Kimou.

التشابه المباشر

في كل هذا المحور نعتبر المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\vec{o}\ ;\ \vec{oi}\ ;\ oj)$

تعريف :

S تحويل نقطي للمستوي .

نقول أن S تشابه مباشر إذا وفقط إذا كان S يحافظ على نسب المسافات و على الزوايا الموجهة أي من أجل كل أربع نقط M ، N ، P ، Q (حيث M لا تنطبق على N) إذا كانت صورها على الترتيب بالتحويل S هي 'M' ، N' ، P' ، Q فإن $\frac{PQ}{MN} = \frac{P'Q'}{M'N'}$ و $(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{M'N'}\ ;\ \overrightarrow{P'Q'})$

النسبة $\frac{M'N'}{MN}$ تسمى نسبة التشابه المباشر S (عدد حقيقي موجب تماما) و الزاوية $(\overrightarrow{MN}\ ;\ \overrightarrow{M'N'})$ تسمى زاوية التشابه المباشر S .

خاصية أساسية : كل تشابه مباشر من المستوي المركب له عبارة مركبة من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث α و β عددان مركبان و $\alpha \neq 0$ حيث نسبة هذا التشابه هي $|\alpha|$ و زاويته هي $Arg(\alpha)$

ملاحظة : باعتبار القيم الممكنة لــ α فإن كل من الانسحاب و التناظر المركزي و التحاكي و الدوران هي تشابهات للمستوي .

نشاط :

S تشابه للمستوي عبارته المركبة $z' = (1 + i) z - 2 i$

عين احداثيات 'A صورة $A(1\ ;\ -1)$ بـــ S ثم نسبة وزاوية التشابه S

الحــل : من أجل $z = 1 - i$ فإن : $z' = (1 + i)(1 - i) - 2 i = 1 + 1 - 2 i = 2 - 2 i$

إذن : $A'(2\ ;\ -2)$

لتكن k نسبة التشابه S إذن : $k = |1 + i| = \sqrt{2}$

لتكن θ زاوية التشابه S إذن : $\theta = Arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

تركيب تشابهين مباشرين

خاصية (1)

تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه نسبته هي جداء النسبتين و زاويته هي مجموع الزاويتين

نتائج :

ليكن S تشابه مباشر للمستوي عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$

التشابه المباشر	النسبة	الزاوية	ملاحظة
الانسحاب	1	0	$\alpha = 1$
التناظر المركزي	1	π	$\alpha = -1$
التحاكي	$\|\alpha\|$	$Arg(\alpha)$	$\alpha \in IR - \{0\ ;\ 1\ ;\ -1\}$
الدوران	1	$Arg(\alpha)$	$\alpha \in C - IR$ و $\|\alpha\| = 1$
	$\|\alpha\|$	$Arg(\alpha)$	$\alpha \in C - IR$ و $\|\alpha\| \neq 1$

خلاصة :

S تشابه مباشر نسبته k حيث $k \in IR^*$ و زاويته θ حيث $\theta \in IR$

- إذا كان $k = 1$ و $\theta = 0$ فإن S انسحاب .
- إذا كان $(k\ ;\ \theta) \neq (1\ ;\ 0)$ فإن S يقبل نقطة صامدة وحيدة w تسمى مركز التشابه . في هذه الحالة التشابه S يكتب على أحد الأشكال التالية $S = RoH$ أو $S = HoR$ حيث H هو التحاكي ذو المركز w و النسبة k و R هو الدوران ذو المركز w و الزاوية θ

مثـال :

S_1 تشابه عبارته $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right) z + 3i$

S_2 تشابه عبارته $z' = (\sqrt{3} + i) z + 3 - 3\sqrt{3}i$

ما هي طبيعة التحويل S_1oS_2 ؟

الحـل :

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} i = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\sqrt{3} + i = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

نتيجة : S_1 تشابه نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{6}$

S_2 تشابه نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{6}$

إذن : S_1oS_2 هو تشابه نسبته $2 \times \frac{1}{2} = 1$ و زاويته $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$

أي : S_1oS_2 هو انسحاب .

للبحث عن شعاعه نبحث عن صورة نقطة كيفية ليكن المبدأ O .

$$S_1oS_2(0) = S_1[S_2(0)]$$

لدينا : صورة المبدأ بالتشابه S_2 هي النقطة ذات الآحقة $3 - 3\sqrt{3}i$ و صورة النقطة ذات الآحقة $3 - 3\sqrt{3}i$ بالتحويل S_1 هي النقطة ذات الأحقة :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)(3 - 3\sqrt{3}i) + 3i = 3\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{4}i - \frac{3}{4}i - 3\frac{\sqrt{3}}{4} - 3i$$

$$= 0$$

منه : $S_1 o S_2 (0) = 0$ أي شعاع الإنسحاب معدوم .

نتيجة : S_1oS_2 هو تحويل حيادي للمستوي (التحويل المطابق) .

تعيين تشابه مباشر علم مركزه و زاويته و نسبته

ليكن S تشابه مباشر مركزه w و زاويته θ و نسبته k حيث $k \in]0 ; 1[U]1 ; +\infty[$

❖ من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن w فإن :

$S(M) = M'$ يكافئ $\begin{cases} wM' = K\, wM \\ (\overrightarrow{wM} ; \overrightarrow{wM'}) = \theta \end{cases}$

❖ $S(w) = w$

نشاط :

A ، B ، C ، D نقط لواحقها على الترتيب 1 ؛ $-3-5i$ ؛ $-4+5i$ ؛ -3

عين التشابه الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D ثم عين عناصره المميزة .

الحـل :

ليكن S التشابه المطلوب

الكتابة المركبة لــ S هي $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(1) + \beta = -3 - 5i \text{ .... } (1) \\ \alpha(-4 + 5i) + \beta = -3 \text{ .... } (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha - \alpha(-4 + 5i) = -3 - 5i + 3$

أي $\alpha(1 + 4 - 5i) = -5i$

أي $\alpha = \frac{-5i}{5 - 5i}$

أي $\alpha = \frac{-i}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i}$

أي $\alpha = \dfrac{-i+1}{2}$

أي $\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

بالتعويض في (1) : $\beta = -3 - 5i - \alpha$ إذن : $\beta = -3 - 5i - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

أي : $\beta = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{2}i$

نتيجة : عبارة S المطلوبة هي : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)z - \dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{2}i$

العناصر الهندسية :

$\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : نسبة التشابه هي $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{Arg}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{-\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه هي $\dfrac{-\pi}{4}$

$\dfrac{\beta}{1-\alpha} = \dfrac{-\dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{2}i}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \dfrac{-7-9i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = -8 - i$ إذن : المركز هو $w(-8 ; -1)$

نشاط (2)

A ، B ، C نقط لواحقها على الترتيب i ؛ $-2+3i$ ؛ $-4+5i$

عين التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول C إلى B

__الحـل :__

ليكن S التشابه المطلوب .

الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

A مركز التشابه إذن : $S(A) = A$

$\begin{cases} S(A) = A \\ S(C) = B \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(i) + \beta = i \text{ .... } (1) \\ \alpha(-4+5i) + \beta = -2+3i \text{ .... } (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(i + 4 - 5i) = i + 2 - 3i$

أي : $\alpha = \dfrac{2-2i}{4-4i}$

أي : $\alpha = \dfrac{2(1-i)}{4(1-i)}$

أي $\alpha = \dfrac{1}{2}$

بالتعويض في (1) : $\beta = i - i\alpha$ إذن : $\beta = i - \dfrac{1}{2}i$ أي : $\beta = \dfrac{1}{2}i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}i$

ملاحظة : $\alpha \in IR^*$ إذن : α تحاكي .

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين ننسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

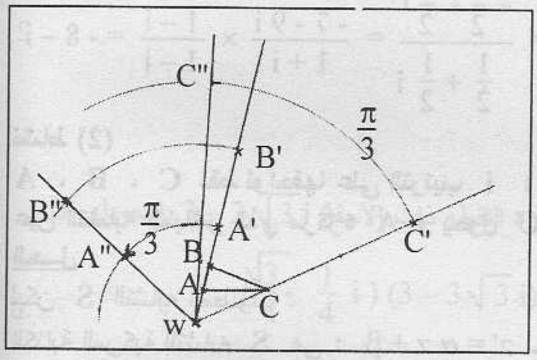
التمرين ــ 1

ABC مثلث كيفي . w نقطة من المستوي .

1 ــ أنشئ النقط 'A ، 'B ، 'C صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحاكي الذي مركزه w و نسبته 3

2 ــ أنشئ النقط ''A ، ''B ، ''C صور النقط 'A ، 'B ، 'C على الترتيب بالدوران الذي مركزه w و زاويته $\frac{\pi}{3}$

3 ــ برهن أن $\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA}$



الحــل ــ 1

1 ــ الانشاء :

$\overrightarrow{wA'} = 3\,\overrightarrow{wA}$

$\overrightarrow{wB'} = 3\,\overrightarrow{wB}$

$\overrightarrow{wC'} = 3\,\overrightarrow{wC}$

3 ــ ليكن H التحاكي الذي مركزه w و نسبته 3

و ليكن R الدوران الذي مركزه w و زاويته $\frac{\pi}{3}$

إذن : RoH هو التشابه الذي مركزه w و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{3}$

نضع $S = RoH$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} S(A) = RoH(A) = R[H(A)] = R[A'] = A'' \\ S(B) = RoH(B) = R[H(B)] = R[B'] = B'' \\ S(C) = RoH(C) = R[H(C)] = R[C'] = C'' \end{array}\right.$

منه حسب خواص التشابه : $\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA}$

التمرين ــ 2

نرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة 'M ذات اللاحقة 'z حيث $z' = (1+i)\,z + 4$

نعتبر النقطتين M و N صورتهما على الترتيب 'M و 'N

1 ــ بين أن النسبة $\frac{M'N'}{MN}$ ثابتة من أجل M لا تنطبق على N

2 ــ بين أن توجد نقطة وحيدة A تنطبق على صورتها .

3 ــ أحسب $\frac{AM'}{AM}$ و كذا الزاوية $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AM'})$ من أجل M لا تنطبق على A

4 ــ لتكن النقط B ، C ، D صورها على الترتيب 'B ، 'C ، 'D . برهن أن المثلثان BCD و 'B'C'D متشابهان .

الحــل ــ 2

ليكن S التحويل النقطي الذي عبارته المركبة $z' = (1+i)\,z + 4$

1 ــ لدينا : $\left.\begin{array}{l} |1+i| = \sqrt{2} \\ \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\}$

إذن : S هو تشابه مباشر للمستوي زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\sqrt{2}$

بما أن $\left.\begin{array}{l} M' = S(M) \\ N' = S(N) \end{array}\right\}$ وإن $\dfrac{M'N'}{MN} = \sqrt{2}$ (نسبة ثابتة)

ملاحظة : يمكن إثبات هذا بطريقة أخرى كمايلي :

ليكن $\left.\begin{array}{l} z \text{ لاحقة } M \\ t \text{ لاحقة } N \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} (1+i)\,z+4 \text{ هي لاحقة } M' \\ (1+i)\,t+4 \text{ هي لاحقة } N' \end{array}\right\}$

من أجل $M \neq N$ لدينا :
$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{|(1+i)\,t+4-(1+i)\,z-4|}{|t-z|}$$
$$= \frac{|(1+i)(t-z)|}{|t-z|}$$
$$= \frac{|1+i|\,|t-z|}{|t-z|}$$
$$= |1+i|$$

إذن : $\dfrac{M'N'}{MN} = \sqrt{2}$ ثابت .

2 ــ لتكن A ذات اللاحقة z

$S(A) = A$ يكافئ $z' = z$

يكافئ $(1+i)\,z+4 = z$

يكافئ $i\,z = -4$

يكافئ $z = \dfrac{-4}{i}$

يكافئ $z = 4\,i$

نتيجة : توجد نقطة وحيدة A لاحقتها $4\,i$ حيث صورتها تنطبق على نفسها

إذن : $A(0\,;\,4)$ هي مركز التشابه S .

3 ــ $\left.\begin{array}{l} M' = S(M) \\ A = S(A) \end{array}\right\}$ إذن: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{AM'}{AM} = \sqrt{2} \text{ (نسبة التشابه)} \\ (\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AM'}) = \dfrac{\pi}{4} \text{ (زاوية التشابه)} \end{array}\right.$

4 ــ $\left.\begin{array}{l} B' = S(B) \\ C' = S(C) \\ D' = S(D) \end{array}\right\}$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{B'C'}{BC} = \sqrt{2} \\ \dfrac{B'D'}{BD} = \sqrt{2} \\ \dfrac{C'D'}{CD} = \sqrt{2} \end{array}\right.$

إذن : المثلثان BDC و B'C'D' متشابهان .

<u>التمرين ــ 3</u>

T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب : $z' = 2\,i\,z + 3$

لتكن A ، B ، C نقط ،واحقها على الترتيب i ؛ 2 ؛ $1-i$

1 ــ عين لواحق النقط A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحويل T .

2 ــ عين لاحقة النقطة D حيث $T(D) = A$

3 ــ برهن أن $\dfrac{A'E'}{A'C'} = \dfrac{AB}{AC}$

4 ــ أحسب $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'})$

<u>الحل ــ 3</u>

1 ــ $2\,i(i) + 3 = 3 - 2 = 1$ إذن : لاحقة A' هي 1

$2\,i(2) + 3 = 3 + 4\,i$ إذن : لاحقة B' هي $3 + 4\,i$

$2i(1-i)+3 = 2i+2+3 = 5+2i$ إذن : لاحقة C' هي $5+2i$

2 ــ لتكن z لاحقة النقطة D

$T(D) = A$ يكافئ $2iz+3 = i$

يكافئ $z = \dfrac{-3+i}{2i}$

يكافئ $z = \dfrac{-3+i}{2i} \times \dfrac{-2i}{-2i}$

يكافئ $z = \dfrac{6i+2}{4}$

يكافئ $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

نتيجة : لاحقة النقطة D هي $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

3 ــ لدينا : $\begin{cases} |2i| = 2 \\ Arg(2i) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ إذن : T هو تشابه مباشر زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و نسبته 2

بما أن $\begin{cases} A' = T(A) \\ B' = T(B) \\ C' = T(C) \end{cases}$ فإن : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

منه : $A'B' \times AC = A'C' \times AB$

إذن : $\dfrac{A'B'}{A'C'} = \dfrac{AB}{AC}$

4 ــ $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = Arg\left(\dfrac{3+4i-1}{2-i}\right)$

$= Arg\left(\dfrac{2+4i}{2-i}\right)$

$= Arg\left(\dfrac{2+4i}{2-i} \times \dfrac{2+i}{2+i}\right)$

$= Arg\left(\dfrac{4+2i+8i-4}{4+1}\right)$

$= Arg(2i)$

$= \dfrac{\pi}{2}$

ملاحظة : يمكن الاجابة مباشرة أن $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'})$ هي زاوية التشابه

التمرين ــ 4

A نقطة من المستوي لاحقتها 1 . H التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2-

R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

1 ــ أكتب العبارة المركبة لكل من H ؛ R ؛ RoH ؛ HoR

2 ــ هل $RoH = HoR$ ؟

الحـل ــ 4

1 ــ عبارة H : $z' = -2z + \beta$ حيث $\dfrac{\beta}{1+2} = 1$ منه $\beta = 3$

إذن : عبارة H هي $z' = -2z+3$

عبارة R : $z' = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)z + \beta$ حيث $\dfrac{\beta}{1-\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)} = 1$

منه : $z' = iz + \beta$ حيث $\dfrac{\beta}{1-i} = 1$ أي $\beta = 1-i$

إذن : عبارة R هي $z' = iz + 1 - i$

عبارة RoH : $z \xrightarrow{H} -2z + 3 \xrightarrow{R} i[-2z + 3] + 1 - i = -2iz + 1 + 2i$

إذن : عبارة RoH هي : $z' = -2iz + 1 + 2i$

عبارة HoR : $z \xrightarrow{R} iz + 1 - i \xrightarrow{H} -2(iz + 1 - i) + 3 = -2iz + 1 + 2i$

إذن : عبارة RoH هي : $z' = -2iz + 1 + 2i$

2 ـ من السؤال السابق نلاحظ أن HoR و RoH لهما نفس العبارة المركبة .

