سلسلة هباج

BAC

مطابق للبرنامج الجديد

KIMOU.

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

الجزء 3

3e Année Secondaire : Mathématiques

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

سلسلة هبــاج

Kimou.

الرياضيـــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمــاذج للبكالوريا

الجزء الثالث

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي ـ رياضيات ـ علوم تجريبية

التزايد المقارن

Kimou.

قوى عدد حقيقي موجب تماما

من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ نضع : $a^b = e^{b\ln a}$

تعريف :

a عدد حقيقي موجب تماما .

نسمي الدالة f المعرفة على IR بـــ $f(x) = a^x$ الدالة الأسية ذات الأساس a

نتيجة : من أجل $a > 0$: $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$

خواص : من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b و من أجل كل عددين حقيقيين x و y لدينا الخواص التالية :

(1) $\ln(a^x) = x \ln a$ (5) $(a^x)^y = a^{xy}$

(2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (6) $(a\,b)^x = a^x b^x$

(3) $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$ (7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

(4) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

الدالة جذر النوني :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^n = a$ يسمى العدد b

الجذر النوني للعدد a و نرمز له بـــ $\sqrt[n]{a}$ أي : $(\sqrt[n]{a})^n = a$

تعريف :

نسمي الدالة المعرفة على $[0 ; +\infty[$ بـــ $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ بالدالة جذر النوني (حيث $n \in IN^*$ و $n > 1$)

أمثلة : $\sqrt[n]{0} = 0$ لأن : $(0)^n = 0$ إصطلاحا

$\sqrt[n]{1} = 1$ لأن $(1)^n = 1$

$\sqrt[3]{8} = 2$ لأن $(2)^3 = 8$

خاصية : من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

فإن : $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ (لأن $(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$)

<u>نشاط ـــ 1</u>

بسط الأعداد التالية :

(1) $256^{1/4}$ (2) $(0,25)^{1,5}$ (3) $3^{-1/3} \times 9^{2/3}$

<u>الحـل ـــ 1</u>

(1) $256^{1/4} = (16 \times 16)^{1/4} = (4^4)^{1/4} = 4^{4/4} = 4^1 = 4$

(2) $(0,25)^{1,5} = [(0,5)^2]^{3/2} = (0,5)^{\frac{3}{2}\times 2} = (0,5)^3 = 0,125$

(3) $3^{-1/3} \times 9^{2/3} = 3^{-1/3} \times (3^2)^{2/3} = 3^{-1/3} \times 3^{4/3} = 3^{\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}} = 3^{3/3} = 3$

<u>نشاط ـــ 2</u>

عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

<u>الحـل ـــ 2</u>

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$$

منه : $f'(x) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{n}\ln x} = \dfrac{1}{n\,x}\sqrt[n]{x}$

<u>نشاط ـــ 3</u>

أدرس إتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty ; -1[$ بـــ $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

الحـل ـ 3

لدينا : $f(x) = (x^2 - 1)^{1/3}$ منه $f'(x) = \frac{1}{3}(2x)(x^2-1)^{\frac{1}{3}-1}$

أي : $f'(x) = \frac{2x}{3}(x^2-1)^{-2/3}$

منه : إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty ; -1[$ هي إشارة $\frac{2x}{3}$ فقط لأن $(x^2-1)^{-2/3} > 0$

منه : $f'(x) < 0$ لأن $x \in]-\infty ; -1[$

أي : f متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; -1[$

نشاط ـ 4

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

(1) $3^x + 2 \times 3^{-x} = 3$ **(2)** $(0,31)^{2x} < 3$

الحـل ـ 4

(1)
$$3^x + 2\times 3^{-x} = 3 \Leftrightarrow 3^x + \frac{2}{3^x} = 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{3^{2x}+2}{3^x} = 3$$
$$\Leftrightarrow 3^{2x} + 2 = 3 \times 3^x$$
$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 3\times 3^x + 2 = 0$$

نضع $y = 3^x$ حيث $y > 0$

إذن : المعادلة تصبح :
$$\begin{cases} y = 3^x \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \ ....(\alpha) \end{cases}$$

حل المعادلة (α) :
$$(\alpha) \Leftrightarrow (y-1)(y-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ أو } y = 2$$

نتيجة : $3^x = 1$ أو $3^x = 2$

أي : $e^{x\ln 3} = 1$ أو $e^{x\ln 3} = 2$

أي : $x \ln 3 = \ln 1$ أو $x\ln 3 = \ln 2$

أي : $x = 0$ أو $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

خلاصة : المعادلة تقبل حلان : $\left\{0 ; \frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$

(2)
$$(0,31)^{2x} < 3 \Leftrightarrow e^{2x\ln 0,31} < e^{\ln 3}$$
$$\Leftrightarrow 2x\ln 0,31 < \ln 3$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{\ln 3}{2\ln 0,31}$$ لأن $\ln 0,31 < 0$

منه : حلول المتراجحة هي المجال $\left]\frac{\ln 3}{2\ln 0,31} ; +\infty\right[$

نشاط ـ 5

أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x) = a^x$ $(a > 0$ و $a \neq 1)$

الحـل ـ 5

f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$ و $f(x) = e^{x\ln a}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = \begin{cases} +\infty : \ln a < 0 \\ 0 : \ln a > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} +\infty : 0 < a < 1 \\ 0 : a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = \begin{cases} 0 : \ln a < 0 \\ +\infty : \ln a > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 : 0 < a < 1 \\ +\infty : a > 1 \end{cases}$$

f قابلة للاشتقاق على **IR** و دالتها المشتقة : $f'(x) = (\ln a)\, e^{x\ln a}$

منه : $f'(x)$ من نفس إشارة $\ln a$ كمايلي :

إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ إذن : $f'(x) < 0$

إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ إذن : $f'(x) > 0$

جدول التغيرات : نميز الحالتين التاليتين :

$0 < a < 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

$a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

الدالة : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و من أجل $x \in [0\,;+\infty[$ نضع $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ $(n > 1)$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/n} = +\infty$

$$g(0) = (0)^{1/n} = 0$$

g قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة : $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

إذن : $g'(x) > 0$ من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$

منه : **جدول تغيرات الدالة** : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نشاط ـ 5

حول العبارة $(x-1)\sqrt{x-1}$ إلى عبارة بأس ناطق من أجل $x > 1$

الحـل ـ 5

$$(x-1)\sqrt{x-1} = (x-1)(x-1)^{1/2} = (x-1)^{\frac{1}{2}+1} = (x-1)^{3/2}$$

التزايد المقارن للدالتين $x \longmapsto e^x$ و $x \longmapsto x$

خواص أساسية : (1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

التزايد المقارن للدالتين $x \longmapsto \ln x$ و $x \longmapsto x$

خواص أساسية : (1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (2) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$

التزايد المقارن لكل من الدوال $x \longmapsto e^x$ و $x \longmapsto \ln x$ و $x \longmapsto x^n$ حيث $n \in IN^*$

خواص أساسية : (1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ (4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0$

نشاط ـ 6

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$ (4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x+2)\ln x$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^x$ (5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{x^2+x+1}$

(3) $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ (6) $\lim_{x \to +\infty} [(2x-1)e^x - 3e^{2x}]$

الحل ـ 6

(1) $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = \lim_{x \to +\infty} e^x(1-0) = +\infty$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ حسب الخاصية $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ أي $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

(2) $\lim_{x \to -\infty} (2x-1)e^x = \lim_{x \to -\infty} 2(xe^x) - e^x = \lim_{x \to -\infty} -e^x = 0$

لأن $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

(3) $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x(1-0) = +\infty$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(4) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} (x+2)\ln x = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (0+2)\ln x = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 2\ln x = -\infty$

(5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} 2\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

(6) $\lim_{x \to +\infty} [(2x-1)e^x - 3e^{2x}] = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}[(2x-1)e^{-x} - 3]$

$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}(0-0-3)$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$= -\infty$

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـ 1

أكتب على أبسط شكل الأعداد التالية :

$a = 5^{\frac{1}{\ln 5}}$ ؛ $b = 2^{\frac{1}{\ln 8}}$ ؛ $c = 5^{\frac{1}{\ln 25}}$

الحل ـ 1

$a = 5^{\frac{1}{\ln 5}} = e^{\frac{1}{\ln 5} \times \ln 5} = e^1 = e$

$b = 2^{\frac{1}{\ln 8}} = e^{\frac{1}{\ln 8} \times \ln 2} = e^{\frac{1}{3\ln 2} \times \ln 2} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$

$c = 5^{\frac{1}{\ln 25}} = e^{\frac{1}{\ln 25} \times \ln 5} = e^{\frac{1}{2\ln 5} \times \ln 5} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

التمرين ـ 2

أكتب الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 3 :

$a = 3^{-5/4} \times 81^{5/3}$ ؛ $b = (3^{-4})^{1/3} \times 27^{-1/3}$

<u>الحـل ـ 2</u>

$$a = 3^{\frac{-5}{4}} \times 81^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{-5}{4}} \times (3^4)^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{-5}{4}} \times 3^{\frac{20}{3}} = 3^{\frac{-5}{4}+\frac{20}{3}} = 3^{\frac{65}{12}}$$

$$b = (3^{-4})^{\frac{1}{3}} \times (27)^{\frac{-1}{3}} = 3^{\frac{-4}{3}} \times (3^3)^{\frac{-1}{3}} = (3)^{-\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} = 3^{\frac{-7}{3}}$$

<u>التمرين ـ 3</u>

x عدد حقيقي . بسط العبارات التالية :

$$a = 9^x + 2 \times 3^{2x+1} \qquad b = \frac{125^x + 5^{3x+1}}{25^x}$$

<u>الحـل ـ 3</u>

$$a = 9^x + 2 \times 3^{2x+1} = 9^x + 2 \times 3 \times 3^{2x} = 9^x + 6 \times (3^2)^x = 9^x + 6 \times 9^x = 7 \times 9^x$$

$$b = \frac{125^x + 5^{3x+1}}{25^x} = \frac{125^x + 5 \times 5^{3x}}{25^x} = \frac{125^x + 5 \times (125)^x}{25^x} = \frac{6 \times 125^x}{25^x} = \frac{6 \times 5^x \times 25^x}{25^x} = 6 \times 5^x$$

<u>التمرين ـ 4</u>

حل المعادلات التالية :

(1) $12^x = 3$ (4) $5^{x-1} = 2^x$

(2) $(1/4)^x = 1/8$ (5) $3^x = 4^{3x+1}$

(3) $(1/2)^x = 3$ (6) $5^{1-3x} = 1/125$

<u>الحـل ـ 4</u>

(1)
$$12^x = 3 \Leftrightarrow e^{x \ln 12} = e^{\ln 3}$$
$$\Leftrightarrow x \ln 12 = \ln 3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 12}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(2)
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow e^{x\ln\frac{1}{4}} = e^{\ln\frac{1}{8}}$$
$$\Leftrightarrow x \ln \frac{1}{4} = \ln \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow -x \ln 4 = -\ln 8$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 8}{\ln 4}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \ln 2}{2 \ln 2} = \frac{3}{2}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(3)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow e^{x\ln\frac{1}{2}} = e^{\ln 3}$$
$$\Leftrightarrow x \ln \frac{1}{2} = \ln 3$$
$$\Leftrightarrow -x \ln 2 = \ln 3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-\ln 3}{\ln 2}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(4)
$$5^{x-1} = 2^x \Leftrightarrow e^{(x-1)\ln 5} = e^{x\ln 2}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\ln 5 = x \ln 2$$
$$\Leftrightarrow x \ln 5 - x \ln 2 = \ln 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(5)
$$3^x = 4^{3x+1} \Leftrightarrow e^{x\ln 3} = e^{(3x+1)\ln 4}$$
$$\Leftrightarrow x \ln 3 = (3x+1)\ln 4$$
$$\Leftrightarrow x \ln 3 - 3x \ln 4 = \ln 4$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 4}{\ln 3 - 3 \ln 4}$$
و هو الحل الوحيد للمعادلة .

(6) $5^{1-3x} = 1/125 \Leftrightarrow 5^{1-3x} = 5^{-3}$

$\Leftrightarrow 1 - 3x = -3$

$\Leftrightarrow x = 4/3$ و هو الحل الوحيد للمعادلة .

ملاحظة : يمكن حل هذه المعادلة كما يلي :

$5^{1-3x} = 1/125 \Leftrightarrow e^{(1-3x)\ln 5} = e^{\ln(1/125)}$

$\Leftrightarrow (1-3x)\ln 5 = \ln(1/125)$

$\Leftrightarrow \ln 5 - 3x\ln 5 = -\ln 125$

$\Leftrightarrow \ln 5 - 3x\ln 5 = -\ln(5)^3$

$\Leftrightarrow \ln 5 - 3x\ln 5 = -3\ln 5$

$\Leftrightarrow 1 - 3x = -3$

$\Leftrightarrow x = 4/3$ و هو الحل الوحيد للمعادلة .

التمرين — 5

حل المعادلة $2^{x^2-6x} = 128$ لاحظ أن $128 = 2^7$

الحـل — 5

$2^{x^2-6x} = 128 \Leftrightarrow 2^{x^2-6x} = 2^7$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x = 7$

$\Leftrightarrow (x-7)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{7 ; -1\}$ و هي حلول المعادلة المطلوبة .

التمرين — 6

حل المعادلات التالية :

(1) $(1/7)^{x^2-3x} = 49$ (3) $4^x + 3 \times 2^x - 4 = 0$

(2) $(\sqrt{5})^{3-x^2} = 5^x$ (4) $-2 \times 9^x + 5 \times 3^x = 2$

الحـل — 6

(1) $(1/7)^{x^2-3x} = 49 \Leftrightarrow 7^{-(x^2-3x)} = 7^2$

$\Leftrightarrow -(x^2 - 3x) = 2$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -(x-1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{1 ; 2\}$ و هي حلول المعادلة

(2) $(\sqrt{5})^{3-x^2} = 5^x \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}(3-x^2)} = 5^x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(3 - x^2) = x$

$\Leftrightarrow 3 - x^2 = 2x$

$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow -(x+3)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{-3 ; 1\}$ و هي حلول المعادلة

(3) $4^x + 3 \times 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 3(2^x) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x \ : \ y > 0 \\ y^2 + 3y - 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln y} = e^{x\ln 2} \ : \ y > 0 \\ (y+4)(y-1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = x\ln 2 : \ y > 0 \\ y = -4 \text{ أو } y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = x\ln 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \ln 1 = x\ln 2$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ و هو الحل الوحيد للمعادلة

(4) $-2 \times 9^x + 5 \times 3^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2(3^x)^2 + 5 \times (3^x) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^x \ : y > 0 \\ -2y^2 + 5y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln y} = e^{x\ln 3} \ : \ y > 0 \\ -2(y - \frac{1}{2})(y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = x \ln 3 \ : \ y > 0 \\ y = 1/2 \text{ أو } y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln 1/2 = x \ln 3 \\ \text{أو} \\ \ln 2 = x \ln 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\ln 1/2}{\ln 3} \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases}$$ و هي حلول المعادلة

التمرين – 7

حل المتراجحات التالية :

(1) $3^x > 5$ (5) $\dfrac{2^x}{2^x + 1} < \dfrac{1}{3}$

(2) $(\sqrt{3})^x < e$ (6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \leq 2$

(3) $\pi^x > 2$ (7) $2^{2x^2+2} \geq 2^{5x}$

(4) $5^{-x} < 5^{2x}$ (8) $3^{2x} - 7(3)^x + 6 \leq 0$

الحل – 7

(1) $3^x > 5 \Leftrightarrow e^{x\ln 3} > e^{\ln 5}$

$\Leftrightarrow x \ln 3 > \ln 5$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$ إذن : مجموعة الحلول هي $\left]\dfrac{\ln 5}{\ln 3} \ ; \ +\infty\right[$

(2) $(\sqrt{3})^x < e \Leftrightarrow e^{x\ln\sqrt{3}} < e^1$

$\Leftrightarrow x \ln\sqrt{3} < 1$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{1}{\ln\sqrt{3}}$ منه : مجموعة الحلول هي $\left]-\infty \ ; \ \dfrac{1}{\ln\sqrt{3}}\right[$

(3) $\pi^x > 2 \Leftrightarrow e^{x\ln\pi} > e^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow x \ln \pi > \ln 2$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 2}{\ln \pi}$ منه : مجموعة الحلول هي $\left]\dfrac{\ln 2}{\ln \pi} \ ; \ +\infty\right[$

(4) $5^{-x} < 5^{2x} \Leftrightarrow -x < 2x$

$\Leftrightarrow 3x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ منه : مجموعة الحلول هي $]0 \ ; \ +\infty[$

(5) $\dfrac{2^x}{2^x+1} < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{2^x+1} - \dfrac{1}{3} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(2)^x - 2^x - 1}{3(2^x+1)} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(2)^x - 1}{3(2^x+1)} < 0$

$\Leftrightarrow 2(2)^x - 1 < 0$ لأن $3(2^x+1) > 0$

$\Leftrightarrow 2^{x+1} < 1$

$\Leftrightarrow e^{(x+1)\ln 2} < e^0$

$\Leftrightarrow (x+1)\ln 2 < 0$

$\Leftrightarrow x + 1 < 0$ لأن $\ln 2 > 0$

$\Leftrightarrow x < -1$ منه : مجموعة الحلول هي $]-\infty ; -1[$.

(6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \leq 2 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{-x} \leq (\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow -x \leq 2$

$\Leftrightarrow x \geq -2$ منه : مجموعة الحلول هي $[-2 ; +\infty[$

(7) $2^{2x^2+2} \geq 2^{5x} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 \geq 5x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2(x-2)(x - \frac{1}{2}) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; 1/2]U[2 ; +\infty[$ و هي مجموعة حلول المتراجحة .

