6}$

منه إشارة $3\,x^2 + 9\,x - 194$ كمايلي :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$3x^2+9x-194$		+	0	-	0	+	

لاحظ أن $x_1 \approx \dfrac{-9+49,08}{6} \approx \dfrac{40,08}{6} \approx 6,68$

إذن : أصغر عدد طبيعي n_0 يحقق $3\,n_0^2 + 9\,n_0 - 194 \geq 0$ هو $n_0 = 7$

نتيجة : يكون الحصر يقترب إلى $0,01$ بالزيادة إبتداء من $n_0 = 7$

11 ـــ من أجل $n = 7$ نحصل على : $\dfrac{1}{3\times 8} + \dfrac{1}{8\times 9} \leq I_7 \leq \dfrac{1}{3\times 8} + \dfrac{1}{3\times 8\times 9}$

أي : $0,0462 \leq I_7 \leq 0,0555$

إذن : $I_7 = 0,05$ بتقريب $0,01$ بالزيادة .

التمرين ـــ 19

الجزء I : لتكن f الدالة المعرفة على $IR - \{-1\}$ بـــ $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ـــ أكتب $f(x)$ من الشكل $a\,x + b + \dfrac{c}{x+1}$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$

3 ـــ أثبت أن المنحنى (C) يقبل مماسين ميلهما 3 عند نقطتين A و B يطلب إحداثياهما .

4 ـــ برهن أن النقطتين A و B متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

5 ـــ أكتب معادلتي المماسين عند A و B

6 ـــ أثبت أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) و أخر شاقولي (D)

لتكن I نقطة تقاطع (Δ) و (D)

7 ـــ أثبت أن I مركز تناظر للمنحنى (C) ثم أنشئ (C)

8 ـــ إستنتج إنشاء للمنحنى (C') الممثل للدالة v حيث $v(x) = \dfrac{x^2+x-2}{|x+1|}$

ليكن D_λ الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ ؛ $x = \lambda$ حيث $\lambda \in]1\,;+\infty[$

9 ـــ أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز D_λ ثم عين $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

الجزء II

لتكن g الدالة المعرفة كمايلي : $g(x) = \dfrac{(\ln x)^2 + \ln x - 2}{\ln x + 1}$

1 ـــ عين مجموعة تعريف الدالة g

2 ـــ أثبت أن g هي مركب الدالة f و دالة أخرى يطلب تعيينها

3 ـــ إستنتج عبارة $g'(x)$ بدلالة $f'(\ln x)$ ثم أدرس إشارتها

4 ـــ أرسم جدول تغيرات الدالة g ثم أنشئ منحناها (C'') في معلم متعامد و متجانس .

الجزء III

لتكن h_m الدالة المعرفة على IR بـــ $h_m(x) = \dfrac{e^{2mx} + e^{mx} - 2}{e^{mx}+1}$ حيث m عدد حقيقي معطى غير معدوم .

1 ـــ من أجل $m = 1$ أثبت أن h_1 هي مركب الدالة f و دالة أخري يطلب تعيينها

2 ــ أدرس تغيرات الدالة h_1

3 ــ ليكن $m \in IR^*$ أثبت أن $h_m = f \circ u_m$ حيث u_m دالة يطلب تعيينها

4 ــ أدرس تغيرات الدالة u_m

5 ــ حل في IR المعادلة $u_m(x) = t$ ذات المجهول x حيث t عدد حقيقي معطى

الحـل ــ 19

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{1-1-2}{x+1} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ <}} \frac{-2}{y} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1-1-2}{x+1} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ >}} \frac{-2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $IR - \{-1\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2+2x+3 كما يلي :

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ إذن : $x^2+2x+3 > 0$ من أجل كل x من IR

منه : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $IR - \{-1\}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2 ــ باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-2 & x+1 \\ \cline{2-2} x^2+x & x \\ \hline 0-2 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = x - \frac{2}{x+1}$

3 ــ يكون للمنحنى (C) مماس ميله 3 عند نقطة ذات الفاصلة x_0 إذا و فقط إذا كان x_0 حلا للمعادلة $\left.\begin{matrix} f'(x) = 3 \\ x \neq -1 \end{matrix}\right\}$ كمايلي :

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = 3$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+6x+3 = x^2+2x+3$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = -2$$

نتيجة : (C) يقبل مماسين ميلهما 3 أحدهما عند النقطة $A(0 ; f(0))$ و الآخر عند النقطة $B(-2 ; f(-2))$:

$f(0) = -2$ إذن : $A(0 ; -2)$

$f(-2) = \frac{4-2-2}{-1} = 0$ إذن : $B(-2 ; 0)$

4 ــ بما أن فاصلة A تساوي ترتيب B و ترتيب A تساوي فاصلة B فإن النقطتين A و B متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

5 ــ المماس عند A له المعادلة : $y = 3(x-0) - 2$ أي $y = 3x - 2$

المماس عند B له المعادلة : $y = 3(x+2)+0$ أي $y = 3x+6$

6 –
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\left[x - \frac{2}{x+1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x+1} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{2}{x+1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+1} = 0$$

إذن : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

من جهة أخرى $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $x = -1$ مقارب شاقولي للمنحنى (C)

7 – لتكن $I(x\,;y)$ نقطة تقاطع (Δ) و (D) .

$I \in (D)$ إذن : $x = -1$

$I \in (\Delta)$ إذن : $y = x$ أي $y = -1$

نتيجة : $I(-1\,;-1)$

ليكن $x \neq -1$ إذن : $-x \neq 1$

منه : $-2-x \neq -2+1$

أي $-2-x \neq -1$

أي f معرفة من أجل $-2-x$

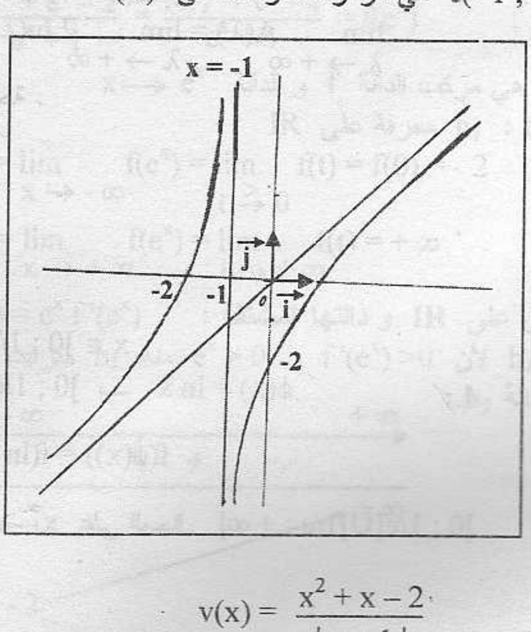
$$f(-2-x) = \frac{(-2-x)^2+(-2-x)-2}{-2-x+1}$$
$$= \frac{4+4x+x^2-2-x-2}{-2-x+1}$$
$$= \frac{x^2+3x}{-x-1}$$

$$2(-1)-f(x) = -2-\frac{x^2+x-2}{x+1}$$
$$= \frac{-2x-2-x^2-x+2}{x+1}$$
$$= \frac{-x^2-3x}{x+1}$$
$$= \frac{x^2+3x}{-x-1}$$

نتيجة : $f(-2-x) = 2(-1)-f(x)$

إذن : النقطة $I(-1\,;-1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C)

الإنشاء :



8 – $v(x) = \dfrac{x^2+x-2}{|x+1|}$

الفهرس

سلسلة هبــاج

TEL : 0773 26 52 81