إذن : $HoR = RoH$

التمرين ـ 5

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب 2 و $3 + i$

S هو التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (OA)

T هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$

1 ـ أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات S ؛ T ؛ SoT ؛ ToS

2 ـ هل $SoT = ToS$

الحل ـ 5

1 ـ عبارة التناظر S : لدينا : $A(2\,;0)$ إذن : A تنتمي إلى محور الفواصل

منه : التناظر المحوري بالنسبة إلى (OA) هو التناظر المحوري بالنسبة إلى محور الفواصل منه عبارة S هي : $z' = \overline{z}$

عبارة الانسحاب T : $z' = z + \beta$ حيث β لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

إذن : $\beta = 3 + i - 2 = 1 + i$

منه : عبارة T هي : $z' = z + 1 + i$

عبارة SoT : $z \xrightarrow{T} z + 1 + i \xrightarrow{S} \overline{z + 1 + i} = \overline{z} + 1 - i$

إذن: عبارة SoT هي : $z' = \overline{z} + 1 - i$

عبارة ToS : $z \xrightarrow{S} \overline{z} \xrightarrow{T} \overline{z} + 1 + i$

إذن : عبارة ToS هي : $z' = \overline{z} + 1 + i$

2 ـ حسب السؤال (1) SoT و ToS لهما عبارتان مركبتان مختلفتان .

إذن : $SoT \neq ToS$

التمرين ـ 6

في كل حالة من الحالات التالية عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S ذو المركز الذي لاحقته z_0 و النسبة k و الزاوية θ

1 ـ $z_0 = 0$ ؛ $k = 2$ ؛ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

2 ـ $z_0 = -i$ ؛ $k = \sqrt{2}$ ؛ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

3 ـ $z_0 = 2i$ ؛ $k = \dfrac{1}{2}$ ؛ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

4 ـ $z_0 = 1 - 2i$ ؛ $k = 1$ ؛ $\theta = \pi$

الحل ـ 6

في كل مرة التشابه S عبارته $\left\{\begin{array}{l} z' = \alpha z + \beta \text{ حيث } \dfrac{\beta}{1-\alpha} = z_0 \text{ منه } \beta = z_0(1-\alpha) \\ \alpha = k(\cos\theta + i\sin\theta) \end{array}\right.$

1 ـ $z_0 = 0$ ؛ $k = 2$ ؛ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} \alpha = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i \\ \beta = 0 \end{array}\right.$

منه عبارة S : $z' = 2iz$

2 ـ $z_0 = -i$ ؛ $k = \sqrt{2}$ ؛ $\theta = \frac{\pi}{4}$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = 1 + i \\ \beta = -i(1 - 1 - i) = -1 \end{cases}$

منه عبارة S : $z' = (1+i)z - 1$

3 ـ $z_0 = 2i$ ؛ $k = \frac{1}{2}$ ؛ $\theta = \frac{3\pi}{2}$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(\cos 3\frac{\pi}{2} + i\sin 3\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} i \\ \beta = 2i\left(1 + \frac{1}{2} i\right) = 2i - 1 \end{cases}$

منه عبارة S : $z' = -\frac{1}{2} i z - 1 + 2i$

4 ـ $z_0 = 1 - 2i$ ؛ $k = 1$ ؛ $\theta = \pi$

إذن : $\begin{cases} \alpha = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1 \\ \beta = (1 - 2i)(1 + 1) = 2 - 4i \end{cases}$

منه عبارة S : $z' = -z + 2 - 4i$

التمرين ـ 7

عين الدالة المركبة S للمتغير z التي تعرف التشابه المباشر في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـ المركز هو المبدأ $O(0\,;\,0)$ ؛ النسبة $2\sqrt{2}$ ؛ الزاوية $\frac{\pi}{4}$

2 ـ المركز $w(1\,;\,2)$ ؛ النسبة 3 ؛ الزاوية $\frac{2\pi}{3}$

الحل ـ 7

بنفس طريقة التمرين السابق نسمي z_0 لاحقة المركز w و نضع $S(z) = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = k(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \beta = z_0(1 - \alpha) \end{cases}$

1 ـ $z_0 = 0$ ؛ $k = 2\sqrt{2}$ ؛ $\theta = \frac{\pi}{4}$

إذن : $\begin{cases} \alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2i \\ \beta = 0 \end{cases}$

منه : $S(z) = (2 + 2i)z$

2 ـ $z_0 = 1 + 2i$ ؛ $k = 3$ ؛ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{cases} \alpha = 3\left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i \\ \beta = \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i\right)(1 + 2i) = \frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{3} i)(1 + 2i) = \frac{1}{2}[5 + 6\sqrt{3} + i(10 - 3\sqrt{3})] \end{cases}$$

منه : $S(z) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i\right) z + \frac{5 + 6\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{10 - 3\sqrt{3}}{2}$

التمرين ـ 8

T تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(x\,;\,y)$ من المستوي النقطة $M'(x'\,;\,y')$ من المستوي حيث

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1 ـ عين الشكل المركب للتحويل T

2 ـ تعرف على طبيعة التحويل T و عناصره الهندسية المميزة .

الحـل ــ 8

1 ــ نضع $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

إذن : $x' + i\,y' = x - y + i(x + y - 1)$

أي : $x' + i\,y' = x - y + i\,x + i\,y - i$

أي $x' + i\,y' = x + i\,y + i(x + i\,y) - i$

أي $x' + i\,y' = (x + i\,y)(1 + i) - i$

منه : $z' = (1 + i)\,z - i$

2 ــ التحويل T من الشكل $z' = \alpha\,z + \beta$ حيث $\left.\begin{array}{l}\alpha = 1 + i\\ \beta = -i\end{array}\right\}$

إذن : T هو تشابه مباشر و عناصره الهندسية كمايلي :

المركز : $\dfrac{\beta}{1 - \alpha} = \dfrac{-i}{-i} = 1$ إذن : المركز هو $w(1\,;\,0)$

النسبة : $|\alpha| = |1 + i| = \sqrt{2}$ إذن : النسبة هي $\sqrt{2}$

الزاوية : $\mathrm{Arg}(\alpha) = \mathrm{Arg}(1 + i) = \dfrac{\pi}{4}$ إذن : الزاوية هي $\dfrac{\pi}{4}$

التمرين ــ 9

نقبل أن كل تشابه مباشر للمستوي له كتابة مركبة من الشكل $z' = \alpha\,z + \beta$ حيث α و β عددين مركبين و $\alpha \neq 0$

لتكن A ، B ، C ، D نقط من المستوي حيث A و B متمايزتان .

برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول A إلى C و B إلى D

الحـل ــ 9

1 ــ ليكن $z' = \alpha\,z + \beta$ عبارة التشابه S إذا وجد حيث $\alpha \in C$ و $\beta \in C$ و $\alpha \neq 0$

نعتبر الأعداد z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب .

$\begin{cases} S(A) = C\\ S(B) = D\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\alpha\,z_A + \beta = z_C \;......\; (1)\\ \alpha\,z_B + \beta = z_D \;......\; (2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha\,z_A - \alpha\,z_B = z_C - z_D$

منه : $\alpha(z_A - z_B) = z_C - z_D$

إذن : $\alpha = \dfrac{z_C - z_D}{z_A - z_B}$ لأن $z_A \neq z_B$

بالتعويض في (1) : $\beta = z_C - \alpha\,z_A$

إذن : $\beta = z_C - \dfrac{z_C - z_D}{z_A - z_B}\,z_A$

نتيجة : يوجد تشابه وحيد S يحقق $S(A) = C$ و $S(B) = D$ لأن α و β وحيدين .

التمرين ــ 10

لتكن النقط $A(1\,;\,0)$ ؛ $A'(-3\,;\,-3)$ ؛ $B(-4\,;\,5)$ ؛ $B'(-3\,;\,0)$

1 ــ أعط العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B'

2 ــ ما هي العناصر الهندسية للتشابه S

3 ــ عين احداثيي C' صورة النقطة $C(-1\,;\,5)$ بالتشابه S

الحـل ــ10

1 ــ لتكن $z' = \alpha\,z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A) = A'\\ S(B) = B'\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\alpha(1) + \beta = -3 - 5\,i \;.........\; (1)\\ \alpha(-4 + 5\,i) + \beta = -3 \;.......\; (2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha - \alpha(-4 + 5\,i) = -3 - 5\,i + 3$

أي $\alpha(1 + 4 - 5\,i) = -5\,i$

أي $\alpha = \dfrac{-5\,i}{5 - 5\,i}$

أي $\alpha = \frac{-i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$

أي $\alpha = \frac{-i+1}{1+1}$

أي $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

بالتعويض في (1) : $\beta = -3 - 5i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} i$

نتيجة : عبارة S هي : $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) z - \frac{7}{2} - \frac{9}{2} i$

2 ــ العناصر الهندسية :

المركز : $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{9}{2} i}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i} = \frac{-7-9i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = -8 - i$ إذن : المركز هو $w(-8 ; -1)$

النسبة : $|\alpha| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : النسبة هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

الزاوية : $\text{Arg}(\alpha) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) = \frac{-\pi}{4}$ إذن : الزاوية هي $\frac{-\pi}{4}$

3 ــ من أجل $z = -1 + 5i$ فإن :

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right)(-1 + 5i) - \frac{7}{2} - \frac{9}{2} i$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} i + \frac{1}{2} i + \frac{5}{2} - \frac{7}{2} - \frac{9}{2} i$$
$$= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} i$$

منه : $C'\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$

<u>التمرين ــ 11</u>

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = iz + 1 - i$

(d) مستقيم معادلته $y = x + 5$

عين معادلة المستقيم (d') صورة المستقيم (d) بالتشابه S

<u>الحـل ــ 11</u>

للبحث عن معادلة (d') يمكن اتباع طريقتين مختلفتين كمايلي :

الطريقة الأولى : نأخذ نقطتين متمايزتين A و B من (d)

مثلا : $A(0 ; 5)$ ؛ $B(-5 ; 0)$

نبحث عن A' و B' حيث $A' = S(A)$ ؛ $B' = S(B)$

من أجل $z = 5i$ لدينا : $z' = i(5i) + 1 - i = -5 + 1 - i = -4 - i$

إذن : $A'(-4 ; -1)$

من أجل $z = -5$ لدينا : $z' = i(-5) + 1 - i = -5i + 1 - i = 1 - 6i$

إذن : $B'(1 ; -6)$

نتيجة : معادلة (d') هي معادلة المستقيم (A'B') كمايلي :

$N(x ; y) \in (d')$ يكافئ $\begin{vmatrix} x+4 & 1+4 \\ y+1 & -6+1 \end{vmatrix} = 0$

يكافئ $-5(x+4) = 5(y+1)$

يكافئ $-x - 4 = y + 1$

يكافئ $y = -x - 5$ و هي معادلة (d')

الطريقة الثانية : نبحث عن z بدلالة z' كمايلي :

$z' = iz + 1 - i$ يكافئ $iz = z' - 1 + i$

يكافئ $z = \dfrac{z' - 1 + i}{i}$

يكافئ $z = \dfrac{z' - 1 + i}{i} \times \dfrac{-i}{-i}$

يكافئ $z = -iz' + 1 + i$

ليكن $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

لدينا : $z = -iz' + 1 + i$

إذن : $x + iy = -i(x' + iy') + 1 + i$

أي $x + iy = -ix' + y' + 1 + i$

أي $x + iy = y' + 1 + i(1 - x')$

منه $\begin{cases} x = y' + 1 \\ y = 1 - x' \end{cases}$

(d) له المعادلة $y = x + 5$

منه (d') له المعادلة $1 - x' = y' + 1 + 5$ (بتعويض x و y بدلالة x' و y')

أي $-x' = y' + 5$

أي $y' = -x' - 5$

أي معادلة (d') هي $y = -x - 5$

<u>التمرين ـــ 12</u>

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = (i + 1)z + 2 - i$

(C_1) دائرة مركزها O و نصف قطرها 4

(C_2) دائرة مركزها $w(2 ; 2)$ و نصف قطرها 3

1 ـ عين (C'_1) صورة الدائرة (C_1) بـ التشابه S

2 ـ عين (C'_2) صورة الدائرة (C_2) بـ التشابه S

<u>الحـــل ـــ 12</u>

من خواص التشابه S أنه يحول دائرة ذات المركز w و نصف القطر α إلى دائرة مركزها $S(w)$ و نصف قطرها $k\alpha$ حيث k هي نسبة التشابه .

إذن :

1 ـ صورة المبدأ O هي : $w(2 ; -1)$

نسبة التشابه S هي : $|i + 1| = \sqrt{2}$

إذن : نصف قطر الدائرة (C'_1) هو $4\sqrt{2}$

منه : معادلة (C'_1) : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (4\sqrt{2})^2$

أي : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 + 1 = 32$

أي : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 27 = 0$

2 ـ صورة النقطة $w(2 ; 2)$: $(i + 1)(2 + 2i) + 2 - i = 4i + 2 - i = 2 + 3i$

إذن : صورة w هي $w'(2 ; 3)$

منه : معادلة (C'_2) : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (3\sqrt{2})^2$

أي : $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 + 9 = 18$

أي : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ و هي معادلة (C'_2) .

<u>التمرين ـــ 13</u>

T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = \alpha z + \alpha$ حيث α عدد مركب غير معدوم

1 ـ عين α حتى يكون T انسحابا ثم عين شعاعه .

2 ـ عين α حتى يكون T دورانا زاويته $\dfrac{\pi}{3}$ ثم أوجد مركزه .

3 ـ عين α حتى يكون T تحاكي نسبته $3-$ ثم عين مركزه .

4 ـ عين الطبيعة و العناصر الهندسية للتحويل T من أجل $\alpha = -1 - i$

الحـل ـ 13

1 ـ T انسحاب إذا وفقط إذا كان $\alpha = 1$

إذن : عبارة الانسحاب T : $z' = z + 1$

منه : شعاع الانسحاب هو $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

2 ـ T دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

أي $\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : عبارة الدوران T هي : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

منه عناصره :

المركز : $\dfrac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \times \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

إذن : المركز هو $w\left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3 ـ T تحاكي نسبته 3 - إذا وفقط إذا كان $\alpha = -3$

منه عبارة التحاكي T : $z' = -3z - 3$

المركز : $\dfrac{-3}{1+3} = -\dfrac{3}{4}$

إذن : مركز التحاكي هو $w\left(-\frac{3}{4} ; 0\right)$

4 ـ $\alpha = -1 - i$ إذن : $\begin{cases} |\alpha| = \sqrt{2} \\ \text{Arg}(\alpha) = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$

$\dfrac{-1-i}{1+1+i} = \dfrac{-1-i}{2+i} \times \dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{-2+i-2i-1}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

إذن : T تشابه مباشر مركزه $w\left(-\frac{3}{5} ; -\frac{1}{5}\right)$ و زاويته $\frac{5\pi}{4}$ و نسبته $\sqrt{2}$

التمرين ـ 14

ABCD مربع مركزه P حيث AB = 8 cm و $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

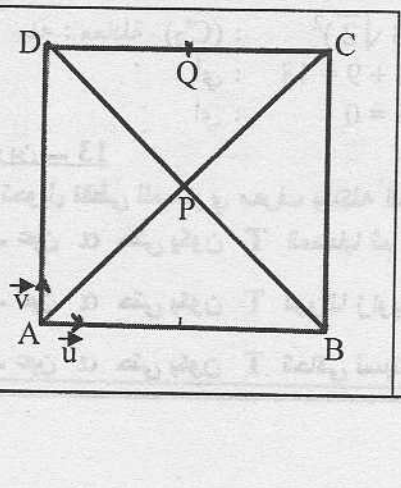
Q هو منتصف [CD] و S هو التشابه المباشر حيث S(A) = P و S(C) = Q

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ حيث $\overrightarrow{AB} = 8\vec{u}$ و $\overrightarrow{AD} = 8\vec{v}$

1 ـ عين لواحق النقط A ، C ، Q ، P

2 ـ أكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم استنتج زاويته θ و نسبته k

3 ـ عين لاحقة w مركز التشابه S .