(8) $3^{2x} - 7(3)^x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 7(3^x) + 6 \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^x \; : \; y > 0 \\ y^2 - 7y + 6 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\ln y} = e^{x\ln 3} \; : \; y > 0 \\ (y-6)(y-1) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (3^x - 6)(3^x - 1) \leq 0$

لندرس إشارة كل من $3^x - 1$ و $3^x - 6$ كما يلي :

$3^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3^x \geq 1$

$\Leftrightarrow 3^x \geq 3^0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

$3^x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3^x \geq 6$

$\Leftrightarrow e^{x\ln 3} \geq e^{\ln 6}$

$\Leftrightarrow x \ln 3 \geq \ln 6$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 6}{\ln 3}$

منه :

x		0		$\frac{\ln 6}{\ln 3}$	$+\infty$
$3^x - 1$	-	0	+		
$3^x - 6$			-	0	+
الجداء	+	0	-	0	+

نتيجة : حلول المتراجحة $(3^x - 6)(3^x - 1) \leq 0$ هي المجال $\left[0 ; \frac{\ln 6}{\ln 3}\right]$ (هي حلول المتراجحة $3^{2x} - 7(3)^x + 6 \leq 0$)

التمرين – 8

1 – أحسب المجموع : $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^n$ بدلالة n

2 – من أجل أي قيم للعدد الطبيعي n يكون $S_n \geq 10^{10}$

الحـل – 8

1 – مجموع $(n+1)$ حد من حدود متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول 1

$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots 2^n$

$= 1 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$

إذن : $S_n = 2^{n+1} - 1$

2 –

$S_n \geq 10^{10} \Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 \geq 10^{10}$

$\Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 10^{10} + 1$

$\Leftrightarrow e^{(n+1)\ln 2} \geq e^{\ln(10^{10}+1)}$

$\Leftrightarrow (n+1)\ln 2 \geq \ln(10^{10} + 1)$

$\Leftrightarrow n + 1 \geq \frac{\ln(10^{10}+1)}{\ln 2}$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^{10}+1)}{\ln 2} - 1$$

إذن : قيم الأعداد الطبيعية المطلوبة هي كل الأعداد الطبيعية الأكبر من العدد $\frac{\ln(10^{10}+1)}{\ln 2} - 1$

التمرين ـــ 9

عند رمي قطعتي نقد متزنتين n مرة $(n \in IN^*)$

فإن إحتمال الحادثة : عدم الحصول على الثنائية $(6\ ;\ 6)$ هو $p_n = (35/36)^n$

من أجل أي قيم للعدد n يكون $p_n \leq 0{,}01$ ؟

الحـــل ـــ 9

$$P_n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow (35/36)^n \leq 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow e^{n\ln(35/36)} \leq e^{\ln(0{,}01)}$$
$$\Leftrightarrow n\ln(35/36) \leq \ln(0{,}01)$$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(35/36)}$ لأن $0 < 35/36 < 1$ إذن $\ln(35/36) < 0$

$$\Leftrightarrow n \geq 163{,}47$$

إذن : قيم n المطلوبة هي $n \geq 164$ لأن n طبيعي .

التمرين ـــ 10

بسط الأعداد التالية :

$a = \sqrt{\sqrt[3]{4096}}$ $\qquad$ $b = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[15]{3^{12}}$

الحـــل ـــ 10

(1) $a = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} = [(4096)^{1/3}]^{1/2} = (4096)^{1/6}$

لكن : $4096 = 2^{12} = 4^6$

منه : $a = (4^6)^{1/6} = 4$

خلاصة : $a = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} = 4$

(2) $b = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[15]{3^{12}} = (3)^{1/5} \times [(3)^2]^{1/3} \times [(3)^{12}]^{1/15}$

$$= (3)^{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{12}{15}}$$

أي : $b = 3^{25/15} = 3^{5/3} = \sqrt[3]{3^5}$

ملاحظة : $3^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} = 3 \times 3^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{9}$

التمرين ـــ 11

أكتب مايلي على شكل أس ناطق .

(1) $x \geq 3$: $(x-3)^2\sqrt{x-3}$

(2) $x \geq -2$: $\sqrt[8]{(x+2)^3}$

(3) $x > -1$: $\frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$

(4) $x > 2$: $\frac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[7]{2x-4}}$

الحـــل ـــ 11

$$(x-3)^2\sqrt{x-3} = (x-3)^2 \times (x-3)^{1/2} = (x-3)^{5/2}$$

$$\sqrt[8]{(x+2)^3} = [(x+2)^3]^{1/8} = (x+2)^{3/8}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^{1/5}} = (x+1)^{-1/5}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[7]{2x-4}} = (2x-4)^{1/3} \times (2x-4)^{-1/7} = (2x-4)^{4/21}$$

التمرين ــ 12

1 ــ أنشر العبارتين : $(2+\sqrt{2})^3$ و $(2-\sqrt{2})^3$

2 ــ إستنتج تبسيط العبارة $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

الحـل ــ 12

ــ 1

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{2})^3 &= (2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2\\ &= (2+\sqrt{2})(4+4\sqrt{2}+2)\\ &= (2+\sqrt{2})(6+4\sqrt{2})\\ &= 12+8\sqrt{2}+6\sqrt{2}+8\\ &= 20+14\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{2})^3 &= (2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^2\\ &= (2-\sqrt{2})(4-4\sqrt{2}+2)\\ &= (2-\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})\\ &= 12-8\sqrt{2}-6\sqrt{2}+8\\ &= 20-14\sqrt{2}\end{aligned}$$

ــ 2

$$\begin{aligned}a &= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} - \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}\\ &= (2+\sqrt{2})^{3/3} - (2-\sqrt{2})^{3/3}\\ &= 2+\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

و هو المطلوب .

التمرين ــ 13

حل في IR المعادلات التالية ثم إستنتج حلول المتراجحات المقترحة :

(1) $\sqrt[3]{5-3x} = 2$ ثم $\sqrt[3]{5-3x} > 2$

(2) $\sqrt[5]{x+1} = 1/2$ ثم $\sqrt[5]{x+1} \geq 1/2$

(3) $x^{2/3} = x$ ثم $x^{2/3} < x$

الحـل ــ 13

(1) $\sqrt[3]{5-3x} = 2 \Rightarrow (\sqrt[3]{5-3x})^3 = (2)^3$

$\Rightarrow 5-3x = 8$

$\Rightarrow x = -1$ و هو حل المعادلة .

نتيجة : حل المتراجحة $\sqrt[3]{5-3x} > 2$

إذا كان $5-3x \leq 0$ فإن $\sqrt[3]{5-3x} \leq 0$ إذن : المتراجحة لا تقبل حلول

إذا كان $5-3x > 0$ فإن $\sqrt[3]{5-3x} > 2$ تكافئ $(\sqrt[3]{5-3x})^3 > (2)^3$

تكافئ $5-3x > 8$

تكافئ $-3x > 3$

تكافئ $x < -1$

خلاصة :

x	$-\infty$	-1	5/3	$+\infty$
$5-3x$		+	0	-

لما $x \in [5/3 ; +\infty[$ المتراجحة لا تقبل حلولا

لما $x \in]-\infty ; 5/3]$ المتراجحة تقبل حلول من أجل $x \in]-\infty ; -1[$

إذن : مجموعة الحلول هي $]-\infty ; -1[$

(2) $$\sqrt[5]{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sqrt[5]{(x+1)})^5 = (1/2)^5$$
$$\Rightarrow x+1 = 1/32$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{32} - 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{-31}{32}$$ و هو حل المعادلة .

نتيجة : حل المتراجحة $\sqrt[5]{x+1} \geq 1/2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

لما $x \in]-\infty ; -1[$: $x+1 < 0$ منه $\sqrt[5]{x+1} < 0$ إذن المتراجحة لا تقبل حلول

لما $x = -1$: $x+1 = 0$ منه $\sqrt[5]{x+1} = 0$ إذن المتراجحة لا تقبل حلول

لما $x > -1$: $(x+1) > 0$ منه $\sqrt[5]{x+1} > 0$ إذن

المتراجحة تكافئ $(\sqrt[5]{x+1})^5 \geq (1/2)^5$

تكافئ $x+1 \geq 1/32$

تكافئ $x \geq -31/32$

منه : حلول المتراجحة هي المجال $[-31/32 ; +\infty[$

(3) $$x^{2/3} = x \Leftrightarrow (x^2)^{1/3} = x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x^2)^{3/3} = x^3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-x) = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in \{0 ; 1\}$$ و هي حلول المعادلة .

نتيجة : حل المتراجحة $x^{2/3} < x$

لما $x \leq 0$ المتراجحة لا تقبل حلولا لأن $x^{2/3} \geq 0$ و $x \leq 0$

لما $x > 0$ المتراجحة تكافئ $x^2 < x^3$

تكافئ $x^2(1-x) < 0$

تكافئ $x \in]1 ; +\infty[$

منه : حلول المتراجحة هي $]1 ; +\infty[$

التمرين ـــ 14

حل في IR^2 الجمل التالية :

(1) $$\begin{cases} x^{1/3} + y^{3/4} = 8 \\ x^{2/3} + y^{3/2} = 40 \end{cases}$$ **(2)** $$\begin{cases} 2^x - 3^y = 4 \\ 3(2^x) + 3^y = 24 \end{cases}$$

الحـل ـــ 14

(1) $$\begin{cases} x^{1/3} + y^{3/4} = 8 \\ x^{2/3} + y^{3/2} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{1/3} + (y^{3/2})^{1/2} = 8 \\ (x^{1/3})^2 + y^{3/2} = 40 \end{cases}$$

نضع : $x^{1/3} = X$ و $y^{3/2} = Y$ حيث $Y \geq 0$ لأن $y^{3/2} = \sqrt{y^3}$

إذن : نحل الجملة $$\begin{cases} X + \sqrt{Y} = 8 \; \ldots\ldots (1) \\ X^2 + Y = 40 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$ (I) حيث $X \in R$ و $Y \in [0 . +\infty[$

من المعادلة (1) : $\sqrt{Y} = 8 - X$ منه : $Y = (8-X)^2$ أي $Y = 64 - 16X + X^2$

نعوض Y في المعادلة (2) : $X^2 + (64 - 16X + X^2) = 40$

أي : $2X^2 - 16X + 24 = 0$

أي : $X^2 - 8X + 12 = 0$ و هي معادلة من الدرجة 2 ذات المجهول X

$\Delta = 64 - 48 = 16$

$\begin{cases} X_1 = \dfrac{8-4}{2} = 2 \\ X_2 = \dfrac{8+4}{2} = 6 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \sqrt{Y_1} = 8 - 2 = 6 \\ \sqrt{Y_2} = 8 - 6 = 2 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} Y_1 = 36 \\ Y_2 = 4 \end{cases}$

نتيجة (1) : الجملة (I) تقبل حلين هما $(X ; Y) \in \{(2 ; 36) ; (6 ; 4)\}$

لكن : $X = x^{1/3}$ و $Y = y^{3/2}$

أي : $X^3 = x$ و $Y^{2/3} = y$

منه : $(x ; y) \in \{(2^3 ; 36^{2/3}) ; (6^3 ; 4^{2/3})\}$ أي : $(x ; y) \in \{(8 ; 36^{2/3}) ; (6^3 ; 4^{2/3})\}$

خلاصة : الجملة $\begin{cases} x^{1/3} + y^{3/4} = 8 \\ x^{2/3} + y^{3/2} = 40 \end{cases}$ تقبل حلين هما $(8 ; 36^{2/3})$ و $(6^3 ; 4^{2/3})$

(2) $\begin{cases} 2^x - 3^y = 4 \\ 3(2^x) + 3^y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 3^y = 4 \\ 3(2^x) + 3^y + 2^x - 3^y = 24 + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x - 4 \\ 4 \times 2^x = 28 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x - 4 \\ 2^x = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3^y = 7 - 4 = 3^1 \\ e^{x\ln 2} = e^{\ln 7} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x \ln 2 = \ln 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2} \\ y = 1 \end{cases}$

نتيجة : الجملة تقبل حلا وحيدا هو : $\left\{\left(\dfrac{\ln 7}{\ln 2} ; 1\right)\right\}$

<u>التمرين – 15</u>

حل في IR المعادلة $x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0$

<u>الحـل – 15</u>

$x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^{1/5})^2 + x^{1/5} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^{1/5} \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^5 = x \\ (y-2)(y+3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^5 \\ y = 2 \text{ أو } y = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x = 2^5)$ أو $(x = (-3)^5)$

$\Leftrightarrow x = 32$ أو $x = -(3)^5$ و هي حلول المعادلة .

التمرين ـ 16

عين مشتقات الدوال التالية على IR

(1) $f(x) = 3^x$ ، (2) $g(x) = (1/2)^x$ ، (3) $h(x) = (4/5)^x$

الحـل ـ 16

(1) $f(x) = 3^x = e^{x\ln 3} \Rightarrow f'(x) = e^{x\ln 3}(\ln 3)$ أي $f'(x) = 3^x \times \ln 3$

(2) $g(x) = (1/2)^x = e^{x\ln(1/2)} \Rightarrow g'(x) = \ln(1/2) \times e^{x\ln(1/2)}$ أي $g'(x) = (1/2)^x \ln(1/2)$

(3) $h(x) = (4/5)^x = e^{x\ln(4/5)} \Rightarrow h'(x) = \ln(4/5) \times e^{x\ln(4/5)}$ أي $h'(x) = (4/5)^x \ln(4/5)$

التمرين ـ 17

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0,25)^x$ (3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2\pi/3)^x$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (0,25)^x$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2\pi/3)^x$

الحـل ـ 17

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0,25)^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln(0,25)} = \lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

لأن $\ln(0,25) < 0$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (0,25)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(0,25)} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$

لأن $\ln(0,25) < 0$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2\pi/3)^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln(2\pi/3)} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$

لأن $\ln(2\pi/3) > 0$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2\pi/3)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(2\pi/3)} = \lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

التمرين ـ 18

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على *IR بـ $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

الحـل ـ 18

من أجل كل x من *IR لدينا : $f(x) = 3^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln 3}$

منه : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}\ln 3} = \lim\limits_{y \to 0} e^y = 1$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} 1/x = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}\ln 3} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x}\ln 3 = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{1}{x}\ln 3} = \lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}\ln 3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln 3} = \lim\limits_{y \to 0} e^y = 1$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x = 0$

f قابلة للاشتقاق على *IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-\ln 3}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}\ln 3}$$

إذن : $f'(x) < 0$ من أجل كل x من IR^* لأن : $\frac{\ln 3}{x^2} e^{\frac{1}{x}\ln 3} > 0$

منه : f متناقصة تماما على المجموعة IR^*

إذن : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

<u>التمرين ـ 19</u>

أدرس تغيرات الدالتين f و g المعرفتين على IR كمايلي :

$$g(x) = (1,2)^x \quad ; \quad f(x) = (0,7)^x$$

<u>الحـل ـ 19</u>

1 ـ تغيرات الدالة f : $f(x) = (0,7)^x = e^{x\ln 0,7}$ إذن : معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln 0,7} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

لأن $\ln 0,7 < 0$ إذن : $\lim_{x \to -\infty} x \ln 0,7 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln 0,7} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

f قابلة للاشتقاق على R و دالتها المشتقة : $f'(x) = (\ln 0,7) \times e^{x\ln 0,7}$

إذن : $f'(x) < 0$ من أجل كل x من R لأن $\ln 0,7 < 0$ و $e^{x\ln 0,7} > 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

2 ـ تغيرات الدالة g : $g(x) = (1,2)^x = e^{x\ln 1,2}$ إذن : معرفة على R

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln 1,2} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

لأن $\ln 1,2 > 0$ إذن : $\lim_{x \to -\infty} x \ln 1,2 = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln 1,2} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $g'(x) = (\ln 1,2) \times e^{x\ln 1,2}$

إذن : $g'(x) > 0$ من أجل كل x من IR لأن $\ln(1,2) > 0$ و $e^{x\ln 1,2} > 0$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

<u>التمرين ـ 20</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 + x}$

1 ـ بين أن f هي مركب دالتين : كثير حدود و دالة أسية ذات الأساس α

2 ـ أدرس تغيرات الدالة f

الحـل ــ 20

1 ــ لتكن $u : x \longmapsto x^2 + x$ و $v : x \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

إذن : $vou(x) = v(u(x)) = v(x^2 + x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 + x} = f(x)$

منه : f هي مركب الدالتين u و v أي $f = vou$ حيث u هي كثير حدود من الدرجة الثانية و v هي دالة أسية ذات الأساس $\alpha = 1/2$

2 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR و من أجل كل x من IR فإن :

$$f(x) = e^{(x^2+x)\ln\frac{1}{2}} = e^{(-x^2-x)\ln 2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{(-x^2-x)\ln 2} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

لأن $\ln 2 > 0$ و $\lim_{x \to -\infty} (-x^2 - x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{(-x^2-x)\ln 2} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

لأن $\ln 2 > 0$ و $\lim_{x \to +\infty} (-x^2 - x) = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = [(-2x - 1)\ln 2]\, e^{(-x^2-x)\ln 2}$$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-2x - 1)$ لأن $\ln 2 > 0$ و $e^{(-x^2-x)\ln 2} > 0$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$-2x - 1$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt[4]{2}$	↘	0

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{4}} = (2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

التمرين ــ 21

أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{3^{2x}}{2^x}$

الحـل ــ 21

$$f(x) = \frac{3^{2x}}{2^x} = \left(\frac{3^2}{2}\right)^x = \left(\frac{9}{2}\right)^x = (4,5)^x = e^{x\ln 4,5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln 4,5} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln 4,5} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $f'(x) = (\ln 4,5)\, e^{x\ln 4,5}$

منه : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من IR

إذن : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

التمرين ـــ 22

لتكن (E) المعادلة .... $2^x + 3^x = 5^x$

1 ــ بين أن (E) تكافئ $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$

3 ــ ماذا تستنتج بالنسبة لعدد حلول المعادلة (E) ؟

الحـــل ـــ 22

1 ــ $2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x} = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

أي المعادلة (E) تكافئ $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ و هو المطلوب

2 ــ $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ إذن : $f(x) = e^{x\ln 2/5} + e^{x\ln 3/5}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln 2/5} + e^{x\ln 3/5} = +\infty$$

لأن $\ln 2/5 < 0$ و $\ln 3/5 < 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln 2/5} + e^{x\ln 3/5} = 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} x \ln 3/5 = \lim_{x \to +\infty} x \ln 2/5 = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = (\ln 2/5)\, e^{x\ln 2/5} + (\ln 3/5)\, e^{x\ln 3/5}$$

منه : $f'(x) < 0$ من أجل كل x من IR لأن $\left.\begin{matrix}(\ln 2/5)\, e^{x\ln 2/5} < 0 \\ (\ln 3/5)\, e^{x\ln 3/5} < 0\end{matrix}\right\}$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘ 1 ↘	0

3 ــ من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن f مستمرة على IR و متناقصة تماما إذن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا .
و عليه فالمعادلة (E) تقبل حلا وحيدا .

بما أن $f(1) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا هو $\{1\}$

التمرين ـــ 23

1 ــ بين أن $\frac{e^x}{x^n} = e^{x - n\ln x}$ **حيث** $x > 0$ **و** $n \in IN^*$

2 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} x - n\ln x$ **ثم إستنتج** $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$

3 ــ نضع $u = x^n$ **بين أن :** $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln u}{u}$

4 ــ إستنتج $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$

5 ــ نضع $u = 1/x$ **بين أن** $x^n \ln x = \frac{-\ln u}{u^n}$ **ثم إستنتج** $\lim_{x \to 0} x^n \ln x$

6 ــ نضع $u = -x$ **بين أن** $x^n e^x = \frac{(-1)^n u^n}{e^u}$

7 ـ إستنتج $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x$

8 ـ أحسب $\lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 - e^x$

9 ـ أحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{x^2}$

الحـل ـ 23

1 ـ من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن : $x^n = e^{n\ln x}$

منه : $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n\ln x}} = e^{x-n\ln x}$

2 ـ $\lim_{x \to +\infty} x - n\ln x = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

منه : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} e^{x-n\ln x} = \lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$

3 ـ $u = x^n$ منه $\ln u = \ln(x^n)$ أي $\ln u = n\ln x$ أي $\ln x = \frac{\ln u}{n}$

منه : $\frac{\ln u}{u} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{u} \times \frac{\ln u}{n} = \frac{\ln x}{x^n}$ و هو المطلوب.

4 ـ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{\ln u}{u} = 0$

لأن $\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

5 ـ $u = 1/x$ منه : $\left.\begin{array}{l}\ln u = \ln(1/x)\\ x = 1/u\end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l}\ln u = -\ln x\\ x^n = (1/u)^n\end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l}-\ln u = \ln x\\ x^n = 1/u^n\end{array}\right\}$

منه : $x^n \ln x = \frac{-\ln u}{u^n}$ و هو المطلوب

لاحظ أن لما x يؤول إلى 0 فإن 1/x يؤول إلى $+\infty$ أي u يؤول إلى $+\infty$ $(x \overset{>}{\to} 0)$

منه : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = \lim_{u \to +\infty} \frac{-\ln u}{u^n} = 0$ لأن $\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u^n} = 0$

6 ـ $u = -x$ منه : $\left.\begin{array}{l}-u = x\\ e^u = e^{-x}\end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l}(-u)^n = x^n\\ \frac{1}{e^u} = e^x\end{array}\right\}$

منه : $x^n e^x = \frac{(-u)^n}{e^u} = (-1)^n\left(\frac{u^n}{e^u}\right)$ و هو المطلوب

7 ـ لاحظ أن لما x يؤول إلى $-\infty$ فإن $-x$ يؤول إلى $+\infty$ أي u يؤول إلى $+\infty$

منه : $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim_{u \to +\infty} (-1)^n\left(\frac{u^n}{e^u}\right)$

$$= \lim_{u \to +\infty} (-1)^n \times \frac{1}{\frac{e^u}{u^n}}$$

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u^n} = +\infty \quad \text{لأن} \quad = \lim_{y \to +\infty} (-1)^n \times \frac{1}{y}$$
$$= 0$$

8 — $$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 - e^x = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{e^x}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{لأن} \quad = -\infty$$

9 — $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$
$$= +\infty$$

التمرين — 24

أحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x+1}}{x}$ ثم $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

الحل — 24

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \times e^{2x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) \times e^{2x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2} \times e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right) \times e^x = +\infty$$

التمرين — 25

أحسب نهايات الدوال التالية عند $+\infty$:

(1) $x \mapsto x^2 + x - \ln x$ (4) $x \mapsto \frac{\ln(x^2 + x)}{x}$

(2) $x \mapsto \frac{\ln x - 2x}{4x^2}$ (5) $x \mapsto e^x - x^3$

(3) $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x}$ (6) $x \mapsto x^3 - \ln x$

الحل — 25

(1) $$\lim_{x \to +\infty} x^2 + x - \ln x = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

(2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x - 2x}{4x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4}\left[\frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x}\right] = 0$$

(3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{(x+1)\,x}\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) \times \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 1 \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لأن} \quad = 0$$

(4) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 + x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x(x+1))}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + \ln(x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$= 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$$

(5) $$\lim_{x \to +\infty} e^x - x^3 = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right)$$

$$= +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

(6) $$\lim_{x \to +\infty} x^3 - \ln x = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{\ln x}{x^3}\right)$$

$$= +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$$

التمرين – 26

أحسب النهايات التالية : $(n \in IN^*)$

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ (6) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{e^{-2x}}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{[\ln x]^3}$ (7) $\lim_{x \to -\infty} (1+2x)\, e^{3x}$

(3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x}$ (8) $\lim_{x \to -\infty} (e^{1-x} - x^2 + 1)$

(4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2+2}$ (9) $\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 1)\, e^{3x-1}$

(5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e \ln x}{x^2 + x}$ (10) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x}{\ln x}$

الحـل – 26

(1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} \times \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln x}$$

$$= +\infty \quad \text{لأن} \quad \left\{\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \end{array}\right.$$

(2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^3} \times \frac{x^3}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \frac{x^3}{[\ln x]^3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \left[\frac{x}{\ln x}\right]^3$$

$$= +\infty \quad \text{لأن} \quad \left\{\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \end{array}\right.$$

(3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x^n}} = +\infty$$

$$\text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

(4) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2\left(3 + \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{3} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

$$= +\infty$$

(5)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e \ln x}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e \ln x}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \times e \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$= 0$$

(6)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{e^{-2x}} = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} \ln(1-x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{2x} \times e^{2x} \ln(1-x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2x\, e^{2x}) \times \frac{\ln(1-x)}{2x}$$

$$= 0 \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} 2x\, e^{2x} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2x} = 0 \end{array}\right\}$$

لاحظ أن :
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{2x} \times \frac{1-x}{1-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{2x}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \frac{-1}{2} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

$$= 0$$

(7)
$$\lim_{x \to -\infty} (1+2x)\, e^{3x} = \lim_{x \to -\infty} e^{3x} + 2x\, e^{3x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 0 + \frac{2}{3}(3x\, e^{3x}) \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{2}{3}\, y\, e^y \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$$

$$= 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} y\, e^y = 0$$

(8)
$$\lim_{x \to -\infty} e^{1-x} - x^2 + 1 = \lim_{x \to -\infty} x^2\left(\frac{e^{1-x}}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^2\left(\frac{e \times e^{-x}}{x^2} - 1 + 0\right)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} y^2\left(e \cdot \frac{e^y}{y^2} - 1\right) \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} -x = \lim_{y \to +\infty} y$$

$$= +\infty$$

(9)
$$\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 1)\, e^{3x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e}\left[e^{3x}(2x^2 - 1)\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e}\left(2x^2 e^{3x} - e^{3x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e}\left(2x^2 e^{3x}\right) \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e} \times \frac{x^2}{e^{-3x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e} \times \frac{x^2}{e^{-3x}} \times \frac{9}{9}$$

$\lim_{x \to -\infty} -3x = \lim_{y \to +\infty} y$: إذن $y = -3x$ نضع $= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{9e} \times \frac{(-3x)^2}{e^{-3x}}$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{2}{9e} \times \frac{y^2}{e^y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{2}{9e} \times \frac{1}{\frac{e^y}{y^2}}$$

$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty$ لأن $= 0$

(10) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} + \frac{2x}{\ln x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = +\infty$ لأن $= +\infty$

<u>التمرين – 27</u>

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$ (6) $\lim_{x \to +\infty} (x+2) - 2\ln(2x+1)$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$ (7) $\lim_{x \to +\infty} -x + 1 + e^{2x} - e^x$

(3) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x[\ln x]^3$ (8) $\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 3x)e^x$

(4) $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} x\ln(x^2 - x)$ (9) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} - x - 4\ln(x+1)^2$

(5) $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$ (10) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$

<u>الحـل – 27</u>

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{(e^x - 1)(e^x - 2)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x - 2}$$

$$= \frac{1}{e^0 - 2}$$

$$= -1$$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x(e^x - 1)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} e^x\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.... (1)

نضع $g(x) = e^x$: إذن $g'(x) = e^x$

منه : $g'(0) = e^0 = 1$

لكن تعريفا :

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

أي : $1 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

منه العلاقة (1) تصبح :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \to 0} e^x . 1 = \lim_{x \to 0} e^x = 1$$

(3) نضع $y = \frac{1}{x}$ إذن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = \lim_{y \to +\infty} y$

منه :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x [\ln x]^3 = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \left[\ln \frac{1}{y}\right]^3 = \lim_{y \to +\infty} \frac{[- \ln y]^3}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{- [\ln y]^3}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{- [\ln (y^{1/3})^3]^3}{(y^{1/3})^3}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} - \left(\frac{3 \ln (y^{1/3})}{y^{1/3}}\right)^3 = \lim_{y \to +\infty} - 27\left(\frac{\ln (y^{1/3})}{y^{1/3}}\right)^3$$

بوضع $t = y^{1/3}$ إذن $t \to +\infty$ $= \lim_{t \to +\infty} - 27\left(\frac{\ln t}{t}\right)^3$

$= 0$ لأن $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

(4)

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} x \ln(x^2 - x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x \ln [x(x-1)] = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x [\ln|x| + \ln|x-1|]$$

$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x \ln|x|$ لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \ln|x-1| = \ln 1 = 0$

$= 0$

(5)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x+1} [2x - (x+1) \ln(x+1)]$$

بوضع $y = x + 1$ إذن : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x + 1 = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} y \\ 2x = 2y - 2 \end{array}\right\}$ $= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} [2y - 2 - y \ln y]$

$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} (-2)$ لأن $\lim_{y \overset{>}{\to} 0} y \ln y = 0$

$= -\infty$

(6)

$$\lim_{x \to +\infty} x + 2 - 2 \ln(2x+1) = \lim_{x \to +\infty} (2x+1)\left[\frac{x+2}{2x+1} - 2 \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}\right]$$

بوضع $2x + 1 = y$ أي : $\lim_{x \to +\infty} 2x + 1 = \lim_{y \to +\infty} y$ $= \lim_{y \to +\infty} y\left[\frac{1}{2} - 2 \frac{\ln y}{y}\right]$

$= \lim_{y \to +\infty} y\left(\frac{1}{2}\right)$ لأن $\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$

$= +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} -x+1+e^{2x}-e^{x} = \lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{-x+1}{x} + \frac{e^{2x}-e^{x}}{x}\right] \quad (7)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[-1 + \frac{e^{2x}(1-e^{-x})}{2x} \times 2\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \to +\infty} x\left[-1 + 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x = \lim_{y \to +\infty} y \text{ : إذن } 2x = y \text{ بوضع } = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2} y\left[-1 + 2\frac{e^{y}}{y}\right]$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{y} = +\infty \text{ لأن } = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 3x)e^{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2\left[2 - \frac{3}{x}\right] \times \frac{1}{e^{-x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ لأن } = \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^2}{e^{-x}}(2-0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} -x = \lim_{y \to +\infty} y \text{ لأن } = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{e^{y}}(2)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^{y}}{y^2}}(2)$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{y^2} = +\infty \text{ لأن } = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} - x - 4\ln(x+1)^2 = \lim_{x \to +\infty} (x+1)^2\left(\frac{\frac{x^2}{2}-x}{(x+1)^2} - 4\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)^2}\right) \quad (9)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)^2\left[\frac{x^2-2x}{2(x^2+2x+1)} - 4\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)^2\left[\frac{1}{2} - 4\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)^2}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)^2 = \lim_{y \to +\infty} y \text{ لأن } = \lim_{y \to +\infty} y\left(\frac{1}{2} - 4\frac{\ln y}{y}\right)$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0 \text{ لأن، } = \lim_{y \to +\infty} y\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2+3x+4)e^{\frac{1}{2}x} = +\infty \quad (10)$$

$$\text{لأن } \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{2}x} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} x^2+3x+4 = +\infty \end{array}\right\}$$

التمرين – 28

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to +\infty} (2x+3)e^{x} - e^{2x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2+e^{x}} \quad (2)$$

الحل – 28

$$\lim_{x \to +\infty} (2x+3)e^{x} - e^{2x} = \lim_{x \to +\infty} 2xe^{x} + 3e^{x} - e^{2x} \quad (1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} xe^{x}\left[2 + \frac{3}{x} - \frac{e^{x}}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x e^x \left[2 - \frac{e^x}{x}\right] \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$= -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty$$

(2)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2 + e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \cdot e^{2x}}{e^x\left(\frac{x^2}{e^x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \cdot e^{2x}}{e^x} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}$$

$$= +\infty$$

التمرين ــ 29

f دالة معرفة على IR بــ $\mathbf{f(x) = x^2 e^{-x}}$

أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

الحــل ــ 29 f دالة معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

$$\text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$$

$$= 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x}(2 - x)$$

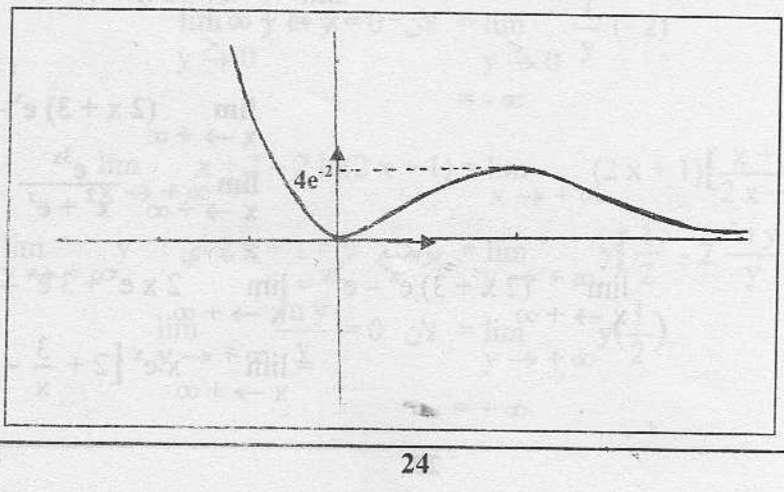
إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(2-x)$ لأن $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(2-x)$		-	0	+	0	-	

منه : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

الإنشاء :



التمرين – 30

f دالة معرفة على *IR بـ $f(x) = \frac{3^x}{x^2}$

1 – أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم عند 0

2 – بين أن من أجل كل x من *IR : $f(x) = \frac{e^{x\ln 3}}{[x \ln 3]^2} \times [\ln 3]^2$

3 – إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

الحل – 30

1 – $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3^x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{x\ln 3}}{x^2} = 0$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln 3} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x\ln 3}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

2 – من أجل كل x من *IR لدينا :

$$f(x) = \frac{3^x}{x^2}$$

$$= \frac{e^{x\ln 3}}{x^2}$$

$$= \frac{e^{x\ln 3}}{x^2} \times \frac{(\ln 3)^2}{(\ln 3)^2}$$

$= \frac{e^{x\ln 3}}{(x \ln 3)^2} \times (\ln 3)^2$ و هو المطلوب

3 – $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x\ln 3}}{(x \ln 3)^2} \times (\ln 3)^2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln 3 = \lim\limits_{y \to +\infty} y$ لأن $= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^y}{y^2} \times (\ln 3)^2$

$\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty$ لأن $= +\infty$

التمرين – 31

عين الدوال المشتقة للدوال التالية :

(1) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x}}$ (2) $g(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$

الحل – 31

(1) f معرفة و قابلة للاشتقاق على *IR و تكتب من الشكل :

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-2}{(x)^{1/3}} = -2\,(x)^{-1/3}$$

منه : $f'(x) = -2\left(-\frac{1}{3}\, x^{-\frac{1}{3}-1}\right) = \frac{2}{3}\, x^{-4/3} = \frac{2}{3\, x^{4/3}}$

ملاحظة : يمكن كتابة $\frac{2}{3\, x^{4/3}}$ من الشكل $\frac{2}{3\, x\sqrt[3]{x}}$ أي $f'(x) = \frac{-1}{3\, x}\, f(x)$

(2) g معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و تكتب من الشكل :

$$g(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/5}$$

منه : $g'(x) = \frac{1}{5}\,(2\,x)(x^2 + 1)^{\frac{1}{5}-1} = \frac{2\,x}{5}\,(x^2 + 1)^{-4/5} = \frac{2\,x}{5(x^2 + 1)^{4/5}}$

التمرين – 32

عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على *IR بـ $f(x) = x - 6\sqrt[3]{x}$

الحل – 32

$$f(x) = x - 6\sqrt[3]{x} = x - 6\, x^{1/3}$$

منه : $f'(x) = 1 - 6\left(\frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1}\right) = 1 - 2x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{x^{2/3}}$

التمرين ــ 33

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ عين معادلة مماس المنحنى الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 4

الحل ــ 33

1 ــ f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-4)\sqrt[3]{x} = +\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x-4) = -\infty \end{array}\right\}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-4)\sqrt[3]{x} = +\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x-4) = +\infty \end{array}\right\}$

f قابلة للاشتقاق على *IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{3}(x)^{\frac{1}{3}-1}(x-4)$$
$$= (x)^{1/3} + \frac{1}{3x}(x-4)(x)^{1/3}$$
$$= x^{1/3}\left[1 + \frac{x-4}{3x}\right]$$
$$= x^{1/3}\left(\frac{3x + x - 4}{3x}\right)$$
$$= x^{1/3}\left(\frac{4x-4}{3x}\right)$$

إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$3x$	-	‖	+		
$4x-4$	-	‖	-	0	+
$x^{1/3}$	-	‖	+		
$x^{1/3}\left(\frac{4x-4}{3x}\right)$	-	‖	-	0	+

منه جدول إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	-	|	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	0	+			
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	$+\infty$

$$f(1) = (1-4)\sqrt[3]{1} = -3$$

2 ـ معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 4 تكتب من الشكل :

$y = f'(4)(x-4) + f(4)$ حيث $\begin{cases} f(4) = 0 \\ f'(4) = (4)^{1/3}\left(\dfrac{16-4}{12}\right) = 4^{1/3} = \sqrt[3]{4} \end{cases}$

منه : المعادلة هي : $y = \sqrt[3]{4}(x-4)$ أي : $y = \sqrt[3]{4}\,x - 4\sqrt[3]{4}$

التمرين ـ 34

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sqrt[3]{2x^2+1}$

1 ـ أثبت أن f دالة زوجية .

2 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

3 ـ إستنتج جدول تغيرات الدالة f على IR

الحـل ـ 34

1 ـ من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in IR$ و $f(-x) = \sqrt[3]{2(-x)^2+1}$

$$= \sqrt[3]{2x^2+1}$$

$= f(x)$ إذن : f زوجية .