الحـل ـ 14

1 ـ باعتبار المعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ فان احداثيات النقط A ، C ، P ، Q

هي كما يلي : A(0 ; 0) ؛ C(8 ; 8) ؛ P(4 ; 4) ؛ Q(4 ; 8)

منه لواحق النقط A ، C ، P ، Q هي على الترتيب :

0 ؛ 8 + 8 i ؛ 4 + 4 i ؛ 4 + 8 i

2 ـ لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A) = P \\ S(C) = Q \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \alpha(0) + \beta = 4 + 4i \text{ .... } (1) \\ \alpha(8 + 8i) + \beta = 4 + 8i \text{ .... } (2) \end{cases}$

من (1) : $\beta = 4 + 4i$

بالتعويض في (2) : $\alpha = \dfrac{4 + 8i - (4 + 4i)}{8 + 8i}$

أي $\alpha = \dfrac{4i}{8(1 + i)}$

أي $\alpha = \dfrac{i}{2(1 + i)} \times \dfrac{1 - i}{1 - i}$

أي $\alpha = \dfrac{i + 1}{4}$

أي $\alpha = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} i\right) z + 4 + 4i$

و عناصره الهندسية :

النسبة : $\left|\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} i\right| = \sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ إذن : $k = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

الزاوية : $\text{Arg}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} i\right) = \dfrac{\pi}{4}$ إذن : $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

3 ـ لاحقة w مركز التشابه :

$$\frac{4 + 4i}{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} i} = \frac{4(1 + i)}{\frac{1}{4}(3 - i)} = \frac{16(1 + i)}{3 - i} \times \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{16}{4}(3 + i + 3i - 1) = 4(2 + 4i)$$

إذن : لاحقة المركز w هي $8 + 16i$ منه $w(8\,;16)$

التمرين 15ــ

1 ــ أعط العناصر المميزة للتشابه f المعرف بشكله المركب : $z' = (1 - i) z + 2 - i$

2 ــ في كل حالة من الحالات التالية عين التشابه S حيث foS يكون :

أ . تحاكي مركزه O و نسبته $\dfrac{1}{2}$

ب . انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

الحــل 15ــ

1 ــ $|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ إذن : نسبة التشابه f هي $\sqrt{2}$

$\text{Arg}(1 - i) = -\dfrac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه f هي $\dfrac{-\pi}{4}$

$\dfrac{2 - i}{1 - 1 + i} = \dfrac{2 - i}{i} \times \dfrac{-i}{-i} = -1 - 2i$ إذن : مركز التشابه f هو $w(-1\,;-2)$

2 ــ ليكن S تشابه شكله المركب $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

$$z \xrightarrow{S} \alpha z + \beta \xrightarrow{f} (1 - i)(\alpha z + \beta) + 2 - i = \alpha(1 - i) z + \beta(1 - i) + 2 - i$$

إذن : العبارة المركبة للتشابه foS هي :

$$z' = \alpha(1 - i) z + \beta(1 - i) + 2 - i$$

أ ــ ليكن H التحاكي ذو المركز O و النسبة $\dfrac{1}{2}$ إذن العبارة المركبة لــ H هي : $z = \dfrac{1}{2} z$

بالمطابقة مع عبارة التشابه foS نحصل على : $\left.\begin{array}{l} \alpha(1 - i) = 1/2 \\ \beta(1 - i) + 2 - i = 0 \end{array}\right\}$

إذن : $\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{2(1 - i)} \\ \beta = \dfrac{-2 + i}{1 - i} \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{2(1 - i)} \times \dfrac{1 + i}{1 + i} \\ \beta = \dfrac{-2 + i}{1 - i} \times \dfrac{1 + i}{1 + i} \end{array}\right\}$

أي $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, i \\ \beta = \frac{-2-2\,i+i-1}{2}\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, i \\ \beta = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\, i\end{array}\right.$

نتيجة : عبارة التشابه S المطلوبة هي : $z' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, i\right) z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\, i$

ب ـ ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ إذن العبارة المركبة لـ T هي : $z' = z + 1 - i$

بالمطابقة مع عبارة foS نحصل على $\left\{\begin{array}{l}\alpha(1-i) = 1 \\ \beta(1-i) + 2 - i = 1 - i\end{array}\right.$

إذن : $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{1-i} \\ \beta = \frac{1-i-2+i}{1-i}\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \\ \beta = \frac{-1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i \\ \beta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i\end{array}\right.$

نتيجة : عبارة التشابه S المطلوبة هي $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i\right) z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i$

<u>التمرين ـ 16</u>

S تشابه معرف بالدالة : $z \longmapsto (1+i)\, z + 2$

1 ـ حدد العناصر المميزة للتشابه S و ليكن I مركزه .

2 ـ إذا كان $S(M) = M'$ فما هي طبيعة المثلث IMM'

3 ـ ما هي مجموعة النقط E من المستوي حتى يكون $OM = OM'$

4 ـ ما هي مجموعة النقط F من المستوي حتى يكون $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0$ ؟

<u>الحل ـ 16</u>

1 ـ $|1+i| = \sqrt{2}$ إذن : نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $\frac{\pi}{4}$

$\frac{2}{1-1-i} = \frac{2}{-i} \times \frac{i}{i} = 2\, i$ إذن : مركز التشابه S هو $I(0\,;\,2)$

2 ـ ليكن $M' = S(M)$ إذن : $\left\{\begin{array}{l}IM' = \sqrt{2}\, IM \\ (\overrightarrow{IM}\,;\,\overrightarrow{IM'}) = \frac{\pi}{4}\end{array}\right.$

في المثلث IMM' لدينا : $\frac{IM}{IM'} = \frac{IM}{\sqrt{2}\, IM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

إذن : المثلث IMM' قائم الزاوية في M

منه حسب فيثاغورث : $IM'^2 = IM^2 + MM'^2$

أي : $2\, IM^2 = IM^2 + MM'^2$ لأن $IM'^2 = (\sqrt{2}\, IM)^2$

أي : $MM'^2 = IM^2$

أي : $MM' = IM$

إذن : المثلث IMM' متساوي الساقين .

نتيجة : المثلث IMM' متساوي الساقين و قائم الزاوية في M

3 ـ ليكن $M(x\,;\,y)$

لدينا : $z' = (1+i)\, z + 2$

إذن : $z' = (1+i)(x + i\, y) + 2$

أي : $z' = x + i\, y + i\, x - y + 2$

أي : $z' = (x - y + 2) + i(x + y)$

إذن : $OM = OM'$ يكافئ $|z| = |z'|$

يكافئ $|z|^2 = |z'|^2$

يكافئ $x^2 + y^2 = (x - y + 2)^2 + (x + y)^2$

يكافئ $x^2 + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 4(x - y) + 4 + x^2 + 2xy + y^2$

يكافئ $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

يكافئ $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

إذن : E هي الدائرة التي مركزها $w(-2 ; 2)$ و نصف قطرها 2

4 ــ لتكن $M(x ; y)$ إذن : $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x - y + 2 \\ x + y \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

منه : $\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OM'} = 0$ يكافئ $x(x - y + 2) + y(x + y) = 0$

يكافئ $x^2 - xy + 2x + xy + y^2 = 0$

يكافئ $x^2 + y^2 + 2x = 0$

يكافئ $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

إذن : F هي الدائرة التي مركزها $A(-1 ; 0)$ و نصف قطرها 1

التمرين ــ 17

لتكن M و M' نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$
حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية .
نفرض أن الثنائية $(x' ; y')$ مرتبطة بالثنائية $(x ; y)$ بالعلاقتين التاليتين $x' = -3x + 3y + 10$ و $y' = -3x - 3y + 5$
عبر عن z' بدلالة z ثم تعرف على التحويل النقطي المرفق .

الحـل ــ 17

$$x' + iy' = -3x + 3y + 10 + i(-3x - 3y + 5)$$
$$= -3x + 3y + 10 - 3ix - 3iy + 5i$$
$$= -3(x + iy) - 3i(x + iy) + 10 + 5i$$
$$= (x + iy)(-3 - 3i) + 10 + 5i$$

نتيجة : $x' + iy' = (-3 - 3i)(x + iy) + 10 + 5i$

أي : $z' = (-3 - 3i)z + 10 + 5i$ و هي عبارة z' بدلالة z

التحويل المرفق : من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\left.\begin{array}{l}\alpha = -3 - 3i \\ \beta = 10 + 5i\end{array}\right\}$

إذن : التحويل عبارة عن تشابه مباشر .

و عناصره الهندسية كمايلي :

$|-3 - 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ إذن : نسبة التشابه هي $3\sqrt{2}$

$\text{Arg}(-3 - 3i) = \dfrac{5\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه هي $\dfrac{5\pi}{4}$

$\dfrac{10 + 5i}{1 + 3 + 3i} = \dfrac{10 + 5i}{4 + 3i} \times \dfrac{4 - 3i}{4 - 3i} = \dfrac{55 - 10i}{25}$ إذن : مركز التشابه هو $w(11/5 ; -2/5)$

التمرين ــ 18

A نقطة من المستوي لاحقتها $2 + i$. S هو التشابه الذي مركزه A و نسبته 2 و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$
1 ــ أكتب العبارة المركبة لـ S
2 ــ لتكن $M(x ; y)$ و $M'(x' ; y')$ حيث $M' = S(M)$
عبر عن x' و y' بدلالة x و y
3 ــ أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (D) الذي صورته بالتشابه S هو المستقيم (D') ذو المعادلة $x = 3$

الحـل ــ 18

1 ــ عبارة S : $z' = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)z + a$

أي : $z' = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z + a$

أي $z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + a$ حيث $2 + i = \dfrac{a}{1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

إذن : $a = (2 + i)(1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2})$

$= 2(1 - \sqrt{2}) - 2i\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$

$= 2 - \sqrt{2} + i(1 - 3\sqrt{2})$

نتيجة : عبارة S : $z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 2 - \sqrt{2} + i(1 - 3\sqrt{2})$

2 ـ $x' + iy' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(x + iy) + 2 - \sqrt{2} + i(1 - 3\sqrt{2})$

$= \sqrt{2}x + i\sqrt{2}y + ix\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + i(1 - 3\sqrt{2})$

منه : $\begin{cases} x' = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} \end{cases}$

3 ـ صورة (D) هي (D') ذو المعادلة $x = 3$ أي $x' = 3$

منه : $x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 3$ هي معادلة المستقيم (D)

أي : $y\sqrt{2} = x\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$

أي : $y = x - 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ هي معادلة المستقيم (D)

التمرين ـ 19

لتكن النقط : $A(1\,;1)$ ؛ $B(-2\,;0)$ ؛ $C(2\,;-1)$ ؛ $D(-4\,;-1)$

حدد التشابه S الذي يرفق بالنقطة A النقطة B و بالنقطة C النقطة D

الحل ـ 19

لتكن $z' = \alpha z + \beta$ العبارة المركبة للتشابه S

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(C) = D \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(1 + i) + \beta = -2 \;\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \alpha(2 - i) + \beta = -4 - i \;\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(1 + i - 2 + i) = -2 + 4 + i$

أي : $\alpha = \dfrac{2 + i}{-1 + 2i} \times \dfrac{-1 - 2i}{-1 - 2i}$

أي $\alpha = \dfrac{-2 - 4i - i + 2}{1 + 4}$

أي $\alpha = -i$

بالتعويض في (1) : $\beta = -2 + i(1 + i) = -2 + i - 1 = -3 + i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي $z' = -iz - 3 + i$

العناصر الهندسية لـــ S :

النسبة : $|-i| = 1$

الزاوية : $\text{Arg}(-i) = \dfrac{3\pi}{2}$

المركز : $\dfrac{-3 + i}{1 + i} = \dfrac{-3 + i}{1 + i} \times \dfrac{1 - i}{1 - i} = \dfrac{-3 + 3i + i + 1}{2} = -1 + 2i$

خلاصة : S هو دوران مركزه $w(-1\,;2)$ و زاويته $\dfrac{3\pi}{2}$

التمرين ـ 20

لتكن النقط $A(1\,;0)$ ؛ $B(2\,;0)$ ؛ $C(1\,;1)$

1 ـ عين نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى C

2 ـ ليكن T تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = (1 - i)z + 2i$

أ ــ ما هي طبيعة التحويل T

ب ــ ما هي طبيعة المثلث BMM' حيث $M' = T(M)$

الحــل ــ 20

1 ــ $BA = |1 - 2| = 1$

$BC = |1 + i - 2| = \sqrt{2}$

إذن : $BC = \sqrt{2}\ BA$

منه : نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$$(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) = Arg(1 + i - 2) - Arg(1 - 2) = Arg(-1 + i) - Arg(-1) = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$$

إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$

2 ــ الشكل المركب لــ T : $z' = (1 - i) z + 2 i$

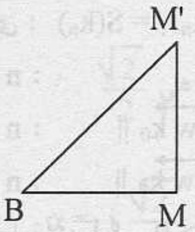
إذن : T تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ إذن $|1 - i| = \sqrt{2}$

العناصر الهندسية لــ التشابه T :

الزاوية : $Arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه هي $-\frac{\pi}{4}$

المركز : $\frac{2 i}{1 - 1 + i} = \frac{2 i}{i} = 2$ إذن : المركز هو $B(2 ; 0)$

ب ــ طبيعة المثلث BMM'



B هو مركز التشابه T و $T(M) = M'$ إذن :

$BM' = BM\sqrt{2}$

$(\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM'}) = -\frac{\pi}{4}$ أي $(\overrightarrow{BM'} ; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{4}$

في المثلث BMM' لدينا : $\frac{BM}{BM'} = \frac{BM}{\sqrt{2}\, BM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

إذن : المثلث BMM' قائم الزاوية في M

منه حسب فيثاغورث فإن : $BM'^2 = BM^2 + MM'^2$

أي : $(\sqrt{2}\, BM)^2 = BM^2 + MM'^2$

أي : $MM'^2 = BM^2$

أي : $MM' = BM$

أي : المثلث BMM' متساوي الساقين

خلاصة : المثلث BMM' قائم الزاوية في M و متساوي الساقين

التمرين ــ 21

A ، B ، C ، D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $1 + 2i$ ؛ $5 + 2i$ ؛ $1 + 4i$ و $2 - i$

1 ــ عين العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى C و يحول D إلى B ثم عين عناصره الهندسية المميزة

2 ــ لتكن k_0 نقطة من المستوي لاحقتها $3 i$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n

$k_{n+1} = S(k_n)$ و $u_n = \| \overrightarrow{w k_n} \|$ حيث w هو مركز التشابه S

أ ــ أحسب $\| \overrightarrow{w k_n} \|$ بدلالة n

ب ــ ما هي طبيعة المتتالية (u_n)

ج ــ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

الحــل ــ 21

1 ــ لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases} S(A) = C \\ S(D) = B \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \alpha(1 + 2 i) + \beta = 1 + 4 i \text{ .... (1)} \\ \alpha(2 - i) + \beta = 5 + 2 i \text{ .... (2)} \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(1 + 2i - 2 + i) = 1 + 4i - 5 - 2i$

أي : $\alpha(-1 + 3i) = -4 + 2i$

منه : $\alpha = \dfrac{-4 + 2i}{-1 + 3i} \times \dfrac{-1 - 3i}{-1 - 3i}$

أي $\alpha = \dfrac{4 + 12i - 2i + 6}{1 + 9}$

أي $\alpha = 1 + i$

بالتعويض في (1) : $\beta = 1 + 4i - (1 + i)(1 + 2i)$

أي $\beta = 1 + 4i - 1 - 2i - i + 2$

أي $\beta = 2 + i$

نتيجة : العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1 + i)z + 2 + i$

و عناصره الهندسية :

النسبة : $|1 + i| = \sqrt{2}$

الزاوية : $\mathrm{Arg}(1 + i) = \dfrac{\pi}{4}$

المركز : $\dfrac{2 + i}{1 - 1 - i} = \dfrac{2 + i}{-i} \times \dfrac{i}{i} = -1 + 2i$ إذن المركز هو $w(-1 ; 2)$

2 ــ $k_0(0 ; 3)$

لدينا $\|\overrightarrow{wk_0}\| = |3i + 1 - 2i| = |1 + i| = \sqrt{2}$

من جهة أخرى : $k_{n+1} = S(k_n)$ إذن : $\|\overrightarrow{wk_{n+1}}\| = \sqrt{2}\,\|\overrightarrow{wk_n}\|$

من أجل $n = 0$: $\|\overrightarrow{wk_1}\| = \sqrt{2}\,\|\overrightarrow{wk_0}\|$

من أجل $n = 1$: $\|\overrightarrow{wk_2}\| = \sqrt{2}\,\|\overrightarrow{wk_1}\| = (\sqrt{2})^2\|\overrightarrow{wk_0}\|$

من أجل $n = 2$: $\|\overrightarrow{wk_3}\| = \sqrt{2}\,\|\overrightarrow{wk_2}\| = (\sqrt{2})^3\|\overrightarrow{wk_0}\|$

إذن : بصفة عامة من أحل $n > 0$ فإن : $\|\overrightarrow{wk_n}\| = (\sqrt{2})^n\|\overrightarrow{wk_0}\|$

نتيجة : $\|\overrightarrow{wk_n}\| = (\sqrt{2})^{n+1}$ لأن $\|\overrightarrow{wk_0}\| = \sqrt{2}$

ب ــ $u_n = (\sqrt{2})^{n+1}$ إذن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $\sqrt{2}$ و حدها الأول $u_0 = \sqrt{2}$

جـ ــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{2})^{n+1} = +\infty$

<u>التمرين ــ 22</u>

θ_1 ، θ_2 ، k_1 ، k_2 أعداد حقيقية حيث $k_1 \neq 0$ و $k_2 \neq 0$

1 ــ برهن أن مركب دورانين R_1 و R_2 زاويتاهما على الترتيب θ_1 و θ_2 هو انسحاب أو دوران زاويته $\theta_1 + \theta_2$ أو تحاكي نسبته -1.