2 ـ تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$

$$f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{2x^2+1} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt[3]{y} = +\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{2x^2+1} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt[3]{y}$ $(y = 2x^2+1)$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{3}(4x)(2x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{4x}{3}(2x^2+1)^{-2/3}$$

بما أن $x^2+1 > 0$ فإن $(2x^2+1)^{-2/3} > 0$

إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $[0 ; +\infty[$ هي إشارة $4x$ أي موجبة كمايلي :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	

3 ـ منه جدول تغيرات الدالة f على IR :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$$

ملاحظة : تم استنتاج التغيرات على المجال $]-\infty ; 0]$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن f دالة زوجية .

التمرين ـ 35

f دالة معرفة على المجال $]-\infty ; 1]$ بـ $f(x) = (1-x)^{3/2}$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty ; 1]$

2 ـ أرسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال $]-\infty ; 1]$

الحـل ـ 35

1 ـ f معرفة على $]-\infty ; 1]$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1-x)^{3/2} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$

$$f(1) = (1-1)^{3/2} = (0)^{3/2} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty ; 1]$ و دالتها المشتقة :

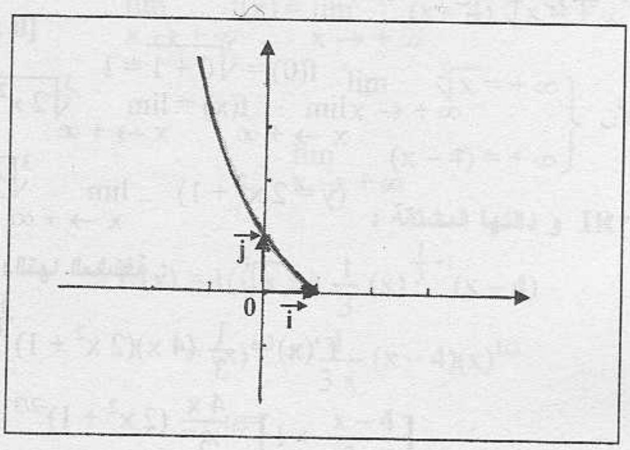
$$f'(x) = \frac{3}{2}(-1)(1-x)^{\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}(1-x)^{1/2} = -\frac{3}{2}\sqrt{1-x}$$

منه : $f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty ; 1[$

منه : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

الإنشاء :



التمرين ـــ 36

f دالة معرفة على IR بـ : $f(x) = x^3 e^{-x}$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ـــ أرسم منحنى الدالة f

الحـل ـــ 36

1 ـــ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 e^{-x} = -\infty$$

لأن $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^3}} = 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3-x)$$

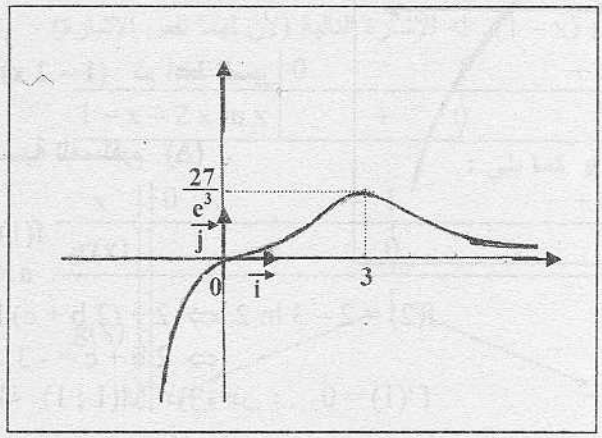
إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2(3-x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2		+	0	+			
$3-x$				+	0	-	
$x^2(3-x)$		+	0	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{27}{e^3}$	↘	0

$$f(3) = 27\,e^{-3} = \frac{27}{e^3}$$

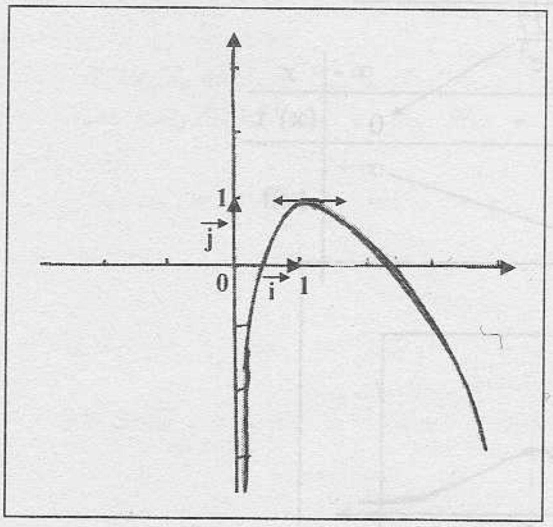


حلول تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

f دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = a\,x + (b\,x + c)\ln x$ حيث $c ; b ; a$ أعداد حقيقية .

نسمي (C) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما يلي :



1 ــ باستعمال المنحنى (C) و علما أن : $f(2) = 2 - 3\ln 2$

بين أن $c = 1$ ؛ $a = 1$ ؛ $b = -2$

لتكن g الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ :

$g(x) = x + (1 - 2x)\ln x$

2 ــ ادرس تغيرات الدالة g

ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

3 ــ حل في IR المعادلة $(1 - 2x)\ln x = 0$ ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذه الحلول .

4 ــ استنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

الحـل ــ 1

1 ــ حسب المنحنى (C) فإن : $f(1) = 1$

أي $a + (b + c)\ln 1 = 1$ منه $a = 1$

إذن : $f(2) = 2 - 3\ln 2 \Leftrightarrow 2 + (2b + c)\ln 2 = 2 - 3\ln 2$

$\Leftrightarrow 2b + c = -3$ .... (1)

من المنحنى (C) نلاحظ ان النقطة $M(1 ; 1)$ ذورة إذن : $f'(1) = 0$

لدينا : $f'(x) = a + b\ln x + \dfrac{bx + c}{x}$ أي $f'(x) = 1 + b + \dfrac{c}{x} + b\ln x$

منه : $f'(1) = 1 + b + c$ أي : $b + c + 1 = 0$ ..... (2) لأن $f'(1) = 0$

لنحل إذن الجملة $\begin{cases} 2b + c = -3 \\ b + c = -1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2b + c - b - c = -3 + 1 \\ c = -1 - b \end{cases}$ أي $\begin{cases} b = -2 \\ c = -1 + 2 = 1 \end{cases}$

نتيجة : $a = 1$ ؛ $b = -2$ ؛ $c = 1$ أي : $f(x) = x + (1 - 2x)\ln x$ و هو المطلوب .

2 ــ تغيرات الدالة g : g معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x + (1 - 2x)\ln x$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x + \ln x - 2(x\ln x)$$

$$= -\infty \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x + (1 - 2x)\ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x + \ln x - 2x\ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[1 + \frac{\ln x}{x} - 2\ln x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x(1 - 2\ln x) \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$= -\infty$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 1 - 2\ln x + \frac{1-2x}{x}$$
$$= \frac{x - 2x\ln x + 1 - 2x}{x}$$
$$= \frac{1 - x - 2x\ln x}{x}$$
$$= \frac{(1-x) - 2x\ln x}{x}$$

بما أن $x \in]0 ; +\infty[$ فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(1-x) - 2x\ln x$

لاحظ أن :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$		+	0	-	
$- x\ln x$		+	0	-	

إذن : المجموع $(1-x) - x\ln x$ له الإشارة التالية (لأن لهما نفس الإشارة)

x	0		1		$+\infty$
$1 - x - 2x\ln x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

$g(1) = 1$

ملاحظة : الدالة g هي نفسها الدالة f من أجل $a = c = 1$ و $b = -2$

إذن : منحنى الدالة g هو المنحنى (C) المرسوم في نص الأسئلة

3 ـ

$$(1-2x)\ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = 0 \quad \text{أو} \\ 1 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 1 \quad \text{أو} \\ x = 1/2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \{1 ; 1/2\}$ و هي الحلول المطلوبة

التفسير الهندسي :

لدينا : $f(x) - x = x + (1-2x)\ln x - x = (1-2x)\ln x$

إذن : $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow (1-2x)\ln x = 0$

منه : حلول المعادلة $(1-2x)\ln x = 0$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

أي : (C) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين $A(1 ; 1)$ و $B(1/2 ; 1/2)$

4 ـ **الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) :**

$$f(x) - x > 0 \Leftrightarrow (1-2x)\ln x > 0$$

x	0		1/2		1		$+\infty$
$1 - 2x$		+	0	-		-	
$\ln x$		-		-	0	+	
$(1-2x)\ln x$		-	0	+	0	-	

نتيجة : لما $x \in]0 ; 1/2[\cup]1 ; +\infty[$: (C) يقع تحت (Δ)

لما $x \in \{1/2 ; 1\}$: (C) يقطع (Δ)

لما $x \in]1/2 ; 1[$: (C) يقع فوق (Δ)

التمرين — 2

نعتبر الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$ حيث $f(x) = x e^{-x}$ و نسمي (γ) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

الجزء I

1 — أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

2 — بين أن من أجل كل m من المجال $]0 ; 1/e[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين

3 — حل المعادلة $f(x) = m$ من أجل $m = 0$ ثم $m = 1/e$

الجزء II

ليكن α الحل الأصغر للمعادلة $f(x) = m$ من أجل $m = 1/4$

نعرف المتتالية (u_n) كمايلي : $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1 — برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

لتكن (w_n) متتالية معرفة بـ $w_n = \ln u_n$

2 — بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n - w_{n+1}$

نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_n$

3 — بين أن $S_n = w_0 - w_{n+1}$

4 — أنشئ المنحنى (γ) في المعلم السابق .

الحـل — 2

1 — تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على $[0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

منه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1 - x$ لأن $e^{-x} > 0$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

$$f(1) = 1\, e^{-1} = 1/e$$

2 — حسب جدول تغيرات الدالة f فإن :

من أجل كل x من المجال $]0 ; 1[$ فإن $f(x) \in]0 ; 1/e[$ و f مستمرة على المجال $[0 ; 1]$

إذن المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in]0 ; 1/e[$ تقبل حلا على المجال $]0 ; 1[$

من أجل كل x من المجال $]1 ; +\infty[$ فإن $f(x) \in]0 ; 1/e[$ و f مستمرة على المجال $[1 ; +\infty[$

إذن المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in]0 ; 1/e[$ تقبل حلا على المجال $]1 ; +\infty[$

نتيجة : المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in]0 ; 1/e[$ تقبل حلين أحدهما على المجال $]0 ; 1[$

و الأخر على المجال $]1 ; +\infty[$

3 — $f(x)=0 \Leftrightarrow x e^{-x}=0$

$\Leftrightarrow x=0$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا هو 0

$f(x)=1/e \Leftrightarrow x=1$ (حسب جدول التغيرات)

إذن المعادلة $f(x)=1/e$ تقبل حلا واحدا هو 1

الجزء II

1 — α حل أصغر للمعادلة $f(x)=1/4$ إذن : $0<\alpha<1$

البرهان بالتراجع أن : $u_n>0$ من أجل كل n من IN

من أجل $n=0$: $u_0=\alpha$ و $0<\alpha<1$ إذن : $u_0>0$ أي الخاصية محققة

من أجل $n=1$: $u_1=f(u_0)$ أي $u_1=f(\alpha)$

لكن $0<\alpha<1$ إذن : $0<f(\alpha)<1/e$ منه : $f(\alpha)>0$

أي $u_1>0$ منه الخاصية محققة من أجل $n=1$

نفرض أن $u_n>0$ من اجل $n>1$

هل $u_{n+1}>0$ ؟

لدينا $u_n>0$ إذن : $0<f(u_n)<1/e$ أي $f(u_n)>0$ أي $u_{n+1}>0$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل n من IN : $u_n>0$

2 — $w_n=\ln u_n$ أي $w_{n+1}=\ln u_{n+1}$

منه :

$$\begin{aligned} w_n-w_{n+1} &= \ln u_n-\ln u_{n+1} \\ &= \ln u_n-\ln(f(u_n)) \\ &= \ln u_n-\ln[u_n e^{-u_n}] \\ &= \ln u_n-[\ln u_n+\ln e^{-u_n}] \\ &= \ln u_n-[\ln u_n-u_n] \\ &= u_n \end{aligned}$$

و هو المطلوب .

3 — لدينا المساواة $u_n=w_n-w_{n+1}$ إذن لنكتب هذه المساواة من أجل

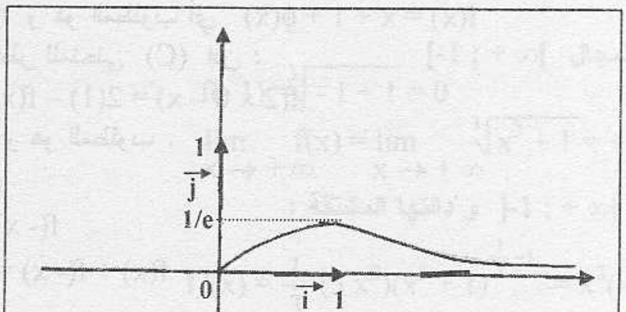
$n=0$ ؛ $n=1$ ؛ .... $n=n$ كمايلي :

$$\begin{aligned} u_0 &= w_0-w_1 \\ u_1 &= w_1-w_2 \\ u_2 &= w_2-w_3 \\ &\vdots \\ u_n &= w_n-w_{n+1} \end{aligned}$$

بجمع هذه المساواة طرف لطرف نحصل على : $u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n=w_0-w_{n+1}$

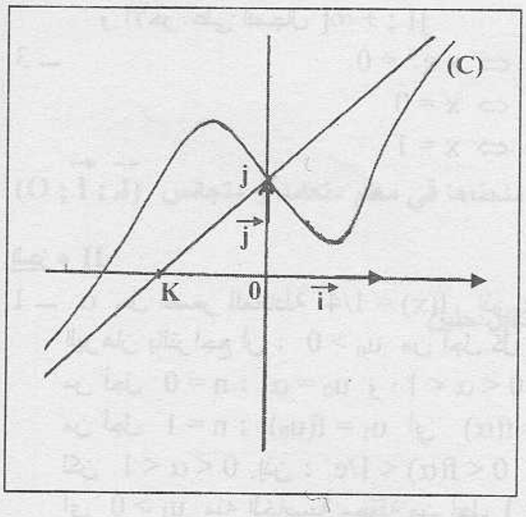
أي : $S_n=w_0-w_{n+1}$ و هو المطلوب .

الإنشاء :



التمرين — 3

إليك التمثيل البياني (C) في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على IR و (D) هو المستقيم المقارب للمنحنى (C) و المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 حيث :



النقطة $J(0\,;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C) .
المستقيم (D) يشمل النقطتين $K(-1\,;0)$ و $J(0\,;1)$ و المماس (T)
له المعادلة $y = (1-e)\,x + 1$

1 ــ عين معادلة المستقيم (D) .

نفرض أن يوجد عددين حقيقيين m و p و دالة عددية ϕ معرفة على IR حيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = m\,x + p + \phi(x)$ مع $\lim\limits_{x \to \infty} \phi(x) = 0$

2 ــ بين أن $m = p = 1$

3 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + f(-x) = 2$

4 ــ إستنتج أن الدالة ϕ فردية .

5 ــ أثبت أن f' (مشتقة الدالة f) دالة زوجية .

نفرض أن من اجل كل عدد حقيقي x : $\phi(x) = (a\,x + b)\,e^{-x^2}$

حيث a و b عددان حقيقيان .

6 ــ بين أن $b = 0$

7 ــ أحسب $f'(x)$

8 ــ باستعمال ميل المماس (T) أثبت أن $a = -e$ ثم استنتج عبارة $f(x)$

الحل ــ 3

1 ــ $\begin{cases} K(-1\,;0) \\ J(0\,;1) \end{cases}$ إذن $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

لتكن $M(x\,;y)$ نقطة كيفية من المستوي إذن : $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \,||\, \overrightarrow{KJ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y - 1$$

$\Leftrightarrow y = x + 1$ و هي معادلة المستقيم المقارب (D)

2 ــ $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (m\,x + p)] = \lim\limits_{x \to \infty} [m\,x + p + \phi(x) - (m\,x + p)]$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \phi(x)$

$= 0$ حسب المعطيات .

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = m\,x + p$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

لكن حسب السؤال (1) فإن المستقيم المقارب (D) للمنحنى (C) معادلته $y = x + 1$

منه بالمطابقة : $m = 1\,;\, p = 1$ و هو المطلوب أي $f(x) = x + 1 + \phi(x)$

3 ــ لدينا النقطة $J(0\,;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C) إذن :

$$f(2 \times 0 - x) = 2(1) - f(x) \Leftrightarrow f(-x) = 2 - f(x)$$

$\Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 2$ و هو المطلوب .

4 ــ لدينا $\begin{rcases} f(x) = x + 1 + \phi(x) \\ f(-x) = -x + 1 + \phi(-x) \end{rcases}$

منه $f(x) + f(-x) = 2 + \phi(x) + \phi(-x)$

لكن $f(x) + f(-x) = 2$

إذن $\phi(x) + \phi(-x) = 0$

أي : $\phi(-x) = -\phi(x)$ أي الدالة ϕ فردية . و هو المطلوب

5 ــ لدينا : $f(x) + f(-x) = 2$ أي $f(-x) = 2 - f(x)$

نضع $g(x) = f(-x)$ منه $g(x) = 2 - f(x)$ .... (1)

إذن : g هي مركب الدالتين $u : x \longmapsto -x$ و $f : x \longmapsto f(x)$

حيث $g(x) = f(u(x)) = f \circ u(x)$

إذن : $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$ مع $u'(x) = -1$

منه : $g'(x) = -f'(u(x))$ أي $g'(x) = -f'(-x)$

من جهة أخرى باشتقاق طرفي المساواة (1) نحصل على : $g'(x) = 0 - f'(x)$

أي : $-f'(-x) = -f'(x)$

أي : $f'(-x) = f'(x)$

منه : الدالة f' زوجية .