2 ــ برهن أن مركب تحاكيين H_1 و H_2 نسبتاهما على الترتيب k_1 و k_2 هو انسحاب أو تحاكي نسبته $k_1 \times k_2$

<u>الحل ــ22</u>

1 ــ لتكن $z' = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \beta_1$ عبارة الدوران R_1

و

$z' = (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + \beta_2$ عبارة الدوران R_2

$z \xrightarrow{R_2} (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)z + \beta_2 \xrightarrow{R_1} (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)[(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)z + \beta_2] + \beta_1$

منه عبارة $R_1 o R_2$ هي : $z' = (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z + \beta_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \beta_1$

لدينا : $\mathrm{Arg}((\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)) = \theta_1 + \theta_2$ نميز الحالات التالية :

1 ــ إذا كان $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi k$ حيث $k \in Z$ فإن $R_1 o R_2$ هو انسحاب

2 ــ إذا كان $\theta_1 + \theta_2 = (2k + 1)\pi$ حيث $k \in Z$ فإن $R_1 o R_2$ هو تحاكي نسبته -1.

3 ــ إذا كان $\theta_1 + \theta_2 \neq \pi k$ فإن $R_1 o R_2$ هو دوران زاويته $\theta_1 + \theta_2$ لأن :

$|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)| = 1 \times 1 = 1$

2 ــ لتكن $z' = k_1 z + \beta_1$ عبارة التحاكي H_1

و لتكن $z' = k_2 z + \beta_2$ عبارة التحاكي H_2

$$z \xrightarrow{H_2} k_2 z + \beta_2 \xrightarrow{H_1} k_1(k_2 z + \beta_2) + \beta_1 = k_1 k_2 z + k_1 \beta_2 + \beta_1$$

إذن : عبارة $H_1 o H_2$ هي : $z' = k_1 k_2 z + k_1 \beta_2 + \beta_1$

منه نميز الحالات التالية :

1 ــ إذا كان $k_1 \times k_2 = 1$ فإن $H_1 o H_2$ هو انسحاب .

2 ــ إذا كان $k_1 \times k_2 \neq 1$ فإن $H_1 o H_2$ هو تحاكي نسبته $k_1 \times k_2$

التمرين ــ 23

A ، B ، C نقط لواحقها i ، $\sqrt{2}$ ، $i + \sqrt{2}$ على الترتيب

I ، J ، K منتصفات القطع المستقيمة [OB] ، [AC] ، [BC] على الترتيب (O هي مبدأ المعلم)

1 ــ عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث $S(A) = I$ و $S(O) = B$

2 ــ ما هي العناصر الهندسية للتشابه S

3 ــ عين صور النقط B ، C ، I بالتشابه S

4 ــ ليكن $S^2 = SoS$. برهن أن S^2 هو تحاكي يطلب تعيين مركزه و نسبته

5 ــ ما هي صور النقط O ، B ، A بالتحويل S^2

6 ــ استنتج أن المستقيمات (OC) ، (BJ) ، (AK) متقاطعة في نقطة واحدة .

الحـــل ــ 23

لدينا : $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ; 0\right)$ ؛ $J\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ; 1\right)$ ؛ $K\left(\sqrt{2}\ ; \frac{1}{2}\right)$

1 ــ لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A) = I \\ S(O) = B \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(i) + \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \alpha(0) + \beta = \sqrt{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$ لأن لاحقة I هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

من (2) : $\beta = \sqrt{2}$

بالتعويض في (1) : $\alpha = \frac{1}{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)$ أي $\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2i} \times \frac{-i}{-i}$ منه $\alpha = i\frac{\sqrt{2}}{2}$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = i\frac{\sqrt{2}}{2} z + \sqrt{2}$

2 ــ العناصر الهندسية :

النسبة : $\left|i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

الزاوية : $\operatorname{Arg}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

المركز :
$$\frac{\sqrt{2}}{1 - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - i\sqrt{2}} \times \frac{2 + i\sqrt{2}}{2 + i\sqrt{2}}$$
$$= \frac{4\sqrt{2} + 4i}{6}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i$$

منه المركز هو $w\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\ ; \frac{2}{3}\right)$

3 ــ من أجل $z = \sqrt{2}$: $i\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}) + \sqrt{2} = \sqrt{2} + i$

إذن : صورة B هي النقطة $C(\sqrt{2}\ ; 1)$

من أجل $z = i + \sqrt{2}$: $i\frac{\sqrt{2}}{2}(i + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

إذن :صورة C هي النقطة $J\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ; 1\right)$

من أجل $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2} = \frac{1}{2}\,i+\sqrt{2}$

إذن : صورة I هي النقطة $K\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$

نتيجة : $S(I) = K$ ؛ $S(C) = J$ ؛ $S(B) = C$

4 ــ $z \xrightarrow{S} i\frac{\sqrt{2}}{2}z+\sqrt{2} \xrightarrow{S} i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}z+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2} = -\frac{1}{2}z+i+\sqrt{2}$

إذن : العبارة المركبة لـ S^2 هي : $z' = -\frac{1}{2}z+i+\sqrt{2}$

منه : S^2 هو تحاكي نسبته $-\frac{1}{2}$ و مركزه النقطة ذات اللاحقة $\frac{i+\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}i$

أي مركزه هو مركز التشابه S

5 ــ $O \xrightarrow{S} B \xrightarrow{S} C$ منه $S^2(O) = C$

$B \xrightarrow{S} C \xrightarrow{S} J$ منه $S^2(B) = J$

$A \xrightarrow{S} I \xrightarrow{S} K$ منه $S^2(A) = K$

بما أن S^2 هو تحاكي مركزه $W\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$ و C ، J ، K هي صور O ، B ، A على الترتيب بـ التحاكي S^2 فإن

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{WC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{WO}\\ \overrightarrow{WJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{WB}\\ \overrightarrow{WK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{WA}\end{array}\right\} \text{ منه : } \left\{\begin{array}{l}W \in (OC)\\ W \in (BJ)\\ W \in (AK)\end{array}\right.$$

إذن : $W \in (OC) \cap (BJ) \cap (AK)$

بما أن O ، B ، A ليست على استقامة واحدة فإن المستقيمات (OC) ، (BJ) و (AK) تتقاطع في نقطة وحيدة هي $w\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$

التمرين ــ 24

A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب 12 و 9 i

f تحويل نقطي للمستوي معرف بشكله المركب $z' = -\frac{3}{4}iz+9i$

1 ــ برهن أن f يقبل نقطة صامدة وحيدة w احداثياها $w\left(\frac{108}{25}\,;\,\frac{144}{25}\right)$

2 ــ برهن أن f تشابه مباشر زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و نسبته $\frac{3}{4}$. ما هو مركزه ؟

3 ــ عين صور النقط A و O بالتحويل f

4 ــ برهن أن w هي نقطة مشتركة للدائرتين (C_1) و (C_2) ذات القطرين على الترتيب [OA] و [OB]

5 ــ بين أن w هي المسقط العمودي للنقطة O على (AB)

6 ــ بين أن $wA \times wB = wO^2$

الحـل ــ 24

1 ــ لتكن w ذات اللاحقة z نقطة من المستوي .

w صامدة بـ f يكافئ $f(w) = w$

يكافئ $z' = z$

يكافئ $-\frac{3}{4}iz+9i = z$

يكافئ $9i = \left(1+\frac{3}{4}i\right)z$

يكافئ $9\,i = \frac{1}{4}(4+3\,i)\,z$

يكافئ $z = \frac{36\,i}{4+3\,i}$

يكافئ $z = \frac{36\,i}{4+3\,i} \times \frac{4-3\,i}{4-3\,i}$

يكافئ $z = \frac{144\,i + 108}{25}$

يكافئ $z = \frac{108}{25} + \frac{144}{25}\,i$

إذن : f يقبل نقطة صامدة وحيدة $w\left(\frac{108}{25} ; \frac{144}{25}\right)$

2 ـ f تحويل نقطي من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = -\frac{3}{4}\,i \\ \beta = 9\,i \end{cases}$

بما أن $\begin{cases} \text{Arg}(\alpha) = \text{Arg}\left(-\frac{3}{4}\,i\right) = -\frac{\pi}{2} \\ |\alpha| = \left|\frac{3}{4}\,i\right| = \frac{3}{4} \end{cases}$ فإن f تشابه مباشر نسبته $\frac{3}{4}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

مركز التشابه هو النقطة الصامدة إذن : المركز هو $w\left(\frac{108}{25} ; \frac{144}{25}\right)$

3 ـ $z = 0$ إذن : $z' = -\frac{3}{4}\,i(0) + 9i = 9\,i$

منه : صورة O هي النقطة $B(0 ; 9)$

$z = 12$ إذن : $z' = -\frac{3}{4}\,i(12) + 9\,i = -9\,i + 9\,i = 0$

منه : صورة A هي المبدأ $O(0 ; 0)$

4 ـ ليكن w_1 مركز الدائرة (C_1) إذن : w_1 هي منتصف [OA] منه $w_1(6 ; 0)$

و ليكن w_2 مركز الدائرة (C_2) إذن : w_2 هي منتصف [OB] منه $w_2(0 ; 9/2)$

إذن : نصف قطر الدائرة (C_1) هو 6 و نصف قطر الدائرة (C_2) هو 9/2

لدينا : $\begin{cases} w_1w = \left|\frac{108}{25} + \frac{144}{25}\,i - 6\right| = \left|\frac{-42}{25} + \frac{144}{25}\,i\right| = \frac{6}{25}|-7+24\,i| = \frac{6}{25}\sqrt{625} = 6 \\ w_2w = \left|\frac{108}{25} + \frac{144}{25}\,i - \frac{9}{2}\,i\right| = \left|\frac{108}{25} + \frac{63}{50}\,i\right| = \left|\frac{216}{50} + \frac{63}{50}\,i\right| = \frac{9}{50}|24+7\,i| = \frac{9\times 25}{50} = \frac{9}{2} \end{cases}$

نتيجة : $w \in (C_1)$ و $w \in (C_2)$ إذن : $w \in (C_1) \cap (C_2)$

5 ـ $\begin{cases} f(O) = B \\ f(A) = O \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (\overrightarrow{WO} ; \overrightarrow{WB}) = -\frac{\pi}{2} \\ (\overrightarrow{WA} ; \overrightarrow{WO}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

منه : $(\overrightarrow{WA} ; \overrightarrow{WB}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

إذن : النقط W ، A ، B على استقامة واحدة

منه : W هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB)

6 ـ $\begin{cases} f(O) = B \\ f(A) = O \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} WB = \frac{3}{4}\,WO \\ WO = \frac{3}{4}\,WA \end{cases}$

$\frac{WB}{WO} \quad \frac{WO}{WA}$

منه : =

أي : $WB \times WA = WO^2$ و هو المطلوب

التمرين ـــ 25

ABCD مستطيل حيث $AB = \sqrt{2}$ ؛ $AD = 1$ ؛ $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

I منتصف [AB]

نعتبر المعلم المتعامد و المتجنس $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ حيث $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

S تشابه مباشر عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$

1 ـ عين العددين α و β حيث $S(D) = C$ و $S(C) = B$

ليكن T التشابه المباشر الذي عبارته المركبة $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

2 ـ عين نسبة و زاوية التشابه T

3 ـ بين أن التشابه T يحول B إلى I

4 ـ بين أن المستقيمين (BD) و (CI) متعامدان .

الحـل ـــ 25

1 ـ باعتبار المعلم المتعامد و المجانس $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ فإن :

$A(0 ; 0)$ ؛ $B(\sqrt{2} ; 0)$ ؛ $D(0 ; 1)$ ؛ $C(\sqrt{2} ; 1)$ ؛ $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$

$\begin{cases} S(D) = C \\ S(C) = B \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(i) + \beta = \sqrt{2} + i \text{ .... } (1) \\ \alpha(\sqrt{2} + i) + \beta = \sqrt{2} \text{ .... } (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(i - \sqrt{2} - i) = \sqrt{2} + i - \sqrt{2}$

أي $-\alpha\sqrt{2} = i$

أي $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} i$

أي $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} i$

بالتعويض في (1) : $\beta = \sqrt{2} + i - i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} + i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

2 ـ عبارة التشابه T : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

$\left| -\frac{\sqrt{2}}{2} i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : نسبة التشابه T هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$Arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{-\pi}{2}$ إذن : زاوية التشابه T هي $\frac{-\pi}{2}$

3 ـ من أجل $z = \sqrt{2}$ لدينا : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = -i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : صورة B بـ التشابه T هي النقطة $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$

4 ـ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CI} = -\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1)(1) = 1 - 1 = 0$

إذن : المستقيمين (BD) و (CI) متعامدين .

التمرين ــ 26

f تحويل نقطي معرف بشكله المركب $z' = (1 + i\sqrt{3})\, z - i\sqrt{3}$

1 ــ ما هي طبيعة التحويل f و ما هي عناصره المميزة ؟

2 ــ ما هي الصورة بالتحويل f للدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2

الحـل ــ 26

1 ــ f من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = 1 + i\sqrt{3} \\ \beta = -i\sqrt{3} \end{cases}$ إذن : f تشابه .

$|\alpha| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$ إذن : نسبة التشابه f هي 2

$\mathrm{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \mathrm{Arg}\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$ إذن : زاوية التشابه f هي $\frac{\pi}{3}$

$\frac{-i\sqrt{3}}{1 - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1$ إذن : مركز التشابه f هو $A(1\,;\,0)$

2 ــ صورة النقطة O هي النقطة $w(0\,;\,-\sqrt{3})$

إذن : صورة الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2 هي الدائرة ذات المركز w

و نصف القطر 2×2 لأن النسبة هي 2

إذن : معادلة صورة الدائرة المطلوبة هي : $x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 16$

أي : $x^2 + y^2 + 2y\sqrt{3} - 13 = 0$

التمرين ــ 27

S تشابه مباشر مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$

لتكن 'M صورة M و N صورة 'M بالتشابه S

ليكن H المسقط العمودي للنقطة M على ('AM)

برهن أن $\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$

الحـل ــ 27

1 ــ $\begin{cases} \text{A مركز التشابه} \\ S(M) = M' \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ نسبة التشابه} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} AM' = \frac{\sqrt{2}}{2} AM \\ (\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AM'}) = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

H مسقط عمودي لـــ M على ('AM) إذن : $(\overrightarrow{AH}\,;\,\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$

إذن : في المثلث القائم HMA لدينا : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AH}{AM}$

منه : $AH = AM\cos\frac{\pi}{4}$

أي : $AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$

أي $AH = AM'$ لأن $\frac{\sqrt{2}}{2} AM = AM'$

نتيجة : $\begin{cases} (\overrightarrow{AH}\,;\,\overrightarrow{AM'}) = \pi \\ AH = AM' \end{cases}$ إذن : A هي منتصف [M'H]

أي : $\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$

تمارين نماذج للباكالوريا

التمرين – 1

1 – عين المجموعة (C) من النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق :

$$|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i|=4$$

2 – عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول النقطة A ذات اللاحقة i إلى المبدأ O و يحول النقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}$ إلى 'B ذات اللاحقة $-4i$

3 – حدد العناصر الهندسية للتشابه S

4 – باستعمال نتائج السؤالين (2) و (3) أوجد المجموعة (C) المعرفة في السؤال (1).

الحل – 1

1 – لتكن $(x\,;y)$ احداثيات النقطة M

$|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i)|=4$ يكافئ $|(1-i\sqrt{3})(x+iy)-\sqrt{3}-i)|=4$

يكافئ $|x+iy-ix\sqrt{3}+y\sqrt{3}-\sqrt{3}-i|=4$

يكافئ $|x+y\sqrt{3}-\sqrt{3}+i(y-x\sqrt{3}-1)|^2=16$

يكافئ $(x+y\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(y-x\sqrt{3}-1)^2=16$

يكافئ $x^2+3y^2+2xy\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}(x+y\sqrt{3})+y^2+3x^2-2xy\sqrt{3}+1-2(y-x\sqrt{3})=16$

يكافئ $4x^2+4y^2+4-2x\sqrt{3}-6y-2y+2x\sqrt{3}=16$

يكافئ $4x^2+4y^2-8y=12$

يكافئ $x^2+y^2-2y=3$

يكافئ $x^2+(y-1)^2=4$

منه : (C) هي دائرة مركزها $w(0\,;1)$ و نصف قطرها 2

2 – لتكن $z'=\alpha z+\beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A)=0 \\ S(B)=B' \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(i)+\beta=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \alpha(\sqrt{3})+\beta=-4i \;\ldots\ldots (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(i-\sqrt{3})=4i$

منه : $\alpha=\dfrac{4i}{-\sqrt{3}+i}\times\dfrac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}$

أي : $\alpha=\dfrac{-4\sqrt{3}\,i+4}{3+1}$

أي : $\alpha=1-i\sqrt{3}$

بالتعويض في (1) : $\beta=-i(1-i\sqrt{3})=-\sqrt{3}-i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i$

3 – العناصر الهندسية لـ S :

$|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$ إذن : نسبة التشابه S هي 2

$\text{Arg}(1-i\sqrt{3})=\dfrac{-\pi}{3}$ إذن : زاوية التشابه S هي $\dfrac{-\pi}{3}$

$\dfrac{-\sqrt{3}-i}{1-1+i\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}}\times\dfrac{-i}{-i}=\dfrac{i\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ إذن : المركز هو $w\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\,;1\right)$

4 ــ نضع $M' = S(M)$ إذن : $M' \in (C)$ يكافئ $|z'| = 4$

منه : M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $(0 ; 0)$ و نصف قطرها 4

إذن معادلتها $x'^2 + y'^2 = 16$

لنبحث عن عبارة x و y بدلالة x' و y' كمايلي :

$$x' + i\,y' = (1 - i\sqrt{3})(x + i\,y) - \sqrt{3} - i$$

أي $$x' + i\,y' = x + i\,y - i\,x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - \sqrt{3} - i$$

أي $$x' + i\,y' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} + i(y - x\sqrt{3} - 1)$$

أي $$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = y - x\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

نتيجة : $x'^2 + y'^2 = 6$ يكافئ $(x + y\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (y - x\sqrt{3} - 1)^2 = 16$ و هي نفسها معادلة المجموعة (C) المحصل عليها في السؤال (1)

التمرين ــ 2

ليكن u عدد مركب حيث $u = (1 - i)\,z + 2\,i$ مع z لاحقة النقطة M

1 ــ باستعمال التشابه المباشر ذو المركز $A(2 ; 0)$ و الزاوية $\frac{-\pi}{4}$ و النسبة $\sqrt{2}$
عين مجموعة النقط M حيث $|u| = 2$

2 ــ أوجد نتيجة السؤال (1) دون استعمال التشابه .

الحــل ــ 2

1 ــ ليكن S التشابه الذي مركزه $A(2 ; 0)$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{-\pi}{4}$

إذن : عبارة S هي : $z' = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] z + \beta$

أي : $z' = (1 - i)\,z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1 - 1 + i} = 2$

أي $\beta = 2\,i$

نتيجة : عبارة S هي $z' = (1 - i)\,z + 2\,i$

نلاحظ أن $z' = u$

إذن : إذا كانت $M' = S(M)$ فإن u هي لاحقة النقطة M'

إذن : $|u| = 2$ يكافئ $\|\overrightarrow{OM'}\| = 2$

يكافئ M' تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2

أي M' تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O و تشمل $A(2 ; 0)$

إذن : M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها هي سابقة النقطة O بالتشابه S

و نصف قطرها $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

نضع $S(P) = 0$

لنبحث عن z بدلالة z' :

$z' = (1 - i)\,z + 2\,i$ يكافئ $z = \frac{z' - 2\,i}{1 - i}$

من أجل $z' = 0$: إذن $z = \frac{-2\,i}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i} = 1 - i$: $P(1 ; -1)$

منه : M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $P(1 ; -1)$ و نصف القطر $\sqrt{2}$

أي : مجموعة النقط المطلوبة لها المعادلة : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

2 ــ ليكن $z = x + i\,y$

$|u| = 2$ يكافئ $|u|^2 = 4$

يكافئ $|(1 - i)(x + i\,y) + 2\,i|^2 = 4$

يكافئ $|x+iy-ix+y+2i|^2=4$

يكافئ $|x+y+i(y-x+2)|^2=4$

يكافئ $x^2+y^2+2xy+y^2+x^2-2xy+4+4(y-x)=4$

يكافئ $2x^2+2y^2+4y-4x=0$

يكافئ $x^2+y^2-2x+2y=0$

يكافئ $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

و هي معادلة مجموعة النقط M المطلوبة (نتيجة السؤال (1))

أي دائرة مركزها $P(1\,;-1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$

التمرين ــ 3

في المستوي الموجه نعتبر مربعا مباشرا ABCD ذو المركز O

لتكن P نقطة من القطعة [BC] تختلف على B و C

نعين Q نقطة تقاطع (AP) و (CD)

المستقيم (Δ) العمودي على (AP) في A يقطع (BC) في R و يقطع (CD) في S

1 ــ أنجز الرسم

ليكن T الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

2 ــ حدد صورة المستقيم (BC) بالدوران T

3 ــ عين صور كل من R و P بالدوران T

4 ــ ما هي طبيعة كل من المثلثين ARQ و APS

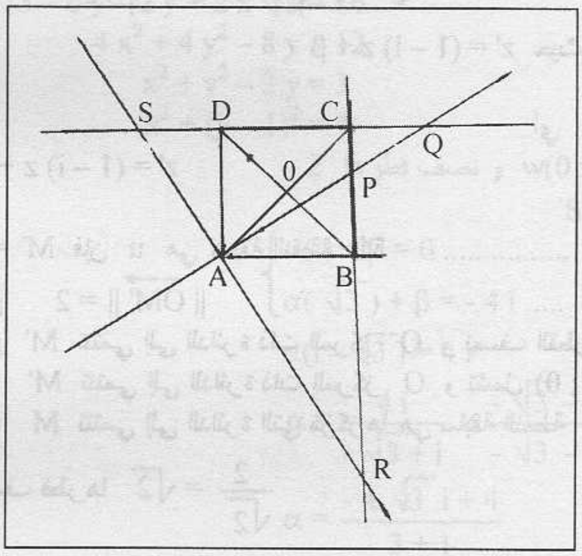
نسمي N منتصف [PS] و M منتصف [RQ]

ليكن f التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

5 ــ عين صورة كل من R و P بالتشابه f

الحـل ــ 3

1 ــ الانشاء :



2 ــ المستقيم (BC) شاقولي إذن صورته بالدوران T ذو الزاوية $\frac{\pi}{2}$ هو مستقيم أفقي (عمودي على (BC))

بما أن صورة B بالدوران T هي D فإن D تنتمي إلى صورة (BC) بالدوران T

و عليه فإن صورة المستقيم (BC) بالدوران T هي المستقيم (DC)

3 ــ لتكن $P'=T(P)$

$P\in(BC)$ إذن : $P'\in(CD)$

$(\overrightarrow{AP}\,;\overrightarrow{AP'})=\frac{\pi}{2}$ إذن : $P'\in(AS)$

إذن : P' هي نقطة تقاطع (DC) و (AS)

أي : $T(P)=S$

لتكن $R'=T(R)$

$R\in(CB)$ إذن : $R'\in(CD)$ لأن صورة (CB) بالتشابه T هي (CD)

$(\overrightarrow{AR}\,;\overrightarrow{AR'})=\frac{\pi}{2}$ إذن : $R\in(AP)$ لأن $(AP)\perp(AR)$

نتيجة : $R' \in (AP) \cap (CD)$

أي R' تنطبق على Q

منه : $T(R) = Q$

4 ـ $\left\{\begin{array}{l} AR = AQ \\ (\overrightarrow{AR} ; \overrightarrow{AQ}) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ إذن : المثلث ARQ قائم في A و متساوي الساقين .

$\left\{\begin{array}{l} AS = AP \\ (\overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{AS}) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ إذن : المثلث ASP قائم في A و متساوي الساقين .

5 ـ $[PS]$ هو وتر المثلث ASP و N منتصف $[PS]$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} AN = \frac{SP}{2} \\ (\overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

$[RQ]$ هو وتر المثلث ARQ و M منتصف $[RQ]$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} AM = \frac{RQ}{2} \\ (\overrightarrow{AR} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

في المثلث القائم ASP : $SP^2 = AS^2 + AP^2$

إذن : $SP^2 = 2\,AP^2$ لأن $AP = AS$

منه : $SP = AP\sqrt{2}$

إذن : $AN = \frac{SP}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,AP$

في المثلث القائم ARQ : $RQ^2 = AR^2 + AQ^2$

إذن : $RQ^2 = 2\,AR^2$

منه : $RQ = AR\sqrt{2}$

إذن : $AM = \frac{RQ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,AR$

خلاصة : $\left\{\begin{array}{l} AN = \frac{\sqrt{2}}{2}\,AP \\ (\overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$ إذن : $f(P) = N$

$\left\{\begin{array}{l} AM = \frac{\sqrt{2}}{2}\,AR \\ (\overrightarrow{AR} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$ إذن : $f(R) = M$

<u>التمرين ـ 4</u>

في المستوي الموجه ABC مثلث حيث $AB = 2$ ؛ $AC = 1 + \sqrt{5}$ ؛ $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

1 ـ عين نسبة و زاوية التشابه S الذي يحول B إلى A و يحول A إلى C

نسمي w مركز التشابه S

2 ـ بين أن w تنتمي إلى لدائرة ذات القطر $[AB]$

لتكن D صورة النقطة C بالتشابه S

3 ـ برهن استقامية النقط B ، w ، C .

4 ـ برهن أن $CD = 3 + \sqrt{5}$

<u>الحـل ـ 4</u>

لننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ حيث :

$\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{u}$ ؛ $\overrightarrow{AC} = (1 + \sqrt{5})\,\vec{v}$

إذن : $A(0 ; 0)$ ؛ $B(2 ; 0)$ ؛ $C(0 ; 1 + \sqrt{5})$

1 ــ لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(B) = A \\ S(A) = C \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(2) + \beta = 0 \text{ .... } (1) \\ \alpha(0) + \beta = (1+\sqrt{5})\, i \text{ .... } (2) \end{cases}$

من (2) : $\beta = (1+\sqrt{5})\, i$

بالتعويض في (1) : $\alpha = \dfrac{-(1+\sqrt{5})}{2}$

نتيجة : عبارة التشابه S هي $z' = \dfrac{-(1+\sqrt{5})}{2} i z + (1+\sqrt{5})\, i$

بما أن $\begin{cases} \left|\dfrac{-(1+\sqrt{5})}{2}\right| i = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \operatorname{Arg}\left(\dfrac{-(1+\sqrt{5})}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

فإن : نسبة التشابه S هي $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و زاويته هي $\dfrac{-\pi}{2}$

2 ــ لاحقة النقطة w مركز التشابه S هي : $\dfrac{2(1+\sqrt{5})\, i}{2+(1+\sqrt{5})\, i} = \dfrac{(1+\sqrt{5})\, i}{1+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) i}$

$$= \frac{2(1+\sqrt{5})\, i\,[2-(1+\sqrt{5})\, i]}{[2+(1+\sqrt{5})\, i][2-(1+\sqrt{5})\, i]}$$

$$= \frac{4 i(1+\sqrt{5}) + 2(1+\sqrt{5})^2}{4+(1+5+2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{5})^2 + 4(1+\sqrt{5}) i}{10+2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^2 + 2(1+\sqrt{5}) i}{5+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^2 + 2(1+\sqrt{5}) i}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} i$$

منه : $w\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} ; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

لدينا معادلة الدائرة ذات القطر [AB] هي : $(x-1)^2 + y^2 = 1$

أي : $x^2 + y^2 - 2x = 0$

لدينا : $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{1+5+2\sqrt{5}}{5} + \dfrac{4}{5} - \dfrac{2+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}+4-2\sqrt{5}-10}{5}$$

$= 0$ إذن : فعلا w تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [AB]

من جهة أخرى : $\overrightarrow{wB}\begin{pmatrix} 2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ 0-\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 1+\sqrt{5}-0 \end{pmatrix}$

منه : $\begin{vmatrix} -2 & 2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ 1+\sqrt{5} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} - \left(1+\sqrt{5}\right)\left(2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)$

$= \dfrac{4}{\sqrt{5}} - (2 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} - 1 - \sqrt{5})$

$= \dfrac{4}{\sqrt{5}} - (2 - \dfrac{1}{\sqrt{5}} - 1 + 2\sqrt{5} - 1 - \sqrt{5})$

$= \dfrac{4}{\sqrt{5}} - (\sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}})$

$= \dfrac{4}{\sqrt{5}} - \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$= 0$ إذن : $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{wB}$

منه : النقط w ، B ، C على استقامة واحدة .

3 ـ من أجل $z = (1+\sqrt{5})\, i$ لدينا $z' = \dfrac{-(1+\sqrt{5})}{2}\, i\,(1+\sqrt{5})\, i + (1+\sqrt{5})\, i$

أي $z' = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{2} + (1+\sqrt{5})\, i$

أي : $z' = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{2} + (1+\sqrt{5})\, i$

أي : $z' = (3+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})\, i$

إذن : لاحقة النقطة D هي $(3+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})\, i$

منه : $CD = \left|(3+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})\, i - (1+\sqrt{5})\, i\right|$

$= \left|3+\sqrt{5}\right|$

$= 3+\sqrt{5}$ و هو المطلوب

التمرين ـ 5

A نقطة لاحقتها $2+i$

H تحاكي مركزه A و نسبته $1/2$

S تحويل نقطي للمستوي عبارته المركبة $z' = i\bar{z} + 1 - i$

ليكن T تحويل نقطي حيث $T = SoH$

1 ـ عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S ثم استنتج طبيعته

2 ـ عين الشكل المركب للتحويل T

3 ـ أثبت أن T يقبل نقطة صامدة وحيدة هي A

الحـل ـ 5

1 ـ لتكن $z = x + i y$ حيث x و y عددان حقيقيان

تكون w ذات اللاحقة z صامدة بـ التحويل S إذا و فقط إذا كان :

$S(w) = w$ أي : $i\bar{z} + 1 - i = z$

أي : $i(x - i y) + 1 - i = x + i v$

أي : $i x + y + 1 - i = x + i y$

أي $i x + y + 1 - i - x - i y = 0$

أي $1 - x + y + i(x - y - 1) = 0$

أي $\begin{cases} 1 - x + y = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 1 - x + y = 0 \\ 1 - x + y = 0 \end{cases}$

أي $1 - x + y = 0$

منه : مجموعة النقط الصامدة بالتحويل S هي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $1 - x + y = 0$

لتكن $M(x\,;\,y)$ و $M'(x'\,;\,y')$

$M' = S(M)$ يكافئ $x' + i\,y' = i(x - i\,y) + 1 - i$

يكافئ $x' + i\,y' = y + 1 + i(x - 1)$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{array}\right\}$

لدينا : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y + 1 - x \\ x - 1 - y \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -(x - y - 1) \\ (x - y - 1) \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

من جهة أخرى شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو : $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

منه : $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{MM'} = (-1)(-1) + (1)(-1) = 0$

إذن : $\overrightarrow{MM'}$ عمودي على (Δ)