6 ــ لدينا : $\phi(x) = (ax + b)\, e^{-x^2}$

منه : $\phi(-x) = (-ax + b)\, e^{-x^2}$

أي : $\phi(-x) = -(ax - b)\, e^{-x^2}$

لكن ϕ دالة فردية إذن : من أجل كل x من IR : $\phi(-x) = -\phi(x)$

أي : $-(ax - b)\, e^{-x^2} = -(ax + b)\, e^{-x^2}$

أي : $-b = b$

أي : $b = 0$

نتيجة : $\phi(x) = a x\, e^{-x^2}$

7 ــ لدينا : $\phi(x) = a x\, e^{-x^2}$

إذن : $\phi'(x) = a\, e^{-x^2} - 2 a x^2\, e^{-x^2}$

أي : $\phi'(x) = (1 - 2x^2)\, a\, e^{-x^2}$

منه : $f'(x) = 1 + (1 - 2x^2)\, a\, e^{-x^2}$ لأن حسب السؤال (2) فإن $f(x) = x + 1 + \phi(x)$

8 ــ لدينا ميل المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هو $(1 - e)$ أي $f'(0) = 1 - e$

$$f'(0) = 1 - e \Leftrightarrow 1 + (1 - 0)\, a = 1 - e$$
$$\Leftrightarrow 1 + a = 1 - e$$
$$\Leftrightarrow a = -e$$

خلاصة : $\phi(x) = -e\, x\, e^{-x^2} = -x\, e^{1-x^2}$

منه : $f(x) = x + 1 - x\, e^{1-x^2}$ و هي عبارة $f(x)$

التمرين ــ 4

f دالة معرفة على $]-1\,; +\infty[$ بــ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O\,; \vec{I}\,; \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ أثبت أن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3 ــ بين أن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عند النقطة $M(-1\,; 0)$ موازي لمحور التراتيب .

4 ــ عين نقطة إنعطاف المنحنى (C) .

5 ــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

الحــل ــ 4

1 ــ تغيرات الدالة f على المجال $[-1\,; +\infty[$

$$f(-1) = \sqrt[3]{-1 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $]-1\,; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2)(x^3 + 1)^{\frac{1}{3} - 1} = x^2 (x^3 + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

إشارة $f'(x)$:

لدينا $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

منه إشارة $x^3 + 1$ هي إشارة $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ كما يلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^2 - x + 1$		+	
$x + 1$	-	0	+
$x^3 + 1$	-	0	+

نتيجة : من أجل كل x من $]-1\,;+\infty[$: $x^3+1>0$ منه : $\sqrt[3]{x^3+1}>0$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2 فقط كما يلي :

x	-1		0		$+\infty$
x^2	‖	$+$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0)=\sqrt[3]{0+1}=1$$

ملاحظة : يمكن ملاحظة أن : $f'(x)=x^2(x^3+1)^{-2/3}$

$$=x^2\left(\frac{1}{x^3+1}\right)^{2/3}$$

$$=x^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3+1}}\right)^2$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي اشارة x^2 فقط لأن $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3+1}}\right)^2>0$

2 –
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}(x^3+1)^{1/3}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right]^{1/3}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x^3)^{1/3}\times\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x-x \quad \text{لأن} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$=0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 –
$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{(x+1)(x^2-x+1)}}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{x+1}\times\sqrt[3]{x^2-x+1}}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{x^2-x+1}}{(x+1)^{1-\frac{1}{3}}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\frac{\sqrt[3]{1+1+1}}{(x+1)^{2/3}}$$

$$=\lim_{\substack{y\to 0\\ >}}\frac{\sqrt[3]{3}}{y}$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} -1} x+1 = \lim_{y \underset{>}{\to} 0} y^{\frac{1}{3}} = +\infty \quad \text{لأن}$$

إذن : المنحنى (C) يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الإحداثيات (0 ; 1 -) موازي لحامل محور التراتيب .

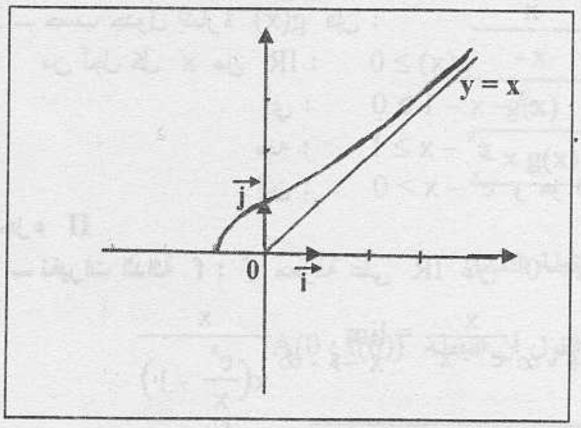
4 ـــ يمكن تعيين نقطة الإنعطاف بدراسة إشارة المشتقة الثانية كما يلي :

$$f''(x) = 2x(x^3+1)^{-2/3} - \frac{2}{3}(3x^2)(x^3+1)^{-\frac{2}{3}-1}(x^2)$$
$$= 2x(x^3+1)^{-2/3} - 2x^4(x^3+1)^{-5/3}$$
$$= 2x(x^3+1)^{-5/3}\left[(x^3+1)^1 - x^3\right]$$
$$= 2x(x^3+1)^{-5/3}$$

منه إشارة $f''(x)$ على المجال $]-1 ; +\infty[$ هي إشارة $2x$ لأن $(x^3+1) > 0$ كما يلي :

x	-1		0		$+\infty$
2 x		−	0	+	

لدينا الدالة f'' تنعدم عند 0 و تغير إشارتها من سالبة إلى موجبة إذن النقطة $M(0 ; f(0))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) أي $M(0 ; 1)$ نقطة إنعطاف .



ملاحظة : كان من الممكن إستنتاج أن النقطة $M(0 ; 1)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) من جدول تغيرات الدالة f (حالة خاصة ظاهرة) حيث الدالة f' تنعدم عند 0 و لا تغير إشارتها .

5 ـــ الإنشاء :

التمرين ـــ 5

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

الجزء I

لتكن g الدالة المعرفة على IR بـ $g(x) = e^x - x - 1$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة g

2 ـــ إستنتج إشارة $g(x)$

3 ـــ أثبت أن من أجل كل x من IR : $e^x - x > 0$

الجزء II

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ـــ عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 . و ليكن (T) هذا المماس

3 ـــ أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T)

4 ـــ أنشئ بعناية المنحنى (C)

الحـل ـــ 5

الجزء I

1 ـــ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - x - 1 = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{matrix} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{matrix}\right\}$$

g قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = e^x - 1$$

منه : $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة **g** :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$

2 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		+	0	+	

3 ـ حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن :

من أجل كل x من IR : $g(x) \geq 0$

أي : $e^x - x - 1 \geq 0$

منه : $e^x - x \geq 1$

إذن : $e^x - x > 0$ و هو المطلوب .

الجزء II

1 ـ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR لأن $e^x - x > 0$ (أي $e^x - x \neq 0$)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = -1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{e^x - x - (e^x - 1)\,x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^x - x - x\,e^x + x}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1 - x)$ لأن $e^x > 0$ و $(e^x - x)^2 > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1 - x$		+	0	−	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

$$f(1) = \frac{1}{e - 1}$$

2 ـ معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1/1 = 1 \end{cases}$ منه : (T) له المعادلة $y = (x - 0) + 0$ أي $y = x$

3 ـ وضعية (C) بالنسبة إلى المماس (T) :

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x\,e^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-x\,g(x)}{e^x - x}$$

إذن : إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $-x\,g(x)$ لأن $e^x - x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$-x\,g(x)$		$+$	0	$-$	

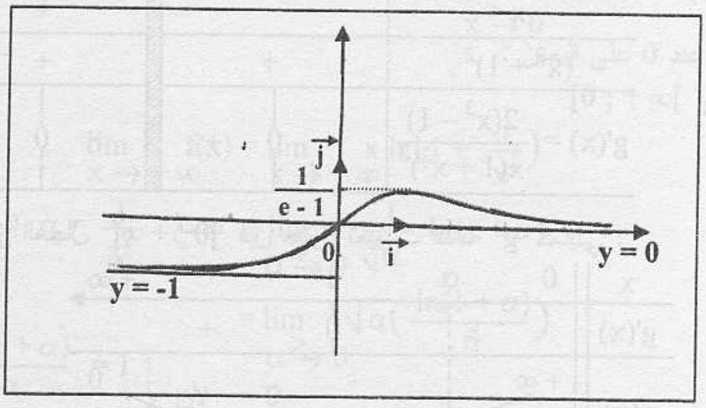
نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 0[$ المنحنى (C) فوق المماس (T)

لما $x = 0$ المنحنى (C) يقطع المماس (T) في نقطة التماس

لما $x \in]0 ; +\infty[$ المنحنى (C) تحت المماس (T)

ملاحظة : في هذه الحالة المماس (T) يخترق المنحنى (C) إذن يمكن القول أن النقطة $A(0 ; f(0))$ هي نقطة إنعطاف المنحنى (C)

4 ـ الإنشاء :



التمرين ـ 6

لتكن f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \begin{cases} x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

نرمز بـ (C) إلى منحناها في معلم متعامد و متجانس

الجزء I

نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1 + x^2}$

1 ـ أحسب $g'(x)$ ثم بين أن من أجل $x > 0$ $\quad g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(1 + x^2)^2}$

2 ـ إستنتج إشارة $g'(x)$

3 ـ أرسم جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0 ; +\infty[$

4 ــ أثبت أن يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$

5 ــ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$

الجزء II

1 ــ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

3 ــ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 على اليمين ثم عين معادلة نصف المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

4 ــ أنشئ المنحنى (C)

الحـل ــ 6

الجزء I

1 ــ من أجل كل x من IR^* لدينا :

$$g'(x) = \frac{-\frac{2x}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2}{x^3} \times \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+1) + 4x^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2}{x(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$$ و هو المطلوب

2 ــ إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x			$-$		‖		$+$		
$(x^2+1)^2$			$+$		‖		$+$		
$g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

3 ــ حسب إشارة $g'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ فإن جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	0		α		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$			0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$+$ ↘	0	$-$ ↘	$-1 + \ln 2$	↗ $-$	0

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1+x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

$$g(1) = \ln(1+1) - \frac{2}{2} = -1 + \ln 2$$

4 ــ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0 ; 1[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

لدينا :

$$g(0,5) = \ln\left(1 + \frac{1}{0,25}\right) - \frac{2}{1,25} = 0,009$$

$$g(0,6) = \ln\left(1 + \frac{1}{0,36}\right) - \frac{2}{1,36} = -0,14$$

إذن : $\left.\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [0,5\ ;\ 0,6] \\ g(0,5) \times g(0,6) < 0 \end{array}\right\}$

منه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد β من المجال $]0,5\ ;\ 0,6[$ يحقق $g(\beta) = 0$

بما أن العدد α وحيد فإن $\beta = \alpha$

5 ـ بملاحظة جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0	$0,5$	α	$0,6$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

الجزء II

1 ـ
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln\left(\frac{1 + x^2}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\,[\ln(1 + x^2) - \ln x^2]$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\,[\ln(1 + x^2) - 2\ln x] \quad \text{لأن } x > 0$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln(1 + x^2) - 2x\ln x$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 0\ln(1 + 0) - 2x\ln x$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 0 - 2x\ln x$$
$$= 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$$

بما أن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 = f(0)$

فإن الدالة f مستمرة عند 0 على اليمين .

2 ـ تغيرات الدالة f على $[0\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{\alpha \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln(1 + \alpha) \quad \text{نضع} \quad \alpha = \frac{1}{x^2} \quad \text{إذن :} \quad x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$
$$= \lim_{\alpha \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\alpha}\left(\frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha}\right)$$
$$= 0 \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{array}{l} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1 \\ \lim_{\alpha \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\alpha} = 0 \end{array}\right\}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\ ;\ +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x\left(\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2} \times \frac{x^2}{1 + x^2}$$
$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{1 + x^2}$$
$$= g(x)$$

منه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

إذن : **جدول تغيرات الدالة f :**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

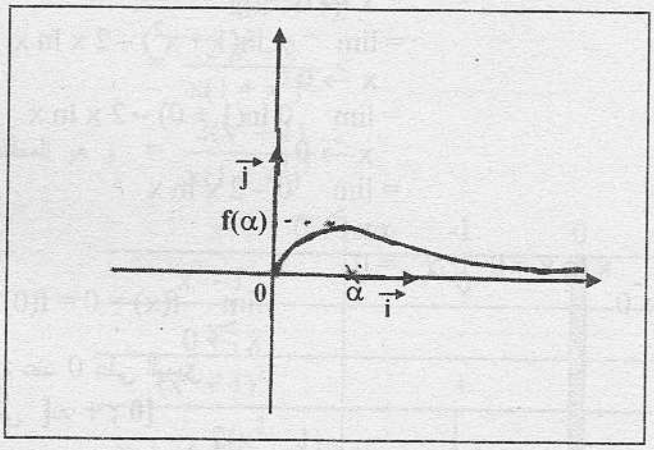
$$f(\alpha) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) > 0$$

3 ـ قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 على اليمين :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 0}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= +\infty$$

منه : f لا تقبل الاشتقاق على يمين 0 و عليه منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته $x = 0$ (شاقولي) .

4 ـ الإنشاء :



التمرين ـ 7

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f

2 ـ عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

3 ـ أحسب $f(0)$ ثم أرسم المنحنى (C)

4 ـ ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$

5 ـ بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحدا α حيث $-2 < \alpha < -1$

6 ـ بين أن α يحقق العلاقة $\alpha = -1 - \sqrt{2}\, e^{\alpha/2}$

الحل ـ 7

1 ـ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + 1)^2 e^{-x} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} (x + 1)^2 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ لأن $= 0$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = (2x + 2) e^{-x} - (x + 1)^2 e^{-x}$$
$$= (x + 1) e^{-x}(2 - x - 1)$$
$$= (x + 1)(1 - x) e^{-x}$$

منه : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x + 1)(1 - x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x + 1		-	0	+		+	
1 - x		+		+	0	-	
f'(x)		-	0	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	4/e	↘	0

$f(-1) = 0$

$f(1) = (1 + 1)^2 e^{-1} = 4/e$

2 ـ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

دراسة الفرع عند $-\infty$:

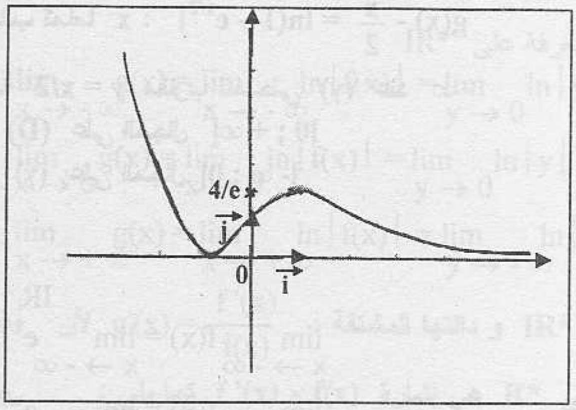
$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x + 1)^2 e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -(x + 1)^2 \times \frac{e^{-x}}{-x} = -\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} -(x + 1)^2 = -\infty$

إذن : المنحنى (C) يقبل فرع من قطع مكافئ في إتجاه محور التراتيب عند $-\infty$

3 ـ $f(0) = (0 + 1) e^0 = 1$

الإنشاء :



4 ـ عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ هو عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = k$

و عليه نميز الحالات التالية :

لما $k \in]-\infty ; 0[$: المعادلة لا تقبل حلول

لما $k = 0$: المعادلة تقبل حلا واحدا

لما $k \in]0 ; 4/e[$: المعادلة تقبل ثلاثة حلول مختلفة .

لما $k = 4/e$: المعادلة تقبل حلين .

لما $k \in]4/e ; +\infty[$: المعادلة تقبل حلا واحدا .

5 ـ من أجل $k = 2$ لدينا $2 \in]4/e ; +\infty[$ إذن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحدا α

نعرف الدالة g على IR بـ $g(x) = f(x) - 2$

لدينا : g مستمرة على IR و خاصة على $[-2 ; -1]$

و $g(-2) = (-2+1)^2 e^2 - 2 = e^2 - 2 > 0$

و $g(-1) = 0 - 2 = -2 < 0$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [-2 ; -1] \\ g(-2) \times g(-1) < 0 \end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α من المجال $]-2 ; -1[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

أي : $f(\alpha) - 2 = 0$ أي $f(\alpha) = 2$ و هو المطلوب

6 ـ
$$f(\alpha) = 2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2 e^{-\alpha}} = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(\alpha+1)^2}{e^{\alpha}}} = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|\alpha+1|}{\sqrt{e^{\alpha}}} = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-\alpha-1}{e^{\alpha/2}} = \sqrt{2} \quad \text{لأن} \quad \alpha + 1 < 0 \quad (-2 < \alpha < -1)$$
$$\Leftrightarrow -\alpha - 1 = \sqrt{2} . e^{\alpha/2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = -1 - \sqrt{2}\, e^{\alpha/2}$$ و هو المطلوب .

<u>التمرين ــ 8</u>

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^{x/2} - e^x$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة f ثم عين إشارة $f(x)$

2 ـ أرسم المنحنى (C)

لتكن g الدالة المعرفة على IR^* بـ $g(x) = \ln|e^{x/2} - e^x|$

نسمي (γ) منحنى الدالة g في المعلم $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

3 ـ أدرس تغيرات الدالة g

4 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) - x = \ln(1 - e^{-x/2})$

5 ـ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (γ) عند $+\infty$

6 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي سالب تماما x : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 - e^{x/2})$

7 ـ بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x/2$ مقارب للمنحنى (γ) عند $-\infty$

8 ـ أدرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) على المجال $]0 ; +\infty[$

9 ـ أدرس وضعية (T) بالنسبة إلى (γ) على المجال $]-\infty ; 0[$

10 ـ أنشئ المنحنى (γ)

<u>الحل ــ 8</u>

1 ـ تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x/2} - e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x/2}(1 - e^{x/2}) = -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2} - e^x = e^{x/2}\left(\frac{1}{2} - e^{x/2}\right)$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\frac{1}{2} - e^{x/2}$ كما يلي :

$$\frac{1}{2} - e^{x/2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq e^{x/2}$$
$$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} \geq x/2$$
$$\Leftrightarrow -\ln 2 \geq x/2$$
$$\Leftrightarrow x \leq -2\ln 2$$
$$\Leftrightarrow x \leq \ln\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		$+\infty$
$\frac{1}{2} - e^{x/2}$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

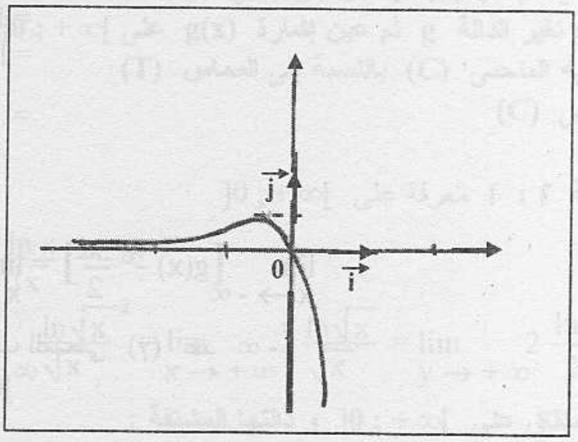
x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-			
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↘	$-\infty$

$$f\left(\ln\frac{1}{4}\right) = \sqrt{e^{\ln\frac{1}{4}} - e^{\ln\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج إشارة $f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	

2 ـ الإنشاء :



3 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR^*

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln|f(x)| = \lim_{y \to 0} \ln|y| = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \ln|f(x)| = \lim_{y \to 0} \ln|y| = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln|f(x)| = \lim_{y \to -\infty} \ln|y| = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على IR^* و دالتها المشتقة : $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ لأن $g(x) = \ln|f(x)|$

منه : إشارة $g'(x)$ على R^* هي إشارة $f'(x) \times f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	
$f(x)$			+		‖	-	
$f'(x) \times f(x)$		+	0	-	‖	+	

منه جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g\left(\ln \frac{1}{4}\right) = \ln\left| f\left(\ln \frac{1}{4}\right)\right| = \ln \frac{1}{4}$$

4 ـ ليكن $x > 0$ إذن : $f(x) < 0$ أي $e^{x/2} - e^x < 0$ منه $|e^{x/2} - e^x| = e^x - e^{x/2}$

إذن :
$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(e^x - e^{x/2}) \\ &= \ln[e^x(1 - e^{-x/2})] \\ &= \ln e^x + \ln(1 - e^{-x/2}) \\ &= x + \ln(1 - e^{-x/2}) \end{aligned}$$

منه : $g(x) - x = \ln(1 - e^{-x/2})$

5 ـ لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x/2}) = \ln 1 = 0$

إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (γ) عند $+\infty$

6 ـ ليكن $x < 0$ إذن : $f(x) > 0$ أي $e^{x/2} - e^x > 0$ أي $|e^{x/2} - e^x| = e^{x/2} - e^x$

منه :
$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(e^{x/2} - e^x) \\ &= \ln[(e^{x/2}(1 - e^{x/2})] \\ &= \ln e^{x/2} + \ln(1 - e^{x/2}) \\ &= \frac{x}{2} + \ln(1 - e^{x/2}) \end{aligned}$$

إذن : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 - e^{x/2})$

7 ـ لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[g(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - e^{x/2}) = \ln 1 = 0$

إذن : المستقيم (T) ذو المعادلة $y = x/2$ مقارب للمنحنى (γ) عند $-\infty$

8 ـ وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) على $]0 ; +\infty[$

$x > 0$ إذن : $g(x) - x = \ln(1 - e^{-x/2})$

لندرس إشارة $\ln(1 - e^{-x/2})$ كمايلي :

$$\ln(1 - e^{-x/2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x/2} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow - e^{-x/2} \geq 0 \quad \text{مستحيل لأن} \quad - e^{-x/2} < 0$$

منه : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $\ln(1 - e^{-x/2}) < 0$

إذن : المنحنى (γ) تحت المستقيم (D)

9 ـ وضعية (γ) بالنسبة إلى (T) على المجال $]-\infty ; 0[$:

$x < 0$ إذن : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 - e^{x/2})$

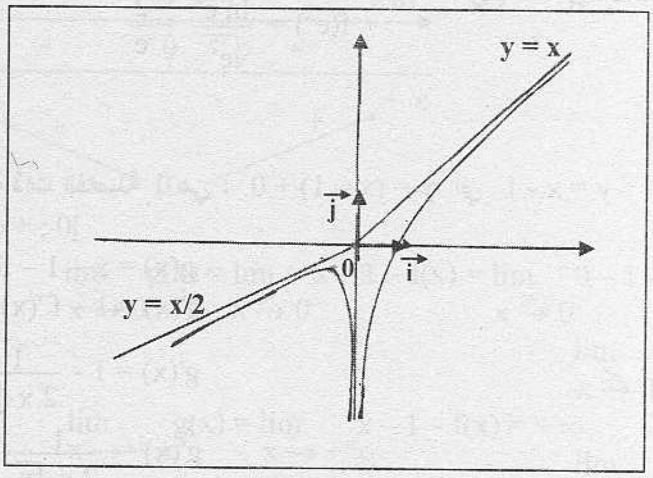
لندرس إشارة $\ln(1 - e^{x/2})$ كمايلي :

$$\ln(1 - e^{x/2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{x/2} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow - e^{x/2} \geq 0 \quad \text{مستحيل لأن} \quad - e^{x/2} < 0$$

منه : من أجل كل x من $]-\infty ; 0[$: $\ln(1 - e^{x/2}) < 0$

إذن : المنحنى (γ) تحت المستقيم (T)

10 ــ الإنشاء :



التمرين ــ 9

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f

2 ــ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1

لتكن g الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = x - 1 - f(x)$

3 ــ تحقق أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $g'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)\right]$

4 ــ أحسب $g'(1)$ ثم أدرس إشارة $g'(x)$ على كل من المجالين $]0 ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$

5 ــ إستنتج إتجاه تغير الدالة g ثم عين إشارة $g(x)$ على $]0 ; +\infty[$

6 ــ ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T)

7 ــ أنشئ المنحنى (C)

الحـل ــ 9

1 ــ تغيرات الدالة f : f معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}^{\,2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{y \to +\infty} 2\frac{\ln y}{y} = 0$$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2 - \ln x)$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $2 - \ln x$ لأن $2x\sqrt{x} > 0$

منه : $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \ln x$

$\Leftrightarrow e^2 \geq x$

x	0		e^2		$+\infty$
$2 - \ln x$	‖	+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

$$f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$$

2 ـ $\left.\begin{array}{r} f(1) = 0 \\ f'(1) = \frac{1}{2}(2-0) = 1 \end{array}\right\}$

منه : معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي : $y = (x-1) + 0$ أي $y = x - 1$

3 ـ ليكن x عنصر من المجال $]0\,;+\infty[$

لدينا : $g(x) = x - 1 - f(x)$

إذن: $g'(x) = 1 - f'(x)$

أي : $g'(x) = 1 - \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2 - \ln x)$

أي : $g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}[2x\sqrt{x} - (2 - \ln x)]$

أي $g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2x\sqrt{x} - 2 + \ln x)$

أي : $g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}[\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)]$ و هو المطلوب .

4 ـ $g'(1) = \frac{1}{2}[0 + 2(1-1)] = \frac{1}{2}(0) = 0$

لندرس إشارة كل من $\ln x$ ثم $x\sqrt{x} - 1$ على المجالين $]0\,;1[$ ؛ $]1\,;+\infty[$

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow x\sqrt{x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x^{3/2} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}\ln x} \geq e^0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}\ln x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \end{aligned}$$

منه جدول إشارة $x\sqrt{x} - 1$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$x\sqrt{x} - 1$	‖	$-$	0	$+$	

من جهة أخرى لدينا إشارة $\ln x$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

نتيجة : $(x\sqrt{x} - 1)$ و $(\ln x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0\,;+\infty[$

إذن $2(x\sqrt{x} - 1)$ و $\ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0\,;+\infty[$

منه : المجموع $\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)$ له نفس إشارة $\ln x$ و $(x\sqrt{x} - 1)$ كمايلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)$	‖	$-$	0	$+$	

خلاصة : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)$ لأن $\frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

5 ـ منه جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x - 1 - f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 0 - 1 - f(x) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 - f(x) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$g(1) = 1 - 1 - f(1) = 0$$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

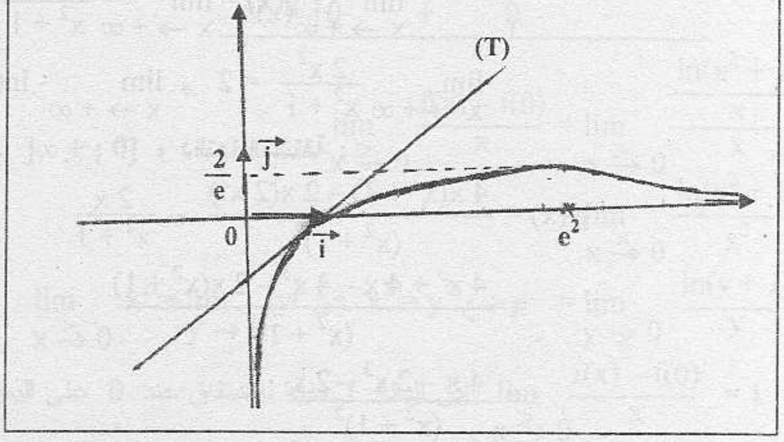
6 ـ وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) :

$$x - 1 - f(x) = g(x)$$

إذن : لما $x = 1$: $g(x) = 0$ إذن : المنحنى (C) يقطع المماس (T)

لما $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$: $g(x) > 0$ إذن : المماس (T) يقع فوق المنحنى (C)

7 ـ الإنشاء :



التمرين ــ 10

g دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـــ $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$

1 ــ بين أن على المجال $]1\,;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α يطلب إعطاء حصر له ذو سعة 10^{-1}

2 ــ حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$

لتكن f الدالة المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بـــ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$

3 ــ ماهي نهاية النسبة $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ لما x يؤول إلى 0 بقيم كبرى ؟

4 ــ إستنتج أن f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين ثم أوجد معادلة لنصف المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

5 ــ تحقق أن : من أجل كل $x>0$: $f(x)=2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

6 ــ إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

7 ــ بين أن من أجل كل $x>0$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

8 ــ إستنتج تغيرات الدالة f

9 ــ أنشئ المنحنى (C) و المماس (T) .

الحـل ــ 10

1 ــ لإثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α على المجال $]1\,;+\infty[$

نقوم بدراسة تغيرات الدالة g على المجال $]1\,;+\infty[$ كمايلي :

g معرفة على IR و خاصة على $]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(x^2+1)=-\infty$

g قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x)=\frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2)}{(x^2+1)^2}-\frac{2x}{x^2+1}$$

$$=\frac{4x^3+4x-4x^3-2x(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{4x-2x^3-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x-2x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

منه : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x(1-x^2)$ لأن $\dfrac{2}{(x^2+1)^2}>0$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
x	0		$+$		
$1-x^2$		$+$	0	$-$	
$x(1-x^2)$	0	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$g(0) = 0 - \ln 1 = 0$$

$$g(1) = \frac{2}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

حسب جدول تغيرات الدالة g فإن :

g مستمرة على المجال $]1 ; +\infty[$

g متناقصة تماما على $]1 ; +\infty[$

g تأخذ قيم موجبة تماما ثم قيم سالبة تماما على المجال $]1 ; +\infty[$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1 ; +\infty[$

حصر α : لنحسب $g(2)$: $g(2) = \frac{8}{5} - \ln 5 = -0{,}009$

$g(1{,}9)$: $g(1{,}9) = \frac{7{,}22}{4{,}61} - \ln(4{,}61) = 0{,}03$

إذن : $g(1{,}9) \times g(2) < 0$ منه : $1{,}9 < \alpha < 2$

2 – من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كمايلي :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

3 –
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

بوضع $x^2 = y$ إذن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 = \lim_{y \to 0} y$ ،

4 – حسب السؤال السابق $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين و عددها المشتق هو 1

منه المنحنى (C) يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات الفاصلة 0 و معادلته : $y = 1(x-0) + f(0)$

أي : $y = x$

5 – ليكن $x > 0$ إذن :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x} = \frac{\ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$ و هو المطلوب

6 –
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

7 ـ f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \times x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

8 ـ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $g(x)$ لأن $x^2 > 0$ كمايلي :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ كمايلي :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$	↘	0

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$$

ملاحظة : العدد α هو حل للمعادلة $g(x) = 0$ إذن : $g(\alpha) = 0$

أي : $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} - \ln(\alpha^2+1) = 0$ منه : $\ln(\alpha^2+1) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$

إذن : $f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha} = \frac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha^2+1)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

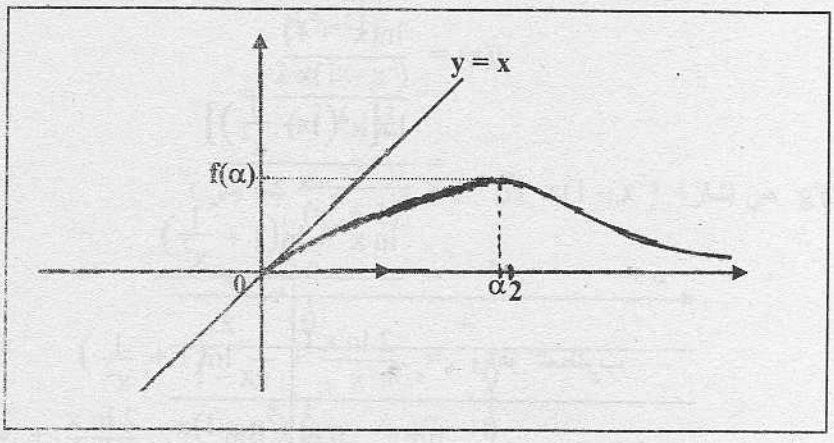
و عليه يمكن حصر $f(\alpha)$ كمايلي :

$1{,}9 < \alpha < 2$ إذن : $\left.\begin{array}{l} 3{,}8 < 2\alpha < 4 \\ 3{,}61 < \alpha^2 < 4 \end{array}\right\}$ منه : $\left.\begin{array}{l} 3{,}8 < 2\alpha < 4 \\ 4{,}61 < \alpha^2 + 1 < 5 \end{array}\right\}$

منه : $\left.\begin{array}{l} 3{,}8 < 2\alpha < 4 \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{\alpha^2+1} < \frac{1}{4{,}61} \end{array}\right\}$ منه : $\frac{3{,}8}{5} < \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} < \frac{4}{4{,}61}$

أي : $0{,}76 < f(\alpha) < 0{,}86$

الإنشاء :



التمرين – 11

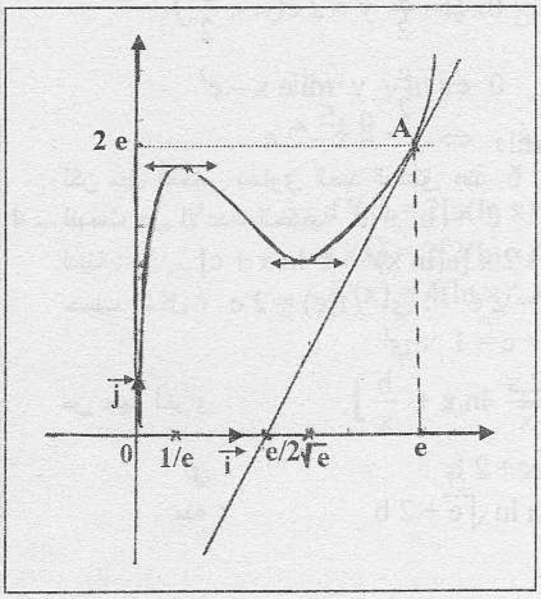
1 – بين أن من أجل كل $x > 0$: $e^{2x} - 1 > 0$

لتكن g الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{1}{e^{2x} - 1}$

2 – أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0 ; +\infty[$

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة f معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

على الرسم أيضا مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة e و يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $e/2$. نقبل أن : $f(x) = 2x[a(\ln x)^2 + b \ln x + c]$ حيث a ؛ b ؛ c أعداد حقيقية .



3 – باستعمال الشكل عين $f'(1/e)$ ؛ $f'(\sqrt{e})$ و $f'(e)$

4 – إستنتج أن : $f(x) = 2x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$

5 – عين نهاية f عند 0

6 – عين نهاية f عند $+\infty$

7 – بين أن من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$

8 – أدرس إشارة $f'(x)$ ثم إستنتج جدول تغيرات الدالة f

لتكن ϕ الدالة المعرفة على $[0,1 ; 0,3]$ بـ $\phi(x) = f(x) - g(x)$

9 – بين أن : من أجل كل x من المجال $[0,1 ; 0,3]$: $\phi'(x) > 0$

10 – بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا واحدا α

على المجال $[0,1 ; 0,3]$

11 – بين أن من أجل كل $x > 0$: $f(x) > 0$

نعتبر الدالة h المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $h(x) = g \circ f(x)$

12 – عين نهايات الدالة h عند 0 و $+\infty$

13 – أدرس إتجاه تغير الدالة h على المجال $]0 ; +\infty[$

14 – بين أن : $h(\alpha) = g \circ g(\alpha)$

الحل – 11

1 – ليكن $x > 0$ إذن : $2x > 0$ منه : $e^{2x} > e^0$ أي $e^{2x} > 1$ أي $e^{2x} - 1 > 0$

2 – تغيرات الدالة g على $]0 ; +\infty[$: g معرفة على IR^* و خاصة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{e^{2x} - 1} = \lim_{y \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$

لأن : $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} e^{2x} - 1 = \lim_{y \xrightarrow{>} 0} y$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x} - 1} = 0$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{0 - 2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{-2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

منه : $g'(x) < 0$ من أجل كل $x > 0$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

3 – حسب الشكل فإن النقط ذات الفواصل $1/e$ و $\sqrt{e}$ هي ذروات للمنحنى (C)

منه : $f'(1/e) = 0$ و $f'(\sqrt{e}) = 0$

حسب الشكل دائما مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e يمر من النقطتين $A(e ; 2e)$ و $B(e/2 ; 0)$

إذن يمكن البحث عن معادلته كمايلي : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} e - \frac{e}{2} \\ 2e - 0 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} e/2 \\ 2e \end{pmatrix}$

لتكن $M(x ; y)$ نقطة من المستوي إذن : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - \frac{e}{2} \\ y \end{pmatrix}$

إذن : تكون M نقطة من المماس إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BA}$ أي :

$$\begin{vmatrix} x - \frac{e}{2} & \frac{e}{2} \\ y & 2e \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{2}\ y = 2e\left(x - \frac{e}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{2}\ y = 2ex - e^2$$

$\Leftrightarrow y = 4x - 2e$ و هي معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة e

لكن ميل المماس يساوي العدد المشتق عند e إذن : $f'(e) = 4$

4 ـ لنبحث عن الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c

لدينا : $f(x) = 2x[a(\ln x)^2 + b\ln x + c]$

حسب الشكل : $f(e) = 2e$ أي : $2e[a(\ln e)^2 + b\ln e + c] = 2e$

أي : $a + b + c = 1$ .... (1)