لتكن w منتصف $[MM']$

إذن : $w\left(\dfrac{x + y + 1}{2}\,;\,\dfrac{y + x - 1}{2}\right)$

بالتعويض في معادلة (Δ) :

$$1 - \frac{x + y + 1}{2} + \frac{y + x - 1}{2} = 1 + \frac{-x - y - 1 + y + x - 1}{2}$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

إذن : $w \in (\Delta)$

نتيجة : M' هي نظيرة M بالنسبة إلى (Δ)

إذن : التحويل S هو تناظر عمودي بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $1 - x + y = 0$ أي $y = x - 1$

2 ــ لنبحث عن الشكل المركب لــ H :

حيث $z' = \dfrac{1}{2}z + \beta$ · $\dfrac{\beta}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + i$

أي : $\beta = \dfrac{1}{2}(2 + i) = 1 + \dfrac{1}{2}i$

إذن : عبارة H هي $z' = \dfrac{1}{2}z + 1 + \dfrac{1}{2}i$

التركيب : $z \xrightarrow{H} \dfrac{1}{2}z + 1 + \dfrac{1}{2}i \xrightarrow{S} i\left(\overline{\dfrac{1}{2}z + 1 + \dfrac{1}{2}i}\right) + 1 - i$

منه :
$$SoH(z) = i\left(\frac{1}{2}\,\bar{z} + 1 - \frac{1}{2}i\right) + 1 - i$$
$$= \frac{1}{2}i\,\bar{z} + i + \frac{1}{2} + 1 - i$$
$$= \frac{1}{2}i\,\bar{z} + \frac{3}{2}$$

إذن : الشكل المركب لــ T : $z' = \dfrac{1}{2}i\,\bar{z} + \dfrac{3}{2}$

3 ــ لتكن w ذات اللاحقة z حيث $z = x + i\,y$

w صامدة بــ T إذا و فقط إذا كان $T(w) = w$

أي : $z' = z$

أي $\dfrac{1}{2}i\,\bar{z} + \dfrac{3}{2} = z$

أي $\frac{1}{2}i(x-iy)+\frac{3}{2}=x+iy$

أي $\frac{1}{2}ix+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}-x-iy=0$

أي $\frac{1}{2}y-x+\frac{3}{2}+i(\frac{1}{2}x-y)=0$

أي $\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=0\\ \frac{1}{2}y-x+\frac{3}{2}=0\end{cases}$

أي $\begin{cases}(1)\ ....\ x-2y=0\\ (2)....\ y-2x+3=0\end{cases}$

نضرب طرفي المعادلة (1) في 2 : $(3)\ ......\ 2x-4y=0$

نجمع (3) و (2) : $y-2x+3+2x-4y=0$

أي : $-3y+3=0$

أي : $y=1$

بالتعويض في (1) : $x=2y=2$

نتيجة : التحويل T له نقطة صامدة وحيدة $w(2\,;1)$ أي w تنطبق على A

<u>التمرين ــ 6</u>

S تشابه غير مباشر يحول النقطة A إلى B و النقطة C إلى D

عين العبارة المركبة للتشابه S إذا كانت لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب هي $3i$ ؛ 3 ؛ $3-2i$ ؛ $-3-2i$

<u>الحــل ــ 6</u>

S تشابه غير مباشر إذن عبارته $z'=\alpha\overline{z}+\beta$

$\begin{cases}S(A)=B\\ S(C)=D\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\alpha(3i)+\beta=3\ ....\ (1)\\ \alpha(3+2i)+\beta=-3-2i\ ....\ (2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(3i-3-2i)=3+3+2i$

أي : $\alpha=\frac{6+2i}{-3+i}\times\frac{-3-i}{-3-i}$

أي $\alpha=\frac{-18-6i-6i+2}{10}$

أي $\alpha=\frac{-16-12i}{10}$

أي $\alpha=-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i$

بالتعويض في (1) : $\beta=3-3i\left(-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i\right)$

$=3+\frac{24}{5}i-\frac{18}{5}$

$=-\frac{3}{5}+\frac{24}{5}i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z'=\left(-\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i\right)\overline{z}-\frac{3}{5}+\frac{24}{5}i$

<u>التمرين ــ 7</u>

S تحويل نقطي عبارته $z'=-5i\overline{z}+1+i$

1 ــ أوجد معادلة لصورة المستقيم (AB) حيث A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب $1+2i$ و 2

2 ــ عين صورة الدائرة ذات المركز $I(3\,;1)$ و نصف القطر $\sqrt{5}$ بالتحويل S

الحـل ــ 7

نضع $z = x + i y$ و $z' = x' + i y'$

$z' = -5 i \bar{z} + 1 + i$ يكافئ $x' + i y' = -5 i(x - i y) + 1 + i$

يكافئ $x' + i y' = -5 i x - 5 y + 1 + i$

يكافئ $x' + i y' = 1 - 5 y + i(1 - 5 x)$

يكافئ $\begin{cases} x' = 1 - 5 y \\ y' = 1 - 5 x \end{cases}$ و هو الشكل التحليلي للتحويل S

1 ــ لنبحث عن معادلة المستقيم (AB) :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$M(x\,;\,y) \in (AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BM}$

يكافئ $\begin{vmatrix} 1 & x-2 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 0$

يكافئ $y = -2x + 4$ و هي معادلة (AB)

1 ــ لنبحث عن عبارة x و y بدلالة x' و y' في التحويل S :

$\begin{cases} x' = 1 - 5 y \\ y' = 1 - 5 x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y = \dfrac{1 - x'}{5} \\ x = \dfrac{1 - y'}{5} \end{cases}$

معادلة (AB) هي $y = -2x + 4$

إذن : معادلة صورة (AB) هي : $\dfrac{1 - x'}{5} = -2\left(\dfrac{1 - y'}{5}\right) + 4$

أي : $1 - x' = -2 + 2 y' + 20$

أي : $2 y' = 1 - x' + 2 - 20$

أي : $y' = -\dfrac{1}{2} x' - \dfrac{17}{2}$

نتيجة : صورة (AB) بالتحويل S هو المستقيم ذو المعادلة $y = -\dfrac{1}{2} x - \dfrac{17}{2}$

2 ــ لتكن (C) الدائرة ذات المركز $I(3\,;\,1)$ و نصف القطر $\sqrt{5}$

معادلة (C) : $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$

إذن : معادلة صورة (C) هي : $\left(\dfrac{1 - y'}{5} - 3\right)^2 + \left(\dfrac{1 - x'}{5} - 1\right)^2 = 5$

أي : $\left(\dfrac{1 - y' - 15}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{1 - x' - 5}{5}\right)^2 = 5$

أي : $\left(\dfrac{14 + y'}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{x' + 4}{5}\right)^2 = 5$

أي : $(y' + 14)^2 + (x' + 4)^2 = 125$

أي : $(x' + 4)^2 + (y' + 14)^2 = (5\sqrt{5})^2$

إذن : صورة (C) هي الدائرة التي مركزها $w(-4\,;\,-14)$ و نصف قطرها $5\sqrt{5}$

ملاحظة : يمكن الاجابة باستعمال خواص التشابه كما يلي :

S تشابه نسبته $|-5 i| = 5$

إذن : صورة الدائرة (C) بــ S هي الدائرة التي مركزها w حيث $w = S(I)$ و نصف قطرها $5\sqrt{5}$

البحث عن w : S(I)

من أجل $z = 3 + i$ فإن : $z' = -5 i(3 - i) + 1 + i$

$= -15 i - 5 + 1 + i$

$= -14 i - 4$

إذن : $w(-4\,;\,-14)$

منه : معادلة صورة (C) بالتشابه S هي : $(x+4)^2+(y+14)^2=(5\sqrt{5})^2$

التمرين ـ 8

A_0 ، A_1 ، A_2 نقط لواحقها على الترتيب : $z_0=5-4i$ ؛ $z_1=-1-4i$ ؛ $z_2=-4-i$

1 ـ عين الكتابة المركبة للتشابه S الذي يحول A_0 إلى A_1 و A_1 إلى A_2

2 ـ استنتج نسبة و زاوية و مركز التشابه S

ليكن w مركز التشابه S حيث t لاحقة w

ليكن M و M' نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و z' حيث $z\neq t$ و $S(M)=M'$

3 ـ تحقق أن : $t-z'=i(z-z')$ ثم استنتج طبيعة المثلث wMM'

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف النقطة A_{n+1} بـ : $A_{n+1}=S(A_n)$ و نضع $u_n=\|A_nA_{n+1}\|$

4 ـ برهن أن المتتالية (u_n) هندسية

نعرف المتتالية (v_n) على IN بـ : $v_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

5 ـ عبر عن v_n بدلالة n

6 ـ هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

الحـل ـ 8

1 ـ لتكن $z'=\alpha z+\beta$ عبارة التشابه S

$$\begin{cases}S(A_0)=A_1\\S(A_1)=A_2\end{cases}\ \text{يكافئ}\ \begin{cases}\alpha(5-4i)+\beta=-1-4i\ \dots\dots\ (1)\\\alpha(-1-4i)+\beta=-4-i\ \dots\dots\ (2)\end{cases}$$

بطرح (2) من (1) : $\alpha(5-4i+1+4i)=-1-4i+4+i$

أي $6\alpha=3-3i$

أي $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

بالتعويض في (1) : $\beta=-1-4i-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(5-4i)$

أي $\beta=-1-4i-\frac{5}{2}+2i+\frac{5}{2}i+2$

أي $\beta=1-\frac{5}{2}-2i+\frac{5}{2}i$

أي $\beta=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

نتيجة : عبارة التشابه S : $z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

2 ـ النسبة : $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

الزاوية : $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\pi}{4}$

المركز : $\dfrac{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{-3+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{-3+3i+i+1}{2}=-1+2i$ إذن : المركز $w(-1\,;\,2)$

3 ـ t لاحقة w إذن : $t=-1+2i$

إذن : $t-z'=-1+2i-\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right]$

$$=-1+2i-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z$$

من جهة أخرى : $i(z-z') = iz - iz'$

$$= iz - i\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= iz - \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)z + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$= z\left(i - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$= z\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$$

$$= t - z'$$

نتيجة : $i(z-z') = t - z'$ منه $|i(z-z')| = |t-z'|$

أي $|z-z'| = |t-z'|$

أي $MM' = wM'$

إذن : wMM' مثلث متساوي الساقين

و بما أن $(\overrightarrow{wM}\,;\overrightarrow{wM'}) = -\frac{\pi}{4}$ فإن : المثلث wMM' قائم في M'

أي : wMM' قائم في M' و متساوي الساقين

4 ـ لتكن z_n لاحقة A_n و z_{n+1} لاحقة A_{n+1}

$S(A_n) = A_{n+1}$ إذن : $t - z_{n+1} = i(z_n - z_{n+1})$

منه : $|t - z_{n+1}| = |z_n - z_{n+1}|$

أي $\|\overrightarrow{wA_{n+1}}\| = \|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\|$

لدينا نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : $wA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}wA_0$

$$wA_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}wA_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 wA_0$$

$$wA_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}wA_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 wA_0$$

$$\vdots$$

$$wA_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} wA_0$$

إذن : $\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} wA_0$

لنحسب wA_0 : $|t - z_0| = |-1 + 2i - 5 + 4i| = |-6 + 6i| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

منه : $\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \times 6\sqrt{2}$

أي : $u_n = 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$ إذن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و حدها الأول $6\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

5 ـ $v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$= u_0\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}\right)$$

$$= 6\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} - 1\right) \times \frac{2}{\sqrt{2} - 2}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{2} - 2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

6 – $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{12}{\sqrt{2} - 2} \times (-1)$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{12}{2 - \sqrt{2}}$

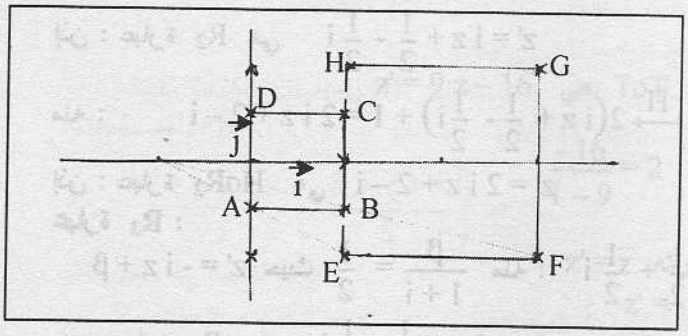
التمرين – 9

A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $-\frac{1}{2} i$ ، $1 - \frac{1}{2} i$ ،
$1 + \frac{1}{2} i$ ، $\frac{1}{2} i$ ، $1 - i$ ، $3 - i$ ، $3 + i$ ، $1 + i$

C_1 هو المربع ذو الرؤوس A ، B ، C ، D و المركز O_1
C_2 هو المربع ذو الرؤوس E ، F ، G ، H و المركز O_2
نضع $S_1 = \{A ; B ; C ; D\}$ و $S_2 = \{E ; F ; G ; H\}$
1 – مثل النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H
2 – ليكن H التحاكي ذو المركز $w(-1 ; 0)$ و النسبة 2
أكتب العبارة المركبة للتحاكي H ثم بين أن H يحول S_1 إلى S_2
3 – ليكن S التشابه الذي يحول S_1 إلى S_2 و g التحويل النقطي المعرف بـ $g = H^{-1}oS$ حيث H^{-1} هو التحاكي الذي مركزه $w(-1 ; 0)$ و نسبته 1/2
أ) ما هي نسبة التشابه S
ب) أثبت أن G تقايس و أن S_1 مجموعة صامدة إجماليا بـ g
جـ) برهن أن $g(O_1) = O_1$
د) استنتج أن g هو أحد التحويلات التالية : التحويل المطابق ، دوران R_1 ذو المركز O_1 و الزاوية π ؛ دوران R_2 ذو المركز O_1 و الزاوية π/2 ؛ دوران R_3 مركزه O_1 و زاويته π/2 -
هـ) عين العبارات المركبة لكل من HoR_1 ؛ HoR_2 ؛ HoR_3
و) استنتج المركز w_1 ، w_2 ، w_3 لكل من التشابهات HoR_1 ؛ HoR_2 ؛ HoR_3 على الترتيب .

الحل – 9

– 1



2 – ليكن $z' = 2z + \beta$ عبارة التحاكي H

المركز هو w إذن : $\frac{\beta}{1-2} = -1$ منه $\beta = 1$

إذن : عبارة التحاكي H هي : $z' = 2z + 1$

لدينا O_1 مركز S_1 إذن : $O_1(1/2 ; 0)$

و O_2 مركز S_2 إذن : $O_2(2 ; 0)$

من أجل $z = 1/2$ فإن : $z' = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$ إذن : $H(O_1) = O_2$

طول ضلع المربع C_1 هو 1

طول ضلع المربع C_2 هو 2 حيث $2 = 2 \times 1$ (نسبة التحاكي H هي 2)

نتيجة : S_2 هو صورة S_1 بالتحاكي H

3 – أ) S تشابه يحول S_1 إلى S_2 إذن : نسبة التشابه S هي 2 و يحقق $S(O_1) = O_2$

ب) $\left\{\begin{array}{l} g = H^{-1}oS \\ \text{نسبة التشابه } H^{-1} \text{ هي } 1/2 \text{ إذن : } g \text{ هو تشابه نسبته 1 (جداء نسبتي } H^{-1} \text{ و } S) \\ \text{نسبة التشابه } S \text{ هي 2 إذن : } g \text{ هو تقايس} \end{array}\right.$

من جهة أخرى : $g(O_1) = H^{-1}[S(O_1)] = H^{-1}(O_2) = O_1$

إذن : $g(C_1) = C_1$

أي : $g(S_1) = S_1$

أي S_1 مجموعة صامدة إجماليا بـ g

جـ) $g(O_1) = H^{-1}[S(O_1)]$ منه : $g(O_1) = H^{-1}(O_2)$

لدينا : $\overrightarrow{wO_1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{wO_1}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v'O_2}\begin{pmatrix} 2+1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{wO_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ منه $\frac{1}{2}\overrightarrow{wO_2}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

بما أن : $\overrightarrow{wO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{wO_2}$ فإن $O_1 = H^{-1}(O_2)$

منه : $g(O_1) = H^{-1}(O_2) = O_1$ و هو المطلوب

جـ) لدينا $g(S_1) = S_1$

إذن : النقطة D تتحول إما إلى نفسها D ، أو إلى C أو إلى B أو إلى A

نميز الحالات التالية :

الحالة (1) $g(D) = D$: إذن g هو التحويل المطابق

الحالة (2) $g(D) = C$: إذن g دوران مركزه O_1 و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و ليكن R_3

الحالة (3) $g(D) = B$: إذن g دوران مركزه O_1 و زاويته π و ليكن R_1

الحالة (4) $g(D) = A$: إذن g دوران مركزه O_1 و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن R_2

هـ) **عبارة R_1 :**

$z' = -z + \beta$ حيث، $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$ منه : $\beta = 1$

إذن : عبارة R_1 هي $z' = -z + 1$

منه : $z \xrightarrow{R_1} -z+1 \xrightarrow{H} 2(-z+1)+1 = -2z+3$

إذن : عبارة HoR_1 هي $z' = -2z+3$

عبارة R_2 :

$z' = iz + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1-i} = \frac{1}{2}$ منه : $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن : عبارة R_2 هي $z' = iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

منه : $z \xrightarrow{R_2} iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \xrightarrow{H} 2\left(iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + 1 = 2iz + 2 - i$

إذن : عبارة HoR_2 هي $z' = 2iz + 2 - i$

عبارة R_3 :

$z' = -iz + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1+i} = \frac{1}{2}$ منه : $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

منه : عبارة R_3 : $z' = -iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

إذن : $z \xrightarrow{P_3} -iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \xrightarrow{H} 2\left(-iz + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 1 = -2iz + 2 + i$

إذن : عبارة HoR_3 هي $z' = -2iz + 2 + i$

و) المركز :

$\frac{3}{1+2} = 1$ إذن : $w_1(1\,;\,0)$ هو مركز التشابه HoR_1

$\frac{2-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2+4i-i+2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ إذن : $w_2\left(\frac{4}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right)$ هو مركز HoR_2

$\frac{2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{2-4i+i+2}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$: إذن $w_3\left(\frac{4}{5} ; -\frac{3}{5}\right)$ هو مركز HoR_3

التمرين – 10

T تحويل نقطي للمستوي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث $z' = -3i\bar{z} + 2 + 6i$

1 – ما هي طبيعة التحويل T ؟

2 – لتكن z'' لاحقة النقطة M'' حيث $M'' = T(M')$

عين z'' بدلالة z

3 – عين طبيعة التحويل ToT و عناصره المميزة

4 – برهن أن T هو مركب تناظر محوري ذو المحور (xx') و تشابه S يطلب تحديد عناصره

5 – برهن أن T هو مركب لتحاكي ذو المركز A و النسبة 3- و التناظر المحوري ذو المحور المستقيم (d) الذي يشمل A و معامل توجيهه 1 حيث A هو مركز التشابه S

الحـل – 10

1 – $z \xrightarrow{S} \bar{z} \xrightarrow{P} -3i\bar{z} + 2 + 6i$

إذن : T هو مركب الناظر المحوري S بالنسبة إلى محور الفواصل و التشابه المباشر P الذي نسبته 3

إذن : T هو تشابه غير مباشر نسبته 3 و مركزه النقطة الصامدة A كمايلي :

لتكن $A(x ; y)$ صامدة

$x + iy = -3i(x - iy) + 2 + 6i$

أي $x + iy = -3ix - 3y + 2 + 6i$

أي $(x + 3y - 2) + i(3x + y - 6) = 0$

أي $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8$ إذن : $\begin{cases} x = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2 \\ y = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

إذن : مركز التشابه T هو $A(2 ; 0)$

2 – $z \xrightarrow{T} z' = -3i\bar{z} + 2 + 6i \xrightarrow{T} z'' = -3i\overline{(-3i\bar{z} + 2 + 6i)} + 2 + 6i$

$= -3i(3iz + 2 - 6i) + 2 + 6i$

$= 9z - 6i - 18 + 2 + 6i$

$= 9z - 16$ إذن : عبارة ToT هي $z' = 9z - 16$

3 – طبيعة التحويل ToT :

ToT هو تحاكي نسبته 9 و مركزه w ذات اللاحقة $2 = \frac{-16}{1-9}$

أي مركز التحاكي ToT هو النقطة $A(2 ; 0)$

4 – ليكن P التناظر المحوري بالنسبة إلى (xx') إذن عبارته $z' = \bar{z}$

و ليكن S تشابه مباشر عبارته : $z' = -3iz + 2 + 6i$

إذن : $z \xrightarrow{P} \bar{z} \xrightarrow{S} -3i\bar{z} + 2 + 6i$

منه : $T = SoP$

العناصر الهندسية للتشابه S :

النسبة : $|-3i| = 3$

الزاوية : $Arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$

المركز : $\frac{2+6i}{1+3i} = \frac{2(1+3i)}{1+3i} = 2$ إذن : المركز هو $A(2 ; 0)$

5 – ليكن S التحاكي ذو المركز A و النسبة 3 -

عبارة S : $z' = -3z+\beta$ حيث $\frac{\beta}{1+3} = 2$ أي $\beta = 8$

منه عبارة S هي $z' = -3z+8$

نفرض وجود تحويل نقطي P حيث $SoP = T$

ليكن S^{-1} التحاكي الذي مركزه $A(2\,;0)$ و نسبته $-\frac{1}{3}$ - إذن عبارة S^{-1} هي : $z' = -\frac{1}{3}z+\beta$

حيث $\frac{\beta}{1+\frac{1}{3}} = 2$ منه $\beta = \frac{8}{3}$

منه عبارة S^{-1} هي $z' = -\frac{1}{3}z+\frac{8}{3}$

لدينا : $SoP = T$ منه $S^{-1}oSoP = S^{-1}oT$

أي : $P = S^{-1}oT$ لأن $S^{-1}oS$ هو تحويل مطابق

لنبحث إذن عن عبارة $S^{-1}oT$ كمايلي :

$$z \xrightarrow{T} -3i\bar{z}+2+6i \xrightarrow{S^{-1}} z' = -\frac{1}{3}[-3i\bar{z}+2+6i]+\frac{8}{3}$$

$$= i\bar{z}-\frac{2}{3}-2i+\frac{8}{3}$$

$$= i\bar{z}+2-2i$$

إذن : عبارة التحويل P حيث $SoP = T$ هي $z' = i\bar{z}+2-2i$

لنبحث الآن عن طبيعة التحويل P كمايلي :

عبارة x' و y' بدلالة x و y :

$$x'+iy' = i(x-iy)+2-2i$$

أي $$x'+iy' = ix+y+2-2i$$

أي $$x'+iy' = y+2+i(x-2)$$

أي $$\begin{cases} x' = y+2 \\ y' = x-2 \end{cases}$$

النقط الصامدة :

$$\begin{cases} x = y+2 \\ y = x-2 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} y-x+2 = 0 \\ y-x+2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad y-x+2 = 0$$

إذن : النقط الصامدة بالنحويل P هي المستقيم (d) ذو المعادلة $y-x+2=0$

منتصف [MM'] : لتكن w منتصف [MM'] حيث $M' = P(M)$

إذن : $w\left(\frac{x+y+2}{2}\,;\,\frac{x-2+y}{2}\right)$

بالتعويض في معادلة (d) :

$$\frac{x-2+y}{2}-\frac{x+y+2}{2}+2 = \frac{x-2+y-x-y-2}{2}+2$$

$$= 2-2$$

$$= 0$$ إذن : $w \in (d)$

وضعية (MM') بالنسبة إلى المستقيم (d)

(d) له شعاع توجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}y+2-x\\x-2-y\end{pmatrix}$$

منه : $\vec{u}.\overrightarrow{MM'} = -1(y+2-x)-1(x-2-y)$

$= - y - 2 + x - x + 2 + y$

$\vec{u} \perp \overrightarrow{MM'}$: إذن $= 0$

منه : (MM') عمودي على (d)

خلاصة : M' هي نظيرة النقطة M بالنسبة إلى المستقيم (d)

هل $A \in (d)$ ؟ $A(2 ; 0)$ إذن : $0 - 2 + 2 = 0$

إذن : فعلا A تنتمي إلى (d)

معامل توجيه (d) : (d) له المعادلة $y - x + 2 = 0$ أي $y = x + 2$

منه : معامل توجيه (d) هو 1

نتيجة : التحويل P هو تناظر محوري بالنسبة إلى المستقيم (d) الذي يشمل النقطة A و معامل توجيهه 1

التمرين – 11

ليكن $z_1 = \sqrt{2}\,(1 - i)$ ؛ $z_2 = \dfrac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})\,i}{1 - z_1}$

1 – أكتب العدد z_1 على شكله المثلثي

2 – برهن أن $z_2 = -i$

لتكن M و M' نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z = x + i y$ و $z' = x' + i y'$

S تحويل نقطي يرفق بـ كل نقطة M النقطة M' حيث $\begin{cases} x' = \sqrt{2}\,(x + y + 1) \\ y' = \sqrt{2}\,(-x + y + 1) - 1 \end{cases}$

3 – أكتب z' بدلالة z

4 – استنتج الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة للتحويل S

ليكن (Δ) مستقيم معادلته $x + y + 1 = 0$

5 – أكتب معادلة المستقيم (d) صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S

6 – أكتب العبارة المركبة للتحويل SoS

7 – برهن أن SoS هو تشابه مباشر

8 – قارن بين العناصر المميزة لـ S و SoS

الحل – 11

1 – $z_1 = \sqrt{2}\,(1 - i)$ إذن : $|z_1| = \sqrt{2}\,|1 - i| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

لتكن θ عمدة لـ z_1

إذن : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ منه : $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

نتيجة : $z_1 = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

2 –

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})\,i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})\,i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2 - 2i + (-1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})i + \sqrt{2}(-1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2 - 2i - i + i\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2i - \sqrt{2} + 2}{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2}$$

$$= \frac{(-5 + 2\sqrt{2})\,i}{5 - 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-(5-2\sqrt{2})}{5-2\sqrt{2}}\, i$$
$$= -i$$

3 ــ
$$x' + i y' = \sqrt{2}(x+y+1) + i[\sqrt{2}(-x+y+1) - 1]$$
$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} + i(-x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$$
$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + \sqrt{2} - x\sqrt{2}\,i + y\sqrt{2}\,i + i\sqrt{2} - i$$
$$= x\sqrt{2} + y\sqrt{2}\,i - x\sqrt{2}\,i + y\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$
$$= \sqrt{2}(x+iy) - i\sqrt{2}(x+iy) + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)\,i$$
$$= (x+iy)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)\,i$$

منه : $z' = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\,z + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)\,i$ و هو المطلوب

4 ــ طبيعة التحويل S :

النسبة : $|\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{2+2} = 2$ إذن : S تشابه نسبته 2

الزاوية : $Arg(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$

المركز : $\frac{\sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)\,i}{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = -i$ (حسب السؤال (1)) إذن : مركز التشابه S هو $w(0\,;\,-1)$

5 ــ نعلم أن صورة مستقيم بتشابه هو مستقيم

بما أن $x' = \sqrt{2}(x+y+1)$ ، $x+y+1=0$ (معادلة (Δ))

فإن : $x' = \sqrt{2}(0) = 0$

منه : معادلة المستقيم (d) هي $x' = 0$ أي (d) هو محور التراتيب

6 ــ
$$z \xrightarrow{S} (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\,z + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)\,i \xrightarrow{S} z' = (\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)[(\sqrt{2} - i\sqrt{2})\,z + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)\,i] + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)\,i$$
$$= -4iz + \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}-1)\,i + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)\,i$$
$$= -4iz + 2 - 2i + i(2 - \sqrt{2} - 2i + i\sqrt{2}) + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$
$$= -4iz + 2 - 2i + 2i - i\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$$
$$= -4iz + 4 - i$$

نتيجة : عبارة SoS هي : $z' = -4iz + 4 - i$

7 ــ $|-4i| = 4$ إذن : SoS هو تشابه مباشر نسبته 4

و زاويته $Arg(-4i) = -\frac{\pi}{2}$ و مركزه w ذات اللاحقة
$$\frac{4-i}{1+4i} = \frac{(4-i)(1-4i)}{17}$$
$$= \frac{4 - 16i - i - 4}{17}$$
$$= -i$$

إذن : المركز هو $w(0\,;\,-1)$

مقارنة :

	التشابه S	التشابه SoS
المركز	$w(0\,;\,-1)$	$w(0\,;\,-1)$
النسبة	$k = 2$	$k' = k \times k = 4$
الزاوية	$\theta = -\frac{\pi}{4}$	$\theta' = \theta + \theta = -\frac{\pi}{2}$

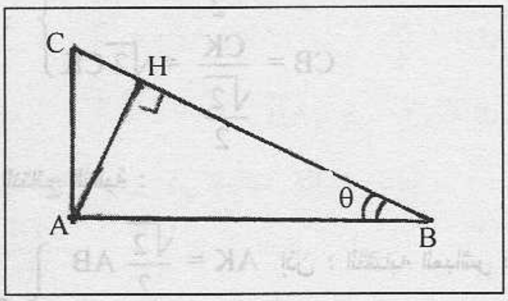
<u>التمرين ــ 12</u>

ABC مثلث قائم في A حيث $(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}) = \theta$

H هو المسقط العمودي للنقطة A على [BC]

ما هما نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه H و يحول A إلى B ؟

الحـل ـ 12



لدينا $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ إذن : $tg\theta > 0$

في المثلث القائم HAB لدينا : $tg\theta = \frac{HA}{HB}$

منه : $HB\, tg\theta = HA$

أي : $HB = \frac{1}{tg\theta} HA$ إذن : نسبة التشابه هي $\frac{1}{tg\theta}$

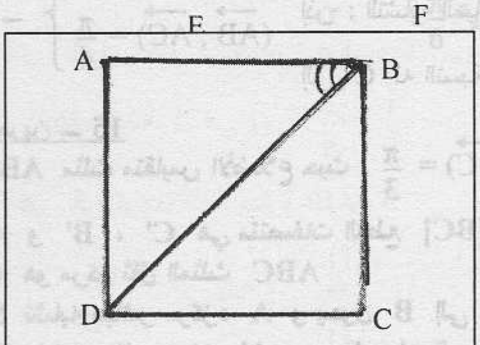
من جهة أخرى : $(\overrightarrow{HA} ; \overrightarrow{HB}) = \frac{\pi}{2}$ إذن : زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$

التمرين ـ 13

ABCD مربع حيث $(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

عين نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و B إلى D

الحـل ـ 13



ليكن S هذا التشابه حيث زاويته θ و نسبته k

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = D \end{cases}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} k = \frac{BD}{AB} \\ \theta = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BD}) \end{array}\right\}$

لدينا $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{4}$ منه $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AB}{BD}$

أي : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{BD}$

أي : $\frac{BD}{AB} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

منه : $k = \sqrt{2}$

حسب الشكل فإن : $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BD}) = -3\frac{\pi}{4}$

نتيجة : S له النسبة $\sqrt{2}$ و الزاوية $-\frac{3\pi}{4}$

التمرين ـ 14

ABC مثلث متساوي الساقين و قائم في B . K منتصف [AC] حيث $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$

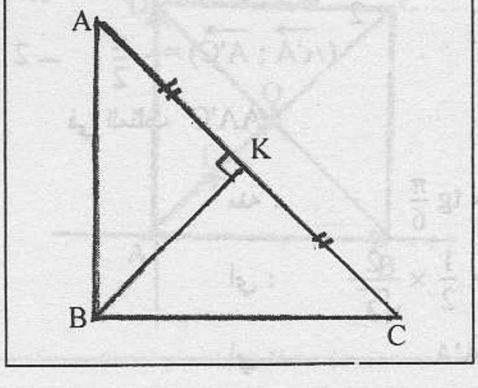
عين في كل ممايلي نسبة و زاوية التشابه المباشر S حيث :

1 ـ المركز A و يحول B إلى K

2 ـ المركز C و يحول K إلى B

3 ـ المركز A و يحول B إلى C

الحـل ـ 14



من خواص المثلث المتساوي الساقين و القائم ما يلي :

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ ؛ $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$ ؛ $AK = KC = BK$

إذن : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AK}{AB} = \frac{CK}{CB}$

أي : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AK}{AB} = \frac{CK}{CB}$

منه : $\left.\begin{array}{l} AK = \dfrac{\sqrt{2}}{2} AB \\ CB = \dfrac{CK}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\, CK \end{array}\right\}$

منه النتائج التالية :