من جهة أخرى : $f'(x) = 2[a(\ln x)^2 + b\ln x + c] + 2x\left[\frac{2a}{x}\ln x + \frac{b}{x}\right]$

أي : $f'(x) = 2[a(\ln x)^2 + b\ln x + c] + 4a\ln x + 2b$

منه : $f'(\sqrt{e}) = 2[a(\ln\sqrt{e})^2 + b\ln\sqrt{e} + c] + 4a\ln\sqrt{e} + 2b$

$$= 2\left[\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right] + \frac{4a}{2} + 2b$$

$$= \frac{a}{2} + b + 2c + 2a + 2b$$

$$= \frac{5}{2}a + 3b + 2c \text{ .... } (2)$$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 2\left[a\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 + b\ln\frac{1}{e} + c\right] + 4a\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 2b$$

$$= 2[a - b + c] - 4a + 2b$$

$$= -2a + 2c \text{ .... } (3)$$

لكن $\begin{cases} f'(\sqrt{e}) = 0 \\ f'(1/e) = 0 \end{cases}$ إذن :

العلاقة (3) تصبح : $2c = 2a$ أي $c = a$ إذن : العلاقتين (1) و (2) تصبح :

$\begin{cases} a + b + a = 1 \\ \frac{5}{2}a + 3b + 2a = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ \frac{9}{2}a + 3b = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 9a + 6b = 0 \end{cases}$

منه $\begin{cases} 12a + 6b = 6 \\ 9a + 6b = 0 \end{cases}$ منه $\begin{cases} 3a = 6 \\ b = \frac{-9a}{6} \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{-18}{6} = -3 \end{cases}$

نتيجة : $a = 2$ ؛ $b = -3$ ؛ $c = 2$

منه : $f(x) = 2x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ و هو المطلوب

5 ـ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 4x(\ln x)^2 - 6x\ln x + 4x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 4x = 0\end{array}\right\}$$ لأن $= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 4x(\ln x)^2$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 4(\sqrt{x})^2(\ln\sqrt{x}^2)^2$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 4(\sqrt{x})^2(2\ln\sqrt{x})^2$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 16(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$$

بوضع $y = \sqrt{x}$ $= \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ >}} 16(y\ln y)^2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} y\ln y = 0$ لأن $= 0$

6 — $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x\ln x\left[2\ln x - 3 + \frac{2}{\ln x}\right] = +\infty$$

7 — من أجل كل $x > 0$ لدينا : $f'(x) = 2[a(\ln x)^2 + b\ln x + c] + 4a\ln x + 2b$

أي : $f'(x) = 2[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] + 8\ln x - 6$

أي : $f'(x) = 4(\ln x)^2 + 2\ln x - 2$

لنحلل كثير الحدود $4t^2 + 2t - 2$ كما يلي :

$\Delta = 4 + 32 = 36$ إذن : $$\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-2-6}{8} = -1 \\ t_2 = \dfrac{-2+6}{8} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

منه : $4t^2 + 2t - 2 = 4(t+1)(t - \frac{1}{2})$

$= 2(t+1)(2t-1)$

إذن : بوضع $t = \ln x$ نحصل على : $4(\ln x)^2 + 2\ln x - 2 = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$

أي : $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$ و هو المطلوب

8 — إشارة $f'(x)$:

$\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1$
$\Leftrightarrow x \geq e^{-1}$
$\Leftrightarrow x \geq 1/e$

$2\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1/2$
$\Leftrightarrow x \geq e^{1/2}$
$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$

منه جدول الإشارة التالي :

x	0		$1/e$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$			
$2\ln x - 1$				$-$	0	$+$	
$f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0 ; +\infty[$

x	0		$1/e$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$14/e$	$\searrow$	$2\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}(2 + 3 + 2) = \frac{14}{e} \approx 5{,}15$$

$$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2\right] = 2\sqrt{e} \approx 3{,}29$$

9 ـ من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g'(x) < 0$ من أجل كل $x > 0$ و خاصة من أجل $x \in [0,1 ; 0,3]$
إذن $-g'(x) > 0$ من أجل $x \in [0,1 ; 0,3]$
من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن $f'(x) > 0$ من أجل كل $0 < x < 1/e$ و خاصة من أجل $x \in [0,1 ; 0,3]$
لأن $0,3 < 1/e$ حيث $1/e = 0,36$
إذن : من أجل كل $x \in [0,1 ; 0,3]$: $f'(x) > 0$

نتيجة : من أجل كل x من $[0,1 ; 0,3]$: $\left.\begin{matrix} -g'(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{matrix}\right\}$

إذن : من أجل كل x من $[0,1 ; 0,3]$: $f'(x) - g'(x) > 0$ أي $\phi'(x) > 0$
إذن : ϕ متزايدة تماما على $[0,1 ; 0,3]$

10 ـ $\phi(0,1) = f(0,1) - g(0,1) = 3,9 - 4,51 = -0,61$
$\phi(0,3) = f(0,3) - g(0,3) = 5,10 - 1,21 = 3,89$

نتيجة : $\left\{\begin{matrix} \phi \text{ مستمرة على } [0,1 ; 0,3] \\ \phi(0,1) \times \phi(0,3) < 0 \\ \phi \text{ متزايدة تماما على } [0,1 ; 0,3] \end{matrix}\right.$

إذن : المعادلة $\phi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,1 ; 0,3[$
لكن : $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$
إذن : المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0,1 ; 0,3[$

11 ـ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج ما يلي :
لما $x \in]0 ; 1/e]$ فإن $f(x) \in]0 ; 14/e]$
لما $x \in [1/e ; \sqrt{e}]$ فإن $f(x) \in [2\sqrt{e} ; 14/e]$
لما $x \in [\sqrt{e} ; +\infty[$ فإن $f(x) \in [2\sqrt{e} ; +\infty[$

نتيجة : من أجل كل $x > 0$: $f(x) > 0$ و هو المطلوب .

12 ـ لدينا : $h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)]$
منه :
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} g[f(x)]$$
$$= \lim_{f(x) \overset{>}{\to} 0} g[f(x)] \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad f(x) > 0$$
$$= \lim_{y \overset{>}{\to} 0} g(y) \quad \text{بوضع} \quad y = f(x)$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} g[f(x)]$$
$$= \lim_{f(x) \to +\infty} g[f(x)] \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$= \lim_{y \to +\infty} g(y) \quad \text{بوضع} \quad y = f(x)$$
$$= 0$$

13 ـ لدينا : $h'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$
لكن من أجل $x > 0$ فإن $f(x) > 0$ منه : $g'[f(x)] < 0$ (لأن $g'(x) < 0$ من أجل $x > 0$)
إذن : إشارة $h'(x)$ هي إشارة $[-f'(x)]$ كما يلي :

x	0		$1/e$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	0	+	
$-f'(x)$	‖	-	0	+	0	-	

منه : جدول تغيرات الدالة h على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

x	0		$1/e$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(1/e)$	$\nearrow$	$h(\sqrt{e})$	$\searrow$	0

14 ـ لدينا : $h(\alpha) = g[f(\alpha)]$

لكن : $f(\alpha) - g(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = g(\alpha)$ (لأن α هو حل للمعادلة $\phi(x) = 0$)

منه : $h(\alpha) = g[g(\alpha)]$

أي : $h(\alpha) = g \circ g(\alpha)$ و هو المطلوب .

التمرين ـ 12

1 ـ أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = -1 + x + 2\ln x$

2 ـ أحسب $g(1)$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$

3 ـ إستنتج أن إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(1/x) > 0$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g(1/x) < 0$

لتكن f الدالة المعرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \begin{cases} x - x^2 \ln x : x > 0 \\ 0 \quad\quad\quad : x = 0 \end{cases}$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

4 ـ تحقق أن : من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = x\, g(1/x)$

5 ـ أدرس تغيرات الدالة f

6 ـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $7/4 < \alpha < 2$

7 ـ تحقق أن المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 له المعادلة $y = x$

8 ـ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

9 ـ أرسم كل من (Δ) و (C)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 \in]0 ; 1[$ و من أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = f(u_n)$

10 ـ بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

11 ـ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

12 ـ إستنتج أن (u_n) متقاربة ثم إستنتج نهايتها .

الحـل ـ 12

1 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} -1 + x + 2\ln x = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{-1}{x} + 1 + 2\,\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

إذن : من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$ لأن $\left.\begin{matrix} 1 > 0 \\ \dfrac{2}{x} > 0 \end{matrix}\right\}$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 ـــ $g(1) = -1 + 1 + 2\ln 1 = 0$

بملاحظة جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3 ـــ إذا كان $0 < x < 1$ فإن $\frac{1}{x} > 1$ و حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن $g(\frac{1}{x}) > 0$ لأن $\frac{1}{x} > 1$

إذا كان $x > 1$ فإن $0 < \frac{1}{x} < 1$ و حسب جدول إشارة $g(x)$ فإن $g(\frac{1}{x}) < 0$ لأن $0 < \frac{1}{x} < 1$

4 ـــ من أجل $x > 0$ فإن : $f(x) = x - x^2 \ln x$

إذن : $f'(x) = 1 - \left[2x\ln x + \frac{x^2}{x}\right]$

أي : $f'(x) = 1 - 2x\ln x - x$

أي : $f'(x) = x\left(\frac{1}{x} - 2\ln x - 1\right)$

أي : $f'(x) = x\left[-1 + \frac{1}{x} + 2\ln(1/x)\right]$ لأن $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

أي : $f'(x) = x\,g(1/x)$ و هو المطلوب .

5 ـــ **تغيرات الدالة f :** f معرفة على $[0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x - x(x\ln x) = 0$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $f'(x) = x\,g(1/x)$ حسب السؤال السابق .

و منه إشارة $f'(x)$ هي كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
x			$+$		
$g(1/x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x) = x\,g(1/x)$		$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

6 ـــ $f(1) = 1 - 1\ln 1 = 1$

$f(2) = 2 - 4\ln 2 = -0,77$

$f(7/4) = f(1,75) = 1,75 - 3,06\ln 1,75 = 0,03$

نتيجة : f مستمرة على $[7/4 ; 2]$
f متناقصة تماما على $[7/4 ; 2]$
$f(2) \times f(7/4) < 0$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $7/4 < \alpha < 2$

7 ـــ لنبحث عن العدد المشتق للدالة f عند 0 على اليمين كمايلي :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x - x^2\ln x - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 1 - x \ln x$$

$$= 1 \text{ لأن } \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$$

إذن : f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين و عددها المشتق هو 1

منه : **نصف المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 على اليمين معادلته :**

$y = 1(x-0) + f(0)$ أي : $y = x$ و هي معادلة (Δ) المطلوبة .

8 ــ وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) : $f(x) - x = x - x^2 \ln x - x = -x^2 \ln x$

الإشارة :

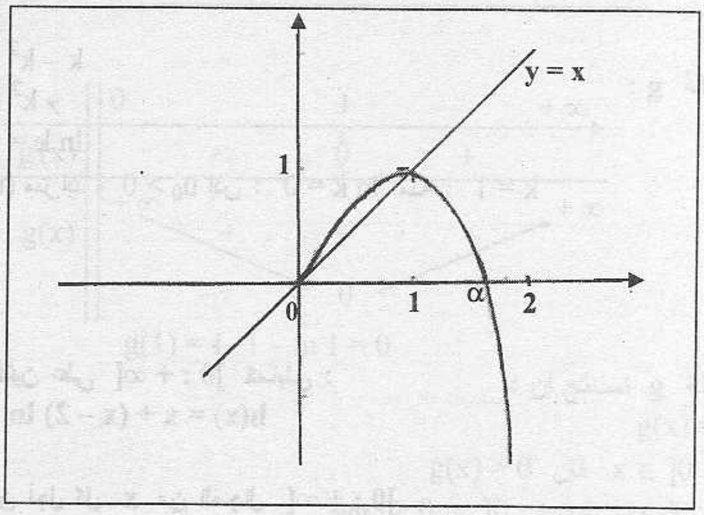
x	0		1		$+\infty$
$-x^2$		-		-	
$\ln x$		-	0	+	
$-x^2 \ln x$		+	0	-	

نتيجة : لما $0 < x < 1$: المنحنى (C) فوق المماس (Δ)

لما $x = 1$: المنحنى (C) يقطع المماس (Δ)

لما $x > 1$: المنحنى (C) تحت المماس (Δ)

9 ــ الإنشاء :



لاحظ أن النقطة ذات الفاصلة $e^{-3/2}$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى $(e^{-3/2} \approx 0,21)$

الإثبات : $f'(x) = 1 - 2x \ln x - x$

$$f''(x) = -2 \ln x - \frac{2x}{x} - 1 = -2 \ln x - 3$$

منه : $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \ln x - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x \leq -3/2$

$\Leftrightarrow x \leq e^{-3/2}$

منه جدول إشارة $f''(x)$:

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	

إذن : f'' تنعدم عند $e^{-3/2}$ و تغير إشارتها .

منه : النقطة ذات الإحداثيات $(e^{-3/2} ; f(e^{-3/2}))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C)

10 ــ البرهان بالتراجع أن : من أجل كل n : $0 < u_n < 1$

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 < u_0 < 1$ إذن الخاصية محققة .

من أجل $n = 1$ لدينا : $0 < u_0 < 1$ إذن $0 < f(u_0) < 1$ أي $0 < u_1 < 1$ (حسب جدول تغيرات الدال f)

منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $0 < u_n < 1$ من أجل $n > 1$

هل $0 < u_{n+1} < 1$ ؟

لدينا : $0 < u_n < 1$ إذن : $0 < f(u_n) < 1$ أي $0 < u_{n+1} < 1$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من IN فإن $0 < u_n < 1$

ملاحظة : استعملنا الخاصية التالية : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $0 < f(x) < 1$ و هذا حسب جدول تغيرات الدالة f

11 ــ حسب السؤال (8) لدينا من أجل $0 < x < 1$ فإن $f(x) - x > 0$

أي من أجل $0 < x < 1$ فإن $f(x) > x$

لكن $0 < u_n < 1$ إذن : $f(u_n) > u_n$ أي $u_{n+1} > u_n$

منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

12 ــ لدينا : (u_n) محدودة من الأعلى بـ 1 لأن $u_n < 1$

(u_n) متزايدة تماما .

إذن : (u_n) متقاربة .

البحث عن النهاية :

لتكن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = k$ حيث $0 < k \leq 1$

إذن : لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = u_n = k$

أي : $f(k) = k$

منه : $k - k^2 \ln k = k$

أي : $-k^2 \ln k = 0$

أي : $k = 0$ أو $\ln k = 0$

لكن $k \neq 0$ لأن (u_n) متزايد و $u_0 > 0$ إذن : $\ln k = 0$ منه : $k = 1$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

<u>التمرين ــ 13</u>

<u>الجزء I</u>

لتكن g و h الدالتين المعرفتين على $]0 ; +\infty[$ كمايلي :

$$h(x) = x + (x-2)\ln x \quad ; \quad g(x) = x - 1 - \ln x$$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة g

2 ــ إستنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$

3 ــ بين أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$

4 ــ بين أن من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $(x-1)\ln x \geq 0$

5 ــ إستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$

<u>الجزء II</u>

لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ــ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2 ــ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3 ــ بين أن من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$

4 ــ إستنتج جدول تغيرات الدالة f

5 ــ عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة 1

6 ــ تحقق أن من أجل كل $x > 0$: $f(x) - x = (\ln x - 1)\, g(x)$

7 ــ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المماس (Δ)

8 ــ أنشئ (C) علما أن (C) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و 1,5

الجزء III

(u_n) متتالية معرفة كمايلي : $u_0 = \sqrt{e}$ و من أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = f(u_n)$

1 ـ برهن بالتراجع أن من أجل كل $n \in IN$: $1 < u_n < e$

2 ـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

3 ـ إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .

الحـل ـ 13

1 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على $]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x - 1 - \ln x = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

g قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ على $]0 ; +\infty[$ هي إشارة $(x-1)$ لأن $x > 0$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$

2 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن :

لما $x = 1$ فإن $g(x) = 0$

لما $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$

نتيجة : من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$: $g(x) \geq 0$

3 ـ من أجل كل $x \in]0 ; +\infty[$ فإن : $h(x) = x + (x-2)\ln x$

$= x + x\ln x - 2\ln x$

$= x + x\ln x - \ln x - \ln x$

$= x - \ln x + (x-1)\ln x$

$= 1 - 1 + x - \ln x + (x-1)\ln x$

$= 1 + g(x) + (x-1)\ln x$ و هو المطلوب .

4 ـ لندرس إشارة $(x-1)\ln x$ على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	

نتيجة : من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن $(x-1)\ln x \geq 0$

5 ـ لاحظ أن إشارة $g(x)$ هي نفسها إشارة $(x-1)\ln x$ إذن في هذه الحالة فقط يمكن إستنتاج إشارة المجموع

كما يلي : $g(x) + (x-1)\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	
$g(x)+(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	

حذار ! هذه الحالة خاصة جدا لأن العددين من نفس الإشارة

نتيجة : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $g(x) + (x-1)\ln x \geq 0$

إذن : $1 + g(x) + (x-1)\ln x \geq 1$

و خاصة : $1 + g(x) + (x-1)\ln x > 0$ أي $h(x) > 0$

الجزء II

1 — $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 1 + x\ln x - (\ln x)^2 = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى (C) على اليمين $(x > 0)$

2 — $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

$$= \lim_{x \to +\infty} (\ln x)^2 \left[\frac{1}{(\ln x)^2} + \frac{x}{\ln x} - 1\right] = +\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(\ln x)^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty \end{array}\right\}$

3 — من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = \ln x + \dfrac{x}{x} - \dfrac{2}{x}\ln x$

أي : $f'(x) = \dfrac{x\ln x + x - 2\ln x}{x}$

أي : $f'(x) = \dfrac{x + (x-2)\ln x}{x}$

أي : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ و هو المطلوب

4 — من السؤال (3) لدينا : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ إذن : $f'(x) > 0$ لأن $\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ h(x) > 0 \end{array}\right\}$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$					
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$\begin{cases} f(e) = 1 + e - 1 = e \\ f(1) = 1 \end{cases}$ توضع في جدول التغيرات .