1 ـ $\left\{\begin{array}{l} AK = \dfrac{\sqrt{2}}{2} AB \\ (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AK}) = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$ إذن : التشابه المباشر ذو المركز A و يحول B إلى K له النسبة $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و الزاوية $\dfrac{\pi}{4}$

2 ـ $\left\{\begin{array}{l} CB = \sqrt{2}\, CK \\ (\overrightarrow{CK} ; \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$ إذن : التشابه المباشر ذو المركز C و يحول K إلى B له النسبة $\sqrt{2}$ و الزاوية $\dfrac{\pi}{4}$

3 ـ $\left\{\begin{array}{l} AC = \sqrt{2}\, AB \\ (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$ (حسب فيثاغورث)
إذن : التشابه المباشر ذو المركز A و يحول B
إلى C له النسبة $\sqrt{2}$ و الزاوية $\dfrac{\pi}{4}$

التمرين ــ 15

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$

A' و B' ، C' هي منتصفات القطع $[BC]$ ؛ $[AC]$ ؛ $[AB]$ على الترتيب

G هو مركز ثقل المثلث ABC

S_1 تشابه مباشر مركزه A و يحول B إلى A'

S_2 تشابه مباشر مركزه A' و يحول A إلى C

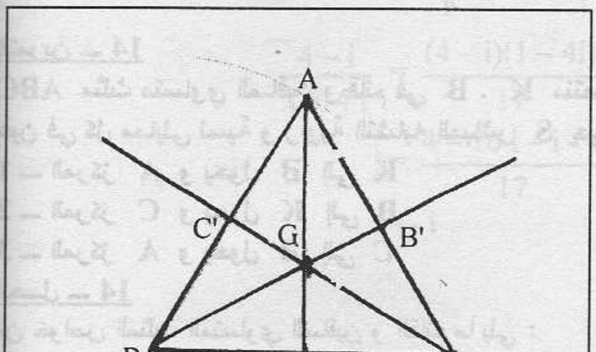
S_3 تشابه مباشر مركزه B و يحول C إلى G

S_4 تشابه مباشر مركزه G و يحول A إلى B'

عين نسب و زوايا كل من التشابهات S_1 ، S_2 ، S_3 ، S_4

الحـل ــ 15

من خواص المثلث المتقايس الأضلاع أن الأعمدة هي متوسطات و هي منصفات للزوايا و نقطة تقاطعها هي إذن مركز الثقل للمثلث و هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث منه النتائج التالية :



1 ـ $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AA'}) = \dfrac{\pi}{6}$

إذن : $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{AA'}{AB}$ منه : $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AA'}{AB}$

أي $AA' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} AB$

نتيجة : نسبة التشابه S_1 هي $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{6}$

2 ـ $(\overrightarrow{A'A} ; \overrightarrow{A'C}) = -\dfrac{\pi}{2}$

في المثلث $AA'C$: $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{A'C}{AA'}$

منه : $A'C = AA' \times \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{6}$

أي : $A'C = A'A \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

أي : $A'C = \dfrac{\sqrt{3}}{3} A'A$

نتيجة : نسبة التشابه S_2 هي، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

3 ـــ $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{6}$

في المثلث BGA' : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{BA'}{BG}$

أي : $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{BC}{2}}{BG}$

أي : $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{2\,BG}$

أي : $\sqrt{3} = \frac{BC}{BG}$

أي : $BG = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$

نتيجة : $\begin{cases} BG = \frac{\sqrt{3}}{3}BC \\ (\overrightarrow{EC} ; \overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ إذن : التشابه S_3 له النسبة $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{6}$

4 ـــ $(\overrightarrow{GA} ; \overrightarrow{GB'}) = -\frac{\pi}{3}$

في المثلث AGB' : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{GB'}{GA}$

أي : $\frac{1}{2} = \frac{GB'}{GA}$

منه : $GB' = \frac{1}{2}GA$

نتيجة : $\begin{cases} GB' = \frac{1}{2}GA \\ (\overrightarrow{GA} ; \overrightarrow{GB'}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$ إذن : نسبة التشابه S_4 هي $\frac{1}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

التمرين ــ 16

ABCD مربع ضلعه 1 و مركزه O حيث $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

I هو منتصف القطعة [AO]

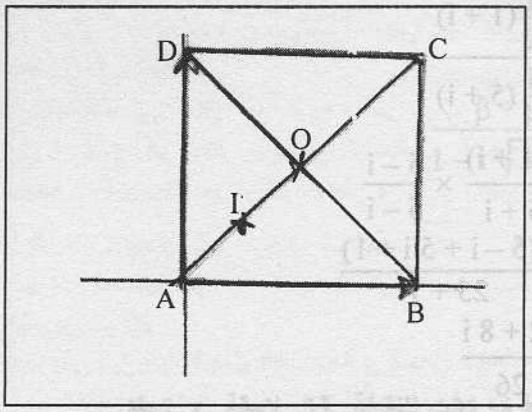
S تشابه مباشر يحول A إلى O و يحول B إلى I

1 ــ عين نسبة و زاوية التشابه S

2 ــ أعط كتابة مركبة للتشابه S باعتبار المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$

3 ــ نسمي w مركز التشابه S . برهن أن المستقيمان (wA) و (wD) متعامدان

الحــل ــ 16



1 ــ $\begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = I \end{cases}$

لتكن θ زاوية التشابه المباشر S و k نسبته

لدينا : $\begin{cases} k = \frac{OI}{AB} \\ (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{OI}) = \theta \end{cases}$

من خواص المربع أن قطراه متناصفان و متعامدان و منصفان للزوايا

إذن : $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ منه $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{4}$ و خاصة $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{4}$

منه : $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{OI}) = -\frac{3\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{3\pi}{4}$

من جهة أخرى : في المثلث AOB لدينا :

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{OA}{AB} = \frac{2\,OI}{AB}$ أي : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\,OI}{AB}$

منه : $\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{OI}{AB}$

إذن : $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$

نتيجة : نسبة التشابه s هي $\frac{\sqrt{2}}{4}$ و زاويته $-\frac{3\pi}{4}$

2 ــ باعتبار المعلم $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$ و طول ضلع المربع ABCD هو 1 فإن لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب 0 ، 1 ، $1+i$ ، i منه لاحقة المركز O هي : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

و لاحقة النقطة I هي : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

لتكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة التشابه S

$\begin{cases} S(A) = O \\ S(B) = I \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(0) + \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ .... } (1) \\ \alpha(1) + \beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \text{ ....}(2) \end{cases}$

من (1) : $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

بالتعويض في (2) : $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

نتيجة : عبارة التشابه S هي : $z' = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

تحقيق : $\left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right| = \frac{1}{4}\,|-1-i| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ إذن : نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right) = -\frac{3\pi}{4}$ إذن : زاوية التشابه S هي $-\frac{3\pi}{4}$

3 ــ لنبحث عن w مركز التشابه S :

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i} = \frac{\frac{1}{2}(1+i)}{\frac{1}{4}(5+i)}$$

$$= \frac{2(1+i)}{5+i} \times \frac{5-i}{5-i}$$

$$= \frac{2(5 - i + 5i + 1)}{25 + 1}$$

$$= \frac{12 + 8i}{26}$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{4}{13}\,i$$

منه : مركز التشابه S هو النقطة $w(\frac{6}{13} ; \frac{4}{13})$

3 – $\overrightarrow{Aw}\begin{pmatrix} \frac{6}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{wD}\begin{pmatrix} 0 - \frac{6}{13} \\ 1 - \frac{4}{13} \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{wD}\begin{pmatrix} \frac{-6}{13} \\ \frac{9}{13} \end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{Aw} . \overrightarrow{wD} = \frac{6}{13}\left(\frac{-6}{13}\right) + \frac{4}{13}\left(\frac{9}{13}\right)$

$$= \frac{-36}{169} + \frac{36}{169}$$

$= 0$ إذن : $\overrightarrow{Aw} \perp \overrightarrow{wD}$

منه : المستقيمان (wA) و (wD) متعامدان

التمرين – 17

أختر الجواب الصحيح في كل سؤال مما يلي :

1 – التحويل الذي عبارته المركبة $z' = 2\,i\,z - 3$ هو :

أ) تناظر مركزه $w(-3 ; 2)$

ب) تناظر محوري محوره المنصف الأول

جـ) تشابه مباشر مركزه $w(-\frac{3}{5} ; -\frac{6}{5})$

د) تشابه مباشر مركره $w(-3 ; 2)$

2 – التعريف المركب للتشابه ذو النسبة $\sqrt{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{2}$ و المركز $w(1 ; \sqrt{3})$ هو :

أ) $z' = \sqrt{3}\,z + 4$ جـ) $z' = i\sqrt{3}\,z + 1 + i\sqrt{3}$

ب) $z' = i\sqrt{3}\,z + 4$ د) $z' = i\sqrt{3\,z} + 4$

الحـل – 17

1 – $z' = 2\,i\,z - 3$ من الشكل $z' = \alpha\,z + \beta$

لدينا : $|2\,i| = 2$ إذن : التحويل تشابه مباشر نسبته 2

$Arg(2\,i) = \frac{\pi}{2}$ إذن : زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$

$\frac{-3}{1 - 2\,i} = \frac{-3(1 + 2\,i)}{(1 - 2\,i)(1 + 2\,i)} = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\,i$ إذن : مركز التشابه هو $w(-\frac{3}{5} ; -\frac{6}{5})$

نتيجة : الجواب الصحيح هو جـ) تشابه مباشر مركزه $w(-\frac{3}{5} ; -\frac{6}{5})$

2 – التشابه المباشر ذو المركز $w(1 ; \sqrt{3})$ و النسبة $\sqrt{3}$ و الزاوية $\frac{\pi}{2}$ له

التعريف المركب التالي : $z' = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)z + \beta$

أي : $z' = i\sqrt{3}\,z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1 - i\sqrt{3}} = 1 + i\sqrt{3}$

منه : $\beta = (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = 4$

أي : $z' = i\sqrt{3}\,z + 4$

نتيجة : الجواب الصحيح هو : ب) $z' = i\sqrt{3}\,z + 4$

التمرين – 18

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب a و b

يكون المثلث MAB قائم و متساوي الساقين و مباشر رأسه M إذا وفقط إذا كانت للنقطة M لاحقة z تحقق :

أ) $z = \dfrac{b - i\,a}{1 - i}$ ‏ ‏ ‏ ‏ جـ) $z - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - a)$

ب) $a - z = i(b - z)$ ‏ ‏ ‏ ‏ د) $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$

الحـل – 18

يكون المثلث MAB قائم و متساوي الساقين و مباشر رأسه M إذا و فقط إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2} \\ MB = MA \end{cases}$$

أي : $$\begin{cases} \text{Arg}(b - z) - \text{Arg}(a - z) = \dfrac{\pi}{2} \\ |b - z| = |a - z| \end{cases}$$

أي : $$\begin{cases} \text{Arg}\left(\dfrac{b - z}{a - z}\right) = \dfrac{\pi}{2} \\ \left|\dfrac{b - z}{a - z}\right| = 1 \end{cases}$$

منه : $\dfrac{b - z}{a - z} = 1\left[\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right]$

أي : $\dfrac{b - z}{a - z} = i$

أي : $b - z = i(a - z)$

منه : $b - z = i\,a - i\,z$

أي : $b - i\,a = z - i\,z$

أي : $b - i\,a = z(1 - i)$

أي : $z = \dfrac{b - i\,a}{1 - i}$

نتيجة : الجواب الصحيح هو : أ) $z = \dfrac{b - i\,a}{1 - i}$

التمرين – 19

A و B نقطتان متمايزتان . I منتصف $[AB]$

f تشابه مباشر مركزه A ، نسبته 2 و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$

g تشابه مباشر مركزه A و نسبته $\dfrac{1}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

ليكن h التناظر المركزي ذو المركز I

اختر الجواب الصحيح ممايلي :

أ) $hogof$ دوران يحول A إلى B

ب) $hogof$ تناظر بالنسبة إلى محور القطعة $[AB]$

جـ) $hogof$ ليس تشابها مباشرا

د) $hogof$ انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$

الحـل – 19

من خواص التشابهات أن مركب تشابهين ذات نفس المركز هو تشابه ذات المركز نفسه و النسبة جداء النسبتين و زاويته هو مجموع الزاويتين

و عليه التحويل gof هو تشابه مباشر مركزه A و نسبته $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ و زاويته $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \pi$

إذن : gof هو تناظر مركزي بالنسبة إلى النقطة A

نتيجة : $hogof$ هو مركب تناظر مركزي بالنسبة إلى A و تناظر مركزي بالنسبة إلى I

إذن : $hogof$ هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$

الجواب الصحيح هو د) $hogof$ هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$

التمرين – 20

فيما يلي ميز بين الجمل الصحيحة و الجمل الخاطئة

1 – الكتابة المركبة $z' = 2\,i\,z$ تعرف تشابه مباشر نسبته 4

2 ـ الكتابة المركبة $z' = 3z + 4$ تعرف تحاك نسبته 3

3 ـ الكتابة المركبة $z' = (1 + i)z$ تعرف تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{4}$

4 ـ الكتابة المركبة $z' = -3iz + 3i$ تعرف تشابه مباشر زاويته $3\frac{\pi}{2}$

الحــل ـ 20

1 ـ خاطئ نسبة التشابه هي 2

2 ـ صحيح .

3 ـ صحيح .

4 ـ صحيح .

التمرين ـ 21

ميز بين الجمل الصحيحة و الخاطئة في ما يلي :

1 ـ التناظر المحوري بالنسبة إلى مستقيم هو تشابه مباشر

2 ـ الدوران في المستوي هو تشابه مباشر نسبته 1

3 ـ التحاكي في المستوي هو تشابه مباشر له نفس المركز و نفس النسبة

4 ـ التناظر المركزي في المستوي هو تشابه مباشر زاويته π و له نفس المركز

5 ـ مبدأ المعلم هو مركز لكن تشابه مباشر معرف بـ $z' = (a + bi)z$ حيث a و b عددين مركبين

الحــل ـ 21

1 ـ خاطئ : التناظر المحوري بالنسبة إلى مستقيم هو مركب تشابه مباشر و تناظر محوري بالنسبة إلى محور الفواصل إذن فهو تشابه غير مباشر

2 ـ صحيح

3 ـ خاطئ لأن نسبة التحاكي قد تكون عدد حقيقي سالب .

4 ـ صحيح

5 ـ صحيح من أجل $a + bi \neq 1$ و $a + bi \neq 0$

التمرين ـ 22

w نقطة ذات اللاحقة 2 . S تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ما قولك عن العبارات التالية :

1 ـ التحويل S هو تشابه مباشر للمستوي

2 ـ التحويل S له نقطة صامدة وحيدة هي $w(2 ; 0)$

3 ـ المثلث wMM' قائم في M'

4 ـ $(\overrightarrow{wM'} ; \overrightarrow{wM}) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ حيث $k \in Z$

5 ـ R دوران ذات المركز O و الزاوية $-\frac{\pi}{6}$. التحويل SoR هو تحاكي .

الحــل ـ 22

العبارة المركبة للتحويل S من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ إذن : S هو تشابه مباشر للمستوي وعناصره كمايلي :

النسبة : $\left|\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}\,|\sqrt{3} + i| = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الزاوية : $\text{Arg}\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right) = \text{Arg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{6}$

المركز : $$\frac{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})}{\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})} = 2$$

نتائج :

أ) S تشابه مباشر للمستوي مركزه $w(2\,;\,0)$ و نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

ب) إذا كانت $M' = S(M)$ فإن : $\left\{\begin{array}{l}(\overrightarrow{wM}\,;\,\overrightarrow{wM'}) = \frac{\pi}{6}\\ wM' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,wM\end{array}\right.$ منه $(\overrightarrow{wM'}\,;\,\overrightarrow{wM}) = -\frac{\pi}{6}$

إذن : $\frac{wM'}{wM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

لكن $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : المثلث wMM' قائم الزاوية وتره $[wM]$ إذن : قائم في M'

جـ) إذا كان R دوران مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$ فإن شكله المركب :

$z' = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] z$ أي $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

إذن : $z \xrightarrow{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) z \xrightarrow{S} z' = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) z\right] + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\,(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)\,z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\,(3+1)\,z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

إذن : التحويل SoR له الشكل المركب $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

منه : SoR هو تحاكي للمستوي نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

و بناء على هذه النتائج فإن كل من العبارات المقترحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 صحيحة .