5 — لدينا : $\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f'(1) = \dfrac{h(1)}{1} = 1 \end{array}\right\}$

منه : معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي : $y = 1(x-1) + 1$ أي : $y = x$

6 — ليكن $x > 0$:

$$\begin{aligned} g(x)(\ln x - 1) &= (x - 1 - \ln x)(\ln x - 1) \\ &= x\ln x - x - \ln x + 1 - (\ln x)^2 + \ln x \\ &= 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x \\ &= f(x) - x \end{aligned}$$

و هو المطلوب

7 ـ لدينا : $f(x) - x = g(x)(\ln x - 1)$ إذن : إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $g(x)(\ln x - 1)$ كما يلي :

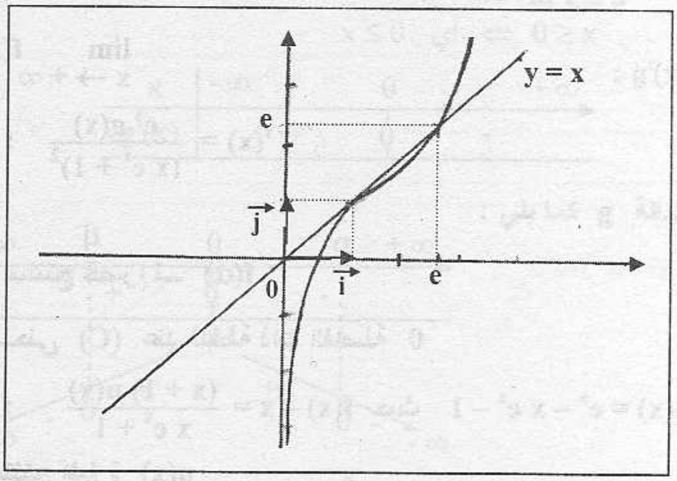
x	0		1		e		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0		$+$		
$\ln x - 1$				$-$	0	$+$	
$g(x)(\ln x - 1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

نتيجة : لما $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; e[$: المنحنى (C) تحت المماس (Δ)

لما $x \in \{1 ; e\}$: المنحنى (C) يقطع المماس (Δ)

لما $x \in]e ; +\infty[$: المنحنى (C) فوق المماس (Δ)

8 ـ الإنشاء :



الجزء III

1 ـ لتكن الخاصية : من أجل كل $n \in IN$: $1 < u_n < e$

من أجل $n = 0$: $u_0 = \sqrt{e}$ لكن $1 < \sqrt{e} < e$ إذن الخاصية محققة .

من أجل $n = 1$: $u_1 = f(u_0)$ أي $u_1 = f(\sqrt{e})$ إذن : $1 < u_1 < e$

لأن حسب جدول تغيرات الدالة f فإن من أجل كل $1 < x < e$ فإن $1 < f(x) < e$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $1 < u_n < e$ من أجل $n > 1$

هل $1 < u_{n+1} < e$ ؟

لدينا $1 < u_n < e$ إذن : $1 < f(u_n) < e$ أي $1 < u_{n+1} < e$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل $n \in IN$: $1 < u_n < e$

2 ـ من أجل كل $n \in IN$ لدينا : $1 < u_n < e$ إذن : $f(u_n) - u_n < 0$

لأن حسب جدول إشارة $f(x) - x$ فإن من أجل $1 < x < e$: $f(x) - x < 0$

أي : من أجل كل $n \in IN$: $f(u_n) < u_n$ أي $u_{n+1} < u_n$

منه : المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3 ـ لدينا : u_n متناقصة .
u_n محدودة من الأسفل بـ 1

إذن : (u_n) متتالية متقاربة .

لتكن $\lim_{n \to +\infty} u_n = k$

إذن : عندما يؤول n إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = u_n = k$ أي $f(k) = k$ أي $f(k) - k = 0$

منه : $k = 1$ أو $k = e$

بما أن المتتالية متناقصة و $u_0 = \sqrt{e}$ فإن $k < \sqrt{e}$

نتيجة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

التمرين ـــ 14

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x\,e^x + 1}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

الجزء I

لتكن h الدالة المعرفة على IR بـ $h(x) = x\,e^x + 1$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة h ثم إستنتج أن : من أجل كل $x \in IR$: $h(x) > 0$

2 ـــ أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على IR بـ $g(x) = x + 2 - e^x$

3 ـــ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان على IR نرمز لهما بـ α و β حيث $\alpha > \beta$

4 ـــ بين أن $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$

5 ـــ إستنتج إشارة $g(x)$

الجزء II

1 ـــ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2 ـــ بين أن من أجل كل $x \in IR$: $f'(x) = \dfrac{e^x\,g(x)}{(x\,e^x + 1)^2}$

3 ـــ إستنتج جدول تغيرات الدالة f

4 ـــ بين أن $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

5 ـــ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

6 ـــ بين أن من أجل كل $x \in IR$: $f(x) - x = \dfrac{(x+1)\,u(x)}{x\,e^x + 1}$ حيث $u(x) = e^x - x\,e^x - 1$

7 ـــ أدرس تغيرات الدالة u ثم إستنتج إشارة $u(x)$

8 ـــ أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (T)

9 ـــ أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن $-1{,}85 < \beta < -1{,}84$ و $-1{,}19 < f(\beta) < -1{,}18$)

الحـــل ـــ 14

1 ـــ تغيرات الدالة h : h معرفة على IR

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x + 1 = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^x + 1 = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^x = +\infty$

h قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$h'(x) = e^x + x\,e^x = e^x(1 + x)$

منه : إشارة $h'(x)$ هي إشارة $(1 + x)$ لأن $e^x > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$1 + x$		$-$	0	$+$	

منه : جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	↘	$\dfrac{e-1}{e}$	↗	$+\infty$

$h(-1) = -e^{-1} + 1 = 1 - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e - 1}{e} > 0$

من جدول تغيرات الدالة h نستنتج أن من أجل كل $x \in IR$ فإن $h(x) \in \left[\dfrac{e-1}{e} ; +\infty\right[$

أي : $h(x) \geq \frac{e-1}{e}$ و خاصة : $h(x) > 0$

2 ـ تغيرات الدالة g : g معرفة على IR

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + 2 - e^x = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{x} = -\infty\end{array}\right\}$

g قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة : $g'(x) = 1 - e^x$

إذن : $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^x \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 \geq e^x$

$\Leftrightarrow \ln 1 \geq x$

$\Leftrightarrow 0 \geq x$ أي $x \leq 0$

منه جدول إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
g'(x)		+		+	0	-		-	
g(x)	$-\infty$	↗ -	0	↗ +	1	↘ +	0	↘ -	$-\infty$

$g(0) = 0 + 2 - e^0 = 1$

3 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تنعدم مرتين

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما موجب و الأخر سالب .

4 ـ $g(1,14) = 1,14 + 2 - e^{1,14} = 3,14 - e^{1,14} = 0,01$

$g(1,15) = 1,15 + 2 - e^{1,15} = 3,15 - e^{1,15} = -0,008$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l}\text{g مستمرة على } [1,14 \,;\, 1,15] \\ \text{g متناقصة تماما على } [1,14 \,;\, 1,15] \\ g(1,14) \times g(1,15) < 0\end{array}\right.$

إذن : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين 1,14 و 1,15

منه : $1,14 < \alpha < 1,15$

5 ـ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	0	-	

الجزء II

1 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x e^x + 1} = \frac{-1}{1} = -1$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0\end{array}\right\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

2 ـ من أجل كل $x \in IR$: $f'(x) = \frac{e^x(x e^x + 1) - (e^x + x e^x)(e^x - 1)}{(x e^x + 1)^2}$

$$= \frac{e^x[x\,e^x + 1 - (1+x)(e^x - 1)]}{(x\,e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x\,e^x + 1 - e^x + 1 - x\,e^x + x)}{(x\,e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(x\,e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x\,g(x)}{(x\,e^x+1)^2}$$ و هو المطلوب

3 ـ لدينا $f'(x) = \frac{e^x\,g(x)}{(x\,e^x+1)^2}$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ فقط لأن $e^x > 0$ و $(x\,e^x+1)^2 > 0$ كمايلي :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$f(\beta)$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4 ـ لدينا : $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha\,e^\alpha + 1}$ ..... (1) حيث $g(\alpha) = 0$

لكن : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0$

$\Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$

بالتعويض في المساواة (1) نحصل على : $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2) - 1}{\alpha(\alpha+2)+1}$

أي : $f(\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha^2 + 2\,\alpha + 1}$ أي $f(\alpha) = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}$ أي $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

منه الحصر التالي : $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$ إذن : $2{,}14 < \alpha + 1 < 2{,}15$

منه : $\frac{1}{2{,}15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2{,}14}$ أي $0{,}465 < f(\alpha) < 0{,}467$

5 ـ
$$\begin{cases} f(0) = \frac{1-1}{0+1} = 0 \\ f'(0) = \frac{0+2-1}{1} = 1 \end{cases}$$

منه : معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y = 1(x-0)+0$ أي : $y = x$

6 ـ ليكن $x \in IR$:

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{x\,e^x + 1} - x$$

$$= \frac{e^x - 1 - x^2\,e^x - x}{x\,e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{x\,e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x(1 + x)(1 - x) - (1 + x)}{x\,e^x + 1}$$

$$= \frac{(1 + x)[e^x(1 - x) - 1]}{x\,e^x + 1}$$

$$= \frac{(1+x)(e^x - x\,e^x - 1)}{x\,e^x + 1}$$

$$= \frac{(1+x)\,u(x)}{x\,e^x + 1}$$ و هو المطلوب

7 ـ تغيرات الدالة u : u معرفة على IR

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x\,e^x - 1 = -1$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0\end{array}\right\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x\left(1 - x - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

u قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$\mathbf{u'(x) = e^x - e^x - x\,e^x = -x\,e^x}$$

منه إشارة $u'(x)$ هي إشارة $(-x)$ فقط لأن $e^x > 0$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة u كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	
$u(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

$u(0) = 1 - 0 - 1 = 0$

حسب جدول تغيرات الدالة u نستنتج إشارة $u(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		-	0	-	

8 ـ الوضعية النسبية لـ (T) و المنحنى (C)

لدينا : $f(x) - x = \frac{(1+x)\,u(x)}{x\,e^x + 1}$

إذن : إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $(1+x)\,u(x)$ لأن حسب السؤال (1) من الجزء I فإن $x\,e^x + 1 > 0$ كمايلي :

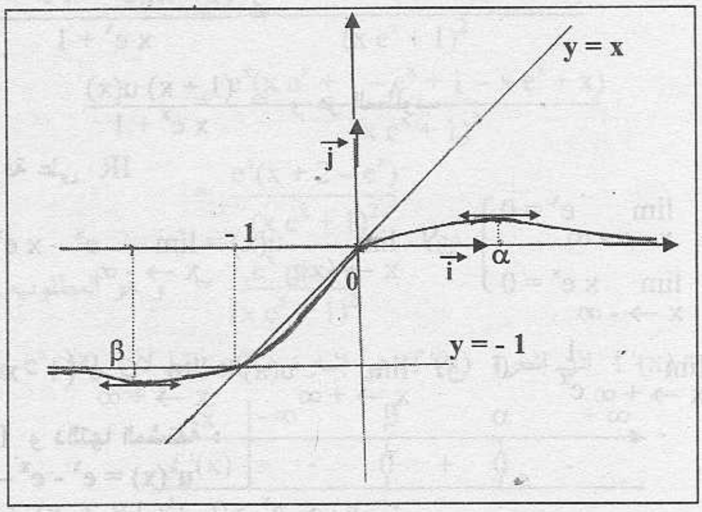
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$1+x$		-	0	+		+	
$u(x)$		-		-	0	-	
$f(x)-x$		+	0	-	0	-	

نتيجة : لما $x \in]-\infty\,;-1[$: المنحنى (C) فوق المماس (T)

لما $x \in \{-1\,;0\}$: المنحنى (C) يقطع المماس (T)

لما $x \in]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$: المنحنى (C) تحت المماس (T)

9 ـ الإنشاء :



التمرين ـ 15

الجزء I

f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-1/x} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C)

2 ـ من أجل $x > 0$ أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟

3 ـ بين أن من أجل كل $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1 - x}{x^4} e^{-1/x}$

4 ـ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

الجزء II

لتكن g الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = f(x) - x f'(x)$

1 ـ بين أن المعادلتين $g(x) = 0$ و $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ متكافئتان على المجال $]0 ; +\infty[$

2 ـ بين أن المعادلة $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ تقبل حلا واحدا α على المجال $]0 ; +\infty[$

3 ـ بين أن $f'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

نرمز بـ (T_α) إلى مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة α

4 ـ بين أن معادلة المماس (T_α) هي : $y = x f'(\alpha)$

5 ـ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

الحـل ـ 15

ـ 1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-1/x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1/x}$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1$

$= \lim\limits_{y \to 0} e^y = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{y \to 0} y$

إذن : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

ـ 2 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3} e^{-1/x}$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 + x = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x^3 e^{1/x}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(1/x)^3}{e^{1/x}}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = \lim_{y \to +\infty} y \quad : \text{إذن } y = 1/x \text{ نضع} \quad = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^3}{e^y}$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^3} = +\infty \quad \text{لأن} \quad = 0$$

إذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين و عددها المشتق يساوي 0

منه : المنحنى (C) يقبل نصف مماس على اليمين عند النقطة ذات الفاصلة 0

و معادلته $y = f(0)$ أي $y = 0$ (محور الفواصل) .

3 ـ

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2+x+1)}{x^4} e^{-1/x} - \left(\frac{-1}{x^2} e^{-1/x}\right) \frac{x^2+x+1}{x^2}$$

$$= \frac{e^{-1/x}}{x^4}(2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1)$$

$$= e^{-1/x}\left(\frac{1-x}{x^4}\right) \text{ و هو المطلوب}$$

4 ـ لدينا $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-1/x}$ إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1 - x$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$	‖	$+$	0	$-$	

منه جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3/e$	$\searrow$	1

$$f(1) = \frac{1+1+1}{1} e^{-1} = 3/e$$

الجزء II

1 ـ

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-1/x} - x\left(\frac{1-x}{x^4}\right) e^{-1/x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-1/x} - \frac{(1-x)}{x^3} e^{-1/x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1/x}}{x^2}\left(x^2 + x + 1 - \frac{1-x}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1/x}}{x^2}\left(\frac{x^3 + x^2 + x - 1 + x}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x^3 + x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \text{لأن} \quad \frac{e^{-1/x}}{x^3} \neq 0 \quad \text{و هو المطلوب}$$

2 ـ لندرس تغيرات الدالة u المعرفة على IR بـ $u(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$
$$u'(x) = 3x^2 + 2x + 2$$

إشارة $u'(x)$: $\Delta = 4 - 24 < 0$

إذن : من أجل كل x من IR : $u'(x) > 0$

منه **جدول تغيرات الدالة** u **كما يلي :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة u نلاحظ أن u متزايدة تماما على IR و تأخذ قيم سالبة ثم قيم موجبة إذن تنعدم مرة واحدة من أجل α

لدينا : $\begin{cases} u(0) = -1 \\ u(0,5) = 0,125 + 0,25 + 1 - 1 = 0,375 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} u(0) \times u(0,5) < 0 \\ u \text{ مستمرة على } [0 ; 0,5] \end{cases}$

منه : يوجد α من المجال $]0 ; 0,5[$ حيث $u(\alpha) = 0$ و هو المطلوب لأن $]0 ; 0,5[\subset]0 ; +\infty[$

3 ــ لدينا : (1) .... $f'(\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha^4} e^{-1/\alpha}$

لكن : $u(\alpha) = 0$ أي $\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$

أي : $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \alpha - 1 = 0$

منه : $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1 - \alpha$

نعوض $(1-\alpha)$ بـ $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$ في المساواة (1) فنحصل على : $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha}{\alpha^4} e^{-1/\alpha}$

أي $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^3} e^{-1/\alpha}$

أي $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} \left(\dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} e^{-1/\alpha} \right)$

أي : $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} f(\alpha)$ و هوالمطلوب

4 ــ معادلة المماس (T_α) تكتب من الشكل : $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

أي : $y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$

أي : $y = x f'(\alpha) + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$

أي : $y = x f'(\alpha)$ لأن $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$ حيث α هو حل للمعادلة $f(x) - x f'(x) = 0$ المكافئة للمعادلة $u(x) = 0$

ملاحظة : يمكن أيضا استعمال نتيجة السؤال السابق كمايلي :

لدينا $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} f(\alpha)$

منه $\alpha f'(\alpha) = f(\alpha)$

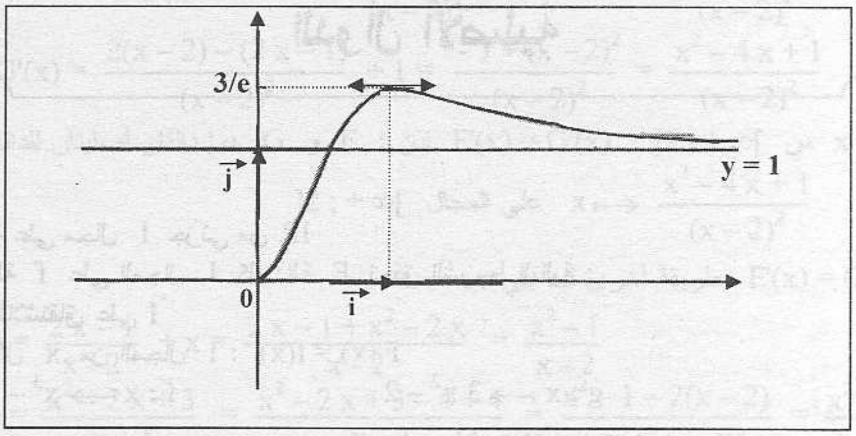
أي $\alpha f'(\alpha) - f(\alpha) = 0$

أي : $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$

5 ــ لمناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حسب قيم m نبحث عن عدد نقط تقاطع المستقيم الأفقي ذو المعادلة $y = m$ حيث $m \in IR$ مع منحنى الدالة f

إذن : نرسم أولا المنحنى (C) كما يلي :

حذار ! نبحث على حلول المعادلة $f(x) = m$ على المجال $[0 ; +\infty[$ فقط !



المناقشة :

لما $m \in]-\infty ; 0[$: المعادلة لا تقبل حلول .

لما $m = 0$: المعادلة تقبل حلا معدوما .

لما $m \in]0 ; 1]$: المعادلة تقبل حلا موجبا .

لما $m \in]1 ; 3/e[$: المعادلة تقبل حلين مختلفين موجبين .

لما $m = 3/e$: المعادلة تقبل حلا واحدا يساوي 1

لما $m \in]3/e ; +\infty[$: المعادلة لا تقبل حلولا .